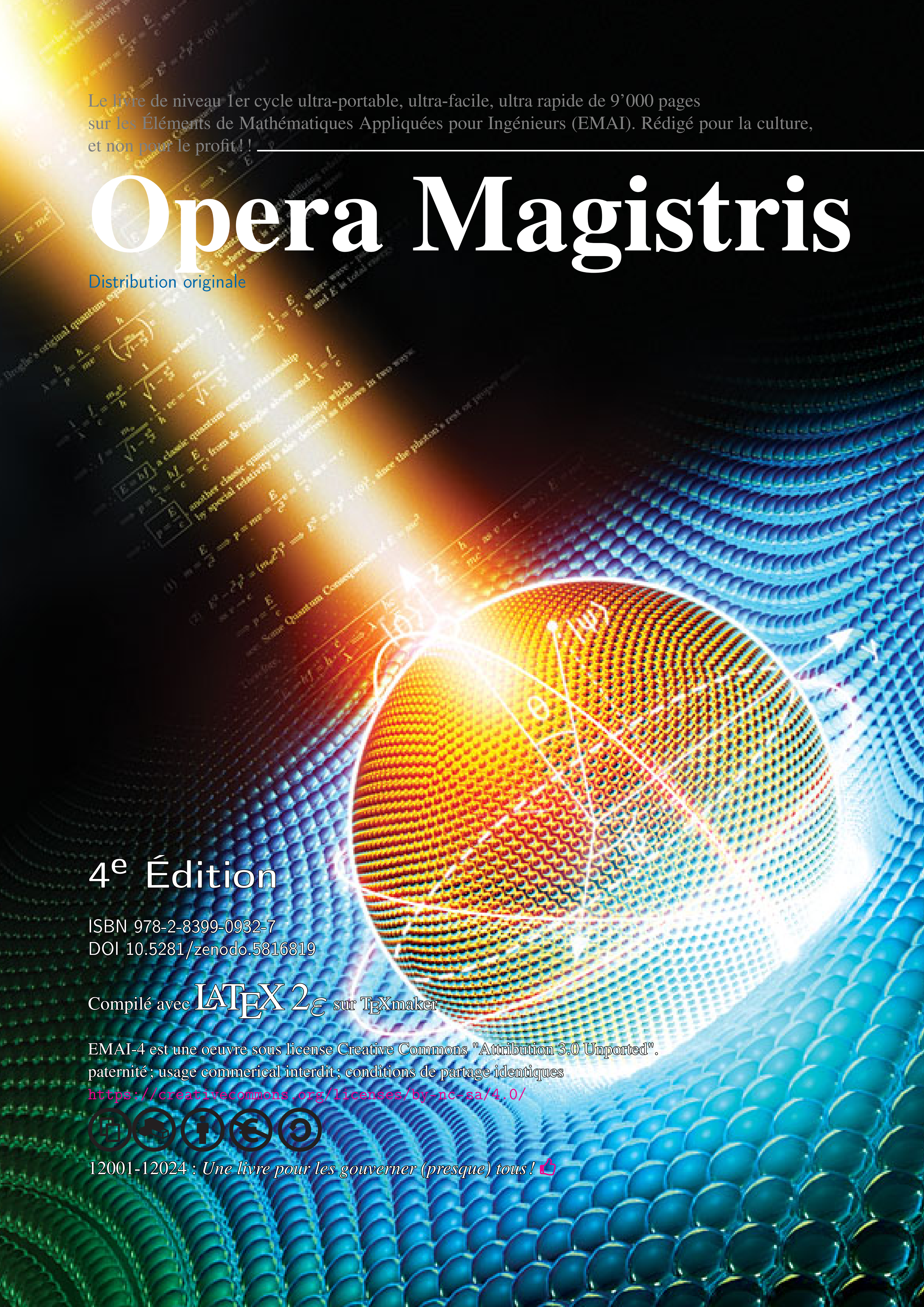


Le livre de niveau 1er cycle ultra-portable, ultra-facile, ultra rapide de 9'000 pages sur les Éléments de Mathématiques Appliquées pour Ingénieurs (EMAI). Rédigé pour la culture, et non pour le profit ! !

Opera Magistris

Distribution originale

4e Édition

ISBN 978-2-8399-0932-7
DOI 10.5281/zenodo.5816819

Compilé avec LaTeX 2ε sur TeXmaker

EMAI-4 est une oeuvre sous license Creative Commons "Attribution 3.0 Unported".
paternité ; usage commerical interdit ; conditions de partage identiques
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

12001-12024 : *Une livre pour les gouverner (presque) tous !*

En cours de traduction de l’anglais

La Science nous révèle l'origine de l'Univers et ses méchanismes. Elle nous montre la condition de l'humain (et autres espèces du monde animal duquel il fait partie), pourquoi il a autant de défauts et limites cognitifs et biologiques (génétiques), comment sa condition peu être améliorée (ou à l'inverse !) et elle nous montre aussi le sort de ceux qui se perdent dans l'ignorance et dans les croyances de ceux qui se basent sur les faits et la complexité réelle multifactorielle de notre environnement. La Science n'est pas dogmatique, elle s'auto-corrige et se remet en question continuellement, elle s'avoue imparfaite par définition, cherche à se mettre en défaut et établit qu'il n'y a vraisemblablement pas de "vérités absolues" et que les systèmes complexes sont rarement catégorisables de manière dichotomique. Ses préceptes sont contraignants, ses récits sont vérifiables par des sources indépendantes multiples et ses décisions toujours révocables car seuls les idiots sont pleins de certitudes et les sages pleins de doutes. Étudiez la Science reproductible et revue par les pairs publiée dans des revues non prédatrices pour acquérir la sagesse, suivez ses évidences pour accepter la fatalité des probabilités et des chaînes de causalité, et mettez en application ce qu'elle enseigne pour vivre une vie plus sereine, plus tolérante vis à vis des différences et imprévus et autres fatalités probabilistes. La Science contient la lumière qui vous guidera dans l'obscurité et vous réconfortera lors des tentatives de manipulations des multiples religions et pseudo-sciences et autres charlatans qui jouent sur la rhétorique et les sentiments pour vous vendre des biens, des services ou vous demander des dons et qui profitent de vos faiblesses intellectuelles. La Science est le guide du voyageur universel, le bâton du pélerin, la boussole du marin, l'arme du rationaliste et la charte du sage. Par elle, la vie et ses phénomènes imprévisibles, parfois douloureux, est relativisée et acceptée et l'obscurantisme retourne à l'obscurité.

La Science est le principal sujet de ce livre, notre bien est son principal dessein et la gloire de la Nature son but. Elle devrait remplir notre mémoire et guider nos pas à travers la seule, fragile et courte vie que nous avons. Étudiez-la attentivement, souvent, dans un esprit de compréhension et de curiosité sans fins de la complexité. Elle est une mine de richesses, un sujet d'échanges et une rivière de délices intellectuels. Elle vous est donnée pendant votre brève durée de vie et vous l'emporterez avec vous pour faire le moins de mal possible autour de vous jusqu'à votre dernier instant en espérant que vous transmettiez ses valeurs à votre descendance et entourage pour le meilleur vivre ensemble possible. Elle implique la plus haute responsabilité, récompensera les plus grands efforts et condamnera à l'ignorance, l'intolérance et à la bêtise tous ceux qui se moqueront d'elle.

En cours de traduction de l'anglais

Offert à : ______________________

Par : ______________________

Occasion : ______________________

Date : ______________________

DISTRIBUTION ORIGINALE

OPERA MAGISTRIS

4^E ÉDITION

Compendium sur les Éléments de Mathématiques Appliquées pour Ingénieurs

---

12025–08–27

La Méthode Scientifique pour un meilleur Monde et réinformer le peuple !

En cours de traduction de l' anglais

1 Historique des révisions

Le lecteur notera que les années sont basées sur le calendrier Holocène pour des raisons scientifiques évidentes.

Version	Date	Rédacteur(s)	Déscription
3.10	12018-01-20	VI, LH	Nouveaux sujets ajoutés et erreurs de traductions corrigées (voir le journal des changements)
3.9	12017-11-13	VI, LH	Quelques mises à jour mineures pour la version gratuite du livre (voir le journal des changements)
3.8	12017-08-01	VI, AT, LH	Quelques mises à jour majeures et critiques et corrections diverses (voir le journal des changements)
2.0	12005-03-10	VI	2e Édition francophone publiée sur Internet en tant que PDF (2, 001 pages)
2.1	12002-05-01	VI	1ère Édition francophone publiée sur Internet en tant que pages HTML seulement.

En cours de traduction de l'anglais

> *S'il y a un livre que tu rêves de lire, mais qui n'a pas encore été écrit, alors c'est à toi de l'écrire.*

quote 1.0:iii.#1

Toni Morrison

! Warning

Il est interdit de vendre ce livre ! Il est totalement gratuit et doit rester gratuit !

En cours de traduction de l’ anglais

Contenu

1 Historique des révisions iii
2 Avertissements 2
3 Remerciements 29
4 Introduction 34
5 Arithmétique 124
6 Algèbre 1327
7 Analyse 2142
8 Géométrie 2482
9 Mécanique 3035
10 Éléctromagnétisme 3036
11 Atomistique 3037
12 Cosmologie 3038
13 Chimie 3039
14 Informatique Théorique 3040
15 Sciences Sociales 3041

En cours de traduction de l' anglais

16 Ingénierie 3042

17 Épilogue 3043

18 Biographies 3045

19 Chronologie 3146

20 Humour 3189

21 Liens 3281

22 Citations 3294

23 Journal des changements 3309

24 Nomenclature 3330

Liste des Figures 3337

Liste des Tables 3355

Liste des Algorithmes 3359

Bibliographie 3361

Index 3389

En cours de traduction de l' anglais

Table des matières

1 Historique des révisions iii

2 Avertissements 2

2.1 Impressum . . . 4
2.1.1 Utilisation du contenu . . . 4
2.1.2 Comment utiliser ce livre . . . 5
2.1.2.1 Guide des styles . . . 6
2.1.2.2 Crédits . . . 7
2.1.2.3 Vidéos et Animations . . . 7
2.1.2.4 Annexes . . . 9
2.1.3 Protection des données . . . 11
2.1.4 Utilisation des données . . . 11
2.1.5 Transmission des données . . . 11
2.1.6 Accord . . . 11
2.1.7 Errata . . . 12
2.2 Licence . . . 13
2.2.1 Préambule . . . 13
2.2.2 Applications et Définitions . . . 14
2.2.3 Copie Verbatim . . . 15
2.2.4 Copie en Quantité . . . 15
2.2.5 Modifications . . . 16
2.2.6 Combinaison de Documents . . . 18
2.2.7 Collections de Documents . . . 18
2.2.8 Agrégation avec des œuvres indépendantes . . . 18
2.2.9 Compilation du Document . . . 19
2.2.10 Traductions . . . 19
2.2.11 Résiliation . . . 19
2.2.12 Permissions et Copyrights . . . 19
2.2.13 Révisions futures de cette Licence . . . 20
2.3 Feuille de route . . . 21

3 Remerciements 29

4 Introduction 34

4.1 Avant-Propos . . . 35
4.1.1 Motivations et objectifs . . . 39

En cours de traduction de l'anglais

4.1.2 A qui est destiné ce livre . . . 45
4.1.3 Comment est structuré ce livre . . . 46
4.2 Méthodes . . . 47
4.2.1 Méthode de Descartes . . . 54
4.2.1.1 Études en aveugle . . . 55
4.2.2 Serment d'Archimède . . . 65
4.2.3 Règles de Publication Scientifique (RPS) . . . 68
4.2.4 Communication des Médias de Masse en Sciences . . . 76
4.2.4.1 Réseaux sociaux . . . 78
4.2.4.2 Opinions d'Experts . . . 84
4.3 Vocabulaire . . . 87
4.3.1 Sur les "Sciences" . . . 88
4.3.2 Terminologie . . . 96
4.4 Science et Foi . . . 100
4.4.1 Kit de Détection de Balivernes . . . 106
4.5 L'effet retour de flamme en Sciences . . . 112
4.6 La Science est-elle dogmatique ? . . . 118

5 Arithmétique 124

5.1 Théorie de la Démonstration . . . 130
5.1.1 La Crise des Fondements . . . 134
5.1.2 Paradoxes . . . 138
5.1.2.1 Raisonnement Hypothético-Déductif . . . 141
5.1.3 Calcul propositionnel . . . 142
5.1.3.1 Propositions (prémisses) . . . 144
5.1.3.2 Connecteurs . . . 146
5.1.3.3 Procédures de décision . . . 156
5.1.3.3.1 Procédures de décisions non axiomatisées . . . 156
5.1.3.3.2 Procédures de décisions axiomatisées . . . 157
5.1.3.4 Quantificateurs . . . 161
5.1.4 Calcul des Prédicats . . . 164
5.1.4.1 Grammaire . . . 165
5.1.4.2 Langages . . . 166
5.1.4.2.1 Symboles . . . 166
5.1.4.2.2 Termes . . . 167
5.1.4.2.3 Formules . . . 170
5.1.5 Démonstrations (preuves) . . . 173
5.1.5.1 Règles de démonstration . . . 175
5.1.6 Lois de la pensée . . . 186
5.1.6.1 Quelques erreurs logiques célèbres . . . 196
5.1.6.2 La logique est-elle une science ? . . . 201
5.2 Nombres . . . 207
5.2.1 Bases Numériques . . . 210
5.2.2 Types de Nombres . . . 213
5.2.2.1 Nombres Entiers Naturels . . . 213
5.2.2.1.1 Axiomes de Peano . . . 215

En cours de traduction de l'anglais

5.2.2.1.2 Nombres Pairs, Impairs et Parfaits . . . 217
5.2.2.1.3 Nombres Premiers . . . 218
5.2.2.2 Nombres Entiers Relatifs . . . 220
5.2.2.3 Nombres Rationnels . . . 222
5.2.2.4 Nombres Irrationnels . . . 227
5.2.2.5 Nombres Réels . . . 229
5.2.2.5.1 Pourcentages . . . 233
5.2.2.6 Nombres Transfinis . . . 237
5.2.2.7 Nombres Complexes . . . 241
5.2.2.7.1 Interprétation géométrique des nombres complexes . . . 247
5.2.2.7.1.1 Vecteurs de Fresnel (phaseurs) . . . 253
5.2.2.7.2 Transformations dans le plan . . . 255
5.2.2.8 Nombres Quaternions . . . 259
5.2.2.8.1 Interprétation matricielles des quaternions . . . 267
5.2.2.8.2 Rotations avec les quaternions . . . 268
5.2.2.9 Nombres Algébriques et Transcendants . . . 275
5.2.2.10 Nombres Univers (nombres normaux) . . . 278
5.2.2.11 Nombres Abstraits (variables) . . . 279
5.2.2.11.1 Domaine de définition de variables . . . 280
5.3 Opérateurs Arithmétiques . . . 284
5.3.1 Relations binaires . . . 285
5.3.1.1 Égalités . . . 286
5.3.1.2 Comparateurs . . . 287
5.3.2 Lois Fondamentales de l'Arithmétique . . . 296
5.3.2.1 Addition . . . 296
5.3.2.2 Soustraction . . . 303
5.3.2.3 Multiplication . . . 307
5.3.2.4 Division . . . 313
5.3.2.5 Racine n-ème . . . 318
5.3.3 Polynômes Arithmétiques . . . 322
5.3.4 Valeur absolue . . . 323
5.3.5 Règles de Calcul (priorité des opérateurs) . . . 326
5.4 Théorie des Nombres . . . 333
5.4.1 Principe du bon ordre . . . 333
5.4.2 Principe d'induction . . . 334
5.4.3 Divisibilité . . . 336
5.4.3.1 Division Euclidienne . . . 338
5.4.3.1.1 Plus grand commun diviseur . . . 340
5.4.3.2 Algorithme d'Euclide . . . 344
5.4.3.3 Plus petit commun multiple (PPCM) . . . 348
5.4.3.4 Théorème fondamental de l'arithmétique . . . 352
5.4.3.5 Congruences (arithmétique modulaire) . . . 353
5.4.3.5.1 Classes de congruences . . . 359
5.4.3.5.2 Système complet de résidus . . . 362
5.4.3.5.3 Théorème des restes chinois . . . 363

En cours de traduction de l'anglais

5.4.3.6 Fractions continues 367
5.5 Théorie des Ensembles 376
5.5.1 Axiomatique de Zermelo-Fraenkel 380
5.5.1.1 Cardinaux 386
5.5.1.2 Produit cartésien 389
5.5.1.3 Intervalles (bornes) 390
5.5.2 Opérations ensemblistes 392
5.5.2.1 Inclusion 392
5.5.2.2 Intersection 393
5.5.2.3 Union 394
5.5.2.4 Différence 396
5.5.2.5 Différence symétrique 396
5.5.2.6 Produit 397
5.5.2.7 Complémentarité 397
5.5.3 Fonctions et Applications 401
5.5.3.1 Théorème de Cantor-Bernstein 407
5.5.4 Structures 413
5.5.4.1 Magma 415
5.5.4.2 Monoïde 416
5.5.4.3 Groupes 418
5.5.4.4 Anneaux 423
5.5.4.4.1 Sous-anneau 426
5.5.4.5 Corps 427
5.5.4.6 Espaces vectoriels 429
5.5.4.7 C-algèbre A 431
5.5.4.8 Résumé 433
5.5.5 Morphismes 437
5.5.5.1 Idéal 442
5.6 Probabilités 449
5.6.1 Univers des événements 451
5.6.1.1 Paradoxe du singe savant (loi de Borel) 454
5.6.1.1.1 Second lemme de Borel-Cantelli 455
5.6.1.2 Est-ce que les probabilités réfutent les structures complexes ? 458
5.6.2 Axiomatique de Kolmogorov 475
5.6.3 Probabilités conditionnelles 484
5.6.3.1 Espérance et Variance conditionnelle 495
5.6.3.2 Réseaux bayésiens 501
5.6.4 Martingales 513
5.6.5 Analyse Combinatoire 515
5.6.5.1 Arrangements simples avec répétitions 516
5.6.5.2 Permutations simples sans répétitions 518
5.6.5.3 Permutations simples avec répétitions 519
5.6.5.4 Arrangements simples sans répétitions 520
5.6.5.5 Combinaisons simples sans répétitions 521
5.6.5.6 Combinaisons simples avec répétitions 523

En cours de traduction de l'anglais

5.6.6 Chaînes de Markov . . . 530
5.7 Statistiques . . . 535
5.7.1 Échantillons . . . 537
5.7.2 Moyennes . . . 538
5.7.2.1 Lissage de Laplace . . . 561
5.7.2.2 Propriétés des moyennes . . . 562
5.7.2.2.1 Inégalité de Jensen . . . 568
5.7.3 Types de Variables . . . 571
5.7.3.1 Variables discrètes et Moments . . . 573
5.7.3.1.1 Espérance et Variance de variables aléatoires discrètes . . . 575
5.7.3.1.1.1 Semivariance . . . 588
5.7.3.1.2 Covariance Discrète . . . 589
5.7.3.1.2.1 Matrice de quasi-corrélation . . . 597
5.7.3.1.2.2 Quartet d'Anscombe . . . 600
5.7.3.1.3 Espérance et variance de la moyenne (erreur standard) . . . 602
5.7.3.1.4 Coefficient of Correlation . . . 604
5.7.3.1.4.1 Interprétation géométrique . . . 613
5.7.3.1.4.2 Corrélation partielle . . . 613
5.7.3.1.4.3 Coefficient de corrélation intraclasse . . . 616
5.7.3.2 Variables continues et Moments . . . 621
5.7.3.2.1 Coefficients d'asymétrie et d'aplattissement . . . 624
5.7.4 Postulat fondamental de la statistique . . . 632
5.7.5 Indice de diversité . . . 632
5.7.6 Fonctions de distributions (lois de probabilités) . . . 636
5.7.6.1 Distribution Uniforme Discrète . . . 638
5.7.6.2 Distribution de Bernoulli . . . 641
5.7.6.3 Distribution Géométrique . . . 642
5.7.6.4 Distribution Binomiale . . . 646
5.7.6.5 Distribution Négative Binomiale . . . 655
5.7.6.6 Distribution Hypergéométrique . . . 660
5.7.6.7 Distribution Multinomiale . . . 667
5.7.6.8 Distribution de Poisson . . . 674
5.7.6.9 Distribution de Gauss-Laplace/Loi Normale . . . 680
5.7.6.9.1 Somme de deux variables aléatoires normales . . . 697
5.7.6.9.2 Produit de deux variables aléatoires normales . . . 699
5.7.6.9.3 Distribution normale bivariée . . . 701
5.7.6.9.4 Distribution Normale multivariée . . . 708
5.7.6.9.4.1 Distributions marginales et conditionnelles des distributions Normales multivariées . . . 711
5.7.6.9.5 Distribution Normale centrée réduite . . . 713
5.7.6.9.6 Droite de Henry . . . 714
5.7.6.9.7 Diagramme quantile-quantile (Q-Q plot) . . . 718
5.7.6.10 Distribution Log-Normale . . . 721
5.7.6.11 Distribution Uniforme Continue . . . 724
5.7.6.12 Distribution Triangulaire . . . 730
5.7.6.13 Distribution de Pareto . . . 733

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.14 Distribution exponentielle . . . 739
5.7.6.15 Distribution de Cauchy . . . 744
5.7.6.16 Distribution Bêta . . . 747
5.7.6.16.1 Fonction bêta integrale régularisée . . . 752
5.7.6.17 Distribution Gamma . . . 754
5.7.6.17.1 Distribution Gamma Généralisée . . . 760
5.7.6.18 Distribution du Khi-deux (Pearson) . . . 761
5.7.6.18.1 Loi du khi-deux non centrée . . . 767
5.7.6.19 Distribution de Student . . . 770
5.7.6.19.1 Distribution T de Student multivariée . . . 776
5.7.6.20 Distribution de Fisher . . . 777
5.7.6.21 Loi Normale repliée généralisée . . . 782
5.7.6.21.1 Distribution demi-Normale . . . 783
5.7.6.22 Distribution de Laplace . . . 787
5.7.6.23 Distribution de Benford . . . 790
5.7.6.24 Distribution ex-Gaussienne . . . 794
5.7.7 Estimateurs de Vraisemblance . . . 805
5.7.7.1 Estimateurs de la distribution Normale . . . 806
5.7.7.2 Estimateur de la distribution de Poisson . . . 812
5.7.7.3 Estimateur de la distribution Binomiale . . . 813
5.7.7.4 Estimateur de la distribution Géométrique . . . 814
5.7.7.5 Estimateurs de la distribution de Weibull . . . 815
5.7.7.6 Estimateurs de la distribution Gamma . . . 818
5.7.7.7 Estimateur de la loi de Pareto . . . 819
5.7.7.8 Estimateurs de données censurées . . . 819
5.7.7.9 Matrice d'information de Fisher . . . 822
5.7.8 Facteur de correction sur population finie . . . 830
5.7.9 Intervalles de Confiance (inférence) . . . 834
5.7.9.1 Inférence Fréquentiste . . . 834
5.7.9.1.1 I.C. sur la Moyenne avec Variance théorique connue . . . 837
5.7.9.1.2 I.C. sur la Variance avec Moyenne théorique connue . . . 842
5.7.9.1.3 I.C. sur la Variance avec Moyenne empirique connue . . . 847
5.7.9.1.4 I.C. sur la Moyenne avec Variance empirique connue . . . 849
5.7.9.1.5 I.C. sur la Moyenne Géométrique (avec Variance empirique connue ou non) . . . 852
5.7.9.1.6 Test Binomial exact . . . 854
5.7.9.1.7 I.C. pour une Proportion . . . 856
5.7.9.1.7.1 Transformation stabilisatrice de variance . . . 861
5.7.9.1.7.2 Test de l'égalité (différence) de deux Proportions . . . 863
5.7.9.1.8 Test des signes . . . 866
5.7.9.1.9 Test de la médiane de Mood . . . 868
5.7.9.1.10 Test de Poisson (1 échantillon) . . . 869
5.7.9.1.11 Test de Poisson (2 échantillons) . . . 872
5.7.9.1.12 Intervalles de Confiance/Tolérance/Prédiction/Crédibilité . . . 875
5.7.9.2 Inférence Bayésienne . . . 877
5.7.9.2.1 Antérieure Bêta conjuguée pour vraisemblance Binomiale (distribution bêta-binomial) . . . 881

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.2.1.1 Antérieure Non-informative . . . 885
5.7.9.2.2 Antérieure Normale pour vraisemblance Normale . . . 887
5.7.9.2.3 Antérieure Binomiale pour vraisemblance Binomiale . . . 890
5.7.9.2.4 Intervalles de Crédibilité . . . 892
5.7.9.2.5 Facteur de Bayes (FB) . . . 895
5.7.10 Loi Faible des Grands Nombres . . . 901
5.7.11 Fonction Caractéristique . . . 906
5.7.11.1 Série génératrice de moments et cumulants . . . 911
5.7.12 Théorème Central Limite . . . 918
5.7.13 Tests d'hypothèses univariés et d'adéquations (NHST) . . . 924
5.7.13.1 Orientation du test d'hypothèse et p-valeurs . . . 928
5.7.13.2 Méthode de Fisher pour p-valeurs multiples . . . 943
5.7.13.2.1 Paradoxe de Simpson (sophisme) . . . 947
5.7.13.3 Puissance d'un test . . . 952
5.7.13.3.1 Évidence ("preuve") de la négative . . . 954
5.7.13.3.1.1 Double test-T unilatéral (DTU) . . . 957
5.7.13.3.2 Puissance du test Z à 1 échantillon . . . 962
5.7.13.3.3 Puissance du test P à 1 et 2 échantillons . . . 964
5.7.13.3.4 Calcul de puissance basé sur des simulations . . . 967
5.7.13.4 Tests A/B . . . 968
5.7.13.4.1 Test de Fieller (ratio des moyennes) . . . 968
5.7.13.4.2 Test A/B bayésien pour résultats binaires . . . 973
5.7.13.4.3 Test A/B bayésien pour données de comptage . . . 976
5.7.13.5 Analyse de la Variance (ANOVA) . . . 978
5.7.13.5.1 ANOVA à un facteur fixe . . . 981
5.7.13.5.1.1 Test de Welch . . . 997
5.7.13.5.1.2 Contrastes . . . 1000
5.7.13.5.2 ANOVA à deux facteurs fixes sans répétitions . . . 1004
5.7.13.5.3 ANOVA à deux facteurs fixes avec répétitions . . . 1022
5.7.13.5.4 ANOVA multifactorielle à mesures répétées . . . 1029
5.7.13.5.4.1 Interlude sur les PCR, PRB, PCRB, PBI, PBBI... . . . 1030
5.7.13.5.4.2 Interlude sur les ANOVA de Type I, Type II et Type III . . . 1037
5.7.13.5.5 ANOVA (imbriquée) Hiérarchique (HANOVA) . . . 1044
5.7.13.5.6 ANOVA avec blocs . . . 1051
5.7.13.5.7 ANOVA carré Latin sans répétitions . . . 1052
5.7.13.5.8 ANOVA carré Gréco-Latin . . . 1059
5.7.13.5.9 ANOVA Multivariée (MANOVA) . . . 1067
5.7.13.5.9.1 Test du T carré de Hotelling . . . 1073
5.7.13.6 Tests d'équivalence . . . 1080
5.7.13.7 Test C de Cochran . . . 1084
5.7.13.8 Taux d'erreur de groupe (p-valeurs ajustées) . . . 1087
5.7.13.8.1 Correction de Holm-Bonferroni . . . 1090
5.7.13.8.2 Correction de Holm–Šidák . . . 1091
5.7.13.9 Tests d'adéquation (tests de qualité d'ajustement) . . . 1092
5.7.13.9.1 Test de QdA du khi-carré de Pearson . . . 1092

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.9.2 Test de QdA G (G-test) . . . 1098
5.7.13.9.3 Test de QdA de Kolmogorov-Smirnov . . . 1100
5.7.13.9.4 Test de QdA de Ryan-Joiner . . . 1107
5.7.13.9.5 Test de QdA de Anderson-Darling . . . 1111
5.7.13.9.6 Test de QdA de Cramér–von Mises . . . 1121
5.7.13.10 Estimation par densité de noyau . . . 1124
5.7.13.11 Tests de rapports des vraisemblances . . . 1131
5.7.14 Robustesse et Statistiques non paramétriques . . . 1134
5.7.14.1 Statistiques de Rangs . . . 1137
5.7.14.1.1 L-Statistiques . . . 1137
5.7.14.1.2 Lois de distributions de rangs . . . 1138
5.7.14.1.3 Intervalles de confiance pour les centiles libre de toute distribution . . . 1139
5.7.14.1.4 Test de la somme des rangs de Wilcoxon . . . 1141
5.7.14.1.5 Test de la somme des rangs de Mann-Whitney . . . 1151
5.7.14.1.5.1 Traitement des rangs égaux dans les tests basés sur les rangs . . . 1157
5.7.14.1.6 Test de la somme des rangs signés de Wilcoxon à un échantillon . . . 1160
5.7.14.1.7 Test de la somme des rangs signés de Wilcoxon pour deux échantillons appariés . . . 1164
5.7.14.1.8 Test de Kruskal-Wallis . . . 1167
5.7.14.1.9 Test de Friedman . . . 1171
5.7.14.1.10 Coefficient de corrélation des rangs de Spearman . . . 1175
5.7.14.1.11 Coefficient de corrélation Tau de Kendall . . . 1178
5.7.14.2 Statistiques de rangs . . . 1184
5.7.14.2.1 Test (de l'étendue) de Tukey . . . 1188
5.7.14.3 Théorie des Valeurs Extrêmes . . . 1192
5.7.15 Statistiques Multivariées . . . 1193
5.7.15.1 Analyse en Composantes Principales . . . 1194
5.7.15.1.1 DVS et ACP . . . 1211
5.7.15.2 Analyse Factorielle des Correspondances du Khi-deux (AFCK2) . . . 1214
5.7.15.3 Test d'indépendance du khi-deux . . . 1219
5.7.15.3.1 Équivalence du test Z et test χ^2 pour les poportions . . . 1223
5.7.15.3.2 V de Cramér . . . 1227
5.7.15.4 Coefficient phi de Pearson . . . 1231
5.7.15.5 Test exact de Fisher . . . 1235
5.7.15.6 Kappa d'agrément de Cohen . . . 1241
5.7.15.7 Test de McNemar . . . 1244
5.7.15.7.1 Dérivation du test de Cochran-Armitage de tendance pour les tables génotypes 2×3 . . . 1248
5.7.16 Statistiques de survie . . . 1251
5.7.16.1 Taux de survie de Kaplan-Meier . . . 1253
5.7.16.2 Tests de Cochran–Mantel–Haenszel . . . 1263
5.7.16.3 Modèle de hasard proportionnel de Cox . . . 1271
5.7.16.3.1 Modèle de Cox stratifié . . . 1287
5.7.17 Propagation des Erreurs (analyse d'incertitude expérimentale) . . . 1289
5.7.17.1 Incertitudes absolues et relatives (calcul direct du biais) . . . 1290
5.7.17.2 Erreurs statistiques . . . 1291
5.7.17.3 Répétabilité . . . 1294

En cours de traduction de l'anglais

5.7.17.4 Propagation des erreurs (approximation linéarisée) 1295
5.7.17.5 Propagation des erreurs (approche statistique) 1298
5.7.17.6 Chiffres significatifs 1300
5.7.18 Statistiques spatiales 1302
5.7.18.1 Modèle de distance spatiale 2D de Poisson 1302
5.7.19 Sondages 1306
5.7.19.1 Plans d'enquêtes 1310
5.7.19.1.1 Plan d'échantillonnage aléatoire simple sans remise et probabilités égales (EAPER) 1317
5.7.19.2 Erreur d'échantillonnage et erreur non due à l'échantillonnag pour les enquêtes 1318
5.7.20 Un monde sans statistiques 1322
5.7.20.1 Sophismes de données 1325
6 Algèbre 1327
6.1 Calcul Algébrique 1333
6.1.1 Équations et inéquations 1334
6.1.1.1 Équations 1335
6.1.1.2 Inéquations 1339
6.1.2 Identités remarquables 1345
6.1.3 Polynômes 1351
6.1.3.1 Relations générales entre racines et coefficients 1355
6.1.3.2 Multiplication de polynômes 1356
6.1.3.3 Division Euclidienne de Polynômes 1356
6.1.3.4 Théorème de factorisation des polynômes 1358
6.1.3.5 Équation diophantienne 1359
6.1.3.6 Polynômes et équations univarié du premier ordre 1360
6.1.3.6.1 Résolution par référence circulaire 1361
6.1.3.7 Polynômes et équations univarisé d'ordre deux 1363
6.1.3.7.1 Équations Irrationnelles 1367
6.1.3.7.2 Nombre d'or 1369
6.1.3.8 Polynômes et équations univarisé d'ordre trois 1370
6.1.3.9 Polynômes et équations univarisé d'ordre quatre 1374
6.1.3.10 Polynômes trigonométriques 1377
6.1.3.11 Pôlynomes Cyclotomiques 1378
6.1.3.12 Polynômes de Legendre 1381
6.1.3.13 Polynômes de Laguerre 1385
6.1.3.13.1 Polynômes de Laguerre associés 1391
6.1.3.13.2 Fonctions de Laguerre 1395
6.2 Algèbre Ensembliste 1398
6.2.1 Algèbre et Géométrie Corporelle 1398
6.2.1.1 Groupes Cycliques 1399
6.2.1.2 Groupes de Transformations 1402
6.2.1.3 Groupes de Symétries 1411
6.2.1.3.1 Orbite et Stabilisateur 1415
6.2.1.4 Groupes de Permutations 1416
6.2.2 Théorie de Galois 1426

En cours de traduction de l'anglais

6.2.2.1 Polynômes élémentaires symétriques et invariants . . . 1427
6.2.2.2 Formules générales de Viète . . . 1431
6.3 Calcul Différentiel et Intégral . . . 1432
6.3.1 Calcul Différentiel . . . 1432
6.3.1.1 Différentielles . . . 1447
6.3.1.2 Dérivée usuelles . . . 1457
6.3.1.3 Dérivation implicite . . . 1473
6.3.1.4 Régularité . . . 1479
6.3.2 Calcul Intégral . . . 1480
6.3.2.1 Intégrale Définie . . . 1480
6.3.2.2 Intégrale Indéfinie . . . 1490
6.3.2.3 Intégrale Double . . . 1498
6.3.2.3.1 Théorème de Fubini . . . 1500
6.3.2.4 Intégration par changement de variables . . . 1501
6.3.2.4.1 Jacobien . . . 1503
6.3.2.5 Intégration par parties . . . 1511
6.3.2.6 Primitives usuelles . . . 1513
6.3.2.7 Règle d'intégration de Leibniz . . . 1539
6.3.2.8 Représentation intégrale de la fonction de Bessel du premier type . . . 1543
6.3.2.9 Fonction de Dirac . . . 1547
6.3.2.9.1 Fonction de Heaviside . . . 1551
6.3.2.10 Fonction Gamma d'Euler . . . 1552
6.3.2.10.0.1 Fonction Gamma régularisée incomplète . . . 1556
6.3.2.10.1 Constante d'Euler-Mascheroni . . . 1559
6.3.2.11 Intégrales Curvilignes . . . 1561
6.3.2.11.1 Intégrale curviligne d'un champ scalaire . . . 1561
6.3.2.11.2 Intégrale curviligne d'un champ vectoriel . . . 1562
6.3.2.12 Intégrales de Surfaces . . . 1566
6.3.2.13 Intégrales impliquant des équations paramétriques . . . 1570
6.3.2.14 Intégrales impropres . . . 1573
6.3.2.15 Intégrales elliptiques . . . 1577
6.3.2.15.1 Intégrales elliptiques incomplètes . . . 1578
6.3.2.15.2 Intégrales elliptiques complètes . . . 1579
6.3.3 Équations Différentielles . . . 1581
6.3.3.1 Équations différentielles du premier ordre . . . 1583
6.3.3.2 Équations différentielles linéaires . . . 1583
6.3.3.3 Méthodes de résolution d'équations différentielles . . . 1585
6.3.3.3.1 Méthode du polynôme caractéristique . . . 1586
6.3.3.3.1.1 Résolution de l'E.H. de l'E.D.L. à coefficients constants d'ordre 1 . . . 1587
6.3.3.3.1.2 Résolution de l'E.H. de l'E.D.L. d'ordre 1 avec coefficients non constants . . . 1587
6.3.3.3.1.3 Résolution de l'E.H. de E.D.L. du second ordre à coefficients constants . . . 1588
6.3.3.3.2 Méthode du facteur intégrant (d'Euler) . . . 1593
6.3.3.3.3 Méthode de séparation des variables . . . 1596
6.3.3.3.4 Méthode de variation de la constante . . . 1598
6.3.3.4 Classification des équations aux dérivées partielles . . . 1600

En cours de traduction de l'anglais

6.3.3.5 Systèmes d'équation différentielles . . . 1605
6.3.3.5.1 Méthode d'exponentation des matrices . . . 1605
6.3.3.5.2 Espace des phases . . . 1610
6.3.3.5.2.1 Théorie de la stabilite . . . 1613
6.3.3.6 Systèmes dynamiques non linéaires . . . 1622
6.3.3.7 Méthode régulière des perturbations . . . 1622
6.3.3.7.1 Théorie perturbative des équations algébriques . . . 1623
6.3.3.7.2 Théorie perturbative des équations différentielles . . . 1625
6.4 Suites et Séries . . . 1629
6.4.1 Suites . . . 1629
6.4.1.1 Suites arithmétiques . . . 1631
6.4.1.2 Suites harmoniques . . . 1633
6.4.1.3 Suites géométriques . . . 1634
6.4.1.4 Suite de Cauchy . . . 1635
6.4.1.5 Suite de Fibonacci . . . 1640
6.4.1.6 Suites logiques/Suites psychologiques . . . 1642
6.4.2 Séries . . . 1643
6.4.2.1 Séries de Gauss . . . 1645
6.4.2.1.1 Nombres et polynômes de Bernoulli . . . 1649
6.4.2.1.2 Formule d'Euler-Maclaurin . . . 1654
6.4.2.2 Séries Arithmétiques . . . 1658
6.4.2.3 Séries Géométriques . . . 1659
6.4.2.3.1 Fonction Zêta et identité d'Euler . . . 1662
6.4.2.4 Séries Téléscopiques . . . 1671
6.4.2.5 Séries de Grandi . . . 1672
6.4.2.6 Séries de Taylor et de Maclaurin . . . 1677
6.4.2.6.1 Développements usuels de Maclaurin . . . 1683
6.4.2.6.2 Séries de Taylor de fonctions bivariées (séries de Taylor multivariées)) . . . 1694
6.4.2.6.3 Forme quadratique . . . 1697
6.4.2.6.4 Reste de Lagrange . . . 1702
6.4.2.6.5 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 1704
6.4.2.6.6 Théorème d'inversion de Lagrange . . . 1705
6.4.2.7 Séries de Fourier (séries trigonométriques) . . . 1707
6.4.2.7.1 Séries de Fourier génératives d'art . . . 1729
6.4.2.7.2 Puissance d'un signal . . . 1737
6.4.2.7.3 Transformée de Fourier . . . 1738
6.4.2.8 Séries de Bessel . . . 1748
6.4.2.8.1 Fonction de Bessel d'ordre zéro . . . 1748
6.4.2.8.2 Fonction de Bessel d'ordre n . . . 1749
6.4.2.8.3 Équation différentielle de Bessel d'ordre n . . . 1754
6.4.3 Critères de convergences . . . 1755
6.4.3.1 Test de l'intégrale . . . 1756
6.4.3.2 Règle D'Alembert . . . 1757
6.4.3.3 Test des séries alternées . . . 1760
6.4.3.4 Théorème du point fixe . . . 1760

En cours de traduction de l'anglais

6.4.4 Fonctions génératrices 1763
6.4.4.1 Fonctions génératrices ordinaires (transformation d'une séquence en série) 1763
6.4.4.1.1 Composition de fonctions génératrices 1767
6.4.4.2 Fonctions génératrices multivariées 1769
6.4.4.3 Fonctions génératrices fonctionnelles 1770
6.5 Calcul Vectoriel 1773
6.5.1 Notion de Flèche 1774
6.5.2 Ensemble de Vecteurs 1776
6.5.2.1 Pseudo-Vecteurs 1778
6.5.2.2 Vecteur Normal 1780
6.5.2.3 Multiplication par un scalaire 1781
6.5.2.3.1 Règle de trois 1782
6.5.3 Espaces Vectoriels 1784
6.5.3.1 Combinaisons Linéaires 1785
6.5.3.2 Sous-espaces vectoriels 1786
6.5.3.3 Famille Génératrices 1786
6.5.3.4 Dépendances et Indépendances linéaires 1786
6.5.3.5 Base d'un espace vectoriel 1788
6.5.3.6 Angles Directeurs 1789
6.5.3.7 Dimensions d'un espace vectoriel 1790
6.5.3.8 Prolongement d'une famille libre 1791
6.5.3.9 Rang d'une famille finie 1792
6.5.3.10 Sommes directes 1792
6.5.3.11 Espaces affines 1793
6.5.4 Espaces Vectoriels Euclidiens 1796
6.5.4.1 Produit scalaire 1798
6.5.4.1.1 Inégalité de Cauchy–Schwarz 1803
6.5.4.1.2 Inégalités Triangulaires 1805
6.5.4.1.3 Produit Scalaire (Général) 1806
6.5.4.2 Produit Vectoriel 1808
6.5.4.3 Produite Mixte (triple produit) 1815
6.5.5 Espaces Vectoriels Fonctionnels 1817
6.5.6 Espaces Vectoriels Hermitiens 1819
6.5.6.1 Produit hermitien interne 1820
6.5.6.2 Inégalité hermitienne de Cauchy-Schwarz 1821
6.5.6.3 Types d'Espaces Vectoriels 1822
6.5.7 Systèmes de Coordonnées 1823
6.5.7.1 Système de coordonnées cartésiennes (rectangulaires) 1823
6.5.7.2 Système de coordonnées sphériques 1826
6.5.7.2.1 Distance orthodromique 1831
6.5.7.2.1.1 Distance de Haversine 1833
6.5.7.3 Système de coordonnées cylindriques 1837
6.5.7.4 Système de coordonnées polaires 1839
6.5.8 Opérateurs Différentiels 1842
6.5.8.1 Gradients d'un champ scalaire 1844

En cours de traduction de l'anglais

6.5.8.2 Gradients d'un champ de vecteurs . . . 1854
6.5.8.3 Divergences d'un champ de vecteurs . . . 1855
6.5.8.4 Rotationnels d'un champ de vecteurs . . . 1864
6.5.8.5 Laplaciens d'un champ scalaire (opérateur de Laplace) . . . 1876
6.5.8.6 Laplaciens d'un champ vectoriel . . . 1880
6.5.8.7 Identités remarquables . . . 1888
6.5.8.8 Résumé (des identités remarquables) . . . 1894
6.6 Algèbre Linéaire . . . 1898
6.6.1 Systèmes Linéaires . . . 1902
6.6.2 Transformations Linéaires . . . 1907
6.6.3 Matrices . . . 1909
6.6.3.1 Rang d'une matrice . . . 1911
6.6.3.2 Opération sur les Matrices . . . 1918
6.6.3.3 Type de Matrices . . . 1921
6.6.3.4 Déterminants . . . 1935
6.6.3.4.1 Dérivée d'un déterminant relativement à un paramètre . . . 1949
6.6.3.4.2 Dérivée du logarithme d'un déterminant . . . 1951
6.6.3.4.3 Règle de Cramer . . . 1952
6.6.3.4.4 Cofacteur d'un déterminant et matrice inverse . . . 1955
6.6.3.4.5 Déterminant de matrices bloc-diagonale ou bloc-triangulaire . . . 1960
6.6.3.4.6 Inverse et Déterminant d'une matrice symétrique partitionnée . . . 1963
6.6.4 Changements de bases (référentiels) . . . 1966
6.6.5 Valeurs et Vecteurs propres . . . 1969
6.6.5.1 Matrices de rotations et Valeurs propres . . . 1973
6.6.6 Théorème Spectral . . . 1976
6.6.7 Décompositions Matricielles . . . 1983
6.6.7.1 Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) . . . 1983
6.6.7.1.1 Vecteurs et valeurs singulières . . . 1985
6.6.7.1.2 Cas particulier de DVS pour les matrices symétriques . . . 1992
6.6.7.1.3 Décomposition orthogonale (décomposition spectrale par valeurs propres) . . . 1994
6.6.7.2 Décomposition LU . . . 1996
6.6.7.3 Décomposition de Cholesky . . . 1999
6.6.7.4 Décomposition QR . . . 2002
6.6.8 Identité matricielle de Woodbury et relation de Sherman-Morrison . . . 2007
6.7 Calcul Tensoriel . . . 2010
6.7.1 Tenseur . . . 2011
6.7.2 Notation Indicielle . . . 2014
6.7.2.1 Sommation sur plusieurs indices . . . 2015
6.7.2.2 Symbole de Kronecker . . . 2015
6.7.2.3 Symbole anti-symétrique (symbole de Levi-Civita) . . . 2016
6.7.3 Métrique et Signature . . . 2022
6.7.4 Déterminant de Gram . . . 2025
6.7.5 Composantes Contravariantes et Covariantes . . . 2030
6.7.6 Opérations dans les Bases . . . 2033
6.7.6.1 Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . 2033

En cours de traduction de l'anglais

6.7.6.2 Changements de Bases 2037
6.7.6.3 Bases Réciproques (Bases Duales) 2038
6.7.7 Tenseurs Euclidiens (tenseur cartésien) 2042
6.7.7.1 Tenseur Fondamental 2043
6.7.7.2 Produit Tensoriel de deux vecteurs et matrices 2044
6.7.7.3 Espaces Tensoriels 2048
6.7.7.4 Combinaisons linéaires de tenseurs 2052
6.7.7.5 Contraction des indices 2052
6.7.7.5.1 Élévation et abaissement des indices 2053
6.7.8 Tenseurs spéciaux 2057
6.7.8.1 Tenseur symétrique 2057
6.7.8.2 Tenseur antisymétrique 2060
6.7.8.3 Tenseur Fondamental 2064
6.7.9 Coordonnées Curvilignes 2064
6.7.9.1 Repère naturel en coordonnées sphériques (base curviligne en coordonnées sphériques) . . 2071
6.7.9.2 Repère naturel en coordonnées polaires (base curviligne en coordonnées polaires) 2072
6.7.9.3 Repère naturel en coordonnées cylindriques (base curviligne en coordonnées cylindriques) 2073
6.7.10 Symboles de Christoffel 2077
6.7.11 Théorème de Ricci 2086
6.7.12 Symboles de Riemann-Christoffel 2097
6.7.13 Courbure de Ricci (Ricci tensor) 2102
6.7.14 Tenseur d'Einstein 2115
6.8 Calcul Spinoriel 2119
6.8.1 Spineur Unitaire 2120
6.8.2 Propriétés Géométriques 2126
6.8.2.1 Symétries Planes 2127
6.8.2.2 Rotations 2129
6.8.2.3 Propriétés des matrices de Pauli 2135

7 Analyse 2142

7.1 Analyse Fonctionnelle 2144
7.1.1 Représentations 2145
7.1.1.1 Représentations tabulaires 2145
7.1.1.2 Représentations graphiques 2151
7.1.1.2.1 Représentations 2D 2152
7.1.1.2.2 Représentations 3D 2160
7.1.1.2.3 Représentation Vectorielles 2D 2167
7.1.1.2.4 Propriétés des représentations visuelles 2170
7.1.1.3 Représentations Analytiques 2180
7.1.2 Fonctions 2183
7.1.2.1 Limites et Continuités des fonctions 2201
7.1.2.1.1 Théorème des gendarmes 2214
7.1.2.1.2 Limites (et Continuités) usuelles 2218
7.1.2.1.3 Lois sur les limites 2244
7.1.2.1.4 Asymptotes 2245

En cours de traduction de l'anglais

7.1.2.1.5 Discontinuités . . . 2251
7.1.2.2 Concavité/Convexité d'une fonction . . . 2255
7.1.2.3 Théorème d'Euler pour les fonctions homogènes . . . 2257
7.1.3 Logarithmes . . . 2259
7.1.4 Convolutions . . . 2268
7.1.4.1 Produit de Convolution Continu et Discret Linéaire . . . 2268
7.1.4.2 Convolution Matricielle . . . 2274
7.1.5 Opérateur Intégral (transformation intégrale) . . . 2278
7.1.5.1 Transformée de Fourier . . . 2280
7.1.5.1.1 Transformée de Fourier Temporelle Continue . . . 2280
7.1.5.1.1.1 Propriétés de la transformée de Fourier . . . 2284
7.1.5.1.1.2 Transformée de Fourier usuelles . . . 2295
7.1.5.1.2 Transformée de Fourier discrète temporelle . . . 2303
7.1.5.1.3 Propriétés de la transformée de Fourier discrète . . . 2305
7.1.5.2 Transformée de Laplace . . . 2312
7.1.5.2.1 Transformée de Laplace inverse . . . 2315
7.1.5.2.2 Région de Convergence . . . 2317
7.1.5.2.3 Pôles et Zéros de la transformée de Laplace . . . 2319
7.1.5.2.4 Propriétés de la région de convergence . . . 2320
7.1.5.2.5 Propriétés de la Transformée de Laplace . . . 2322
7.1.5.2.6 Transformée de Laplace usuelles . . . 2326
7.1.5.2.7 Résolution de systèmes différentiels . . . 2334
7.1.5.2.8 Transformée de Laplace unilatérale . . . 2336
7.1.5.3 Transformée en $\mathcal{Z}$ . . . 2338
7.1.5.3.1 Fonction de transfert de systèmes invariants dans le temps . . . 2341
7.1.5.3.2 Mappage conforme entre le plan s et le plan z . . . 2341
7.1.5.3.3 Région de Convergence . . . 2342
7.1.5.3.4 Zéros et pôles de la transformée en $\mathcal{Z}$ . . . 2344
7.1.5.3.5 Propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$ . . . 2345
7.1.5.3.6 Transformées en $\mathcal{Z}$ usuelles . . . 2349
7.1.5.3.7 Transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale . . . 2352
7.1.5.4 Transformée de Hilbert . . . 2355
7.1.6 Produit scalaire fonctionnel (produit interne) . . . 2358
Orthogonalité des fonctions trigonométriques . . . 2359
Orthogonalité des fonctions exponentielles complexes . . . 2361
Orthogonalité des fonctions de Bessel . . . 2361
Orthogonalité des polynômes d'Hermite . . . 2364
Orthogonalité des polynômes de Laguerre . . . 2365
Orthogonalité des polynôme de Legendre . . . 2366
7.1.6.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales . . . 2367
7.2 Analyse complexe . . . 2369
7.2.1 Applications linéaires . . . 2370
7.2.2 Fonctions holomorphes . . . 2379
7.2.2.1 Orthogonalité des iso-courbes réelles et imaginaires . . . 2385
7.2.3 Logarithme Complexe . . . 2387

En cours de traduction de l'anglais

7.2.4 Intégration de Fonctions Complexes . . . 2391
7.2.4.1 Convergence d'une série complexe . . . 2399
7.2.5 Décomposition en Chemins . . . 2407
7.2.5.1 Chemin inverse . . . 2408
7.2.6 Séries de Laurent . . . 2410
7.2.7 Singularités . . . 2417
7.2.8 Théorème des Résidus . . . 2420
7.2.8.1 Pôle à l'infini . . . 2425
7.3 Topologie . . . 2427
7.3.1 Topologie Générale . . . 2428
7.3.1.1 Espaces topologiques . . . 2429
7.3.2 Espace métrique et distance . . . 2431
7.3.2.1 Distances Équivalentes . . . 2438
7.3.2.2 Fonctions Lipschitziennes . . . 2438
7.3.2.3 Continuité et Continuité Uniforme . . . 2442
7.3.3 Ensembles Ouverts et Fermés . . . 2445
7.3.3.1 Boules . . . 2446
7.3.3.2 Parties . . . 2449
7.3.3.3 Boules Généralisées . . . 2452
7.3.3.4 Diamètre . . . 2453
7.3.4 Variétés . . . 2455
7.3.4.1 Sous-Variétés . . . 2457
7.3.4.2 Homéomorphismes de Surfaces . . . 2458
7.3.4.3 Variétés Différentiables . . . 2461
7.4 Théorie de la Mesure . . . 2463
7.4.1 Espaces Mesurables . . . 2464
7.4.1.1 Classes Monotones . . . 2472
7.4.2 Mesure de Lebesgue en probabilités . . . 2475
7.4.2.1 Mesure de Lebesgue des nombres rationnels et irrationnels . . . 2478
8 Géométrie **2482**
8.1 Trigonométrie . . . 2486
8.1.1 Radian . . . 2486
8.1.2 Trigonométrie du Cercle . . . 2491
8.1.2.1 Identités triangulaires trigonométriques remarquables . . . 2502
8.1.2.1.1 Théorème du Cosinus . . . 2508
8.1.2.1.2 Loi des Sinus . . . 2510
8.1.3 Trigonométrie Hyperbolique . . . 2515
8.1.3.1 Identités hyperboliques remarquables . . . 2522
8.1.4 Trigonométrie Sphérique . . . 2524
8.1.4.1 Théorème de Girard . . . 2528
8.1.4.2 Formule des quatre parties . . . 2530
8.1.5 Angle Solide . . . 2531
8.2 Géométrie Euclidienne . . . 2535
8.2.1 Objets de la Géométrie Euclidienne . . . 2535

En cours de traduction de l'anglais

8.2.1.1 Dimensions . . . 2537
8.2.2 Constructions d'Euclides . . . 2545
8.2.2.1 Droites et Segments . . . 2548
8.2.2.1.1 Grandeurs de même espèce . . . 2549
8.2.3 Géométrie Plane . . . 2555
8.2.3.1 Déplacements et Retournements . . . 2556
8.2.3.2 Angles plans . . . 2557
8.2.3.2.1 Mesures des Angles . . . 2565
8.2.3.2.2 Unités de Mesures des Angles . . . 2569
8.2.3.2.3 Bissectrice . . . 2572
8.2.3.3 Triangles . . . 2574
8.2.3.3.1 Triangles Égaux (triangles congruents) . . . 2575
8.2.3.3.2 Triangles Isocèles . . . 2578
8.2.3.3.3 Triangles Équilatéreux . . . 2582
8.2.3.3.4 Triangles Rectangles . . . 2582
8.2.3.3.5 Triangles Rectangles-Isocèles . . . 2584
8.2.3.3.6 Inégalités dans les triangles . . . 2586
8.2.3.3.7 Lignes intérieures remarquables des triangles . . . 2588
8.2.3.3.8 Théorème de Pythagore . . . 2590
8.2.3.3.9 Théorème de Thalès . . . 2591
8.2.3.3.9.1 Théorème d'Euclide (du triangle) . . . 2596
8.2.3.4 Parallélisme . . . 2598
8.2.3.5 Cercles . . . 2600
8.2.3.5.1 Théorème du cercle circonscrit . . . 2603
8.2.3.5.2 Théorème du cercle inscrit . . . 2604
8.2.3.5.3 Théorème de Thalès du cercle . . . 2605
8.2.3.5.4 Théorème de l'angle central . . . 2606
8.2.4 Axiomes de Hilbert . . . 2610
8.2.4.1 Axiomes d'association (A) . . . 2611
8.2.4.2 Axiomes d'ordre (O) . . . 2611
8.2.4.3 Axiomes de congruence . . . 2612
8.2.4.4 Axiomes de continuité . . . 2612
8.2.4.5 Axiomes des parallèles . . . 2613
8.2.5 Barycentre (centroïde) . . . 2614
8.2.6 Transformations Géométriques . . . 2619
8.2.6.1 Translation . . . 2621
8.2.6.2 Homothétie (mise à l'échelle) . . . 2622
8.2.6.3 Transformation de cisaillement (obliquité) . . . 2625
8.2.6.4 Rotation . . . 2627
8.2.6.4.1 Blocage de cardan . . . 2632
8.2.6.4.2 Angles d'Euler . . . 2636
8.2.6.5 Réflexion . . . 2639
8.3 Géométries Non-Euclidiennes . . . 2643
8.3.1 Courbure(s) . . . 2645
8.3.2 Axiomes de la géométrie non-euclidienne . . . 2647

En cours de traduction de l'anglais

8.3.3 Théorèmes généralisés sur la somme des angles . . . 2648
8.3.4 Géodésique et Équation Métrique . . . 2649
8.3.5 Espaces de Riemann . . . 2653
8.4 Géométrie Projective . . . 2659
8.4.1 Perspective conique (perspective centrale) . . . 2661
8.4.1.1 Images de Points . . . 2665
8.4.1.2 Images de Droites . . . 2682
8.4.2 Projections affines . . . 2693
8.4.2.1 Perspective Isométrique . . . 2695
8.4.2.2 Perspective Oblique . . . 2701
8.4.2.3 Projection Orthogonale . . . 2703
8.4.3 Projections Sphériques . . . 2708
8.4.3.1 Projection Stéréographique . . . 2709
8.4.3.2 Projection Cylindrique . . . 2718
8.4.3.3 Projection de Mercator . . . 2719
8.4.3.4 Projection équivalente de Lambert (projection de Peter) . . . 2723
8.4.3.5 Projection de Mollweide . . . 2726
8.4.4 Autres perspectives et Lois de la Perspective Linéaire . . . 2732
8.4.5 Coordonnées Homogènes (coordonnées de projection) . . . 2739
8.4.5.1 Espace Projectif $\mathcal{P}^2$ . . . 2739
8.4.5.2 Espace Projectif $\mathcal{P}^3$ . . . 2741
8.5 Géométrie Analytique . . . 2744
8.5.1 Coniques . . . 2744
8.5.1.1 Approche Algébrique . . . 2745
8.5.1.2 Approche Géométrique . . . 2754
8.5.1.3 Théorème de Dandelin (sphères de Dandelin) . . . 2770
8.5.1.4 Classification des coniques par le déterminant . . . 2771
8.5.2 Paramétrisations . . . 2777
8.5.2.1 Équation du Plan . . . 2777
8.5.2.2 Équation de la Droite . . . 2781
8.5.2.2.1 Distance d'une ligne à un point . . . 2784
8.5.2.2.2 Ligne définie par l'intersection de plans . . . 2785
8.5.2.2.3 Équation paramétrique d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ . . . 2785
8.5.2.3 Équation d'un Carré . . . 2787
8.5.2.4 Équation d'une Cycloïde . . . 2788
8.5.2.5 Équation d'une Épicycloïde . . . 2790
8.5.2.6 Équation d'une Spirale . . . 2792
8.5.2.7 Équation d'une Hypocycloïde . . . 2793
8.5.2.8 Surface de révolution . . . 2795
8.5.2.8.1 Cône . . . 2795
8.5.2.8.2 Sphère . . . 2798
8.5.2.8.2.1 Grand cercle de la Sphère . . . 2800
8.5.2.8.2.2 Volume de la n-Sphère . . . 2801
8.5.2.8.3 Ellipsoïde (sphéroïde) . . . 2806
8.5.2.8.4 Cylindre . . . 2809

En cours de traduction de l'anglais

8.5.2.8.5 Paraboloïde . . . 2811
8.5.2.8.6 Hyperboloïde . . . 2813
8.5.2.8.7 Tore . . . 2820
8.6 Géométrie Différentielle . . . 2822
8.6.1 Courbes paramétrées . . . 2822
8.6.2 Isoclines . . . 2829
8.6.3 Trièdre de Frenet . . . 2835
8.6.4 Nappes paramétrées . . . 2848
8.6.4.1 Métrique d'une nappe paramétrée . . . 2849
8.6.4.1.1 Régularité d'une surface . . . 2851
8.7 Formes Géométriques . . . 2856
8.7.1 Surfaces (aires) connues . . . 2857
8.7.1.1 Polygone . . . 2857
8.7.1.2 Rectangle . . . 2862
8.7.1.3 Carré . . . 2864
8.7.1.4 Triangle quelconque . . . 2865
8.7.1.5 Triangle isocèle . . . 2869
8.7.1.6 Triangle équilatéral . . . 2871
8.7.1.7 Triangle rectangle . . . 2874
8.7.1.8 Trapèze . . . 2875
8.7.1.9 Parallélogramme . . . 2877
8.7.1.10 Hexagone . . . 2878
8.7.1.11 Losange . . . 2883
8.7.1.12 Cercle . . . 2884
8.7.1.13 Ellipse . . . 2887
8.7.1.13.1 Surface de section d'ellipse . . . 2890
8.7.2 Volumes connus . . . 2893
8.7.2.1 Polyèdres . . . 2894
8.7.2.1.1 Parallélépipède . . . 2895
8.7.2.1.1.1 Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire . . . 2896
8.7.2.1.1.2 Moment d'inertie d'une plaque triangulaire . . . 2899
8.7.2.1.2 Pyramide . . . 2901
8.7.2.1.2.1 Moment d'inertie d'une pyramide carrée régulière . . . 2902
8.7.2.1.3 Prisme droit . . . 2903
8.7.2.1.4 Polyèdres réguliers . . . 2904
8.7.2.1.5 Tétraèdre régulier . . . 2909
8.7.2.1.6 Hexaèdre régulier (cube) . . . 2912
8.7.2.1.7 Octaèdre régulier . . . 2913
8.7.2.1.8 Icosaèdre régulier . . . 2917
8.7.2.1.9 Dodécaèdre régulier . . . 2922
8.7.2.2 Corps usuels de révolution . . . 2927
8.7.2.2.1 Cylindre . . . 2929
8.7.2.2.2 Cône . . . 2933
8.7.2.2.3 Sphère . . . 2934
8.7.2.2.3.1 Empilement compact de sphères identiques . . . 2939

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.2.4 Tore 2941
8.7.2.2.5 Ellipsoïde (sphéroïde) 2945
8.7.2.2.6 Paraboloïde 2950
8.7.2.2.7 Trompette de Gabriel 2954
8.7.2.2.8 Tonneau à vin à section circulaire 2955
8.7.3 Inégalité isopérimétrique (2D) 2961
8.8 Théorie des Graphes 2968
8.8.1 Types de Graphes et de Structures 2969
8.8.2 Matrice d'adjacence de Graphes 2997
8.8.3 Catégories 3002
8.9 Théorie des Noeuds 3006
8.9.1 Représentation des Tresses 3006
8.9.1.1 Groupe de Tresses 3008
8.9.2 Représentation des Noeuds 3011
8.9.2.1 Groupe de Noeuds 3015
8.9.3 Noeuds de Tait 3020
8.9.4 Formalisation mathématique 3024
8.9.4.1 Représentation Planaires 3033

9 Mécanique 3035

10 Éléctromagnétisme 3036

11 Atomistique 3037

12 Cosmologie 3038

13 Chimie 3039

14 Informatique Théorique 3040

15 Sciences Sociales 3041

16 Ingénierie 3042

17 Épilogue 3043

18 Biographies 3045

A 3046
B 3048
C 3056
D 3064
E 3068
F 3071
G 3076

En cours de traduction de l'anglais

H . . . 3082
I . . . 3090
J . . . 3091
K . . . 3093
L . . . 3096
M . . . 3105
N . . . 3113
O . . . 3117
P . . . 3118
R . . . 3123
S . . . 3125
T . . . 3133
V . . . 3137
W . . . 3138
Y . . . 3141
Z . . . 3143

19 Chronologie **3146**

20 Humour **3189**

20.1 Situations . . . 3190
20.2 Mathématiques . . . 3204
20.3 Physique . . . 3224
20.4 Statistiques . . . 3244
20.5 Chimie . . . 3248
20.6 Ingénierie . . . 3254
20.7 Informatique . . . 3263
20.8 Sciences Sociales . . . 3274

21 Liens **3281**

21.1 Sciences Exactes . . . 3282
21.2 Éditions/Magazines . . . 3283
21.3 Associations . . . 3285
21.4 Emploi . . . 3286
21.5 Télévision/Radio . . . 3286
21.6 Divers Sciences . . . 3288
21.7 Logiciels/Applications . . . 3289

22 Citations **3294**

23 Journal des changements **3309**

24 Nomenclature **3330**

Liste des Figures **3337**

Liste des Tables **3355**

En cours de traduction de l' anglais

Liste des Algorithmes 3359

Bibliographie 3361

Index 3389

En cours de traduction de l’ anglais

En cours de traduction de l’ anglais

Dédié à tous ceux intéressés au savoir éclairé plutôt qu'en la foi aveugle !

En cours de trad ...is

2 Avertissements

Contents

2.1 Impressum **4**
2.1.1 Utilisation du contenu 4
2.1.2 Comment utiliser ce livre 5
2.1.2.1 Guide des styles 6
2.1.2.2 Crédits 7
2.1.2.3 Vidéos et Animations 7
2.1.2.4 Annexes 9
2.1.3 Protection des données 11
2.1.4 Utilisation des données 11
2.1.5 Transmission des données 11
2.1.6 Accord 11
2.1.7 Errata 12
2.2 Licence **13**
2.2.1 Préambule 13
2.2.2 Applications et Définitions 14
2.2.3 Copie Verbatim 15
2.2.4 Copie en Quantité 15
2.2.5 Modifications 16
2.2.6 Combinaison de Documents 18
2.2.7 Collections de Documents 18
2.2.8 Agrégation avec des œuvres indépendantes 18
2.2.9 Compilation du Document 19
2.2.10 Traductions 19
2.2.11 Résiliation 19
2.2.12 Permissions et Copyrights 19

En cours de traduction de l'anglais

2.2.13 Révisions futures de cette Licence 20
2.3 Feuille de route **21**

En cours de traduction de l' anglais

2.1. Impressum

2.1.1 Utilisation du contenu

Le contenu de ce livre est élaboré par un processus de développement par lequel les volontaires parviennent à un consensus. Ce processus qui rassemble des bénévoles, recherche aussi le point de vue des personnes intéressées par les sujets de ce livre. Le responsable de ce livre administre le processus et établit des règles pour promouvoir l'équité dans l'approche consensuelle. Il est également responsable de la rédaction du texte, parfois pour tester/évaluer ou vérifier de manière indépendante l'exactitude ou l'exhaustivité de l'information présentée.

Nous déclinons toute responsabilité pour toute blessure, dommage ou tout autre type, spécial, accessoire, consécutif ou compensatoire, découlant de la publication, l'application ou la confiance du contenu de ce livre. Nous n'offrons aucune garantie expresse ou implicite quant à l'exactitude ou l'exhaustivité des informations publiées dans ce livre, et ne garantissons pas que les informations contenues dans ce livre répondent à un besoin spécifique ou à un objectif du lecteur. Nous ne garantissons pas la performance des produits ou services d'un fabricant ou d'un fournisseur uniquement en vertu du contenu de ce livre.

Les descriptions techniques, les procédures et les programmes informatiques de ce livre ont été développés sans précaution pointue, ils sont donc fournis sans garantie d'aucune sorte. Nous ne garantissons pas non plus que les équations, les programmes et les procédures de ce manuel ou de ses logiciels associés sont exempts d'erreurs, ou sont conformes à une norme particulière de qualité marchande, ou répondront à vos exigences pour une application particulière. Ils ne devraient pas être invoqués pour résoudre un problème dont la solution incorrecte pourrait entraîner des blessures à des personnes ou la perte de biens. Toute utilisation du contenu de ce livre est aux risques et périls du lecteur. Les auteurs, rédacteurs et éditeurs déclinent toute responsabilité pour les dommages directs, indirects ou consécutifs résultant de l'utilisation du contenu de ce livre ou des logiciels, codes qui y sont associés.

En publiant des textes, il n'est pas dans l'intention de ce livre de fournir des services au nom d'une personne ou d'une entité ou d'accomplir une tâche à accomplir par une personne ou une entité au profit d'un tiers. Quiconque utilise ce livre devrait s'appuyer sur son propre jugement indépendant ou, le cas échéant, demander l'avis d'un expert (ou comité d'experts) qualifié pour déterminer comment faire preuve de diligence raisonnable dans toutes les circonstances. Les informations et les normes sur les sujets couverts par ce livre peuvent être disponibles à partir d'autres sources que le lecteur peut souhaiter parcourir à la recherche de points de vue ou d'informations supplémentaires non couvertes par le contenu de ce livre.

Nous n'avons aucun pouvoir pour faire respecter le contenu de ce livre, et nous ne nous engageons pas à surveiller ou à faire respecter cette conformité. Nous n'avons aucune activité de certification, d'essai ou d'inspection de produits, de conceptions ou d'installations pour la sécurité ou la santé des personnes et des biens. Toute certification ou autre déclaration de conformité concernant les informations relatives à la santé ou à la sécurité des personnes et des biens, men-

En cours de traduction de l'anglais

tionnée dans ce livre, ne peut être attribuée au contenu de ce livre et reste sous la responsabilité du centre de certification ou du déclarant concerné.

2.1.2 Comment utiliser ce livre

Au niveau universitaire, ce livre peut être utilisé pour un doctorat, un diplôme d'études supérieures ou un séminaire avancé de premier cycle dans de nombreux domaines des sciences exactes et pures. En réalité, ce livre vise également à couvrir le programme complet de la maternelle au doctorat.

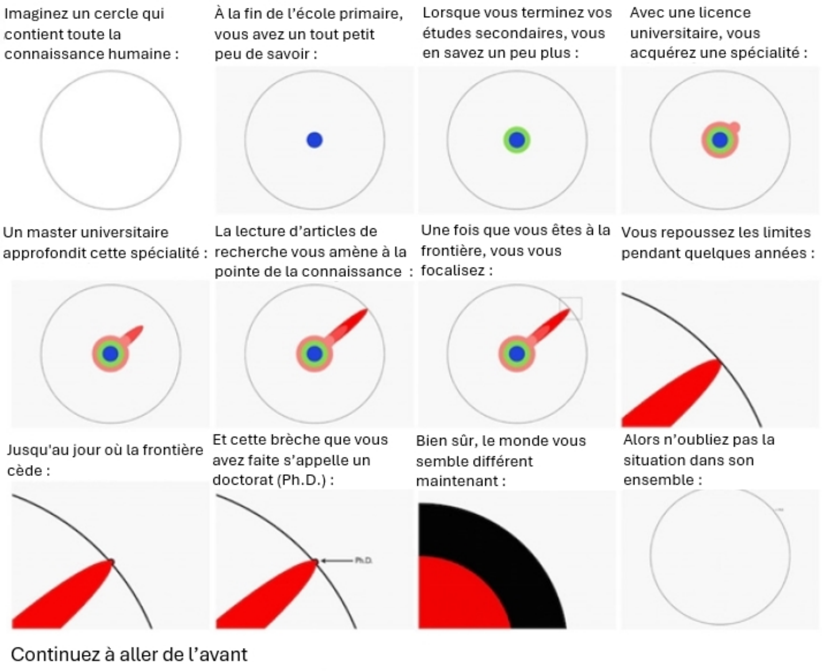


FIG. 2.1 – **L'éducation et la perspective d'ensemble**

En cour… …nglais

Parce que les méthodes de mathématiques appliquées sont apprises par la pratique et l'expérience, nous considérons un séminaire sur les mathématiques appliquées comme un séminaire d'apprentissage par la pratique (axé sur les projets). Nous structurons nos séminaires de modélisation mathématique autour d'un ensemble de problèmes qui nécessitent que le stagiaire construise des modèles qui aident à la planification et à la prise de décision. L'impératif est que les modèles doivent être compatibles avec la théorie et revérifiés. Pour remplir cet impératif, il est nécessaire que le stagiaire combine la théorie mathématique avec la modélisation. Le résultat est que le stagiaire apprend la théorie, et plus important encore, apprend comment cette théorie est appliquée et combinée dans le monde réel. La capacité de critiquer et d'identifier les limites des outils mathématiques dangereux est la caractéristique la plus importante de nos séminaires.

> *Les mathématiques ne sont pas une science déductive - c'est un cliché. Lorsque vous essayez de prouver un théorème, vous ne vous contentez pas d'énumérer les hypothèses pour ensuite commencer à raisonner. Ce que vous*

quote 2.1:6.#2

faites, c'est des essais et des erreurs, des expérimentations, des conjectures. Vous voulez découvrir quels sont les faits, et ce que vous faites est à cet égard similaire à ce que fait un technicien de laboratoire ! ”

Paul Halmos

Remarque

Les mathématiciens ont toujours pratiqué les mathématiques expérimentales. Les documents existants sur les mathématiques anciennes, telles que les mathématiques babyloniennes, consistent généralement en des listes d'exemples numériques illustrant les identités algébriques. Cependant, les mathématiques modernes, à partir du 171e siècle (selon calendrier holocène), ont développé une tradition de publication des résultats dans une présentation finale, formelle et abstraite. Les exemples numériques qui auraient pu conduire un mathématicien à formuler initialement un théorème général n'étaient pas publiés et étaient généralement oubliés.

Les problèmes avec solutions présentées dans ce livre fournissent l'occasion d'appliquer le matériel du texte à un ensemble complet de situations assez réalistes (bien que simplifiées). À la fin des séminaires ainsi qu'à la fin de la lecture de ce livre, les stagiaires/lecteurs auront amélioré leurs compétences et leurs connaissances des outils théoriques et informatiques les plus importants et auront fortement développé leur esprit analytique. Ce sont des compétences précieuses qui sont demandées par les entreprises et administrations au plus haut niveau.

Il est très difficile de couvrir tout le matériel de ce livre en un semestre. Il faut beaucoup de temps pour expliquer les concepts aux stagiaires. Le lecteur est invité à choisir les sujets qui seront abordés pendant le trimestre. Il n'est pas strictement nécessaire de les couvrir dans l'ordre, mais cela peut aider de manière significative ?

En un mot, ce livre vous offre une grande variété de sujets qui peuvent être modélisés. Tous, sans exception, sont utiles dans la pratique.

En cours de traduction de l'anglais

2.1.2.1 Guide des styles

Nous utilisons quelques conventions standard tout au long de ce livre. Ils ont été préparés évidemment avec LaTeX qui numérote automatiquement les sections et le package hyperref qui génère les liens dans la Table des matières du présent PDF ainsi que d'autres références croisées faites dans le corps du texte.

Nous utilisons la couleur et certaines boîtes pour mettre en évidence certains points pour que le lecteur puisse s'y référer plus facilement. En particulier :

- Les liens cliquables et les références croisées sont la plupart du temps en magenta (seulement quelque cas particuliers sont en bleu)
- Les textes expliquant la cible des références croisées sont en gris clair

- Les nouveaux termes (la plupart du temps associés aux définitions) sont en rouge
- Les remarques sont dans des boîtes avec une arrière plan grisé
- Les preuves commencent par le mot "Démonstration" et se terminent par un ■
- Les exemples supplémentaires [1] commencent par le symbole ✍

Sans aucun doute, nous n'avons pas réussi à certains endroits à respecter ces règles. Si le lecteur garde une liste de ces transgressions pour nous la communiquer à la fin de la lecture de ce livre, cela pourrait valoir la peine de la partager avec les rédacteurs.

Attention ! ! ! Toute interprétation des sections techniques (c'est-à-dire des preuves mathématiques) de ce livre et des explications associées en texte brut doit être évitée (si nous le pouvions, nous dirions même que c'est interdit !). Le contexte se suffit à lui-même et donc aucun mot n'a d'autre sens, ou sens implicite, que la ou les définitions académiques qui font consensus au moment de la publication de ce livre ! Tous les nombres sont écrits dans le système décimal et aucun préfixe est implicitement masqué ! Il n'y aussi aucun message caché dans ce livre ! Le lecteur devrait se concentrer uniquement sur les calculs et les prédictions mathématiques plutôt que de se soucier des interprétations physiques sous-jacentes ou des implications philosophiques !

2.1.2.2 Crédits

Les rédacteurs ont tenté (car l'absence de réponse est souvent la règle...) de créditer et d'obtenir les autorisations nécessaires pour l'utilisation de tout matériel protégé par le droit d'auteur, tel que les photographies, animations, vidéos et les illustrations provenant de sources tierces.

Si toutefois, une violation des droits d'auteur était involontairement commise, nous encourageons les titulaires de ces droits à nous contacter pour que nous puissions prendre les mesures appropriées.

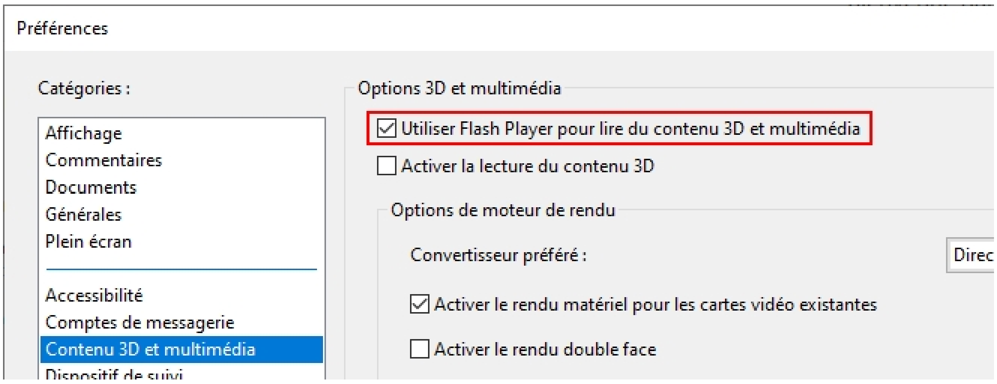
2.1.2.3 Vidéos et Animations

Ce livre contient des dizaines de petites vidéos et animations intégrées dans les pages PDF elles-mêmes. Cependant, pour pouvoir les jouer, vous aurez besoin :

1. D'Adobe Flash Player pour Firefox - NPAPI (la dernière version)
2. D'activer l'option suivante disponible dans la plupart des lecteurs Adobe PDF sous Microsoft Windows :

[1] Un exemple compagnon à un théorème n'a pas de symbole spécifique

En cours de traduction



Cette option doit être réactivée chaque fois que vous fermez et rouvrez le lecteur en fonction de la politique de votre département IT.

En cours de traduction de l' anglais

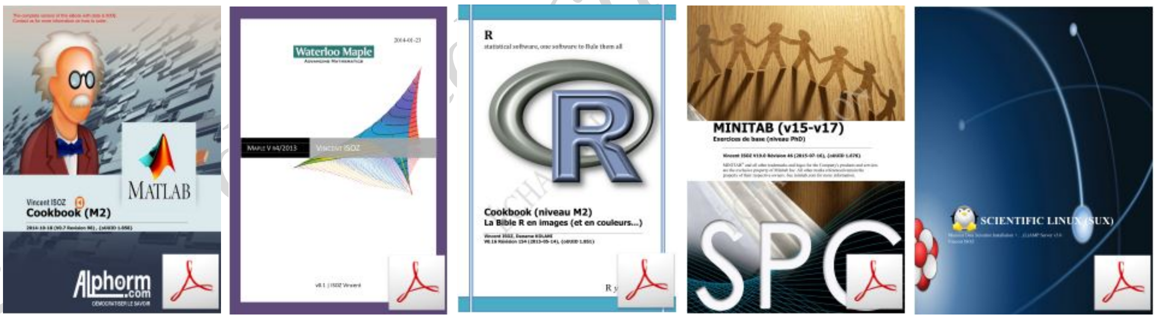
2.1.2.4 Annexes

Nous propons ci-dessous une gamme d'annexes gratuites (ouvrages compagnons) pour les étudiants, les instructeurs et les praticiens. Il y a des annexes en français et en anglais pour les personnes qui souhaitent mettre en pratique la théorie introduite dans le présent ce livre.

Voici la liste :

- MATLAB™ en anglais (1,361 pages) :
  http://www.sciences.ch/dwnldbl/divers/Matlab.pdf
- Maple en français (139 pages) :
  http://www.sciences.ch/dwnldbl/divers/Maple.pdf
- R en français (3,134 pages) :
  http://www.sciences.ch/dwnldbl/divers/R.pdf
- Minitab en français (1,290 pages) :
  http://www.sciences.ch/dwnldbl/divers/Minitab.pdf
- Scientific Linux installation & Configuration en anglais (338 pages) :
  http://www.sciences.ch/dwnldbl/divers/ScientificLinux.pdf

En c ... tion de l' anglais



Et comme tout livre technique devrait avoir un forum, le lecteur peut passer par ce lien pour toute discussion sur le contenu : `https://www.physicsforums.com`.

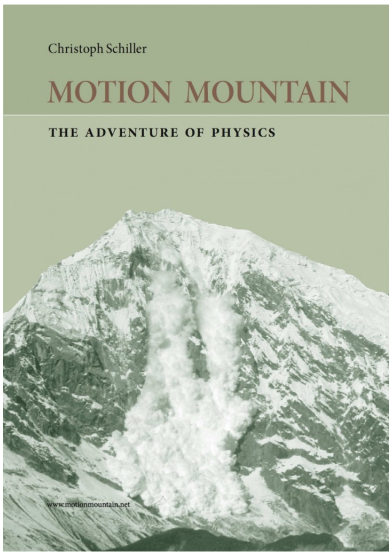
Pour ceux qui préfèrent les réseaux sociaux, nous avons aussi un Instagram dédié :

https://www.instagram.com/opera.magistris/

Les personnes qui souhaitent contribuer à traduire ce livre en d'autres langues peuvent nous contacter à tout moment via instagram.

Parce que ce livre se concentre principalement sur l'aspect mathématique (technique) des phénomènes physiques, nous ne pouvons que recommander fortement au lecteur un autre livre gratuit qui est de notre point de vue subjectif actuellement le meilleur sur l'aspect scientifique populaire des sujets que nous couvrirons :

Motion Mountain par le Dr. Christoph Schiller : http://www.motionmountain.net



En cours de traduction de l' anglais

2.1.3 Protection des données

Lorsque vous consultez des informations sur le site Internet compagnon (Sciences.ch), certaines données sont automatiquement sauvegardées. Nous essayons de sauvegarder le moins de données possible et ce le plus rapidement possible. Partout où nous pouvons, nous n'avons que des données anonymes. Nous nous engageons à traiter les données que vous nous envoyez personnellement avec la plus grande diligence.

Cependant, votre adresse IP et la page source qui vous emmène sur Sciences.ch et les mots-clés associés, sont disponibles gratuitement pour tout le monde ici pour le mois en cours. Après quoi les données détaillées sont détruites. Vous pouvez vous opposer à tout moment à la publication de vos données en nous contactant.

2.1.4 Utilisation des données

Vos données ne sont utilisées que pour l'envoi du bulletin d'information (newletter) de Sciences.ch. La communication des données personnelles (à l'exception de l'adresse de courriel, du titre et du nom) est facultative. Lorsque vous vous inscrivez à la newsletter, vous pouvez bien sûr spécifier une autre adresse et / ou un nom fictif.

2.1.5 Transmission des données

Nous ne vendrons ni ne commercialiserons jamais les données de nos clients ou parties intéressées et n'affecterons jamais les droits de la personne. En outre, nous ne louerons pas de listes de diffusion et ne vous enverrons pas de publicité de la part de tiers ou en notre nom.

2.1.6 Accord

Lorsque vous nous fournissez des informations personnelles, vous nous autorisez à les sauvegarder et à les utiliser au sens de la loi fédérale suisse sur la protection des données. Si vous nous demandez de ne pas vous envoyer de courriels, nous sommes dans l'obligation, dans votre intérêt, d'enregistrer votre courriel dans une liste négative interne.

En cours de traduction de l'anglais

2.1.7 Errata

Les rédacteurs ont fait tout leur possible pour s'assurer de l'exactitude et de l'exhaustivité des informations contenues dans cet ouvrage. Cependant, nous déclinons toute responsabilité pour les erreurs, les omissions ou les divergences d'opinion qui pourraient être présentes. Il est fortement conseillé aux lecteurs de consulter d'autres sources scientifiques dans des revues à comité de lecteur et haut facteur d'impact (impact factor) pour compléter et mettre à jour leurs connaissances sur les sujets abordés dans ce livre.

Les illustrations, les photographies et les schémas inclus dans ce livre sont fournis à titre indicatif et ne sont pas destinés à être des représentation exactes des objets ou des phénomènes décrits. Les rédacteurs et artistes ne peuvent être tenus responsables des erreurs ou des inexactitudes que pourraient contenir ces éléments visuels puisqu'elles sont volontaires pour des raisons pédaogiques !

Bien que nous ayons pris toutes les précautions pour assurer l'exactitude de notre contenu, des erreurs humaines de type pédagogique ou technique peuvent se produire. Si vous trouvez une erreur dans ce livre - peut-être une erreur dans le texte, les scripts ou les illustrations - nous vous serions reconnaissants de nous le signaler. Ce faisant, vous pouvez éviter la frustration d'autres lecteurs en nous aidant à améliorer les versions ultérieures de ce livre. Notre courriel est donné sur le pied de page à chaque page de ce livre. Une fois vos errata vérifiés, vos soumissions seront acceptées et l'erreur sera visible dans le journal des modifications des versions de mise à jour.

En cours de traduction de l'anglais

2.2. Licence

Tout le contenu de ce livre est soumis à la licence de documentation libre GNU, ce qui signifie :

- que chacun a le droit d'utiliser librement les textes à des fins non commerciales (Google Ads ou tout équivalent étant considéré comme un usage commercial !)
- que toute personne est autorisée à diffuser des articles pour un usage non commercial (Google Ads ou tout équivalent étant considéré comme un usage commercial !)
- que n'importe qui peut éditer librement les textes pour un usage non commercial (Google Ads ou tout équivalent étant considéré comme un usage commercial !)

et bla bla bla...

conformément à la licence décrite ci-dessous :

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Version 1.1, Mars 12000

Copyright (C) 12000 Fondation du Logiciel Libre, Inc. 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA Tout le monde est autorisé à copier et à distribuer des copies verbatim de ce document de licence, mais il n'est pas autorisé de le modifier.

En cours de traduction de l'anglais

2.2.1 Préambule

Le but de cette Licence est de rendre un manuel, une référence ou un autre document écrit "libre" dans le sens de la liberté : assurer à chacun la liberté effective de le copier et de le redistribuer, avec ou sans le modifier à des fins non commerciales [2]. En second lieu, cette Licence conserve pour l'auteur et l'éditeur un moyen d'obtenir un crédit pour leur travail, tout en n'étant pas considéré comme responsable des modifications apportées par d'autres.

[2] L'avantage immédiat est que vous pouvez générer le livre, avec de nouveaux ensembles de problèmes, et le distribuer à vos étudiants simplement en format PDF (dans un courriel, par exemple). Mais plus généralement, si vous n'êtes pas intéressé par la façon dont nous avons expliqué (ou omis d'expliquer) quelque chose, alors vous êtes libre de le réécrire. Si vous souhaitez couvrir plus de sujets (ou moins), vous êtes libre d'ajouter (ou de supprimer) les chapitres / sections / paragraphes que vous souhaitez. Et puisque le lecteur peut faire la demande du code source, il n'a pas besoin de recréer la roue.

Cette Licence est une sorte de "copyleft", ce qui signifie que les oeuvres dérivées du Document doivent elles-mêmes être libres dans le même sens. Il complète la licence publique générale GNU, qui est une licence copyleft conçue pour un logiciel libre.

Nous avons conçu cette Licence afin de l'utiliser pour les manuels de logiciels libres, car le logiciel libre a besoin de documentation gratuite : un programme gratuit devrait être fourni avec des manuels offrant les mêmes libertés que le logiciel. Mais cette Licence n'est pas limitée aux manuels de logiciels; il peut être utilisé pour n'importe quel travail textuel, indépendamment du sujet ou s'il est publié comme un livre imprimé. Nous recommandons cette Licence principalement pour les travaux dont l'objectif est l'instruction ou la référence.

2.2.2 Applications et Définitions

Cette Licence s'applique à tout travail manuel ou autre contenant un avis placé par le détenteur des droits d'auteur indiquant qu'il peut être distribué selon les termes de cette Licence. Le "Document", ci-dessous, fait référence à un tel manuel ou travail. Tout membre du public est un titulaire de Licence et est appelé «vous».

Une "Version Modifiée" du Document désigne tout travail contenant le Document ou une partie de celui-ci, soit copié textuellement, soit avec des modifications et / ou traduit dans une autre langue.

Une «section secondaire» est une annexe nommée ou une section de première instance du Document qui traite exclusivement de la relation entre les éditeurs ou les auteurs du Document à la matière globale du Document (ou à des questions connexes) et ne contient rien qui pourrait tomber directement dans ce sujet global (par exemple, si le Document est en partie un manuel de mathématiques, une section secondaire pourrait ne pas expliquer les mathématiques). La relation pourrait être une question de connexion historique avec le sujet ou avec des questions connexes, ou juridique, commercial, philosophique, position éthique ou politique à leur égard.

Les "Sections Invariantes" sont certaines Sections Secondaires dont les titres sont désignés, comme étant ceux des Sections Invariantes, dans l'avis qui dit que le Document est publié sous cette Licence.

Les "Textes de couverture" sont de courts passages de texte qui sont listés, en tant que Textes d'ouverture ou Textes de clôture, dans l'avis indiquant que le Document est publié sous cette Licence.

Une copie "Transparente" du Document désigne une copie lisible par machine, représentée dans un format dont la spécification est accessible au grand public, dont le contenu peut être visualisé et édité directement et directement avec des éditeurs de texte génériques ou (pour des images composées de pixels) programmes de peinture génériques ou (pour les dessins) un éditeur de dessin largement disponible, et qui est adapté pour l'entrée aux formateurs de texte ou pour la traduction automatique à une variété de formats appropriés pour l'entrée aux formateurs de texte. Une copie faite dans un format de fichier autrement transparent dont le balisage a été conçu pour contrecarrer ou décourager la modification ultérieure par les lecteurs n'est pas transparent. Une copie qui n'est pas "transparente" est appelée "opaque".

En cours de traduction de l'anglais

Des exemples de formats appropriés pour les copies transparentes incluent l'ASCII simple sans balisage, le format d'entrée Texinfo, le format d'entrée LaTeX, SGML ou XML utilisant une DTD accessible au public et un HTML simple conforme aux normes conçu pour la modification humaine. Les formats opaques incluent PostScript, PDF, formats propriétaires qui ne peuvent être lus et édités que par des traitements de texte propriétaires, SGML ou XML pour lesquels la DTD et / ou les outils de traitement ne sont généralement pas disponibles, et HTML produit par certains traitements de texte pour fins de sortie seulement.

La «page de titre» désigne, pour un livre imprimé, la page de titre elle-même, ainsi que les pages suivantes qui sont nécessaires pour contenir, de manière lisible, le matériel dont cette Licence a besoin pour apparaître dans la page de titre. Pour les œuvres dans des formats qui n'ont pas de page de titre en tant que telle, "Page de titre" signifie le texte près de l'apparence la plus visible du titre de l'oeuvre, précédant le début du corps du texte.

2.2.3 Copie Verbatim

Vous pouvez copier et distribuer ce libre sur n'importe quel support, non commercial, à condition que cette Licence, les avis de copyright et l'avis de licence indiquant que cette Licence s'applique au livre soient reproduits dans toutes les copies et que vous n'ajoutez aucune autre condition à celles de cette Licence. Vous ne pouvez pas utiliser des mesures techniques pour entraver ou contrôler la lecture ou la copie ultérieure des copies que vous faites ou distribuez. Cependant, vous pouvez accepter une compensation en échange de copies. Si vous distribuez un nombre suffisant de copies, vous devez également respecter les conditions de la section 3.

Vous pouvez également prêter des copies, dans les mêmes conditions que celles indiquées ci-dessus, et vous pouvez en afficher publiquement des copies.

En cours de traduction de l'anglais

2.2.4 Copie en Quantité

Si vous publiez des copies imprimées du Document en quantité supérieurs à 100 et que l'avis de Licence du Document exige des textes de couverture, vous devez joindre les copies dans des pochettes qui portent, clairement et lisiblement, tous ces textes de couverture : les textes de la première de couverture sur la page de couverture. les textes de la dernière de couverture sur la couverture arrière. Les deux couvertures doivent également vous identifier clairement et lisiblement en tant qu'éditeur de ces copies. La couverture doit présenter le titre complet avec tous les mots du titre tout aussi visible l'un que l'autre. Vous pouvez ajouter d'autres informations sur les couvertures en plus. La copie avec des modifications limitées aux couvertures, tant qu'elles conservent le titre du Document et satisfont à ces conditions, peut être considérée comme une reproduction textuelle à d'autres égards.

Si les textes requis pour l'une ou l'autre des couvertures sont trop volumineux pour être lisibles, vous devez mettre les premiers inscrits (autant que possible) sur la couverture actuelle, et continuer le reste sur les pages suivantes.

Si vous publiez ou distribuez des copies opaques en quantité supérieure à 100, vous devez inclure une copie transparente lisible par machine avec chaque copie opaque, ou indiquer dans

chaque copie opaque un emplacement réseau informatique accessible au public contenant une copie complète transparente du Document, sans matériel ajouté et de manière à ce que le public utilisant un un réseau général y ait accès de façon anonyme, sans frais et en utilisant des protocoles de réseau public ou standard. Si vous utilisez cette dernière option, vous devez prendre des mesures raisonnablement prudentes lorsque vous commencez la distribution de copies opaques en quantité, pour vous assurer que cette copie transparente restera accessible à l'emplacement indiqué jusqu'à au moins un an après la dernière distribution d'un copie opaque (directement ou par l'intermédiaire de vos agents ou détaillants) de cette édition au public.

Il est demandé, mais pas obligatoire, que vous contactiez les auteurs du Document bien avant de redistribuer un grand nombre de copies, pour leur donner une chance de vous fournir une version mise à jour du Document.

2.2.5 Modifications

Vous pouvez copier et distribuer une version modifiée du Document dans les conditions des sections 2 et 3 ci-dessus, à condition de publier la Version Modifiée sous cette Licence, avec la version modifiée remplissant le rôle du Document, autorisant ainsi la distribution et la modification de la Version Modifiée à quiconque en possède une copie. En outre, vous devez effectuer ces opérations dans la version modifiée :

- Utilisez dans la page de titre (et sur les couvertures, le cas échéant) un titre distinct de celui du Document, et de ceux des versions précédentes (qui devraient, le cas échéant, figurer dans la section *Historique des révisions* du document). Vous pouvez utiliser le même titre que la version précédente si l'éditeur d'origine de cette version donne son autorisation.
- Lister sur la page de titre, en tant qu'auteurs, une ou plusieurs personnes ou entités responsables de la paternité des modifications de la Version Modifiée, ainsi qu'au moins cinq des auteurs principaux du document (tous ses auteurs principaux, s'il y en a moins de cinq).
- Indiquer sur la page de titre le nom de l'éditeur de la version modifiée, en tant qu'éditeur.
- Conserver tous les avis de droits d'auteur du document.
- Ajoutez un avis de droit d'auteur approprié pour vos modifications à côté des autres avis de droits d'auteur.
- Inclure, immédiatement après les avis de droits d'auteur, un avis de licence autorisant le public à utiliser la Version Modifiée conformément aux conditions de la présente Licence, sous la forme indiquée dans l'addenda ci-dessous.
- Préservez dans cet avis de licence les listes complètes des sections invariantes et les textes de couverture requis indiqués dans l'avis de Licence du Document.
- Inclure une copie non modifiée de cette licence.

En cours de traduction de l'anglais

- Conservez la section intitulée *Historique des révisions* et son titre, et ajoutez-y un élément indiquant au moins le titre, l'année, les nouveaux auteurs et l'éditeur de la version modifiée comme indiqué sur la page de titre. S'il n'y a pas de section intitulée *Historique des révisions* dans le document, créez-en un en indiquant le titre, l'année, les auteurs et l'éditeur du document comme indiqué sur sa page de titre, puis ajoutez un élément décrivant la version modifiée.

- Conservez l'emplacement réseau, le cas échéant, indiqué dans le document pour l'accès public à une copie transparente du Document, ainsi que les emplacements réseau indiqués dans le document pour les versions précédentes sur lesquelles il était basé. Ceux-ci peuvent être placés dans la section *Historique des révisions*. Vous pouvez omettre un emplacement réseau pour un travail publié au moins quatre ans avant le document lui-même ou si l'éditeur d'origine de la version à laquelle il fait référence donne son autorisation.

- Dans toute section intitulée «Remerciements» ou «Dédicaces», conserver le titre de la section et conserver dans la section toute la substance et le ton de chacun des remerciements et / ou dédicaces du contributeur qui y sont donnés.

- Conserver toutes les sections invariables du Document, inchangées dans leur texte et dans leurs titres. Les numéros de section ou l'équivalent ne sont pas considérés comme faisant partie des titres de section.

- Supprimer toute section intitulée "Avenants". Une telle section peut ne pas être incluse dans la Version Modifiée.

- Ne retitrez aucune section existante en tant que "Avenants" ou tout autre section qui pourrait générer un conflit dans le titre avec une Section Invariante.

- Si la version modifiée inclut de nouvelles sections ou appendices qualifiées en tant que Sections Secondaires et ne contient aucun contenu copié à partir du Document original, vous pouvez, à votre discrétion, désigner certaines ou toutes ces sections comme invariantes. Pour ce faire, ajoutez leurs titres à la liste des sections invariantes dans l'avis de licence de la Version Modifiée. Ces titres doivent être distincts des autres titres de section.

- Vous pouvez ajouter une section intitulée «Avenants», à condition qu'elle ne contienne que des approbations de votre version modifiée par diverses parties - par exemple, des déclarations d'examen par les pairs ou que le texte a été approuvé par une organisation comme définition officielle d'une norme.

- Vous pouvez ajouter jusqu'à cinq mots comme texte de première de couverture et jusqu'à 25 mots comme texte de quatrième couverture à la fin de la liste des textes de ces deux couverture dans la Version Modifiée. Un seul passage de texte de premère de couverture et un de texte de quatrième de couverture peuvent être ajoutés par (ou par des arrangements faits par) une entité. Si le Document contient déjà un texte de couverture pour les couvertures sus-mentionnées, précédemment ajouté par vous ou par un arrangement conclu avec la même entité sous le compte de laquelle vous agissez, vous ne pouvez pas en ajouter un autre ; mais vous pouvez remplacer l'ancien, avec l'autorisation explicite de l'éditeur précédent qui a ajouté l'ancien.

- Le(s) auteur(s) et le(s) éditeur(s) du document ne donnent pas la permission d'utiliser leur nom à des fins publicitaires, d'affirmer ou de sous-entendre l'approbation d'une Version

En cours de traduction de l'anglais

Modifiée.

2.2.6 Combinaison de Documents

Vous pouvez combiner le Document avec d'autres documents publiés également sous cette même Licence, selon les termes définis dans la section 4 ci-dessus pour les Versions Modifiées, à condition d'inclure dans la combinaison toutes les Sections Invariantes de tous les documents originaux, non modifiés, et de les lister tous comme Sections Invariantes de votre travail combiné dans son avis de Licence.

Le travail combiné doit seulement contenir une copie de cette Licence, et plusieurs Sections Invariantes identiques peuvent être remplacées par une seule copie. S'il y a plusieurs Sections invariantes avec le même nom mais des contenus différents, rendez le titre de chaque section unique en ajoutant à la fin, entre parenthèses, le nom de l'auteur original ou de l'éditeur de cette section s'il est connu, ou bien un nombre unique. Apportez le même ajustement aux titres de section dans la liste des sections invariables dans l'avis de Licence du travail combiné.

Dans la combinaison, vous devez combiner toutes les sections intitulées *Historique des révisions* dans les divers documents originaux, en formant une section intitulée *Historique des révisions*; De même, vous devez combiner toutes les sections intitulées *Remerciements*.

2.2.7 Collections de Documents

Vous pouvez faire une collection constituée du Document et d'autres documents publiés sous cette Licence, et remplacer les copies individuelles de cette Licence dans les divers documents par une seule copie qui est incluse dans la collection, à condition que vous respectiez les règles de cette Licence pour chaque copie textuelle de chacun des documents à tous égards.

Vous pouvez extraire un seul document d'une telle collection et le distribuer individuellement sous cette Licence, à condition d'insérer une copie de cette Licence dans le document extrait, et de suivre cette Licence à tous égards concernant la copie textuelle de ce document.

2.2.8 Agrégation avec des œuvres indépendantes

Une compilation du Document ou de ses dérivés avec d'autres documents ou travaux séparés ou indépendants, dans ou sur un volume d'un support de stockage ou de distribution, ne compte pas dans son ensemble comme Version Modifiée du Document, à condition qu'aucun droit de compilation ne soit réclamé pour la compilation. Une telle compilation est appelée un "agrégat", et cette Licence ne s'applique pas aux autres oeuvres autonomes ainsi compilées avec le Document, du fait qu'elles sont ainsi compilées, si elles ne sont pas elles-mêmes des oeuvres dérivées du Document.

Si l'exigence du texte de couverture de la section 3 s'applique à ces copies du Document, alors si le document représente moins du quart de l'ensemble, les textes de couverture du Document

En cours de traduction de l'anglais

peuvent être placés sur des couvertures qui entourent uniquement le Document à l'intérieur de l'aggrégat. Sinon, ils doivent apparaître sur les couvertures autour de l'ensemble des agrégats.

2.2.9 Compilation du Document

Vous aurez besoin de trois trois choses pour générer ce document pour vous-même :

1. Installer MiKTeX
2. Installer TeXMaker
3. Une connexion Internet
4. Configurer MikTeX comme indiqué dans les remarques au début du fichier *LaTeX_SciencesCh_FR.tex*

2.2.10 Traductions

La traduction est considérée comme une sorte de modification, vous pouvez donc distribuer des traductions du document sous les termes de la section correspondante sur la transformation. Le remplacement de sections invariables par des traductions nécessite une autorisation spéciale de leurs détenteurs de droits d'auteur, mais vous pouvez inclure des traductions de certaines ou de toutes les sections invariables en plus des versions originales de ces sections invariables.

En cours de traduction de l' anglais

2.2.11 Résiliation

Vous n'êtes pas autorisé à copier, modifier, sous-licencier ou distribuer le Document, sauf dans les cas expressément prévus par cette Licence. Toute autre tentative de copier, modifier, sous-licencier ou distribuer le document est annulée et met fin automatiquement à vos droits en vertu de cette Licence. Cependant, les parties qui ont reçu des copies ou des droits de votre part en vertu de cette Licence ne verront pas leur licence résiliée tant que ces parties resteront en pleine conformité.

2.2.12 Permissions et Copyrights

De nombreuses figures et tableaux de cet ouvrage ont été reproduits à partir de sources protégées par le droit d'auteur. L'autorisation des éditeurs et des auteurs pour l'utilisation du matériel est grandement appréciée. Certaines des sources sont directement identifiées dans les légendes et les notes de bas de page, tandis que de nombreuses autres sont citées par des références alphanumériques ou spécifiés comme de sources inconnues (malgré quelques efforts pour les trouver).

2.2.13 Révisions futures de cette Licence

La Free Software Foundation (FSF) peut publier de temps à autre de nouvelles versions révisées de la Licence de documentation libre GNU. Ces nouvelles versions seront similaires dans l'esprit à la présente version, mais peuvent différer dans le détail pour répondre à de nouveaux problèmes ou préoccupations. Voir http://www.gnu.org/copyleft/.

Chaque version de la Licence reçoit un numéro de version distinctif. Si le Document spécifie qu'une version numérotée particulière de cette Licence "ou toute version ultérieure" s'applique à elle, vous avez la possibilité de suivre les termes et conditions de cette version spécifiée ou de toute version ultérieure qui a été publiée (et non en tant que brouillon) par la FSF. Si le Document ne spécifie pas le numéro de version de cette Licence, vous pouvez choisir n'importe quelle version jamais publiée (pas comme brouillon) par la FSF.

S'il-vous-plaît, pensez à l'environnement avant d'imprimer

En cours de traduction de l' anglais

2.3. Feuille de route

Ce livre a une règle de progression simple qui est : 1 nouvelle page A4 par jour depuis Mai 12001 (calendrier holocène) sur des sujets qui intéressent le superviseur de la distribution *Originale* du livre *Opera Magistris*. Les nouveaux sujets sont débloqués (publiés) en fonction des paliers de dons qui sont faits via note page Tipeee, Patreon ou Paypal. Les sujets suivants sont déjà prévus pour un futur proche ou lointain avec toujours le même niveau de détails et d'approche pédagogique dans les preuves mathématiques que le reste du livre (tous les sujets ci-dessous devraient nécessiter environ $1'500$ à $2'500$ pages supplémentaires) :

- Introduction :
  - Ajouter des remerciements à toutes les personnes qui ont créé la distribution MikTeX / LaTeX et aux packages utilisés pour ce livre
- Théorie de la démonstration :
  - Logique modale
  - Logique probabiliste
  - Abduction statistique
- Probabilités :
  - Conjugaison Bayésienne pour la loi Normale et Binomiale
  - Chaînes de Markove cachées
  - Log-loss
- Statistiques :
  - Mode et Médiane de lois statistiques
  - Maximum de vraisemblance pour données censurées
  - Entropie de la loi Normale
  - Score de Propension
  - Test d'équivalence
  - Matrice de Quasi-corrélation
  - Analyse Factorielle
  - T-Test de Hotelling
  - Résidus standardisés de Pearson
  - Test de Welch avec équation de Welch-Satterhwaite
  - ANCOVA

En cours de traduction de l'anglais

  - Test de Cramer-vos Mises
  - Test de Wald-Wolfowitz Test (des séquences binaires)
  - Test de Levene-Wolfwitz[3] (séquences haussière/baissière)
  - Ellipse de contrôle
  - Mesures basées sur l'entropie des tables de contingence
  - Test de tendance d'Armitage
  - Test d'Ansari-Bradley
  - Test régulier de Dickey-Fuller
  - Modèle de Poisson pour la distance spatiale moyenne (2D)
  - Corrélation canonique
  - G-test de périodicité
  - Copula Gaussien et de Student
  - ANOVA à facteur fixe hiérarchique
  - Introduction à la MANOVA
  - Théorème des valeurs extrêmes
  - Théorème de Pickands-Balkema-De Haan theorem
  - Théorie des sondages
  - Modèles linéaires généralisés (Gauss, Poissson, Binomial Négatif, Gamma)
  - Régression PLS (moindres carrés partiels)
  - Moindres carrés en deux étapes (2SLS)
  - Régression logique
  - Chi-carré ajusté
  - Probabilité des fonctions génératrices

- Géométrie :

  - Volume de l'hypersphère

- Calcul Différentiel

  - Intégrale de Lebesgue avec application numérique dans MATLAB™
  - Représentation intégrale des fonctions de Bessel
  - Linéarisation des puissances des fonctions trigonométriques
  - Intégrales elliptiques et fonction elliptiques

- Analyse Complexe :

  - Théorème des résidus pour des ratios de polynômes
  - Théorème de la valeur moyenne de Gauss

En cours de traduction de l' anglais

[3] aussi appelé "test de point de bifurcation" ou "test de tendance"

- Topologie :
  - Distance de Mahalanobis
- Géométrie Différentielle :
  - Coordonnées normales
  - Courbure de Gauss
  - Périmètre d'un circle sur le plan, sur la sphère et sur une surface hyperbolique
  - Théorème isopérimètrique du plan
- Mécanique :
  - Effet Magnus
  - Critère de Lawson (plasmas)
  - écoulement à travers un orifice submergé
  - écoulement sur les encoches et les déversoirs
  - Force due à l'écoulement autour d'un coude de tuyau
  - Force sur une buse
  - Impact d'un jet sur un avion
  - Turbine Pelton
  - Force due à un jet atteignant un plan incliné
  - Effet bélier d'un fluide
  - équations de Saint-Venant
  - Portance de Kutta-Joukowski
- Électrodynamique :
  - Champs électromagnétiques d'une sphère de charges en rotation
  - équation de Sellmeier
  - Brehmstrahlung (commencé mais pas fini)
  - Principe de l'interféromètre de Michelson
  - Couple de rotor d'un électroaimant
- Électrocinétique :
  - Convertisseur photoélectrique
  - Jonctions PN
- Astronomie :
  - Formule de MacCullagh's
  - Calcul indirect de l'aplattissement des corps célestes
  - Verrouillage synchrone des satellites en révolution

En cours de traduction de l' anglais

- Aplatissement des sphéroïdes
- Sphère d'influence
- Échappement planétaire

• Relativité Générale :

  - Volume réel d'un objet en relativité générale
  - Dérivation du rayon d'Einstein
  - Théorème général de Birkhoff
  - Global Positioning System (GPS)
  - Métrique et solution de Kerr

• Cosmologie :

  - Finir le texte sur les Univers de Friedman basés sur la Relativité Générale (débuté mais pas fini)
  - Dérivation du rayon d'Einstein
  - Température théorique du fond diffus cosmologique
  - Théorie de Kaluza-Klein

• Physique Nucléaire :

  - Diffusion Rayleigh
  - Transport de Neutrons
  - Spin (hélicité) et relation de polarité du photon
  - Les inégalités de Bell
  - L'inégalité de Kennard des incertitudes de Heisenberg
  - Calcul détaillé du déplacement Lamb
  - Expérience de Davisson-Germer
  - Formalisme du paradoxe EPR

• Physique Quantique Ondulatoire :

  - Temps de l'effet tunnel quantique

• Physique Quantique Relativiste :

  - Parité, conjugaison de charge et inversion temporelle (CPT)

• Chimie Quantique :

  - Théorie de la répulsion de la paire d'électrons de Valence
  - Dérivation de l'équation de Sackur-Tetrode

• Méthodes numériques :

  - Problème d'optimisation univariée par la méthode de substitution

En cours de traduction de l' anglais

  - échantillonnage par acceptation/rejet
  - échantillonnage de Gibbs
  - Indicateur de cohérence de Cronbach
  - Analyse Discriminante Linéaire (ADL)
  - Analyse Discriminant Quadratique (ADQ)
  - Positionnement Multidimensionnel (MDS)
  - Modèle Linéaire Mixte (MLM)
  - Décalage moyen
  - Analyse Factorielle (AF)
  - Analyse factorielle des Correspondances (AFC)
  - Méthode d'optimisation GRG (gradient réduit généralisé)
  - Informations mutuelles normalisées
  - Machines à vecteurs de support (MVS)
  - Détection d'Interactions Automatiques par le Chi-2 (CHAID)
  - Analyse sémantique latente(LSA)
  - échantillonnage préférentiel
  - échantillonnage stratifié
  - Monte Carlo avec variable de contrôle
  - Classificateur Bayésien Naif binomial et Gaussien
  - Réduction dimensionnelle par la corrélation
  - Algorithmes ID3, PRISM, AQ, CN2 et C4.5
  - Analyse procustéenne
  - Analyses en Composantes Indépendantes (ICA)
  - Modèle uplift

En cours de traduction de l'anglais

- Informatique Quantique :
  - Impossibilité du clonage quantique
- Cryptographie :
  - Courbes elliptiques
- Ingénierie :
  - Domaines de Box
  - Plans de criblage définitifs (DSD)
  - Plans Split-plots
  - Plans Composites Centraux
  - Plans Cubiques Faces Centrées
  - Modèle de Survie de Cox (modèle à hasard proportionnel de Cox)

  - Modélisation par équations structurelles
  - Tests de veillissements accélérés
  - Microélectronique (jonctions NPN/PNP, diodes, amplificateurs)
  - Équations des télégraphistes
  - Théorème de poussée de Kutta-Jukowski
- Théorie des jeux et de la décision :
  - Coalition
  - Valeur de Shapley
  - Critère de Kelly
- Économie :
  - Taux de rendement continu
  - Courbe des taux zéro-coupons
  - équivalence du taux d'une obligation avec un bon du trésor
  - Taux Spot et taux Forward
  - Ajustement du beta d'un portefeuille avec des Futures
  - égalité du prix de Cox-Ingersoll des Future/Forward
  - Solution de l'EDP de Black & Scholes
  - Duration de Macaulay
  - Duration Modifiée
  - Taux de Retour Interne Modifié (MIRR)
  - Couverture de portefeuilles par options
    - Option de Vente/Achat de protection (protective Put/Call)
    - écart d'option d'achat à la hausse (bull Spread/Call)
    - écart d'option d'achat à la vente (bear Spread/Call)
    - Papillon (butterfly)
    - Opération liée (straddle)
    - Position combinée (strangle)
    - Collar
    - Écart de Box (Box spread)
    - Écart de Calendrier (calendar spreads)
    - Méthodes d'allocation de portefeuilles
      - Portefeuille pondéré optimal pour un risque équilibré
      - Portefeuille pondéré optimal pour le suivi des erreurs
      - Portefeuille pondéré optimal de Sharp
      - Portefeuille pondéré optimal avec une diversification maximale
      - Portefeuille de Treynor-Black optimal pondéré en fonction du benchmark
  - Grecques pour les arbres binomiaux

En cours de traduction de l' anglais

- Swaps
- Formule de Margrabe
- Fomrule (approxmative) de Kirk
- Risque de défaut de crédit (basé sur la notation de Standard & Poor)
- CreditRisk+
- VaR Equity Coverage
- Perte conditionnelle de la VaR (CVaR)
- Approche de KMV-Merton pour le mesure de probabilité de défaut
- Distance jusqu'à défaut
- Équation de Fokker-Planck
- Processus stochastiques ARCH-GARCH
- Modèles autorégressifs vectoriels pour séries temporelles multivariées
- Test de Granger pour la causalité de deux séries temporelles
- Filtres de Karman
- Modèle de pricing d'options de Heston
- Pricing d'options de type Spread

• Management Quantitatif :

- Algorithme de Gale-Shapley
- Modèles Pareto/NBD, BG/NBD et BG/BB de la valeur vie client
- Problème du vendeur de journaux
- Effet coup de fouet
- Paradoxe de Condorcet
- Méthode CRAFT (Computerized Relative Allocation of Facilities Technique)
- Options réelles
- Capital différé en cas de survie (assurance vie)
- Indice de volatilité CBOE (commencé mais pas terminé)
- Décès différé temporaire (assurance vie)

• Biographies :

- Ajout de la religion de chaque individu présenté dans la biographie à la demande d'un lecteur

De plus, nous souhaitons créer une version résumée de ce PDF (sans les développements détaillés mais uniquement avec les résultats principaux) et une présentation avec diapositives (réalisées avec Beamer) uniquement avec les résultats, textes et images / graphiques principaux pouvant être utilisés par n'importe quel enseignant gratuitement dans le monde entier.

Une copie du fichier PDF est disponible sur les Archives Internet (fichier de 165 Megabytes...) :

En cours de traduction de l' anglais

https://archive.org/details/@scientific_solutions

Pour citer ce livre (non ce n'est pas une blague... la version anglaise sera probablement finie d'être traduite en français en 12040 selon nos estimations actuelles) :

@book{OperaMagistris12040v4,
title = {Opera Magistris - Éléments de Mathématiques Appliquées pour Ingénieurs},
year = {12040},
keywords = {science, physique, maths, ingénierie, finance, management},
isbn = {978239909327},
DOI={10.5281/zenodo.5816819}
}

En cours de traduction de l'anglais

3 Remerciements

Les idées et évidences compilées dans ce livre ont été développées et renforcées par de nombreuses personnes. J'ai beaucoup bénéficié de mes interactions régulières avec des étudiants (universités, écoles d'ingénieurs) et des cadres de tous horizons, y compris les PDG, directeurs financiers, chefs de projets de nombreuses entreprises à travers le monde, sessions d'enseignements, développement de programmes spécifiques, conseil et même conversations informelles. Je leur suis reconnaissant d'avoir partagé leur sagesse et expérience tout en supportant mes nombreuses questions dans des échanges calmes et constructifs et qui ont inspiré de nombreuses idées de ce livre. Je suis également reconnaissant à tous les scientifiques, économistes, ingénieurs, illustrateurs et vulgarisateurs scientifiques des ces derniers millénaires sans qui ce livre n'existerait pas dans sa forme actuelle. Ceci inclut les approximativement $1'500$ personnes suivantes :

Karl Pearson, Louis Agassiz, Maria Gaetana Agnesi, Al-Battani, Abu Nasr Al-Farabi, Alhazen, Jim Al-Khalili, Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi, Mihailo Petrovic Alas, Angel Alcala, Salim Ali, Luis Alvarez, Andre Marie Ampère, Anaximander, Carl David Anderson, Mary Anning, Milner Baily Schaefer, Charles Geschke, Virginia Apgar, Archimedes of Syracuse, Agnes Arber, Aristarchus of Samos, Aristotle, Svante Arrhenius, Oswald Avery, Amedeo Avogadro, Waloddi Weibull, Avicenna, Charles Babbage, Francis Thomas Bacon, Alexander Bain, T. Johnson, John Logie Baird, Pierre Barbier, Joseph Banks, Ramon Barba, John Bardeen, Fjodor van Veen, Charles Barkla, Stichting Tegenbeld, Ibn Battuta, Giulio Fagnano, William Bayliss, Colin Maclaurin, Neyman Jerzy, George Beadle, Arnold Orville Beckman, Henri Becquerel, Georges Geiser, Gilles Delpin, Steven Weinberg, R. Ellis, Alain Vienne, Emil Adolf Behring, Jean le Rond Alembert, Alexander Graham Bell, Alonso Marcelo, Emily Lakdawalla, Carl R. Rod Nave, J. Finn Edward, Lawrence Schwartz, Yves Ayant, Aleksander Gwiazad, Elie Belorizky, Aco Z. Muradjan, Louis Bachelier, Wihelm Weber, Bass Issa, Thomas Pyzdek, Jean-Pierre Durandeau, Roger Bautrant, Paul Bramand, Régis Martegoutes, Ignacio Icke, Roger Sahun, Olivier Berruyer, Geroges Thomassier, Daniel Schwen, Chris Fach, Michael S. Fuhrer, Shaffique Adam, Emmanuel Rosencher, Paul Keller, Serge Mehl, Christophe Afonso, Riadh Ben Hamouda, Bernard Schaeffer, John J. Uicker, Anthony Quintano, Charles Pache, G.R. Pennock, Eric Rolph, Maurice Pillet, G. I. Taylor, Joseph Edward Shigley, Lucien Borel, Sebastien Bossu, Felix Klein, Philippe Henrotte, Jean-Louis Boursin, Martin Bircher, Andrew Z. Colvin, Nicomachus of Gerase, William Forsyth Sharpe, Frank Bowman, Sébastien Tanzilli, Bernard Cagnac, Jean-Clean Pebay-Peyroula, Apollonius of Tyana, Saung Tadashi, Robert P. Kirshner, Vittoria Rezzonico, Max Roser, C. Hebeisen, Martin Kutta, Nikolay Joukowski, Michel Tenenhaus, Gareth Jones, Renzo Cairoli, Hermann Weyl, Robin Plackett, J.P. Burman, Jan Hladik, Pierre-Emmanuel Hladik, Leon Walras, George E. P. Box, K.B. Wilson, Jawed Karim, Chard Hurley, Steve Chen, Johannes Diderik Van Der Waals, Robert Cobbaut, Pascual Jordan, François-Éric Racicot, Raymond Théoret, Sam Denby, Vilfredo Pareto, Genichi Taguchi, David Parker, Christian Schirm, François Viète, Jean-Baptiste Biot, Richard Baraniuk, Thomas Bauer, Thierry Roncalli, Jimmy Roussel, Olivier Cogis, Claudine Robert, Howard Curtis, Zoran Popovic, B. D. Popovic, Thomas Bayes, Alexander M. Mood, Juergen Giesen, John. D. Cutnell, Felix Bernstein, Oldrich Alfons Vasicek, Stephen Kealhofer, Charles C. Holt, Peter Winters, James Durbin, Corrado Gini, Kaoru Ishikawa, Henry Laurence Gantt, Kenneth W. Johnson, Harry Nyquist, Alastair L. Day, Paul Langevin, Walter Hohmann, Edsger W. Dijkstra, Ferdinand Georg Frobenius, Jean-Marie De Koninck, Armel Mercier, Jean-Loup Delcroix, Gregorio Ricci-Curbastro, Félix Savart, Abraham Bers, Bipin R. Desai, René Didier, Brook Taylor, Pierre Grecias, Bernard Diu, Claudine Guthmann, Teller Edward, Bernard Roulet, Aqeel Anwar, Danielle Lederer, Jacques Douchet, Bruno Zwahlen, Dean G. Duff, Georges Duvaut, Roger Penrose, Edgard Elbaz, Mario Novello, Christian Gentili, Vincent Giard, Carl D. Murray, Myron Scholes, Edward Witten, Stanley F. Dermott, Jimmy Wales, Larry Sanger, Larry Page, Sergey Brin, Jean-Marc Huguenin, Peter Atkins, Claude Elwood Shannon, Ronald S. Friedman, Normand M. Laurendeau, Viktor Witkovsky, Pieter Zeeman, Martin Thoma, Kevin Binz, Dave Jones, Stephan Kulla, Joseph G. Eisenhauer, Stefan Banach, Denis Boigelot, Peter Hoyng, Abu Yusuf Ya'qub Ibn Al-Kindi, Salman Khan, Jeff Atwood, Joel Spolsky, Jason Condon, AMS Lawrence, Frank Morgan, M. Leemis, Jacquelyn T. McQueston, Niels Henrik Abel, Randall Munroe, Scott M. Ransom, Sam Derbyshire, Johann Jakob Balmer, Hugues Vermeiren, Nicholas L. Squeglia, Pierre Alphonse Laurent, Robert Phillips, Gustav Robert Kirchhoff, Knut Hinkelmann, Camille Jordan, Oscar Kempthorne, Ferdinand von Lindemann, Edward Lucas, Eric D. Feigelson, G. Jogesh Babu, Charles-Emile Picard, George Boole, Rob J. Hyndman, Edmond Laguerre, George Athanasopoulos, Ray D'Inverno, Hans Stephani, Lewis Ryder, George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris, Arthur Asquith Rayner, Kristopher Tapp, Abu Ali al-Husayn ibn Abd Allah Ibn Sina, James P. Howard, E. Joseph Billo, Tobias Holzmann, Josh Neufeld, Abu'l-Hasan al-Uqlidisi, John D. Lawson, Charles E. McCulloch, Shayle R. Searle, Wessel N. van Wieringen, Leucippus of Miletus, Oscar Levin, Robert Vincent Hogg, Tanis Elliot, Bessel Friedrich, Dale Zimmerman, Sepp Hochreiter, Jurgen Schmidhuber, Kurt Gieck, Jack Gieck, K. Kanjii Gopal, Jacques Alexis, Jacques Goupy, Ernst Hairer, Gerhard Wanner, Robert Resnick, David Halliday, Paul Richard, Eugene Hecht, Russell Hibbeler, Jean Hladik, John C. Hull, Jacques Istas, Luan Jaupi, Reza N. Jazar, Richard Arnold Johnson, Dean W. Wichern, Philippe Jorion, Toon Koppelaars, Israel Koren, C. Mani Krishna, Amitabha Lahiri, Palash Baran Pal, Frederic Laroche, J.-Ch. Corbaz, Daniel Goetschi, Malcolm Ludvigsen, Marc Lachieze-Rey, Patrick Lyonnet, Franz Mandl, Henry Mathieu, Autolycus of Pitane, Herve Fanet, Douglas C. Montgomery, Chee-Hock Ng, Soong Boon-Hee, Nikolai Semenovich Piskunov, Richard Wallace Robinett, Francois Rothen, R. Paul Singh, Dennis R. Heldman, James Stewart, Daniel Thiel, Herve Thiriez, William S.C. Williams, Menaech-mus, Paul Wilmott, Reza Zafarani, Mohammad Ali Abbasi , Huan Liu, Wilford Zdunkowski, Andreas Bott, Barton Zwiebach, Christian Gary D., Partha Dasgupta, Kevin Schug, Tilo Arens, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Stephen A. Ross, Randolph Westerfield, Bradford Jordan, Carlos Oliveira, Abu al'Fath Khazini,Abu al'Fath KhaziniAbu al'Fath Khazini Jonathan Cryer, Kung-Sik Chan, Ivo Welch, Mike Zabrocki, William H. Press, Saul. A. Teukolsky, William T. Vetterling, Michel Vermot, Philippe Bovay, Damien Prongue, Sebastien Dorder, Pascal Winkler, J.W. Dettman, D.W. Thomas, C.S. Barrett, C.W. LeSage, William H. Louisell, Ferdinand Filip, Gilbert Strang, Edwin Herman, Lev Davidovich Landau, Evgeny Lifshitz, Emile Berliner, Claude Bernard, Timothy John Berners-Lee, Kolani Daname, Daniel Bernoulli, Jacques Bernoulli, Bernoulli Jean, Jacob Berzelius, Henry Bessemer, Hans Bethe, Homi Jehangir Bhabha, Alfred Binet, Clarence Birdseye, Kristian Birkeland, James Black, Bhagabati Sutra, Elizabeth Blackwell, Alfred Blalock, Katharine Burr Blodgett, Franz Boas, David Bohm, Aage Bohr, Niels Henrik David Bohr, Ludwig Boltzmann, Max Born, Carl Bosch, Robert Bosch, Jagadish Chandra Bose, Satyendra Nath Bose, Walther Wilhelm Georg Bothe, Robert Boyle, William Lawrence Bragg, Tycho Brahe, Brahmagupta, Hennig Brand, Georg Brandt, Karl Schwarzschild, Thucydides, Wernher Von Braun, J Harlen Bretz, Louis de Broglie, Alexander Brongniart, Robert Goodell Brown, Michael E. Brown, Lester R. Brown, Eduard Buchner, Linda Buck, William Buckland, Georges-Louis Leclerc, Mathias Legrand, Comte de Buffon, Sulbar Sutras of Manava, Robert Wilhelm Bunsen, Luther Burbank, Jocelyn Bell Burnell, Macfarlane Burnet, Thomas Burnet, Benjamin Cabrera, Santiago Ramon y Cajal, Rachel Carson, Rudolf Bauer, George Washington Carver, Benoit Mandelbrot, Henry Cavendish, Anders Celsius, James Chadwick, Subrahmanyan Chandrasekhar, Erwin Chargaff, Noam Chomsky, Âryabhat, Steven Chu, Leland Clark, John Cockcroft, Arthur Compton, Nicolaus Copernicus, Gerty Theresa Cori, Vincent Isoz, Charles-Augustin de Coulomb, Jacques Cousteau, Brian Cox, Francis Crick, James Croll, Emile Borel, Nicholas Culpeper, Marie

En cours de traduction de l'anglais

Curie, Pierre Curie, Georges Cuvier, Adalbert Czerny, Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, Dmitry S. Gorbunov, Valery Rubakov, Rob J. Hyndman, Yanan Fan, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, Mozi, Ruey S. Tsay, Alireza Navabi, Apastamba Dharmasutra, Nicki Hise, Jose D. Perezgonzalez, Yutaka Sasaki, Supriyo Bandyopadhyay, Marc Cahay, Frederick K. Lutgens, Edward J. Tarbuck, Albert E. Beaton, John Wilder Tukey, Michael Kutner, Piotr Korbel, Milan Novak, A.R.Harish, M. Sachidananda, Yunus A Cengel, John Cimbala, Aapo Hyvarinen, Erkki Oja, Davide Tavella, Florian Gouthiere, Frank Harrell, James F. Crow, Motoo Kimuram, T.H.G. Megson, Sophocles J. Orfanidis, Eric Barends, Denise M. Rousseau, Rafal Jozefowicz, Wojciech Zaremba, Ilya Sutskever, Matthew Hamilton, Philip C. Magnusson, Andreas Weisshaar, Vijai K. Tripathi, Gerald C. Alexander, Paul J. Nahin, Jean-Baptiste Joseph Fourier, Paul J. Nahin, Raymond A. Serway, John W. Jewett, David W. Ball, Daniel Fels, Michal Cifra, Felix Scholkmann, Gottlieb Daimler, John Dalton, James Dwight Dana, Charles Darwin, Humphry Davy, Peter Joseph Wilhelm Debye, Max Delbruck, Jean Andre Deluc, Democritus of Abdera, René Descartes, Rudolf Christian Karl Diesel, Diophantus of Alexandria, Paul Adrien Maurice Dirac, Prokop Divis, Theodosius Dobzhansky, Frank Drake, K. Eric Drexler, John Eccles, Arthur Eddington, Thomas Edison, Harmel Léon, Paul Ehrlich, Albert Einstein, Gertrude Elion, Empedocles, Hidek Yukawa, Eratosthenes of Cyrene, Euclid, Eudoxus of Cnidus, Leonhard Euler, Michael Faraday, Pierre de Fermat, Enrico Fermi, Richard Phillips Feynman, Fibonacci – Leonardo of Pisa, Emil Fischer, Ronald Aymler Fisher, Alexander Fleming, Ambrose Fleming, Howard Florey, Henry Ford, Ruben Ricchiuto, Lee De Forest, Dian Fossey, Thomas Young, Leon Foucault, Benjamin Franklin, Rosalind Franklin, Sigmund Freud, Elizebeth Smith Friedman, Galen, Galileo Galilei, Francis Galton, Luigi Galvani, George Gamow, Martin Gardner, Carl Friedrich Gauss, Murray Gell-Mann, Sophie Germain, Willard Josiah Gibbs, William Gilbert, Sheldon Lee Glashow, Robert Goddard, Maria Goeppert-Mayer, Thomas Gold, Jane Goodall, Stephen Jay Gould, Otto von Guericke, Fritz Haber, Ernst Haeckel, Otto Hahn, Albrecht von Haller, Edmund Halley, Alister Hardy, Thomas Harriot, William Harvey, Stephen Hawking, Felix Bloch, Pierre Francois Verhulst, Patrick H. Leslie, Alfred J. Lotka, Vito Volterra, Godfrey Harold Hardy, Wilhelm Weinberg, Edward John Routh, Adolf Hurwitz, Charles Cobb, Paul Douglas, Hermann Paasche, Etienne Laspeyres, Alfred Marshall, Francis Ysidro Edgeworth, Richard Roll, Robert B. Durand, Frederick Macaulay, John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Fischer Black, Jack L. Treynor, Fischer Black, Norbert Wiener, Robert C. Merton, Otto Haxel, Karl Werner Heisenberg, Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, Empedocles of Acragas, Jan Baptist von Helmont, Joseph Henry, Caroline Herschel, Thomas Robert Malthus, John Herschel, William Herschel, Gustav Ludwig Hertz, Heinrich Hertz, George Gabriel Stokes, Karl F. Herzfeld, George de Hevesy, Jabir Ibn Hayyan, Antony Hewish, David Hilbert, Maurice Hilleman, Hipparchus of Nicaea, Hippocrates, Shintaro Hirase, Dorothy Hodgkin, Robert Hooke, Frederick Gowland Hopkins, William Hopkins, Grace Murray Hopper, Frank Hornby, Jack Horner, Leopold Kronecker, Bernardo Houssay, Abu Sahl al-Qouhi, Joseph Liouville, Fred Hoyle, Edwin Hubble, Alexander von Humboldt, Zora Neale Hurston, Frank Yates, James Hutton, Christiaan Huygens, Hypatia, August Ferdinand Möbius, Ernesto Illy, Ernst Ising, Keisuke Ito, Mae Carol Jemison, Edward Jenner, Johannes Hans Daniel Jensen, Irene Joliot-Curie, Jonathan B. Berk, Peter DeMarzo, Chuong B. Do, Serafim Batzoglou, Augustin-Louis Cauchy, Jan Egbertus Luitzen Brouwer, Benjamin Bray, Pontus Olofsson, Andrei Kolmogorov, Marco Taboga, Ibn Al Haytham, Ken Dill, Sarina Bromberg, Karen K. Yuen, Rand R. Wilcox, Kamil Akhmetovich Valiev, Helmuth Spieler, Simon Min Sze, Myoungkyu Lee, Ulrich Walter, Max Kuhn, Hannu Karttunen, Pekka Kroger, Heikki Oja, Markku Poutanen, Karl Johan Donner, Edward W. Kolb, Lee Tsung-Dao, Horacio Santana Vieira, Valdir B. Bezerra, Horacio Santana Vieira, Valdir B. Bezerra, David L. Pulfrey, Jean-Philippe Duzan, Victor J. Stenger, Richard Dawkings, Michael Martin, Ricki Monnier, Christopher Hitchens, David L. Streiner, Herbert Benson, Jeffery A. Dusek, Jane B. Sherwood, Peter Lam, Charles F. Bethea, William Carpenter, Georg Cantor, Sidney Levitsky, Peter C. Hill, Donald W. Clem Jr., Manoj K. Jain, Randolph C. Byrd, Sebastien Ruder, Kimball A. Milton, James Prescott Joule, Percy Lavon Julian, Michio Kaku, Heike Kamerlingh Onnes, Pyotr Kapitsa, Friedrich August Kekulé, Frances Kelsey, Pearl Kendrick, Johannes Kepler, Abdul Qadeer Khan, Omar Khayyam, Frank Anscombe, Alfred Kinsey, Gustav Kirchoff, Martin Klaproth, Robert Koch, Emil Kraepelin, Thomas Kuhn, Stephanie Kwolek, Joseph-Louis Lagrange, Jean-Baptiste Lamarck, Hedy Lamarr, Edwin Herbert Land, Karl Landsteiner, Pierre-Simon Laplace, Max von Laue, Antoine Lavoisier, Ernest Lawrence, Henrietta Leavitt, Antonie van Leeuwenhoek, Inge Lehmann, Gottfried Wihelm Leibniz, Georges Lemaître, Leonardo da Vinci, Niccolo Leoniceno, Henri Bénard, Aldo Leopold, Rita Levi-Montalcini, Claude Levi-Strauss, Willard Frank Libby, Justus von Liebig, Heraclides Ponticus, Carolus Linnaeus, Joseph Lister, John Locke, Hendrik Antoon Lorentz, Konrad Lorenz, Ada Lovelace, Percival Lowell, Lucretius, Charles Lyell, Trofim Lysenko, Jean-Baptiste Say, Pascal Brachet, Ernst Mach, Marcello Malpighi, Jane Marcet, Guglielmo Marconi, Lynn Margulis, Polly Matzinger, Matthew Maury, Muhammad Ibn Ahmad Abul-Rayhan Al-Biruni, James Clerk Maxwell, Ernst Mayr, Barbara McClintock, Lise Meitner, Gregor Johann Mendel, Yajnavalkya, Dmitri Mendeleev, Franz Mesmer, Antonio Meucci, John Michell, Albert Abraham Michelson, Thomas Midgeley Jr., Milutin Milankovic, Maria Mitchell, Mario Molina, Thomas Hunt Morgan, Samuel Morse, Henry Moseley, Ukichiro Nakaya, John Napier, Giulio Natta, John Needham, John von Neumann, Thomas Newcomen, Adam Smith, Isaac Newton, Charles Nicolle, Florence Nightingale, Tim Noakes, Alfred Nobel, Emmy Noether, Christiane Nusslein-Volhard, Bill Nye, Hans Christian Örsted, Georg Simon Ohm, Frank Wilcoxon, J. Robert Oppenheimer, Wilhelm Ostwald, William Oughtred, Josef Stefan, Blaise Pascal, Louis Pasteur, Wolfgang Ernst Pauli, Linus Pauling, Charles François Sturm, Randy Pausch, Ivan Pavlov, Cecilia Payne-Gaposchkin, Wilder Penfield, Marguerite Perey, William Perkin, John Philoponus, Jean Piaget, Philippe Pinel, Max Planck, Pliny the Elder, Henri Poincaré, Hermann Minkowski, Karl Popper, Beatrix Potter, Joseph Priestley, Proclus, Claudius Ptolemy, Pythagoras, Adolphe Quetelet, Harriet Quimby, Thabit Ibn Qurra, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, C. V. Raman, Srinivasa Ramanujan, William Ramsay, John Ray, John Henry Poynting, René Thom, Siméon Denis Poissson, Prafulla Chandra Ray, Arthur Cayley, Nicolas Léonard Sadi Carnot, Gaspard Monge, Francesco Redi, Karl Marx, Sally Ride, Georg Friedrich Bernhard Riemann, Wilhelm Röntgen, John Forbes Nash, Élie Cartan, Hermann Rorschach, Ronald Ross, Ibn Rushd, Ernest Rutherford, Carl Sagan, Abdus Salam, Jonas Salk, Robert Cox Merton, Frederick Sanger, John William Strutt Rayleigh, Henri Navier, Alberto Santos-Dumont, André-Marie Legendre, Walter Schottky, Erwin Schrödinger, Theodor Schwann, John Maynard Keynes, Glenn Seaborg, Hans Selye, Carl Jacobi Charles Sherrington, Gene Shoemaker, Ernst Werner von Siemens, George Gaylord Simpson, Edward H. Simpson, Milutin Milankovic, B. F. Skinner, William Smith, Frederick Soddy, Mary Somerville, Henri Léon Lebesgue, Arnold Sommerfeld, Hermann Staudinger, Nicolas Steno, Nettie Stevens, Andrei Andreyevich Markov, William John Swainson, Alexis-Claude Clairaut, Leo Szilard, Niccolo Tartaglia, Edward Teller, Nikola Tesla, Thales of Miletus, Theon of Alexandria, Benjamin Thompson, Joseph John Thomson, William Thomson, Henry David Thoreau, Kip S. Thorne, Clyde Tombaugh, Susumu Tonegawa, Evangelista Torricelli, Charles Hard Townes, Youyou Tu, Alan Turing, Jürgen Wagner, Neil deGrasse Tyson, Harold Urey, Tullio Levi-Civita, Craig Venter, Vladimir Vernadsky, Maric Vladimir, Andreas Vesalius, Rudolf Virchow, Artturi Virtanen, Alessandro Volta, Selman Waksman, George Wald, Alfred Russel Wallace, Peter W. Milonni, Meng-Li Shih, Jeremy N. Munday, Federico Capasso, V. Adrian Parsegian, H. Vic Dannon, Leonard S. Levitt, Marco Scutari, Jean-Baptiste Denis, A. Ronveaux, Felix Medland Arscott, Gerhard Wolf, Plinio Maroni, Anne Duval, Christian P. Robert, George Casella, Gunter Meissner, Ernst Gobel, Uwe Siegner, Russell C. Hibbeler, Tristan Fletcher, Dan Ventura, Michael Ware, Justin Peatross, Michael Edward Peskin, John Wallis, Ernest Walton, James Watson, James Watt, Alfred Wegener, John Archibald Wheeler, Maurice Wilkins, Thomas Willis, E. O. Wilson, William Wilson, Sven Wingqvist, Sergei Winogradsky, Carl Woese, Friedrich Wöhler, Wilbur et Orville Wright, Wilhelm Wundt, Chen-Ning Yang, Ahmed Zewail, V. B. Berestetskii, Lev Petrovich Pitaevskii, John Stewart Bell, M. J. Kearsley, John Bradbury Sykes, Zivorad R. Lazic, Jean-Pierre Demailly, John A. Cornell, Alan Sokal, Jean Bricmont, Mohammed J. Zaki, Wagner Meira, Raghu N. Kacker, Eric S. Lagergren, James J. Filliben, Cleve Moler, Norman H. Nie, C. Hadlai Hull, Dale H. Bent, Keith Geddes, Gaston Gonnet, Bill Gates, Spencer Kimball, Peter Mattis, H.C. Co, Raymond Theoret, Don M. Chance, Mao Xin, Andrew Fraknoi, David Morrison, Sidney C. Wolff, Philippe Mangin, Remi Kahn, Yung Kuo Lim, Robert Eisberg, Thomas Juffman, Adriana Milic, Michael Mullneritsch, Peter Asenbaum, Alexander Tsukernik, Jens Tuxen, Marcel Mayor, Ori Cheshnovsky, Markus Arndt, Christian Wagner, Simon Miller, Jonathan M. Garibaldi, David A. Freedman, Walter Schachermayer, Josef Teichmann, Walter Zucchini, Adrian W. Bowman , Adelchi Azzalini, A. Berzel, O. Nenadic, Ross Ihaka, Robert Gentleman, Leslie Lamport, David A. Grossman, Ophir Frieder, Stan Uryasev, Sergey Sarykin, Gaia Serraino, Konstantin Kalinchenko, Jeffrey Strickland, Douglas Bates, John Chambers, Peter Dalgaard, Kurt Hornik, Tomas Kalibera, Michael Lawrence, Friedrich Leisch, Uwe Ligges, Thomas Lumley, Martin Maechler, Martin Morgan, Paul Murrell, Martyn Plummer, Brian Ripley, Deepayan Sarkar, Duncan Temple Lang, Luke Tierney, Simon Urbanek, Heiner Schwarte, Guido Masarotto, Stefano Iacus, Seth Falcon, Duncan Murdoch, Paul Joseph Cohen, Gaspard Coriolis, Daniel McFadden, Alain Cohen, Antoine Augustin Cournot, Rudolf Clausius, Gabriel Cramer, Sophus Lie, Irène Joliot-Curie, Frédéric Joliot-Curie, Harry Maurice Markowitz, George Bernard Dantzig, Peter Gustav Dirichlet(-Lejeune), Christian Doppler, Paul Karl Ludwig Drude, Paul Erdös, Agner Krarup Erlang, Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky, Mitchell Feigenbaum, Joseph von Fraunhofer, Augustin Jean Fresnel, Alexander Friedmann, Kurt Gödel, Evariste Galois, William Sealy Gosset, Frege Friedrich Ludwig Gottlob, Alexander Grothendrieck, Edwin Herbert Hall, William Rowan Hamilton, Felix Hausdorff, Oliver Heaviside, Abu al-Wafa' Buzjani, Charles Hermite, Harold Hotelling, Gregory Benford, R. Length, David B. Laney, William Gemmell Cochran, Sture Holm, Carlo Emilio Bonferroni, Zbynek Sidak, Nikolai Smirnov, R. Length, David B. Laney, William Gemmell Cochran, Sture Holm, Carlo Emilio Bonferroni, Zbynek Sidak, Theodore Wilbur, Donald Allan Darling Anderson, Harald Cramer, Richard von Mises, Frank Wilcoxon, Henry Mann, Donald Ransom Whitney, William Kruskal, Wilson Allen Wallis, Milton Friedman, Charles Spearman, Maurice Kendall, R. H. Wilson, Agner Krarup Erlang, Quinn McNemar, Edward L. Kaplan, Paul Meier, Nathan Mantel, William M. Haenszel, David Cox, Guido Fubini, Lorenzo Mascheroni, Luigi Guido Grandi, Andre-Louis Cholesky, Jorgen Pedersen Gram, Elwin Bruno Christoffel, Germinal Pierre Dandelin, Rudolf Lipschitz, Johann Samuel König, Waclaw Sierpinski, Thomas Simpson, Carl Runge, Barbara Ryan, Brian Joiner, Jonathan Cryer, Carl Neumann, Adhemar Jean Claude Barre de Saint-Venant, Adolf Fick, Warren McCulloch, Walter Pitts, Wesley A. Clark, Frank Rosenblatt, Alexey Ivakhnenko, Henry J. Kelley, Arthur E. Bryson, Ian Goodfellow, Kunihiko Fukushima, David E. Rumelhart, Jean Leonard Marie Poiseuille, Giovanni Battista Venturi, Ian Goodfellow, Henri Pitot, Osborne Reynolds, Joseph Valentin Boussinesq, Hugo Tetrode, Otto Sackur, Meghnad Saha, Joseph Larmor, Alfred-Marie Lienard, Emil Wiechert, Max Abraham, Emil Lenz, August Beer, Johann Heinrich Lambert, Willebrord Snellius, Cherenkov radiation, Etienne-Louis Malus, Howard P. Robertson, Hendrik Casimir, Paul Ehrenfest, Alfred Lande, Willis Eugène Lamb, Jacques Philippe Marie Binet, Hippolyte Fizeau, Joseph Carl Hafele, Richard E. Keating, Alfred Schild, Irwin Shapiro, Howard P. Robertson, Arthur Geoffrey Walker, Bryce DeWitt, John Archibald Wheeler, Yoichiro Nambu, Tetsuo Goto, Hero of Alexandria, James Stirling, Abraham de Moivre, W. Edwards Deming, Colin Lingwood Mallows, Al-Sijistani Zuraqi, Hirotugu Akaike, Roger Cotes, Helge von Koch, Gaston Julia, Shelly Palmer, Maurice Karnaugh, Edward W. Veitch, John Venn, David A. Huffman, August Albert Sardinas, George W. Patterson, Auguste Kerckhoffs, Horst Feistel, Whitfield Diffie, Martin Hellman, Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman, Geoffrey Everest Hinton, Michel Mayor, Didier Queloz, Eric Cornell, Carl Wieman, Andrew Wiles, Bill Smith, Mikel J. Harry, Carlo Rubbia, Simon van der Meer, Alain Aspect, Leonard E. Baum, Peter Mansfield, Andrew Maudsley, John Holl, Irving Wingate Burr, Arno Penzias, Robert Wilson, Robert Dicke, James W. Cooley, Ali Javan, Theodore Maiman, Irving Reed, Gustave Solomon, Yakir Aharonov, Robert G. Chambers, Leon Neil Cooper, John Robert Schrieffer, Clyde Cowan, Fred Reines, Herbert Simon, Owen Chamberlain, Emilio Gino Segrè, Clyde Wiegand, Thomas Ypsilantis, W. K. Hastings, Nicolas Metropolis, Gerhart Lüders, Julian Schwinger, Richard Wesley Hamming, Polykarp Kusch, Cecil Powell, Richard Powell, Eugene Alvin Villar, Cesare Mansueto Giulio Latte, Giuseppe Occhialini, Walter H. Brattain, William Schockley, William Bradford Schockley, Dominique François Jean Arago, Tomonaga Sin-Itiro, Ernst Stueckelberg, William Donald Kerst, Tommy Flowers, Sidney Broadhurst, Abu al-Fath Kbhahazini, William Chandler, Fritz Strassmann, Mark Ott, Otto Robert Frisch, Markus Fierz, Frederik Jozef Belinfante, Isidor Isaac Rabi, Carl von Weizsäcker, Piotr Leonidovich Kapitza, Seth Neddermeyer, Jabez Curry Street, E.C. Stevenson, Abd al-Rahman al-Sufi, Walter Andrew Shewhart, Boris Podolsky, Nathan Rosen, Pavel Cherenkov Alekseyevich, Ernst August Friedrich Ruska, John Cockcroft, Fritz London, Robert Van de Graaff, Friedrich Hund, Robert S. Mulliken, Walter Heitler, Clinton Joseph Davisson, Lester Germer, George Paget Thomson, Ma'ruf al-Karkhi, Oscar Klein, Walter Gordon, Pierre Auger, George Uhlenbeck, Samuel Goudsmit, Pascual Jordan, John Lennard-Jones, Otto Stern, Walter Gerlach, Theodor Franz Eduard Kaluza, Vesto Melvin Slipher, Ernst Julius Öpik, Harlow Shapley, Gilbert Lewis, Irving Langmuir, Marcel Grossmann, William Henry Bragg, Johannes Stark, Walter Friedrich Knipping, Paul Knipping, Jean Perrin, Robert Andrews Millikan, Hans Geiger, Ernest Marsden, Thomas Royds, Walther Nernst, Paul Villard, Alfred-Marie Liénard, George Johnstone Stoney, Wilhelm Wien Carl Werner, Irving Stringham, Giuseppe Peano, Issai Schur, Edward Morley, Karl Hermann Amandus Schwarz, Simon Newcomb, William Kingdon Clifford, William Thomson Kelvin, Gregor Johann Mendel, Urbain Le Verrier, Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano, James Joseph Sylvester, Edouard Roche, Julius von Mayer, Émile Clapeyron, Heinrich Lenz, George Green, William Sturgeon, Pierre Frédéric Sarrus, Jean-Victor Poncelet, Joseph Diaz Gergonne, Christian Kramp, Jean-Robert Argand, Joseph Louis Gay-Lussace, William Nicholson, Anthony Carlisle, Caspar Wessel, Jacques Alexandre César Charles, Carl Scheele, Joseph Black, Pierre-Louis Moreau, Jonathan Hulls, Geralamo Saccheri, Stephen Gray, Guillaume de l'Hopital, Denis Papin, Olaus Roemer, Nicolas Lemery, Johan de Witt, James Gregory, John Graunt, Edme Mariotte, Albert Girard, Santorio Santorio, Hans Lippershey, Paolo Sarpi, David Fabricius, Gernian Montanari, Nathaniel Pigott, John Goodricke, Johann Georg Palitzsh, Hans Janssen, Zacheraius Janssen, Simon Stevin, Rafaelle Bombelli, Ludovico Ferrari, Niccolò Fontana, Robert Recorde, Michael Stifel, Christoff Rudolff, Scipione del Ferro, Johannes Gensfleisch zur Laden zum Gutenberg, Albrecht Dürer, Johannes Widmannwe, Nicolas Chuquet, Jamshid al-Kashi, Zhu Sjijie, Raymon Lulle, Pierre de Maricourt, Roger Bacon, Jordan Nemore, Al-Hassãr, Bhaskara, Apollonius of Perga, Philo of Byzantium, Allah Abu'l-Barakat Hibat al-Baghdaadi, Zhang Heng, Wang Ch'ung, NASA, Stefano Meschiari, John Schwabish, Severino Ribecca, Afshine Amidi, Shervine Admidi, Rafel Del Rio, Josef Ricafort Jr., ESA, Zhang Long, Arthur Dempster, Nan Laird, Donald Rubin, Jeremy Leconte, Yanghong

En cours de traduction de l'anglais

Huang, Till Tantau, Christian Feuersänger, Open AI ChatGPT, Google Bard

Évidemment... les opinions exprimées dans ce livre sont celles de sont rédacteur et ne reflètent pas nécessairement les opinions de toutes les personnes citées ci-dessus !

Ce livre et son site Internet compagnon n'auraient pas été possibles sans le précieux soutien des personnes mentionnées ci-dessous. Ils trouvent ici l'expression de ma gratitude la plus sincère (et à coup sûr si quelques erreurs subsistent dans ce livre c'est évidemment leur faute...) :

- **HARMEL Léon** (†12012), Ingénieur électricien diplômé avec une spécialisation en électronique et automatisation, responsable dans le laboratoire de recherche physique à l'AFIC à Charleroi (BEL), pour la rédection détaillée de nombreux développements disponibles dans les sections de Physique Quantique Corpusculaire, Physique Quantique Ondulatoire, Physique Quantique des Champs, Calcul Spinoriel et Relativité Générale.

- **KOLANI Daname**, Doctorant en Gestion de Portefeuilles à UM5-Rabat (MAR) pour son aide à la rédaction des livres d'accompagnement R & MATLAB™, pour sa relecture et compléments de la sous-section de ce livre sur la Fouille de Données (Data Mining) et l'Apprentissage Machine (Machine Learning) et la conversion de quelques centaines de pages du site Internet francophone original (Sciences.ch) en ce livre LaTeX.

- **LEGRAND Mathias**, Ph.D. de l'École Centrale de Nantes (FRA) pour son aide à la conversion des premières 550 pages du site Internet francophone original (Sciences.ch) en ce livre LaTeX.

- **RICCHIUTO Ruben**, Ingénieur HES en Physique (B.Sc.) de l'Ecole d'Ingénieurs de Genève et mathématicien de l'Université de Genève pour son aide précieuse en physique des plasmas, électromagnétisme, physique quantique, statistiques, topologie, chimie quantique, théorie des fractales, analyse fonctionnelle et de nombreux autres domaines touchant les mathématiques pures et l'informatique théorique.

- Habitués des forums Les Mathematiques.net et Futura-Sciences.com, pour leur précieuse aide dans de nombreux domaines de la mathématique et de la physique. Les débats et discussions qui y ont lieu permettent de constamment améliorer l'aspect pédagogique et accessible du présent site.

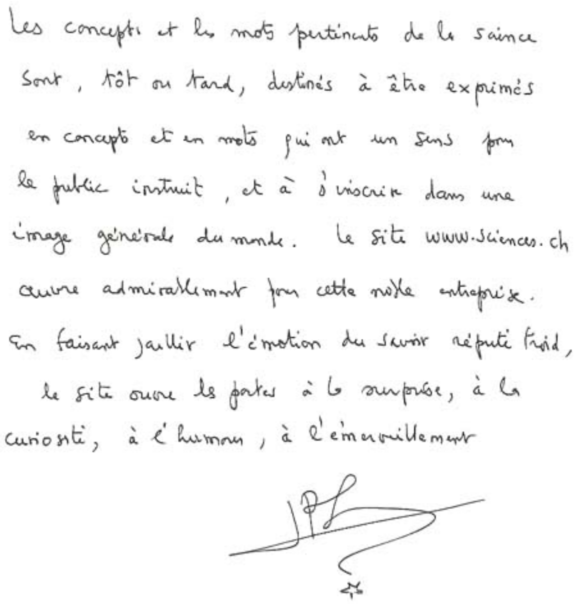
- Les sites Internet Wikipédia et PlanetMath à qui je suis redevable de nombreux emprunts presque au mot par mot (et c'est réciproque...).

- Les professeurs Gabriel Nagy de la Michigan State University, Liam Revell de la Massachusetts Boston University, Jorge Cham (de PhD Comics) et l'équipe OpenStax qui ont reçu et lu mes multiples courriels de requêtes sur les crédits/droits d'images et de textes mais n'ont jamais daigné répondre (pas tout à fait de bons exemples de ce que devrait être la "collaboration et l'esprit scientifique"...)

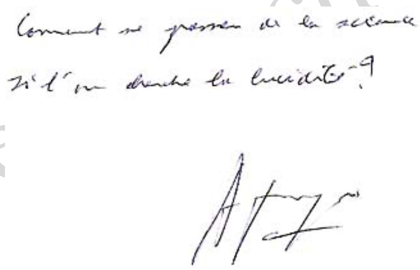
Et encore merci à tous les internautes, webmasters et professeurs anonymes pour leurs sites et documents de qualité mis à disposition gratuitement et anonymement sur la toile et aux intervenants réguliers des divers forum existant sur Internet. J'ai parfois récupéré mot à mot leurs explications et réponses qui ne nécessitaient ni compléments ni corrections.

En cours de traduction de l'anglais

Plusieurs personnalités scientifiques ont eu la gentillesse de nous soutenir dans notre démarche visant à offrir un accès gratuit et de qualité à un recueil scientifique de référence destiné au grand public. Voici leurs encouragements :


Les concepts et les mots pertinents de la science sont, tôt ou tard, destinés à être exprimés en concepts et en mots qui ont un sens pour le public instruit, et à s'inscrire dans une image générale du monde. Le site www.sciences.ch œuvre admirablement pour cette noble entreprise. En faisant jaillir l'émotion du savoir réputé froid, le site ouvre les portes à la surprise, à la curiosité, à l'humour, à l'émerveillement

PhD. Jean-Pierre Luminet (11951-) Astrophysicien français
spécialiste des Trous Noirs et de la Cosmologie et directeur de recherche émérite au CNRS


Comment se passer de la science si l'on cherche la lucidité ?

PhD. Albert Jacquard (11925 – 12013) Généticien français
vulgarisateur scientifique et essayiste

En cours de ...ction de l'anglais

Inutile de dire qu'il ne faut pas supposer que ces personnes soient en accord total avec les vues scientifiques exprimées sur dans présent livre ; et elles ne sont nullement responsables des erreurs ou des obscurités qui pourraient s'y trouver par erreur.

Pour terminer, je souhaiterais remercier ici les quelques collègues et clients qui ont bien voulu me faire part de leurs remarques pour améliorer le contenu de ce livre. Il est cependant certain qu'il est encore perfectible sur de nombreux points.

Je voudrais enfin remercier tout particulièrement ma famille pour leur soutien continu et mes amis pour leur patience car l'écriture de ce livre absorbe tout mon temps depuis plus de dix ans, mais je voudrais envoyer un remerciement spécial à mon père et à ma mère ! Merci aussi à ma conjointe d'être toujours là pour prendre soin de moi quand j'oublie de le faire...

Pour tout retour ou commentaire/critique public, vous pouvez utiliser le livre d'or associé à ce PDF :

http://www.sciences.ch/htmlfr/guestbook.php

ou si vous voulez me communiquer un retour ou commentaire/critique en privé, vous pouvez me contacter par courriel.

En cours de traduction de l' anglais

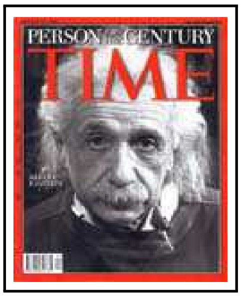
4

Introduction

Contents

4.1 Avant-Propos **35**
4.1.1 Motivations et objectifs 39
4.1.2 A qui est destiné ce livre 45
4.1.3 Comment est structuré ce livre 46
4.2 Méthodes **47**
4.2.1 Méthode de Descartes 54
4.2.1.1 Études en aveugle 55
4.2.2 Serment d'Archimède 65
4.2.3 Règles de Publication Scientifique (RPS) 68
4.2.4 Communication des Médias de Masse en Sciences 76
4.2.4.1 Réseaux sociaux 78
4.2.4.2 Opinions d'Experts 84
4.3 Vocabulaire **87**
4.3.1 Sur les "Sciences" 88
4.3.2 Terminologie 96
4.4 Science et Foi **100**
4.4.1 Kit de Détection de Balivernes 106
4.5 L'effet retour de flamme en Sciences **112**
4.6 La Science est-elle dogmatique ? **118**

En cours de traduction de l'anglais



Ce livre dont la première édition a été publiée en 12001 est conçu pour que les connaissances requises pour le lire soient aussi simples que possible. Il n'est pas nécessaire d'avoir un doctorat pour le consulter, il suffit de savoir raisonner, penser de façon critique, observer et avoir beaucoup de temps...

"La simplicité est le sceau de la vérité et elle rayonne de beauté"
Albert EINSTEIN

4.1. Avant-Propos

Aucune entreprise humaine n'a eu plus d'impact que la Science[1] sur nos vies et notre conception de notre Monde et de nous-mêmes. Ses théories, conquêtes et résultats sont tout autour de nous dans le quotidien de la majorité des habitants de cette planète.

Omniprésents dans l'industrie (aérospatiale, imagerie, cryptographie, transport, chimie, algorithmique, etc.) ou dans les services (banque, fintech, assurance, ressources humaines, projets, logistique, architecture, communication, etc.), les mathématiques appliquées apparaîssent également dans d'autres domaines : enquêtes, modélisation des risques, protection des données, politique, etc. Les mathématiques appliquées (parfois aussi appelées "ingénierie mathématique") influencent nos vies (télécommunications, transport, médecine, météorologie, musique, gestion de projet) et contribuent à la résolution des enjeux d'actualité : énergie, santé, environnement, climat, optimisation, développement durable, etc. bien plus que toute technique ou méthodologie de soft skills ! Leur grand succès est leur fabuleuse dispersion dans le monde réel et leur intégration croissante dans toutes les activités d'intelligence humaine et artificielle qui nécessitent transparence et l'évitement de biais cognitifs. Nous allons donc à une situation où les mathématiciens et les ingénieurs n'auront plus le monopole des mathématiques, mais où presque tous les postes de "cols blancs" devront faire des mathématiques avancées.

En tant qu'ancien étudiant dans le domaine de l'ingénierie, j'ai souvent regretté l'absence d'un seul livre assez complet, détaillé (sans aller à l'extrême ...) et éducatif si possible gratuit (!) et portable (êtant personnellement fan des eBooks ...) contenant au moins une idée non exhaustive du programme général de mathématiques appliquées dans les écoles d'ingénieurs avec un aperçu de ce qui est utilisé dans les entreprises avec des preuves plus intuitives que rigoureuses, mais avec suffisamment de détails pour éviter tout effort inutile au lecteur. Aussi un livre qui n'exige pas que le lecteur adopte à chaque fois une nouvelle notation ou une terminologie spécifique à l'auteur - quand il n'est pas carrément nécessaire parfois de changer la lecture dans une langue étrangère ... - et où n'importe qui peut suggérer des améliorations ou des ajouts (à travers un forum, uen livre d'or ou un simple courriel).

J'ai aussi été frustré pendant mes études d'avoir souvent à avaler des «formules» ou des «lois»

En cours de traduction de l'anglais

[1]Du latin *scientia* "connaissance, savoir, expertise". Lui-même venant de *sciens* (génitif scientis) qui signifie "intelligent, talentueux", participe présent de *scire* qui signifie "connaître" vient probablement de "séparer une chose d'une autre, distinguer" lié à *scindere* "couper, diviser".

censées être (et à tort) non prouvables ou trop compliquées comme le disaient mes professeurs ou même d'être déçu par des livres d'auteurs de renom (où les développements sont laissés au lecteur ou comme exercice et où aucune application réelle est mentionné ...). Dans ce présent livre prédomine la volonté de ne jamais confondre le lecteur avec des phrases vides comme "il est évident que ...", "il est facile de prouver que ...", "nous laissons cela au lecteur comme un exercice ... ", puisque tous les développements sont présentés en détail. Mais je ne suis pas un puriste des maths ! Je n'ai qu'une ambition : expliquer le plus facilement possible.

Bien que je doive admettre que certaines relations mathématiques présentées dans le cursus des écoles d'ingénieurs ne peuvent être réalisées faute de temps dans le programme officiel ou à cause de la taille limite d'un livre papier, je ne peux accepter qu'un enseignant ou un auteur en racontent à ses élèves (respectivement, ses lecteurs) que certaines lois et relations ne sont pas prouvables (parce que la plupart du temps ce n'est pas vrai !) ou que telle ou telle preuve est trop compliquée sans donner de référence (où l'étudiant pourrait trouver l'information nécessaire pour satisfaire sa curiosité) ou au moins une preuve simplifiée mais satisfaisante.

De plus, je pense qu'il est totalement archaïque aujourd'hui que certains enseignants continuent à demander à leurs élèves de prendre une quantité massive de notes pendant les cours. Il serait beaucoup plus favorable et optimal de distribuer un document de cours contenant tous les détails afin de pouvoir se concentrer sur les points essentiels avec les élèves, c'est-à-dire les explications orales, les interprétations, la compréhension, le raisonnement et la pratique. évidemment en fournissant un support de cours complet, certains élèves seront brillants par leur absence mais ... c'est probablement mieux ainsi ! Ainsi, ceux qui sont passionnés peuvent approfondir des sujets à la maison ou à la bibliothèque universitaire, les non-intéressés et je m'en foutistes feront ce qu'ils ont à faire (...) et le reste (étudiants en difficulté mais travailleurs) suivra le cours dispensé par l'enseignant pour profiter de poser des questions plutôt que de suivre un cours sans réfléchir à copier un tableau noir dans une salle avec un effectif d'élève surnuméaire.

Inspiré d'un modèle d'apprentissage d'un érudit américain, dont j'ai oublié le nom (...), ce livre propose et impose au lecteur les caractéristiques suivantes : découvrir, mémoriser, citer, intégrer, expliquer, reformuler, déduire, sélectionner, utiliser, décomposer, comparer, interpréter, juger, argumenter, modéliser, développer, créer, rechercher, raisonner, développer dans un enseignement progressif limpide pour développer les compétences analytiques et l'ouverture d'esprit.

Donc, dans mon esprit, ce livre non exhaustif (et ses PDF compagnons associés) doit être un substitut, gratuit pour tous les étudiants et employés à travers le monde, à de nombreuses références et lacunes du système scolaire, permettant à tout étudiant curieux de ne pas être frustré pendant de nombreuses années pendant son cursus académique. Sinon, la science de l'ingénieur pourrait avoir l'aspect d'une science figée, mis à part les développements scientifiques et techniques, une accumulation hétéroclite de connaissances et surtout de formules qui la ferait considérer comme un sous-produit insipide des mathématiques et qui amène les entreprises et les gouvernements à beaucoup de faux résultats et de mauvaises décisions ...

Ce livre a également été conçu pour répondre aux besoins des dirigeants, aussi bien financiers que non financiers. Tout dirigeant qui veut approfondir et comprendre les fondamentaux de la finance stratégique, du marketing stratégique ou de l'ingénierie de gestion de projet, et de l'ingénierie de la gestion d'entreprise/administrations et des questions liées à la chaîne d'approvisionnement bénéficiera de la lecture de ce livre.

En cours de traduction de l'anglais

Ce livre a également pour but de décrire et d'expliquer comment notre Univers et notre Monde (également probablement d'autres "mondes" de notre Univers) fonctionne d'une manière beaucoup plus précise, plus complète et plus détaillée que n'importe quel livre "Saint". Il donne des modèles et des méthodes de quantification pour l'origine des espèces, des galaxies, des planètes, des phénomènes quantiques, des mouvements physiques, de la physique stellaire, des événements extrêmes observables et aussi des événements extrêmement rares et explique les stratégies sociales et technologiques de manière prouvable que tout tout à chacun peut vérifier par lui-même et ce en exposant chaque fois les hypothèses que toute entité raisonnable devrait prendre a priori en charge dans l'état actuel de nos connaissances !

De toute évidence, les mathématiques appliquées sont un sujet si vast qu'un livre de cette envergure ne peut qu'aborder la base. Les lecteurs sont certainement encouragés à aller au-delà (voir la bibliographie à la fin du livre).

Maintenant, ceux qui voient les Mathématiques Appliquées seulement comme un outil (ce qu'elles sont aussi), ou comme l'ennemi des croyances religieuses, ou comme une école de campagne ennuyeuse, sont légion. Cependant, il est peut-être utile de rappeler que, comme l'a dit Galilée, «*le livre de la nature est écrit dans le langage des mathématiques*» (sans vouloir faire de scientisme !). Quand vous allez en Chine, vous apprenez le chinois. Quand vous voulez aller à l'Univers, vous apprenez la mathématique parce que cette dernière est la langue de l'Univers et de la Nature perceptible. C'est pourquoi la mathématique est fondamentale et si incroyable car elle s'applique à tout l'Univers et ce à l'état de nos connaissances actuelles, aussi à travers le temps. C'est dans cet esprit que ce livre traite des mathématiques appliquées pour les étudiants en sciences naturelles, terrestres et de la vie, ainsi que pour tous ceux qui ont une occupation liée aux différents sujets, y compris la philosophie ou pour toute personne intéressée par la science dans la vie de tous les jours.

Le choix d'étudier l'ingénierie dans ce livre comme une branche des Mathématiques Appliquées vient du fait que les différences entre tous les domaines de la physique (anciennement connu comme «philosophie naturelle») et les mathématiques sont si difficilement distinguable que la médaille Fields (la plus haute distinction aujourd'hui dans le domaine des mathématiques) a été décerné en 11990 (calendrier holocène) au physicien Edward Witten, qui a utilisé des idées de la physique pour prouver un théorème mathématique. Cette tendance n'est certainement pas fortuite, car on peut observer que toute la science, puisqu'elle cherche à approfondir la compréhension du sujet qu'elle étudie, finit toujours ses essais et erreurs dans le domaines mathématiques pures (le chemin absolu par excellence !). Ainsi, nous pouvons prédire dans un futur lointain, la convergence de toutes les sciences (pures, exactes ou sociales) vers les mathématiques pour les techniques de modélisation (voir par exemple le PDF français "*L'explosion des mathématiques*" disponible sur la page de téléchargement du site Web compagnon).

Il peut parfois nous sembler difficile (en raison de la peur irrationnelle et injustifiée des sciences pures d'une partie significative de la population) de transmettre le sentiment de la beauté mathématique de la Nature, son harmonie la plus profonde et la mécanique bien huilée de l'Univers à ceux qui ne connaissent que les bases de l'algèbre. Le physicien Richard Feynman a parlé d'une une fois de «deux cultures» : les gens qui ont et ceux qui n'ont pas une compréhension suffisante des mathématiques pour apprécier la structure scientifique de la Nature. Il est dommage que les mathématiques soient nécessaires pour comprendre profondément la Nature et qu'elles aient également une mauvaise réputation. Pour l'anecdote, on prétend qu'un roi qui a demandé à Euclide de lui enseigner la géométrie se plaignait de la difficulté de cette dernière. Euclide

En cours de traduction de l'anglais

répondit : "Il n'y a pas de voie royale". Les physiciens et les mathématiciens ne peuvent pas se convertir à une langue différente. Si vous voulez en apprendre davantage sur la Nature, pour en apprécier la vraie valeur, vous devez comprendre sa langue. La Nature n'est révélée que sous cette forme et nous ne pouvons être prétentieux au point de lui demander de changer ce fait.

De même, aucune discussion intellectuelle ne vous permettra de communiquer avec une personne sourde ce que vous ressentez en écoutant de la musique. De même, toute discussion sur le monde reste vaine pour transmettre une compréhension intime de la Nature de ceux de «l'autre culture». Les philosophes et les théologiens peuvent essayer de vous donner des idées qualitatives sur l'Univers. Le fait que la méthode scientifique (au sens propre du terme) ne puisse pas convaincre le Monde de ses forces à travers son processus itératif (le fait que la science est réécrite, réécrite et réécrite par améliorations incrémentales comme dans la méthodologie DMAIC Six Sigma[2]) est peut-être le fait de l'horizon limité de certaines personnes qui imaginent que l'humain, ou un autre concept intuitif, sentimental ou arbitraire est le centre de l'Univers (principe anthropocentrique).

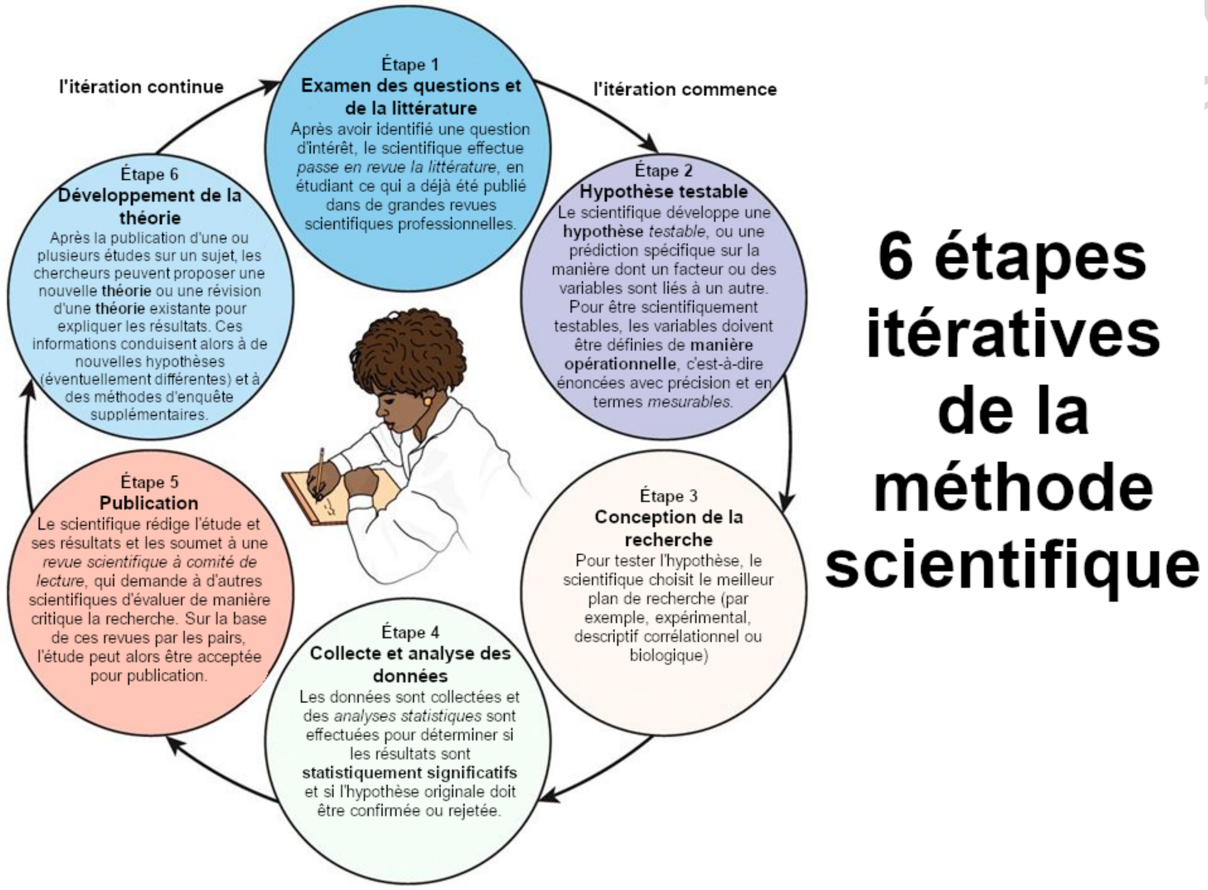


FIG. 4.1 – **Processus cyclique de la méthode scientifique (source : ?)**

[2]DMAIC (acronyme anglais pour Définir, Mesurer, Analyser, Améliorer et Contrôler) se réfère à un cycle d'amélioration piloté par les données utilisé pour améliorer, optimiser et stabiliser les processus et la conception. Le cycle d'amélioration DMAIC est l'outil de base utilisé pour conduire les projets Six Sigma que nous étudierons en profondeur dans la section de Génie Industriel. Cependant, DMAIC n'est pas exclusif à Six Sigma et peut être utilisé comme cadre pour d'autres applications d'amélioration.

Définition (#4.1.1) : La "méthode scientifique" est le processus itératif qui consiste à faire des observations reproductibles suivant un protocole robuste, en formulant un test statistique d'hypothèse nulle pour expliquer le phénomène observé, prédire de nouveaux phénomènes avec des valeur numériques basées sur l'hypothèse, mener des expériences pour pouvoir réfuter l'hypothèse, analyser statistiquement les données collectées à partir d'expériences sur des échantillons de taille de puissance significative en utilisant la méthode en triple aveugle et publier les résultats en respectant les règles de publication scientifique.

Remarque

Si vous êtes un scientifique honnête, la grande majorité de vos idées, même de bonnes idées, seront exclues, non pas par de nouvelles expériences mais déjà par incohérence avec d'anciennes expériences. C'est ce qui rend vraiment la science très différente, et ce qui nous donne une notion interne du bien et du mal avant de nouvelles expériences. Donc, contrairement à ce que certains profanes sceptiques pensent, l'idée que vous pouvez simplement inventer de la merde est fausse !

Ainsi, en science, nous avons la théorie, l'expérience et, au milieu entre eux, la "phénoménologie". Les phénoménologues sont ceux qui tirent les prédictions des théories, généralement en simplifiant les mathématiques et en déterminant ce qui peut être mesuré, avec quelle précision et comment (et parfois, rarement, aussi par qui).

> ❞ *Si vous n'êtes pas un scientifique professionnel actif et que vous n'êtes pas d'accord avec les scientifiques sur la science, ce n'est en fait pas un désaccord ! Vous avez simplement tord ! ! La science n'est pas la vérité. La science trouve les évidences. Quand la science change d'opinion, elle ne vous a pas menti. Elle a appris plus !* ❞
>
> ?

quote 4.1:39.#3

En cours de traduction de l'anglais

4.1.1 Motivations et objectifs

Le but principal de se livre est de faire connaître la Science Moderne dans le monde entier afin que tous les êtres humains puissent comprendre et connaître les origines et les méchanismes de la Nature qui les entoure.

Bien sûr, afin de partager cette connaissance mathématique, il peut sembler paradoxal d'augmenter, avec notre ouvrage, la longue liste de livres déjà disponibles dans les bibliothèques, dans le commerce et sur Internet. Néanmoins, je dois être capable de présenter des arguments qui justifient la création d'un tel ouvrage (et de son site Internet compagnon) par rapport à des livres tels que les Feynman, Landau ou Bourbaki et Wikipedia / Wolfram eux-mêmes ou Khan Academy ou OpenStax. Alors qu'est-ce que je pense que je peux ajouter à une telle richesse de matériels ?

1. Le grand plaisir que nous prenons à écrire ce livre ("garder la main" et améliorer nos compétences) et à avoir un compendium détaillé de haute qualité des outils mathématiques pour nos clients et nos étudiants (et aussi tous ceux du Monde entier) et ce gratuitement !

2. La passion pour le partage de connaissances gratuitement (bataille contre la "folie des droits d'auteur" (RIP Aaron Swartz !)) et sans frontières avec un outil de haute qualité comme LaTeX (à l'opposé de Wikipedia qui mélange LaTeX et le contenu horrible et honteux de Khan Academy [3]).

3. Soutenir l'éducation scientifique gratuite, la pensée critique et la compréhension fondée sur les preuves (évidences). En outre, il est clair qu'il existe un appétit insatiable pour certains gens à comprendre les choses (même si cela semble être actuellement une minorité) et ce livre a été écrit à cette fin.

4. Aider les personnes sans défense ou en situation de fragilité qui sont entraînées dans de fausses croyances dichotomiques par de fausses déclarations ou affirmations rhétoriques simplistes à acquérir un certain niveau de méthode critique et de techniques d'investigation (nous introduirons par exemple la définition scientifique d'un vaccin, nous traiterons mathématiquement certains des arguments fallacieux des platistes, nous démontrerons aussi mathématiquement pourquoi il est normal de ne pas voir les étoiles sur de nombreuses photos ou vidéos effectuées dans l'espace, nous démontrerons pourquoi le Big Bang contrairement à la légende urbaine n'est ni une explosion ni une singularité et n'a pas été découvert par G. Lemaître, nous démontrerons mathématiquement que l'Univers peut tout à fait émerger spontanément par désintégration du vide quantique, que l'émergence de la vie à partir de la non-vie n'est qu'une question de probabilités, etc.).

   > "*Nous ne réfutons pas les mensonges dans le but de convaincre les menteurs, nous réfutons les mensonges pour faire comprendre aux autres gens que les mensonges ne resteront pas incontestés !*"

5. Présenter les Mathématiques Appliquées d'une manière agréable et facile à apprendre (typiquement à l'opposé des livres des 9 livres de Landau), parce que nous pensons que la maîtrise des Mathématiques Appliquées changent la façon dont nous comprenons l'Univers et améliore la compréhension et tolérance mutuelle entre humains et nos interactions avec la Nature.

6. Cet ouvrage a été écrit avant (année 12001 selon calendrier holocène) que la version française de Wikipédia ait un contenu mathématique satisfaisant et longtemps avant que Khan Academy ou OpenStax n'existent.

7. Les possibilité d'effectuer rapidement des mises à jour relativement aux dernières découvertes scientifiques ou corrections critiques (à l'opposé des vidéos de Khan Academy) ainsi que de collaboration que permettent un e-book gratuit (avec en plus les opportunités qu'offrent les outils de recherche et d'annotation des lecteurs de PDF).

En cours de traduction de l'anglais

[3] OpenStax a de bons PDF de premier cycle - en particulier les exemples dans leurs livres - mais il y a entre 40-60% de démonstrations mathématiques manquantes dans leurs PDF et la table des matières et l'index de leur PDF ne sont à ce jour pas interactifs ... et problème majeur ... : le contenu est limité uniquement aux sujets de premier cycle

8. Le contenu peut facilement être adapté en fonction des demandes / commentaires des lecteurs et de nos intérêts (à l'opposé des vidéos de Khan Academy ou des livres de OpenStax ou Landau) !

9. A l'opposé des publications scientifiques (PRL ou autre) qui sont discutables car ne donnent pas de preuves détaillées et tournent parfois dans une boucle infinie de références bibliographiques, nous fournissons toujours les démonstrations les plus détaillées possible.

10. L'accès aux sources LaTeX est disponible au Monde entier gratuit, donc personne (élève ou prof) n'a besoin de recréer la roue et perdre des centaines ou des milliers d'heures de rédaction au lieu de faire de l'innovation (à l'opposé des livres de Landau) !

11. Une présentation rigoureuse avec des preuves détaillées simplifiées de tous les concepts présentés (à l'opposé de Wikipedia, Khan Academy et OpenStax qui se concentrent uniquement sur les démonstrations mathématiques des concepts de premier cycle et souvent avec des démonstrations très lacunaires).

12. La présentation de nombreux outils mathématiques avancés et détaillés utilisés dans les affaires et la R&D en gardant à l'esprit que le langage mathématique semble éternel et d'être l'un des seuls dénominateurs culturel commun entre tous les pays de notre Planète.

13. L'occasion pour les étudiants et les enseignants de pouvoir réutiliser un contenu par copier/coller (à l'opposé de Khan Academy ou des livres de Landau Books).

14. Proposer une notation constante (à l'opposé de Wikipédia, Khan Academy et OpenStax) tout au long du livre pour les opérateurs mathématiques, un langage clair sur tous les sujets (critère 3.C. : clair, complet et concis) et se concentrer sur les bases pour faire un important travail pédagogique sur les sujets (à l'opposé des livres de Landau).

15. Compiler autant d'informations que possible sur les sciences pures et exactes dans un unique livre électronique (portable), homogène et rigoureux et de haute qualité visuelle (mais en allant pas aussi loin que les livres de Landau).

16. Distinguer de toutes les pseudo-vérités, seulement les vérités qui peuvent être prouvées par la démarche mathématique.

17. Bénéficier du développement des méthodes d'enseignement qui utilisent Internet pour rechercher la solution de problèmes mathématiques.

18. L'amélioration spectaculaire des logiciels de traduction automatique et de la puissance de calcul qui fera de ce livre, du moins on l'espère, une référence internationale dans le domaine des sciences.

19. Un PDF est meilleur qu'un site Internet car d'abord tous ceux qui utilisent Internet depuis 11990 (calendrier holocène) savent que la grande majorité des sites disparaissent après environ 10 ans et deuxièmement il est bien connu que certains pays bloquent Wikipédia et autres sites de connaissances pour garder leur population dans l'ignorance (et bloquer un PDF qui peut être partagé dans un e-mail est beaucoup plus difficile).

En cours de traduction de l'anglais

20. et ... parce que les Mathématiques Appliquées sont belles et surtout lorsqu'elles sont écrites en LaTeX et illustrées (à l'opposé des livres de Landau dont les illustrations sont assez anciennes et pauvres en couleurs).

Et aussi ... Je tends à penser que les résultats de la recherche sont la propriété de l'humanité et devraient être accessibles gratuitement à tous ceux qui explorent les phénomènes de la Nature. De cette façon, le travail de chacun bénéficie à tous, et c'est pour toute l'humanité que nos connaissances se cumulent et c'est la tendance que permet Internet.

Je ne cache pas que ma contribution est largement limitée à ce jour à celle d'un collectionneur qui glane ses informations dans les oeuvres de maîtres ou de publications ou de pages web anonymes et qui complète et argumente les développements mathématiques et les améliore quand c'est possible. Par conséquent, certains éléments de ce livre sont originaux et certains proviennent de la littérature de référence. Cependant la grande majorité de ce que nous avons écrit est une reformulation des résultats présentés dans la vaste bibliothèque d'existences de quelques livres fantastiques (et rares). Pour ceux qui m'accuseraient de plagiat, ils devraient penser que les théorèmes présentés dans la plupart des livres non libres et disponibles dans le commerce ont été découverts et écrits par leurs prédécesseurs des auteurs de ces mêmes livres et que leur contribution personnelle a été, comme la mienne, de mettre toutes ces informations sous une forme claire et moderne quelques centaines d'années plus tard. En outre, on peut douter que nous demandions à payer pour l'accès à une culture qui est certainement la seule vraiment valable et juste dans le Monde et où il n'y a pas de brevets ou de droits de propriété intellectuelle.

En cours de traduction de l'anglais

quote 4.1:42.#4

> *Si vous volez d'un auteur, c'est du plagiat ; si vous volez de beaucoup d'auteurs, c'est de la recherche !*
>
> Wilson Mizner

Ce livre reflète également en grande partie mes propres limites intellectuelles relativement aux sciences dures et pures. Bien que j'essaie d'étudier autant de domaines scientifiques et mathématiques que possible, il est impossible de les maîtriser tous. Ce livre ne montre clairement que mes propres intérêts et expériences en tant que consultant et professeur, mais aussi mes forces et mes faiblesses. Je suis responsable de la sélection des intrants et, bien sûr, en grande partie des erreurs et des imperfections possibles.

Après avoir tenté un ordre de présentation strictement linéaire du sujet de la Mathématique Appliquée, j'ai décidé d'organiser ce livre d'une manière plus pédagogique (thématique) et toujours avec des exemples pratiques d'applications. Il est à mon avis très difficile de parler d'un sujet aussi vaste dans un ordre linéaire dans une seule vie humaine, c'est-à-dire lorsque les concepts sont introduits un à un, parmi ceux déjà connus (où chaque théorie, opérateur, etc. n'apparaîtrait pas avant sa définition). Ainsi, avec ce choix thématique, le lecteur pourra probablement se rendre compte de l'extrême complexité du sujet.

Les conséquences de ce choix sont les suivantes :

1. Parfois il faudra admettre certains concepts, quitte à les comprendre plus tard.

2. Il sera probablement nécessaire au lecteur de parcourir au moins deux fois dans le livre. En première lecture, il appréhendra l'essentiel et à la deuxième lecture, il comprendrea les détails (je félicite dans tous les cas le lecteur débutant qui comprend toutes les subtilités la première fois !).

3. Vous devez accepter le fait que certains sujets (et très faible nombre) sont parfois répétés pour le confort de lecture et l'assimilation du cerveau et qu'il existe de nombreuses références croisées et des remarques complémentaires en pied de page.

Certains savent que pour chaque théorème et modèle mathématique, il existe presque toujours plusieurs approches pour la démonstration mathématique. J'ai toujours essayé de choisir l'approche qui semblait lla plus simple (par exemple, en relativité et en physique quantique, il y a le formalisme algébrique et matriciel). L'objectif étant d'arriver au même résultat de toute façon. Dans certains cas intéressants, nous présentons même plusieurs approches d'une démonstration car nous considérons les différentes approches alors comme étant très "formatrices".

Ce livre étant dans sa version brouillon, il manque forcément des contrôles de convergence, de continuité, de grammaire et autres ... (qui vont horrifier certains lecteurs et mathématiciens ...) ! Cependant, j'ai évité (ou, sinon, je l'indique) les approximations habituelles de la physique et l'utilisation de l'analyse dimensionnelle, en l'utilisant le moins possible. J'essaie aussi d'éviter autant que possible les sujets avec des outils mathématiques qui n'ont pas été présentés auparavant et démontrés rigoureusement (selon les critères de l'ingénieur !).

Enfin, cette présentation des Mathématiques Appliquées, qui peut encore être améliorée, n'est pas une référence absolue et contient des erreurs probablement par endroits. Tout commentaire est donc la bienvenue par e-mail ou via le forum du site compagnon déjà indiqués plus haut. Je m'efforcerai, dans la mesure du possible, de corriger les faiblesses et d'apporter les changements nécessaires le plus rapidement possible (cela prend quelques mois en général).

Cependant, alors que les mathématiques sont exactes et indiscutables, la physique théorique (ses modèles) est toujours interprétée dans le vocabulaire commun (mais pas dans le vocabulaire mathématique) et ses conclusions sont toutes relatives d'un individu à l'autre. Je ne peux que conseiller, en lisant ce livre, de lire par vous-même et de ne pas subir d'influences extérieures dans un premier temps. Vous devez avoir un esprit très (très) critique, ne rien prendre pour acquis et tout remettre en question sans hésitation. En outre, le mot clé du bon scientifique devrait être : "Doute, doute, doute ... doute encore, et vérifie toujours.". Nous rappelons aussi que «rien de ce que nous pouvons voir, entendre, sentir, toucher ou goûter, n'est ce qu'il semble être», ne comptez donc pas sur votre expérience quotidienne pour tirer des conclusions hâtives, soyez critique, cartésien, rationnel et rigoureux dans vos développements, raisonnements et conclusions et confrontez-les avec d'autres en admettant vos erreurs et remises en question avec sagesse !

Remarque

L'une des causes du syndrôme de l'anti-intellectualisme réside probablement dans l'incapacité des établissements d'enseignement à inculquer la pensée critique au lycée. En particulier les universités, incapables de développer la pensée critique de leurs étudiants.

En cours de traduction de l'anglais

Internet et son amalgame de vrai et de faux ont aussi leur part de responsabilité ainsi que les mass-médias qui manquent de rigueur dans la manière de citer leurs sources et leurs méthodes d'investigations. En outre, certains experts amplifient le problème en parlant s'exprimant publiquement et de manière non quantifiée et non sourcée sur des questions en dehors de leur domaine d'expertise ! ! ! !

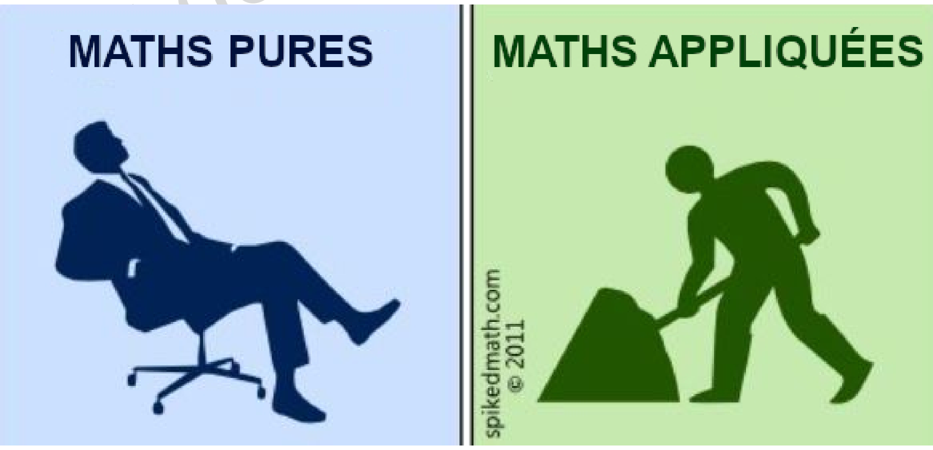
Je veux dire à ceux qui essaieraient de retrouver par eux-mêmes les résultats de certains développements de ce livre, de ne pas s'inquiéter s'ils ne réussissent pas ou s'ils doutent de leurs compétences à cause du temps passé à résoudre une équation ou un problème donné. Effectivement, quelques théories qui semblent parfois évidents ou faciles aujourd'hui, ont parfois nécessité plusieurs semaines, mois, voire années, pour être développés par des mathématiciens ou des physiciens de premier plan dans le passé !

J'ai aussi essayé de faire en sorte que ce livre soit agréable à consulter et lire en y ajoutant de nombreuses illustrations en couleurs et également en choisissant un style d'écriture peu formel.

Enfin, j'ai choisi d'écrire ce travail à la première personne du pluriel : «nous». En effet, la physique mathématique n'est pas une science qui a été faite ou qui a évolué à travers un travail individuel, mais avec une collaboration intense entre des personnes liées par la même passion et désir de la connaissance. Ainsi, en utilisant le «nous», je voudrais rendre hommage aux scientifiques décédés, bien évidemment aux autres co-auteurs de ce livre mais aussi aux chercheurs contemporains et futurs pour le travail qu'ils vont effectuer afin d'approcher la vérité et la sagesse.

Je suis heureux de vous mettre à disposition cet ouvrage, si précieux, et j'espère que vous aurez du plaisir à le lire un petit peu chaque jour !

En cours de traduction de l'anglais



quote 4.1:44.#5

> *La vérité est un mot qui, curieusement, est le plus utilisé par ceux qui répandent des mensonges, qu'ils savent eux-mêmes être des mensonges !*
>
> ?

4.1.2 A qui est destiné ce livre

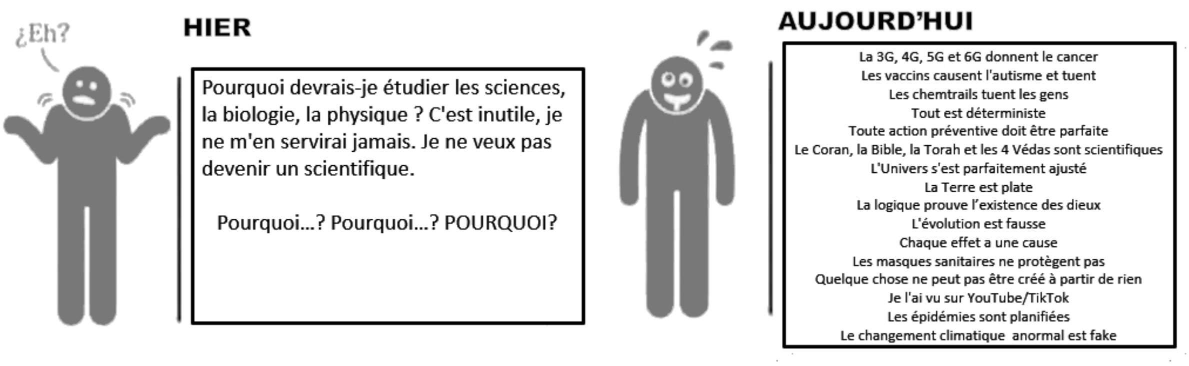
Ce livre s'adresse à toute personne curieuse de la Science et désireuse d'en savoir plus sur le monde naturel, son origine et ses mécanismes. Il est écrit de manière claire et concise, ce qui le rend facile à comprendre même si vous n'avez aucune connaissance préalable en Science. Que vous soyez un étudiant, un enseignant, un amateur ou simplement un lecteur occasionnel, ce livre vous fournira une introduction attrayante et accessible aux concepts et méthodes fondamentaux de la Science. Vous explorerez des preuves détaillées du niveau de la maternelle au niveau Doctorat sur des sujets tels que les mathématiques, les probabilités, la physique, l'ingénierie, la gestion, la finance, la chimie, la biologie, l'astronomie, la géologie, l'écologie, etc., en utilisant des exemples concrets. Vous découvrirez également comment la science est liée à la vie quotidienne et comment elle peut vous aider à résoudre des problèmes et à prendre des décisions éclairées et à ne pas être manipulé par les mensonges des religions/sectes et des charlatans. Ce livre n'est pas un manuel complet, mais plutôt un guide pour susciter votre intérêt et vous inspirer à approfondir vos connaissances et compétences scientifiques. En lisant ce livre, vous développerez un état d'esprit scientifique et une passion permanente pour l'apprentissage.

Voici quelques exemples précis de personnes qui pourraient trouver ce livre utile :

- Élèves de tous les niveaux qui étudient les sciences
- Enseignants à la recherche d'une ressource gratuite à utiliser dans leurs salles de classe
- Consultant qui a besoin de fournir une source rigoureuse unique à ses clients
- Adultes qui souhaitent en savoir plus sur les sciences
- Toute personne curieuse du monde qui l'entoure

Ce livre est conçu pour être flexible et adaptable à vos besoins et préférences. Vous pouvez l'utiliser comme un guide d'auto-apprentissage, un livre de référence, un supplément à votre programme scolaire ou une source d'inspiration pour une exploration plus approfondie.

En cours de traduction de l'anglais



4.1.3 Comment est structuré ce livre

Ce livre scientifique est structuré d'une manière qui augmente progressivement en complexité. Les premiers chapitres présentent les concepts et principes de base, puis les chapitres suivants s'appuient sur ces concepts pour explorer des sujets plus avancés. Le livre est divisé en 12 parties, chacune couvrant une branche majeure de la science : mathématiques, physique, informatique, sciences sociales, finance et ingénierie. Chaque partie se compose de plusieurs chapitres qui présentent les concepts, principes et phénomènes clés de cette branche.

Cette structure permet aux lecteurs d'apprendre à leur propre rythme. Si vous débutez en Science, vous pouvez commencer par les premiers chapitres, puis passer aux chapitres suivants à mesure que vous vous familiarisez avec le contenu. Les chapitres sont organisés dans une séquence assez logique, s'appuyant sur les précédents et vous préparant pour les suivants lorsque cela est possible.

Chaque chapitre commence par un aperçu du sujet qui sera traité. Cette vue d'ensemble fournit un cadre pour comprendre le matériel qui suit. Le chapitre aborde ensuite le sujet plus en détail, en utilisant un langage le plus clair et concis possible.

Vous pouvez suivre le livre du début à la fin, ou vous pouvez choisir les sujets qui vous intéressent le plus et ignorer ceux que vous connaissez déjà. Le livre fournit également des références croisées, des glossaires, des annexes et des index qui vous aident à naviguer dans le livre et à trouver les informations dont vous avez besoin.

Pour vous aider à comprendre le matériel contenu dans ce livre, ce dernier comprend une variété d'outils pédagogiques, telles que :

- Le livre comprend de nombreuses illustrations pour vous aider à visualiser les concepts abordés.
- Le livre comprend des exemples pour vous aider à comprendre comment les concepts discutés s'appliquent au monde réel.

J'espère que cela vous aidera à comprendre comment ce livre est structuré.

En cours de traduction de l'anglais

4.2. Méthodes

La Science est l'ensemble de tous les efforts systématiques (observations scrupuleuses et hypothèses plausibles jusqu'à la preuve du contraire) pour acquérir des connaissances sur notre environnement, pour les organiser et les synthétiser en lois et théories testables, dont le but principal est d'expliquer les choses (et PAS le pourquoi !) souvent par une approche en quatre étapes :

- Qu'est-ce que l'on a ?
- Où est-ce que l'on ira ?
- Quel est notre objectif ?
- Est-ce que c'est conforme aux données expérimentales ?

En cours de traduction de l'anglais

Les scientifiques doivent soumettre leurs idées et résultats à une vérification indépendante et à la réplication par leurs pairs[4] ("peer-review" en anglais). Ils doivent abandonner ou modifier leurs conclusions lorsqu'ils sont confrontés à des preuves (évidences) expérimentales et calculatoires plus complètes ou différentes. La crédibilité de la Science repose donc sur ce mécanisme d'autocorrection et c'est ce qui fait encore qu'au 121e siècle (selon calendrier holocène), la Science n'est peut-être pas LE meilleur outil (car nous ne savons pas ce qui existera dans le futur ...) mais elle a montré qu'elle était la meilleure méthode d'investigation des mécanismes de la Nature et de l'Univers par rapport à toutes les autres méthodes ou croyances existantes à ce jour. L'histoire de la science montre que ce système fonctionne depuis très longtemps et très bien par rapport à tous les autres puisqu'il permet d'éviter de nombreux biais cognitifs et culturels. Grâce à cela, dans chaque domaine, les progrès ont été spectaculaires. Cependant, le système a parfois échoué (et la détection de ses échecs est elle aussi une réussite !) et doit également être corrigé avant que de petites dérives ne s'accumulent.

Le problème majeur est et reste que les scientifiques sont des humains. Ils ont les imperfections de tous les humains, et surtout, la vanité, la fierté, la colère, la vanité et les biais cognitifs. De nos jours, il arrive que beaucoup de personnes travaillant sur le même sujet pendant un temps donné développent une foi[5] commune et croient qu'elles détiennent la vérité ou qu'elles développent des biais à cause de leur environnement quotidien. Le Chef de la foi est alors le Pape et distille son opinion. Le Pape qui joue le jeu prend sa mitre et son bâton de pèlerin pour évangéliser ses compagnons hérétiques. Jusque-là, cela fait sourire. Mais, comme dans les religions réelles, ils sont parfois agaçants de vouloir étendre leur opinion à ceux qui ne croient pas et qui basent

[4] Bien que la révision par les pairs soit un outil essentiel pour maintenir la qualité de la recherche scientifique, elle n'est évidemment pas sans défauts puisque exécutée par des humains avec tous leurs biais habituels. Cependant elle reste la méthode qui a le taux d'erreur le plus faible à ce jour.

[5] Il existe plusieurs définitions de la "foi". Wikipédia donne : « *Confiance en une personne, une chose ou un concept. Croyance en Dieu ou dans les doctrines ou les enseignements de la religion.* ». La bible chrétienne (Hébreux 11 :1) donne : « *Or la foi est la confiance en ce que nous espérons et l'assurance de ce que nous ne voyons pas.* »

leurs opinions uniquement sur les données expérimentales. Certaines de ces "églises" n'hésitent pas à se comporter comme l'Inquisition. Ceux qui osent exprimer une opinion différente sont brûlés à chaque occasion, lors de conférences ou sur leur lieu de travail ou sur les réseaux sociaux. Certains jeunes chercheurs, peu inspirés, préfèrent se convertir à la religion dominante, devenir des clercs ce qui est bien évidemment une voie plus rapide et plus simple que celle des chercheurs innovants ou même des iconoclastes. Le grand Pape écrit sa Bible pour diffuser ses idées, l'impose à lire aux étudiants et aux nouveaux venus. Il met alors en forme la pensée des jeunes générations et assure son trône. C'est une attitude médiévale qui peut bloquer le progrès. Certains Papes vont si loin qu'ils croient être le Pape dans leur domaine de spécialisation leur donne automatiquement le même droit d'avoir le même trône dans tous les autres domaines (bias cognitif à nouveau)...

Ce dernier avertissement, et les rappels qui vont suivre, doivent servir le scientifique ou tout lecteur en faisant bon usage de ce que nous considérons aujourd'hui comme les bonnes pratiques de travail / raisonnement (nous discuterons en détail des principes de la méthode Descartes plus tard) à résoudre des problèmes ou développer des modèles théoriques de façon rigoureuse et non biaisée.

À cette fin, voici un tableau récapitulatif qui fournit les étapes qui devraient être suivies par un scientifique qui travaille en mathématiques ou en physique théorique (pour les définitions, voir ci-dessous) ou toute personne souhaitent avoir une démarche intellectuelle un tant soit peu honnnête et rigoureuse :

En cours de traduction de l'anglais

Mathématiques	Physique
1. Exposer formellement ou en langage commun le ou les "hypothèses", "conjectures", "propriétés" à prouver (les hypothèses sont notées H1., H2., etc. les conjectures CJ1., CJ2., etc. et les propriétés P1., P2., etc.).	**1.** Exposer correctement dans un langage formel ou commun tous les détails des "problèmes" à résoudre (les problèmes sont notés P1., P2., etc.) et fournit les définitions rigoureuses des concepts et notations utilisés.
2. Définir les "axiomes" (non démontrables, indépendants et non contradictoires) qui donneront les points de départ et établiront des restrictions aux développementx (les axiomes sont notés A1., A2., etc.)[6]. Dans la même veine, les mathématiciens définissent le vocabulaire spécialisé lié aux opérateurs mathématiques qui sera noté D1., D2., etc.	**2.** Définir (ou énoncer) les "postulats" ou les "principes" ou les "hypothèses" (supposées improuvables mais basées sur des évidences : des mesures !) qui donneront le point de départ et établiront des restrictions sur les développements et raisonnements (typiquement, les hypothèses et les principes sont notés P1., P2., etc., les hypothèses H1., H2., etc. en essayant d'éviter la confusion entre les postulats et les principes)[7].
3. Une fois les axiomes posés, en extraire directement les "lemmes" ou "propriétés" dont la validité en découle et préparer le développement du théorème supposé valider l'hypothèse ou les conjectures de départ (les lemmes étant notés L1., L2., etc. et les propriétés P1., P2. , etc.).	**3.** Une fois le "modèle théorique" (à ne pas confondre avec le mot "théorie"... !) développé, vérifier les unités dimensionnelles des équations pour identifier des erreurs possibles triviales dans les développements (ces contrôles étant marqués VA1., VA2., etc.) et les résultats dans des cas extrêmes.
4. Une fois les "théorèmes" (notés T1., T2., etc.) démontrés on peut conclure sur les "conséquences" (notées C1., C2., Etc.) et même les propriétés (notées P1., P2., Etc.).	**4.** Recherchez les cas limites (y compris les "singularités") du modèle pour vérifier intuitivement la validité (ces contrôles borderline sont notés CL1., CL2., Etc.).
5. Tester la robustesse ou l'utilité des conjectures ou des hypothèses en prouvant l'inverse (réciproque) du théorème ou en les comparant avec d'autres exemples de théories mathématiques bien connues pour voir si l'ensemble forume une structure cohérente (les exemples étant notés E1., E2. , etc.).	**5.** Tester le modèle théorique obtenu expérimentalement et soumettre le travail à comparer avec d'autres équipes de recherche indépendantes. Le nouveau modèle devrait fournir des résultats expérimentaux et jamais observés (prédictions à falsifier). Si le modèle est validé, alors il obtient le statut officiel de "théorie" jusqu'à ce qu'il soit mis en défaut.
6. De possibles remarques peuvent être ajoutée dans un ordre hiérarchiquement structuré et notées R1., R2., etc.	**6.** De possibles remarques peuvent être ajoutée dans un ordre hiérarchiquement structuré et notées R1., R2., etc.

TAB. 4.1 – **Méthodologie pour les dévelopements en Mathématique & Physique**

En cours de traduction de l'anglais

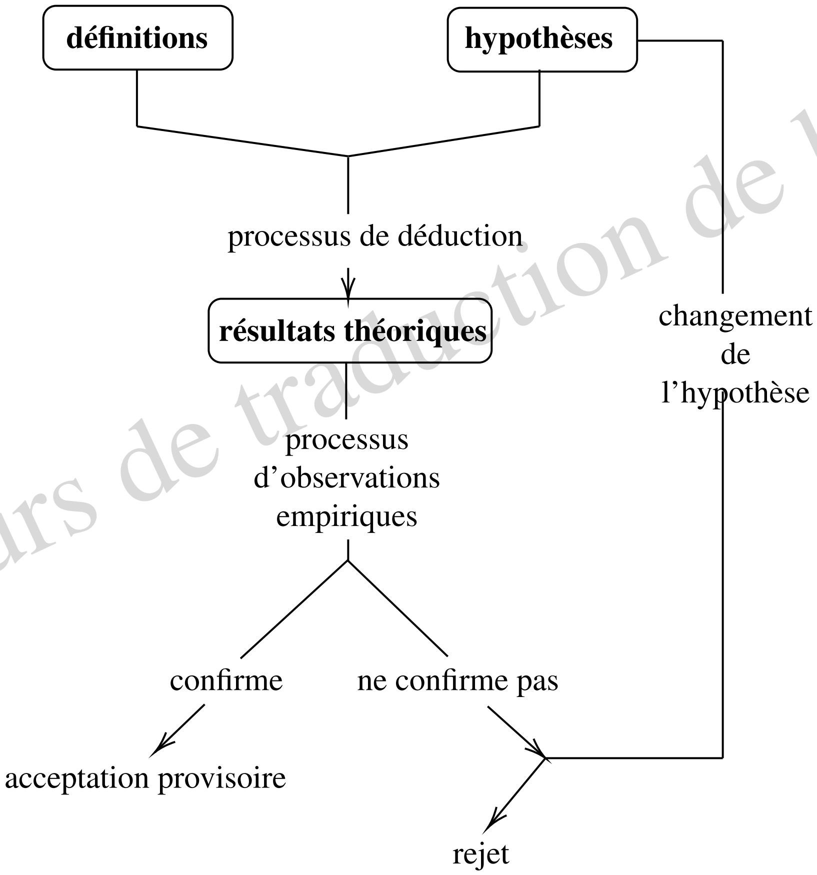
[4]Parfois, les «propriétés», les «conditions» et les «axiomes» sont confondus alors que le concept d'axiome est beaucoup plus précis et profond.

[5]Il ne faut cependant pas oublier que la validité d'un modèle ne dépend pas du réalisme de ses hypothèses mais de la conformité de ses implications avec la réalité.

Remarque

Le fait qu'une question puisse être formulée dans une phrase dans un français grammaticalement correcte ne la rend pas significative, ni ne lui donne droit à une quelconque attention sérieuse. Ni, le fait qu'un mot existe dans le dictionnaire (comme le mot "âme") ne rend réel le concept sous-jacent...

Procéder comme dans le tableau ci-dessus est une base de travail possible pour les personnes actives dans le domaine des mathématiques ou de la physique, ou toute personne intéressée à avoir une démarche intelectuelle rigoureuse[8]. évidemment, procéder proprement et traditionnellement comme ci-dessus prend un peu plus de temps que de faire les choses n'importe comment (c'est pourquoi la plupart des enseignants ne suivent pas ces règles, ils n'ont pas assez de temps pour couvrir tout le programme), c'est aussi la raison pour laquelle la science amène une majorité de personnes à l'extérieur de leur zone de confort intelectuelle (la plupart des gens cherchant à résoudre des problèmes et à trouver des réponses à leurs questions en moins d'une heure...).



En cours de traduction de l'anglais

Le lecteur doit aussi savoir que nous insistons sur le fait que les vrais scientifiques ne devraient pas avoir d'émotions derrière les sujets qu'ils étudient ou dont ils parlent, ce afin simplement d'éviter les biais cognitifs. Ils doivent uniquement utiliser des évidences (faits basés sur des don-

[8]Pour vous éduquer et vous exercer ou vos élèves sur le sujet de la pensée critique, nous recommandons fortement la lecture de [346] et des tests de pensée critique comme le test Ennis-Weir (test d'écriture libre dans lequel le candidat évalue, paragraphe par paragraphe, un cas raisonné) ou le California Critical Thinking Disposition Inventory (CCTDI) qui mesure les dispositions à utiliser les compétences de pensée critique ainsi que le Watson-Glaser Critical Thinking Appraisal (WGCTA).

nées, évaluation par des pairs, expériences reproductibles, consensus de la communauté scientifique) plutôt que des analyses individuelles émotionnelles, biaisées[9], subjectives et éducatives qui ne sont pas basées sur des données sourcées, reproductibles et réfutables. Nous pouvons évidemment nous interroger sur l'hypothèse selon laquelle les sondes sensorielles utilisées détectent quelque chose de réel ou non. Mais les scientifiques professionnels ne se soucient pas d'une telle question philosophique. La seule chose qui compte (en y mettant un peu de fun...), c'est que ces sondes sensorielles fournissent des mesures fiables, utiles et cohérentes pour tester des modèles qui contribueront à la construction de nouveaux outils pour l'humanité !

Définitions (#4.2.2) :

D1. Un "fait ontologique" concerne la nature fondamentale de la réalité et de ce qui existe, indépendamment de la perception et des instruments humains.

D2. Un "fait épistémologique" se rapporte à la manière dont nous parvenons à connaître ou à comprendre quelque chose : nos connaissances, nos méthodes et nos justifications.

En cours de traduction de l'anglais

> *Ce que nous observons, ce n'est pas la Nature en soi, mais la Nature exposée à notre méthode d'investigation.*

quote 4.2:51.#6

Werner Heisenberg

FIG. 4.2 – Un exemple d'absence de consensus dans un petit échantillon de religions

[9]Parmi tous les principaux biais que nous présenterons plus tard, le Biais de Confirmation - la tendance à rechercher, interpréter, favoriser et rappeler des informations qui confirment ou soutiennent ses croyances ou valeurs personnelles a priori - est très probablement le plus courant chez les personnes illétrées scientifiquement.

quote 4.2:52.#7

> *La science n'a pas pour but de réfuter les religions, mais de découvrir ce qui est vrai. Les religions ne sont que des dommages collatéraux!*
>
> ?

Signalons aussi une forme amusante scientifique des 10 commandements :

1. Les phénomènes tu observeras
   Et jamais mesure tu ne falsifieras
   (attention à l'erreur de confirmation : étudier que des phénomènes qui valident ses convictions)
2. Des hypothèses tu formuleras
   Que par l'expérimentation ou la simulation tu testeras
3. L'expérience précisément tu décriras, tes données et algorithmes tu fourniras
   Car ton collègue la reproduira
   (attention au piège de la discipline narrative : coller les faits aux résultats désirés)
4. Fort de tes résultats
   Une théorie tu bâtiras
5. De parcimonie tu useras
   Et l'hypothèse la plus simple tu retiendras
6. Jamais vérité définitive ne sera (humilité épistémique)
   Et toujours tu chercheras
7. D'une thèse non réfutable tu t'abstiendras
   Car hors de la science elle restera
8. Tout échec sera pris comme une réussite
   Car la science doit confirmer mais aussi infirmer
9. Mon autorité je n'utiliserai pas (argument d'autorité)
   Pour biaiser les opinions des gens dans des domaines où je n'ai pas d'expertise prouvée
10. Je respecterai le serment d'Archimède et les Règles de Publication Scientifique
    Car la science doit être transparente et responsable

En cours de traduction de l'anglais

quote 4.2:52.#8

> *La science sait qu'elle ne sait pas tout, sinon elle s'arrêterait.*
>
> Dara Ò Brian

Attention ! Il est très facile de faire de nouvelles théories physiques en alignant simplement des mots. Ce type de démarche est nommé "philosophie" et les Grecs ont déduit l'existance des atomes avec cette méthode d'investigation. Cela peut donc conduire avec beaucoup de chance à une vraie théorie. Par contre il est beaucoup plus difficile de faire une "théorie prédictive", c'est-à-dire avec des équations qui prédisent le résultat d'une expérience.

De plus, de nombreux philosophes réinventent des arguments que les physiciens savent depuis longtemps être faux. Nous avons entendu des philosophes s'inquiéter de paradoxes résolus il y a des siècles par les physiciens, et nous avons entendu des philosophes déduire comment les lois naturelles devraient être tout en ignorant comment les lois naturelles sont. Bref, il y a malheureusement beaucoup de philosophes qui ne remarquent pas quand ils sont hors de leur domaine d'expertise. On peut en dire autant des physiciens. Certains physiciens s'appuient plus fréquemment sur des arguments philosophiques qu'ils n'aiment l'admettre. Il est cependant assez facile pour nous de rejeter la philosophie comme utile - parce que c'est inutile.

> *La science ne sait pas tout, la religion ne sait rien !*
>
> L. Aron Nelson

quote 4.2:53.#9

Remarques

Ce qui sépare les mathématiques et la physique, c'est qu'en mathématiques, l'hypothèse est toujours vraie. Le discours mathématique n'est pas une preuve d'une vérité de recherche externe, mais une cible de cohérence. Ce qui devrait être correct est juste le raisonnement.

Lorsque ces règles ne sont pas respectées, on parle de "fraude scientifique"" ou de "fraude intellectuelle" (qui conduit souvent à être renvoyé de son travail mais malheureusement nous ne retirons toujours pas les diplômes quand cela arrive). En général, la fraude scientifique elle-même se présente sous quatre formes principales : le plagiat, la fabrication de données et l'altération des résultats défavorables à l'hypothèse, l'omission d'hypothèses de travail claires et de données recoltées, l'usage d'arguments fallacieux et biaisés (rappelez-vous qu'en particulier un argument rhétorique qui n'est pas supporté par des évidences expérimentales n'a aucun intérêt pour les scientifiques professionnels !). A ces fraudes on peut aussi ajouter des comportements qui posent des problèmes de qualité de travail ou plus spécifiquement d'éthique, tels que ceux visant à soumettre par exemple plusieurs fois la même publication avec seulement quelques modifications, l'omission de conflit d'intérêt (financiers, religieux et politiques), les expériences dangereuses, la non-conservation des données primaires, etc.

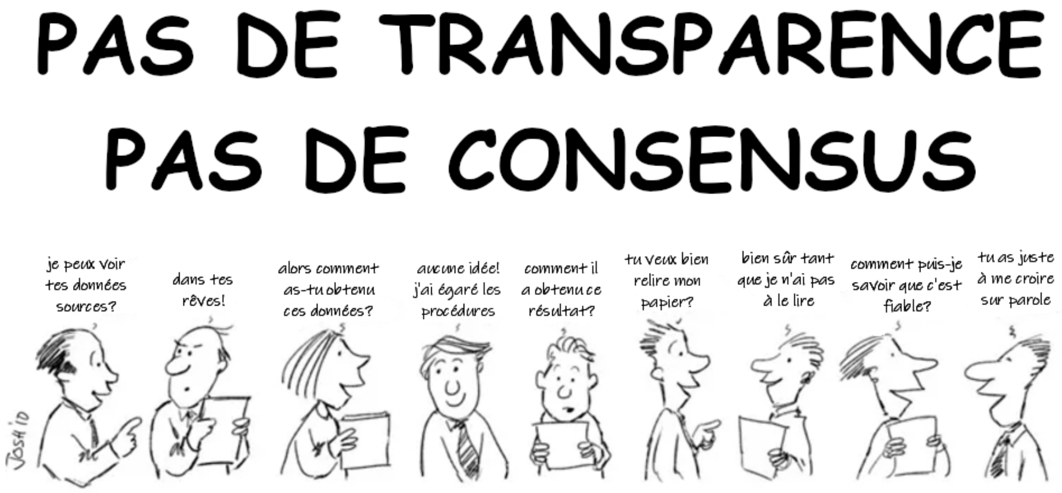


FIG. 4.3 – **Source :** http://cartoonsbyjosh.co.uk

4.2.1 Méthode de Descartes

En cours de traduction de l'anglais

Présentons maintenant les quatre principes de la méthode de Descartes qui, rappelons-le, est considéré comme le premier scientifique de l'histoire de par sa méthode d'analyse :

P1. Ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle. C'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

P2. De diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait (observations scrupuleuses et hypothèses vraisemblables jusqu'à preuve du contraire), et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

P3. De conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusqu'à la connaissance des plus composés, et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

P4. Faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

quote
4.2:54.#10

> *L'Art et la Science de poser des questions est la source de tout Savoir.*
>
> Thomas Berger

Nullius in verba (en latin "ne croire personne sur parole") est la devise de la Royal Society. C'est une expression de la détermination des membres de la Royal Society à résister à la domination de l'autorité et à vérifier toutes les déclarations par un appel à des faits déterminés par des expériences reproductibles et par un examen scientifique précautionneux par les pairs[10] de toute information.

4.2.1.1 Études en aveugle

Les expériences scientifiques[11] sont conçues pour déterminer des faits sur notre monde en utilisant soit des "études rétrospectives" basées sur la recherche de corrélations en exploitant des bases de données existantes ou sur des "études prospectives" basées sur la recherche de causalités en utilisant des expériences contrôlées, randomisées et en double aveugle. Mais dans des analyses compliquées, il y a un risque que les chercheurs faussent involontairement les résultats pour qu'ils correspondent à ce qu'ils s'attendaient à trouver. Pour réduire ou éliminer ce biais potentiel, les scientifiques appliquent une méthode appelée "l'analyse aveugle ".

En cours de traduction de l'anglais

[10]Le processus d'examen par les pairs s'applique généralement aux articles de revues scientifiques, mais il est possible qu'un livre soit également évalué par des pairs. Bien que de nombreux livres passent par une sorte de processus d'édition ou de révision, il n'y a pas de méthode facile pour déterminer si un livre est évalué par des pairs. Une méthode pour trouver des livres évalués par des pairs consiste à jeter un oeil aux publications de livres des presses universitaires. Les livres publiés par les presses universitaires sont presque toujours soumis à un processus d'examen par les pairs. Les livres des presses universitaires sont généralement écrits par des membres du corps professoral qui sont soumis à une immense pression pour produire une littérature savante faisant autorité. Le processus d'examen par les pairs pour les presses universitaires implique généralement deux ou trois arbitres indépendants qui examineront initialement le manuscrit. Si le manuscrit reçoit une évaluation positive, la presse universitaire l'enverra à son comité de rédaction, qui sont tous membres du corps professoral, pour examen final.

[11]Ce texte est un copier/coller d'un article écrit par Manuel Gnida à `http://www.symmetrymagazine.org/article/the-facts-and-nothing-but-the-facts`

Phénomène	Diagramme causal	Équations structurelles	Description
Causalité	A → Y	$y = f(a)$	A cause Y.
Médiation (complète)	A → M → Y	$m = f_1(a)$ $y = f_2(m)$	L'effet de A sur Y est entièrement médié par M.
Médiation (partielle)	A → M → Y, A → Y	$m = f_1(a)$ $y = f_2(a, m)$	L'effet de A sur Y est partiellement médié par M.
Confusion	C → A, C → Y, A → Y	$a = f_1(c)$ $y = f_2(a, c)$	C est une cause commune (ou un facteur de confusion) de A et Y.
Conditionnement[1]	[C] → A, [C] → Y, A → Y	$a = f_1(c)$ $y = f_2(a, c)$	L'analyse ou le plan d'expérience dépend de C (c'est-à-dire contrôler C, ajuster C, etc.).
Collisionneur	A → C ← Y	$c = f(a, y)$	C est un collisionneur de A et Y, c'est-à-dire que conditionner sur C induirait une association parasite entre A et Y.
Biais du collisionneur[1]	A → [C] ← U, U → Y, A - - - U	$c = f_1(a, u)$ $y = f_2(u)$	Y est indépendant de A, mais le conditionnement sur le collisionneur C crée une association parasite entre A et U (ligne pointillée), ouvrant une porte dérobée entre A et Y.
Variable instrumentale	Z → A, U → A, U → Y, A → Y	$y = f_1(a, u)$ $a = f_2(z, u)$	Z est une variable instrumentale pour l'exposition A, c'est-à-dire que l'association entre Z et Y peut être utilisée pour dériver une estimation de l'effet de A sur Y.
Boucle de rétroaction	$A_1 \to A_2 \to A_3$, $Y_1 \to Y_2 \to Y_3$ (croisées)	$a_2 = f_1(a_1, y_1)$ $a_3 = f_2(a_2, y_2)$ $y_2 = f_3(a_1, y_1)$ $y_3 = f_4(a_2, y_2)$	Exemple d'un processus cyclique ou de boucle de rétroaction, où l'exposition A est affectée par les valeurs passées du résultat Y et vice versa.

[1] Notez que le conditionnement sur la variable C n'est représenté que dans le diagramme causal, pas dans les équations structurelles.
A: exposition. C: confondeur ou collisionneur. M: médiateur. U: facteur de confusion non mesuré. Y: résultat. Z: variable instrumentale.

FIG. 4.4 – **Most common types of causal relationships in Science (source : [220])**

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#4.2.3) : Un "essai contrôlé randomisé" (ECR) est une forme d'expérience scientifique utilisée pour neutraliser des facteurs qui ne sont pas sous contrôle expérimental direct en répartissant aléatoirement les participants entre les traitements comparés. Cette allocation aléatoire permet d'obtenir une conversion suffisante des facteurs de confusion (les facteurs de confusion sont ceux qui peuvent entrer en concurrence avec l'élément d'intérêt pour expliquer l'effet d'un traitement) en bruit blanc pour fournir une comparaison utile de l'étude des traitements.

Les études à l'aveugle[12] sont probablement mieux connues par leur utilisation dans les essais cliniques de médicaments (le terme "triple aveugle" se réfère parfois à ces derniers), dans lequel les patients sont tenus dans l'ignorance - ou dans l'aveugle - quant à savoir s'ils reçoivent un médicament ou un placebo[14] (en effet, les pilules factices, sans aucune activité pharmacologique, améliorent manifestement la santé à un faible niveau de signification statistique, c'est pourquoi les essais de médicaments en double aveugle doivent utiliser des placebos ou standard of care comme témoins pour neutraliser l'effet placeo et permetter le blinding du traitement) mais aussi ceux qui prodiguent le traitement (pour minimiser les biais) et ceux qui collectent les données (pour minimiser la corruption !). Cette approche aide les chercheurs à juger si leurs résultats proviennent du traitement lui-même ou de la croyance des patients qu'ils le reçoivent. Mais la méthode est également utilisée dans la dégustation gastronomique ou dans les laboratoires médico-légaux.

Les physiciens des particules et les astrophysiciens font également des études "en aveugle". L'approche est particulièrement utile lorsque les scientifiques recherchent des effets extrêmement faibles cachés dans le bruit de fond qui indiquent l'existence de quelque chose de nouveau, non pris en compte dans le modèle actuel. Parmi les exemples, citons les découvertes largement diffusées du boson de Higgs par des expériences menées au Large Hadron Collider du CERN (Centre Européen de la Recherche Nucléaire) et des ondes self-congratulation par le détecteur Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

En cours de traduction de l'anglais

[12]La conception d'étude la plus simple est un "étude à un seul bras". Dans cette conception, un échantillon d'individus atteints de la condition médicale ciblée reçoit la thérapie expérimentale, puis est suivi dans le temps pour observer leur réponse. Dans une "étude à double bras", la moitié des personnes recevront un "placebo" ou "standard of care[13]" (groupe exposé vs groupe non exposé). Dans une "étude à trois bras", un tiers recevra un traitement compétitif. Dans le cas général nous parlons "d'étude multi-bras trial".

[14]Dans la science des médicaments, un "placebo pur" est un traitement sans aucune substance active ; un "placebo impur" est un produit pharmacologiquement actif mais n'ayant aucun effet sur la pathologie traitée, ou dont l'efficacité n'a pas été suffisamment démontrée. Bien évidemment nous ne donnons pas de placebo lorsqu'il existe déjà un traitement ayant un certain niveau d'efficacité. Dans ce dernier cas, nous comparons le nouveau traitement à l'ancien.

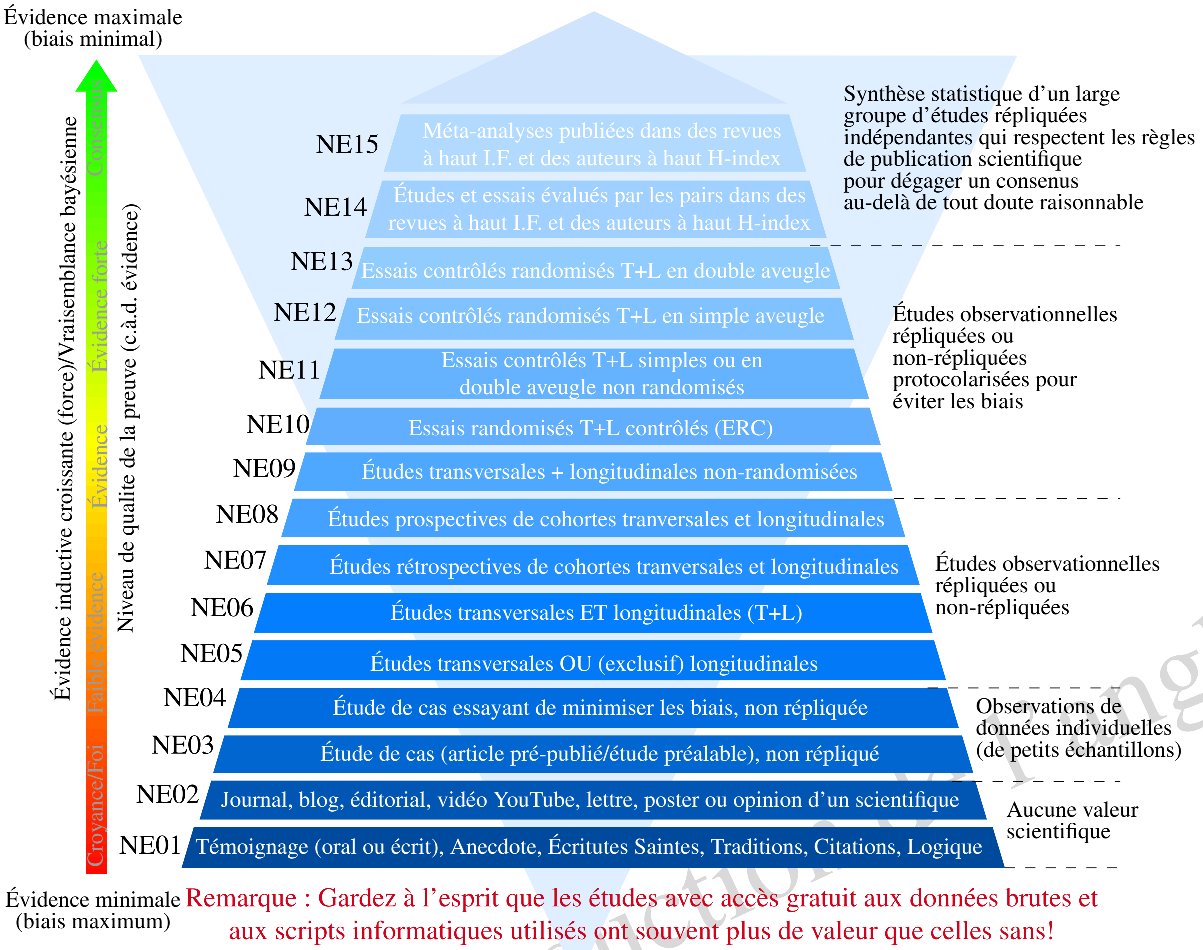


FIG. 4.5 – Évidence Scientifique Hiérarchisée (pyramide des données probantes)

La figure ci-dessus illustre[15] au plus bas niveau d'évidence le fait trivial que nous ne devrions pas faire confiance aux scientifiques (leurs opinions et croyances) et encore moins aux médecins, chirurgiens ou ingénieurs (qui ne sont pas des scientifiques !) - la science n'est pas dirigée par les croyances et opinions des humains (!) - mais uniquement par les évidence fournies par les données d'expériences indépendantes reproductibles et l'analyse statistique à un niveau de méta-analyse dans des journaux soumis à la revue par les pairs à haut niveau d'indice H !

En cours de traduction de l'anglais

[15] La grande majorité des techniques et méthodes mentionnées dans chacune des lignes de la figure sont prouvées et expliquées dans la section Statistiques à partir de la page 535 et dans la section Méthodes Numériques à partir de la page ??.

Attention ! Nous pouvons trouver sur Internet de nombreux sites Web d'aspect professionnel administrés par des personnes anonymes (qui s'efforcent de cacher qui ils sont, dans quel pays ils vivent et quelle entreprise ils dirigent...) compilant des méta-analyses ! Cependant, un site Web anonyme - ayant par définition un H-index nul - est évidemment suspect, surtout lorsqu'il ne sélectionne que des études qui vont dans le sens de son agenda politique et religieux et ne fournit pas le code source pour reproduire les résultats. Il en va de même pour certains livres qui veulent se faire passer pour des ouvrages universitaires et publiés dans des maisons d'éditions au catalogue plus que douteux et n'ayant aucune affiliation avec une grande université.

Par exemple, les niveaux d'évidences ci-dessus ne s'appliquent pas à l'étude de l'Histoire car nous ne pouvons pas répéter ou observer le passé (contrairement à l'astrophysique où plus nous regarde loin, plus nous remontons loin dans le passé de l'Univers que nous voyons !). En Histoire, les règles de base (niveau premier cycle) sont par exemple de considérer les trois différents types de sources ci-dessous :

SOURCE PRIMAIRE	SOURCE SECONDAIRE	SOURCE TERTIAIRE
Définition : données brutes ; sources originales des informations avant analyse ; écrites par le protagoniste du sujet	**Définition :** sources qui analysent, interprètent ou racontent une histoire sur les données primaires ; elles n'offrent pas de nouvelles évidences et ne constituent pas une évidence ; non originales	**Définition :** Sources qui compilent des données sur un sujet particulier.
Caractéristiques : observations de première main ; protagoniste qui a écrit ; récits contemporains d'événements ; document original daté	**Caractéristiques :** interprétation des informations ; écrites après les événements d'intérêt ; offre une revue ou critique ;	**Caractéristiques :** collection ou liste de sources primaires et secondaires ; travaux de références ;outil de recherche pour sources
Exemples : interviews ; discours ; agendas ; certificats de naissance ; monnaies ; mesures datées ; articiles originaux ; livreo originaux écrits au temps de l'événément ; comptes rendus d'expèriences	**Exemples :** biographies ; articles de journaux ; manuels/ouvrages ; commentaires ; éditoriaux ; livres saints ; vidéos reconstituant des événements	**Exemples :** encyclopédies ; bibliographies ; résumés ; index ; littérature ; revues ; catalogues de bibliothèque ; bases de donnees ; le présent livre (Opera Magistris)

TAB. 4.2 – **Rappels des différents niveaux de Sources en Sciences**

En cours de ... nglais

Mais aux niveaux des cycles universitaires supérieurs, nous avons la hiérarchie suivante (rappelons que rien n'est fixé pour toujours !) d'évidences scientifiques dans le domaine de l'Histoire (cette hiérarchie est rarement enseignée car elle peuvent blesser et offenser de nombreux croyants et même créer une dissonance cognitive chez une proportion significative de professionnels - enseignants et professeurs - qui ont des biais d'ancrage importants) :

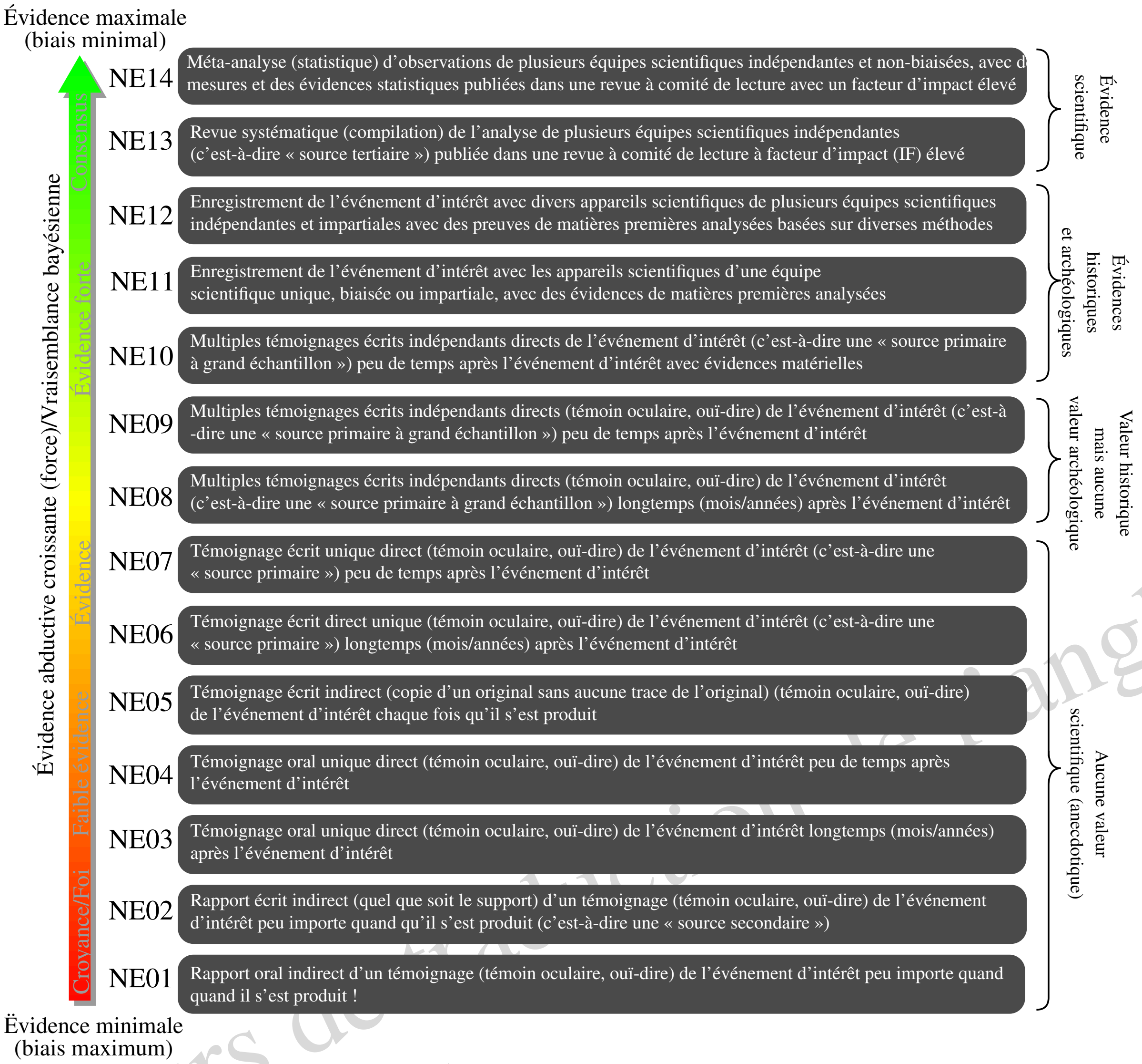


FIG. 4.6 – Niveaux d'évidence dans une science sociale comme l'Histoire

En cours de traduction de l'anglais

Un contrôle de sécurité important pour s'assurer que les affirmations scientifiques sont dignes de confiance est la "réplication". Si de nouvelles découvertes issues de la recherche scientifique peuvent être reproduites, cela signifie qu'elles sont plus susceptibles d'être valides. D'autre part, si les résultats ne peuvent pas être reproduits, ils sont susceptibles d'être invalides. Par conséquent, aucune étude unique (pas même un essai contrôlé randomisé) ne peut être considérée comme une preuve solide - elle est simplement indicative. Pour cette raison, nous préférons les méta-analyses. Une méta-analyse est un résumé d'études dans lesquelles des techniques d'analyse statistique sont utilisées pour combiner les résultats d'études individuelles afin d'obtenir une estimation plus précise de l'effet. Ainsi, quel que soit le type de question, les méta-analyses sont souvent les modèles de recherche les plus appropriés. En d'autres termes, c'est l'ensemble des évidences qui est important – pas les études isolées !

Occupational therapy for patients with problems in personal activities of daily living after stroke: systematic review of randomised trials

Study or Subgroup	Treatment Events	Treatment Total	Control Events	Control Total	Weight	Risk Difference IV, Fixed, 95% CI	Year
Drummond 1995	2	42	3	23	12.8%	-0.08 [-0.23, 0.07]	1995
Corr 1995	33	55	32	54	8.7%	0.01 [-0.18, 0.19]	1995
Logan 1997	6	53	14	58	15.3%	-0.13 [-0.27, 0.01]	1997
Walker 1999	18	90	27	86	18.0%	-0.11 [-0.24, 0.01]	1999
Gilbertson 2000	33	66	41	67	10.5%	-0.11 [-0.28, 0.06]	2000
Parker 2001	106	248	56	123	25.7%	-0.03 [-0.14, 0.08]	2001
Sackley 2006	27	53	36	47	9.0%	-0.26 [-0.44, -0.08]	2006
Total (95% CI)		**607**		**458**	**100.0%**	**-0.09 [-0.15, -0.04]**	
Total events	225		209				

Heterogeneity: Chi² = 6.10, df = 6 (P = 0.41); I² = 2%
Test for overall effect: Z = 3.32 (P = 0.0009)

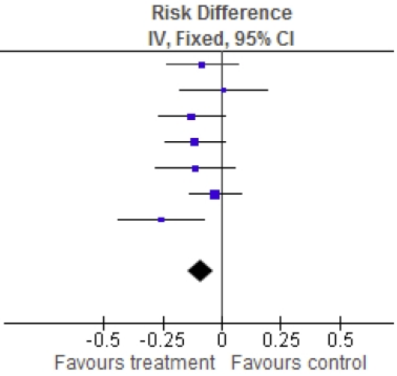


FIG. 4.7 – **Exemple particulier de méta-analyse dans le domaine des essais cliniques avec des concepts que nous détaillerons sans exception dans tout ce livre (source : [278])**

Remarque

Les témoignages ou anecdotes personnelles n'ont presque aucune valeur si la taille de l'échantillon est petite et biaisée et s'il n'y a pas de moyen direct de mesurer directement l'événement associé ! C'est pourquoi les évidences historiques basées sur seulement quelques témoignages écrits dans un livre unique vieux de plusieurs milliers d'années n'ont aucune valeur scientifique (même s'il existe des dizaines de tels livres avec des témoignages concordants).

Ceux qui citent Nietzche :

> *Il n'y a pas de faits, que des interprétations !*

quote 4.2:61.#11

Friedrich Nietzsche

ne comprennent pas non plus qu'ils sont au niveau EL01 parce que cette affirmation est elle elle-même un fait... ? ? ? ?

"*Les analyses scientifiques sont des processus itératifs, dans lesquels nous effectuons une série de petits ajustements aux modèles théoriques jusqu'à ce que les modèles décrivent avec précision les données expérimentales*", explique Elisabeth Krause, postdoc à l'Institut Kavli d'astrophysique des particules et de cosmologie, institut qui est conjointement exploité conjointement par l'Université Stanford et le Département de l'énergie SLAC National Accelerator Laboratory. "*À chaque étape d'une analyse, il y a le danger que les connaissances antérieures nous guident dans la façon dont nous procédons aux ajustements, tandis que les analyses aveugles nous aident à prendre des décisions indépendantes et meilleures*".

Le Retour sur EXpérience (REX) montre comme attendu que les analyses en aveugle doivent être conçues individuellement pour chaque expérience. Effectivement, la façon dont "l'aveuglement" est fait doit laisser aux chercheurs suffisamment d'informations pour permettre une analyse significative, et cela dépend du type de données provenant d'une expérience spécifique.

En cours de traduction Opera Magistris

Une approche commune consiste à baser l'analyse uniquement sur certaines données, à l'exclusion de la partie dans laquelle une anomalie est censée se cacher. Les données exclues sont dites être dans une "boîte noire" ou une "boîte de signalisation cachée[16]".

Prenons le cas de la recherche du boson de Higgs. En utilisant les données recueillies avec le Large Hadron Collider (LHC) jusqu'à la fin de 12011 (calendrier holocène), les chercheurs ont vu des signes d'une bosse dans les statistiques comme un signe potentiel d'une nouvelle particule avec une masse d'environ 125 gigaelectronvolts. Donc, quand ils ont regardé de nouvelles données, ils ont délibérément mis en quarantaine la plage de masse autour de cette bosse et se sont concentrés sur les données restantes à la place.

Ils ont utilisé ces données pour s'assurer qu'ils travaillaient avec un modèle suffisamment précis. Puis ils ont "ouvert la boîte" et appliqué ce même modèle à la région préalabement mise en quarantaine. La bosse s'est révélée finalement être la particule de Higgs tant recherchée.

Cela a bien fonctionné pour les chercheurs du boson de Higgs. Cependant, comme les scientifiques impliqués dans l'expérience du Large Underground Xenon (LUX) ont rapporté après cette approche, la méthode de la "boîte noire" de l'analyse aveugle peut bien évidemment poser des problèmes si les données que nous mettons dans la boîte noire contiennent des événements cruciaux.

LUX a récemment effectué l'une des recherches les plus sensibles au monde sur les WIMP (Weakly Interacting Massive Particles) - des particules hypothétiques de matière noire[17], une forme invisible de la matière qui est cinq fois plus répandue que la matière ordinaire. Les scientifiques du LUX ont fait beaucoup de travail pour protéger le LUX contre les particules du bruit de fond : construction du détecteur dans une salle blanche, le remplir de liquide complètement purifié, l'entourer de blindage et l'installer sous $1,600$ mètres de roche. Mais quelques particules errantes le traversent néanmoins, et les scientifiques ont besoin de regarder toutes leurs données pour les trouver et les éliminer.

Pour cette raison, les chercheurs du LUX ont choisi une approche différente pour leurs analyses. Au lieu d'utiliser une "boîte noire", ils utilisent un processus appelé "salage".

Les scientifiques du LUX qui n'étaient pas impliqués dans l'analyse LUX la plus récente ont ajouté de faux événements aux signaux simulés par des données qui ressemblent à des signaux réels. Tout comme les patients dans un essai de médicament à l'aveugle, les scientifiques du LUX ne savaient pas s'ils analysaient des données réelles ou placebo. Une fois qu'ils ont terminé leur analyse, les scientifiques qui ont fait le "salage" ont révélé quels événements étaient faux.

Une technique similaire a été utilisée par les scientifiques de LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), qui ont finalement fait la première détection de très petites ondulations dans l'espace-temps (pour une définition naïve et technique de "l'espace-temps", voir la section sur la Relativité Restreinte à la page **??**) appelées "ondes gravitationnelles".

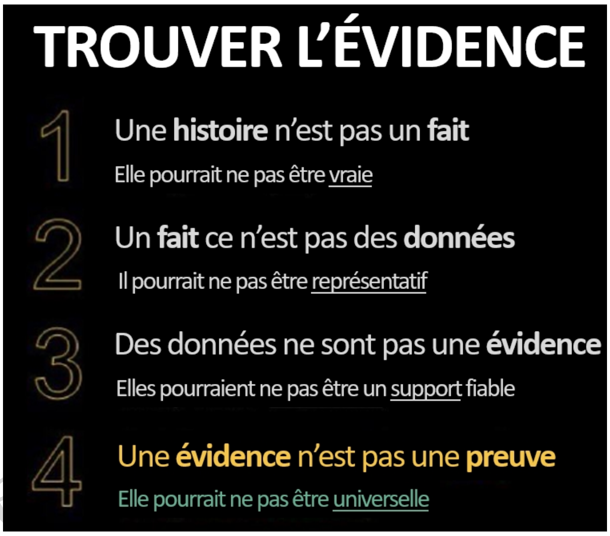
En cours de traduction de l'anglais

[16]L'injection de faux signaux dans les détecteurs scientifiques est un test de qualité périodique courant dans la recherche professionnelle pour vérifier la robustesse des processus scientifiques et tester le fait que les chercheurs ont été bien entraînés à contrôler leurs biais cognitifs.

[17]Depuis le 12 juin 12025 (calendrier holocène), on sait, grâce aux FRB (Fast Radio Bursts), qu'environ 76% de la matière baryonique de l'Univers se trouve dans le milieu intergalactique (IGM). Environ 15% se trouve dans les halos galactiques, et une petite fraction est enfouie dans les étoiles ou au milieu du gaz galactique froid ([78]).

Pas tout le monde dans la communauté scientifique est convaincu que les analyses en aveugle soient nécessaires. Les analyses en aveugle sont bien évidemment plus compliquées à concevoir que les analyses non-aveugles et prennent plus de temps à compléter et sont donc plus onéreuses. Certains scientifiques participant à des analyses en aveugle passent inévitablement du temps à regarder de fausses données, ce qui peut donner l'impression d'un certain gaspillage.

Typiquement certains médecins et ingénieurs assez célèbres (tous détestant les mathématiques car ils étaient très mauvais dans ce domaine pendant leurs études et ne comprennent pas comment appliquer des statistiques avancées ni comment lire les résultats analytiques correspondants !) fustigent la "religion du tout randomisé en double aveugle" et une médecine/ingénierie qui est passée des mains humanistes des soignants/inventeurs à celles froides des statisticiens et des "méthodologues". Certes (...) nous savons effectivement depuis longtemps que la règle du pouce, les sentiments et les croyances fonctionnent bien mieux que la méthode statistique...



En cours de l' anglais

Le lecteur doit également garder à l'esprit que nous n'avons jamais prétendu dans ce livre que les méta-analyses ou les ECR (essais contrôlés randomisés) sont la règle d'or de la science fondée basée sur l'évidence. Nous prétendons simplement que ce sont les outils qui semblent factuellement - au moment où nous écrivons ces lignes - donner les meilleurs résultats. De toute évidence, ils ne sont pas parfaits (car les humains qui mènent les expériences ne sont pas non plus des êtres parfaits...) et parfois ils ont échoué, mais quiconque critique les méta-analyses et les ECR devrait fournir des preuves quantitatives qu'il existe d'autres méthodes (en mentionnant laquelle) qui fonctionnent statistiquement significativement mieux !

quote 4.2:64.#12

La plupart des gens ne veulent pas vraiment la vérité ; ils veulent juste être rassurés que ce qu'ils croient déjà, est la vérité.

L. Aron Nelson

En cours de traduction de l'anglais

4.2.2 Serment d'Archimède

Sur le modèle du serment d'Hippocrate, un groupe d'étudiants de l'école Polytechnique Fédérale de Lausanne (E.P.F.L.) a élaboré en 11990 (calendrier holocène) un serment d'Archimède exprimant les responsabilités et les devoirs de l'ingénieur et du technicien. Il a été repris sous diverses versions par d'autres écoles d'ingénieurs européennes et pourrait servir d'inspiration de base comme serment pour les chercheurs en science (il manque cependant quelques points comme, dans la médecine[18], d'être radié de l'ordre des scientifiques en cas de tromperie grave).

« Considérant la vie d'Archimède de Syracuse qui illustra dès l'Antiquité le potentiel ambivalent de la technique, considérant la responsabilité croissante des ingénieurs et des scientifiques à l'égard des hommes et de la nature, considérant l'importance des problèmes éthiques que soulèvent la technique et ses applications, aujourd'hui, je prends les engagements suivants et m'efforcerai de tendre vers l'idéal qu'ils représentent :

En cours de traduction de l'anglais

01 Je pratiquerai ma profession pour le bien des personnes, dans le respect des Droits de l'Homme et de l'environnement.

02 Je reconnaîtrai, m'étant informé au mieux, la responsabilité de mes actes et ne m'en déchargerai en aucun cas sur autrui.

03 Je comprends que mon travail peut avoir des impacts considérables sur la société et l'économie et ce bien au delà de ma compréhension.

04 Je m'appliquerai à parfaire mes compétences professionnelles.

05 Dans le choix et la réalisation de mes projets, je resterai attentif à leur contexte et à leurs conséquences, notamment des points de vue technique, économique, social, écologique...

06 Je contribuerai, dans la mesure de mes moyens, à promouvoir des rapports équitables entre les hommes et à soutenir le développement des pays économiquement faibles.

07 Je transmettrai, avec rigueur et honnêteté, à des interlocuteurs choisis avec discernement, toute information importante, si elle représente un acquis pour la société ou si sa rétention constitue un danger pour autrui. Dans ce dernier cas, je veillerai à ce que l'information débouche sur des dispositions concrètes.

08 Je ne me laisserai pas dominer par la défense de mes intérêts ou ceux de ma profession.

09 Je m'efforcerai, dans la mesure de mes moyens, d'amener mon entreprise à prendre en compte les préoccupations du présent Serment.

[18]Rappelons au passage que contrairement à une idée faussement répandue que les médecins et les chirurgiens ou tout personnel médical ne sont bien évidemment pas des scientifiques (nous laissons le soin au lecteur de faire des recherches approfondies si cela l'étonne) !

(10) Je pratiquerai ma profession en toute honnêteté intellectuelle, avec conscience et dignité.

(11) Je le promets solennellement, librement et sur mon honneur. »

Malheureusement, ce serment devrait être complété par la "Déclaration de Munich sur les droits et devoirs des journalistes (1971)". C'est-à-dire les tâches essentielles du scientifique dans la collecte, la communication et le commentaire des données consistent en :

- Respecter la vérité, quelles qu'en puissent être les conséquences pour lui-même, et ce, en raison du droit que le public a de connaître la vérité.
- Défendre la liberté de l'information, du commentaire et de la critique.
- Publier seulement les informations dont l'origine est connue ou les accompagner, si c'est nécessaire, des réserves qui s'imposent ; ne pas supprimer les informations essentielles et ne pas altérer les textes et les documents.
- Ne pas user de méthodes déloyales pour obtenir des informations, des photographies et des documents.
- S'obliger à respecter la vie privée des personnes.
- Rectifier toute information publiée qui se révèle inexacte.
- Garder le secret professionnel et ne pas divulguer la source des informations obtenues confidentiellement.
- S'interdire le plagiat, la calomnie, la diffamation, les accusations sans fondement ainsi que de recevoir un quelconque avantage en raison de la publication ou de la suppression d'une information.
- Ne jamais confondre le métier de journaliste avec celui du publicitaire ou du propagandiste ; n'accepter aucune consigne, directe ou indirecte, des annonceurs.
- Refuser toute pression et n'accepter de directives rédactionnelles que des responsables de la rédaction.

En cours de traduction de l'anglais

En cours de traduction de l' anglais

4.2.3 Règles de Publication Scientifique (RPS)

Il est impossible d'avoir un débat ou une analyse constructive si le matériel de base est inutilisable, indisponible ou mal défini. Malheureusement, encore au 21ème siècle, il est assez facile de trouver des publications scientifiques à comité de lecture[19] (PSCL) de Prix Nobel et qui sont scientifiquement inutilisables (sans compter le fait qu'une proportion importante de revues scientifiques privées réchignent à publier les réplications expérimentales car trop ennuyantes selon elles, c'est-à-dire ne rapportant pas assez d'argent...). C'est pourquoi nous rappelons ici les règles de publication scientifique fondamentales pour qu'une publication soit acceptée par un véritable comité d'évaluation scientifique :

01 Utilisation de LaTeX pour la rédaction de la publication

02 Tous les fichiers de rédaction (*.tex) et les fichiers de données brutes doivent avoir des noms conformes à la norme ISO 9660

03 La publication doit avoir un GUID (un code unique semblable à l'identificateur d'objet numérique DOI)

04 Mettre les versions majeures et mineures de la publication (par exemple : v3.6 r58) avec les dates (format de date/heure ISO 8601) et le statut respectif (par exemple : document de travail, prépublication, examiné par les pairs, rétracté) et les mots-clés relatifs à la taxonomie du domaine au début

05 Mettre la date de la période d'expérimentation/développement (format de date/heure ISO)

06 Rédiger un résumé ou "abstract" (bref récaptiluatif des objectifs, de l'expérience, des hypothèses, du protocole, des découvertes principales et des conclusions)

07 Écrire une introduction (incluant une revue de la littérature sur le sujet de le publication)

08 Toutes les unités de mesure[20] et notations mathématiques doivent respecter les normes ISO 80000

09 Utiliser le "principe de précaution[21]" (utilisation de conditionnel)

10 Utiliser des "réponses réactives", c'est-à-dire faire les confrontations entre hypothèses / données, hypothèses / faits, hypothèses / observations

En cours de traduction de l'anglais

[19] Certaines études sont publiées sans aucun examen par les pairs, même des études de Prix Nobel (...), ces "éditeurs prédateurs" inondent la littérature scientifique avec des journaux qui sont essentiellement fallacieux. Tout auteur peut y être publié, il suffit qu'il paie pour cela !

[20] Mesures qui au passage doivent être enregistrables, reproductibles et répondre à une ou plusieurs causes identifiées.

[21] L'usage des expression "...nous pensons", "nous croyons" et "...nous avons la foi" ou toute expression similaire est bien évidemment interdite.

11) Utiliser, si possible, des "facteurs de levier" pour donner du contenu et du crédit à la publication en faisant référence à une autre publication correspondante sur le même sujet [22]

12) Le matériel et les méthodes doivent être décrits en détails et les définitions de nouveaux termes de vocabulaires définis avec précision. Pour les articles théoriques, ils doivent fournir un lien (URL) ou une référence où la preuve détaillée peut être trouvée (si la preuve détaillée est omise dans la publication originale !). Pour les expériences, le protocole détaillé randomisé en double aveugle doit être fourni[23]

13) Inclure des captures d'écran (ou exports) haute résolution de graphiques (incluant obligatoirement les erreurs de mesures et les intervalles de confiance/prédiction visibles sur les graphiques avec le code source pour reproduire ces derniers !) ou de photos

14) Écrire les résultats et pour les données expérimentales toujours fournir une analyse statistique pour montrer si l'effet semble significatif ou non (tailles d'effets[24], intervalles de fluctuations, intervalles de confiance, moyennes, médianes, écarts-types, erreurs standards, tailles d'échantillons, kurtosis, skewness, Ratio de Risque (RR), Ratio des cotes (OR), Diminution Absolue du Risque (ARR) et si la p-value est communiquée toujours communiquer avec la puissance du test !)

15) Calculer la propagation des erreurs des instruments de mesure

16) Écrire la conclusion préliminaire pour éviter le HARKing[25] (Hypothesizing After Results Are Known) et toujours rappeler qu'une seule étude n'est pas concluante mais indicative ET également que l'article pourrait être rétracté s'il contient des erreurs méthodologiques.

17) Supprimez de la publication tout agenda politique personnel explicite (déclarations non scientifiques comme « le socialisme est un ennemi mortel »), croyances sociales (déclarations non scientifiques comme « il n'y a que deux genres de toute façon ») ou croyances religieuses (déclarations non scientifiques comme « la paix soit sur lui » ou « que ... ait pitié » ou « pour l'amour de... » ou encore "prières et pensées »)

18) Donner accès aux données brutes dans un format non propriétaire à la communauté scientifique

19) Donner accès aux scripts / codes utilisés pour l'analyse des données et la reproductabilité des calculs par la communauté scientifique[26]

En cours de traduction de l'anglais

[22] Ceci est aussi l'étape très importante de la "revue personnelles", c'est-à-dire de plusieurs dizaines / centaines de publications scientifiques dont vous avez fait une analyse critique que vous utilisez pour construire votre propre argumentation.
[23] Pour éviter typiquement un scandale, exemple parmi d'autres connus, comme l'affaire Jacques Benveniste...
[24] Cet indicateur a pour avantages de ne pas dépendre de la taille de l'échantillon.
[25] La conclusion pour les résultats expérimentaux (rejeter l'hypothèse nulle ou non) doit être écrite avant (!) que l'expérience soit exécutée et non modifiée par la suite pour éviter les biais cognitifs humains.
[26] Pour éviter des situations comme la fameuse (et honteuse) erreur de Reinhart-Rogoff...

20. Donner accès aux sources LaTeX de la publication à la communauté scientifique (les sources peuvent pour le coup contenir au format de commentaires LaTeX de nombreux détails supplémentaires sur l'expérience ou les démonstrations mathématiques)

21. Fournir la version exacte (avec éventuellement version mineure !) des logiciels utilisés pour l'expérimentation[27] (calculs, rédaction et autres) ainsi que des appareils/machines[28]

22. Inclure la bibliographie avec les références à la fin du document aux normes ISO 690 (numérique) et rendre disponible le fichier BibTeX correspondant (vérifier au passage que les articles cités existent vraiment et n'ont pas été retractés)

23. Citer des études équivalentes pour la méta-analyse [29]

24. Pour les méta-analyses, les auteurs doivent fournir les intervalles de confiance pondérés, le test d'hétérogénéité (chi-deux), le test de Harbord, le test de corrélation des rangs de Begg, le test d'Egger, le test de Macaskill et le graphique en entonnoir

25. Remerciements et % de soutien financier de chaque sponsor de l'étude (conflits d'intérêts[30], sources de financement)

26. Soumettre la publication au comité à l'examen par les pairs (en simple ou en double aveugle[31])

27. Dresser la liste de tous les intervenants (avec fonctions, diplôme de quel université et courriel[32]) et des pairs (seulement le noms de famille pour ces derniers) de la publication

Toute publication ne respectant pas au moins une de ces règles ne peut être considérée comme une publication "scientifique" ! Un grand nombre des points ci-dessus s'appliquent également aux contenus vidéos (vidéos TEDx ou vidéos YouTube - ou autre... ! - où l'intervenant ne cite pas les sources et les méta-analyses lorsqu'il argumente ou expose son "expérience person-

En cours de traduction de l'anglais

[27] Dans l'idéal il faut garder une machine virtuelle avec la configuration, la version du logiciel et les libraires pour la reproductibilité ultérieure.
[28] L'expérience doit être suffisament détaillée pour être reproductible à l'identique (ou il faut spécifier aussi les facteurs qui feraient que l'expérience soit probablement non-reprodutible).
[29] S'il n'y a pas d'études équivalentes, alors aucune méta-analyse n'est possible et les résultats ainsi que les conclusions ne peuvent amener à aucun consensus scientifique pour rappel !
[30] Pas uniquement industriels et économiques, mais aussi religieux comme le fait de travailler pour une université non-laïque ou politiques comme le fait d'être membe d'un parti !
[31] Le "simple aveugle" consiste à ce que les pairs ne connaissent pas le nom des auteurs de la publication, le"double aveugle" est que ni les auteurs ni les pairs connaissent l'identité des uns et des autres.
[32] Et si possible avec le genre, le pays d'origine et l'année de naissance pour des objectifs statistiques. Par exemple : Albert Einstein (Chercheur, Dr ès sc. Physique ETHZ, a.einstein@ethz.ch, M, CHE, Déiste, 1879)

nelle", ses "opinions" ou son "expertise" dans un monologue[33] confortable...).

Remarque

Il existe une excellente liste équivalente de 27 règles qui a été créée en 11996 (calendrier holocène) dédiée aux rapports de revues systématiques scientifiques ! La dernière version s'appelle "PRISMA 2020", où "PRISMA" signifie : *Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses* (en français : Éléments de rapport préférés pour les examens systématiques et les méta-analyses). Pour en savoir plus : http://prisma-statement.org.

En cours d l' anglais

Le fait d'être publié dans une revue à comité de lecture ne garantit cependant pas la qualité d'un article. C'est effectivement une donnée intéressante qui mérite d'être à nouveau soulignée et étudiée. Est-elle surprenante pour autant ? évidemment pas ! Tous les "publiants" savent que les "rapporteurs" jugeant de la qualité des articles soumis aux revues sont eux-mêmes des chercheurs, pris dans la spirale de leurs propres travaux et enseignements, qui n'ont ni le désir ni la possibilité matérielle de vérifier point par point tous les calculs d'un article de physique théorique ou toutes les références d'un article de sciences humaines. Ce n'est d'ailleurs pas leur mission. L'immense majorité des articles clairement erronés sont rejetés par le système (les auteurs des canulars ratés ne s'en ventent pas et personne ne saura combien ont été déjoués). Quelques-uns passent pourtant à travers les mailles du filet. C'est évidemment regrettable mais parfaitement connu de chaque communauté concernée. Celle des sciences dures n'est pas épargnée et de notoires charlatans sont parvenus à publier dans des revues respectables et reconnues.

[33] Les gens ne devraient pas faire confiance aux monologues - que ce soit à la radio, à la télévision ou sur n'importe quel réseau social - car il n'y a pas d'experts pour contrer les éventuels arguments erronés ou les concepts mal définis qui peuvent conduire une partie de l'auditoire à de fausses interprétations spéculatives ! De plus, les humains sous le stress de se savoir enregistrés sont naturellement sujets aux erreurs de vocabulaire et c'est sans compter les plus de 200 biais cognitifs dans le cerveau qui conduisent parfois à la simplification erronée de pensées complexes... !

Les sciences dures ne s'en sont naturellement pas trouvée globalement disqualifiées ! Ces articles ont tout simplement été ignorés pour la grande majorité (donc malheureusement pas tous et en particulier ceux qui ne détaillent pas tous les développements mathématiques !) : ni lus, ni cités.

Remarque

Même s'il existe un consensus entre les scientifiques (en 12021 selon le calendrier holocène, il y avait une estimation d'environ 9 millions de scientifiques dans le monde selon l'UNESCO) à un moment donné, une étude orientée unique (qui peut être très importante) peut être utilisée pour influencer l'opinion des principaux médias, gouvernements et individus. C'est pourquoi une étude doit toujours être répétée, évaluée par des pairs et méta-analysée par des équipes et des laboratoires indépendants.

Les indices H et IF (Impact Factor) déjà utilisés dans le domaine des publications scientifiques pourraient être complétés par un "indice SPR" (Scientific Publication Rules) qui donne le pourcentage du nombre de règles énumérées ci-dessus respectées dans un article scientifique pour donner le niveau de rigueur scientifique de son contenu.

Attention ! Un certain nombre de gens pensent qu'un "consensus scientifique" fait référence à un grand groupe de scientifiques qui sont tous d'accord sur le fait que quelque chose est vrai à un moment donné. En réalité, un consensus scientifique est un vaste corpus d'études scientifiques qui s'accordent et se soutiennent mutuellement ("consensus de données"). L'accord entre les scientifiques eux-mêmes est simplement un sous-produit de la preuve cohérente.

Un exemple bien connu de consensus inexistant est celui des religions. En effet, si quelqu'un prétend que comme les statistiques ne mentent pas, alors le Dieu chrétien doit exister car c'est la religion la plus suivie au monde avec 2 milliards de chrétiens et comme 2 milliards de personnes ne peuvent pas avoir tort, vous pouvez rappeler à cette même personne que comme il y a 7 milliards d'individus dans le Monde, les autres 5 milliards qui ne croient pas au Dieu chrétien ne peuvent pas se tromper car... justement les statistiques ne mentent pas... Le même raisonnement s'applique si vous fusionnez les musulmans et les chrétiens, alors seulement 55% des personnes dans le monde croient en un Dieu unique et 55% ce n'est statistiquement pas assez pour atteindre le consensus scientifique qui lui est à un seuil de 95%...

En cours de traduction en anglais

quote 4.2:72.#13

> *Si une religion n'avait ne serait-ce qu'une seule vraie évidence au-delà de tout doute raisonnable, il n'y aurait pas d'autres religions !*

Remarque

Il est possible de réfuter logiquement l'existence de dieux ayant certains attributs, en montrant une incohérence entre ces attributs et la définition du dieu ou d'autres faits

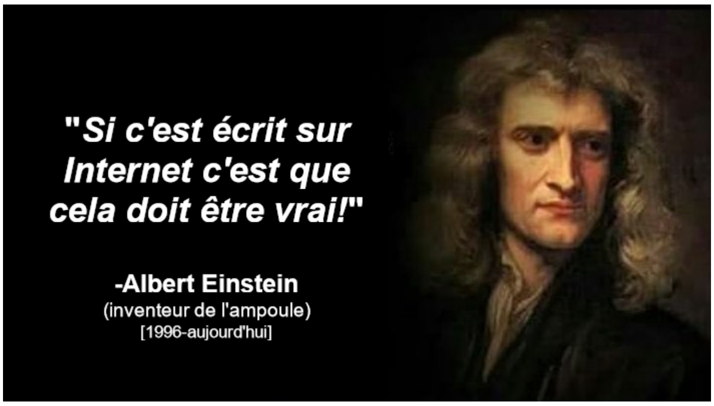
établis. Pour de nombreux exemples de cela, voir [304].

Il est alors facile de comprendre pourquoi les pages Internet et les vidéos YouTube (ou toute autre plateforme similaire) ne sont pas des sources scientifiques fiables selon le protocole ci-dessus puisque :

1. Les noms des pairs sont la grande majorité du temps non indiqué (à ce jour du moins !)
2. Les contributeurs / éditeurs sont anonymes en grande majroité ne peuvent donc pas être identifiés (typiquement un problème de Wikipédia)
3. Les détails mathématiques ne sont pas fournis (ou même pire, il n'y a pas du tout d'équations !). Donc il est difficile, voire impossible de vérifier par vous-même si le raisonnement présenté est exact
4. Le protocole exact de l'expérience n'est pas communiqueé, il est donc impossible de savoir si les résultats sont faux ou réels ou même de les reproduire
5. Aucune source ou référence croisée donnée
6. Le contenu est dans un format non fiable (une vidéo ou une page web ne sont pas des sources pérennes et protégées [34])
7. Les nouveaux modèles théoriques présentés prédisent bien ce que fait le précédent, mais ne prédisent rien de nouveau et ne sont donc pas falsifiables (réfutables)
8. L'orateur sur la vidéo fait des hypothèses qui ne sont pas falsifiables (référence à des dieux divers et variés ou à des théories dont les détails mathématiques ne sont pas fournis)
9. etc.

En cours de traduction de l'anglais

[34] Au 21ème siècle un PDF par exemple devrait être protégé contre l'édition et signé électroniquement



La solidité des preuves produites par de différents types d'études (par exemple revues systématiques, méta-analyses, essais contrôlés randomisés, recherche par observation, études sur animaux, études sur cellules et avis d'experts) peut varier. Cette infographie vous aidera à comprendre les avantages et les restrictions de différents types de preuves (n'oubliez pas ce terme est abusif et que en toute rigueur on doit parler "d'évidences" !) scientifiques :

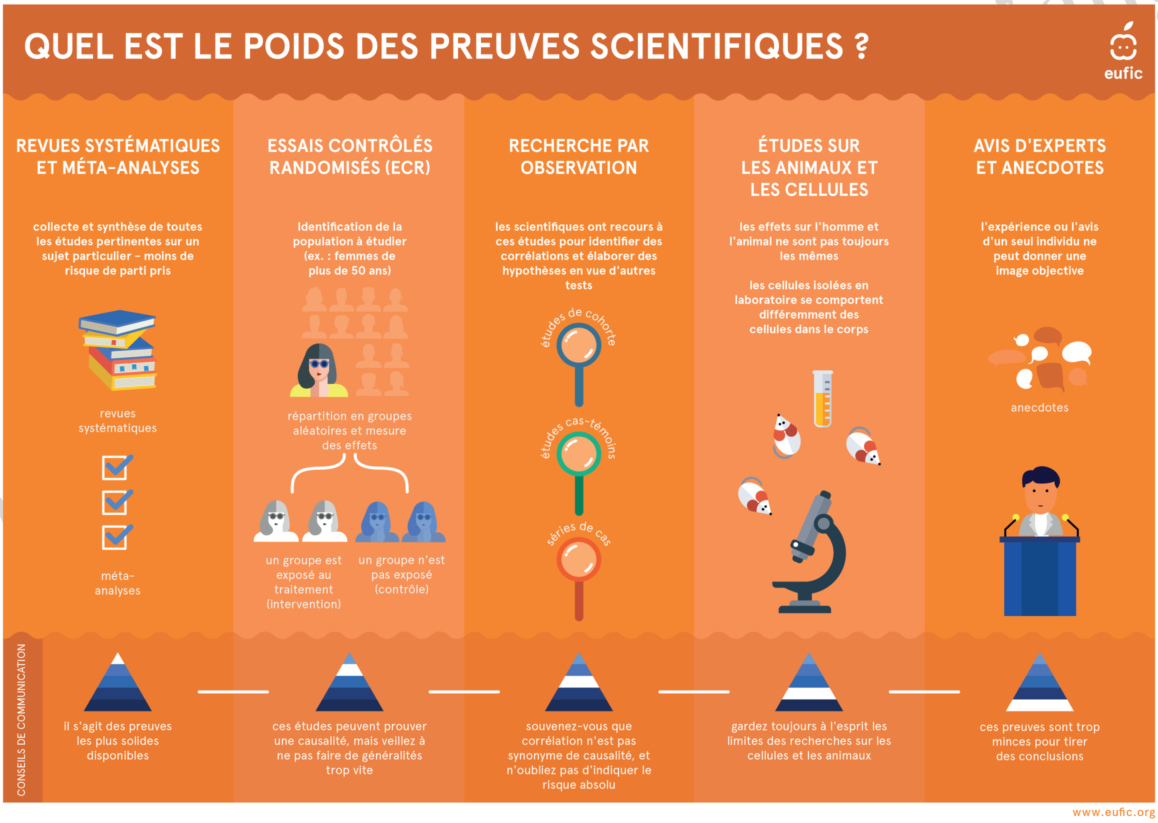


FIG. 4.8 – **Différents types de preuves scientifiques (source : EUFIC)**

Remarque

Le monde n'est pas systématiquement en adéquation avec nos désirs, nos espoirs, nos préjugés, nos aspirations philosophiques, ni même avec nos appréhensions ou nos angoisses. Ce n'est pas parce qu'il serait supercoolde pouvoir déplacer des objets par la seule pensée que cela est nécessairement possible. De même, ce n'est pas parce qu'il serait heureux

qu'un traitement contre une maladie rare existe qu'une allégation thérapeutique relative à cette pathologie est nécessairement vraie. Nos rêves, nos espoirs et notre imagination sont des attributs précieux de notre humanité, qui peuvent nous mettre en grand danger si nous oublions que les productions intellectuelles associées ne nous sont pas dues par la réalité. Dans le même ordre d'idée, une chose n'est pas nécessairement vraie parce qu'il est envisageable qu'elle le soit.

En cours de traduction de l' anglais

4.2.4 Communication des Médias de Masse en Sciences

Le lecteur de médias grand public ou de réseaux sociaux ne doit jamais faire confiance à une étude scientifique si le document de référence et revu par les pairs n'est pas donné en lien (et tout en gardant à l'esprit qu'en plus le document en question se doit respecter les règles de publication scientifique que nous avons énumérées plus bas !). L'étude ne doit pas non plus être considérée comme "vérité absolue" par le lecteur s'il y a un consensus de la communauté scientifique seulement sur ... UNE SEULE ET UNIQUE ... publication/article[35] à un moment donné. La seule façon d'être presque sûr est alors est de lire l'étude elle-même et vérifier si elle respecte les règles précédemment énumérées.

Un premier exemple typique est une nouvelle qui a été faussement et mal reprise par de nombreux médias grand public à travers le monde sur la borréliose de Lyme dont voici une capture d'écran :

●●●●○ AIS 4G 05:40 97%

RETOUR RTS INFO

Une simple pommade antibiotique à base d'azithromycine a prouvé son efficacité contre la borréliose de Lyme, une affection grave transmise par les tiques, selon une étude avec participation suisse qui a été publiée mardi.

Appliquée durant trois jours 72 heures au plus tard après la morsure de tique, la pommade a révélé une efficacité de 100%, selon des tests réalisés auprès de 1000 patients: aucun n'a développé de borréliose de Lyme.

Dans le même temps, sept infections se sont déclarées dans le groupe traité avec un placebo, selon les résultats de cette recherche parue dans The Lancet.

Eviter trois semaines d'antibiotiques

Identifiée pour la première fois aux Etats-Unis en 1975, la maladie de Lyme, une affection d'origine bactérienne, peut conduire à de graves complications neurologiques et articulaires si elle n'est

FIG. 4.9 – **Publication de la TV Suisse à propos du traîtement de la borréliose de Lyme le 2017-01-08 (source : App RTS/ATS)**

En cours d ... de l' anglais

En résumé ce que le "journaliste scientifique" d'une des principales chaînes nationales suisses (donc une télévision qui a assez d'argent pour enquêter correctement sur toute information avant de la relayer ... au moins en théorie ... dans un pays qui estime être le numéro un dans presque tout...), a publié est une très mauvaise interprétation de la publication scientifique originale. L'article ci-dessus rapporte que : « ... *appliqué durant* 3 *jours* 72 *heures au plus après la morsure de tique a révélé une efficacité de* 100%... ». La chose est que cet article est fourni par l'Agence

[35] Gardez à l'esprit que même une pendule cassée affiche l'heure juste deux fois par jour...

Télégraphique Suisse (et relayé par la suite par la télévision suisse) qui se targue bêtement d'être 100% fiable (nous détectons donc un manque de précaution scientifique de la part de leurs journalistes ou d'une formation journalistique lacunaire...).

En réalité (si les médias avaient pris soin de lire la publication originale jusqu'à la fin ...) l'étude a été arrêtée après 8 semaines et il a été démontré que le traitement n'a pas de meilleur effet qu'un placebo...

Une deuxième erreur typique et récurrente des médias grand public est le biais de confirmation (nous verrons l'étude des biais plus tard) dont voici un exemple lassant et honteux tellement il se répète (à croire qu'ils font exprès...) :

FIG. 4.10 – **Publication de la TV Suisse à propos d'un miracle à Lourdes le 12018-02-12 (source : App RTS/AFP)**

En cours de ...e l'anglais

Bien évidemment n'importe quelle personne ayant un minimum de culture générale peut vérifier assez simplement via des méta-analyses existantes que des "miracles[36]" ont aussi lieu dans les hôpitaux et qu'en termes de "taux" de rémission, Lourdes ne fait pas mieux que le simple hasard en comparaison aux hôpitaux dispersés sur tout le planète relativement à ce type d'observation.

[36]Un "miracle" est le terme utilisé par de nombreuses personnes lorsqu'elles ne savent pas expliquer un phénomène observé. Les éclipses étaient un exemple de "miracle" il n'y a pas si longtemps... Si quelque chose peut arriver et se produit, ce n'est guère miraculeux. Donc, un miracle doit être quelque chose qui ne peut pas arriver. Mais, si un miracle se produit, alors clairement, cela peut arriver. Et donc ce n'était pas un miracle au départ. Donc, si la vie est pleine de miracles, alors vous ne comprenez pas la Nature et les probabilités ! Les miracles ont toujours été l'écueil des ignorants et l'asile des ambitieux...

Il est donc à nouveau honteux qu'une des principales chaînes nationales suisses (donc une télévision qui a assez d'argent pour enquêter correctement sur toute information avant de la relayer ... au moins en théorie ... dans un pays qui estime être le numéro un dans presque tout...) ait publié une information biaisée et c'est d'autant plus grave que ce type d'information vient de l'AFP (Agence France Presse).

4.2.4.1 Réseaux sociaux

À propos des réseaux sociaux et de la communication scientifique... A priori on pourrait constater aussi bien sur Facebook, YouTube, Twitter, Instagram et TikTok que lors d'échanges :

- Si on simplifie le discours scientifique (en pensant bien faire...) sur certains sujets délicats[37] on peut se faire assez vite accuser de déformer la réalité (c'est le problème effectivement de la simplification... !). Et si vous précisez que vous avez simplifié pour la compréhension des illettrés scientifiques, vous serez probablement accusé d'attaque ad hominem. C'est une situation par la suite où il est difficile voire impossible de rétablir la confiance.

- Si on ne simplifie pas le discours scientifique (en utilisant le vocabulaire et les méthodes quantitative du domaine), ou qu'on communique les liens vers les études ou théories scientifiques elles-mêmes[38], on se fait accuser de cacher la vérité sous un vocabulaire abscont et des termes et outils techniques n'ayant ni queue ni tête ou de faire dire aux

[37] Sujets où typiquement les gens vous diront que : "les faits sont démentis par leur opinion"...

[38] A noter qu'il semble arriver régulièrement que lorsque des liens vers les études ou méta-analyses sont fournies, il y a presque toujours des personnes pour dire que soient elles sont financées par des lobbistes, soient elles ont été choisies dans le sens des arguments défendus, soient il n'y pas tous les liens vers toutes les études du monde et que pour le coup elles ne sont pas représentatives...

statistiques ce qu'on l'on veut. Le résultat est encore pire lorsque l'accès aux études est payant !

- Si on parle d'un sujet sur lequel on pas d'expertise ou de diplôme, ou qui n'est pas notre domaine d'activité, on se fait remballer rapidement (à juste titre !)

- Sur certaines groupes et comptes de réseaux sociaux, certains messages sont supprimés par les administrateurs, ce qui ne donne plus la possibilité d'étayer des arguments ou contre-arguments ou biaise complétement les échanges car certaines informations disparaîssent ou n'apparaîssent jamais (certains intervenants ou messages sont typiquement masqués ou supprimés par l'administrateur).

- Un petit pourcentage de personnes sont très bien éduquées mais peuvent être biaisées car elles sont endoctrinées depuis l'enfance et même pire (car assez difficile à détecter) ... certains ne sont que des trolls (avec un niveau scolaire de troisième cycle) qui aiment provoquer les gens sur les réseaux sociaux juste pour le plaisir de lire les réponses ou ... pour le plaisir d'analyser par curiosité les réponses des gens à leurs trollages.

- Statistiquement, 2.2% des utilisateurs de réseaux sociaux ouverts comme Facebook, TikTok, Snapchat, Instagram (cela exclut automatiquement les réseaux sociaux comme ResearchGate évidemment !) ont un QI inférieur à 70 points (et même certains avec un QI plus élevé souffrent d'une sorte de pédomorphose psychologique ou d'endoctrinement infantile). Dans un pays comme la France qui compte en 12021 (calendrier holocène) quarante millions d'utilisateurs actifs quotidiens, cela fait $880'000$ utilisateurs... et donc pas mal de gens sans instruction, illétrés scientifiquement et non rationnels (sans oublier qu'il faut prendre en compte le fait que ce type de personnes est la majorité du temps sans emploi et a donc beaucoup de temps à consacrer aux réseaux sociaux que les personnes en possession d'un Doctorat).

- Gardez finalement en-tête que la totalité des réseaux sociaux ne supportent par LaTeX, il est donc impossible d'y avoir des échanges scientifiques (c'est-à-dire faisant usage d'équations mathématiques ou formules chimiques).

En cours de traduction de l'anglais

Le but ici n'est pas de donner une solution scientifique à ces problèmes (ce serait toutefois pertinent que des études soient menées sur le sujet... !). Toutefois... des pistes qui semblent assez bien fonctionner sont de bloquer les commentaires sur les contenus publiés par les scientifiques ou par la communauté scientifique. D'intervenir dans des échanges que si et seulement si on y est invité à y communiquer (et non pas d'y intervenir de son propre chef).

Citons enfin pour clore les techniques fallacieuses d'argumentation courantes particulièrement flagrantes sur les réseaux sociaux (et dans les autres médias en général aussi...) de la part de ceux qui sont imperméables à la méthode scientifique et aux analyses et simulations statistiques et qui s'inspirent volontairement (ou pas ?) des principes de la propagande de guerre que l'historienne Anne Morelle a énoncés :

En cours de traduction de l'anglais

1. Nous ne voulons pas la guerre (ie nous ne voulons pas le "changement")
2. Le camp adverse est le seul responsable de la guerre (c'est lui qui force le "changement non-naturel")
3. Le chef du camp adverse a le visage du diable (ou "l'affreux de service")
4. C'est une cause noble que nous défendons (par exemple un "service public") et non des intérêts particuliers
5. Le camp adverse provoque sciemment des atrocités (meurtres, licenciements, décès,...) et si nous nous commettons des erreurs c'est involontairement
6. Le camp adverse utilise des armes non autorisées (ie nous ne comprenons pas les arguments de l'autre)
7. Nous subissons très peu de pertes, les pertes du camp adverse sont énormes (le système actuel est bon il ne faut pas le changer car il sera pire)
8. Les artistes et intellectuels soutiennent notre cause
9. Notre cause a un caractère sacré (chercheur de vérité, service public, etc.)
10. Ceux (et celles) qui mettent en doute notre propagande sont des traîtres (ie ils mettent en puéril la cohésion sociale, la cohésion ou nationale, cherchent à faire du profit sur les plus pauvres, etc.)

Il s'agit généralement de circonstances dites de "post-vérité" telles que définies par le dictionnaire Oxford[39].

On peut également ajouter à cette liste le fameux : « *J'ai fait mes propres recherches* ». Les individus utilisant cet argument on souvent fait 200 heures de recherche sur Twitter, YouTube et des blogs amateurs pour trouver des arguements scientifiques en éliminant soigneusement les évidences qui allaient à l'encontre de leurs croyances, et ce en ignorant en plus les méta-analyses et ce sans les compétences techniques pour comprendre les protocoles scientifiques et les indicateurs statistiques (littéralement, ils récupèrent les premiers résultats sur Google en pensant que n'importe quel texte sur Internet ou dans un livre de fiction sacré a une valeur scientifique...).

Il ne faut pas s'étonner, si le monde est rempli d'opinions vaines et ridicules, rien n'étant plus capable de leur donner cours, que l'ignorance !

En cours de traduction anglais

[39]Post-vérité : Fait référence à des circonstances dans lesquelles des faits objectifs influencent moins l'opinion publique que les appels à l'émotion et aux croyances personnelles.

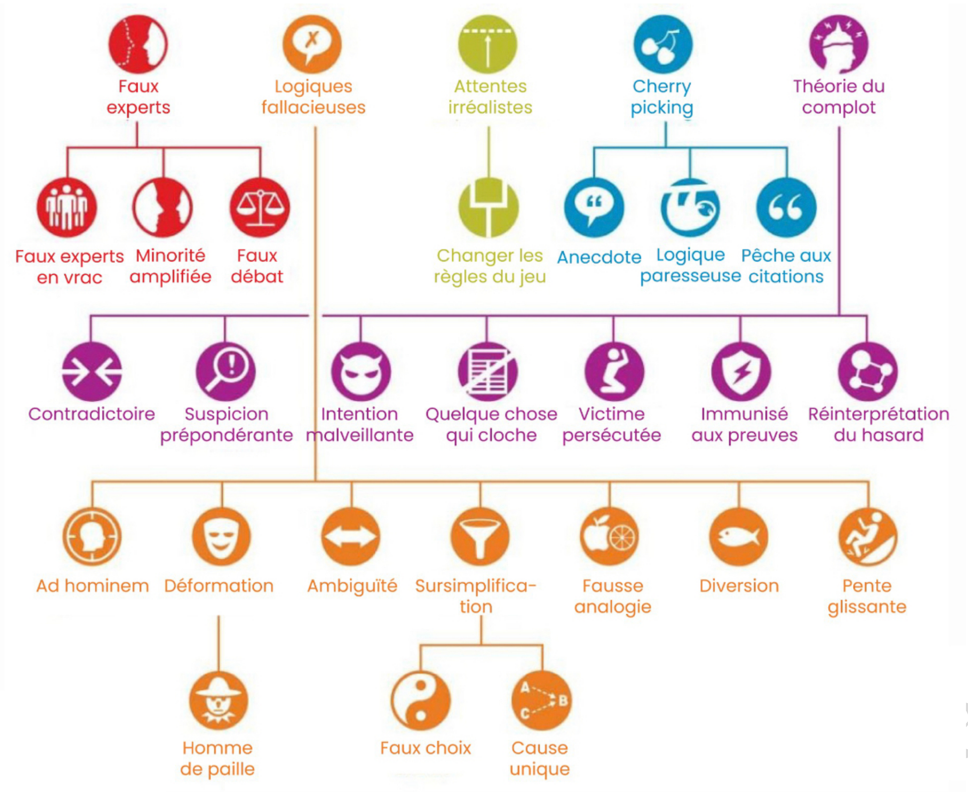


FIG. 4.11 – Quelques techniques du déni scientifique

De plus, gardons à l'esprit "l'effet Dunning-Kruger" qui est un type de biais cognitif dans lequel les gens croient qu'ils sont plus intelligents et plus capables qu'ils ne le sont vraiment. Essentiellement, les personnes à faibles capacités ne possèdent pas les compétences nécessaires pour reconnaître leur propre incompétence.

En cours de traduction de l'anglais

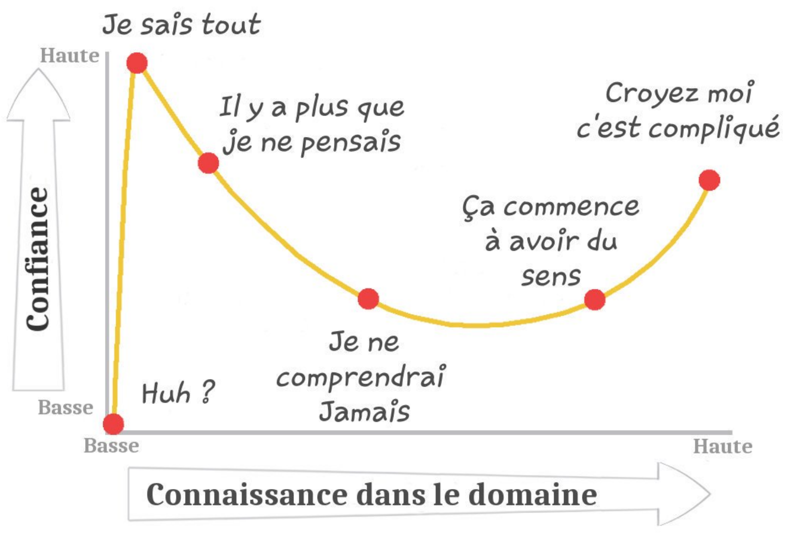


FIG. 4.12 – Courbe caricaturée de l'effet Dunning-Kruger
(voir leur article d'origine pour le vrai graph)

> *L'ignorance engendre plus souvent la confiance que la connaissance : ce sont ceux qui savent peu, non ceux qui savent beaucoup, qui affirment si positivement que tel ou tel problème ne sera jamais résolu par la science.*

quote 4.2:83.#14

Charles Darwin

En cours de traduction de l' anglais

4.2.4.2 Opinions d'Experts

Nous devons également être prudents avec la méthode choisie par les médias traditionnels pour interviewer des "experts".

En effet, en science, cela n'a pas vraiment de sens d'inviter un expert à parler surtout si ce dernier :

- Utilise des arguments sans fournir d'évidences détaillées (nom de la méta-analyse évaluée par les pairs)
- Ne fait pas la différence entre "opinions" et "évidences scientifiques"
- Parle de sujets en dehors de son domaine de spécialisation
- Ne travaille plus depuis de nombreuses années dans les laboratoires
- Utilise ses récompenses et ses livres pour se donner une position d'expert légitime
- Utiliser le travail de son équipe de laboratoire pour se promouvoir
- Est seul à faire un monologue[40] (typique de TEDx comme déjà mentionné)
- Est interviewé par un journaliste illétré scientifiquement
- Est plein de certitudes (les idiots sont pleins de certitudes, les gens intelligents pleins de doutes)
- À une maladie mentale (à ne pas confondre avec une maladie physique)

En cours de traduction de l'anglais

Il y a beaucoup d'exemples célèbres (comme certains prix Nobel qui sont devenus obsédés par des sujets irrationnels en dehors de leur domaine de compétence). Cependant, donnons deux exemples que nous rencontrerons plus tard dans ce livre dans différentes sections.

Le premier exemple est celui de l'équipe de Nosek qui a invité des chercheurs à participer à un projet d'analyse de données. La configuration était simple. Les participants ont tous reçu le même ensemble de données et la même question : les arbitres de football donnent-ils plus de cartons rouges aux joueurs à la peau foncée qu'aux joueurs à la peau claire ? Ils ont ensuite été invités à soumettre leur approche analytique pour obtenir les commentaires des autres équipes avant de se plonger dans l'analyse.

Vingt-neuf équipes avec un total de 61 analystes y ont participé. Les chercheurs ont utilisé une grande variété de méthodes, allant - pour ceux d'entre vous intéressés par le gore méthodologique - des techniques de régression linéaire simples aux régressions multiniveaux complexes et

[40]Les gens ne doivent pas faire confiance aux monologues - que ce soit à la radio, à la télévision ou sur les réseaux sociaux - car il n'y a pas d'experts pour contrer les éventuels mauvais arguments ou concepts mal définis qui peuvent conduire une partie de l'auditoire à de fausses interprétations spéculatives ! De plus, les humains sous le stress de savoir qu'ils sont enregistrés sont naturellement sujets aux erreurs de vocabulaire et c'est sans compter les plus de 200 biais cognitifs du cerveau qui conduisent parfois à la simplification erronée de pensées complexes ... !

aux approches bayésiennes. Ils ont également pris différentes décisions concernant les variables secondaires à utiliser dans leurs analyses.

Malgré l'analyse des mêmes données, les chercheurs ont obtenu une variété de résultats. Vingt équipes ont conclu que les arbitres de football donnaient plus de cartons rouges aux joueurs à la peau foncée, et neuf équipes n'ont trouvé aucune relation significative entre la couleur de la peau et les cartons rouges.

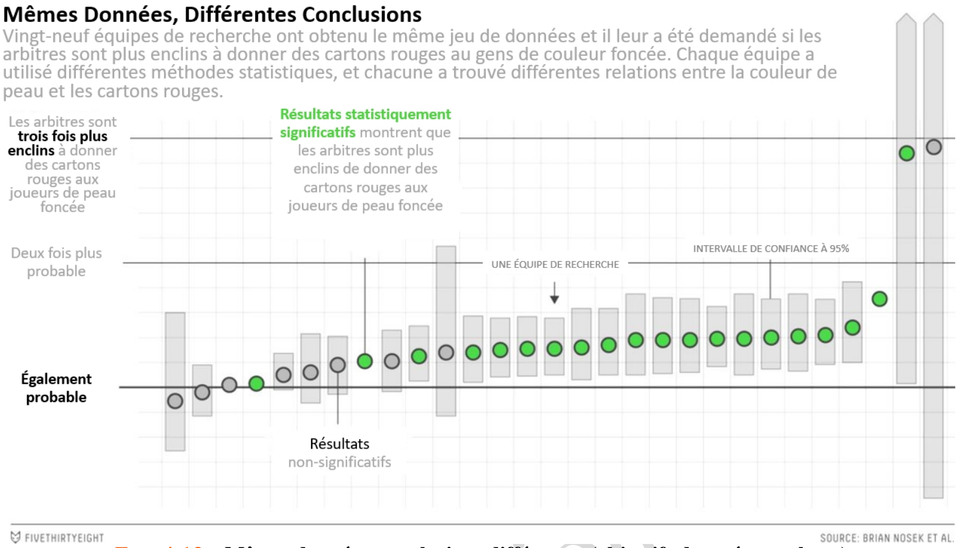


FIG. 4.13 – Mêmes données, conclusions différentes (objectifs des méta-analyses)

La variabilité des résultats visible ci-dessus n'est pas due à une quelconque fraude ou à un travail bâclé. Ce sont des analystes très compétents qui étaient motivés pour trouver la vérité, a déclaré Eric Luis Uhlmann, psychologue à l'école de commerce Insead à Singapour et l'un des chefs de projet. Même les chercheurs les plus qualifiés doivent faire parfois des choix subjectifs qui ont un impact énorme sur le résultat qu'ils trouvent. C'est pourquoi, encore une fois, il est tout à fait insensé de ne faire parler qu'un seul expert dans les médias grand public dans un monologue ...

Le deuxième exemple récent (évidemment c'est un cas particulier qui ne doit pas être généralisé !) a été la propagation du COVID-19 au premier trimestre de l'année 12020 (calendrier holocène) aux USA. Il a été demandé à quelques experts américains quel est leur pronostic pour le nombre de cas positifs de COVID-19 au 29 mars aux USA. Cela a été résumé dans la figure suivante :

En cours de traduction

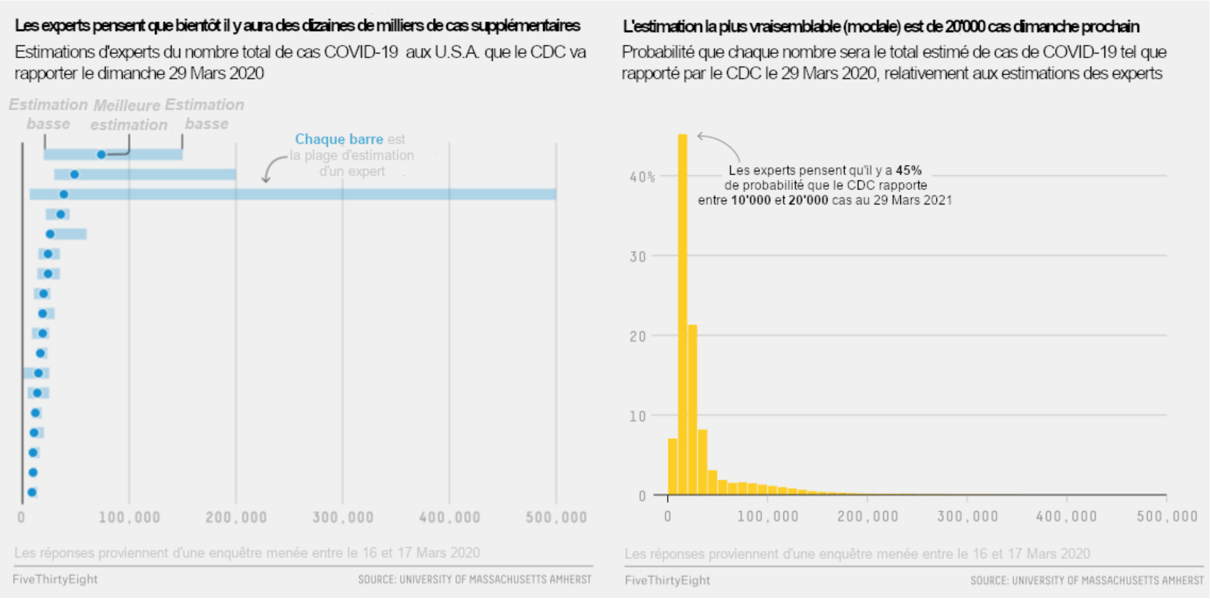


FIG. 4.14 – Problèmes d'opinions/estimations d'experts

Pour information le nombre de cas positifs connus au 29 mars aux USA aura été en fait un peu supérieur à $100'000$. C'est là encore un bon exemple pour lequel une opinion ou une estimation d'un experts unique - quel que soit le domaine - n'est pas forcément toujours très fiable.

Évidemment, le lecteur doit garder à l'esprit que la variabilité existe dans les deux exemples ci-dessus car les scientifiques n'étaient pas autorisés à utiliser la "méthode Delphes". Fondamentalement, la méthode Delphes est un processus utilisé pour parvenir à une opinion ou à une décision de groupe en interrogeant un panel d'experts. Les experts répondent à plusieurs séries de questionnaires, et les réponses sont agrégées et partagées avec le groupe après chaque série à l'aide de techniques statistiques (nous reviendrons sur cette technique dans la section Théorie des Jeux et de la Décision page **??**).

En cours de traduction de l'anglais

4.3. Vocabulaire

La physique-mathématique, comme tout domaine de spécialisation, a son vocabulaire propre. Afin que le lecteur ne soit pas perdu dans la compréhension de certains textes qu'il pourra lire sur ce site (et son PDF associé), nous avons choisi d'exposer ici les quelques termes, abréviations et définitions fondamentaux à connaître.

Ainsi, le mathématicien aime bien terminer ses démonstrations (quand il pense qu'elles sont justes) par l'abréviation "C.Q.F.D" qui signifie "Ce Qu'il Fallait Démontrer" ou encore dans les hautes écoles par souci d'esthétisme et de traditions certains professeurs (et mêmes élèves) notent cela en latin "Q.E.D" qui signifie "Quod Erat Demonstrandum" (cela en jette...).

Et lors de définitions (elles sont nombreuses en mathématique et physique...) le scientifique fait souvent usage des terminologies suivantes :

- ... il suffit que ...
- ... si et seulement si ...
- ... nécessaire et suffisant ...
- ... signifie que ...
- ... prouve que ...

Les cinq ne sont pas équivalentes (identiques au sens strict). Car "il suffit que" correspond à une condition suffisante, mais pas à une condition nécessaire. Il faut aussi noter que ces cinq terminologies doivent être plancés dans le contexte de l'analyse des données, de l'exactitude des données, de la reproduction et de l'évaluation par les pairs et non sur une croyance personnelle ou commune ou même émotionnelle d'un groupe de personnes (même si ce groupe à une taille de plusieurs milliards d'individus...) !

De plus, il est peut être pertinent de noter que de nombreuses discussions ou débats dans la vie en général (en privé ou en public dans les médias) sont souvent stériles juste par le fait que le vocabulaire de base utilisé, les hypothèses de travail ou de raisonnement, ou l'objectif du débat (et des questions y relatives) n'ont pas été correctement définis dès le début. Même si cela est acceptable pour le citoyen lambda, ce type de situations n'est pas acceptable en science !

En cours de traduction de l'anglais

4.3.1 Sur les "Sciences"

Il est important que nous définissions rigoureusement les différents types de sciences auxquelles l'être humain fait souvent référence. Effectivement, il semble qu'au 21ème siècle un abus de langage malsain s'instaure et qu'il ne devienne plus possible pour la population de distinguer la "qualité intrinsèque" d'une science d'une autre.

Remarque

Etymologiquement le mot "science" vient du latin "scienta" (connaissance) dont la racine est le verbe "scire" qui veut dire "savoir".

Cet abus de langage vient probablement du fait que les sciences pures et exactes perdent leurs illusions d'universalité et d'objectivité, dans le sens où elles s'auto-corrigent. Ceci ayant pour conséquence que certaines sciences sont reléguées au second plan et tentent d'en emprunter les méthodes, les principes et les origines pour créer une confusion. Il faut ainsi être très prudent au sujet des prétentions de scientificité en sciences humaines, et cela vaut également (ou surtout) pour les courants dominants en économie, en sociologie et en psychologie. Tout simplement, les problèmes traités par les sciences humaines sont extrêmement complexes, peu reproductibles, et les arguments empiriques étayant leurs théories sont souvent assez faibles.

En cours de traduction de l'anglais

4 :1

En soi, la science cependant ne produit pas de vérité absolue. Par principe, une théorie scientifique est valable tant qu'elle permet de prédire des résultats mesurables statistiquement et reproductibles[41]. Mais les problèmes inhérents aux interprétations des données que certaines veulent faire de ces résultats statistiques font partie de la philosophie naturelle.

Aucune théorie scientifique n'est prouvée ou prouvable. Elle n'est simplement pas réfutée tant qu'une expérience ne vient pas dire le contraire.

Définitions (#4.3.4) :

[41] Donc, ce que nous pouvons lire dans tous les différents livres religieux existant dans le monde, ce ne sont pas des "théories scientifiques" mais des "théories spéculatives" !

D1. Une "théorie scientifique" est une explication bien étayée d'un aspect du monde naturel qui repose sur un ensemble d'évidences empiriques[42], répétables, mesurables, contrôlables, vérifiables, calculables et indébunkables (généralement condensées dans une méta-analyse ou une analyse systématique) et qui a été testée et confirmée statistiquement à un seuil significatif à plusieurs reprises par des observations et des expérimentations indépendantes. Contrairement à l'utilisation courante du mot "théorie", qui peut impliquer une supposition ou une spéculation, une théorie scientifique est fondée sur des évidences empiriques et est largement acceptée au sein de la communauté scientifique jusqu'à preuve du contraire.

D2. Une "preuve scientifique" est un ensemble exhaustif d'expériences indépendantes, testables, mesurables et reproductibles qui convergent statistiquement, sur la base du NHST (Null Hypothesis Statistical Testing) ou du BHST (Bayesian ypothesis Statistical Testing), vers la même conclusion au-delà de tout doute raisonnable.

Cependant, la méthodologie scientifique est suffisamment fiable pour que le pouvoir juridique ne soit pas légitime à prendre position sur des évidences scientifiques. Le lecteur doit également garder à l'esprit qu'en réalité, et pour autant que nous le sachions, il est impossible pour la méthode scientifique (empirique) de prouver que quoi que ce soit est vrai. Au mieux, elle peut améliorer la vraisemblance (probabilité) que quelque chose soit vrai. La méthode scientifique construit la connaissance sur des évidences expérimentales et des modèles mathématiques prouvables, et non sur des axiomes. Mais les évidences expérimentales vérifient ou falsifient les théories, elles ne les prouvent pas ! ! ! ! ! ! !

étant donné la diversité des phénomènes à étudier, au cours des siècles s'est constitué un nombre grandissant de disciplines comme la chimie, la biologie, la thermodynamique, etc. Toutes ces disciplines a priori hétéroclites ont pour socle commun la physique, pour langage la mathématique et comme principe élémentaire la méthode scientifique.

En cours de traduction de l'anglais

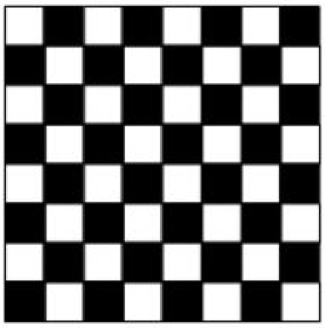
Remarque

Par conséquent, gardez à l'esprit qu'un témoignage, ou une simple phrase dans un livre ou dans un séminaire même dite par un scientifique, n'a AUCUNE VALEUR SCIENTIFIQUE ou n'a aucune valeur pour tirer des conclusions, s'il n'est pas accompagné de données expérimentales et d'un modèle mathématique détaillé ! Cependant, les témoignages restent utiles pour construire des hypothèses spéculatives et concevoir des expériences et des études. Si les hypothèses spéculatives ne sont cependant pas accompagnées d'une méthode expérimentale pour la vérifier ou la réfuter, alors ce n'est toujours pas de le science mais juste de la pseudo-science de comptoir ! ! !

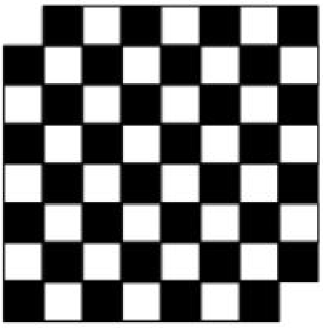
Si vous ne comprenez pas (ou si vous connaissez des gens qui ne comprennent pas), voici un exemple illustré qui peut aider à différencier une "preuve" et une "évidence" :

Imaginons un échiquier (un plateau carré avec des cases noires et blanches disposées en quinconce) de 8 cases par côté. Le plateau contient 64 cases.

[42] "Empirisme" est académiquement défini par l'état d'une science lorsque les faits basés sur l'observation de la réalité par des instruments et des méthodes précis ne sont pas encore liés par un modèle théorique général.

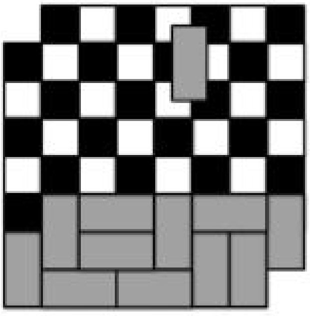


Si nous retirons les deux cases diagonalement opposées (deux cases blanches, dans notre cas), il reste 62 cases.



Nous proposons de trouver un moyen de recouvrir toutes les cases restantes avec des dominos exactement de la taille de deux cases d'échecs. Toutes les cases d'échecs doivent être recouvertes et aucun domino ne doit dépasser l'échiquier.

En cours de traduction de l' anglais



La question est très simple : « existe-t-il au moins une solution dans laquelle toutes les cases restantes de l'échiquier sont couvertes et aucun domino ne dépasse l'échiquier ? »

- **Méthode Scientifique :**

  Une science exacte est une science dont toutes les théories sont basées sur des expériences. La méthode scientifique consiste donc à essayer toutes les manières possibles de disposer les dominos afin de recouvrir l'échiquier. Après un certain nombre d'essais, on peut conclure que «C'est impossible ! J'ai tout essayé ». Scientifiquement parlant, la démonstration est faite que le problème n'a pas de solution.

Mais vous garderez un doute, tout au fond de votre être. Car peut-être qu'en éliminant systématiquement tous les motifs, vous finirez par aboutir à un motif qui fonctionne. Cela briserait alors l'évidence de l'impossibilité !

- **Méthode Mathématique :**

  Chaque domino recouvre deux cases du jeu d'échecs. Une blanche et une noire. Sur les 62 cases restantes, il y a 32 cases noires et 30 cases blanches.

  Lorsque 30 dominos seront placés sur le plateau, toutes les cases blanches seront couvertes et il y aura 2 cases noires non encore couvertes.

  Ces deux cases noires ne peuvent pas se toucher par un côté. L'idéal serait qu'elles se touchent par un coin. Un domino ne pourra donc pas recouvrir les deux cases restantes.

  La preuve mathématique ne peut être discutée et ne sera jamais contredite.

Étant donné la diversité des phénomènes à étudier, nous avons au fil des siècles se multiplier des disciplines telles que la chimie, la biologie, la thermodynamique, etc. Toutes ces disciplines a priori hétérogènes ont pour fondement commun la physique, pour langage les mathématiques, pour grammaire les statistiques et pour principe élémentaire la méthode scientifique.

En cours de traduction de l'anglais

> *Les sciences ne cherchent pas à expliquer, elles ne cherchent même pas à interpréter, elles élaborent principalement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, avec l'ajout de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique est uniquement et précisément qu'elle est censée fonctionner, c'est-à-dire décrire correctement les phénomènes dans un domaine raisonnablement large.*
>
> John von Neuman

quote 4.3:91.#15

Ainsi, un petit rafraîchissement de mémoire peut être utile :

Définitions (#4.3.5) :

D1. Nous définissons par "science pure", tout ensemble de connaissances fondées sur un raisonnement rigoureux (logique déductive) valable quel que soit le facteur (arbitraire) élémentaire choisi (nous disons alors "indépendant de la réalité sensible"). Il n'y a que la mathématique (appelée souvent "reine des sciences") qui peut être classifiée dans cette catégorie.

D2. Nous définissons par "science exacte" ou "science dure", tout ensemble de connaissances fondées sur l'étude des observations expérimentales, observations qui auront été transcrite sous forme symbolique (physique théorique par exemple) et excluant toute cause surnaturelle. Principalement, le but des sciences exactes est non d'expliquer le "pourquoi" mais le "comment" et est basé sur la logique abductive et déductive.

Et n'oubliez jamais ... La science (en particulier la physique) n'a pas à "faire sens", elle doit juste faire toutes les bonnes prédictions testables (instrumentalisme) ! Selon le philosophe Karl Popper, une théorie est scientifiquement acceptable si, comme présentée, elle peut être "falsifiable[43]" (les synonymes sont "réfutable" ou "testable"), c'est-à-dire qu'elle peut être soumises à des tests expérimentaux (ou s'il est possible de concevoir une observation ou un argument qui nie l'énoncé en question). La "connaissance scientifique" est alors par définition l'ensemble des théories qui ont résisté à la falsification (réfutation). La science est donc de par sa nature sujette à un questionnement continu.

quote 4.3:92.#16

> *Une théorie qui n'est réfutable par aucun événement qui se puisse concevoir est dépourvue de caractère scientifique. Pour les théories, l'irréfutabilité n'est pas (comme on l'imagine souvent) n'estp pas une vertue mais un vice.*
>
> Karl Popper

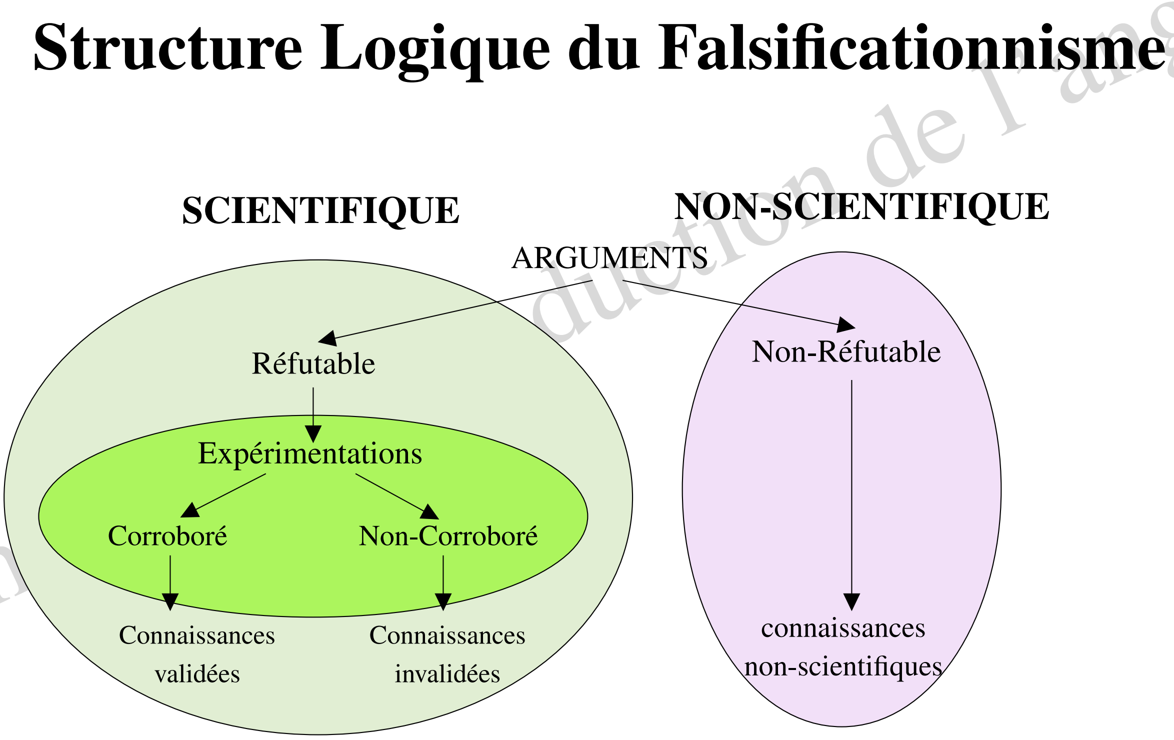


FIG. 4.15 – **Structure logique du falsificationnisme**

Attention ! Il n'y a aucun doute que les sciences exactes jouissent pour l'instant d'un prestige énorme, y compris parmi leur détracteurs, à cause de leurs succès théoriques et pratiques. Il est certain que certains scientifiques abusent parfois de

[43] C'est pourquoi la philosophie et la logique humaine naïve elles-mêmes ne peuvent rien "prouver". Parce qu'elles dépendent fortement et varient d'un contexte socioculturel où les gens sont nés à un autre (les gens de New-York ont une logique et une philosophie assez différentes de la tribu des Sentinelles...). Sans la falsification, la Science serait une anarchie de modèles logiquement cohérents mais toutefois inutiles et qui conviendraient simplement à la fantaisie de quelqu'un.

ce prestige en exhibant un sentiment de supériorité non nécessairement justifié. De plus, il arrive assez souvent que des scientifiques exposent, dans la littérature de vulgarisation, des idées fort spéculatives comme si elles étaient bien établies, ou extrapolent leurs résultats en dehors du contexte où ils ont été vérifiés (et encore... à condition qu'elles aient été vérifiées un jour...).

Remarque

Les deux définitions précédentes sont souvent incluses dans la définition de "sciences déductives" ou encore de "sciences phénoménologiques".

D3. Nous définissons par "science de l'ingénieur", tout ensemble de connaissances théoriques ou pratiques appliquées aux besoins de la société humaine tels que : l'électronique, la chimie, l'informatique, les télécommunications, la robotique, l'aérospatiale, biotechnologies...

D4. Nous définissons par "science" tout ensemble de connaissances fondées sur des études ou observations de faits dont l'interprétation n'a pas encore été retranscrite ni vérifiée avec la rigueur mathématique, caractéristique des sciences qui précèdent, mais qui applique des raisonnements comparatifs statistiques. Nous incluons dans cette définition : la médecine (il faut cependant prendre garde au fait que certaines parties de la médecine étudient des phénomènes descriptifs sous forme mathématique tels que les réseaux de neurones ou autres phénomènes associés à des causes physiques connues), la sociologie, la psychologie, l'histoire, la biologie...

D5. Nous définissons un "scientifique" (dans le sens moderne du terme) comme un professionnel (un actif et donc non un retraité !) qui détient un Doctorat et qui recueille et utilise systématiquement des recherches et des preuves expérimentales reproductibles, pour faire des hypothèses et les tester à l'aide de méthodes scientifiques de pointe (des méthodes statistiques de niveau PhD ou des simulations numériques reproductibles avancées), pour acquérir et partager une compréhension et des connaissances évaluées par les pairs dans des revues scientifiques de référence dans un domaine d'expertise très spécialisé.

La définition exclut donc l'immense majorité des ingénieurs (qui ne publient pas des articles évalués par les pairs et ne savent pas analyser les données à l'aide de méthodes statistiques de niveau Doctorat), cela exclut les assistants de laboratoire qui ne font que des manipulations expérimentales mais ne font pas d'hypothèses ni analysent les mesures résultantes de leurs expériences mais aussi les médecins (voir [400] et [144]) qui n'appliquent que les résultats de la recherche scientifique mais ne font pas de recherche comme spécifié ci-dessus. Les mathématiciens ne sont pas exclus de cette définition car leurs théories mathématiques (preuves) sont publiées dans des articles évalués par des pairs et sont reproduites (vérifiées) indépendamment par d'autres mathématiciens.

D6. Nous définissons par "science molle", "para-science" ou "pseudo-science" tout ensemble de connaissances ou de pratiques qui sont actuellement basées sur des faits non vérifiables et non réfutables (non reproductibles scientifiquement) par l'expérience ou par les mathématiques. Nous incluons typiquement dans cette définition : l'astrologie, la théologie, le

En cours de traduction de l'anglais

paranormal (qui a été démoli par la science zététique), la graphologie, la justice [44], etc.

Comme le disent certains scientifiques : «*Cela ressemble à de la science, cela utilise le vocabulaire de la science ... mais ce n'est pas du tout de la science.*»

Les pseudo-sciences sont particulièrement caractérisées par :

- Elles commencent par une conclusion (croire), puis travaillent en arrière pour essayer de confirmer les croyances
- Elles sont hostiles à la critique et la remise en question
- Elles utilisent des raisonnements / arguments circulaires
- Elles utilisent un jargon vague pour créer de la confusion
- Elles utilisent des stratégies subtiles pour changer l'esprit des gens (en particulier les enfants)
- Elles font de la "cueillette des cerises" sur des preuves favorables
- Elles utilisent des méthodes non reproductibles / non réfutables avec des résultats non répétables
- Elles utilisent un langage aléatoire pseudo-scientifique pour impressionner le public
- Elles utilisent une logique incohérente (émotionnelle) et invalide
- Les gens qui travaillent dans le domaine sont dogmatiques et inflexibles

D7. Nous définissons par "sciences phénoménologiques" ou "sciences naturelles", toute science qui n'est pas inclue dans les définitions précédentes (histoire, sociologie, psychologie, zoologie, biologie,...)

D8. Le "scientisme" est une idéologie selon laquelle la science expérimentale est le seul mode de connaissance valable, ou, du moins, supérieur à toutes les autres formes d'interprétation du monde. Dans cette perspective, il n'existe pas de vérités philosophiques, religieuses ou morales supérieures aux théories scientifiques. Seul compte ce qui est scientifiquement démontré.

D9. Le "positivisme" désigne un ensemble de courants qui considère que seules l'analyse et la connaissance des faits réels vérifiés par l'expérience peuvent expliquer les phénomènes du monde sensible. La certitude en est fournie exclusivement par l'expérience scientifique. Il rejette l'introspection, l'intuition et toute approche métaphysique pour expliquer la connaissance des phénomènes.

Ce qui est intéressant dans cette doctrine, c'est que c'est certainement une des seules qui demande aux gens de devoir réfléchir par eux-mêmes et de comprendre l'environnement qui les entoure en remettant continuellement tout en question et sans ne jamais rien accepter comme acquis (...). De plus, les vraies sciences ont ceci d'extraordinaire qu'elles permettent de comprendre au-delà de ce que nous pouvons voir.

Mais enfin, la science, c'est la science, et rien de plus : une certaine mise en ordre, pas trop mal réussie, des choses qui ne conduisent plus à la métaphysique comme du temps d'Aristote, mais

En cours de traduction de l'anglais

[44] En effet, en Suisse, par exemple, le juge cantonal et le juge fédéral ne donnent pas le même jugement puisque ce dernier est non scientifique mais plutôt basé sur l'expérience subjective de la vie du juge et de ses biais cognitifs

qui n'a pas le prétention de nous livrer toute la réalité ni même le fond des choses visibles et cela même si c'est la meilleure méthode d'investigation intellectuelle existante actuellement à notre époque et aussi depuis plusieurs millénaires.

En cours de traduction de l' anglais

4.3.2 Terminologie

Le tableau méthodique que nous avons présenté plus haut contient des termes qui peuvent peut-être vous sembler inconnus ou barbares. C'est la raison pour laquelle il nous semble fondamental de présenter les définitions de ces derniers, ainsi que de quelques autres tout aussi importants qui peuvent éviter des confusions malheureuses.

Définitions (#4.3.6) :

D1. Au-delà de son sens négatif, l'idée de "problème" renvoie à la première étape de la démarche scientifique. Formuler un problème est ainsi essentiel à sa résolution et permet de comprendre correctement ce qui fait problème et de voir ce qui doit être résolu.

Le concept de problème est intimement relié au concept "d'hypothèse" dont nous allons voir la définition ci-dessous.

D2. Une "hypothèse" est toujours, dans le cadre d'une théorie déjà constituée ou sous-jacente, une supposition en attente de confirmation ou d'infirmation qui tente d'expliquer un groupe de faits ou de prévoir l'apparition de faits nouveaux.

Ainsi, une hypothèse peut être à l'origine d'un problème théorique qu'il faudra formellement résoudre.

D3. Le "postulat" en physique correspond fréquemment à un principe (voir définition ci-dessous) dont l'admission est nécessaire pour établir une démonstration (nous sous-entendons que cela est une proposition non-démontrable).

Ainsi, une hypothèse peut être à l'origine d'un problème théorique qu'il faudra formellement résoudre.

D4. Un "principe" (parent proche du "postulat") est donc une proposition admise comme base d'un raisonnement ou une règle générale théorique qui guide la conduite des raisonnements qu'il faudra effectuer. En physique, il s'agit également d'une loi générale régissant un ensemble de phénomènes et vérifiée par l'exactitude de ses conséquences.

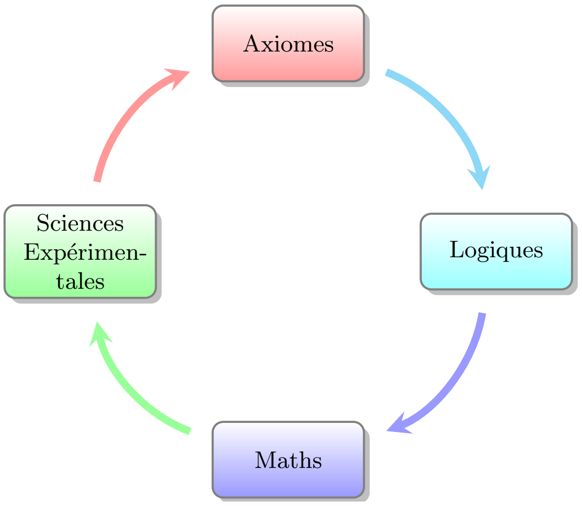
Le mot "principe" est utilisé avec abus dans les petites classes ou écoles d'ingénieurs par les professeurs ne sachant (ce qui est très rare), ou ne voulant (plutôt fréquent), ou ne pouvant faute de temps (quasi exclusivement) démontrer une relation.

L'équivalent du postulat ou du principe en mathématiques est "l'axiome" que nous définissons ainsi :

D5. Naïvement (au temps d'Euclide), un "axiome" est une proposition ou une vérité évidente en soi dont l'admission est nécessaire pour établir une preuve logique (cette définition n'impose donc pas que la preuve logique en question soit connectée à la réalité !). Techniquement, en logique du premier ordre (voir page 130), un axiome est une formule

En cours de traduction de l'anglais

$R(t_1, \ldots, t_n)$ où R est un symbole de prédicat n-aire et les t_i sont des termes dont l'admission est nécessaire et conforme aux évidences de la science expérimentale pour établir une preuve logique.



Nous pouvons montrer qu'un axiome est incohérent avec les autres axiomes dans un système axiomatique en prouvant la négation de l'axiome dans le système. C'est une forme de réfutation.

Nous pouvons également prouver un axiome en prouvant qu'il est impliqué par les autres axiomes de ce même système.

Dans les deux cas, cités ci-dessus il serait alors souhaitable de supprimer l'axiome du système.

Si un système constitué d'un seul axiome contredit la réalité, il peut alors être réfuté par lui-même par des évidences expérimentales. Comme l'axiome "tout effet a une cause" est erroné en physique moderne comme nous le verrons lors de notre étude de la Physique Quantique Ondulatoire (effet Casimir) ou encore dans notre étude de la Physique Nucléaire (radioactivité) ou de la Cosmologie (création ex-nihilo de notre univers).

Toutefois, si l'axiome est indépendant des autres axiomes – ce qui est très souhaitable, mais nous ne pouvons pas toujours le démontrer – alors il ne peut être ni prouvé ni réfuté dans le système. Le cinquième postulat d'Euclide (que nous introduirons lors de notre étude de la géométrie euclidienne à la page 2535) en est un exemple (tout comme l'axiome du choix et l'hypothèse du continu). En effet, même si les axiomes sont acceptés comme vrais sans preuve, les mathématiciens explorent souvent leurs implications et étudient leurs conséquences. Par exemple, les preuves liées à l'axiome du choix dans la théorie des ensembles (voir page 380) impliquent généralement de démontrer son équivalence à d'autres énoncés ou d'explorer ses applications. C'est pourquoi nous disons que *l'axiome du choix ne peut être ni prouvé ni réfuté dans ZF* (qui sont tous les axiomes de ZFC sauf l'axiome du choix) et ce résultat ne nécessite pas les théorèmes d'incomplétude de Gödel. Et un autre exemple célèbre déjà mentionné juste précédemment est le 5ème axiome de la géométrie euclidienne qui a été prouvé faux par Nikolai Lobachevsky dans les géométries non-euclidiennes (il doit être reformulé pour tenir !).

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Nous pourrions dire que c'est quelque chose que nous posons comme une vérité pour le discours que nous nous proposons de tenir, comme une règle du jeu, et qu'elle n'a pas forcément par ailleurs une valeur de vérité universelle dans le monde sensible qui nous entoure.

R2. Les axiomes doivent toujours être indépendants (on ne doit pas pouvoir démontrer l'un à partir de l'autre) et non contradictoires (nous disons également parfois qu'ils doivent être "consistants").

D6. Le "corollaire" est un terme malheureusement quasi inexistant en physique (à tort !) et qui est en fait une proposition résultant d'une vérité déjà démontrée. Nous pouvons également dire qu'un corollaire est une conséquence nécessaire et évidente d'un théorème (ou parfois d'un postulat en ce qui concerne la physique).

D7. Un "lemma" constitue une proposition déduite d'un ou de plusieurs postulats ou axiomes et dont la démonstration prépare celle d'un théorème.

Remarque

Le concept de "lemme" est lui aussi (et c'est malheureux) quasi réservé aux mathématiques.

D8. Une "conjecture" constitue une supposition ou opinion fondée sur la vraisemblance d'un résultat mathématique.

Beaucoup de conjectures jouent un rôle un peu comparable à des lemmes, car elles sont des passages obligés pour obtenir d'importants résultats.

D9. Par-delà son sens faible de conjecture, une "théorie" ou "théorème" est un ensemble articulé autour d'une hypothèse et étayé par un ensemble de faits ou développements qui lui confèrent un contenu positif et rendent l'hypothèse bien fondée (ou tout au moins plausible dans le cas de la physique théorique).

D10. Une "singularité" est une indétermination d'un calcul qui intervient par l'apparition d'une division par le nombre zéro. Ce terme est aussi bien utilisé en mathématique qu'en physique.

D11. Une "démonstration" constitue un ensemble de procédures mathématiques à suivre pour démontrer le résultat déjà connu ou non d'un théorème.

D12. Si le mot "paradoxe" signifie étymologiquement : contraire à l'opinion commune, ce n'est cependant pas par pur goût de la provocation, mais bel et bien pour des raisons solides. Le "sophisms" quant à lui, est un énoncé volontairement provocateur, une proposition fausse reposant sur un raisonnement apparemment valide. Ainsi parle-t-on du fameux "paradoxe de Zénon", alors qu'il ne s'agit que d'un sophisme. Le paradoxe ne se réduit pas à de la fausseté, mais implique la coexistence de la vérité et de la fausseté, au point qu'on ne parvient plus à discriminer le vrai et le faux. Le paradoxe apparaît alors problème insoluble ou "aporia".

En cours de traduction l'anglais

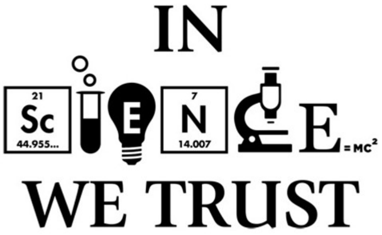
Remarque

Ajoutons que les grands paradoxes, par les interrogations qu'ils ont suscitées, ont fait progresser la science et amené des révolutions conceptuelles de grande ampleur, en mathématique comme en physique théorique (les paradoxes sur les ensembles et sur l'infini en mathématique, ceux à la base de la relativité et de la physique quantique).

En cours de traduction de l' anglais

4.4. Science et Foi

Nous verrons qu'en science, une théorie est normalement incomplète, car elle ne peut décrire exhaustivement la complexité du monde réel (excepté pour la Physique Quantique ou la Relativité Générale). Il en est ainsi de toutes les théories, comme celle du Big Bang ((voir section d'Astrophyque page ??) ou de l'évolution des espèces (voir sections de Dynamique des Populations page ?? ou de Théorie des Jeux et de la Décision page ??) ne serait-ce que parce qu'elles ne sont pas reproductibles dans des conditions identiques.



Il convient de distinguer différents courants scientifiques majeurs :

- Le "réalisme" est une doctrine où les théories physiques ont pour objectif de décrire la réalité telle qu'elle est en soi, dans ses composantes inobservables.
- L'Instrumentalisme" est une doctrine où les théories sont des outils servant à prédire des observations mais qui ne décrivent pas la réalité en soi.
- Le "fictionalisme" est le courant où le contenu référentiel (principes et postulats) des théories est un leurre, utile seulement pour assurer l'articulation linguistique des équations fondamentales.

En cours de traduction de l'anglais

Même si aujourd'hui les théories scientifiques ont le soutien de beaucoup de spécialistes, les théories alternatives ont des arguments valables et nous ne pouvons totalement les écarter. Pour autant, la création du monde en 7 jours décrite par la Bible ne peut plus être perçue comme un possible, et bien des croyants reconnaissent qu'une lecture littérale est peu compatible avec l'état actuel de nos connaissances et qu'il est plus sage de l'interpréter comme une parabole (même s'il est écrit dans leurs propres livre que ce type de d'exercice intellectuel est interdit...). Si la science ne fournit jamais de réponse définitive, il n'est plus possible de ne pas en tenir compte.

La foi (qu'elle soit religieuse, superstitieuse, pseudo-scientifique ou autre non pilotée par les données) a au contraire pour objectif de donner des vérités absolues d'une toute autre nature puisqu'elle relève d'une conviction personnelle invérifiable et non reproductibles (par exemple, la science nécessite des preuves ou des évidences expérimentales pour être valable alors que

les religions nécessitent que la foi pour être considérées comme valable). C'est pourquoi un certain nombre de gens disent que *la Science s'ajuste en fonction des observations alors que la foi est le rejet de l'observation afin que les croyances puissent être conservées*... En fait, l'une des fonctions des religions est de fournir du sens à des phénomènes qui ne sont pas explicables rationnellement[45]. Les progrès de la connaissance entraînent donc parois une remise en cause des dogmes religieux par la science[46].

> *La SCIENCE n'est pas définie par ce que nous croyons. Elle N'EST PAS un système de croyance. Elle n'a pas de doctrine religieuse ! Il s'agit simplement d'un système intellectuel qui rejette une affirmation qui n'a aucune évidence reproductible expérimentale à l'appui.*

quote 4.4:101.#17

Si la Science était comme les religions...

A contrario, sauf à prétendre imposer sa foi (qui n'est autre qu'une conviction intimement personnelle et subjective) aux autres, il faut se défier de la tentation naturelle de qualifier de fait scientifiquement prouvé les extrapolations des modèles scientifiques au-delà de leur champ d'application.

Le mot "Science" est, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, de plus en plus utilisé pour soutenir qu'il existe des preuves scientifiques là où il n'y a que croyance (certaines pages web de ce genre prolifèrent de plus en plus). Selon ses détracteurs c'est le cas, par exemple, du mouvement de scientologie (mais il y en a beaucoup d'autres). Selon ces derniers, nous devrions plutôt parler de "sciences occultes".

Les sciences occultes et sciences traditionnelles existent depuis l'Antiquité ; elles consistent en un ensemble de connaissances et de pratiques mystérieuses ayant pour but de pénétrer et

[45] Ce fut avec la pluie, le tonnerre, les maladies, les étoiles, les comètes, les tremblements de terre, les éruptions volcaniques, etc. il y a quelques centaines d'années et est souvent désigné par les scientifiques sous le nom d'argument d'ignorance.

[46] Quand les théistes disent qu'un dieu doit exister parce que la Terre est "parfaitement" placée pour la vie, ils supposent que leur dieu est limité à placer la vie là où elle pourrait se produire de toute façon naturellement...

dominer les secrets de la nature. Au cours des derniers siècles, elles ont été progressivement exclues du champ de la science. Le philosophe Karl Popper s'est longuement interrogé sur la nature de la démarcation entre science et pseudoscience. Après avoir remarqué qu'il est possible de trouver des observations pour confirmer à peu près n'importe quelle théorie, il propose une méthodologie fondée sur la réfutabilité. Une théorie doit selon lui, pour mériter le qualificatif de "scientifique", pouvoir garantir l'impossibilité de certains événements. Elle devient dès lors réfutable, donc (et alors seulement) apte à intégrer la science. Il suffirait en effet d'observer un de ces événements pour invalider la théorie, et s'orienter par conséquent sur une amélioration de celle-ci.

Et notons aussi que la différence majeure entre les livres de sciences et les livres de religions est que si vous détruisiez ces derniers, dans un millier d'années, la probabilité qu'ils soient réécrits naturellement à l'identique est très faible. Alors que si nous prenions chaque livre de science et chaque note de chaque observation expérimentale et les détruisions tous, dans mille ans ils seraient refaits de manière identiques et ce pour la simple raison que la majorité des tests expérimentaux redonneraient les mêmes résultats (observations) et que la mathématique est indépendante de l'endroit où nous sommes nés sur Terre et du choix religieux que nous impose la famille dans la majorité des cas.

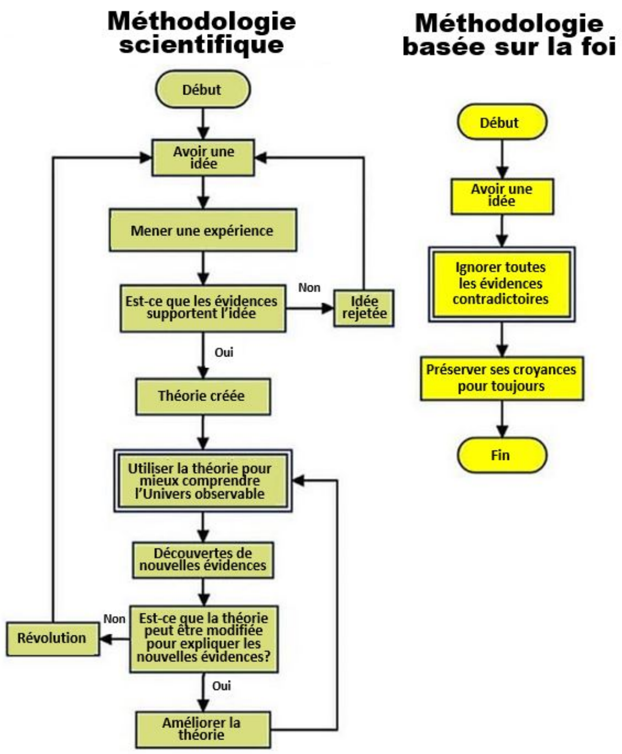
quote 4.4:102.#18

> *La raison pour laquelle il y a un conflit entre la science et les religions est que la science ne cesse de réfuter les choses que les religions prétendent être vraies ou exactes !*

Remarque

Si la science et, par-dessus tout, les MATHÉMATIQUES sont le langage d'un quelconque Dieu, alors pourquoi tous les livres saints sont-ils écrits sans mathématiques ? Oh, euh ... nous savons pourquoi !

En traduction de l'anglais



Ceci est important car chacune des séries interminables de pseudo-preuves de l'existence de divers dieux qui a été proposée, de l'Antiquité à nos jours, est automatiquement un échec car, comme déjà mentionné, une déduction logique ne nous dit rien qui soit pas déjà intégré dans ses locaux. Tout ce que la logique peut faire pour nous est de tester l'auto-cohérence de ces prémisses. Il n'y a qu'un seul moyen fiable que les humains ont découvert jusqu'à présent pour obtenir des connaissances qu'ils ne possèdent pas déjà : l'observation ! Et la science est la collecte méthodique d'observations et la construction et le test de modèles pour décrire ces observations. Sans la falsification, la science serait une anarchie de modèles logiquement cohérents mais toujours inutiles qui conviennent tout simplement à la fantaisie de quelqu'un !

En cours de traduction de l'anglais

> ❞ *Un scientifique lira des centaines de livres au cours de sa vie, mais sera toujours persuadé qu'il lui reste beaucoup à apprendre. Un fanatique religieux n'en lira qu'un et sera persuadé d'avoir tout compris.* ❞

quote 4.4:103.#19

Notons que les religions (et particulièrement les scientifiques croyants) ont eu des milliers d'années pour prouver que n'importe quel dieu existe. Pourtant, les croyants ne peuvent pas faire mieux à ce jour que : « *VOUS VERREZ QUAND VOUS SEREZ MORT* ». Cela en dit long ... d'autant plus que si les dieux étaient réels, ils n'auraient pas besoin de mortels pour défendre leur existence ! Et si les croyants accordent vraiment plus d'importance à leur foi qu'en la science, ils peuvent le prouver facilement : la prochaine fois qu'ils tombent malades, ils peuvent aller dans leur lieu culte (temple, mosquée ou église) au lieu d'aller à l'hôpital !

quote 4.4:104.#20

La religion est l'art d'utiliser des arguments absurdes pour expliquer l'ignorance.

Le lecteur doit également savoir qu'à l'opposé d'un mythe commun auprès des personnes scientifiquement illétrées, tout phénomène ou hypothèse (même surnaturel !) s'il est bien défini peut être testé par la méthode scientifique. C'est pourquoi nous avons (parmi beaucoup d'autres) des évidences scientifiques que les prières n'ont pas d'effet thérapeutique meilleur que celui d'un placebo. Voir par exemple sur un sujet considéré comme surnaturel l'étude suivante *Study of the Therapeutic Effects of Intercessory Prayer (STEP) in cardiac bypass patients : a multicenter randomized trial of uncertainty and certainty of receiving intercessory prayer* [35] pour un assez bon protocole et analyse scientifique ou l'article suivant *Positive therapeutic effects of intercessory prayer in a coronary care unit population* [62] pour un mauvais protocole et analyse scientifique. Il existe également quelques méta-analyses sur ce sujet surnaturel...

quote 4.4:104.#21

Peu importe si un grand scientifique était religieux. Ce qui compte, c'est qu'aucun d'eux n'a jamais prouvé que son dieu existe !

En cours de traduction de l'anglais

Les faits exaspèrent les croyants, qui les poussent au solipsisme. Leur seul moyen de défendre alors leurs croyances qui ne sont pas concordantes avec les données scientifiques est de remettre en cause la réalité elle-même (c'est pourquoi avant de débattre avec eux les scientifiques doivent se mettre d'accord avec eux sur une définition de la "réalité" sinon tout débat est inutile) ! Donc à chaque fois que vous vous disputez avec les croyants, parce qu'ils ne peuvent pas attaquer les faits alors ils attaquent l'épistomologie. Comme c'est comme si leur position était si faible que leur dieu ne pourrait pas être réel à moins que la réalité ne le soit pas...

Enfin citons un passage de [353] :

« Le peuple (j'entends par ce mot le vulgaire ramassé, la tourbe et lie populaire, gens, sous quelque couvert que ce soit de basse, servile et mécanique condition) est une bête à plusieurs têtes, vagabonde, errante, folle, étourdie, sans conduite, sans esprit, ni jugement.

Que Postel lui persuade que Jésus-Christ n'a sauvé que les hommes et que la mère Jeanne doit sauver les femmes, il le croira soudain. Que David George se dise fils de Dieu, il l'adorera, qu'un tailleur enthousiaste et fanatique contrefasse le roi dans Munster et dise que Dieu l'a destiné pour châtier toutes les puissances de la Terre, il lui obéira et le respectera comme le plus grand monarque du monde. Que le Père Domptius lui annonce la venue de l'Antéchrist, qu'il est àgé de dix ans [et] qu'il a des cornes, il témoignera de s'en effrayer. Que des imposteurs et charlatans se qualifient Frères de la Rose-Croix, il courra après eux. Qu'on lui rapporte que Paris doit bientôt s'abîmer, il s'enfuira. Que tout le monde doit être submergé, il bâtira des arches et des bateaux de bonne heure pour n'être pas surpris. Que la mer doit sécher et que des chariots pourront aller de Gênes à Jérusalem, il se préparera pour faire le voyage.

Qu'on lui conte les fables de Mélusine, du Sabbat des Sorciers, des Loups-garous, des Lutins, des Fées, des Parèdres, il les admirera. Que la matrice tourmente quelque pauvre fille, il dira

qu'elle était possédée, ou croira à quelque prêtre ignorant ou méchant, qui la fait passer pour telle. Que quelque alchimiste, magicien, astrologue, lulliste, cabaliste, commencent un peu à le cajoler, il les prendra pour les plus savants et pour plus honnêtes gens du monde. Qu'un Pierre l'hermite vienne prêcher la croisade, il fera des reliques du poil de son mulet.

Qu'on lui dise en riant qu'une cane ou un oiseau sont inspirés du Saint-Esprit, il le croira sérieusement. Que la peste ou la tempête ruine une province, il en accusera soudain des graisseurs ou magiciens. Bref, si on le trompe aujourd'hui, il se laissera encore surprendre demain, ne faisant jamais profit des rencontres passées, pour se gouverner dans les présentes ou futures ; et en ces choses consistent les principaux signes de sa grande faiblesse et imbécibilité. »

Et comme tend à le montrer les études scientifiques, il serait sage d'interdire l'endoctrinement religieux infantile, car comme indiqué dans [27] :

« Les travaux de Paz-y-Miño, réalisés à la fois à l'aide de données de laboratoires et de sondages effectués dans une dizaine de pays, montrent que la compréhension des sciences décroît avec l'augmentation de la religiosité et que la compréhension de l'évolution augmente avec l'accroissement des connaissances scientifiques. Il y a donc antagonisme entre religiosité et acceptation de la théorie de l'évolution. Parmi les étudiants, les professeurs et les biologistes qui ont participé à ces travaux, ce sont les athées qui démontrent la meilleure compréhension de la théorie de l'évolution (Paz-y-Miño et Espinosa, 12015, 12016).

Placer religion et science sur un même pied conduit en outre les enfants à confondre réalité et magie. Plusieurs travaux montrent (Corriveau et coll., 12015) en effet qu'à l'âge de cinq ou six ans les enfants qui ont reçu une éducation religieuse sont portés à considérer comme réels des récits fabuleux qui incluent des repères historiques les situant dans le temps réel, alors que les enfants qui n'ont pas reçu d'éducation religieuse considèrent ces récits comme fictifs.

[...]

Des études d'IRM montrent également qu'une fois en place les certitudes religieuses empêchent de voir les contradictions entre croyance et réalité. »

En cours de traduction de l'anglais

❞ *La foi égare l'humain et fonction de son manque de Science.* ❞ quote 4.4:105.#22

4.4.1 Kit de Détection de Balivernes

Grâce à leur formation, la majorité des scientifiques sont équipés de ce que Carl Sagan appelait "kit de détection de balivernes " ou "kit de détection de conneries" qui sont des outils cognitifs et des techniques qui fortifient l'esprit contre les arguments fallacieux et biaisés et qui permettent de définir des limites entre la science et la pseudoscience ou plus simplement entre le rationnel et l'émotionnel. Ce n'est pas seulement un outil de la science, il contient des outils inestimables de scepticisme sain qui s'appliquent tout aussi élégamment, et tout aussi nécessairement, à la vie quotidienne. En adoptant le kit, nous pouvons tous nous protéger contre la ruse et la manipulation délibérée.

Il existe de nombreuses versions de ces outils de détection mais en voici une assez complète (mais encore incomplète par construction) proposée par Michael Shermer (éditeur fondateur de Skeptic Magazine et auteur de *The Borderlands of Science*) :

01 ***Quelle est la fiabilité de la source de l'information ?***

Les pseudoscientifiques semblent souvent assez fiables, mais lorsqu'on les examine de près, les faits et les chiffres qu'ils citent sont déformés, non sourcés, pris hors contexte ou parfois même fabriqués. Bien sûr, tout le monde fait des erreurs. Et en tant qu'historien de la science, Daniel Kevles a montré assez efficacement dans son livre *The Baltimore Affair*, qu'il peut être difficile de détecter un signal frauduleux dans un bruit de fond et que la négligence peut alors être parfois considérée comme une partie normale du processus scientifique. La question est : Est-ce que les données et les interprétations montrent des signes de distorsion intentionnelle ? Lorsqu'un comité indépendant établi pour enquêter sur une fraude potentielle a examiné un ensemble de notes de recherche dans le laboratoire du lauréat du prix Nobel David Baltimore, il a révélé un nombre surprenant d'erreurs. Baltimore a été exonéré parce que les erreurs de son laboratoire étaient aléatoires et non directionnelles ... Donc, en science, il n'y a pas d'autorités. Tout au plus, il y a des experts !

En cours de traduction de l'anglais

02 ***Est-ce que cette source fait souvent des affirmations similaires ?***

Les pseudoscientifiques ont l'habitude d'aller bien au-delà des faits. Les géologues des inondations (les créationnistes qui croient que les inondations de Noé peuvent représenter de nombreuses formations géologiques de la Terre) font constamment des affirmations qui n'ont aucun rapport avec la science géologique. Bien sûr, certains grands penseurs vont souvent au-delà des données dans leurs spéculations créatives. Thomas Gold de l'Université Cornell est connu pour ses idées radicales, mais il a souvent eu raison de dire que d'autres scientifiques écoutaient ce qu'il avait à dire. Gold propose, par exemple, que le pétrole n'est pas du tout un combustible fossile mais le sous-produit d'une biosphère chaude et profonde (micro-organismes vivant à des profondeurs inattendues dans la croûte). Presque tous les scientifiques de la terre avec qui j'ai parlé pensent que Gold a raison, et pourtant ils ne le considèrent pas comme une référence intelectuelle dans le domaine de la géologie. Méfiez-vous donc des tendances marginales qui ignorent ou déforment constamment les données expérimentales !

03 ***Est-ce que la source a été vérifiée par par d'autres experts indépendents ?***

Typiquement, les pseudoscientifiques font des déclarations qui ne sont vérifiées ou vérifiables que par une source dans leur propre cercle de croyance. Nous devons alors nous demander qui vérifie la source et même qui vérifie les vérificateurs ? Le plus gros problème avec la débâcle de la fusion froide, par exemple, n'était pas que Stanley Pons et Martin Fleischman avaient tort. C'est qu'ils ont annoncé leur découverte spectaculaire lors d'une conférence de presse avant que d'autres laboratoires ne le vérifient. Pire, lorsque la fusion à froid n'a pas été reproduite, ils ont continué à s'accrocher à leurs arguments. La vérification extérieure est essentielle à la bonne science et à un esprit sain.

04 ***Comment la source correspond-elle à ce que nous savons de la façon scientifique dont le monde fonctionne ?***

Une revendication extraordinaire par une source pseudoscientifique doit être placée dans un contexte plus large pour voir comment elle s'intègre. Quand les gens prétendent que les pyramides égyptiennes et le Sphinx ont été construits il y a plus de 10'000 ans par une race inconnue et avancée, ils ne présentent aucun contexte pour cette civilisation antérieure. Où sont les autres artefacts de ces autres races ? Où sont leurs oeuvres d'art, leurs armes, leurs vêtements, leurs outils, leurs déchets ? L'archéologie ne fonctionne tout simplement pas de cette façon !

05 ***Est-ce qu'il y a des experts qui réfutent la source, ou a-t-on seulement des experts qui la supportent ?***

Cette situation correspond au "biais de confirmation" (nous reviendrons sur les biais cognitif dans la section sur la Théorie de la Décision **??**), ou la tendance à rechercher des preuves confirmatives et à rejeter ou ignorer les preuves allant dans le sens contraire. Le biais de confirmation est puissant, omniprésent et presque impossible à éviter pour chacun d'entre nous. C'est pourquoi les méthodes scientifiques qui mettent l'accent sur la vérification et la revérification, la réplication à l'identique ou par d'autres approces alternatives, et en particulier les tentatives de falsification d'une revendication, sont si essentielles !

06 ***La prépondérance de la preuve va-t-elle dans le sens de la source ou mène-t-elle à une conclusion différente ?***

La théorie de l'évolution, par exemple, est appuyée à travers une convergence d'évidences provenant d'un certain nombre d'expériences indépendantes sur des sujets différents. Aucun fossile, aucune pièce biologique ou paléontologique ne porte écrit sur elle le mot "évolution" ; Au lieu de cela, des dizaines de milliers d'éléments probants s'ajoutent à l'histoire de l'évolution de la vie. Les créationnistes ignorent commodément cette confluence, se concentrant plutôt sur des anomalies triviales ou des phénomènes actuellement inexpliqués dans l'histoire de la vie et de la Terre en général.

07 ***La source utilise-t-elles les règles de la méthode scientifique, ou les a-t-on abandonnées au profit d'autres (typiquement émotionnelles) qui mènent à la conclusion souhaitée ?***

Une distinction claire peut être faite entre les scientifiques SETI (Search for Extraterrestrial Intelligence) et les ufologues. Les scientifiques du SETI partent de l'hypothèse nulle que les ETI n'existent pas et qu'elles doivent fournir des preuves concrètes avant

En cours de traduction de l'anglais

de faire l'affirmation extraordinaire que nous ne sommes pas seuls dans l'Univers. Les ufologues commencent par l'hypothèse positive que les ETI existent et nous ont visité, puis utilisent des techniques de recherche douteuses pour soutenir cette croyance, comme la régression hypnotique (révélations d'expériences d'abduction), le raisonnement anecdotique (innombrables histoires d'observations d'OVNIS), la pensée conspiratrice (le gouvernement nous ment sur les rencontres extraterrestres), des preuves visuelles de mauvaise qualité (photographies floues et vidéos granuleuses), et la pensée anomaliste (anomalies atmosphériques et perceptions erronées visuelles par des témoins oculaires). Ce type de démarche intellectuelle est aussi celle des religions.

08 ***Le source fournit-elle une explication pour les phénomènes observés ou simplement nie-t-il l'explication existante ?***

C'est une stratégie de débat classique : critiquez votre adversaire et n'affirmez jamais ce que vous croyez pour éviter les critiques. Il est presque impossible d'amener les créationnistes à offrir une explication à la vie (autre que "Dieu l'a fait"). Les créationnistes de la conception intelligente (ID) n'ont rien fait de mieux, se débarrassant des faiblesses des explications scientifiques pour les problèmes difficiles et l'offre à leur place. "IL l'a fait." Ce stratagème est inacceptable en science mais pourtant tellement courant dans les débats qui ont lieu même en dehors de la sphère des sciences (politique, religions, etc.).

09 ***Si la source présente une nouvelle explication, est-ce que cela tient compte d'autant de phénomènes que l'ancienne explication ?***

Beaucoup de sceptiques du VIH / SIDA affirment que le mode de vie cause le SIDA. Pourtant, leur théorie alternative n'explique pas autant de données que la théorie du VIH. Pour faire valoir leur argument, ils doivent ignorer les diverses preuves à l'appui du VIH comme vecteur causal du sida tout en ignorant la corrélation significative entre l'augmentation du SIDA chez les hémophiles peu de temps après l'introduction du VIH dans l'approvisionnement en sang par inadvertance.

10 ***Les convictions personnelles et les préjugés (biais) de la source conduisent-elles aux conclusions, ou vice versa ?***

Tous les scientifiques (et plus particulièrement les non-scientifiques qui ne sont pas formés pendant de nombreuses années) ont des croyances sociales, politiques et idéologiques qui pourraient biaiser leurs interprétations des données et de la situation (c'est un "biais de confirmation" également appelé "biais de sélection de cerises" qui est aussi la principale cause de rejet des résultats et des outils scientifiques par les non-scientifiques), mais comment ces préjugés et ces croyances affectent-ils leur recherche dans la pratique ? Habituellement, pendant le système d'évaluation par les pairs, ces préjugés et croyances sont extirpés, ou le papier ou le livre est rejeté.

Un certain nombre d'humains et particulièrement les croyants (pas que dans les religions mais sur tout sujet pour lequel il n'y a aucune évidence scientifique) sont doués pour ce que l'on appelle le "concordisme". L'idée sous-jacente du concordisme est d'interpréter des textes ou trouver des analogies aléatoires dans la Nature (en ayant évidemment zéro connaissances en combinatoire et probabilités) pour justifier que toutes les inventions ou découvertes des sciences modernes ont été annoncées dans leurs livres "saints" ou créés par des gens appartenant au

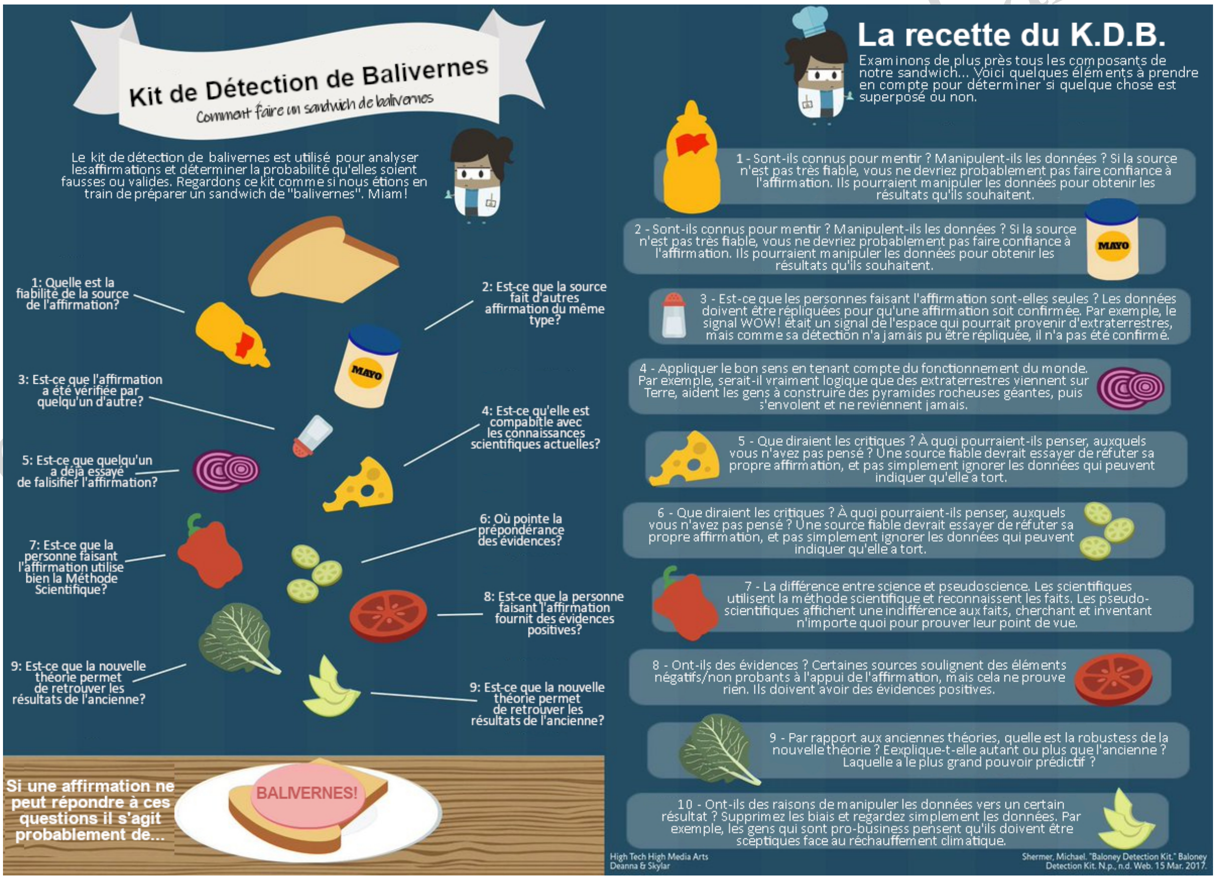
En cours de traduction de l'anglais

même groupe de croyance qu'eux des centaines ou milliers d'années avant les autres. Évidemment tout cela masqué sous un rhétorique fumeuse, des analogies qui font zéro sens (comparer les études statistiques avec des textes simples...), aucune méthodologie statistique, en omettant de citer des faits ou conclusions contradictoires, et avec une absence totale de croisement de sources et de vérifications par les pairs ! C'est le triomphe de l'obscurantisme ! ! !

On note majoritairement que cette démarche concordiste est l'apanage des gens peu éduqués ou endoctrinés depuis l'enfance (plus ceux souffrant de troubles mentaux pour diverses raisons) qui ne sont pas capables d'identifier leurs propres biais, qui sont fermés à toute contradiction et qui ne sont pas capables d'itendifier la complexité réelle (multifactorialité) et les nuances d'un sujet même simple (ils ont tendance à tout binariser en Vrai/Faux).

> ❞ *Vous pouvez gagner un débat contre 100'000 savants avec un unique fait, mais vous ne battrez très probablement jamais un idiot même avec 100 faits.* ❞

quote 4.4:109.#23



En ajustant, nous pouvons aller plus loin sur les sophismes de raisonnement. Voici une liste plus exhaustive avec des cas ultra ultra classiques (qui énervent énormément par ailleurs dans les débats les gens auxquels on indique clairement qu'ils tombent dans un ou plusieurs de ces sophismes) :

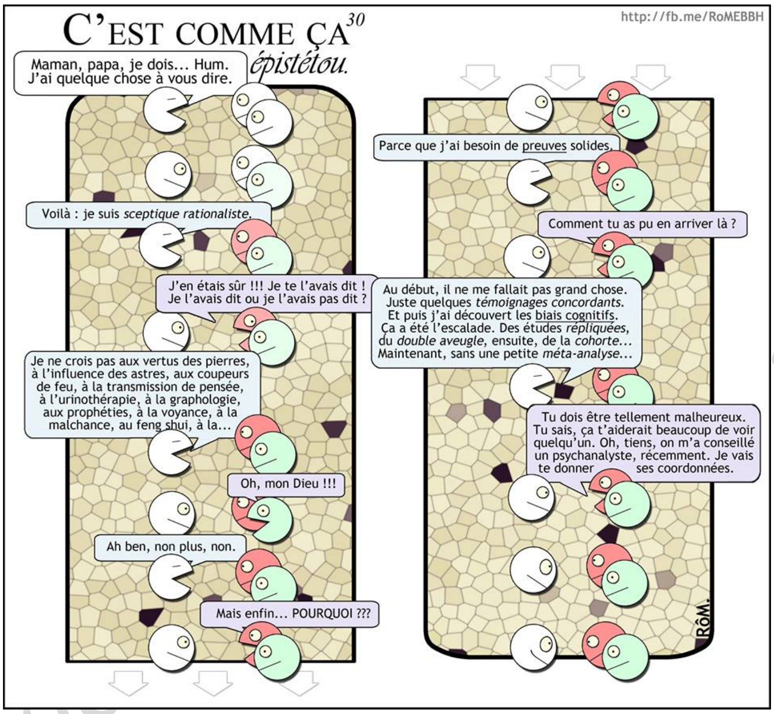
1. Ad hominem : Un argument ad hominem attaque le messager, pas le message lui-même.
2. Argument d'autorité : Argument qui repose sur l'identité d'une autorité plutôt que sur les composants de l'argument lui-même.
3. Argument des conséquences négatives : Dire que parce que les implications d'une déclaration étant vraie créeraient des résultats négatifs, cela ne doit pas être vrai.
4. Appel à l'ignorance : Si quelque chose n'est pas connu pour être faux, cela doit être vrai.
5. Plaidoyer spécial : énoncer un principe universel, en insistant sur le fait qu'il ne s'applique pas à vos affirmations pour une raison quelconque.
6. Exposer la question / supposer la réponse : Cela se produit quand une déclaration a une prémisse non prouvée. Ce sophisme est également appelé "raisonnement circulaire" ou "logique circulaire".
7. Sélection observationnelle : En regardant seulement des preuves (évidences) positives tout en ignorant les négatifs et vice versa.
8. Statistiques de petits nombres : Utilisation de petits nombres pour signaler de fortes augmentations en pourcentage.
9. Méconnaissance de la nature des statistiques : L'ignorance à propos des hypothèses statistiques centrales et la définition des paramètres (la confusion entre la corrélation et la causalité, la taille de l'échantillon et la haine du biais mathématique sont des exemples bien connus).
10. Post hoc, ergo propter hoc : Fonder un effet sur une cause uniquement sur la base de la chronologie.
11. Fausse dichotomie : Représenter un problème ou un argument comme n'ayant que deux options et aucun spectre entre les deux (biais d'estimation ponctuelle).
12. Court terme vs Long terme : En supposant qu'une tendance actuelle demeurera constante tout au long de son histoire et continuera de le faire à l'avenir, même si rien ne laisse croire qu'une telle extrapolation soit justifiée.
13. Pente glissante, liée à la fausse dichotomie : Dire que quelque chose ne va pas parce que c'est à côté ou vaguement lié à quelque chose de mal.
14. Preuves réprimées et demi-vérités : tirer une conclusion injustifiée de prémisses qui sont au moins en partie correctes.
15. Paroles en l'air (manque de franchise) : L'utilisation de références vagues et non spécifiques.

En plus de nous enseigner ce qu'il faut faire au minimum lors de l'évaluation d'une nouvelle source de connaissances, tout bon kit de détection de balivernes doit également nous apprendre ce qu'il ne faut pas faire. Cela nous aide à reconnaître les erreurs les plus communes et les plus périlleuses de la logique et de la rhétorique. Beaucoup de bons exemples peuvent être trouvés

En cours de traduction de l'anglais

dans la religion et la politique, parce que leurs praticiens sont souvent obligés de justifier deux propositions contradictoires (sans parler des débats sur les réseaux sociaux...).

Enfin, citons Lavoisier : «*Le physicien peut aussi, dans le silence de son laboratoire et de son cabinet, exercer des fonctions patriotiques ; il peut espérer par ses travaux diminuer la masse des maux qui affligent bonheur et, n'eût-il contribué, par les routes nouvelles qu'il s'est ouvertes, qu'à prolonger de quelques années, de quelques jours, la vie moyenne des hommes, il pourrait aspirer aussi au titre glorieux de bienfaiteur de l'humanité.*»



Attention ! Soyez extrêmement prudent dans la vie avec les livres (ou vidéos/podcasts) non évalués par des pairs et distribués par des éditeurs non universitaires dont le contenu utilise des mises en récit agréables, des techniques psychologiques (belle esthétique, musique bien choisie, etc.), des flatteries et des affirmations extraordinaires (sans référence à une bibliographie assez importante des évidences empiriques rapportées dans des articles qui respectent les règles de publication scientifique telles que données à la page **??**) pour vous manipuler et obtenir votre argent en vendant divers services (livres, événements, formations, etc.) et des promesses infalsifiables ! La science au contraire vous fournira la plupart du temps des connaissances et des informations très complexes et désagréables ainsi que des outils (imparfaits) qui fonctionnent et sont utiles dans la vie réelle...

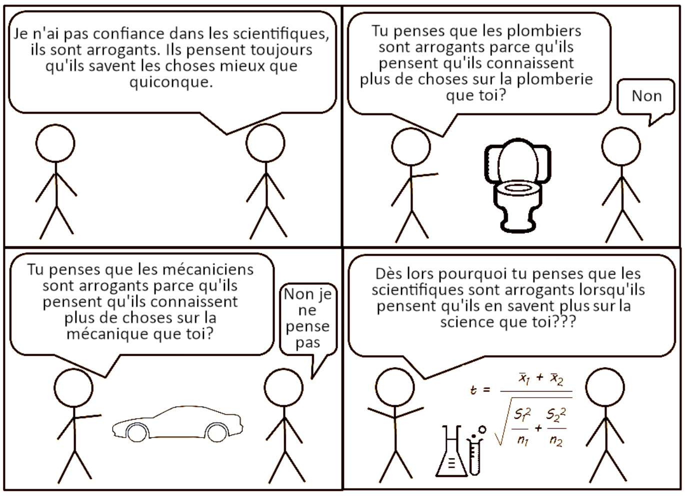
4.5. L'effet retour de flamme en Sciences

Un autre point important qu'il est important de souligner au sujet de la communication scientifique : Scientifiques, arrêtez de penser qu'expliquer la science va résoudre les problèmes et éviter les préjugés, surtout si vous vous trouvez dans un état d'incrédulité ou d'évidence qui vous rend fou relativement aux nombreux complots comme celui de la Terre plate, des vaccins, du déréglement climatique, de la mission Apollo, etc., car les médias traditionnels (ou "pseudo-journalistes") ne savent pas communiquer correctement sur les sujets scientifiques ! ! ! Par exemple, en 12010 (calendrier holocène), une étude (voir [339]) a montré que confronter des individus avec des évidences tangibles peut provoquer un effet retour de flamme, les rendant plus enracinés dans leurs préjugés et leurs perceptions erronées.

Les raisons sont majoritairement les suivantes et s'appliquent en dehors du cas où les gens viennent vous écouter ou écouter d'autres scientifiques dans le cadre d'une conférence ou d'un séminaire :

1. Certaines personnes ne veulent pas écouter quoi que ce soit à propos de la Méthode Scientifique surtout quand elles ne se sont jamais demandés «est-ce vrai ?», «Est-ce la meilleure méthode ?», «N'est-ce pas un biais ?». Si elles utilisent l'attaque essentialiste "votre science" juste pour souligner sur ce qu'elles disent ou en argumentant vous allez juste les sortir de leur zone de confort et les faire en plus hair la science et les scientifiques (anti-intellectualisme !).

En cours de traduction de l'anglais



thelogicofscience.com

2. Certaines personnes sont pleines de préjugés, de biais et opportunistes, elles n'apprécient souvent pas admettre que cela est vrai car elles supposent que l'humain est au sommet de l'évolution et ne peut donc pas avoir de tels défauts. Donc, quand vous leur expliquez et démontrez qu'ils ont des biais, vous faites simplement remarquer qu'ils ne sont pas fiables ! Parlez donc de partialité seulement si les gens vous demandent de le faire.

3. Certaines personnes croient que leur expérience personnelle est plus fiable et significative que les centaines d'années de revue par les pairs, de tests expérimentaux, de contrôles

de la "méthode scientifique" qui semble jusqu'ici, sinon LA meilleure, au moins être la meilleure méthode d'investigation intellectuelle que l'on connaisse à ce jour.

Remarque

De façon "anecdotique" il y a aussi de nombreuses autres raisons (humainement compréhensibles...) qui fait que la science ou les membres de la communauté scientifiques sont diffamés comme par exemple (liste non exhaustive dans une ordre aléatoire) le fait que : la vulgarisation scientifique utilise des analogies qui sont des fausses équivalences affligeantes énerve certains individus, la communication scientifique utilise parfois d'un vocabulaire religieux (comme la "particule de dieu" au lieu de "boson de Higgs") ou non-adapté (comme la "théorie du Big Bang" au lieu de "théorie de l'inflation cosmique") pour la description de phénomoènes ce qui génère un mélange des genres qui irrite fortement certains individus, la science s'impose souvent dans les petites classes uniquement avec de la rhétorique et sans démonstrations ou évidences expérimentales peut la faire confondre à un dogme religieux et donc une croyance ce qui a tendance à entrer justement en conflit avec les gens ayant d'autres croyances, la physique quantique est non-intuitive (non-localité, phénomènes sans cause, apparition spontanée d'énergie du vide, etc.) et déstabilise beaucoup le référentiel de connaissances du monde macroscopique, certaines personnes ont été éjectées du système scolaire à cause d'un cuisant échec dans les branches scientifiques et ils s'en retrouvent marqué alors à vie (impossibilité de faire le métier de leur rêve), la science contredit/challenge les dogmes de la totalité des religions/croyances (évolution, genèse, non-existence de l'âme, maladies mentales des pseudo-prophètes, faux-miracles, etc.), les publications scientifiques qui ont détruit (ou mettent en puéril) le business de certains charlatans (voyance, homoépathie, kinésithérapie, acupuncture, etc.), certains individus ont perdu leur emploi à cause de l'évolution technologique faussement attribuée à la science (alors que ce sont les ingénieurs qui doivent trouver des applications pratiques à la science), certains individus ont vécu une erreur médicale grave et associent la médecine a une science (alors que la médecine est un art et que les médecins ne sont pas des scientifiques), la vision du monde de certains individus est manichéenne alors que la science est probabiliste et les certitudes ("vérités absolues") y sont plus l'exception que la règle, la science estitérative et se remet constamment en question et évolue déstabilise certaines personnes qui ont besoin de stabilité/certitudes dans leur vie, certains sont jaloux des hauts salaires des scientifiques ou de leur haut niveau de formation universitaire postgrade (anti-intellectualisme), certains individus pensent que c'est la science et les scientifiques qui développement les armes et bombes nucléaires alors que ce sont en majorité des ingénieurs (et encore une fois : les ingénieurs ne sont pas des scientifiques !), les résultats de la science soient au-dessus des lois juridiques humaines est mal accepté par certains, la perte d'être chers ou d'accidents graves que les gens n'arrivent pas à associer simplement au hasard (probabilités) et ont besoin alors de trouver un coupable à désigner, certains individus ont peur des développements de l'ingénierie souvent à tort associée à la science (intelligence artificielle, modifications génétiques, injections de traitements), la science occidentale ait donné des noms d'occidentaux à certains théorèmes qui pourtant n'ont pas été découverts par des occidentaux (cela provoque une jalousie dans certaines cultures), la culture scientifique est sur-représentée dans certains pays qui sont entrés en guerres ou en compétition avec d'autres pays et les ont totalement écrasés par leur avancée techno-scientifique, etc. etc. etc. !

quote 4.5:114.#24

> *Aucune quantité d'évidences revues par les pairs ne persuadera jamais un idiot, d'autant plus si ce dernier est scientifiquement analphabète et ne maîtrise pas les calculs statistiques de haut niveau et les subtilités de la méthode scientifique.*

Maintenant, citons quelques paragraphes d'un excellent article de Tim Requarth puisque ceux-ci sont quasiment parfaits pour illustrer nos propos :

«La théorie que de nombreux scientifiques semblent supporter est techniquement connue sous le nom de "modèle de déficit", qui stipule que les opinions des gens diffèrent du consensus scientifique parce qu'ils manquent de connaissances scientifiques. En 12010 (calendrier holocène), Dan Kahan, un psychologue de Yale, semble avoir montré que cette théorie était significativement fausse. Il a sondé plus de 1'500 Américains, classant chaque personne dans une «vision du monde culturelle» d'une échelle qui correspond grossièrement avec une tendance politique libérale ou conservatrice. Il a ensuite évalué la culture scientifique de chaque personne avec des questions telles que «Vrai ou Faux : les électrons sont plus petits que les atomes». Enfin, il les a interrogés sur le déréglement climatique. Si le modèle de déficit était correct alors les gens avec une culture scientifique supérieure, indépendamment de leur vision du monde, devraient être d'accord avec les consensus scientifique que le déréglement climatique représente un risque sérieux pour l'humanité.

Ce n'est pas ce Dan Kahan a observé. Au lieu de cela, les données mettent en évidence que l'augmentation des connaissances scientifiques avait en réalité un petit effet négatif : les répondants conservateurs qui en savaient le plus sur la science semblent penser que le changement climatique pose le moins de risques. La culture scientifique, semble-t-il, augmente la polarisation. Dans une étude ultérieure, Dan Kahan a ajouté une vice dans le questionnaire : Il a demandé aux répondants ce que selon eux les climatologues croyaient (éviement l'usage du verbe "croire" est vicieux dans ce contexte !). Les répondants qui en savaient plus sur la science en général, quelle que soit leur orientation politique, étaient plus à même d'identifier le consensus scientifique - en d'autres termes, la polarisation avait disparu. Pourtant, quand on a demandé aux mêmes personnes leurs opinions sur le changement climatique, la polarisation est revenue. Il a donc été montré sur cette unique expérience que même lorsque les gens comprennent le consensus scientifique, ils peuvent souvent ne pas l'accepter.

quote 4.5:114.#25

> *N'ayant aucune formation postdoctorale sur ce sujet, ni aucun biais, et n'ayant fait aucune recherche dans un laboratoire à un niveau professionnel que ce soit, je ne le comprends pas. Par conséquent, cela n'a pas de sens et c'est faux !*
>
> Utilisateur lambda des réseaux sociaux

Le point à retenir est clair : l'augmentation de la culture scientifique seule ne changera pas les esprits et le biais cognitifs. En fait, les tentatives bien intentionnées des scientifiques pour informer le public pourraient même se retourner contre eux. Présenter des faits qui entrent en

En cours de traduction de l'anglais

conflit avec la vision du Monde d'un individu peut, en fait, inciter les gens à aller plus loin. Les psychologues, à juste titre, ont surnommé cela "l'effet de retour de flamme".

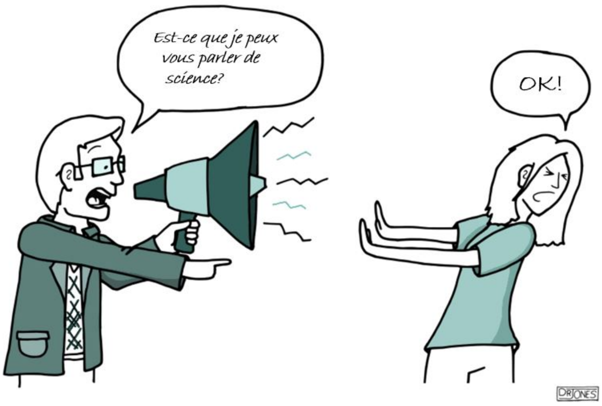


FIG. 4.16 – **Source : Dr. Jones, https ://www.ratbotcomics.com**

Si les scientifiques veulent simplement expliquer la science à un public curieux, diffuser plus largement leur recherche ou écrire pour s'amuser, cela n'a pas beaucoup d'importance. Mais si les scientifiques sont motivés à faire changer les opionons - et nombreux sont les scientifiques inscrits à des ateliers de communication scientifique qui semblent avoir cet objectif - ils seront a priori très déçus.

Cela ne veut pas dire que les scientifiques devraient retourner à la laboratoire et rester muets. Ils devraient juste se rendre compte que la combler le "manque d'information (ou de culture)" n'est pas l'objectif réel. Au lieu de cela, les scientifiques devraient apprendre à communiquer la science de façon stratégique !

Il y a des raisons évidentes pour lesquelles la communication scientifique est une entreprise nécessaire et utile, mais une particulièrement importante est : qu'il y a dans certains pays un politique organisée faite décridibiliser la science et atténuer son efficacité. Lors d'une conférence au Heartland Institute en Mars 12017 (calendrier holocène), Lamar Smith, le président républicain du comité scientifique a déclaré aux participants qu'il qualifierait maintenant la «science du climat» de «science politiquement correcte» et ce afin de minimiser les critiques. Cela catégorse donc implicitement les scientifiques comme faisant partie de la "gauche" politique et, comme Daniel Engber l'a souligné dans le magazine Slate à propos de la prochaine Marche Pour La Science, à redéfinir l'autorité scientifique comme une forme d'élitisme.

Est-il surprenant, alors que des conférences de scientifiques construites sur le principe qu'ils en savent simplement plus (même si c'est vrai) n'arrivent pas à convaincre leur public ? Plutôt que de combler le déficit d'information en construisant un arsenal de faits et d'évidences expérimentales, les scientifiques devraient plutôt envisager comment déployer leurs connaissances. Ils peuvent avoir plus de chance de communiquer si, en plus de présenter des faits et des chiffres, ils font appel aux émotions (biais émotionnels). Cela pourrait signifier non seulement expliquer la science de la façon dont quelque chose fonctionne mais passer du temps sur les raisons pour lesquelles cela compte pour l'auditeur et pourquoi cela devrait avoir de l'importance pour le conférencier. La recherche montre également que les communicateurs scientifiques peuvent être plus efficaces après avoir gagné la confiance du public. Dans cette optique, il serait peut-être plus utile de comprendre comment parler de la science avec des gens qui la connaissent déjà, par le biais d'interactions locales et communautaires, que d'essayer de publier des explications sur

En cours de traduction de l'anglais

des sites d'information nationaux. Et les scientifiques pourraient envisager de rédiger des éditoriaux pour leurs journaux locaux, en se concentrant sur les raisons pour lesquelles la science compte pour leurs communautés respectives.

Les scientifiques peuvent également apprendre à éviter certains pièges. J'ai parlé avec Gretchen Goldman, directrice de l'Union des Centres Scientifiques Concernés pour la Science et la Démocratie, qui propose des ateliers de communication et de plaidoyer. Une leçon contre-intuitive qu'elle a apprise est que réfuter des histoires qui nient le changement climatique en abordant chaque revendication et en expliquant pourquoi c'est faux n'est pas très productif. En fait, cela pourrait être contre-productif : «Si vous répétez le mythe, c'est la partie que les gens se souviennent même si vous la démystifiez immédiatement», dit-elle. Selon elle, une meilleure approche consiste à recadrer le problème. Ne continuez pas à expliquer pourquoi le changement climatique est réel, expliquez comment le changement climatique va nuire à la santé publique ou à l'économie locale. La communication qui fait appel à des valeurs, pas seulement à l'intellect, montre la recherche, peut être beaucoup plus efficace (biais émotionnel).

[...] Mais les obstacles rencontrés par les communicateurs scientifiques ne sont pas épistémologiques mais culturels. Les compétences requises ne sont pas celles d'un professeur d'université mais d'un rhéteur.

C'est donc un but probablement admirable de communiquer sur la science, mais presque certainement destiné à échouer. C'est parce que la façon dont la plupart des scientifiques pensent à la communication scientifique - qui simplement qu'en expliquant la vraie science aidera - est tout à fait fausse. En fait, c'est tellement faux que c'est souvent l'effet inverse de ce qu'ils essaient d'accomplir qui est récolté. [...]»

quote 4.5:116.#26

> *Le silence est parfois la meilleure réponse aux imbéciles.*

En cours de traduction de l'anglais

En cours de traduction de l'anglais

> *En tant que scientifique (et athée), vous serez souvent détestés par tous ceux qui croient aux contes de fées et pensent que leurs opinions, anecdotes, logique circulaire et analphabétisme scientifique ont une quelconque valeur, mais ceux qui restent fidèles à la Méthode Scientifique et au principe de précaution seront sauvés et aideront à sauver les haineux. Les mensonges réconfortants ont toujours pris et prennent encore l'ascenseur et la Méthode Scientifique les escaliers, les mensonges arrivent certes en premier mais un jour ou l'autre la Science finit par les rattraper avec ses désagréables évidences.*

quote 4.5:117.#27

Remarque

Dans le cadre d'un échange cordial, adopter une position de juge est une mauvaise stratégie. Il y a déjà de fortes chances pour que vos arguments soient perçus comme une agression, ce n'est donc pas la peine d'en rajouter. Il semble plus sage d'adopter la stratégie de l'entretien épistémique. Comparable à la maïeutique de Socrate, elle consiste à aider son interlocuteur à présenter sa pensée, à la synthétiser pour pouvoir mieux, avec lui, la scruter et mettre en évidence ses failles éventuelles.

4.6. La Science est-elle dogmatique ?

Nous allons ici répéter principalement des choses que nous avons déjà mentionnées plus haut. Cependant, comme certaines personnes scientifiquement illetrées pensent encore en ce début du 21e siècle que les vidéos YouTube contenant un monologue rhétorique[47] ou des livres sans preuves et sans analyse statistiques de données constituent une sorte de "d'évidence", il est peut-être nécessaire de revenir sur quelques sujets mais avec une perspective différente[48] !

Pour la Science, si quelque chose existe avec des évidences au-delà de tout doute raisonnable (ADDTDR), dans son état actuel de connaissance, cela signifie qu'elle peut être mesurée ! Si elle ne peut pas être mesurée ou est mal définie, eh bien, alors la Science ne peut pas fournir l'évidence qu'elle n'existe pas (n'oubliez pas que le but de la Science est de réfuter les modèles et si elle échoue à le faire pendant assez longtemps alors un modèle peut prendre le statut de théorie !). Dans une métaphore simpliste et légèrement hors contexte, cela équivaut à dire que pour les aveugles (en leur enlevant aussi tous leurs autres sens), le monde n'existe pas avec des preuves solides parce qu'ils ne peuvent ni le voir ni le sentir. Certains disent alors que la science est matérialiste ! Cependant, cela ne signifie pas du tout que la Science a échoué en tant que méthode d'investigation de la Nature, mais cela signifie simplement que la Science sait qu'elle ne sait pas tout sinon elle s'arrêterait et que la méthode scientifique doit être constamment corrigée en fonction des nouvelles évidences disponibles.

Typiquement, la science ne rejette pas complètement la parapsychologie ou l'existence de l'une des mille divinités créées dans le monde par les humains, même si en réalité tous les tests expérimentaux menés jusqu'à ce jour les ont rejetées avec des évidences solides (mais pas définitivement !). Les partisans de la parapsychologie ou des religions (ou de certaines médecines alternatives) peuvent faire valoir que la science ne peut ni prouver ni réfuter ce qu'elle ne peut pas mesurer directement ou indirectement. Et ils ont très vraisemblablement absolument raison ! La science ne peut échouer à rejeter avec un niveau d'évidence donné que si quelque chose existe ou non à son état actuel de connaissances. Donc, si quelqu'un soutient que les licornes volantes existent sans fournir de protocole afin que des milliers d'autres personnes puissent vérifier ce fait de manière reproductible et indiscutable... alors la science (scientifiques) nous dit humblement que : *nous n'avons aucune évidence au-delà doute raisonnable à notre état actuel de connaissance que les licornes existent ou non* !

Ce n'est donc pas la Science qui est dogmatique, ni l'immense majorité de la communauté scientifique. Mais seuls quelques scientifiques mal éduqués et biaisés (personne n'est parfait...).

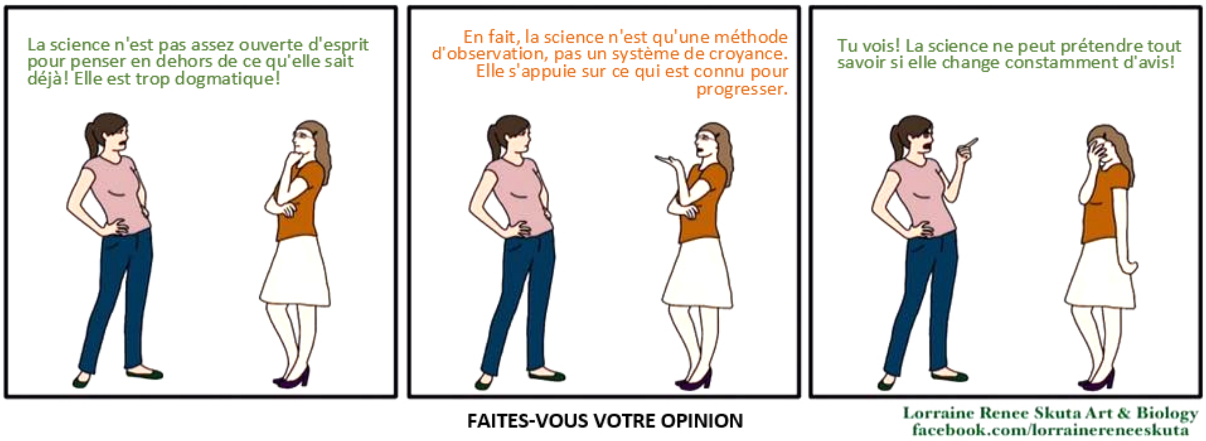
En cours de traduction de l'anglais

[47] Les gens ne doivent pas faire confiance aux monologues - que ce soit à la radio, à la télévision ou sur les réseaux sociaux - car il n'y a pas d'experts pour contrer les éventuels mauvais arguments ou concepts mal définis qui peuvent conduire une partie de l'auditoire à de fausses interprétations spéculatives ! De plus, les humains sous le stress de savoir qu'ils sont enregistrés sont naturellement sujets aux erreurs de vocabulaire et c'est sans compter les plus de 200 biais cognitifs du cerveau qui conduisent parfois à la simplification erronée de pensées complexes ... !

[48] Et n'oubliez pas que le but de la science n'est pas la "vérité" mais c'est seulement un outil qui explique assez bien les choses que nous voyons ou ressentons en suivant les meilleurs modèles actuels. Et n'oubliez pas non plus que citer un livre, un scientifique célèbre, un blog ou une vidéo YouTube n'est au mieux qu'une évidence de niveau 2 ou 3 !

Remarque

Nous démontrerons aussi plus loin que le théorème d'incomplétude de Gödel prouve, à partir de l'argument de non-conservativité, qu'il existe dans certaines théories mathématiques (c'est-à-dire dans certains systèmes d'axiomes) des phrases de vérité qui ne peuvent être considérées comme vraies sans une notion de vérité transcendante par rapport à la théorie de base ! Ce qui est une preuve supplémentaire que la Science a elle-même démontré qu'elle ne peut pas dans certains systèmes être un dogme !



En cours de traduction

Certains humains n'aiment pas que les scientifiques ne sachent pas tout sur quelque chose, ou que les scientifiques font des erreurs, et que la Science prend du temps et que pire encore, ces mêmes personnes n'auront peut-être jamais de réponse à leurs principales questions avant leur mort. Mais c'est ainsi que fonctionne la Science ! ! ! Si quelqu'un touve un moyen plus fiable et plus rapide d'étudier l'Univers et ses phénomènes que l'état actuel de la Méthode Scientifique, alors la majorité de la communauté scientifique - en particulier la communauté académique - le vérifiera et si vraiment cela fonctionne mieux alors l'adoptera avec plaisir !

> *Les affirmations extraordinaires nécessitent des preuves extraordinaires.* quote 4.6:119.#28
>
> Carl Sagan

Ainsi, certaines personnes peuvent demander à la Science d'être vraiment scientifique, c'est-à-dire qu'elle devrait s'interroger sur la certitude de ses propres postulats et instruments. Mais comme nous l'avons déjà dit à plusieurs reprises dans les sections précédentes ci-dessus, c'est justement ce que font les chercheurs dans leur travail quotidien ! ! ! Ils essaient de trouver de nouvelles évidences pour rejeter les théories, les modèles, les méthodes, les postulats ou les mauvais instruments actuels... sinon la science s'arrêterait et les scientifiques perdraient leur travail ! Cependant, le processus est lent et prend des jours, des semaines, des mois, des années, des décennies, des siècles et parfois même des millénaires.

Remarque

Certaines personnes soulignent que la version de l'Univers dont disposent actuellement les scientifiques n'est que ce que leurs instruments, et surtout leur imagination leur permet de comprendre. Et ils aussi très vraisemblablement raison ! Nous - tous les chercheurs académiques professionnels - savons ce fait depuis des siècles en science et c'est pourquoi nous essayons chaque jour de repousser les limites de la connaissance (donc aussi de l'imagination) et de développer de nouveaux instruments et méthodes pour mesurer des choses qui n'étaient même pas connues quelques décennies auparavant ! Le lecteur doit garder à l'esprit que c'est pour cela que nous sommes payés ! S'il n'y a rien de nouveau à découvrir, nous perdrons tous nos emplois !

Donc oui dans son état actuel, la Science ne peut pas très bien rendre compte des phénomènes de conscience, de synchronicité, ou même des expériences de mort imminente ou des épiphanies spontanées, etc. (même si des outils comme l'IRMf et l'EEG aident à observer des corrélations avec des signaux électriques). Mais les scientifiques professionnels correctement éduqués ne prétendront pas qu'ils existent ou n'existent pas parce que nous n'avons pas encore actuellement d'évidences expérimentales reproductibles pour soutenir ou rejeter l'une de ces positions ! Les scientifiques attendent juste de ceux qui prétendent que de telles choses existent - en faisant même des affaires très lucratives avec - de leur fournir des évidences expérimentales reproductibles. Malheureusement, jusqu'à présent, toutes les personnes qui ont fait de telles affirmations et qui ont des activités lucratives avec n'ont fourni aucune évidence expérimentale et même pire ils ont été systématiquement identifiés comme charlatans.

N'importe qui devrait se demander pourquoi les pasteurs évangélistes ou tout type de guérisseur faiseur de miracles (...) ne pratiquent pas leur art dans l'environnement scientifique contrôlé des hôpitaux plutôt que dans leur église (devant un public en grande majorité biaisé, sans instruction et scientifiquement illetrés) ou avec un petit groupe de personnes inconnues et suspectes derrière une caméra..........

En cours ... anglais

Des gens comme Rupert Sheldrake, titulaire d'un doctorat (de Cambridge) en biochimie et chercheur à la retraite dans le domaine de la parapsychologie qui a proposé le concept de résonance morphique ... et également auteur de nombreux livres enrichissants (au point figuré du terme !) ...... explore dix dogmes de la science qui devraient être reconsidérés en fonction de son opinion personnelle et subjective...

Présentons ci-dessous ces dix dogmes et ... nous les commenterons car le Dr Sheldrake n'a pas de doctorat en physique, ni en cosmologie mais a un bon sens de la rhétorique surtout quand il fait un monologue devant un public de néophytes (le lecteur et le Dr Sheldrake pourront trouver les preuves mathématiques de nos réponses dans les pages à 7000 de ce livre s'ils sont curieux - contrairement au Dr Sheldrake, nous aimons plus les preuves et les évidences expérimentales que les monologues rhétoriques...) :

1. « La nature est mécanique : toutes les créatures et systèmes de la nature sont des robots faits pour suivre un programme génétique donné. »

   ▷ Notre commentaire : Nous ne sommes pas sûrs de la définition du mot «Mécanique» dans cette phrase (les bases d'un débat sont de s'entendre sur le sens des mots ...) mais

évidemment un système biologique ne peut être comparé à un système mécanique (un système mécanique n'évolue pas). Cependant, comme nous le prouverons dans ce livre, la nature est basée sur l'Information à tous les niveaux, basée sur les Probabilités au niveau microscoptique, et se comporte Statistiquement et Mécaniquement au niveau macroscopique. Donc comme la plupart du temps en Science ..., ce n'est pas aussi facile qu'il y paraît (il semble que le Dr Sheldrake ait une vision binaire du Monde et de l'Univers assez surprenante compte tenu de son niveau d'éducation supposé).

2. « La matière est inconsciente : Les plantes, les étoiles, les animaux et les éléments sont des choses matérielles qui sont et ne peuvent pas avoir une conscience d'elles-mêmes. »

   ▷ Notre commentaire : Nous devons d'abord nous demander comment la «conscience» est définie par le Dr Sheldrake. Deuxièmement, qui a affirmé cela dans la communauté scientifique ? Existe-t-il un consensus scientifique écrit noir sur blanc sur ce sujet ou cela est-t-il issu de l'imagination du Dr Sheldrake ?

3. « Les lois de la nature sont fixes : au moment du Big Bang, toutes les constantes nécessaires jusqu'à la fin des temps ont été établies. Les habitudes de la nature n'évoluent pas. »

   ▷ Notre commentaire : Quel consensus scientifique a déclaré cela ? C'est très probablement faux car nous avons en fait quelques modèles en physique théorique qui prouvent que les constantes de l'Univers peuvent tout à fait avoir changé et nous avons aussi des évidences expérimentales que les lois de la Nature ont aussi peut-être changé sur de longues périodes de temps. Mais une chose est presque sûre : il n'y a pas encore de consensus scientifique écrit noir sur blanc sur ce sujet au jour où nous écrivons ces lignes !

4. « La quantité de nature et d'énergie dans l'Univers est toujours la même. »

   ▷ Notre commentaire : La communauté scientifique a de solides évidences au-delà de tout doute raisonnable de cette affirmation pour l'Univers observable. Cependant, la dynamique de l'Univers réfute la conservation de l'énergie à grande échelle (cela est dérivé des théorèmes de Noether !). Notez que nous n'avons cependant aucune preuve de cette déclaration de conservation d'énergie pour l'Univers dans son entier (l'observable et non observable).

5. « La Nature n'a pas de buts : il n'y a pas de conception dans la Nature en termes d'intention et le processus d'évolution est mécanique. »

   ▷ Notre commentaire : Nous avons des évidences solides au-delà de tout doute raisonnable en effet qu'il n'y a pas de conception intelligente car la conception observable actuelle est défectueuse à bien des égards. Et le processus d'évolution tel que prouvé mathématiquement dans ce livre et expérimentalement (au-delà de tout doute raisonnable) en laboratoire n'est pas mécanique mais stochastique.

6. « Patrimoine biologique : Les plans pour produire un être vivant sont composés dans la matière physique logée dans leurs gènes. »

   ▷ Notre commentaire : Ce n'est pas tout à fait exact. Les observations expérimentales nous montrent que certaines bases des plans sont aléatoires et influencées par des modifications externes et internes. Encore une fois, le Dr Sheldrake donne une vue binaire d'un phénomène bien plus complexe. Mais c'est quelque chose que nous savons comme typique des scientifiques qui parlent de sujets qu'ils ont mal étudiés : ils réduisent quelque

En cours de traduction de l'anglais

chose de complexe à quelque chose de simple parce qu'ils ne peuvent pas saisir la complexité du Monde et de l'Univers.

7. « La mémoire est conservée dans le cerveau sous forme d'empreintes matérielles : la mémoire est constituée de protéines et de terminaisons nerveuses organisées comme des tiroirs. »

   ▷ Notre commentaire : Si c'était le cas, nous n'oublierions pas des choses ... C'est parce que le cerveau est beaucoup plus complexe et implique des probabilités, des processus bayésiens et stochastiques que nous savons pourquoi le cerveau humain oublie des choses et a parfois des problèmes de construction...

8. « L'esprit est dans la tête : l'esprit a une connexion physique avec la tête et le cerveau, reléguant la subordination intellectuelle sur le reste du corps. »

   ▷ Notre commentaire : Qu'est-ce que «l'esprit» pour le Dr Sheldrake ? À notre connaissance, il n'y a pas de consensus scientifique sur sa définition. De plus, l'esprit est-il ce que nous observons dans les scanners à RMN (Résonance Magnétique Nucléaire) ?

9. « Les phénomènes comme la télépathie sont impossibles : les pensées n'ont aucun effet sur le monde à cause du numéro 8 de la liste (l'esprit est dans la tête). »

   ▷ Notre commentaire : Quel consensus scientifique ou communauté a déclaré cela ? En fait, la science n'a aucune évidence que la télépathie fonctionne ou existe, oui (!) - mais aucun scientifique bien éduqué ne dirait que c'est "impossible" (d'ailleurs tout scientifique bien éduqué sait qu'il vaut mieux éviter d'utiliser le mot "impossible" à propos d'un futur inconnu ou de phénomènes non mesurables).

10. « Seule la médecine mécanique fonctionne : c'est simplement par hasard ou par effet placebo que les pratiques de guérison traditionnelles ou les remèdes naturels ont un effet sur la santé des gens. »

    ▷ Notre commentaire : Encore une fois ... quel consensus scientifique ou quelle communauté a déclaré cela ? Ce n'est pas exact. Peut-être que les scientifiques sont d'accord sur le fait qu'aucune autre méthode que la médecine scientifique n'a fourni un meilleur rapport de cotes que d'autres médicaments. Mais si un jour certaines personnes fournissent des évidences solides que les pratiques de guérison traditionnelles ou les remèdes naturels fonctionnent, alors presque sûrement ils seront promus par la communauté académique scientifique.

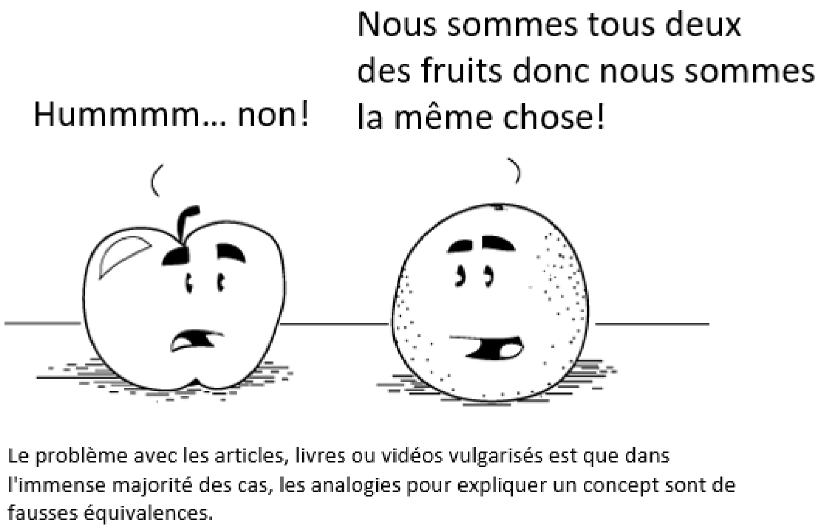
En cours de traduction de l'anglais

Si ce sont là les meilleures évidences que le Dr Sheldrake a pour sa défendre sa position, alors cela signifie qu'il n'y a pas d'évidence du tout (au mieux du niveau 1). Ses arguments sont basés essentiellement sur de la rhétorique pseudo-scientifique et la spéculation, usant d'idées populaires fausses et d'opinions plutôt que des évidences et des exemples de "dogmes" en science.

Nous pouvons comprendre pourquoi quelqu'un qui lit ou écoute ce genre rhétorique pseudo-scientifique pourrait penser qu'il existe une base d'évidence. Ainsi, quand quelqu'un prétend que «l'establishment» est dogmatique, immoral ou quoi que ce soit, nous pouvons sincèrement espérer que n'importe quel lecteur ou auditeur évaluera de manière critique les affirmations de cette personne.

> *Une croyance religieuse sans dogme n'est pas possible et la science n'est pas compatible avec le moindre dogme. Donc la science ne peut que être incompabitle avec les croyances religieuses.*
>
> ?

quote 4.6:123.#29



En cours de traduction anglais

Note de qualité de la section : ★★★★★ 151 votes, 75.23%

5 Arithmétique

Les mathématiques sont la forme ultime d'art contraint. (inconnu)

Contents

5.1 Théorie de la Démonstration . . . **130**
5.1.1 La Crise des Fondements . . . 134
5.1.2 Paradoxes . . . 138
5.1.2.1 Raisonnement Hypothético-Déductif . . . 141
5.1.3 Calcul propositionnel . . . 142
5.1.3.1 Propositions (prémisses) . . . 144
5.1.3.2 Connecteurs . . . 146
5.1.3.3 Procédures de décision . . . 156
5.1.3.4 Quantificateurs . . . 161
5.1.4 Calcul des Prédicats . . . 164
5.1.4.1 Grammaire . . . 165
5.1.4.2 Langages . . . 166
5.1.5 Démonstrations (preuves) . . . 173
5.1.5.1 Règles de démonstration . . . 175
5.1.6 Lois de la pensée . . . 186
5.1.6.1 Quelques erreurs logiques célèbres . . . 196
5.1.6.2 La logique est-elle une science ? . . . 201
5.2 Nombres . . . **207**
5.2.1 Bases Numériques . . . 210
5.2.2 Types de Nombres . . . 213
5.2.2.1 Nombres Entiers Naturels . . . 213
5.2.2.2 Nombres Entiers Relatifs . . . 220

En cours de traduction de l' anglais

5.2.2.3 Nombres Rationnels . . . 222
5.2.2.4 Nombres Irrationnels . . . 227
5.2.2.5 Nombres Réels . . . 229
5.2.2.6 Nombres Transfinis . . . 237
5.2.2.7 Nombres Complexes . . . 241
5.2.2.8 Nombres Quaternions . . . 259
5.2.2.9 Nombres Algébriques et Transcendants . . . 275
5.2.2.10 Nombres Univers (nombres normaux) . . . 278
5.2.2.11 Nombres Abstraits (variables) . . . 279
5.3 Opérateurs Arithmétiques . . . 284
5.3.1 Relations binaires . . . 285
5.3.1.1 Égalités . . . 286
5.3.1.2 Comparateurs . . . 287
5.3.2 Lois Fondamentales de l'Arithmétique . . . 296
5.3.2.1 Addition . . . 296
5.3.2.2 Soustraction . . . 303
5.3.2.3 Multiplication . . . 307
5.3.2.4 Division . . . 313
5.3.2.5 Racine n-ème . . . 318
5.3.3 Polynômes Arithmétiques . . . 322
5.3.4 Valeur absolue . . . 323
5.3.5 Règles de Calcul (priorité des opérateurs) . . . 326
5.4 Théorie des Nombres . . . 333
5.4.1 Principe du bon ordre . . . 333
5.4.2 Principe d'induction . . . 334
5.4.3 Divisibilité . . . 336
5.4.3.1 Division Euclidienne . . . 338
5.4.3.2 Algorithme d'Euclide . . . 344
5.4.3.3 Plus petit commun multiple (PPCM) . . . 348
5.4.3.4 Théorème fondamental de l'arithmétique . . . 352
5.4.3.5 Congruences (arithmétique modulaire) . . . 353
5.4.3.6 Fractions continues . . . 367
5.5 Théorie des Ensembles . . . 376
5.5.1 Axiomatique de Zermelo-Fraenkel . . . 380
5.5.1.1 Cardinaux . . . 386
5.5.1.2 Produit cartésien . . . 389
5.5.1.3 Intervalles (bornes) . . . 390

En cours de traduction de l'anglais

5.5.2 Opérations ensemblistes . . . 392
5.5.2.1 Inclusion . . . 392
5.5.2.2 Intersection . . . 393
5.5.2.3 Union . . . 394
5.5.2.4 Différence . . . 396
5.5.2.5 Différence symétrique . . . 396
5.5.2.6 Produit . . . 397
5.5.2.7 Complémentarité . . . 397
5.5.3 Fonctions et Applications . . . 401
5.5.3.1 Théorème de Cantor-Bernstein . . . 407
5.5.4 Structures . . . 413
5.5.4.1 Magma . . . 415
5.5.4.2 Monoïde . . . 416
5.5.4.3 Groupes . . . 418
5.5.4.4 Anneaux . . . 423
5.5.4.5 Corps . . . 427
5.5.4.6 Espaces vectoriels . . . 429
5.5.4.7 C-algèbre A . . . 431
5.5.4.8 Résumé . . . 433
5.5.5 Morphismes . . . 437
5.5.5.1 Idéal . . . 442
5.6 Probabilités . . . 449
5.6.1 Univers des événements . . . 451
5.6.1.1 Paradoxe du singe savant (loi de Borel) . . . 454
5.6.1.2 Est-ce que les probabilités réfutent les structures complexes ? . . . 458
5.6.2 Axiomatique de Kolmogorov . . . 475
5.6.3 Probabilités conditionnelles . . . 484
5.6.3.1 Espérance et Variance conditionnelle . . . 495
5.6.3.2 Réseaux bayésiens . . . 501
5.6.4 Martingales . . . 513
5.6.5 Analyse Combinatoire . . . 515
5.6.5.1 Arrangements simples avec répétitions . . . 516
5.6.5.2 Permutations simples sans répétitions . . . 518
5.6.5.3 Permutations simples avec répétitions . . . 519
5.6.5.4 Arrangements simples sans répétitions . . . 520
5.6.5.5 Combinaisons simples sans répétitions . . . 521
5.6.5.6 Combinaisons simples avec répétitions . . . 523

En cours de traduction de l'anglais

5.6.6 Chaînes de Markov . . . 530
5.7 Statistiques . . . 535
5.7.1 Échantillons . . . 537
5.7.2 Moyennes . . . 538
5.7.2.1 Lissage de Laplace . . . 561
5.7.2.2 Propriétés des moyennes . . . 562
5.7.3 Types de Variables . . . 571
5.7.3.1 Variables discrètes et Moments . . . 573
5.7.3.2 Variables continues et Moments . . . 621
5.7.4 Postulat fondamental de la statistique . . . 632
5.7.5 Indice de diversité . . . 632
5.7.6 Fonctions de distributions (lois de probabilités) . . . 636
5.7.6.1 Distribution Uniforme Discrète . . . 638
5.7.6.2 Distribution de Bernoulli . . . 641
5.7.6.3 Distribution Géométrique . . . 642
5.7.6.4 Distribution Binomiale . . . 646
5.7.6.5 Distribution Négative Binomiale . . . 655
5.7.6.6 Distribution Hypergéométrique . . . 660
5.7.6.7 Distribution Multinomiale . . . 667
5.7.6.8 Distribution de Poisson . . . 674
5.7.6.9 Distribution de Gauss-Laplace/Loi Normale . . . 680
5.7.6.10 Distribution Log-Normale . . . 721
5.7.6.11 Distribution Uniforme Continue . . . 724
5.7.6.12 Distribution Triangulaire . . . 730
5.7.6.13 Distribution de Pareto . . . 733
5.7.6.14 Distribution exponentielle . . . 739
5.7.6.15 Distribution de Cauchy . . . 744
5.7.6.16 Distribution Bêta . . . 747
5.7.6.17 Distribution Gamma . . . 754
5.7.6.18 Distribution du Khi-deux (Pearson) . . . 761
5.7.6.19 Distribution de Student . . . 770
5.7.6.20 Distribution de Fisher . . . 777
5.7.6.21 Loi Normale repliée généralisée . . . 782
5.7.6.22 Distribution de Laplace . . . 787
5.7.6.23 Distribution de Benford . . . 790
5.7.6.24 Distribution ex-Gaussienne . . . 794
5.7.7 Estimateurs de Vraisemblance . . . 805

En cours de traduction de l'anglais

5.7.7.1 Estimateurs de la distribution Normale 806
5.7.7.2 Estimateur de la distribution de Poisson 812
5.7.7.3 Estimateur de la distribution Binomiale 813
5.7.7.4 Estimateur de la distribution Géométrique 814
5.7.7.5 Estimateurs de la distribution de Weibull 815
5.7.7.6 Estimateurs de la distribution Gamma 818
5.7.7.7 Estimateur de la loi de Pareto 819
5.7.7.8 Estimateurs de données censurées 819
5.7.7.9 Matrice d'information de Fisher 822
5.7.8 Facteur de correction sur population finie 830
5.7.9 Intervalles de Confiance (inférence) 834
5.7.9.1 Inférence Fréquentiste 834
5.7.9.2 Inférence Bayésienne 877
5.7.10 Loi Faible des Grands Nombres 901
5.7.11 Fonction Caractéristique 906
5.7.11.1 Série génératrice de moments et cumulants 911
5.7.12 Théorème Central Limite 918
5.7.13 Tests d'hypothèses univariés et d'adéquations (NHST) 924
5.7.13.1 Orientation du test d'hypothèse et p-valeurs 928
5.7.13.2 Méthode de Fisher pour p-valeurs multiples 943
5.7.13.3 Puissance d'un test 952
5.7.13.4 Tests A/B 968
5.7.13.5 Analyse de la Variance (ANOVA) 978
5.7.13.6 Tests d'équivalence 1080
5.7.13.7 Test C de Cochran 1084
5.7.13.8 Taux d'erreur de groupe (p-valeurs ajustées) 1087
5.7.13.9 Tests d'adéquation (tests de qualité d'ajustement) 1092
5.7.13.10 Estimation par densité de noyau 1124
5.7.13.11 Tests de rapports des vraisemblances 1131
5.7.14 Robustesse et Statistiques non paramétriques 1134
5.7.14.1 Statistiques de Rangs 1137
5.7.14.2 Statistiques de rangs 1184
5.7.14.3 Théorie des Valeurs Extrêmes 1192
5.7.15 Statistiques Multivariées 1193
5.7.15.1 Analyse en Composantes Principales 1194
5.7.15.2 Analyse Factorielle des Correspondances du Khi-deux (AFCK2) 1214
5.7.15.3 Test d'indépendance du khi-deux 1219

En cours de traduction de l'anglais

5.7.15.4 Coefficient phi de Pearson 1231
5.7.15.5 Test exact de Fisher 1235
5.7.15.6 Kappa d'agrément de Cohen 1241
5.7.15.7 Test de McNemar 1244
5.7.16 Statistiques de survie 1251
5.7.16.1 Taux de survie de Kaplan-Meier 1253
5.7.16.2 Tests de Cochran–Mantel–Haenszel 1263
5.7.16.3 Modèle de hasard proportionnel de Cox 1271
5.7.17 Propagation des Erreurs (analyse d'incertitude expérimentale) 1289
5.7.17.1 Incertitudes absolues et relatives (calcul direct du biais) 1290
5.7.17.2 Erreurs statistiques 1291
5.7.17.3 Répétabilité 1294
5.7.17.4 Propagation des erreurs (approximation linéarisée) 1295
5.7.17.5 Propagation des erreurs (approche statistique) 1298
5.7.17.6 Chiffres significatifs 1300
5.7.18 Statistiques spatiales 1302
5.7.18.1 Modèle de distance spatiale 2D de Poisson 1302
5.7.19 Sondages 1306
5.7.19.1 Plans d'enquêtes 1310
5.7.19.2 Erreur d'échantillonnage et erreur non due à l'échantillonnag pour les enquêtes 1318
5.7.20 Un monde sans statistiques 1322
5.7.20.1 Sophismes de données 1325

En cours de traduction de l'anglais

5.1. Théorie de la Démonstration

Nous avons choisi de commencer l'étude de la mathématique appliquée par la théorie qui nous semble la plus fondamentale et la plus importante dans le domaine des sciences pures et exactes : La théorie de la démonstration. La théorie de la démonstration et du calcul propositionnel (logique) a cinq objectifs majeurs dans le cadre de ce livre :

1. Apprendre au lecteur comment raisonner et à démontrer et cela indépendamment de la spécialisation étudiée.

2. Montrer que le processus d'une démonstration est indépendant du langage utilisé.

3. Se préparer à la théorie de la logique et au théorème d'incomplétude de Gödel ainsi qu'aux automates (voir section de Systèmes Logiques page ??).

4. Préparer le chemin au théorème d'incomplétude de Gödel (objectif principal de cette section !).

5. Préparer le lecteur à la Théorie des Automates (voir section sur la Théorie des Automates page ??).

Le théorème d'incomplétude Gödel est le point le plus passionnant car si nous définissons une "religion" comme un système de pensée qui contient des affirmations indémontrables, alors elle contient des éléments de foi, et Gödel nous enseigne que la mathématique est non seulement une religion, mais que c'est alors la seule religion capable de prouver qu'elle en est une !

En cours de traduction de l'anglais

Le théorème d'incomplétude de Gödel stipule que, dans tout système axiomatique, certaines déclarations ne peuvent pas être déterminées comme vraies ou fausses. Ce théorème d'incomplétude semble donc être quelque chose d'horrible, et pour les mathématiques, c'est le cas ! Cependant, cela ne s'applique pas à la physique (ni à aucune autre science expérimentale), car la physique ne repose pas sur la preuve logique dans un systèmes axiomatique, mais sur des évidences scientifiques expérimentales !

Remarques

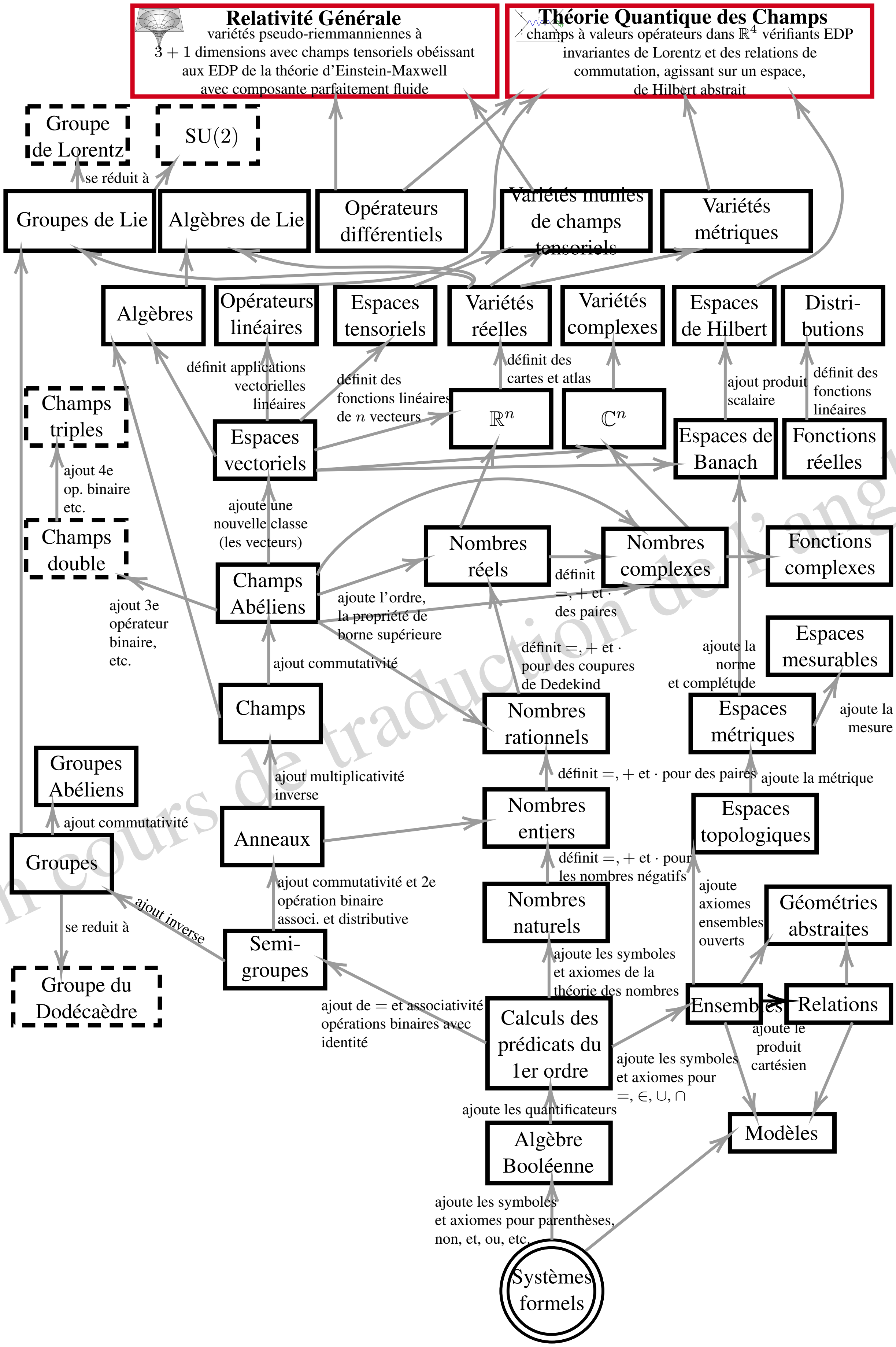
R1. Il est (très) fortement conseillé de lire en parallèle à cette section celle sur la Théorie des Automates (page ?? des Systèmes Logiques (page ??), inclus l'Algèbre de Boole (page ??), disponible dans le chapitre d'Informatique Théorique (page 3040) de ce livre.

R2. Il faut la Théorie de la Démonstration comme une curiosité sympathique mais qui n'amène fondamentalement pas grand-chose excepté des méthodes de travail/raisonne-

ment. Par ailleurs, son objectif n'est pas de démontrer que tout est démontrable mais que toute démonstration peut se faire sur un langage commun à partir d'un certain nombre de règles.

Comme l'illustre la figure ci-dessous, tirée du livre [422], les systèmes formels sont à la base des deux principales cibles du présent livre que sont la Relativité Générale et la Théorie Quantique des Champs :

En cours de traduction de l' anglais



En cours de traduction de l'anglais

FIG. 5.1 – **Relations simpliste entre diverses structures mathématiques importantes pour la physique (auteur : Max Tegmark)**

Souvent, quand un étudiant arrive dans une classe supérieure, il a surtout appris à calculer, à utiliser des algorithmes mais relativement peu voire pas du tout à raisonner. Pour tous les raisonnements, le support visuel est un outil puissant, et les personnes qui ne voient pas qu'en traçant telle ou telle courbe ou droite la solution apparaît ou qui ne voient pas dans l'espace sont très pénalisées.

Lors des études secondaires, nous manipulons déjà des objets inconnus, mais c'est surtout pour faire des calculs, et quand nous raisonnons sur des objets représentés par des lettres, nous pouvons remplacer ceux-ci visuellement par un nombre réel, un vecteur, etc. À partir d'un certain niveau, nous demandons aux personnes de raisonner sur des structures plus abstraites, et donc de travailler sur des objets inconnus qui sont des éléments d'un ensemble lui-même inconnu, par exemple les éléments d'un groupe quelconque (voir section Théorie des Ensembles page 418). Ce support visuel n'existe alors plus !

Nous demandons ainsi souvent aux étudiants de raisonner, de démontrer des propriétés, mais personne ne leur a jamais appris à raisonner convenablement, à écrire des preuves. Si nous demandons à un étudiant de licence ce qu'est une démonstration, il a très probablement quelque difficulté à répondre. Il peut dire que c'est un texte dans lequel on trouve des mots-clés comme : "donc", "parce que", "si", "si et seulement si", "prenons un x tel que", "supposons que", "cherchons une contradiction", etc. Mais il est incapable de donner la grammaire de ces textes ni même leurs rudiments, et d'ailleurs, ses enseignants, s'ils n'ont pas suivi de cours sur la Théorie de la Démonstration, en seraient probablement incapables aussi.

Pour comprendre cette situation, rappelons que pour parler un enfant n'a pas besoin de connaître la grammaire. Il imite son entourage et cela marche très bien : un enfant de six ans sait utiliser des phrases déjà compliquées quant à la structure grammaticale sans avoir jamais fait de grammaire. La plupart des enseignants ne connaissent pas non plus la grammaire du raisonnement mais, chez eux, le processus d'imitation a bien marché et ils raisonnent correctement. L'expérience de la majorité des enseignants d'université montre que ce processus d'imitation marche bien chez les très bons étudiants, et alors il est suffisant, mais il marche beaucoup moins bien, voire pas du tout, chez beaucoup d'autres.

En cours de traduction de l'anglais

Tant que le degré de complexité est faible (notamment lors d'un raisonnement de type "équationnel"), la grammaire ne sert à rien, mais quand il augmente ou quand on ne comprend pas pourquoi quelque chose est faux, il devient nécessaire de faire un peu de grammaire pour pouvoir progresser. Les enseignants et les étudiants connaissent bien la situation suivante : dans un devoir, le correcteur a barré toute une page d'un grand trait rouge et mis "faux" dans la marge. Quand l'étudiant demande ce qui est faux, le correcteur ne peut que dire des choses du genre "ça n'a aucun rapport avec la démonstration demandée", "rien n'est juste", ..., ce qui n'aide évidemment pas l'étudiant à comprendre. Cela vient en partie, du fait que le texte rédigé par l'étudiant utilise les mots voulus mais dans un ordre plus ou moins aléatoire et qu'on ne peut donner de sens à l'assemblage de ces mots. De plus, l'enseignant n'a pas les outils nécessaires pour pouvoir expliquer ce qui ne va pas. Il faut donc les lui donner !

Ces outils existent mais sont assez récents. La théorie de la démonstration est une branche de la logique mathématique dont l'origine est la crise des fondements : il y a eu un doute sur ce que nous avions le "droit" de faire dans un raisonnement mathématique (voir la "crise des fondements" plus loin). Des paradoxes sont apparus, et il a alors été nécessaire de préciser les règles de démonstration et de vérifier que ces règles ne sont pas contradictoires. Cette théorie

est apparue au début du 20ème siècle, ce qui est très peu puisque l'essentiel des mathématiques enseignées en première moitié de l'université est connu depuis le 16ème-17ème siècle.

5.1.1 La Crise des Fondements

Pour les premiers Grecs, la géométrie était considérée comme la forme la plus haute du savoir, une puissante clé pour les mystères métaphysiques de l'Univers. Elle était plutôt une croyance mystique, et le lien entre le mysticisme et la religion était rendu explicite dans des cultes comme ceux des Pythagoriciens. Aucune culture n'a depuis défié un homme pour avoir découvert un théorème de géométrie ! Plus tard, la mathématique fut considérée comme le modèle d'une connaissance a priori dans la tradition aristotélicienne du rationalisme.

RATIONALISME
VERSUS
EMPIRISME

Le rationalisme est une théorie basée sur l'affirmation que la raison est la source de la connaissance	**L'empirisme est une théorie basée sur l'affirmation que seule l'expérimentation est la source de la connaissance.**
Le rationalisme est la conviction que l'intuition est bonne source d'investigation scientifique	**L'empirisme est la conviction que l'intuition est une mauvaise source d'investigation scientifique**
Le rationalisme affirme que les individus ont un connaissance innée du savoir	**L'empirisme affirme que les individus n'ont pas de connaissances innées du savoir**

L'étonnement des Grecs pour la mathématique ne nous a pas quittés, on le retrouve sous la traditionnelle métaphore des mathématiques comme "Reine des Science". Il s'est renforcé avec les succès spectaculaires des modèles mathématiques dans la science, succès que les Grecs (ignorant même la simple algèbre) n'avaient pas prévus. Depuis la découverte par Isaac Newton du calcul intégral et de la loi du carré inverse de la gravité, à la fin des années 1600, les sciences phénoménales et les plus hautes mathématiques étaient restées en étroite symbiose - au point qu'un formalisme mathématique prédictif était devenu le signe distinctif d'une "science dure".

Après Newton, pendant les deux siècles qui suivirent, la science aspira à ce genre de rigueur et de pureté qui semblaient inhérentes aux mathématiques. La question métaphysique semblait simple : la mathématique possédait une connaissance a priori parfaite, et parmi les sciences, celles qui étaient capables de se mathématiser le plus parfaitement étaient les plus efficaces pour la prédiction des phénomènes. La connaissance parfaite consistait donc dans un formalisme mathématique qui, une fois atteint par la science et embrassant tous les aspects de la réalité, pouvait fonder une connaissance empirique a postériori sur une logique rationnelle a priori. Ce fut dans cet esprit que Marie Jean-Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (philosophe et mathématicien français), entreprit d'imaginer la description de l'Univers entier comme un ensemble d'équations différentielles partielles se résolvant les unes après les autres.

La première faille dans cette image inspiratrice apparut dans la seconde moitié du 19ème siècle, quand Riemann et Lobatchevsky prouvèrent séparément que l'axiome des parallèles d'Euclide pouvait être remplacé par d'autres qui produisaient des géométries "consistantes" (nous reviendrons sur ce terme plus loin). La géométrie de Riemann prenait modèle sur une sphère, celle de Lobatchevsky, sur la rotation d'un hyperboloïde.

L'impact de cette découverte a été obscurci plus tard par de grands chamboulements, mais sur le moment, elle fit un coup de tonnerre dans le monde intellectuel. L'existence de systèmes axiomatiques mutuellement inconsistants, et dont chacun pouvait servir de modèle à l'Univers phénoménal, remettait entièrement en question la relation entre la mathématique et la théorie physique.

Quand on ne connaissait qu'Euclide, il n'y avait qu'une géométrie possible. On pouvait croire que les axiomes d'Euclide (voir la section de Géométrie Euclidienne page 2545) constituaient un genre de connaissance parfaite a priori sur la géométrie dans le monde phénoménal. Mais soudain, nous avons eu trois géométries, embarrassantes pour les subtilités métaphysiques.

Pourquoi aurions-nous à choisir entre les axiomes de la géométrie plane, sphérique et hyperbolique comme descriptions de la géométrie du réel ? Parce que toutes les trois sont consistantes, nous ne pouvons en choisir aucune comme fondement a priori - le choix doit devenir empirique, basé sur leur pouvoir prédictif dans une situation donnée.

Bien sûr, les théoriciens de la physique ont longtemps été habitués à choisir des formalismes pour poser un problème scientifique. Mais il était admis largement, si ce n'est inconsciemment, que la nécessité de procéder ainsi était fonction de l'ignorance humaine, et qu'avec de la logique ou des mathématiques assez bonnes, on pouvait déduire le bon choix à partir de principes premiers, et produire des descriptions a priori de la réalité, qui devaient être confirmées après coup par une vérification empirique.

Cependant, la géométrie euclidienne, considérée pendant plusieurs centaines d'années comme le modèle de la perfection axiomatique des mathématiques, avait été détrônée. Si l'on ne pouvait connaître a priori quelque chose d'aussi fondamental que la géométrie dans l'espace, quel espoir restait-il pour une pure théorie rationnelle qui embrasserait la totalité de la nature ? Psychologiquement, Riemann et Lobatchevsky avaient frappé au coeur de l'entreprise mathématique telle qu'elle avait été conçue jusqu'alors.

De plus, Riemann et Lobatchevsky remettaient la nature de l'intuition mathématique en question. Il avait été facile de croire implicitement que l'intuition mathématique était une forme

En cours de traduction de l'anglais

de perception - une façon d'entrevoir le monde platonicien derrière la réalité. Mais avec deux autres géométries qui bousculaient celle d'Euclide, personne ne pouvait plus être sûr de savoir à quoi le monde ressemblait.

Les mathématiciens répondirent à ce double problème avec un excès de rigueur, en essayant d'appliquer la méthode axiomatique à toutes la mathématique. Dans la période pré-axiomatique, les preuves reposaient souvent sur des intuitions communément admises de la "réalité" mathématique, qui ne pouvaient plus être considérées automatiquement comme valides.

La nouvelle façon de penser la mathématique conduisait à une série de succès spectaculaires. Pourtant cela avait aussi un prix. La méthode axiomatique rendait la connexion entre la mathématique et la réalité phénoménale toujours plus étroite. En même temps, des découvertes suggéraient que les axiomes mathématiques qui semblaient être consistants avec l'expérience phénoménale pouvaient entraîner de vertigineuses contradictions avec cette expérience.

La majorité des mathématiciens devinrent rapidement des "formalistes", soutenant que la mathématique pure ne pouvait qu'être considérées philosophiquement comme une sorte de jeu élaboré qui se jouait avec des signes sur le papier (c'est la théorie qui sous-tend la prophétique qualification des mathématiques de "système à contenu nul" par Robert Heinlein). La croyance "platonicienne" en la réalité des objets mathématiques, à l'ancienne manière, semblait bonne pour la poubelle, malgré le fait que les mathématiciens continuaient à se sentir comme les platoniciens durant le processus de découverte des mathématiques.

Philosophiquement, donc, la méthode axiomatique conduisait la plupart des mathématiciens à abandonner les croyances antérieures en la spécificité métaphysique des mathématiques. Elle produisit aussi la rupture contemporaine entre la mathématique pure et appliquée. La plupart des grands mathématiciens du début de la période moderne - Newton, Leibniz, Fourier, Gauss et les autres - s'occupaient aussi de science phénoménale. La méthode axiomatique avait couvé l'idée moderne du mathématicien pur comme un super esthète, insoucieux de la physique. Ironiquement, le formalisme donnait aux purs mathématiciens un mauvais penchant à l'attitude platonicienne. Les chercheurs en mathématiques appliquées cessèrent de côtoyer les physiciens et apprirent à se mettre à leur traîne.

Ceci nous emmène au début du 20ème siècle. Pour la minorité assiégée des platoniciens, le pire était encore à venir. Cantor, Frege, Russell et Whitehead montrèrent que toute la mathématique pure pouvait être construite sur le simple fondement axiomatique de la théorie des ensembles. Cela convenait parfaitement aux formalistes : la mathématique se réunifiait, du moins en principe, à partir d'un faisceau de petits jeux détachés d'un grand. Les platoniciens aussi étaient satisfaits, s'il en survenait une grande structure, clé de voûte consistante pour toute la mathématique, la spécificité métaphysique des mathématiques pouvait encore être sauvée.

D'une façon négative, pourtant, un platonicien eut le dernier mot. Kurt Gödel mit son grain de sable dans le programme formaliste d'axiomatisation quand il démontra que tout système d'axiomes assez puissant pour inclure les entiers devait être soit inconsistant (contenir des contradictions) soit incomplet (trop faible pour décider de la justesse ou de la fausseté de certaines affirmations du système). Et c'est plus ou moins où en sont les choses aujourd'hui. Les mathématiciens savent que de nombreuses tentatives pour faire avancer la mathématique comme une connaissance a priori de l'Univers doivent se heurter à de nombreux paradoxes et à l'impossibilité de décider quel système axiomatique décrit la mathématique réelle. Ils ont été réduits

En cours de traduction de l'anglais

à espérer que les axiomatisations standards ne soient pas inconsistantes mais incomplètes, et à se demander anxieusement quelles contradictions ou quels théorèmes indémontrables attendent d'être découverts ailleurs.

Cependant, sur le front de l'empirisme, la mathématique était toujours un succès spectaculaire en tant qu'outil de construction théorique. Les grands succès de la physique du 20ème siècle (la relativité générale et la physique quantique) poussaient si loin hors du royaume de l'intuition physique, qu'ils ne pouvaient être compris qu'en méditant profondément sur leurs formalismes mathématiques, et en prolongeant leurs conclusions logiques, même lorsque ces conclusions semblaient sauvagement bizarres. Quelle ironie ! Au moment même où la perception mathématique en venait à paraître toujours moins fiable dans la mathématique pure, elle devenait toujours plus indispensable dans les sciences phénoménales.

À l'opposé de cet arrière-plan, l'applicabilité des mathématiques à la science phénoménale pose un problème plus épineux qu'il n'apparaît d'abord. Le rapport entre les modèles mathématiques et la prédiction des phénomènes est complexe, pas seulement dans la pratique mais dans le principe. D'autant plus complexe que, comme nous le savons maintenant, il y a des façons d'axiomatiser la mathématique qui s'excluent !

Mais pourquoi existe-t-il seulement de bons choix de modèle mathématique ? C'est à dire, pourquoi y a-t-il un formalisme mathématique, par exemple pour la physique quantique, si productif qu'il prédit réellement la découverte de nouvelles particules observables ?

Pour répondre à cette question nous observerons qu'elle peut, aussi bien, fonctionner comme une sorte de définition. Pour beaucoup de systèmes phénoménaux, de tels formalismes prédictifs exacts n'ont pas été trouvés, et aucun ne semble plausible. Les poètes aiment marmonner sur le coeur des hommes, mais on peut trouver des exemples plus ordinaires : le climat, où le comportement d'une économie supérieure à celle d'un village, par exemple - systèmes si chaotiquement interdépendants que la prédiction exacte est effectivement impossible (pas seulement dans les faits mais en principe).

En cours de traduction de l'anglais

5.1.2 Paradoxes

Dès l'antiquité, certains logiciens avaient constaté la présence de nombreux paradoxes au sein de la rationalité. En fait, nous pouvons dire que malgré leur nombre, ces paradoxes ne sont que les illustrations d'un petit nombre de structures paradoxales. Attardons-nous à exposer à titre de culture générale les plus connus qui constituent la classe des "propositions indécidables".

✍**Exemple :**

Le paradoxe de la classe des classes (Russell) consiste en l'existence de deux types de classes : celles qui se contiennent elles-mêmes (ou classes réflexives : la classe des ensembles non-vides, la classe des classes,...) et celles qui ne se contiennent pas elles-mêmes (ou classes irréflexives : la classe des travaux à rendre, la classe des oranges sanguines, ...). La question posée est la suivante : la classe des classes irréflexives est-elle elle-même réflexive ou irréflexive ? Si elle est réflexive, elle se contient et se trouve rangée dans la classe des classes irréflexives qu'elle constitue, ce qui est contradictoire. Si elle est irréflexive, elle doit figurer dans la classe des classes irréflexives qu'elle constitue et devient ipso facto réflexive, nous sommes face à une nouvelle contradiction.

Ce paradoxe de Russell est souvent connu principalement sous les deux variantes suivantes :

- Est-ce que l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent eux-mêmes se contient-il lui-même ?

  La réponse étant : Si "Oui", alors "Non" et si "Non" alors "Oui"...

  Remarque

  Une version religieuse amusante de ce paradoxe est la suivante : Le Tout-Puissant peut-il créer une entité plus puissante que lui ? Si non, alors il n'est pas tout-puissant ! Si oui, alors il n'est pas tout-puissant...

- Ceux qui ne rasent pas eux-mêmes sont rasés par le barbier. Donc qui rase le barbier ?

  La réponse étant : Si le barbier se rase lui-même, il entre dans la catégorie des personnes qui se rasent eux-même dès lors il ne rase pas lui-même parce qu'il est le barbier... Mais s'il ne se rase lui-même pas, il entre dans la catégorie des personnes rasées par le barbier. .. La réponse est indécidable ...

Le paradoxe de Russell remet en cause la notion d'ensemble comme collection définie par une propriété commune ! ! En un seul coup il détruit la logique (proposition indécidable) et la théorie des ensembles... car le concept d'ensemble de tous les ensembles est une impossibilité. L'autoréférence est au centre de ce problème de logique !

Formellement le paradoxe de Russell s'énonce et se démontre en seulement quelques lignes :

$$\begin{gathered} S = \{x : x \notin x\} \\ S \in S \Longleftrightarrow S \notin S \end{gathered} \tag{5.1.1}$$

Ce paradoxe revient aussi à se poser la question si une question mathématique correctement formulée (logique) admet nécessairement une réponse ? Autrement, dit, tout énoncé mathématique est-il prouvable... et c'est Gödel qui bien des années après l'énoncé du paradoxe de Russell prouva mathématiquement que la réponse est Non ! ! ! ! ! ! En d'autres termes, il y aura toujours des questions sans réponses car tout système (langue vivant ou outil mathématique) basé sur lui-même est nécessairement incomplet ! C'est le fameux Théorème d'Incomplétude de Gödel ! C'est la fameuse conséquence du théorème d'incomplétude de Gödel qui est techniquement écrit comme suit (et que nous devrons prouver) :

$$\exists P : \quad \neg \text{Dem}(P) \wedge \neg \text{Dem}(\neg P) \tag{5.1.2}$$

cela signifie que pour une proposition P, quel que soit le jeu d'axiomes, il existe une proposition que nous ne pourrons jamais prouver comme étant vraie ou fausse.

Voyons une autre application du paradoxe de Russell :

✍**Exemple :**

Le paradoxe du bibliothécaire (Gonseth) consiste en l'existence d'une bibliothèque où il existe deux types de catalogues. Ceux qui se mentionnent eux-mêmes et ceux qui ne se mentionnent pas. Un bibliothécaire doit dresser le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes. Arrivé au terme de son travail, notre bibliothécaire se demande s'il convient ou non de mentionner le catalogue qu'il est précisément en train de rédiger. A ce moment, il est frappé de perplexité. S'il ne le mentionne pas, ce catalogue sera un catalogue qui ne se mentionne pas et qui devra dès lors figurer dans la liste des catalogues ne se mentionnant pas eux-mêmes. D'un autre côté, s'il le mentionne, ce catalogue deviendra un catalogue qui se mentionne et qui ne doit donc pas figurer dans ce catalogue, puisque celui-ci est le catalogue des catalogues qui ne se mentionnent pas.

Une variante de ce paradoxe est le bien connu "paradox du menteur" :

✍**Exemple :**

Définissons provisoirement le mensonge comme l'action de formuler une proposition fausse. Le poète crétois Epiménide affirme : "Tous les Crétois sont des menteurs", soit la proposition P. Comment décider de la valeur de vérité de P ? Si P est vraie, comme Epiménide est Crétois, P doit être fausse. Il faut donc que P soit fausse pour pouvoir être vraie, ce qui est contradictoire. P est donc fausse. Remarquons qu'on ne peut pas en déduire, comme dans le véritable paradoxe du menteur, que P doit aussi être vraie.

Comme l'aurait fait comporendre Ludwig Wittgenstein aux logicien, ces paradoxes montrent qu finalement les mathématiques sont un assez bon outil pour montrer la logique mais pas pour

En l' anglais

en parler. Donner avec les mathématiques un existence indépendante à ses entités algébriques est de la folie et c'est ce qui produit des monstres comme l'ensemble de tous les ensembles... La logique est vide et elle ne peut dire la réalité, elle se restreindre à être juste une image de celle-ci.

En cours de traduction de l' anglais

5.1.2.1 Raisonnement Hypothético-Déductif

Le raisonnement hypothético-déductif est, nous le savons, la capacité qu'a l'apprenant de déduire des conclusions à partir de pures hypothèses et pas seulement d'une observation réelle. C'est un processus de réflexion qui tente de dégager une explication causale d'un phénomène quelconque (nous y reviendrons lors de nos premiers pas en physique). L'apprenant qui utilise ce type de raisonnement commence par formuler une hypothèse et essaie ensuite de confirmer ou d'infirmer son hypothèse selon le schéma synoptique ci-dessous :

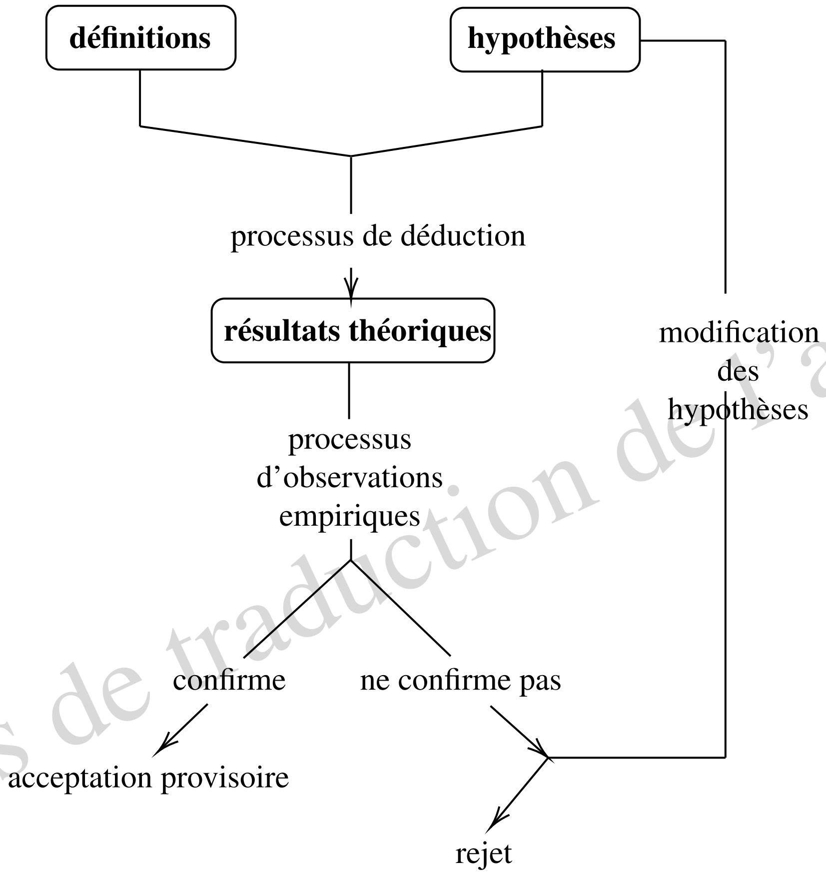


FIG. 5.2 – **Diagramme synoptique du raisonnement hypothético-déductif**

En cours de traduction de l'anglais

La procédure déductive consiste à tenir pour vrai, à titre provisoire, cette proposition première que nous appelons, en logique le "prédicat" (voir plus bas) et à en tirer toutes les conséquences logiquement nécessaires, c'est-à-dire à en rechercher les implications.

✍**Exemple :**

Soit la proposition P : "X est un homme", elle implique la proposition suivante Q : "X est mortel".

L'expression $P \Rightarrow Q$ (si c'est un homme il est nécessairement mortel) est un implication prédicative (d'où le terme "prédicat"). Il n'y a pas dans cet exemple de cas où nous puissions énoncer P sans Q. Cet exemple est celui d'une implication stricte, telle que nous la trouvons dans le "syllogisme" (figure logique du raisonnement).

En logique, le "syllogisme" est un raisonnement logique mettant en relation au moins trois propositions : deux ou plus d'entre elles, appelées "prémisses", conduisent à une "conclusion".

Un exemple très connu de syllogisme est : «*Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme ; donc Socrate est mortel*» : les deux prémisses (dites "prémisse majeure" et "prémisse mineure") sont des propositions données et supposées vraies, le syllogisme permettant d'établir la validité formelle de la conclusion, qui est nécessairement vraie si les prémisses sont vraies.

Beaucoup d'humains même en ce début du 3ème millénaire ont une dissonance cognitive intéressante relativement aux propositions. Typiquement ils vont affirmer que *Toute chose a un créateur*, *Dieu est CE créateur* mais que Dieu n'a pas de créateur.

Remarque

Des spécialistes auraient montré que le raisonnement hypothético-déductif s'élabore progressivement chez l'enfant, à partir de 6-7ans, et que ce type de raisonnement n'est utilisé systématiquement, en partant d'une fonction propositionnelle stricte qu'à partir de 11-12 ans.

5.1.3 Calcul propositionnel

En cours de l'anglais

Définissons d'abord ce qu'est la "logique" dans son sens contemporain car sinon en utilisant l'ancienne définition nous pouvons démontrer que les licornes existent (comme nous le montrerons plus loin !).

Définition (#5.1.7) : La "logique" est l'étude scientifique, notamment formelle, des standards de vérité (c'est-à-dire du raisonnement correct) dans un cadre axiomatique donné. La "logique formelle", qui est une sous-famille, est la science des inférences ou vérités logiques déductivement valables. Elle étudie comment les conclusions découlent des prémisses en raison de la seule structure des arguments, indépendamment de leur sujet et de leur contenu. La "logique informelle", qui est une autre sous-famille, est associée aux erreurs informelles, à la pensée critique et à la théorie de l'argumentation.

Le "calcul propositionnel" (ou "logique propositionnelle") est un préliminaire absolument indispensable pour aborder une formation en sciences, philosophie, droit, politique, économie, etc. Ce type de calcul autorise des procédures de décisions ou tests. Ceux-ci permettent de déterminer dans quel cas une expression (proposition) logique est vraie et en particulier si elle est

toujours vraie.

Définitions (#5.1.8) :

D1. Une expression toujours vraie quel que soit le contenu linguistique des variables qui la composent est appelée une "expression valide", une "tautologie" ou une "loi de la logique propositionnelle".

D2. Une expression toujours fausse est appelée une "contradiction" ou "antilogie".

D3. Une expression qui est parfois vraie, parfois fausse est appelée une "expression contingente".

D4. Nous appelons "assertion" une expression dont nous pouvons dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse.

D5. Le "langage objet" est le langage utilisé pour écrire les expressions logiques.

D6. Le "métalangage" est le langage utilisé pour parler du langage objet dans la langue courante.

de l’anglais

Remarques

R1. Il existe des expressions qui ne sont effectivement pas des assertions. Par exemple, l’énoncé : "cet énoncé est faux", est un paradoxe qui ne peut être ni vrai, ni faux.

R2. Soit une expression logique A. Si celle-ci est une tautologie, nous la notons fréquemment $\models A$ et si l’expression est une contradiction, nous la notons $A \models$.

R3. En mathématiques on peut chercher à démontrer de façon générale qu’une assertion est vraie mais pas qu’elle est fausse (le cas échéant on donne juste un exemple).

En c

5.1.3.1 Propositions (prémisses)

Définition (#5.1.9) : En logique, une "proposition" est une affirmation qui a un sens. Cela veut dire que nous pouvons dire sans ambiguïté si cette affirmation est vraie (V) ou fausse (F). C'est ce que nous appelons le "principe du tiers exclu".

✍**Exemples :**

E1. "Je mens" n'est pas une proposition. Si nous supposons que cette affirmation est vraie, elle est une affirmation de sa propre invalidité, donc nous devrions conclure qu'elle est fausse. Mais si nous supposons qu'elle est fausse, alors l'auteur de cette affirmation ne ment pas, donc il dit la vérité, aussi la proposition serait vraie.

E2. Un autre exemple rigolo est :

- Tout a été créé par un créateur
- Dieu est un créateur
- Dieu n'a pas de créateur

C'est une solution qui échoue car elle viole ses propres prémisses...

Définition (#5.1.10) : Une proposition en logique binaire (où les propositions sont soit vraies, soit fausses) n'est donc jamais vraie et fausse à la fois. C'est que nous appelons le "principe de non-contradiction".

Ainsi, une propriété sur l'ensemble E des propositions est une application P de E dans l'ensemble des "valeurs de vérité Vraie, Faux" $\{T, F\}$:

$$P : E \mapsto \{T, F\} \tag{5.1.3}$$

Nous parlons de "sous-ensemble associé", lorsque la proposition engendre uniquement une partie E' de E et inversement.

✍**Exemple :**

Dans $E = \mathbb{N}$, si $P(x)$ s'énonce "x est pair", alors $P = \{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$ ce qui est bien seulement un sous-ensemble associé de E mais de même Cardinal (voir la section de Théorie des Ensembles page 386).

En cours de traduction anglais

Définition (#5.1.11) : Soit P une propriété sur l'ensemble E. Une propriété Q sur E est une "négation" de P si et seulement si, pour tout $x \in E$:

- $Q(x)$ est F (faux) si $P(x)$ est V (vrai)
- $Q(x)$ est V (vrai) si $P(x)$ est F (faux)

Nous pouvons rassembler ces conditions dans une table dite "table de vérité" :

P	Q
V	F
F	V

TAB. 5.1 – Table de vérité des valeurs

Table que nous pouvons aussi trouver ou donc aussi écrire sous la forme plus explicite suivante :

P	Q
Vrai	Faux
Faux	Vrai

TAB. 5.2 – Table de vérité des valeurs explicites

ou encore sous forme binaire :

P	Q
1	0
0	1

TAB. 5.3 – Table de vérité des valeurs binaires

En cours de traduction de l'anglais

En d'autres termes, P et Q ont toujours des valeurs de vérité contraires. Nous noterons ce genre d'énoncé "Q est une négation de P" :

$$Q \Leftrightarrow \neg P \qquad (5.1.4)$$

où le symbole $\neg$ est le "connecteur de négation".

Remarque

Les expressions doivent être des expressions bien formées (souvent abrégé "EBF"). Par définition, toute variable est une expression bien formée, alors $\neg P$ est aussi une expression bien formée. Si P, Q sont des expressions bien formées, alors $P \Rightarrow Q$ est une expression bien formée (l'expression "je mens" n'est pas bien formée car elle se contredit elle-même).

5.1.3.2 Connecteurs

Il y a d'autres types de connecteurs en logique :

Définition (#5.1.12) : Soient P et Q deux propriétés définies sur le même ensemble E. $P \vee Q$ (lire "P `OU` Q") est une propriété sur E définie par :

- $P \vee Q$ est vraie si au moins l'une des propriétés P ou Q est vraie
- $P \vee Q$ est fausse sinon

Nous pouvons créer la table de vérité du "connecteur `OU`" ou "connecteur de disjonction" $\vee$:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TAB. 5.4 – Table de vérité `OU`

Il devrait être facile de se convaincre que, si les parties P, Q de E sont respectivement associées aux propriétés P, Q que $P \cup Q$ (voir section de Théorie des Ensembles page 381) est associé à $P \vee Q$:

$$\begin{aligned} P &\leftrightarrow P \\ Q &\leftrightarrow Q \\ P \vee Q &\leftrightarrow P \cup Q \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Le connecteur $\vee$ est associatif. Pour s'en convaincre, il suffit de faire une table de vérité où nous vérifions que :

$$[P \vee (Q \vee R)] = [(P \vee Q) \vee R] \tag{5.1.6}$$

Définition (#5.1.13) : Il y a aussi le "connecteur `AND`" aussi nommé "connecteur de conjonction" $\wedge$ pour quel que soient P, Q deux propriétés définies sur E, $P \wedge Q$ est une propriété sur E définie par E :

- $P \wedge Q$ est vraie si toutes les deux propriétés P, Q sont vraies (le syllogisme très connu : Tous les hommes sont mortels, Socrate est un homme donc Socrate est mortel en est un exemple fameux).
- $P \wedge Q$ est fausse sinon

Nous pouvons créer la table de vérité du "connecteur `ET`" ou "connecteur de conjonction" $\wedge$:

En cours de traduction de l'anglais

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TAB. 5.5 – **Table de vérité** ET

Il est également facile de se convaincre que, si les parties P, Q de E sont respectivement associées aux propriétés P, Q que $P \cap Q$ (voir section de Théorie des Ensembles page 393) est associé à $P \wedge Q$:

$$\begin{gathered} P \leftrightarrow P \\ Q \leftrightarrow Q \\ P \wedge Q \leftrightarrow P \cap Q \end{gathered} \tag{5.1.7}$$

Le connecteur $\wedge$ est associatif. Pour s'en convaincre, il suffit aussi de faire une table de vérité où nous vérifions que :

$$[P \wedge (Q \wedge R)] = [(P \wedge Q) \wedge R] \tag{5.1.8}$$

Les connecteurs $\vee, \wedge$ sont distributifs l'un sur l'autre. A l'aide d'une simple table de vérité, nous prouvons que :

$$[P \vee (Q \wedge R)] = [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)] \tag{5.1.9}$$

ainsi que :

$$[P \wedge (Q \vee R)] = [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)] \tag{5.1.10}$$

Définition (#5.1.14) : L'opérateur de "négation" $\neg$ transforme une valeur Vraie en une valeur Fausse tel que :

$$\neg V = F \tag{5.1.11}$$

$$\neg F = V \tag{5.1.12}$$

Ainsi, en logique, la négation, également appelée "complément logique",est une opération qui transforme une proposition P en une autre proposition "non P", notée $\neg P$ ou parfois $\bar{P}$, qui est interprétée intuitivement étant Vraie lorsque P est fausse et Faux lorsque P est Vraie. La négation est alors une opération logique unaire (c'est-à-dire avec avec une seul argument).

Comme nous le prouverons en détails dans la section de Systèmes Logiques à la page **??** (en utilisant une simple table de vérité), les "loi de De Morgan" fournissent un moyen de changer une disjonction et une conjonction :

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow [(\neg P) \vee (\neg Q)] \tag{5.1.13}$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow [(\neg P) \wedge (\neg Q)] \tag{5.1.14}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Pour voir les détails de tous les opérateurs logiques, le lecteur devra se rendre dans la section de Systèmes Logiques à la page **??** où l'identité, la double négation, l'idempotence, l'associativité, la distributivité, les relations de De Morgan sont présentées plus formellement.

Revenons maintenant sur le "connecteur d'implication logique" appelé aussi parfois le "conditionnel" noté $\Rightarrow$.

Remarque

Dans certains ouvrages sur le calcul propositionnel, ce connecteur est noté " $\supset$" et dans le cadre de la théorie de la démonstration nous lui préférons souvent le symbole "$\rightarrow$".

Soient P, Q deux propriétés sur E. $P \Rightarrow Q$ est une propriété sur E définie par :

P1. $P \Rightarrow Q$ est Faux si P est Vraie et Q est Faux.

P2. $P \Rightarrow Q$ est Vraie sinon.

En d'autres termes, P implique logiquement Q signifie que Q est vraie pour toute évaluation pour laquelle P est vraie. L'implication représente donc le "si... alors.."

Si nous écrivons la table de vérité de l'implication (attention à l'avant-dernière ligne ! ! !) :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TAB. 5.6 – **Table de vérité de l'implication**

Si $P \Rightarrow Q$, nous pouvons dire que pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie (effectivement l'implication sera vraie si P est vraie ou fausse selon la table de vérité). Donc P est une condition suffisante de Q (mais non nécessaire !). D'un autre côté, $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neq Q \Rightarrow \neq P$ (nous parlons alors de "contraposée"). Donc, si Q est fausse, il est impossible que P soit vraie (pour que l'implication reste vraie bien sûr !). Donc finalement Q est une condition nécessaire de P.

En d'autres termes, une proposition fausse implique que toute conclusion sera toujours vraie. Ceci est nommé un "sophisme informel" et est un concept très important dans les tests statistiques d'hypothèses nulles (voir la section Statistiques page 928). Si la proposition est vraie, l'implication ne peut être vraie que si le résultat est vrai !

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

À proprement parler, la table ci-dessus doit utiliser le symbole $\rightarrow$ et le symbole $\Rightarrow$ doit être réservé uniquement pour les implications vraies !

✍**Exemple :**

Soit la proposition : "Si tu obtiens ton diplôme, je t'achète un ordinateur".

Parmi tous les cas, un seul correspond à une promesse non tenue : celui où l'enfant à son diplôme, et n'a toujours pas d'ordinateur (deuxième ligne dans le tableau ci-dessus).

Et le cas où il n'a pas le diplôme, mais reçoit quand même un ordinateur ? Il est possible qu'il ait été longtemps malade et a raté un semestre, et le père a le droit d'être bon.

Que signifie cette promesse, que nous écrirons aussi :

"Tu as ton diplôme" $\Rightarrow$ " je t'achète un ordinateur" ?

Exactement ceci :

- Si tu as ton diplôme, c'est sûr, je t'achète un ordinateur (je ne peux pas ne pas l'acheter)
- Si tu n'as pas ton diplôme, je n'ai rien dit

De toute proposition fausse nous pouvons déduire toute proposition (deux dernières lignes) !

Remarque

L'erreur informelle est très intéressante à appliquer dans le cas de débats sur les réseaux sociaux. En effet, si quelqu'un vous demande de prouver votre prémisse (hypothèse nulle) qu'il suppose fausse, il ne comprend rien à la logique, car il doit savoir que, de toute fausse prémisse (hypothèse nulle), vous pouvez toujours avoir une conclusion vraie (vous ne rejetez pas l'hypothèse nulle) quel que soit le raisonnement ! Ce que la personne doit faire, c'est supposer que votre hypothèse nulle est vraie et avoir trouvé au moins un exemple - ou plusieurs dans le meilleur des cas - la rendant significativement fausse en ayant suivi la méthode scientifique (nous rejetons l'hypothèse nulle en faveur de l'hypothèse alternative). C'est ainsi que la science fonctionne et le fait que cela n'est pas évident explique pourquoi tant de gens perdent leur temps à débattre dans les réseaux sociaux en utilisant des arguments biaisés (erreur informelle).

✍**Exemple :**

C'est un exemple plutôt anecdotique : dans un cours de Russell portant sur le fait que d'une proposition fausse, toute proposition peut être déduite, un étudiant lui posa la question suivante :

- "Prétendez-vous que de $2+2=5$, il s'ensuit que vous êtes le pape ? "
- "Oui", répondit Russell.
- ""Et pourriez-vous le prouver ? !", demanda l'étudiant sceptique-
- "Certainement", répliqua Russell, qui proposa sur le champ la démonstration suivante.
  1. Supposons que $2+2=5$.
  2. Soustrayons 2 de chaque membre de l'égalité, nous obtenons $2=3$.
  3. Par symétrie $2=1$.
  4. Maintenant le pape et moi sommes deux. Puisque $2=1$, le pape et moi sommes un. Par suite, je suis le pape !

Sur ce ...

Le connecteur d'implication est essentiel en mathématiques, philosophie, etc. C'est un des fondements de toute démonstration, preuve ou déduction. Le connecteur d'implication a comme propriétés (vérifiables à l'aide de la table de vérité ci-dessous) :

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow [(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)] \tag{5.1.15}$$
$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow [(\neg P) \vee Q] \tag{5.1.16}$$

Conséquence de la dernière propriété (à nouveau vérifiable par une table de vérité) :

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [P \wedge (\neg Q)] \tag{5.1.17}$$

Le "connecteur logique d'équivalence" ou "connecteur biconditionnel" noté la majorité du temps "$\Leftrightarrow$" ou parfois "$\leftrightarrow$" signifie par définition :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)] \tag{5.1.18}$$

En d'autres termes, la première expression a la même valeur pour toute évaluation de la deuxième. Il est de même de la relation suivante qui est plus "atomique" puisque l'équivalence logique se réduit uniquement à l'utilisation et $\wedge, \vee$ et de la négation $\neg$ (combinaison de ce que nous avons vu plus haut) :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] \tag{5.1.19}$$

Lorsque nous démontrons une telle équivalence de deux expressions nous disons alors que : "nous prouvons que l'équivalence est une tautologie".

Une "condition nécessaire et suffisante " exige que les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (cette dernière pouvant également s'écrire $P \Leftarrow Q$) soient vérifiées. La première implication

En cours de traduction

suggère que P est une condition suffisante pour Q, tandis que la seconde implication suggère que Q est une condition nécessaire pour P. Cela s'exprime par "Q est nécessaire et suffisant pour P", "P si et seulement si Q", ou $Q \Leftrightarrow P$.

La table de vérité de l'équivalence est donnée logiquement par :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$Q \Leftrightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	T	F	F
F	F	V	V	V

TAB. 5.7 – **Table de vérité de l'équivalence logique**

$P \Leftrightarrow Q$ signifie bien (lorsqu'il est vrai !) que "P et Q ont toujours la même valeur de vérité" ou encore "P et Q sont équivalents". C'est vrai si P et Q ont même valeur, faux dans tout cas contraire.

Bien évidemment (c'est une tautologie) :

$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q) \quad (5.1.20)$$

La relation $P \Leftrightarrow Q$ équivaut donc à ce que P soit une condition nécessaire et suffisante de Q et à ce que Q soit une condition nécessaire et suffisante de P.

Remarque

À proprement parler, la table ci-dessus devrait utiliser le symbole $\leftrightarrow$ et le symbole $\Leftrightarrow$ ne devrait être réservé que pour les équivalences vraies.

La conclusion, est que les conditions de type "nécessaire, suffisant, nécessaire et suffisant" peuvent être reformulées avec les termes "seulement si", "si", "si et seulement si".

Ainsi :

1. $P \Rightarrow Q$ traduit le fait que Q est une condition nécessaire pour P ou dit autrement, P est Vraie seulement si Q est Vraie (dans la table de vérité, lorsque $P \Rightarrow Q$ prend la valeur V on constate bien que P vaut V seulement si Q vaut V aussi). L'affirmation selon laquelle Q est nécessaire pour P est familièrement équivalente à "P ne peut être vrai que si Q est vrai" ou "si Q est faux, alors P est faux".

2. $P \Leftarrow Q$ ou ce qui revient au même $Q \Rightarrow P$ traduit le fait que Q est une condition suffisante pour P ou dit autrement, P est Vraie si Q est Vraie (dans la table de vérité, lorsque $Q \Rightarrow P$ prend la valeur V on constate bien que P vaut V si Q vaut V aussi). Si Q est suffisant pour P, alors savoir que Q est vrai est une raison suffisante pour conclure que P est vrai ; cependant, savoir que Q est faux ne répond pas à un besoin minimal pour conclure que P est faux.

3. $P \Leftrightarrow Q$ traduit le fait que Q est une condition nécessaire et suffisante pour P ou dit autrement, P est Vraie si et seulement si Q est Vraie (dans la table de vérité, lorsque

En cours de rédaction de l'anglais

equation prend la valeur V on constate bien que P vaut V si Q vaut V et si et seulement si Q vaut V).

Remarque

L'expression "si et seulement si" correspond donc a une équivalence logique et ne peut être utilisée que pour décrire une bi-implication ! !

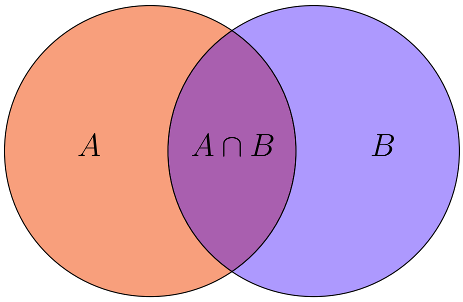
✍**Exemples :**

E1. Pour les nombres entiers supérieurs à deux, être impair est nécessaire pour être premier, puisque deux est le seul nombre entier qui est à la fois pair et premier.

E2. « Jean est un roi » implique que Jean est un homme. Ainsi, savoir que Jean est un roi est suffisant pour savoir qu'il est un homme.

E3. Le fait qu'un nombre soit divisible par 4 est suffisant (mais pas nécessaire) pour qu'il soit pair, mais le fait qu'un nombre soit divisible par 2 est à la fois suffisant et nécessaire pour qu'il soit pair.

E4. Être dans la région violette sur la figure ci-dessous est suffisant pour être dans A, mais pas nécessaire. Être dans A est nécessaire pour être dans la région violette, mais pas suffisant. Être dans A et être dans B est nécessaire et suffisant pour être dans la région violette.



La première étape du calcul propositionnel est donc la formalisation des énoncés du langage naturel. Pour réaliser ce travail, le calcul propositionnel fournit finalement trois types d'outils :

1. Les "variables propositionnelles" (P, Q, R,...) symbolisent des propositions simples quelconques. Si la même variable apparaît plusieurs fois, elle symbolise chaque fois la même proposition.
2. Les Les cinq opérateurs logiques : $\neg, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$.
3. Les signes de ponctuation se réduisent aux seules parenthèses ouvrante et fermante qui organisent la lecture de manière à éviter toute ambiguïté.

Voici un tableau récapitulatif :

Description	Symbole	Utilité
La "négation" est un opérateur qui ne porte que sur une proposition ; il est unaire et monadique. "*Il ne pleut pas*" s'écrit $\neg P$. Cet énoncé est vrai si et seulement si P est faux (dans ce cas s'il est faux qu'il pleut !). L'usage classique de la négation est caractérisé par la loi de double négation : $\neg\neg P$ est équivalent à P.	$\neg$	$\neg P$
La "conjection" ou "produit logique" est un opérateur binaire ; elle met en relation deux propositions. "*Tout homme est mortel ET Ma voiture perd de l'huile*" s'écrit $P \wedge Q$. Cette dernière epression est vrai si et seulement si P vraie et Q est vraie.	$\wedge$	$P \wedge Q$
La "disjonction" ou "somme logique" est, elle aussi, un opérateur binaire. $P \vee Q$ est vraie si et seulement si P est vraie OU Q est vraie ou les deux sont vraies. Nous pouvons comprendre le OU de deux façons : soit de manière inclusive, soit de manière exclusive. Dans le premier cas $P \vee Q$ est vrai si P est vraie, si Q est vraie ou si P et Q sont toutes deux vraies. Dans le second cas, $P \vee Q$ est vraie si P est vraie ou si Q vraie mais pas si les deux le sont. La disjonction du calcul propositionnel est le OU inclusif et on donne au OU exclusif, c'est-à-dire le XOR, le nom "alternative".	$\vee$	$P \vee Q$
"L'implication" ou "inférence" est également un opérateur binaire. Elle correspond, en gros, au schéma linguistique "*Si ... alors ...*". "*Si j'ai le temps, j'irai au cinéma*" sera noté $P \Rightarrow Q$. Cette dernière relation est faussi P est vraie et Q est fausse. Si le conséquent (ici Q) est vraie, l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie. Lorsque l'antécédent (ici P) est faux, l'implication est toujours vraie ! Cette dernière remarque peut être comprise si l'on se réfère à des énoncés de type : "*Si on pouvait mettre Paris en bouteille, on utiliserait la tour Eiffel comme bouchon*". En résumé, une implication est fausse si et seulement si son antécédente est vraie et son conséquent est fausse.	$\Rightarrow$	$P \Rightarrow Q$
La "bi-implication" ou "equivalence" $\Rightarrow$ est, elle aussi, binaire : elle symbolise les expressions "... si et seulement si..." et "... est équivalent à..." L'équivalence entre deux propositions est vraie si celles-ci ont la même valeur de vérité. La bi-implication exprime donc aussi une forme d'identité et c'est pourquoi elle est souvent utilisée dans les définitions.	$\Leftrightarrow$	$P \Leftrightarrow Q$

TAB. 5.8 – **Récapitulatif des opérateurs**

En cours de traduction de l'anglais

Et la table de vérité résumée correspondante :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg P$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

TAB. 5.9 – **Table de vérité des opérateurs logiques principaux**

Le lecteur peut trouver parfois chez certains auteurs qui n'aiment pas trop utiliser le langage

naturel dans leurs livres (...) le symbole "$\therefore$" placé parfois devant une conséquence logique, telle que la conclusion d'un syllogisme. Le symbole se compose de trois points placés dans un triangle à l'endroit et qui doit être lu comme le mot "*donc*". Nous pouvons également utiliser le symbole "$\because$", qui doit être lu comme le mot "*parce que*".

Exemple :

$\because$ Tous les humains sont mortels.
$\because$ Socrates est un humain.
$\therefore$ Socrates est mortel.

Dans ce livre, nous éviterons toutefois d'utiliser cette notation car les ingénieurs ne l'utilisent pas beaucoup.

Il est possible d'établir des équivalences entre les opérateurs présentés plus haut. Nous avons déjà vu comment le biconditionnel pouvait se définir comme un produit de conditionnels réciproques, voyons maintenant d'autres équivalences :

$$\begin{aligned}(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)\\ (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q)\\ (P \vee Q) &\Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow Q)\\ (P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow \neg Q)\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

En cours de rédaction de l' anglais

Remarque

Les opérateurs classiques $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ peuvent donc être définis à l'aide des opérateurs canoniques $\neg, \Rightarrow$ grâce aux lois d'équivalences entre opérateurs.

Sont à noter également les deux relations de De Morgan (voir la section d'Algèbre Booléenne page **??** pour la démonstration) :

$$\begin{aligned}\neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)\\ \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

qui permettent de transformer la disjonction en conjonction et vice-versa :

$$\begin{aligned}(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)\\ (P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)\end{aligned} \tag{5.1.23}$$

Pour résumer les lois les plus classiques de la logique formelle déductive :

Lois Basiques de la LOF	**Formalisme**
Détachement (aka Modus Ponens)	$(p \to q) \land p \Rightarrow q$
Raisonnement indirect (aka Modus Tollens)	$(p \to q) \land \neg q \Rightarrow \neg p$
Addition disjonctive	$p \Rightarrow (p \lor q)$
Simplification conjonctive	$(p \land q) \Rightarrow p$
Simplification disjonctive	$(p \lor q) \land \neg p \Rightarrow q$
Règle de la chaîne	$(p \to q) \land (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$
Équivalence conditionnelle	$p \to q \Leftrightarrow \neg p \lor q$
Équivalence biconditionnelle	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \land (q \to p) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$
Contraposée	$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

TAB. 5.10 – **Principes de base des lois de la logique déductive - Implications et équivalences courantes**

Une partie du tableau ci-dessus est souvent représentée différemment :

Règle d'inférence	**Nom**	**Règle d'inférence**	**Nom**
$\neg q$ $p \to q$ $\therefore \neg p$	Modus Tollens	p $\therefore p \lor q$	Amplification disjonctive
p $p \to q$ $\therefore q$	Modus Ponens	$\neg p \to \text{Faux}$ $\therefore p$	Contradiction
$p \land q$ $\therefore p$	Simplification	$p \land q$ $p \to (q \to r)$ $\therefore (p \lor q) \to r$	Preuve conditionnelle
p q $\therefore p \land q$	Conjonction	$p \to r$ $q \to r$ $\therefore (p \lor q) \to r$	Preuve par cas
$p \lor q$ $\neg p$ $\therefore q$	Syllogisme Disjonctif	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	Loi du syllogisme

En cours de traduction de l'anglais

5.1.3.3 Procédures de décision

Nous avons introduit précédemment les éléments de base nous permettant d'opérer sur des expressions à partir de propriétés (variables propositionnelles) sans toutefois dire grand-chose quant à la manipulation de ces expressions. Alors, il convient maintenant de savoir qu'en calcul propositionnel il existe deux manières d'établir qu'une proposition est une loi de la logique propositionnelle. Nous pouvons soit :

1. Employer des procédures non axiomatisées
2. Recourir à des procédures axiomatiques et démonstratives

Remarque

Dans de nombreux ouvrages ces procédures sont présentées avant même la structure du langage propositionnel. Nous avons choisi de faire le contraire pensant que l'approche serait plus aisée.

5.1.3.3.1 Procédures de décisions non axiomatisées

Plusieurs de ces méthodes existent mais nous nous limiterons ici à la plus simple et à la plus parlante d'entre elles, celle du calcul matriciel, souvent appelée aussi "méthodes des tables de vérité".

La procédure de construction est comme nous l'avons vu précédemment assez simple. Effectivement, la valeur de vérité d'une expression complexe est fonction de la valeur vérité des énoncés plus simples qui la composent, et finalement fonction de la valeur de vérité des variables propositionnelles qui la composent. En envisageant toutes les combinaisons possibles des valeurs de vérité des variables propositionnelles, nous pouvons déterminer les valeurs de vérité de l'expression complexe.

Les tables de vérité, comme nous l'avons vu, permettent donc de décider, à propos de toute proposition, si celle-ci est une tautologie (toujours vraie), une contradiction (toujours fausse) ou une expression contingente (parfois vraie, parfois fausse).

Nous pouvons ainsi distinguer quatre façons de combiner les variables propositionnelles, les parenthèses et les connecteurs :

	Nom	Description	Exemple
1	Affirmation mal formulée	Absurdité. Ni vrai, ni faux	$(\vee P)Q$
2	Tautologie	Affirmation toujours vraie	$P \vee \neg P$
3	Contradiction	Affirmation toujours fausse	$P \wedge \neg P$
4	Affirmation contingente	Affirmation parfois vraie, parfois fausse	$P \vee Q$

TAB. 5.11 – **Combinaison de variables propositionnelles**

En cours de traduction de l'anglais

La méthode des tables de vérité permet de déterminer le type d'expression bien formée face auquel nous nous trouvons. Elle n'exige en principe aucune invention, c'est une procédure mécanique. Les procédures axiomatisées, en revanche, ne sont pas entièrement mécaniques. Inventer une démonstration dans le cadre d'un système axiomatisé demande parfois de l'habilité, de l'habitude ou de la chance. Pour ce qui est des tables de vérité, voici la marche à suivre :

Lorsqu'on se trouve face à une expression bien formée, ou fonction de vérité, nous commençons par déterminer à combien de variables propositionnelles distinctes nous avons affaire. Ensuite, nous examinons les différents arguments qui constituent cette expression. Nous construisons alors un tableau comprenant 2^n rangées (n étant le nombre de variables) et un nombre de colonnes égal au nombre d'arguments plus des colonnes pour l'expression elle-même et ses autres composantes. Nous attribuons alors aux variables les différentes combinaisons de vérité et de fausseté qui peuvent leur être conférées (la vérité est exprimée dans la table par un 1 et la fausseté par un 0). Chacune des rangées correspond à un monde possible et la totalité des rangées constitue l'ensemble des mondes possibles. Il existe, par exemple, un monde possible dans lequel P est une proposition vraie tandis que Q est fausse.

5.1.3.3.2 Procédures de décisions axiomatisées

L'axiomatisation d'une théorie implique, outre la formalisation de celle-ci, que nous partions d'un nombre fini d'axiomes et que, grâce à la transformation réglée de ces derniers, nous puissions obtenir tous les théorèmes de cette théorie. Nous partons donc de quelques axiomes dont la vérité est posée (et non démontrée). Nous déterminons des règles de déduction permettant de manipuler les axiomes ou toute expression obtenue à partir de ceux-ci. L'enchaînement de ces déductions est une démonstration qui conduit à un théorème, à une loi.

Nous allons sommairement présenter deux systèmes axiomatiques, chacun étant constitué d'axiomes utilisant deux règles dites "règles d'inférence" (règles intuitives) particulières :

1. Le "modus ponens" : Si nous avons prouvé A et $A \Rightarrow B$, alors nous pouvons déduire B. A est appelé la "prémisse mineure" et $A \Rightarrow B$ la "prémisse majeure" de la règle du modus ponens.

✍**Exemple :**

De :

$$x > y \tag{5.1.24}$$

et :

$$(x > y) \Rightarrow (y < x) \tag{5.1.25}$$

nous pouvons déduire :

$$y < x \tag{5.1.26}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Les humains communiquent généralement d'une manière qui résiste à l'analyse logique superficielle. Dans une conversation réelle, les gens utilisent des mots plutôt que des termes, font des énoncés plutôt que des phrases et emploient une plus grande variété de méthodes d'inférence que le modus ponens. Une grande partie de ce qui est communiqué et déduit dans une conversation dépend du contexte, des orateurs et du public, de leur histoire, de leurs connaissances et confidences partagées, des sens qu'ils mettent en place pour établir une relation de confiance mutuelle.

2. La "substitution" : nous pouvons dans un schéma d'axiomes remplacer une lettre par une formule quelconque, pourvu que toutes les lettres identiques soient remplacées par des formules identiques.

   Donnons à titre d'exemple, deux systèmes axiomatiques : le système axiomatique de Whitehead et Russell, le système axiomatique de Lukasiewicz.

   (a) Le système axiomatique de Whitehead et Russell adopte comme symboles primitifs $\neg, \vee$ et définit $\Rightarrow, \wedge, \Leftrightarrow$ à partir de ces derniers de la manière suivante (relations facilement vérifiables à l'aide de tables de vérité) :

$$\begin{aligned}&(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B\\&(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)\\&(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\end{aligned} \tag{5.1.27}$$

   Ce système comprend 5 axiomes, assez évidents en soi plus les deux règles d'inférence. Les axiomes sont donnés ici en utilisant des symboles non primitifs, comme le faisaient Whitehead et Russel :

   A1. $(A \vee A) \Rightarrow A$

   A2. $B \Rightarrow (A \vee B)$

   A3. $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

   A4. $(A \vee (B \vee C)) \Rightarrow (B \vee (A \vee C))$

   A5. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$

   Nous avions déjà présenté plus haut quelques-uns de ces éléments.

   Remarque

   Ces cinq axiomes ne sont pas indépendants les uns des autres. Le quatrième peut être obtenu à partir des quatre autres.

   Par exemple, pour justifier que $\neg A \vee A$ a un sens[1], nous pouvons procéder comme suit (dans ce système, nous ne prouvons que des vérités logiques, ce qui signifie que chaque ligne doit être une vérité logique en soi) :

[1]Cela s'appelle la "loi du tiers exclu" : une proposition est soit vraie, soit fausse. Cela a été largement considéré comme allant de soi depuis des milliers d'années

En cours de traduction de l'anglais

(1)	$B \Rightarrow (A \vee B)$	Axiome A2
(2)	$A \Rightarrow (A \vee A)$	(1) et substitution
(3)	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$	Axiome A5 (nécessité)
(4)	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee C))$	(3) et substitution
(5)	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(4) et propriété de $\Rightarrow$
(6)	$((A \vee A) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \vee A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$	(5) et substitution
(7)	$(A \Rightarrow (A \vee A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	(6) (modus ponens)
(8)	$(A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	(7) et axioms A1
(9)	$A \Rightarrow A$	(8) et modus ponens
(10)	$\neg A \vee A$	(9) et propriété de $\Rightarrow$

(b) Le système axiomatique de Lukasiewicz comprend les trois axiomes suivants, plus les deux règles d'inférences (modus ponens et substitution) :

A1. $(A \Rightarrow B)((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

A2. $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

A3. $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Voici des preuves des deux premiers axiomes, dans le système de Whitehead et Russel. Ce sont les formules (6) et (16) de la dérivation suivante :

(1)	$(A \vee (B \vee C)) \Rightarrow (B \vee (A \vee C))$	Axiome A4
(2)	$(\neg(B \Rightarrow C) \vee (\neg(A \vee B) \vee (A \vee C))) \Rightarrow (\neg(A \vee B) \vee (\neg(B \Rightarrow C) \vee (A \vee C)))$	(1) et substitution
(3)	$\neg(A \vee B) \vee (\neg(B \Rightarrow C) \vee (A \vee C))$	A4 sur (2) et modus ponens
(4)	$(A \vee B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee C))$	(3) par la propriété de $\Rightarrow$
(5)	$(\neg A \vee B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg A \vee C))$	(4) et substitution
(6)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(5) et propriété de $\Rightarrow$
(7)	$(B \Rightarrow (A \vee B)) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} ((A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)) \\ \Rightarrow (B \Rightarrow (B \vee A)) \end{array} \right)$	(6) et substitution
(8)	$((A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)) \Rightarrow (B \Rightarrow (B \vee A))$	(7) modus ponens
(9)	$B \Rightarrow (B \vee A)$	(8) modus ponens
(10)	$\neg B \Rightarrow (\neg B \vee A)$	(9) et substitution
(11)	$\neg\neg B \vee (\neg B \vee A)$	(10) et propriété de $\Rightarrow$
(12)	$\neg\neg B \vee (\neg B \vee A) \Rightarrow (\neg B \vee (\neg\neg B \vee A))$	A4 + substitution avec (11)
(13)	$\neg B \vee (\neg\neg B \vee A)$	(12) et modus ponens
(14)	$B \Rightarrow (\neg\neg B \vee A)$	(19) et propriété de $\Rightarrow$
(15)	$B \Rightarrow (\neg B \vee A)$	(14) et propriété de $\Rightarrow$
(16)	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	(15) et substitution

En cours de traduction de l'anglais

Ces axiomatisations permettent de retrouver comme théorèmes toutes les tautologies ou lois de la logique propositionnelle. De par tout ce qui a été dit jusqu'à maintenant, nous pouvons tenter de définir ce qu'est une preuve ! ! !

Définition (#5.1.15) : Une suite finie de formules $B_1, B_2, \ldots, B_m$ est appelée "preuve" à partir des hypothèses $A_1, A_2, \ldots, A_n$ si pour chaque i :

- B_i est l'une des hypothèses $A_1, A_2, \ldots, A_n$
- ou B_i est une variante d'un axiome
- ou B_i est inférée (par application de la règle du modus ponens) à partir de la prémisse majeure B_j et de la prémisse mineure B_k où $j, k < i$
- ou B_i est inférée (par application de la règle de substitution) à partir d'une prémisse antérieure B_j, la variable remplacée n'apparaissant pas dans $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Une telle suite de formules, B_m étant la formule finale de la suite, est appelée plus explicitement "preuve de B_m" à partir des hypothèses (axiomes) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ce que nous notons par :

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B_m \tag{5.1.28}$$

Plus explicitement, une preuve est un argument déductif pour un énoncé mathématique. Dans l'argument, d'autres instructions précédemment établies, telles que des théorèmes ou lemmes, peuvent être utilisées. En principe, une preuve peut être reliée à des déclarations évidentes ou supposées, connues sous le nom "d'axiomes".

Les preuves utilisent la logique, mais incluent généralement une certaine quantité de langage naturel qui admet généralement une certaine ambiguïté. En fait, la grande majorité des preuves en mathématiques écrites peuvent être considérées comme des applications d'une logique informelle rigoureuse. Les preuves purement formelles, écrites dans un langage symbolique plutôt que dans un langage naturel, sont considérées dans la théorie de la démonstration.

Remarque

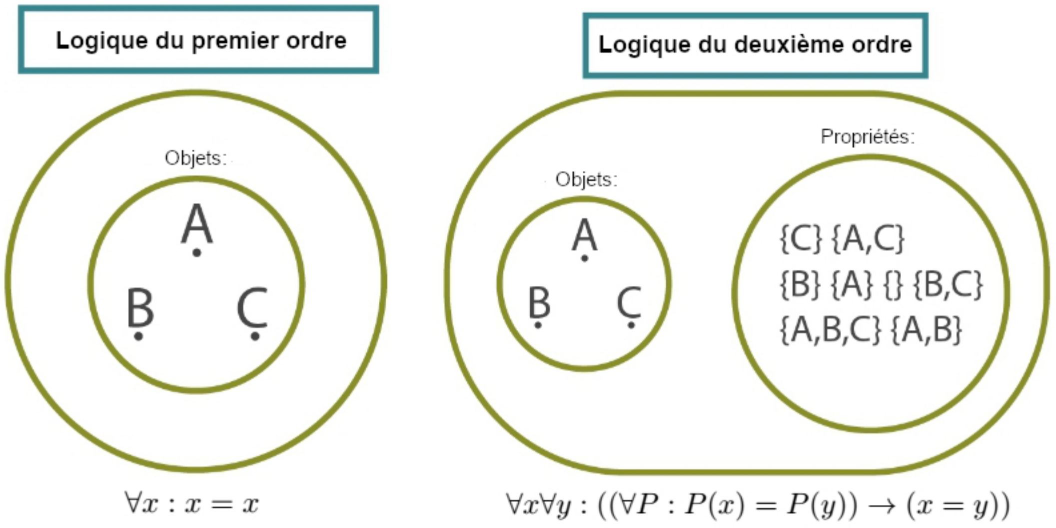
Il faut noter que lorsque nous essayons de prouver un résultat à partir d'un certain nombre d'hypothèses, nous n'essayons pas de prouver les hypothèses elles-mêmes.

En cours de traduction de l'anglais

5.1.3.4 Quantificateurs

Nous devons compléter l'utilisation des connecteurs du calcul propositionnel par ce que nous appelons des "quantificateurs" si nous souhaitons pouvoir résoudre certains problèmes. Effectivement, le calcul propositionnel ne nous permet pas d'affirmer des choses générales sur les éléments d'un ensemble par exemple. Dans ce sens, la logique propositionnelle ne reflète qu'une partie du raisonnement. Le "calcul des prédicats" au contraire permet de manipuler formellement des affirmations telles que "il existe un x tel que [x a une voiture américaine]" ou "pour tous les x [si x est un teckel, alors x est petit]" ; en somme, nous étendons les formules composées afin de pouvoir affirmer des quantifications existentielles ("il existe...") et des quantifications universelles ("pour tout...."). Les exemples que nous venons de donner font intervenir des propositions un peu particulières comme "x a une voiture américaine". Il s'agit ici de propositions comportant une variable. Ces propositions sont en fait l'application d'une fonction à x. Cette fonction, c'est celle qui associe "x a une voiture américaine" à x. Nous dénoterons cette fonction par "... a une voiture américaine" et nous dirons que c'est une fonction propositionnelle, car c'est une fonction dont la valeur est une proposition. Ou encore un "prédicat".

Les quantificateurs existentiels et universels vont donc de pair avec l'emploi de fonctions propositionnelles. Le calcul des prédicats est cependant limité dans les formules existentielles et universelles. Ainsi, nous nous interdisons des formules comme "il existe une affirmation de x telle que...". En fait, nous ne nous autorisons à quantifier que des "individus". C'est pour cela que la logique des prédicats est dite une "logique du premier ordre" ou "logique de prédicats premier ordre" (LPPO) car elle utilise comme variables des objets mathématiques élémentaires (tandis que dans la logique du deuxième ordre elles peuvent aussi être des ensembles).



Avant de passer à l'étude du calcul des prédicats nous devons définir :

D1. Le "quantificateur universel" : $\forall$ (pour tout)

D2. Le "quantificateur universel" : $\exists$ (il existe)

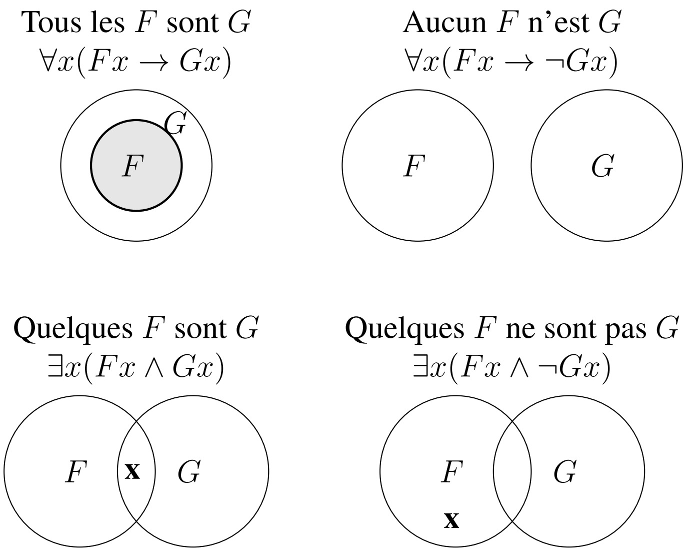


FIG. 5.3 – **Les quatre types standards d'énoncés quantifiés**

✍**Exemple :**

Si n'importe quel nombre complexe est le produit d'un nombre non négatif et d'un nombre de module 1, nous écrirons :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists p \in \mathbb{Z} \geq 0, \exists u \in \mathbb{C} : \quad (|u| = 1 \wedge z = pu) \tag{5.1.29}$$

L'ordre des quantificateurs est essentiel à la signification, comme l'illustrent les deux propositions suivantes (c'est par ailleurs un bon test pour vérifier qu'une personne maîtrise les fondamentaux de la structure de la logique) :

Pour tout entier naturel n, il existe un entier s tel que $s = n^2$.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N}, s = n^2$$

Ceci est clairement vrai ! Cette phrase affirme simplement que chaque nombre naturel a un carré. La signification de l'assertion dans laquelle les quantificateurs sont inversés est différente :

Il existe un nombre naturel s tel que pour tout entier naturel n, $s = n^2$.
$$\exists s \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, s = n^2$$

Ceci est clairement faux ! Il affirme qu'il existe un seul nombre naturel s qui est en même temps le carré de chaque nombre naturel.

Une question fréquente en physique et en mathématiques est de savoir si les quantificateurs universels doivent être avant ou après les prédicats auxquels ils se rapportent. En fait, strictement en termes de logique formelle, les quantificateurs sont toujours au début de toute formule. Cependant, presque personne ne donne une preuve écrite dans le langage formel. Même des preuves simples seraient très longues et illisibles. Mais quiconque, quelle que soit sa langue

naturelle parlée, interprétera une phrase dans le langage formel de la même manière. Le prix pour cette clarté est bien sûr la lisibilité. Les langues naturelles, en raison de leur ambiguïté inhérente, sont soumises à de nombreuses autres limitations.

De toute évidence, l'utilisation correcte d'une notation formelle ou d'une notation plus informelle dépend particulièrement du contexte de la présentation. Il est essentiel d'essayer de nous adapter à qui nous communiquons (sans toutefois perdre en rigueur scientifique !) un concept et cela devrait nous guider pour utiliser un niveau approprié de notation formelle.

Nous utilisons aussi parfois le quantificateur $\exists!$ pour dire brièvement : "il existe un et un seul".

✍**Exemple :**

Un exemple célèbre est le moyen d'expliciter que le logarithme est une fonction bijective :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists! y \in \mathbb{R}_+^* : \quad x = \ln(y) \tag{5.1.30}$$

Avant de passer au calcul des prédicats, établissons un résumé non exhaustif, courant dans la littérature et utilisant la négation :

Expression		**Est équivalent à**
$\neg\neg A$	$\Leftrightarrow$	A
$\neg A \Rightarrow \neg B$	$\Leftrightarrow$	$B \Rightarrow A$
$\neg A \Rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\neg B \Rightarrow A$
$A \Rightarrow \neg B$	$\Leftrightarrow$	$(A \wedge B) \Rightarrow F$
$\neg A \wedge \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \vee B)$
$A \wedge \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg A \vee B)$
$\wedge A \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \vee \neg B)$
$\neg A \vee \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \wedge B)$
$A \vee \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg A \wedge B)$
$\neg A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \wedge \neg B)$
$\neg(\exists x \in X : \neg P(x))$	$\Leftrightarrow$	$(\forall x \in X : P(x))$
$(\exists x \in X : \neg P(x))$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\forall x \in X : P(x))$
$(\exists x \in X : P(x))$	$\Leftrightarrow$	$(\forall x \in X : \neg P(x))$
$(\exists x \in X : P(x))$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\forall x \in X : \neg P(x))$

Nous verrons maintenant que la théorie de la démonstration et la théorie des ensembles est la transcription exacte des principes et résultats de la Logique (celle avec un "L" majuscule ! ! !).

En cours de traduction de l'anglais

5.1.4 Calcul des Prédicats

Dans un cours de mathématiques (d'algèbre, d'analyse, de géométrie, ...), nous démontrons les propriétés de différents types d'objets (entiers, réels, matrices, suites, fonctions continues, courbes, ...). Pour pouvoir prouver ces propriétés, il faut bien sûr que les objets sur lesquels nous travaillons soient clairement définis (qu'est-ce qu'un entier, un réel, ... ?).

En logique du premier ordre et, en particulier, en théorie de la démonstration, les objets que nous étudions sont les formules et leurs démonstrations. Il faut donc donner une définition précise de ce que sont ces notions. Les termes et les formules forment la grammaire d'une langue, simplifiée à l'extrême et calculée exactement pour dire ce que nous voulons sans ambiguïté et sans détour inutile.

Dans les sections précédéntes nous avons vu que la syllogistique traite différemment des phrases que la logique propositionnelle. La syllogistique s'intéresse aux composants des phrases, notamment les quantificateurs «tous», «aucun» et «quelques», alors que la logique propositionnelle abrège toute phrase - indépendamment de ses composants - par des lettres comme «p», «q», «r», etc. Ainsi, la logique propositionnelle n'est pas capable d'expliquer la validité d'inférences de phrases rhétoriques humaines typqiques.

La logique propositionnelle ne nous permet pas d'expliquer la validité des inférences rhétoriques, car elle ne prend pas en compte la structure interne des phrases simples qu'elle traite : elle traite les «p» et les «q» comme atomes et n'en analyse pas la structure interne.

Pour formaliser les inférences rhétoriques et expliquer leur validité, il faut utiliser la notion de prédicat et convertir les concepts en lettres algébriques. Par exemple, l'inférence suivante :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les humains sont mortels}\\ \text{Tous les philosophes sont des humains}\end{array}}{\text{Tous les philosophes sont mortels}} \tag{5.1.31}$$

Devient alors :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les } M \text{ sont } P\\ \text{Tous les } S \text{ sont } M\end{array}}{\text{Tous les } S \text{ sont } P} \tag{5.1.32}$$

Si nous abrégeons «tous les ... sont ...» par «$\forall x(\ldots x \ldots \rightarrow \cdots x \ldots)$ », nous obtenons :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Mx \rightarrow Px)\\ \forall x(Sx \rightarrow Mx)\end{array}}{\forall x(Sx \rightarrow Px)} \tag{5.1.33}$$

Ainsi nous avons converti le syllogisme en une inférence valide !

En cours de traduction de l'anglais

5.1.4.1 Grammaire

Définitions (#5.1.16) :

D1. Les "termes", désignent les objets dont nous voulons prouver des propriétés (nous reviendrons un peu plus loin beaucoup plus en détail sur ces derniers) :

- En algèbre, les termes désignent les éléments d'un groupe (ou anneau, corps, espace vectoriel, etc.). Nous manipulons aussi des ensembles d'objets (sous-groupe, sous-espace vectoriel, etc). Les termes qui désignent ces objets, d'un autre type, seront appelés "termes du second ordre".
- En analyse, les termes désignent les réels ou (par exemple, si nous nous plaçons dans des espaces fonctionnels) des fonctions.

D2. Les "formules", représentent les propriétés des objets que nous étudions (nous reviendrons également beaucoup plus en détail sur ces dernières) :

- En algèbre, nous pourrons écrire des formules pour exprimer que deux éléments commutent, qu'un sous-espace vectoriel est de dimension 3, etc.
- En analyse, nous écrirons des formules pour exprimer la continuité d'une fonction, la convergence d'une suite, etc.
- En théorie des ensembles, les formules pourront exprimer l'inclusion de deux ensembles, l'appartenance d'un élément à un ensemble, etc.

D3. Les "démonstration", elles permettent d'établir qu'une formule est vraie. Le sens précis de ce mot aura lui aussi besoin d'être défini. Plus exactement, elles sont des déductions sous hypothèses, elles permettent de "mener du vrai au vrai", la question de la vérité de la conclusion étant alors renvoyée à celle des hypothèses, laquelle ne regarde pas la logique mais repose sur la connaissance que nous avons des choses dont nous parlons.

En cours de traduction de l'anglais

5.1.4.2 Langages

En mathématique, nous utilisons, suivant le domaine, différents langages qui se distinguent par les symboles utilisés. La définition ci-dessous exprime simplement qu'il suffit de donner la liste de ces symboles pour préciser le langage.

Définition (#5.1.17) : Un "langage" est la donnée d'une famille (pas nécessairement finie) de symboles. Nous en distinguons de trois sortes : symboles, termes et formules.

Remarques

R1. Nous utilisons quelques fois le mot "vocabulaire" ou le mot "signature" à la place du mot "langage".

R2. Le mot "prédicat" peut être utilisé à la place du mot "relation". Nous parlons alors de "calcul des prédicats" au lieu de "logique du premier ordre" (ce que nous avons étudié précédemment).

5.1.4.2.1 Symboles

Il existe différents types de symboles que nous allons tâcher de définir !

Définitions (#5.1.18) :

D1. Les "symboles de constante" (voir remarque plus bas)

> ✍**Exemple :**
>
> Le n pour l'élément neutre en théorie des ensembles (voir section de Théorie des Ensembles page 414)

D2. Les "symboles de fonctions" ou "foncteurs". A chaque symbole de fonction est associé un entier strictement positif que nous appelons son "arité" : c'est le nombre d'arguments de la fonction. Si l'arité est 1 (resp. $2, \ldots, n$), nous disons que la fonction est unaire (resp. binaire, ..., n-aire)

> ✍**Exemple :**
>
> Le foncteur de la multiplication $\times$ ou $\cdot$ dans la théorie des groupes (voir section de Théorie des Ensembles page 434) est 2-aire ou plus simplement un opérateur "binaire".

D3. Les "symboles de relation". De la même manière, à chaque symbole de relation est associé un entier positif ou nul (son arité) qui correspond à son nombre d'arguments et nous parlons de relation unaire, binaire, n-aire

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

La relation $=$ est une relation binaire (voir section Opérateurs page 286)

D4. Les "variables individuelles". Dans toute la suite, nous nous donnerons un ensemble infini V de variables. Les variables seront notées comme il l'est de tradition : x, y, z (éventuellement indexées : x_1, x_2, x_3)

D5. A cela il faut rajouter les connecteurs $\neg, \Rightarrow, \vee, \wedge$ et quantificateurs $\forall, \exists, \exists!$ que nous avons longuement présentés plus haut et sur lesquels il est pour l'instant inutile de revenir.

Remarques

R1. Un symbole de constante peut être vu comme un symbole de fonction à 0 argument (d'arité nulle).

R2. Nous considérons (sauf mention contraire) que chaque langage contient le symbole de relation binaire $=$ (lire "égal") et le symbole de relation à zéro argument dénoté $\perp$ (lire "bottom" ou "absurde") qui représente le faux. Dans la description d'un langage, nous omettrons donc souvent de les mentionner. Le symbole $\perp$ est souvent redondant. Nous pouvons en effet, sans l'utiliser, écrire une formule qui est toujours fausse. Il permet cependant de représenter le faux d'une manière canonique et donc d'écrire des règles de démonstration générales.

R3. Le rôle des fonctions et des relations est très différent. Comme nous le verrons plus loin, les symboles de fonction sont utilisés pour construire les termes (les objets du langage) et les symboles de relation pour construire les formules (les propriétés de ces objets).

En cours ... is

5.1.4.2.2 Termes

Les termes (nous disons aussi "termes du premier ordre") représentent les objets associés au langage.

Définitions (#5.1.19) :

D1. L'ensemble $\mathcal{T}$ des termes sur un langage $\mathcal{L}$ est le plus petit ensemble contenant les variables, les constantes et stable (on ne sort pas de l'ensemble) par l'application des symboles de fonction de $\mathcal{L}$ à des termes.

D2. Un "terme clos" est un terme qui ne contient pas de variables (donc par extension, seulement des constantes).

D3. Pour obtenir une définition plus formelle, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{T}_0 = \{t\} \quad (5.1.34)$$

où t est une variable ou un symbole de constante et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) | t_i \in \mathcal{T}_k\} \quad (5.1.35)$$

où f est une fonction d'arité n (rappelons que l'arité est le nombre d'arguments de la fonction). Ainsi, pour chaque arité, il y a un degré d'ensemble de termes. Nous avons finalement :

$$\mathcal{T} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_k \quad (5.1.36)$$

D4. Nous appellerons "hauteur d'un terme" t le plus petit k tel que $t \in \mathcal{T}_k$.

Cette définition signifie que les variables et les constantes sont des termes et que si f est un symbole de fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme en soi aussi. L'ensemble $\mathcal{T}$ des termes est défini par la grammaire :

$$\boxed{\mathcal{T} = \{V | S_c | S_f(\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{T}\}} \quad (5.1.37)$$

Cette expression se lit de la manière suivante : un élément de l'ensemble $\mathcal{T}$ que nous sommes en train de définir est soit un élément de V (variables), soit un élément de S_c (l'ensemble des symboles de constantes), soit l'application d'un symbole de fonction $f \in S_f$ à n éléments (constantes ou variables) de $\mathcal{T}$.

Attention : le fait que f soit de la bonne arité est seulement implicite dans cette notation. De plus, l'écriture $S_f(\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{T})$ ne signifie pas que tous les arguments d'une fonction sont identiques mais simplement que ces arguments sont des éléments de $\mathcal{T}$.

Remarque

Il est souvent commode de voir un terme (expression) comme un arbre dont chaque noeud est étiqueté par un symbole de fonction (opérateur ou fonction) et chaque feuille par une variable ou une constante.

En cours de traduction de l'anglais

Dans la suite, nous allons sans cesse définir des notions (ou prouver des résultats) "par récurrence" sur la structure ou la taille d'un terme.

Définitions (#5.1.20) :

D1. Pour prouver une propriété P sur les termes, il suffit de prouver P pour les variables et les constantes et de prouver $P(f(t_1, \ldots, t_n))$ à partir de $P(t_1), \ldots, P(t_n)$. Nous faisons ainsi ici une "preuve par induction sur la hauteur d'un terme". C'est une technique que nous retrouverons dans les chapitres suivants.

L'induction mathématique en tant que règle d'inférence peut être formalisée en tant qu'axiome de second ordre. L'axiome de l'induction est, en symboles logiques :

$$\forall P. [[P(0) \wedge \forall (k \in \mathbb{N}). [P(k) \Rightarrow P(k+1)]] \Rightarrow \forall (n \in \mathbb{N}). P(n)] \quad (5.1.38)$$

En termes clairs, la base $P(0)$ et l'étape d'induction (explicitement, l'hypothèse inductive $P(k)$ implique $P(k+1)$) ensembles impliquent $P(n)$ pour tout entier naturel n. L'axiome

d'induction affirme que la validité d'inférence que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n tient du principe de base de l'étape d'induction elle-même !

On peut comparer l'induction à des dominos en chute : chaque fois qu'un domino tombe, le suivant tombe également. La première étape, prouvant (ou donnant l'évidence) que $P(1)$ est vraie, commence la réaction en chaîne infinie.

D2. Pour définir une fonction Φ sur les termes, il suffit de la définir sur les variables et les constantes et de dire comment nous obtenons $\Phi(f(t_1,\ldots,t_n))$ à partir de $\Phi(t_1),\ldots,\Phi(t_n)$. Nous faisons ici encore une "définition par induction sur la hauteur d'un terme".

En cours ... l'anglais

✍**Exemple :**

La taille (nous disons aussi la "longueur") d'un terme t (notée $\tau(t)$) est le nombre de symboles de fonction apparaissant dans t. Formellement :

- $\tau(x)=\tau(c)=0$ si x est une variable c une constante.
- $\tau(f(t_1,\ldots,t_n))=1+\sum\limits_{i\leq i\leq n}\tau(t_i)$

où le 1 dans la dernière relation relation représente le terme f.

Remarques

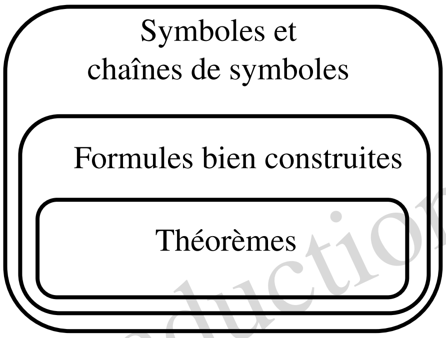
La preuve par induction sur la hauteur d'un terme sera souvent insuffisante. Nous pourrons alors prouver une propriété P sur les termes en supposant la propriété vraie pour tous les termes de taille $p<n$ et en la démontrant ensuite pour les termes de taille n. Il s'agira alors d'une "preuve par récurrence sur la taille du terme" (voir de tels exemples dans le chapitre de Théorie Des Nombres).

5.1.4.2.3 Formules

Définition (#5.1.21) : Une "formule bien formée", (FBF) ou simplement "formule" est une mot (par extension une séquence finie de symboles d'un alphabet donné) qui fait partie d'un langage formel. Un langage forme peut être considéré comme identique à l'ensemble contenant seulements toutes ses propres formules.

Les formules du calcul propositionnel, également nommées "formules propositionnelles", sont des expressions du type $(A \wedge (B \vee C))$.

Un formule atomatique est une formule qui ne contient ni connecteurs logiques ni quantificateurs, ou de manière équivalente, une formule qui n'a strictement aucune sous-formule. La forme précise des formules atomiques dépend du système formel considéré ; pour la logique propositionnelle par exemple, les formules atomiques sont les variables propositionnelles. Pour la logique des prédicats, les atomes sont les symboles de prédicats avec leurs arguments, chaque argument étant un terme.



En cours de traduction de l' anglais

Définition (#5.1.22) : Les formules sont construites à partir de "formules atomiques" en utilisant des connecteurs et des quantificateurs. Nous utiliserons les connecteurs et les quantificateurs suivants (qui nous sont déjà connus) :

- Connecteur unaire de négation $\neg$
- Connecteurs binaires de conjonction et disjonction ainsi que d'implication : $\wedge, \vee, \rightarrow$
- Quantificateurs : $\exists$ qui se lit "il existe" et $\forall$ qui se lit "pour tout"

Cette notation des connecteurs est standard (elle devrait du moins). Elle est utilisée pour éviter les confusions entre les formules et le langage courant (le métalangage).

Définitions (#5.1.23) :

D1. Soit $\mathcal{L}$ un langage, les "formules atomiques" de $\mathcal{L}$ sont les formules de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$ où R est un symbole de relation n-aire de $\mathcal{L}$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes de $\mathcal{L}$. Nous notons "Atom" l'ensemble des formules atomiques. Si nous notons par S_r l'ensemble des symboles de relation, nous pouvons écrire l'ensemble des termes mis en relations par l'expression :

$$\text{Atom} = S_R(\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{T}) \quad \mathcal{T} \in \mathcal{L}, \forall t_i \in \mathcal{T} \tag{5.1.39}$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules de la logique du premier ordre de $\mathcal{L}$ est donc défini par la grammaire (où x est une variable) :

$$\boxed{\mathcal{F} = \text{Atom}|F \wedge F|F \vee F|F \rightarrow F|F\neg F|\exists x\mathcal{F}|\forall x\mathcal{F}} \tag{5.1.40}$$

où il faut lire : l'ensemble des formules est le plus petit ensemble contenant les formules et tel que si F_1 et F_2 sont des formules alors $F_1 \vee F_2$, etc. sont des formules et qu'elles peuvent être en relation entre elles.

> ✍**Exemple :**
>
> Les symboles de relation du langage propositionnel sont des relations d'arité 0 (même le symbole "$=$" est absent), les quantificateurs sont alors inutiles (puisqu'une formule propositionnelle ne peut pas contenir des variables). Nous obtenons alors le calcul propositionnel $\mathcal{C}_P$ défini par :
>
> $$\boxed{\mathcal{C}_P = V_P|\perp| \neq \mathcal{C}_P|\mathcal{C}_P \vee \mathcal{C}_P|\mathcal{C}_P \wedge \mathcal{C}_P|\mathcal{C}_P \rightarrow \mathcal{C}_P} \tag{5.1.41}$$
>
> Remarquons la présence du symbole $\perp$ signifiant le "faux" que nous n'avions pas mentionné lors de notre étude de la logique propositionnelle.

Nous ferons attention à ne pas confondre termes et formules. $\sin(x)$ est un terme (fonction), $x = 3$ est une formule. Mais $\sin(x) \wedge (x = 3)$ n'est rien : nous ne pouvons, en effet, mettre un connecteur entre un terme et une formule (cela n'a aucun sens).

Remarques

R1. Pour définir une fonction Φ sur les formules, il suffit de définir Φ sur les formules atomiques.

R2. Pour prouver une propriété P sur les formules, il suffit de prouver P pour les formules atomiques.

R3. Pour prouver une propriété P sur les formules, il suffit de supposer la propriété vraie pour toutes les formules de taille $p < n$ et de la démontrer pour les formules de taille n.

D2. Une "sous-formula" d'une formule (ou expression) F est l'un de ses composants, in extenso une formule à partir de laquelle F est construite. Formellement, nous définissons l'ensemble $\text{SF}(F)$ des sous-formules de F par :

- Si F est atomique :

$$\text{SF}(F) = \{F\} \tag{5.1.42}$$

- Si $F = F_1 \oplus F_2$ (soit une composition !) avec $\oplus \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$:

$$\text{SF} = (F) = \{F\} \cup \text{SF}(F_1) \cup \text{SF}(F_2) \tag{5.1.43}$$

- Si $F = \neg F$ ou $\text{Q} \in F_1$ avec $\text{Q} \in \{\forall, \exists\}$:

$$\text{SF}(F) = \{F\} \cup \text{SF}(F_1) \tag{5.1.44}$$

D3. Une formule F de $\mathcal{L}$ n'utilise qu'un nombre fini de symboles de $\mathcal{L}$. Ce sous-ensemble est appelé le "langage de la formule" et noté $\mathcal{L}(F)$.

D4. La "taille ou (longueur) d'une formule" F, notée $\tau(F)$ est le nombre de connecteurs ou de quantificateurs apparaissant dans F. Formellement :

- $\tau(F) = 0$ si F est une formule atomique
- $\tau(F_1 \oplus F_2) = 1 + \tau(F_1) + \tau(F_2)$ où encore une fois $\oplus \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$
- $\tau(\neg F_1) = \tau(\mathrm{Q}xF_1) = 1\tau(F_1)$ avec encore une fois $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

D5. "L'opérateur principal" (nous disons aussi le "connecteur principal") d'une formule est défini par :

- Si A est atomique, alors elle n'a pas d'opérateur principal
- Si $A = \neg B$, alors $\neg$ est l'opérateur principal de A
- Si $A = B \oplus C$ où encore une fois $\oplus \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ alors $\oplus$ est l'opérateur principal de A
- Si $A = \mathrm{Q}xB$ où encore une fois $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$, alors Q est l'opérateur principal de A

D6. Soit F une formule. L'ensemble $\mathrm{VL}(F)$ des variables libres de F l'ensemble $\mathrm{VM}(F)$ des variables muettes (ou liées) de F sont définies par récurrence sur $\tau(F)$.

Une occurrence d'une variable donnée est dite "variable liée" ou "variable muette" dans une formule F si dans cette même formule, un quantificateur y fait référence. Dans le cas contraire, nous disons avoir une "variable libre".

Remarque

Une occurrence d'une variable x dans une formule F est une position de cette variable dans la formule F. Ne pas confondre avec l'objet qu'est la variable elle-même !

En cours de traduction de l'anglais

Pour préciser les variables libres possibles d'une formule F, nous noterons $F[x_1, \ldots, x_n]$. Cela signifie que les variables libres de F sont parmi $x_1, \ldots, x_n$ in extenso si y est libre dans F, alors y est l'un des x_i mais les x_i n'apparaissent pas nécessairement dans F.

Nous pouvons définir les variables muettes ou libres de manière plus formelle :

(a) Si $F = R(t_1, \ldots, t_n)$ est atomique alors $\mathrm{VL}(F)$ est l'ensemble des variables libres apparaissant dans les equation et nous avons alors pour les variables muettes $\mathrm{VM}(F) = \varnothing$.

(b) Si $F = F_1 \oplus F_2$ où $\oplus \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$: $\mathrm{FV}(F) = \mathrm{FV}(F_1) \cup \mathrm{FV}(F_2)$ alors $\mathrm{DV}(F) = \mathrm{DV}(F_1) \cup \mathrm{DV}(F_2)$.

(c) Si $F = \neg F_1$ où $\mathrm{FV}(F) = \mathrm{FV}(F_1)$ alors $\mathrm{DV}(F) = \mathrm{DV}(F_1)$.

(d) Si $F = \mathrm{Q}xF_1$ avec $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$: $\mathrm{FV}(F) = \mathrm{FV}(F_1) - \{x\}$ et $\mathrm{DV}(F) = \mathrm{DV}(F_1) \cup \{x\}$.

✍**Exemples :**

E1. Soit $F : \forall x\ (x \cdot y = y \cdot x)$ alors $\mathrm{FV}(F) = \{y\}$ et $\mathrm{DV}(F) = \{x\}$

E2. Soit $G : \{\forall x \exists y (x \cdot z = z \cdot y)\} \wedge \{x = z \cdot z\}$ alors $\mathrm{FV}(G) = \{x, z\}$ et $\mathrm{DV}(G) = \{x, y\}$.

D7. Nous disons que les formules F et G sont "α-équivalentes" si elles sont (syntaxiquement) identiques à un renommage près des occurrences liées des variables.

D8. Une "formule close" est une formule sans variables libres.

D9. Soit F une formule, x une variable et t un terme. $F[x := t]$ est la formule obtenue en remplaçant dans F toutes les occurrences libres de x par t, après renommage éventuel des occurrences liées de F qui apparaissent libres dans t.

Remarques

R1. Nous noterons dans les exemples vus qu'une variable peut avoir à la fois des occurrences libres et des occurrences liées. Nous n'avons donc pas toujours $\mathrm{VL}(F) \cap \mathrm{VM}(F) = \varnothing$.

R2. Nous ne pouvons pas renommer y en x dans la formule $\forall y\ (x \cdot y = y \cdot x)$ et obtenir la formule $\forall x\ (x \cdot x = x \cdot x)$: la variable x serait "capturée". Nous ne pouvons donc pas renommer des variables liées sans précautions : il faut éviter de capturer des occurrences libres !

5.1.5 Démonstrations (preuves)

Les démonstrations que l'on trouve dans les ouvrages de mathématiques sont des assemblages de symboles mathématiques et de phrases contenant des mots-clés tels que : "donc", "parce que", "si", "si et seulement si", "il est nécessaire que", "il suffit de", "prenons un x tel que", "supposons que", "cherchons une contradiction", etc. Ces mots sont supposés être compris par tous de la même manière, ce qui n'est en fait, pas toujours le cas.

Dans tout ouvrage, le but d'une démonstration est de convaincre le lecteur de la vérité de l'énoncé. Suivant le niveau du lecteur, cette démonstration sera plus ou moins détaillée : quelque chose qui pourra être considéré comme évident dans un cours de licence pourrait ne pas l'être dans un cours de niveau inférieur.

Dans un devoir, le correcteur sait que le résultat demandé à l'étudiant est vrai et il en connaît la démonstration. L'étudiant doit démontrer (correctement) le résultat demandé. Le niveau de détail qu'il doit donner dépend donc de la confiance qu'aura le correcteur : dans une bonne copie, une "preuve par une récurrence évidente" passera bien, alors que dans une copie où il y eu auparavant un "évident", qui était évidemment... faux, ça ne passera pas !

Pour pouvoir gérer convenablement le niveau de détail, il faut savoir ce qu'est une démonstration complète. Ce travail de formalisation n'a été fait qu'au début de 20ème siècle ! !

Plusieurs choses peuvent paraître surprenantes :

1. Il n'y a qu'un nombre fini de règles : deux pour chacun des connecteurs (et l'égalité) plus trois règles générales. Il n'était pas du tout évident a priori qu'un nombre fini de règles soit suffisant pour démontrer tout ce qui est vrai. Nous montrerons ce résultat (c'est essentiellement, le théorème de complétude). La preuve n'en est pas du tout triviale.

2. Ce sont les mêmes règles pour toute la mathématique et la physique : algèbre, analyse, géométrie, etc. Cela veut dire que nous avons réussi à isoler tout ce qui est général dans un raisonnement. Nous verrons plus loin qu'une démonstration est un assemblage de couples (Γ, A), où Γ est un ensemble de formules (les hypothèses) et A une formule (la conclusion). Quand nous faisons de l'arithmétique, de la géométrie ou de l'analyse réelle, nous utilisons, en plus des règles, des hypothèses que l'on appelle des "axiomes". Ceux-ci expriment les propriétés particulières des objets que nous manipulons (pour plus de détails sur les axiomes voir la section Introduction page **??**).

Nous démontrons donc, en général, des formules en utilisant un ensemble d'hypothèses, et cet ensemble peut varier au cours de la démonstration : quand nous disons "supposons F et montrons G", F est alors une nouvelle hypothèse que nous pourrons utiliser pour montrer G. Pour formaliser cela, nous introduisons le concept de "séquent".

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#5.1.24) :

D1. Un "séquent" est un couple (noté $\Gamma \vdash F$) où :

(a) Γ est un ensemble fini de formules qui représente les hypothèses que nous pouvons utiliser. Cet ensemble s'appelle aussi le "contexte du séquent".

(b) F est une formule. C'est la formule que nous voulons montrer. Nous dirons que cette formule est la "conclusion du séquent".

Le symbole "$\vdash$" doit être lu comme "thèse" ou "démontre".

Remarques

R1. Si $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n$ nous pourrons noter $A_1, \ldots, A_n \vdash F$ au lieu de $\Gamma \vdash F$.

R2. Nous noterons $\vdash F$ un séquent dont l'ensemble d'hypothèses est vide et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash F$ un séquent dont l'ensemble d'hypothèses est $\bigcup_i \Gamma_i$.

R3. Nous écrirons $\Gamma \nvdash F$ pour dire que "F est non démontrable".

D2. Un séquent $\Gamma \vdash F$ est dit "prouvable" (ou démontrable) s'il peut être obtenu par une application finie de règles. Une formule F est prouvable si le séquent $\vdash F$ est prouvable.

5.1.5.1 Règles de démonstration

Les règles de démonstration sont les briques qui permettent de construire les dérivations. Une dérivation formelle est un assemblage fini (et correct !) de règles. Cet assemblage n'est pas linéaire (ce n'est pas une suite) mais un "arbre". Nous sommes en effet souvent amenés à faire des branchements.

Nous allons présenter un choix de règles. Nous aurions pu en présenter d'autres (à la place ou en plus) qui donneraient la même notion de prouvabilité. Celles que l'on a choisies sont "naturelles" et correspondent aux raisonnements que l'on fait habituellement en mathématique. Dans la pratique courante nous utilisons, en plus des règles ci-dessous, beaucoup d'autres règles mais celles-ci peuvent se déduire des précédentes. Nous les appellerons "règles dérivées".

Il est de tradition d'écrire la racine de l'arbre (le séquent conclusion) en bas, les feuilles en haut : la nature est ainsi faite... Comme il est également de tradition d'écrire, sur une feuille de papier, de haut en bas, il ne serait pas déraisonnable d'écrire la racine en haut et les feuilles en bas. Il faut faire un choix !

- d'un ensemble de "prémisses" : chacune d'elles est un séquent. Il peut y en avoir zéro, un ou plusieurs.
- du séquent conclusion de la règle
- d'une barre horizontale séparant les prémisses (en haut) de la conclusion (en bas). Sur la droit de la barre, nous indiquerons le nom de la règle.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e \tag{5.1.45}$$

Cette règle a deux prémisses ($\Gamma \vdash A \rightarrow$ et $\Gamma \vdash A$) et une conclusion ($\Gamma \vdash B$) et se note de manière abrégée sous la forme : $\rightarrow_e$. Elle peut se lire de deux manières :

- de bas en haut : si nous voulons prouver la conclusion, il suffit par utilisation de la règle de prouver les prémisses. C'est ce qu'on fait quand nous cherchons une démonstration. Cela correspond à "l'analyse".
- de haut en bas : si nous avons prouvé les prémisses, alors nous avons aussi prouvé la conclusion. C'est ce que nous faisons quand nous rédigeons une démonstration. Cela correspond à la "synthèse".

Pour les démonstrations il existe un nombre fini de règles au nombre de 17 que nous allons définir ci-après :

1. Axiome :

$$\boxed{\overline{\Gamma, A \vdash A}^{\text{ax}}} \tag{5.1.46}$$

De bas en haut : si la conclusion du séquent est une des hypothèses, alors le séquent est prouvable.

2. Affaiblissement :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\text{aff} \tag{5.1.47}$$

Explications :

- De haut en bas : si nous démontrons A sous les hypothèses Γ, en ajoutant d'autres hypothèses on peut encore démontrer A.
- De bas en haut : il y a des hypothèses qui peuvent ne pas servir

3. Introduction de l'implication :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B \to A}\to_i \tag{5.1.48}$$

De bas en haut : pour montrer que $A \to B$ nous supposons A (c'est-à-dire que nous l'ajoutons aux hypothèses) et nous démontrons B.

4. élimination de l'implication :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\to_e \tag{5.1.49}$$

De bas en haut : pour démontrer B, si nous connaissons un théorème de la forme $A \to B$ et si nous pouvons démontrer le lemme $A \to B$, il suffit de démontrer A.

5. Introduction à la conjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\wedge_i \tag{5.1.50}$$

De bas en haut : pour montrer $A \wedge B$, il suffit de montrer A et de montrer B.

6. élimination de la conjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\wedge_e^g \quad \text{ou} \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\wedge_e^d \tag{5.1.51}$$

De haut en bas : de $A \wedge B$, nous pouvons déduire A (élimination gauche) et B (élimination droite).

7. Introduction de la disjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^g \quad \text{ou} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_i^d \tag{5.1.52}$$

De bas en haut : pour démontrer $A \vee B$, il suffit de démontrer A (disjonction gauche) ou de démontrer B (disjonction droite).

En cours de traduction de l'anglais

8. Elimination de la disjonction :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e \qquad (5.1.53)$$

De bas en haut : si nous voulons montrer C et que nous savons que nous avons $A \vdash B$, il suffit de le montrer d'une part en supposant A, d'autre part en supposant B. C'est un raisonnement par cas.

9. Introduction de la négation :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i \qquad (5.1.54)$$

De bas en haut : pour montrer $\neg A$, nous supposons A et nous démontrons l'absurde ($\bot$).

10. élimination de la négation :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e \qquad (5.1.55)$$

De haut en bas : si nous avons montré $\neg A$ et A, alors nous avons démontré l'absurde ($\bot$).

11. Absurdité classique (reductio ad absurdum) :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_c \qquad (5.1.56)$$

De bas en haut : pour démontrer A, il suffit de démontrer l'absurde en supposant $\neg A$.

Cette règle, est équivalente à dire : A est vraie si et seulement si il est faux que A soit fausse. Cette règle ne va pas de soi : elle est nécessaire pour prouver certains résultats (il y a des résultats que nous ne pouvons pas prouver si nous n'avons pas cette règle). Contrairement, à beaucoup d'autres, cette règle peut par ailleurs être appliquée à tout moment. Nous pouvons, en effet, toujours dire : pour prouver A je suppose $\neg A$ et je vais chercher une contradiction.

12. Introduction du quantificateur universel :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \text{ n'est pas libre dans les formules de } \Gamma}{\vdash \forall x A} \forall_i \qquad (5.1.57)$$

De bas en haut : pour démontrer $\forall x\ A$, il suffit de montrer A en ne faisant aucune hypothèse sur x.

Remarque

Pour des démonstrations cette vérification (aucune hypothèse sur x) est souvent source d'erreurs.

En cours de traduction de l'anglais

13. élimination du quantificateur universel :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} \forall_e \tag{5.1.58}$$

De haut en bas : de $\forall x\ A$, nous pouvons déduire $A[x : 0t]$ pour n'importe quel terme t. Ce que nous pouvons dire aussi sous la forme : si nous avons prouvé A pour tout x, alors nous pouvons utiliser A avec n'importe quel objet t (! !).

14. Introduction du quantificateur existentiel :

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists_i \tag{5.1.59}$$

De bas en haut : pour démontrer $\exists x\ A$, il suffit de trouver un objet (in extenso un terme t) pour lequel nous savons montrer $A[x := t]$.

15. élimination du quantificateur existentiel :

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C \quad x \text{ n'est pas libre dans la formule de } \Gamma, \text{ neither in } C}{\Gamma \vdash C} \exists_e \tag{5.1.60}$$

De bas en haut : nous démontrons qu'il existe bien un ensemble d'hypothèses tel que $\exists x\ A$ et partant de ce résultat comme nouvelle hypothèse, nous démontrons C. Cette formule C hérite alors de la formule $\exists x\ A$ et dès lors x n'est pas libre dans C car il ne l'était déjà pas dans $\exists x\ A$.

16. Introduction de l'égalité :

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} =_i \tag{5.1.61}$$

De bas en haut : nous pouvons toujours montrer $t = t$. Cette règle signifie que l'égalité est réflexive (voir section Opérateurs page 289).

17. élimination de l'égalité :

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]} =_e \tag{5.1.62}$$

De haut en bas : si nous avons démontré $\Gamma \vdash A[x := t]$ et $t = u$, alors nous avons démontré $A[x := u]$. Cette règle exprime que les objets égaux ont les mêmes propriétés. Nous noterons cependant que les formules (ou relations) $t = u$ et $u = t$ ne sont pas, formellement, identiques. Il nous faudra démontrer que l'égalité est symétrique (nous en profiterons aussi pour démontrer que l'égalité est transitive).

Voyons maintenant trois exemples en les introduisant sous forme de théorèmes comme il se doit dans la théorie de la preuve !

En cours de traduction de l'anglais

Théorème 5.1. l'égalité est symétrique (un petit peu non trivial mais bon pour commencer) :

Démonstration 5.1.1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1=x_2\vdash x_1=x_1}=_i \qquad \dfrac{}{x_1=x_2\vdash x_1=x_2}\text{ax}}{x_1=x_2\vdash x_2=x_1}=_e}{\vdash x_1=x_2\rightarrow x_2=x_1}\rightarrow_i}{\vdash \forall x_1,x_2(x_1=x_2\rightarrow x_2=x_1)}\forall_i\times 2 \tag{5.1.63}$$

De haut en bas : nous introduisons l'égalité $=_i$ et prouvons à partir de l'hypothèse $x_1=x_2$ la formule $x_1=x_1$. En même temps, nous définissons l'axiome comme quoi $x_1=x_2$. Ensuite à partir de ces prémisses, nous éliminons l'égalité $=_e$ en substituant les termes de façon à ce qu'à partir de la supposition $x_1=x_2$ (venant de l'axiome) nous obtenions $x_2=x_1$. Ensuite, l'élimination de l'égalité implique automatiquement sans aucune hypothèse que $x_1=x_2\rightarrow x_2=x-1$. Dès lors, il nous suffit d'introduire le quantificateur universel pour chacune des variables (donc deux fois) sans aucune hypothèse afin d'obtenir que l'égalité est symétrique.

■ Q.E.D.

Théorème 5.2. L'égalité est transitive (c'est-à-dire si $x_1=x_2$ et $x_2=x_3$ alors $x_1=x_3$) . En notant F la formule $(x_1=x_2)\wedge(x_2=x_3)$:

Démonstration 5.2.1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F\vdash x_1=x_2\wedge x_2=x_3}\text{ax}}{F\vdash x_1=x_2}\wedge_e^g \qquad \dfrac{\dfrac{}{F\vdash x_1=x_2\wedge x_2=x_3}\text{ax}}{F\vdash x_2=x_3}\wedge_e^d}{F\vdash x_1=x_3}=_e}{\vdash(x_1=x_2\wedge x_2=x_3)\rightarrow x_1=x_3}\rightarrow_i}{\forall x_1,x_2,x_3((x_1=x_2\wedge x_2=x_3)\rightarrow x_1=x_3)}\forall_i\times 3 \tag{5.1.64}$$

Que faisons, nous ici ? Nous introduisons d'abord la formule F deux fois en tant qu'axiome afin de la "décortiquer" plus tard à gauche et à droite (nous n'introduisons pas l'égalité supposée déjà introduite en tant que règle). Une fois ceci fait, nous éliminons à gauche et à droite la conjonction sur la formule pour travailler sur les termes gauches et droites seuls et introduisons l'égalité sur les deux termes ce qui fait qu'à partir de la formule nous avons l'égalité transitive. Il s'ensuit que sans aucune hypothèse cela implique automatiquement que l'égalité est transitive et finalement nous disons que ceci est valable pour toute valeur des différentes variables (si la formule est vraie, alors l'égalité est transitive).

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Et maintenant le dernier gros exemple sous la forme d'un théorème :

Théorème 5.3. Toute involution est une bijection (voir section de Théorie des Ensembles page 404).

Démonstration 5.3.1. Soit f un symbole de fonction unaire (à une variable), nous notons (pour plus de détails voir le chapitre de Théorie Des Ensembles page 401) :

- Inj$[f]$ la formule :

$$\forall x, y : \quad f(x) = f(y) \rightarrow x = y \tag{5.1.65}$$

qui signifie que f est injective.

- Surj$[f]$ la formule :

$$\forall y, \exists x : \quad f(x) = y \tag{5.1.66}$$

qui signifie que f est surjective

- Bij$[f]$ la formule :

$$\text{Inj}[f] \wedge \text{Surj}[f] \tag{5.1.67}$$

qui signifie que f est bijective.

- Inv$[f]$ la formule :

$$\forall x : \quad f(f(x)) = x \tag{5.1.68}$$

qui signifie que f est une involution (nous notons également cela $f \circ f = \text{Id}$) c'est-à-dire que la composition de f est l'identité).

Nous souhaiterions savoir si :

$$\text{Inv}[f] \vdash \text{Bij}[f] \tag{5.1.69}$$

Nous allons présenter (en essayant que ce soit au plus clair) cette démonstration de quatre manières différentes : classique (informelle), classique (pseudo-formelle), formelle en arbre et formelle en ligne.

En cours de traduction de l'anglais

- **Méthode classique (informelle) :**

  Nous devons montrer que si f est involutive alors elle est donc bijective. Nous avons donc deux choses à montrer (et les deux doivent être satisfaites en même temps) : que la fonction est injective et surjective.

  1. Montrons dans un premier temps que l'involution est injective.
     Nous supposons pour cela, puisque f est involutive elle est donc injective, tel que :

$$\forall x, y : \quad f(x) = f(y) \tag{5.1.70}$$

     implique :

$$x = y \tag{5.1.71}$$

     Or, cette supposition découle automatiquement de la définition de l'involution que :

$$\forall x : f(f(x)) = x, \forall y : f(f(y)) = y \tag{5.1.72}$$

et de l'application de f à la relation :

$$f(x) = f(y) \tag{5.1.73}$$

(soit trois égalités $=_e \times 2$) tel que :

$$f(f(x)) = f(f(y)) \tag{5.1.74}$$

nous avons donc :

$$x = y \tag{5.1.75}$$

2. Montrons que l'involution est surjective.
   Si elle est surjective, alors nous devons avoir :

$$\forall y \exists x : \quad f(x) = y \tag{5.1.76}$$

Or, définissons la variable x par définition de l'involution elle-même :

$$x := f(y) \tag{5.1.77}$$

(puisque $y = f(x)$...) un changement de variables après nous obtenons :

$$f(f(y)) = y \tag{5.1.78}$$

et donc la surjectivité est assurée.

En cours de traduction de l'anglais

- **Méthode pseudo-formelle :**

Nous reprenons la même chose et nous y injectons les règles de la théorie de la démonstration :

Nous devons montrer que f involutive est donc bijective. Nous avons donc deux choses à montrer $(\wedge_i)$ (et les deux doivent être satisfaites en même temps) : que la fonction est injective et surjective :

$$\text{Inj}[f] \wedge \text{Surj}[f] \tag{5.1.79}$$

1. Montrons d'abord que l'involution est injective. Nous supposons pour cela, puisque f est involutive et donc injective, que :

$$(\forall i) \quad \forall x, y : \quad f(x) = f(y) \tag{5.1.80}$$

implique :

$$(\rightarrow_i) \quad x = y \tag{5.1.81}$$

Or, cette supposition découle automatiquement de la définition de l'involution que :

$$(\forall_e, \text{ax}) \quad \forall x \; f(f(x)) = x, \forall y \; f(f(y)) = y \tag{5.1.82}$$

et de l'application de f à la relation :

$$f(x) = f(y) \tag{5.1.83}$$

(soit trois égalités $=_e \times 2$) tel que :

$$f(f(x)) = f(f(y)) \tag{5.1.84}$$

Nous avons donc :

$$x = y \tag{5.1.85}$$

2. Montrons que l'involution est surjective. Si elle est surjective, alors nous devons avoir :

$$\forall y \exists x : \quad f(x) = y \quad (\forall i) \tag{5.1.86}$$

Or, définissons la variable x par définition de l'involution elle-même :

$$(\exists_i) \quad x = f(y) \tag{5.1.87}$$

puisque $y = f(x)$...., un changement de variables après nous obtenons :

$$f(f(y)) = y \tag{5.1.88}$$

et donc :

$$(\forall_e, \text{ax}) \tag{5.1.89}$$

la surjectivité est assurée.

- **Méthode formelle en arbre :**

aisons cela avec la méthode graphique que nous avons déjà présentée plus haut.

1. Montrons que l'involution est injective :
Pour cela, montrons d'abord que :

$$f(x) = f(y) \vdash f(f(x)) = f(f(y)) \tag{5.1.90}$$

Donc :

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\text{Inv}[f] \vdash \forall y(f(f(y)) = y)}\,\text{ax}}{\text{Inv}[f] \vdash \{f(y) = x\}[y := f(x)]}\,\forall_e \qquad \overline{f(x) = f(y) \vdash f(x) = f(y)}\,\text{ax}}{f(x) = f(y) \vdash \{f(x) = y\}[x := f(y)]} =_e \textbf{(a)} \tag{5.1.91}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\text{Inv}[f] \vdash \forall x(f(f(x)) = x)}\,\text{ax}}{\text{Inv}[f] \vdash \{f(x) = y\}[x := f(y)]}\,\forall_e \qquad \overline{f(x) = f(y) \vdash f(x) = f(y)}\,\text{ax}}{f(x) = f(y) \vdash \{f(y) = x\}[y := f(x)]} =_e \textbf{(b)} \tag{5.1.92}$$

Ce qui nous amène à écrire :

$$\dfrac{\textbf{(a)(b)}}{f(x) = f(y) \vdash f(f(x)) = f(f(y))} =_e \textbf{(c)} \tag{5.1.93}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Cette dernière relation est abrégée $=_c$ et appelée (comme d'autres existantes) "règle dérivée" car c'est un raisonnement qui est très souvent fait lors de démonstrations et un peu long à développer à chaque fois...

Dès lors :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{Inv}[f]\rightarrow\text{Inv}[f]}\text{ax}}{\text{Inv}[f]\vdash f(f(x))=x}\forall_e\quad\dfrac{\dfrac{}{\text{Inv}[f]\rightarrow\text{Inv}[f]}\text{ax}}{\text{Inv}[f]\vdash f(f(y))=y}\forall_e}{f(f(x))=f(f(y))\vdash x=y}=_e\ \textbf{(c)}}{\text{Inv}[f],f(x)=f(y)\vdash x=y}=_e\ \textbf{(d)}}{\dfrac{\text{Inv}[f]\vdash f(x)=f(y)\rightarrow x=y}{\text{Inv}[f]\vdash\text{Inv}[f]}\forall_i}\rightarrow_i \tag{5.1.94}$$

2. Montrons que l'involution est surjective :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{Inv}[f]\vdash\forall x\{f(f(x))=x\}}\text{ax}}{\text{Inv}[f]\vdash\{f(x)=y\}[x:=f(y)]}\forall_e}{\text{Inv}[f]\vdash\exists x\{f(x)=y\}}\exists_i}{\text{Inv}[f]\vdash\text{Surj}[f]}\forall_i\ \textbf{(e)} \tag{5.1.95}$$

Il s'ensuit :

$$\dfrac{\textbf{(d)(e)}}{\text{Inv}[f]\vdash\text{Inj}[f]\wedge\text{Surj}[f]}\wedge_i \tag{5.1.96}$$

- **Méthode formelle en ligne :**

Nous pouvons faire la même chose sous une forme un peu moins... large... et plus tabulée... (cela n'en est pas moins indigeste) :

$$\begin{array}{ll}
\text{Inv}[f]\vdash\text{Bij}[f] & \vee\, i \\
\quad 1:=\text{Inv}[f]\vdash\text{Inj}[f] & \\
\quad 2:=\text{Inv}[f]\vdash\text{Surj}[f] &
\end{array} \tag{5.1.97a}$$

$$\begin{array}{ll}
(1)\text{Inv}[f]\vdash\text{Inj}[f] & \forall i \\
\quad \text{Inv}[f]\vdash f(x)=f(y)\rightarrow x=y & \rightarrow_i \\
\quad \text{Inv}[f],f(x)=f(y)\vdash x=y & =_e\times 2(i)(ii)(iii) \\
\quad (i)\quad \text{Inv}[f]\vdash f(f(x))=x & \forall_e \\
\qquad\quad \text{Inv}[f]\vdash\text{Inv}[f] & \text{ax} \\
\quad (ii)\quad \text{Inv}[f]\vdash f(f(y))=y & \forall_e \\
\qquad\quad \text{Inv}[f]\vdash\text{Inv}[f] & \text{ax} \\
\quad (iii)\quad f(x)=f(y)\vdash f(f(x))=f(f(y)) & =_c \\
\qquad (1')f(x)=f(y)\vdash f(x)=f(y) & \text{ax}
\end{array} \tag{5.1.97b}$$

$$\begin{array}{ll}
(2)\text{Inv}[f]\vdash\text{Surj}[f] & \forall i \\
\quad \text{Inv}[f]\vdash\exists x\{f(x)=y\} & \exists_i \\
\quad \text{Inv}[f]\vdash\{f(x)=y\}[x:=f(y)] & \forall_e \\
\quad \text{Inv}[f]\vdash\forall x\{f(f(x))=x\} & \text{ax}
\end{array} \tag{5.1.97c}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

Remarque

Le lecteur intéressé à approfondir le sujet pourra lire les trois célèbres volumes de *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell [455] (considérés comme la "bible" de la Théorie de la Démonstration par de nombreux spécialistes) qui ont un total approximatif de 1900 pages où les 380 premières pages du premier tome sont consacrées à la preuve que $1+1=2$...

$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 \,.\, \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\, \equiv . \,\alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 \,.\, \supset \vdash :. \alpha = \iota\text{‘}x \,.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\, \supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\, \equiv . \, x \neq y \,.$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \, \iota\text{‘}x \cap \iota\text{‘}y = \Lambda \,.$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \, \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 \,.\, \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) \,.\, \alpha = \iota\text{‘}x \,.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\, \supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\, \equiv . \, \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 \,.\, *52{\cdot}1 \,.\, \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

Gardez évidemment à l'esprit qu'en binaire nous avons... :

$$1+1=10$$

ou en unaire (base 1) :

$$1+1=11$$

Nous pouvons aussi définir un groupe de deux éléments $\{0,1\}$ donc l'addition donnerait :

$$1+1=0$$

Attention ! Cependant, tout ce formalisme hautement technique ne permet pas toujours de savoir où se trouve l'erreur dans la "pseudo-preuve" suivante :

Supposons :

$$a=b \tag{5.1.98}$$

Multiplions les deux côtés par a :

$$a^2=ab \tag{5.1.99}$$

Soustrayons par b^2 :

$$a^2-b^2=ab-b^2 \tag{5.1.100}$$

Nous factorisons :

$$(a+b)(a-b)=b(a-b) \tag{5.1.101}$$

Nous divisons par $(a-b)$:

$$a+b=b \tag{5.1.102}$$

Comme $a=b$, nous avons :

$$b+b=b \tag{5.1.103}$$

Dès lors :

$$2=1 \tag{5.1.104}$$

Si vous ne voyez pas l'erreur, voici l'analyse :

Écrit	**Réalité**	**Jugement**
$a=b$	$a=a$	Vrai
$a^2=ab$	$a^2=aa$	Vrai
$a^2-b^2=ab-b^2$	$a^2-a^2=aa-a^2$	Vrai $(=0)$
$(a+b)(a-b)=b(a-b)$	$(a+a)(a-a)=a(a-a)$	Vrai $(=0)$
$a+b=b$	$a+a=a$	Faux (excepté si $a=0$) et interdit comme diviser par $a-b$ est équivalent à diviser par 0
$b+b=b$	$a+a=a$	Faux
$2b=b$	$2a=a$	Faux
$2=1$	$2=1$	Faux

En cours de traduction de l'anglais

Bien évidemment il existe de nombreux autres types de preuves (... ☺) comme :

- **Preuve par intimidation :** Trivial !
- **Preuve par notation lourde :** Le théorème découle immédiatement du fait que $\left|\oplus_{k\in S}\left(\mathfrak{r}^{F^a(i)}\right)_{i\in U_k}\right| \leqslant \aleph_1$ quand $[\mathfrak{R}]_w \cap \mathbb{F}^\alpha(\mathbb{N}) \neq \emptyset$
- **Preuve par la littérature inaccessible :** Le théorème est un corollaire facile d'un résultat prouvé dans une note manuscrite remise lors d'une conférence par la Société mathématique yougoslave en 1973.
- **Preuve fantôme :** La preuve peut être trouvée à la page 478 dans un manuel qui s'avère avoir 396 pages.
- **Preuve par argument circulaire :** La proposition 5.18 dans [BL] est un corollaire facile du théorème 7.18 dans [C], qui est encore basé sur le corollaire 2.14 dans $[K]$. Ceci, d'autre part, est dérivé en référence à la proposition 5.18 dans [BL].
- **Preuve par autorité :** Mon bon collègue Andrew a dit qu'il pensait qu'il aurait pu en apporter une preuve il y a quelques années...
- **Preuve par référence Internet :** Pour ceux que ça intéresse, le résultat est affiché sur la page web de ce livre (ou wikipedia) et qui n'est malheureusement plus accessible.

- **Preuve par évitement :** Chapitre 3 : La preuve de ceci est retardée jusqu'au chapitre 7, lorsque nous avons développé la théorie encore plus loin. Chapitre 7 : Pour simplifier les choses, nous ne le démontrons que pour le cas $z = 0$, mais le cas général est traité dans l'annexe C. Annexe C : La preuve formelle dépasse le cadre de ce livre, mais bien sûr, notre intuition sait que cela est vrai.

5.1.6 Lois de la pensée

Les lois de la pensée sont des règles axiomatiques fondamentales sur lesquelles le discours rationnel (ou philosophique) lui-même est souvent considéré comme fondé. La formulation et la clarification de telles règles ont une longue tradition dans l'histoire de la philosophie et de la logique. Généralement, elles sont considérées comme des lois qui guident et sous-tendent la pensée, les expressions, les discussions, etc. de chacun. Cependant, ces idées classiques sont souvent remises en question ou rejetées dans des développements plus récents, tels que la logique intuitionniste, le dialectéisme et la logique floue.

Définition (#25) : Les "lois de la pensée" sont des axiomes par lesquels - ou conformément auxquels - une pensée valide procède, ou qui justifient une inférence valide, ou auxquels toutes les déductions rhétoriques (c'est-à-dire sémantiques) valides sont réductible et pas nécessairement lié à une science fondée sur les évidences. Les lois de la pensée sont des règles qui s'appliquent sans exception à tout sujet de pensée, etc. cependant elles peuvent être appliquées uniquement aux phrases, pas aux objets (!) ; on dit parfois qu'elles sont "l'objet de la logique" où le terme "logique" est l'étude formelle de la vérité basée sur les évidences scientifiques.

Attention ! Comme déjà mentionné, comme tout système axiomatique, les lois de la pensée sont soumises aux deux théorèmes d'incomplétude de Gödel (prouvés en 11931 - selon calendrier holocène) qui sont, pour rappel, parmi les résultats les plus importants de la logique moderne et ont de profondes implications ! Ils concernent les limites de la démonstrabilité dans les théories axiomatiques formelles. Le premier théorème d'**incomplétude** stipule que dans tout système formel cohérent F au sein duquel une certaine quantité d'arithmétique peut être effectuée, il existe des énoncés du langage de F qui ne peuvent ni être démontrés ni réfutés dans F. Formellement :

$$F \vdash \neg \mathrm{Dem}_F \left(\ulcorner G_F \urcorner\right)$$

Selon le deuxième théorème d'incomplétude, un tel système formel ne peut pas démontrer que le système lui-même est **cohérent** (en supposant qu'il soit effectivement cohérent). Formellement :

$$F \nvdash \mathrm{Cons} \equiv \neg \mathrm{Dem}_F \left(0 = 0'\right)$$

De plus, une démonstration dans un système axiomatique donné n'est pas nécessairement vraie dans un autre !

En d'autres termes, les théorèmes de Gödel ne réfutent rien en mathématiques. Au contraire, cela prouve qu'il existe certaines vérités dans un cadre axiomatique donné qui ne peuvent pas être démontrées à l'aide du cadre actuellement accepté ou qui

peuvent être réfutées dans un autre cadre axiomatique ou par les évidences de la science expérimentale.

Ou encore dit autrement (car certains ont du mal à comprendre), le théorème ne remet pas en cause la logique et ne détruit pas le tissu de la pensée. Cela dit simplement que certains systèmes axiomatiques, satisfaisant diverses conditions, ne sont pas complets, ce qui signifie que certaines affirmations ne peuvent être ni démontrées ni réfutées par ces systèmes (mais d'autres peuvent !). Ces mêmes affirmations "indécidables" pourraient très bien être prouvées ou réfutées dans d'autres systèmes axiomatiques !

> *De nombreux logiciens ont été amenés à la conclusion qu'il existe des objets irréels. [...] nous pouvons faire des propositions vraies dont ceux-ci sont les sujets ; ils doivent donc avoir une sorte d'existence logique, sinon les propositions dans lesquelles ils apparaissent n'auraient aucun sens. [...] La logique, je dois le maintenir, ne doit pas plus admettre une licorne que ne le fait la zoologie ; car la logique s'intéresse au monde réel tout aussi véritablement que la zoologie [...]*

quote 5.1:187.#30

Bertrand Russell

En cours de traduction de l'anglais

Surpris ? Les gens en viennent généralement à penser, en raison d'une absence de formation en études supérieures ou postuniversitaires en logique formelle, que la logique est bien plus qu'elle ne l'est réellement. Par conséquent, une meilleure compréhension de ce qu'est la logique peut être améliorée en la délimitant de ce qu'elle n'est pas :

- La logique n'est pas l'étude de ce qui, le cas échéant, constitue « le fondement de l'être pour l'univers » – Ceci est le rôle de la métaphysique !
- La logique n'est pas un ensemble de lois qui régissent l'univers – c'est de la physique !
- La logique n'est pas une « entité » immatérielle qui transcende la réalité – De telles discussions appartiennent au domaine de la théologie !
- La logique n'est pas une méthode pour « étudier le monde » – Ceci est le rôle de science fondée sur les évidences !
- La logique n'est pas la méthode pour évaluer les axiomes – Ceci est le rôle de la raison pure !
- La logique n'est pas une manière d'évaluer la « vérité » – Ceci est le rôle de la philosophie !
- La logique n'est pas un ensemble de lois qui régissent le comportement humain – Ceci est le rôle de la psychologie !
- La logique n'est même pas une étude de la façon dont les gens raisonnent. Heureusement, la raison humaine ne se limite pas à la logique...

Remarque

Le lecteur se souviendra également du trilemme de Münchhausen (voir page **??**) qui est une expérience de pensée visant à démontrer l'impossibilité théorique de prouver une vérité, même dans les domaines de la logique et des mathématiques, sans faire appel à des hypothèses acceptées telles que : 1) L'argument circulaire, dans lequel la preuve d'une proposition présuppose la vérité de cette proposition même. 2) L'argument régressif, dans lequel chaque preuve nécessite une preuve supplémentaire, à l'infini. 3) L'argument dogmatique, qui repose sur des préceptes acceptés qui sont simplement affirmé plutôt que défendu.

Ces avertissements (rappels) ayant été faits, revenons aux lois de la pensée (qui s'inscrivent dans le cadre des « tautologies » logiques) dans le cadre subjectif de la logique Aristotélicienne :

A1. **La loi de l'identité (ID) :** tout est (c'est-à-dire est identique à) lui-même, ou tout ce qui est est (*Métaphysique IV (Gamma)*, 3, Aristote, année 9650 selon le calendrier holocène) :

$$\forall A : \; A = A \tag{5.1.105}$$

A2. **La loi de contradiction (ou de non-contradiction ; NC) :** aucune chose ayant une qualité donnée n'a également le négatif de cette qualité (par exemple, aucun nombre pair n'est impair), ou Rien ne peut à la fois être et ne pas être (*Métaphysique IV (Gamma)*, 3, Aristote, année 9650 selon le calendrier holocène) :

$$\neg(A \wedge \neg A) \tag{5.1.106}$$

Remarque

La logique ternaire de Lukasiewicz est un exemple de système logique dans lequel les lois classiques de non-contradiction et du tiers exclu (voir ci-dessous) sont explicitement rejetées en tant que lois générales applicables à toutes les propositions.

Il existe des objets (c'est-à-dire des phrases) qui violent la loi de non-contradiction et sont appelés "dialetheias". Comme la phrase (objet) : *Cette affirmation est fausse* connu sous le nom de paradoxe d'Epimenedes. Si nous supposons que c'est vrai, alors cela doit être faux (puisqu'elle prétend être fausse). Mais si nous supposons que c'est faux, alors cela doit être vrai (puisqu'elle prétend être fausse).

A3. **La loi du tiers exclu (EM) :** tout ce qui est soit a une qualité donnée, soit a le négatif de cette qualité (par exemple, chaque nombre est pair ou impair), ou Tout doit être ou ne pas être (*Métaphysique IV (Gamma)*, 6, Aristote, année 9650 selon le calendrier holocène) :

$$A \vee \neg A \tag{5.1.107}$$

Alors que la loi de non-contradiction nous dit qu'aucune affirmation ne peut être à la fois vraie et fausse, la loi du tiers exclu nous dit qu'elles doivent toutes être l'une ou l'autre.

En c traduction de l' anglais

Remarque

La loi du tiers exclu est supprimée dans la "logique intuitionniste" (et aussi dans la "logique floue"), parfois plus généralement appelée "logique constructive", car à l'opposé de la "logique classique", elle ne se concentre pas tant sur la question de savoir si les affirmations sont "vraiment" vraies ou fausses, dans ce sens - elle se concentre sur si nous savons qu'une affirmation est vraie, ou que savons qu'elle est fausse ! Ainsi, avant qu'une personne travaillant dans le domaine des mathématiques constructives puisse déclarer une affirmation, elle doit avoir une justification concrète de la véracité de cette affirmation. Les arguments tels que la démonstration par contradiction ne sont pas autorisés !

Un exemple de la façon dont la loi du tiers exclu échoue dans ce cadre a été qualifié de "contre-exemple faible" par L. E. J. Brouwer (considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du 120e siècle selon le calendrier holocène). En voici un : considérons le nombre π. En fait, même en mathématiques classiques, nous ne savons pas actuellement s'il existe une infinité d'occurrences du chiffre 5 dans le développement décimal de π. Soit A l'énoncé « *il y a une infinité d'occurrences de* 5 *dans le développement décimal de* π ». Alors une personne travaillant en mathématiques constructives ne peut pas affirmer « A *ou pas* A », car elle ne sait pas laquelle des deux options est valable. Bien sûr « A *ou pas* A » est une instance de la loi du tiers exclu, et est valable en mathématiques classiques.

En cours de traduction... Opera Magistris

En physique indéterministe, le futur est ouvert. Par conséquent, les énoncés et propositions concernant le futur ne doivent pas nécessairement être vrais ou faux. Par exemple, la proposition « il pleuvra dans exactement un an à Piccadilly Circus » n'est ni Vraie (car il n'est pas prédéterminé qu'il pleuve), ni Fausse (car il n'est pas prédéterminé qu'il ne pleuve pas). Par conséquent, dans un monde avec un futur ouvert, la loi du tiers exclu ne tient pas !

Plus techniquement, les trois axiomes (lois) ci-dessus peuvent être notés :

$$\begin{gathered}\forall a(a\equiv\forall P\ P(a))\\ \forall a\neg\exists P\ (P(a)\wedge\neg P(a))\\ \forall a\forall P\ (P(a)\vee\neg P(a))\end{gathered}\tag{5.1.108}$$

Certains ajoutent une quatrième loi (axiome) :

A4. **Raison suffisante (SR) :** La vérité est la référence d'un jugement à quelque chose en dehors de lui comme raison ou fondement suffisant. De tout ce qui est, on peut trouver pourquoi il est :

$$\forall a\exists b\ (b\rightarrow a)\tag{5.1.109}$$

Ainsi les quatre axiomes de la pensée (loi) peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{array}{c} \forall a(a \equiv \forall P\ P(a)) \\ \forall a \neg \exists P\ (P(a) \wedge \neg P(a)) \\ \forall a \forall P\ (P(a) \vee \neg P(a)) \\ \forall a \exists b\ (b \rightarrow a) \end{array} \qquad (5.1.110)$$

L'expression "lois de la pensée" a gagné en importance grâce à son utilisation par George Boole (11815-11864) pour désigner les théorèmes de son "algèbre logique" ; en fait, il a intitulé son deuxième livre de logique *Une enquête sur les lois de la pensée sur lesquelles sont fondées les théories mathématiques de la logique et des probabilités* (11854). Les logiciens modernes, en désaccord presque unanime avec Boole, considèrent cette expression comme un terme inapproprié ; Aucune des propositions ci-dessus classées sous « lois de la pensée » ne concerne explicitement la pensée en soi, un phénomène mental étudié par la psychologie, et n'implique pas non plus de référence explicite à un penseur ou à un connaisseur comme ce serait le cas en pragmatique ou en épistémologie. La distinction entre la psychologie (en tant qu'étude des phénomènes mentaux) et la logique (en tant qu'étude des inférences valides) est largement acceptée !

Le lecteur doit se rappeler, comme nous l'avons déjà mentionné plus tôt (!), que la logique n'est pas liée à la science fondée sur les évidences mais uniquement aux phrases (art rhétorique, c'est-à-dire sémantique) comme déjà indiqué plus haut dans la définition ! Par exemple, certains prétendent que la loi de non-contradiction est violée par :

En cours de traduction de l'anglais

- Le photon a la propriété d'être à la fois une *particule* et sa propre antiparticule[2] (antiparticule[3])
- Il existe une probabilité non nulle qu'une particule se trouve à plusieurs positions en même temps avant sa mesure (effondrement de la fonction d'onde)
- La bouteille de Klein qui a sa surface externe qui est en même temps sa propre surface opposée (la bande de Möbius a la même propriété que la bouteille de Klein)
- La sphère qui est sans fin et sans limites n'est en même temps pas de taille infinie (d'où elle est à la fois finie et infinie)
- Le segment qui est borné et a une taille finie contient à la fois une infinité de points (d'où il est à la fois fini et infini)
- La corne de Gabriel qui a une surface infinie mais en même temps un volume fini
- De nombreuses séries mathématiques ont des termes infinis mais en même temps une valeur finie

[2]Considérons une réaction d'annihilation d'une paire massive particule-antiparticule. Comme nous le savons, il y a de fortes chances que cela produise une paire de photons. La réaction inverse détruira les photons et produira une paire massive de particules antiparticules. Cela prouve qu'un photon de spin $+S$ est l'antiparticule d'un photon de spin $-S$ et de même fréquence.

[3]Les particules à spin demi-entier ont des antiparticules bien définies, les particules à spin entier présentent cette fascinante dualité.

- Le nombre 0 est un nombre pair ou impair ou les deux à la fois ?
- Le cercle est en même temps un carré sous une transformation topologique donnée en mathématiques avancées (pour la même raison qu'une tasse de café est topologiquement un tore)
- Au niveau quantique, la cause peut survenir après l'effet (rétrocausalité)
- Dans l'interprétation de Copenhague de la physique quantique, le chat de Schrödinger est mort et vivant en même temps (ce qu'il n'est pas dans l'interprétation des multivers de la physique quantique)

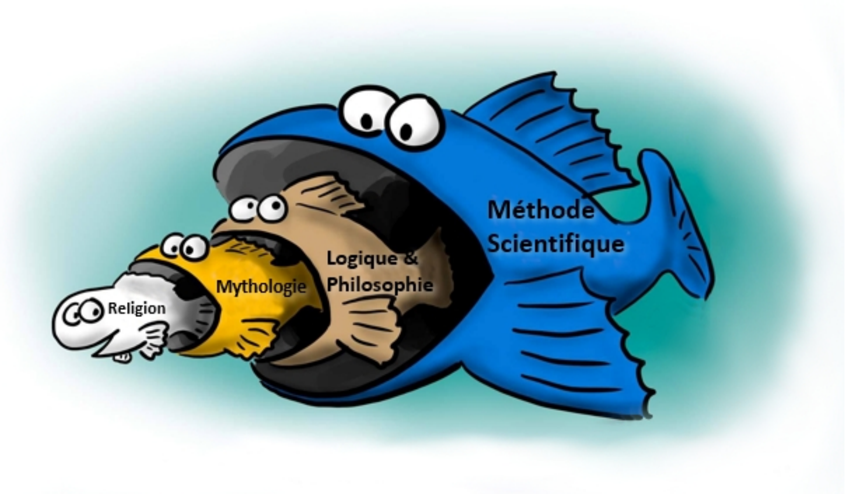
Nous voyons avec ces exemples jouets ci-dessus que les trois axiomes de la logique classique (c'est-à-dire les lois de la pensée) ne suffisent pas toujours pour avoir un débat rhétorique sur le monde réel tel que le connaît la science moderne !

Remarque

Le problème avec la logique classique est que certains logiciens prétendent que quelque chose qui est "opposé" dans la vraie vie ne rend pas la différence logiquement nécessaire......... !

Cependant, aucun des exemples ci-dessus ne viole la loi de non-contradiction ! La raison triviale est que la loi de non-contradiction fait référence à la valeur de vérité des propositions (phrases) mais pas aux objets ou entités ! !

En cours de traduction ... is



Remarque

Garrett Birkhoff et John Von Neuman ont proposé dans les années 11930 (calendrier holocène) que les paradoxes de la mécanique quantique pouvaient être expliqués si nous abandonnions la logique classique et utilisions à la place une forme de logique quantique (Birkhoff, Garrett ; von Neumann, John. "*The Logic of Quantum Mechanics*". Ann. Math. 37 (4) : 823-843). Une telle logique quantique modifierait ou abandonnerait certaines des règles de la logique classique et serait un cas parfait d'axiomes logiques obtenus par l'observation.

L'Arbre de la Logique

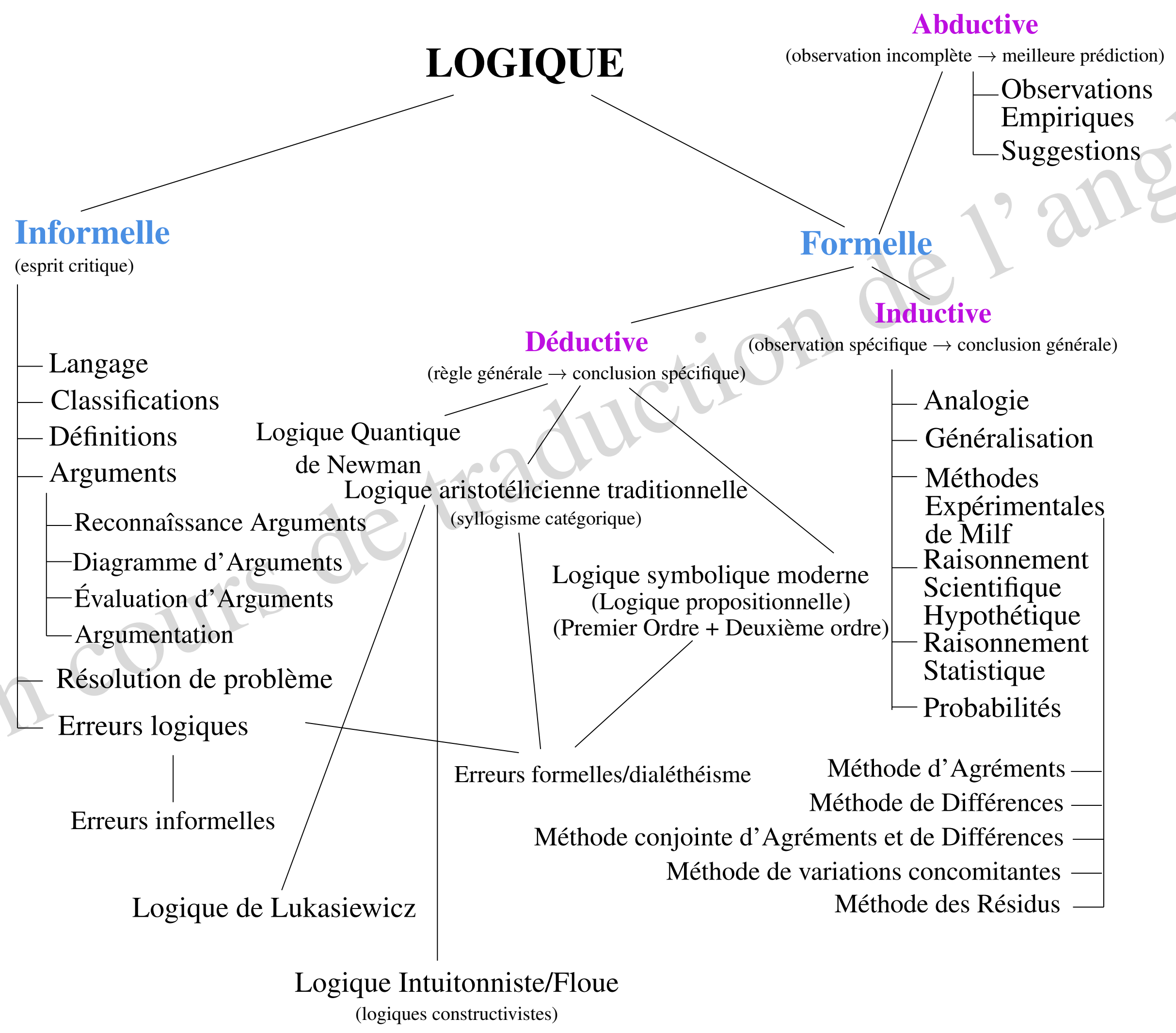


FIG. 5.4 – **Arbre de la Logique**

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#5.1.26) :

D1. Un système est dit "consistent" si nous ne pouvons pas y démontrer à la fois une affirmation et son contraire. Nous ne pouvons pas y démontrer quelque chose comme $1 = 2$.

Autrement dit, dans un système consistent, tout ce qui est prouvable est vrai !

D2. Un système est dit "complet" si chaque affirmation vraie peut y être démontrée ou réfutée. En d'autres termes, dans un système complet, tout ce qui est vrai est démontrable !

D3. Un système est dit "décidable" si pour chaque type de problème, il existe une procédure qui, en théorie, donnera une solution. Un problème est décidable si une réponse "vrai" ou "faux" peut être donnée plutôt que "je ne sais pas", s'écrasant ou tournant en boucle pour toujours dans un état d'indécision interminable.

Voici un tableau résumant certains résultats bien connus des théorèmes de Gödel :

Théorie	Est-ce Consistant ?	Est-ce complet ?	Est-ce Décidable ?
Calcul Propositionnel	Oui	Oui	Oui
Géométrie Euclidienne	Oui	Oui	Oui
Logique du 1^{er} ordre	Oui	Oui	**Non**
Arithmétique $(+,-)$ seuls	Oui	Oui	Oui
Arithmétique complète $(+,-,\times,\div)$	??	Non	Non

TAB. 5.12 – Consistance, complétude et décidabilité des systèmes axiomatiques courants

En cours de traduction de l'anglais

Le fait que la logique du premier ordre soit indécidable a des implications significatives pour l'informatique, les mathématiques et la philosophie ! En philosophie :

- L'indécidabilité de la logique du premier ordre a des implications sur la nature de la vérité et de la connaissance. Cela suggère qu'il existe certaines vérités qui échappent à la portée de la raison humaine.
- Cela a également des implications sur la nature même de la logique. Cela suggère que la logique n'est pas un système complet et parfait pour raisonner sur le monde.

Le table ci-dessus connue grâce à Kurt Gödel est célèbre pour les corollaires suivants :

T1. Tout système formel capable de faire de l'arithmétique élémentaire est soit incohérent, soit incomplet !

T2. Tout système formel capable d'exprimer sa propre cohérence peut prouver sa propre cohérence si et seulement s'il est incohérent !

Le lecteur doit se rappeler que ce n'est pas parce que quelque chose est logique que la conclusion est vraie dans le cadre d'une science fondée sur les évidences, car la logique est un système axiomatique rhétorique (c'est-à-dire sémantique) déconnecté de la réalité ! Surtout en logique,

nous pouvons utiliser des prémisses ou des hypothèses non étayées ou, pire encore, des prémisses ou des hypothèses qui sont manifestement démontrées fausses par la science fondée sur les évidences !

La preuve ontologique de Gödel (preuve logique de l'existence d'une divinité) en est un exemple célèbre :

Ax. 1.	$(P(\varphi) \wedge \Box\forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow P(\psi)$
Ax. 2.	$P(\neg\varphi) \Leftrightarrow \neg P(\varphi)$
Th. 1.	$P(\varphi) \Rightarrow \Diamond\exists x\varphi(x)$
Df. 1.	$G(x) \Leftrightarrow \forall\varphi(P(\varphi) \Rightarrow \varphi(x))$
Ax. 3.	$P(G)$
Th. 2.	$\Diamond\exists xG(x)$
Df. 2.	$\varphi \text{ ess } x \Leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall\psi(\psi(x) \Rightarrow \Box\forall y(\varphi(y) \Rightarrow \psi(y)))$
Ax. 4.	$P(\varphi) \Rightarrow \Box P(\varphi)$
Th. 3.	$G(x) \Rightarrow G \text{ ess } x$
Df. 3.	$E(x) \Leftrightarrow \forall\varphi(\varphi \text{ ess } x \Rightarrow \Box\exists y\varphi(y))$
Ax. 5.	$P(E)$
Th. 4.	$\Box\exists xG(x)$

La plupart des critiques de la démonstration de Gödel visent ses axiomes : comme pour toute démonstration dans tout système logique, si les axiomes dont dépend la la démonstration sont mis en doute, alors les conclusions peuvent être mises en doute ! Cela s'applique particulièrement à la démonstration de Gödel – car elle repose sur cinq axiomes considérés comme discutables. Une démonstration ne nécessite pas que la conclusion soit correcte, mais plutôt qu'en acceptant les axiomes, la conclusion suive logiquement !

Nous pouvons également prouver que la plupart des dieux n'existent pas en utilisant la logique :

- Prémisse (prémisse majeure) : Tout ce qui existe a une cause[4]
- Propriété (prémisse mineure) : Dieu est un concept sans cause
- Donc : Dieu n'a pas de cause donc il n'existe pas

Ou formellement :

Ax. 1.	$\exists P\forall xP(x)$
Df. 1.	$\mathcal{G} \to \neg P(x)$
Th. 1.	$\Box\neg P(\mathcal{G}) \to \nexists\mathcal{G}$

Ce qui est un peu similaire dans l'idée à cette démonstration :

En cours de traduction de l'anglais

[4]Nous savons depuis l'émergence le développement de la physique quantique et de la cosmologie quantique que cette prémisse est évidemment fausse comme nous le démontrerons lors de notre étude des ces deux domaines de la physique plus tard !

- Prémisse majeure : Si Dieu peut exister sans cause alors quelque chose peut exister sans cause
- Prémisse mineure : Si quelque chose existe sans cause alors pourquoi pas le Cosmos[5]
- Donc : Dieu ne résout rien étant donné que l'existence d'un Dieu est un problème aussi grand que celui de l'existence du Cosmos

Ou une autre démonstration de l'inexistence de certains dieux (typiquement le dieu des onze religions abrahamiques) est (basé sur l'affirmation du catéchisme de l'Église catholique, numéro 385) :

- La toute-puissance de Dieu implique qu'il peut empêcher le mal
- La bonté (toute miséricorde) de Dieu implique que Dieu doit empêcher tout mal
- Or, le mal existe
- Donc un Dieu bon et tout-puissant ne peut pas exister

Un autre exemple similaire célèbre est la démonstration de l'existence des licornes... ! En effet, considérons que nous voulons prouver que les licornes, c'est-à-dire les chevaux dotés d'une seule corne, existent. La preuve consiste rhétoriquement dans la séquence suivante :

- À démontrer : les licornes, c'est-à-dire les chevaux avec une seule corne, existent
- (Df. 1.) Les licornes sont, comme nous le savons tous, des chevaux avec une seule corne !
- (Ax. 1.) Supposons au contraire que les licornes n'existent pas !
- (Th. 1) Les licornes n'ont alors pas de corne puisque, une entité inexistante ne peut rien avoir...
- (Df. 2) Mais cela contredit le fait que les licornes ont par définition une seule corne.
- (Df. 3) Cette contradiction s'est produite en supposant à tort que les licornes n'existent pas.
- (Th. 4) Q.E.D. Donc les licornes existent !

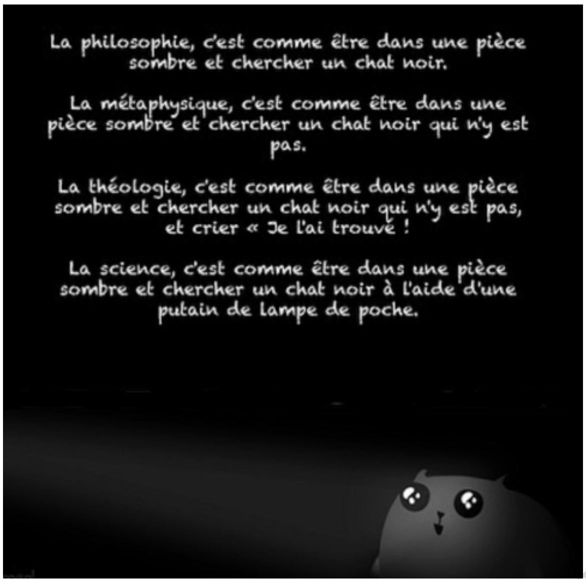
Formellement, ce qui précède peut être réécrit :

Df. 1.	$\forall x(\text{Licornes(x)} \Rightarrow \text{OntUneCorne(x)})$
Ax. 1.	$\neg\exists x\, \text{Licornes}(x)$
Th. 1	$\forall x(\text{Licornes}(x) \Rightarrow \neg\, \text{OntUneCorne}(x))$
Df. 2	$(\forall x(\text{Licornes(x)} \Rightarrow \text{OntUneCorne(x)}) \wedge \forall x(\text{Licornes}(x) \Rightarrow \neg\, \text{OntUneCorne}(x))) \Rightarrow\perp$
Df. 3	$\neg\exists x\, \text{Licornes}(x) \Rightarrow\perp$
Th. 4	$\Box\exists x\, \text{Licornes}(x)$

[5]Effectivement nous démontrerons lors de notre étude la Cosmogonie que contrairement à une légender urbaine colportée par les médias de masse et mauvais vulgarisateurs scientifiques, notre universe observable est sans cause et s'étend dans un contenant qu'il d'usage de nommer le "cosmos" dans lequel le temps n'existe pas.

En cours de traduction de l'anglais

L'erreur dans cet exemple est l'affirmation selon laquelle un objet inexistant ne peut pas avoir d'attributs/parties, c'est-à-dire $\neq \exists(x) \wedge \mathrm{Prdicat(Q)} \Rightarrow \neg Q(\, mathrmx)$. Nous ne pouvons pas affirmer quoi que ce soit sur la non-existence des licornes sans une science fondée sur les évidences (expérimentales) !



5.1.6.1 Quelques erreurs logiques célèbres

Deéfinition (#5.1.27) : Le "principe d'explosion", ou le "principe du Pseudo-Scotus" (faussement attribué à Duns Scot), est la loi selon laquelle toute affirmation peut être prouvée d'une contradiction. Autrement dit, d'une contradiction, toute proposition (y compris sa négation) peut en être déduite ; c'est ce qu'on appelle "l'explosion déductive". En raison du principe d'explosion, l'existence d'une contradiction (incohérence) dans un système axiomatique formel est désastreuse ; puisque toute affirmation peut être prouvée, elle banalise les notions de vérité et de fausseté... !

En cours de traduction de l' anglais

En logique symbolique, le principe d'explosion peut s'exprimer schématiquement de la manière suivante :

$$P, \neg P \vdash Q \tag{5.1.111}$$

Pour toute prémisse P et Q, si P et $\neg P$ sont tous deux vrais, alors il s'ensuit logiquement que Q est vrai.

Démonstration 5.3.2. Nous donnons ci-dessous la preuve formelle du principe utilisant la logique symbolique :

Étape	Proposition	Dérivation
1	P	Prémisse
2	$\neg P$	Prémisse
3	$P \vee Q$	Introduction à la disjonction (1)
4	Q	Syllogisme disjonctif $(3, 2)$

■ Q.E.D.

Définition (#5.1.28) : Le "principe de raison suffisante" (PSR) stipule que tout doit avoir une raison (explication) ou une cause. Le principe a été articulé et mis en avant par Gottfried Wilhelm Leibniz, avec de nombreux antécédents, et a été utilisé et développé par Arthur Schopenhauer et Sir William Hamilton. Il peut être énoncé sous diverses formes :

- Pour chaque entité X, si X existe, alors il existe une explication suffisante de la raison pour laquelle X existe.
- Pour chaque événement E, si E se produit, alors il existe une explication suffisante pour laquelle E se produit.
- Pour chaque proposition P, si P est vrai, alors il existe une explication suffisante pour laquelle P est vrai.

En logique symbolique, le principe de raison suffisante peut s'exprimer schématiquement de la manière suivante :

$$\forall P \exists Q (Q \rightarrow P) \quad (5.1.112)$$

La question reste ouverte de savoir si le principe de raison suffisante peut être appliqué aux axiomes au sein d'une construction logique comme une théorie mathématique ou physique, car les axiomes sont des propositions acceptées comme n'ayant aucune justification possible au sein du système. Cependant, le lecteur doit se rappeler que Gödel a démontré que pour tout système déductif suffisamment expressif, il existe une proposition qui ne peut être ni prouvée ni réfutée ! Le principe de raison suffisante exige que tout ait une raison. Alors, quelle est la raison du principe lui-même ? Il n'y en a pas - c'est simplement énoncé comme un axiome avec tout ce que cela implique...

Les interprétations indéterministes de la mécanique quantique[6] (Copenhague et autres) qui déclarent que les prédictions probabilistes sont complètes quant à ce qu'il faut savoir avant l'effondrement contredit le principe de raison suffisante. Cependant, une autre interprétation comme celle des univers multiple ne le fait pas.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le philosophe Robert Nozick a également déclaré que la mécanique quantique viole le principe de raison suffisante. Seule une forme affaiblie du PRS peut survivre. Le mathématicien John Conway, qui a écrit sur les fondements quantiques, a également explicitement déclaré que le principe original de raison suffisante contredit la mécanique quantique en tant que telle.

Maintenant que nous avons présenté les erreurs logiques les plus célèbres, rappelons tous les symboles vus jusqu'à présent :

[6] Par exemple, la désintégration d'un atome de radium donné n'a aucune cause, c'est un événement probabiliste. Selon l'interprétation de Copenhague de la Mécanique Quantique, il n'existe pas de paramètres cachés qui donnent une cause suffisante - encore moins une raison suffisante ! De plus, John Stewart Bell a démontré que les variables cachées n'étaient pas possibles !

Connection	**Symbole**	**Affirmation**
valeur VRAIE	$\top$	L'affirmation logique est vraie
valeur FAUSSE	$\bot$	L'affirmation logique est fausse
ET (AND)	$\wedge$	Conjonction
OU (OR)	$\vee$	Disjonction (ou inclusif)
XOR (XOU)	$\oplus$	Ou exclusif
NOT (NON)	$\neg, \bar{p}$	Négation
si...alors	$\rightarrow, \Rightarrow$	Implication (instruction conditionnelle) (condition nécessaire)
si et seulement si	$\leftrightarrow, \Leftrightarrow$	Biconditionnel
équivalent à	$\equiv$	Équivalence
il existe	$\exists$	Existence
il n'existe pas	$\nexists$	Non-Existence
il y a exactement	$\exists!$	Existence unique
pour tout	$\forall$	Quantificateur
parce que	$\because$	Parce que / Étant donné que
ainsi	$\therefore, \Longrightarrow$	Ainsi / Conséquence
prouve que	$\vdash$	
n'est pas prouvable	$\nvdash$	
est une tautologie	$\models$	Tautologie
est une contradiction	$\nvDash$	Contradiction
ensemble de formules	Γ	
possiblement	$\Diamond$	Hypothèse facultative
fin de la démonstration	$\square, \blacksquare$	
numéro de code de la phrase de Gödel G	$\ulcorner G \urcorner$	

TAB. 5.13 – **Symboles communs dans la logique classique et la théorie de la démonstration**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

L'équivalence logique $\equiv$ est par tradition quelque chose qui est écrit en dehors d'un énoncé logique (entre deux d'entre eux en particulier). Si et seulement si $\leftrightarrow, \Leftrightarrow$ est un symbole qui est à l'intérieur d'une énoncé logique.

Pour résumer, nous donnons ci-dessous un tableau avec les tautologies, règles d'inférence et erreurs les plus courantes :

RÈGLES ET ERREURS DE LA LOGIQUE PROPOSITIONNELLE		
Nom	**Formule**	**Description**
Tautologie	$\varphi = p(x) \therefore A \Rightarrow A$ (ie $\models A$)	affirmation selon laquelle A est vraie dans toutes les interprétations possibles
Loi d'identité	$\forall A : A = A$	pour tout A, A est ce qu'il est
Loi de non-contradiction	$\neg(A \wedge \neg A)$	A ne peut pas être en même temps une chose et son contraire
Loi du tiers exclu	$A \vee \neg A$	A tout a une qualité donnée ou a le négatif de cette qualité
Modus Ponens	$[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$	si p alors q ; p ; alors q
Modus Tollens	$[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$	si p alors q ; non q ; alors non p
Syllogisme hypothétique	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$	si p alors q ; si q alors r ; donc si p alors r
Syllogisme disjonctif	$(p \vee q; \neg p) \therefore q$	soit p ou q ; non p ; alors, q
Dilemme constructif	$(p \to q) \wedge (r \to s); p \vee r \therefore q \vee s$	si p alors q ; et si r alors s ; mais soit p, soit r ; donc soit q ou p
Dilemme destructeur	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s); \neg q \vee \neg s \therefore \neg p \vee \neg r$	si p alors q ; et si r alors s ; mais soit non q, soit non s ; donc plutôt non p ou non r
Simplification	$[(p = \top) \wedge (q = \top)] \therefore p = \top$	p et q sont vraies ; donc p est vraie
Conjonction	$(p = \top, q = \top) \therefore p \wedge q$	p et q sont vraies séparément ; donc elles sont vraies conjointement
Addition	$p = \top \therefore p \vee q$	p est vraie ; donc la disjonction (p ou q) est vraie
Composition	$[(p \to q) \wedge (p \to r)] \Rightarrow [p = \top \to (q \wedge r) = \top]$	si p alors q ; et si p alors r ; donc si p est vraie alors q et r sont vraies
Théorèmes de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	la négation de (p et q) est équiv. à (non p ou non q) la négation de (p ou q) est équiv. à (non p et non q)
Commutation	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	(p ou q) est équiv. à (q ou p) (p et q) est équiv. à (q et p)
Association	$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$ $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$	p ou (q ou r) est équiv. à (p ou q) ou r p et (q et r) est équiv. à (p et q) et r
Distribution	$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	p et (q ou r) est équiv. à (p et q) ou (p et (p ou r) p ou (q et r) est équiv. à (p ou q) et (p ou r)
Double Négation	$p \equiv \neg\neg p$	p équivaut à la négation de non p
Transposition	$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	si p alors q est équiv. à si non q alors non p
Implication matérielle	$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$	si p alors q est équiv. soit à non p soit q
Équivalence matérielle	$(p \equiv q) \equiv [(p \to q) \vee (q \to p)]$ $(p \equiv q) \equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$	(p est équiv. à q) signifie, soit (si p est vraie alors q est vraie) ou (si q est vraie alors p est vraie) (p est équiv. à q) signifie, soit (p et q sont vraies) ou (p et q sont tous deux fausses)
Exportation	$[(p \wedge q) \to r] \equiv [p \to (q \to r)]$	(si p et q sont vraies alors r est vraie) est équiv. à (si q est vraie alors r est vraie, sinon p est vraie)
Importation	$[p \to (q \to r)] \equiv [(p \wedge q) \to r]$	si p est vraie alors (si q alors r) est vraie est équiv. à p et q est vraie r est vraie
Principe d'explosion (erreur)	$\forall p, q : (p \wedge \neg p = \top) \vdash q$	pour toute affirmation p et q, si p et $\neg p$ sont toutes deux vraies, alors nous pouvons toujours prouver que q est vraie
Vérité creuse (fallacy)	$\forall x \in P : Q(x)$ où $P = \varnothing$	instruction qui affirme que tous les membres de l'ensemble vide ont une certaine propriété
Erreur existentielle	$A \Rightarrow B, B \therefore A$	on présuppose qu'une classe B a des membres A alors qu'on n'est pas censé le faire
Erreur de propriété d'existence	$\exists A \neq P(A)$	l'existence est un quantificateur et non un prédicat (i.e. l'existence n'est pas une propriété !)
Affirmer le conséquent (erreur)	$(P = \top \wedge C = \top); C = \top! \therefore P = \top$	si la prémisse et les conclusions sont toutes deux vraies, la conclusion n'est pas une conséquence nécessaire de la prémisse
Nier l'antécédent (erreur)	$(P = \top \to C \Rightarrow \top); C = \top! \therefore P = \top$	même si la conclusion peut être vraie, elle ne découle pas de la prémisse
Affirmer une disjonction (erreur)	$A \vee B = \top; B = \top! \therefore A = \perp$	la conclusion ne découle pas de la prémisse car il se pourrait que A et B soient toutes deux vraies
Nier une conjonction (erreur)	$(B \vee A) = \perp! \therefore A = \top$	A et B ne peuvent pas être vraies toutes les deux la conclusion ne découle pas de la prémisse car il se pourrait que A et B soient tous deus fausses
Milieu non distribué (erreur)	$Z \in B, Y \in B \therefore Y = Z$	il n'est pas nécessairement vrai que « tous les B sont des Z » ce qui est ignoré dans l'argumentation
Fausse dichotomie (erreur)	$(p \to q), (r \to q), (p \vee q) \therefore q$	c'est une fausse dichotomie car quel que soit le choix cela conduit à la même conclusion
Argument a priori (raisonnement motivé) (erreur)	$\overline{\Gamma, A \vdash A}^{\text{ax}}$	utiliser un axiome pour prouver l'axiome lui-même n'a pas de sens car l'axiome est irréfutable par définition

TAB. 5.14 – **Règles d'inférence et erreurs les plus connues de la logique classique**

En cours de traduction de l'anglais

Avec tous ces outils, il est désormais facile de réfuter tout argument ontologique en faveur des dieux des 45 religions monothéistes révélées actuellement pratiquées dans le monde ! Nous avons par exemple déjà expliqué plus haut les erreurs de l'argument ontologique de Gödel. Un autre type d'arguments ontologiques sont ceux utilisés principalement par les onze religions

abrahamiques et appelés les "Cinq voies de Thomas d'Aquin[7]" (Thomas d'Aquin était un frère et prêtre dominicain et un philosophe et théologien influent du 113ème siècle selon le calendrier holocène) :

- **La voie par le mouvement :** Étant donné que des particules surgissent du vide spontanément à une vitesse non nulle dans le domaine quantique, elles n'ont aucun agent (divin(qui initie leur mouvement. Elles extraient simplement, comme nous le démontrerons lors de notre étude de la physique quantique, leur énergie du niveau d'énergie nulle du vide qui a une valeur.... non nulle (à petite échelle, le principe de conservation de l'énergie est toujours conservé car un photon est sa propre anti-particule et d'autres particules apparaissent ausssi spontanément du vide avec leur contrepartie opposée mais à des échelles cosmologiques où le principe de conservation de l'énergie est violé comme nous le démontrerons aussi). De plus, la lumière émise par les atomes causée par les changements de niveaux d'électrons n'est pas accélérée par un agent (divin) jusqu'à la vitesse de la lumière, la lumière émerge instantanément du vide à la vitesse de la lumière ! Thomas d'Aquin n'était donc pas en mesure de savoir que la physique quantique existerait et jour et contredirait ses arguments et l'écrasante majorité des philosophes ne maîtrisent la science moderne et ne connaissent rien aux fluctuations quantiques du vide (généralement, ils ne savent rien par exemple du lagrangien d'Euler-Heisenberg ni du potentiel d'Uehling).

- **La voie par la causalité efficiente :** Théoriquement rien n'interdit par exemple à notre Univers de se créer lui-même. En effet, selon le modèle spéculatif de la cosmologie cyclique conforme (CCC) de Roger Penrose, la fin de notre Univers génère son propre prochain commencement. Cependant, contrairement aux résultats scientifiques expérimentaux qui réfutent la première méthode de Thomas d'Aquin présentée précédemment, il n'existe pour l'instant au début du 121ème siècle (selon le calendrier holocène) aucune évidence expérimentale solide en faveur du modèle de Roger Penrose.

- **La voie par la contingence :** Cette voir de Thomas d'Aquin est démontrée mathématiquement fausse par la logique formelle car elle est basée sur trois erreurs logiques du premier ordre : 1) l'argument a priori où Thomas d'Aquin utilise un axiome qui mène à une conclusion qui est l'axiome lui-même (voir le tableau des erreurs logiques ci-dessus) 2) le principe d'explosion puisque Thomas d'Aquin utilise une contradiction pour prouver une affirmation (voir le tableau des erreurs logiques ci-dessus) 3) l'erreur de la propriété d'existence puisque Thomas d'Aquin utilise un quantificateur qui n'est pas un prédicat (voir le tableau des erreurs logiques ci-dessus).

- **La voie par les degrés des êtres :** Celle-ci est différent des précédentes ! C'est avant tout un non-sens sémantique basé sur des définitions uniquement linguistiques qui ne démontre rien ! Cependant, un chimiste nucléaire dirait très probablement que cet argument est scientifiquement parlant un pur non-sens et donc faux...

- **La voie par l'ordre du monde :** Cette voie de Thomas d'Aquin utilise un concept mal défini en science. Effectivement "l'esprit" est une construction philosophique/religieuse, avec une définition fluide et difficile à cerner. Personne ne peut démontrer quoi que ce soit

[7]Le lecteur ne doit pas oublier que les philosophes ne sont pas des scientifiques qualifiés et que cela constitue un sérieux handicap lorsqu'il s'agit de confronter un argument philosophique à des évidences basée sur la méthode scientifique.

En cours de traduction de l'anglais

sans le définir clairement scientifiquement et il n'y a (malheureusement) aucun consensus scientifique sur sa définition encore en ce début du 121e siècle (calendrier holocène). Néanmoins, nous sommes en fait d'accord sur le fait que certains objets sont clairement ce que le profane dirait "inanimés" (par exemple une pierre), tandis que d'autres semblent avoir ce que les profanes appellent communément un "esprit" dans l'usage vernaculaire.

Nous conseillons évidemment fortement au lecteur de vérifier les textes originaux de Thomas d'Aquin car les sortir de leur contexte peut être trompeur (certains philosophes affirment que les cinq voies de Thomas d'Aquin sont mal interprétées lorsque ces dernières sont démystifiées par la science moderne) et nous devons aussi nous rappeler qu'aujourd'hui quelqu'un comme Thomas d'Aquin n'obtiendrait même pas son diplôme d'études secondaires en sciences modernes...

Par conséquent, nous pouvons conclure que la tentative théiste de démontrer l'existence du dieu de l'une des 45 religions monothéistes révélées sur la base d'une logique formelle rhétorique est facilement révélée comme étant vaine !

5.1.6.2 La logique est-elle une science ?

En cours de traduction de l'anglais

> ❞ *La logique est l'art de se tromper avec confiance.* ❞

quote 5.1:201.#31

> Joseph Wood Krutch

Rappelons que cette question au sens large du mot "science" a évidemment une réponse positive. Cependant, comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce livre, il existe différentes sciences !

Si l'on désigne par "science" tout domaine centré autour de la "méthode scientifique" : faire des hypothèses, faire des expériences dans le but de les réfuter (c'est-à-dire de les falsifier) et ainsi de suite, alors la Logique n'est rien de tel (la Logique n'a pas pour objectif de réfuter ses prémisses). La science expérimentale est intrinsèquement basée sur le monde physique et observable. Bien qu'il y ait une réflexion approfondie, des hypothèses a posteriori, l'arbitre ultime de toute idée scientifique expérimentale est le monde sensible, à travers l'expérimentation.

La logique, quant à elle, est entièrement autonome. C'est l'étude des systèmes formels : des ensembles d'axiomes et de règles sur la façon de dériver des théorèmes. La logique est un jeu où toutes les règles sont inventées.

Bien que la logique ne soit pas une science empirique ou une science physique, elle n'en est pas moins une science au sens large du terme, c'est-à-dire un corpus systématique de connaissances rationnelles.

Alors que toute utilisation de la logique peut probablement retomber dans le monde réel, la Logique elle-même ne le fait pas. Elle est entièrement autonome. Lorsque nous prouvons quelque chose de manière logique, nous ne faisons pas une déclaration directe sur l'univers : nous faisons une affirmation cohérente avec les hypothèses de notre système logique et qui peut en outre

ne pas être réfutable (c'est-à-dire non falsifiable) - ou pire encore - le défaut majeur historique connu de la Logique (nous avons plus de 2500 ans de preuves de tels défauts) est que la conclusion de tout raisonnement logique est toujours dans les prémisses. La relation entre la logique et l'univers est séparée : c'est ce qui rend la logique utile, mais ce n'est pas ce qui rend la logique logique.

L'un des exemples les plus connus dans la science "moderne" de niveau universitaire de logique fallacieuse est *l'argument cosmologique de Kalâm* (un argument en faveur de l'existence d'une divinité qui aurait créé notre Univers) le second est très probablement le pari de Pascal. La prémisse de l'argument cosmologique de Kalâm, « *Tout ce qui commence a une cause* », peut être un peu logique pour un individu de premier cycle universitaire ou un personne scientifiquement illétrée ou un physicien non professionnel. Mais pour les physiciens professionnels de niveau postgrade, cela est prouvé mathématiquement et expérimentalement comme faux au moins depuis les années 11950 selon le calendrier holocène (nous en verrons les preuves dans la section Physique Quantique Ondulatoire **??** et de Gravité Quantique page **??** beaucoup plus loin dans ce livre). Donc, quiconque utilise cet argument comme une affirmation logique ne fait que prouver son ignorance de la physique moderne[8] et aussi de la logique elle-même (puisque la conclusion est dans la prémisse... facepalm). Et de plus comme nous l'avons également vu lors de notre introduction de ce livre, une affirmation ou une citation est au maximum une évidence de niveau 02 (voir page **??**)...

Très probablement le seul exemple bien connu dans la science "moderne" de niveau post-universitaire de logique fallacieuse (où encore une fois la conclusion est dans les prémisses[9]) est la *preuve ontologique de Gödel* pour l'existence de (très probablement...) la divinité chrétienne... comme cela convient bien aux croyances de Gödel... La plupart des théistes partagent le résumé de preuve suivant sur les réseaux sociaux ceci sans évidemment en reconnaître tous les biais car ils sont pour l'immense majorité d'entre eux scientifiquement illétrés :

A1	Soit une propriété ou soit sa négation est positive, mais pas les deux :	$\forall\phi[P(\neg\phi)\leftrightarrow\neg P(\phi)]$
A2	Une propriété nécessairement déduite par une propriété positive est positive :	$\forall\phi\forall\psi[(P(\phi)\wedge\Box\forall x[\phi(x)\to\psi(x)])\to P(\psi)]$
T1	Les propriétés positives sont nécessairement positives :	$\forall\phi[P(\phi)\to\Diamond\exists x\phi(x)]$
D1	Un *être divin* possède toutes les propriétés positives :	$G(x)\leftrightarrow\forall\phi[P(\phi)\to\phi(x)]$
A3	La propriété d'être semblable à Dieu est positive :	$P(G)$
C	Possiblement, Dieu existe :	$\Diamond\exists xG(x)$
A4	Des propriétés positives sont nécessairement positives :	$\forall\phi[P(\phi)\to\Box\, P(\phi)]$
D2	Une essence d'un individu est une propriété possédée par lui et impliquant nécessairement l'une de ses propriétés :	$\phi\ ess.\ x\leftrightarrow\phi(x)\wedge\forall\psi(\psi(x)\to\Box\forall y(\phi(y)\to\psi(y)))$
T2	Being God-like is an essence of any God-like being:	$\forall x[G(x)\to G\ ess.\ x]$
D3	*Necessary existence* of an individual is the necessary exemplification of all its essences:	$NE(x)\leftrightarrow\forall\phi[\phi\ ess.\ x\to\Box\exists y\phi(y)]$
A5	Necessary existence is a positive property:	$P(NE)$
T3	Necessarily, God exists:	$\Box\exists xG(x)$

[8]Un autre exemple typique est qu'en raison de l'existence d'une table de vérité, certaines personnes soutiennent à nouveau que la logique peut conduire à de vraies conclusions. Mais les tables de vérité dépendent encore de la prémisse et si la prémisse est fausse... devinez quoi !

[9]Un argument est "circulaire" juste au cas où il y aurait une prémisse, implicite ou explicite, qui est logiquement équivalente à la conclusion. Dans de nombreux cas, la circularité est un problème et nous appelons une telle circularité une "circularité vicieuse".

En cours de traduction de l'anglais

La plupart des critiques de la preuve de Gödel (et d'autres équivalentes) visent ses axiomes (prémisses) : comme pour toute preuve dans tout système logique, si les axiomes dont la preuve dépend sont mis en doute, alors les conclusions peuvent être mises en doute (c'est pourquoi dans logique, vous pouvez construire n'importe quelle preuve et qu'ensuite vous avez besoin de la science expérimentale pour trier les déchets d'une part et les vraies preuves de l'autre). Cela s'applique particulièrement à la preuve de Gödel - car elle repose sur cinq axiomes, dont certains sont discutables (il y a plus de $10'000$ dieux dans le monde par exemple et la plupart d'entre eux n'ont pas de propriété positive[10]... en particulier dans les religions abrahamiques) et certaines autres sont réfutées théoriquement et expérimentalement (l'axiome A1 est faux comme nous le savons de notre connaissance actuelle de la physique quantique comme prouvé dans le chapitre sur ce sujet à la page **??**) depuis les années 11950 (selon le calendrier holocène) au moins... Une preuve ne nécessite pas que la conclusion soit correcte, mais plutôt qu'en acceptant les axiomes, la conclusion s'ensuit logiquement. De plus, la preuve de Gödel est fausse car encore une fois... la conclusion est dans les prémisses. Et enfin la preuve ontologique de Gödel souffre aussi des théorèmes d'incomplétude de Gödel !

Dans un certain sens, la logique est un pure "outil à réflexion". C'est un raisonnement pur distillé à un ensemble de règles simples et vérifiables. L'arbitre ultime de toute preuve logique est le système logique, pas l'Univers dans son ensemble. Nous pouvons même avoir des systèmes logiques parfaitement raisonnables qui ne correspondent pas du tout à notre Univers ! Ce serait encore logique, mais ce ne serait probablement pas très intéressant ou utile ! Pour toutes ces raisons, vous ne pouvez pas exécuter une expérience sur la logique ! D'une part, il n'y a rien à expérimenter, la logique n'est qu'une question de validité (alors que la science est une question d'évidence). Encore une fois, la logique est parfaitement autonome et ne dépend pas de la réalité physique. D'un autre côté, la logique n'a pas d'incertitude : soit vous avez une preuve de quelque chose, soit vous n'en avez pas. Vous n'avez donc pas besoin de faire des expériences en premier lieu, puisque vous avez une notion de preuve plus puissante au sein du système lui-même.

En cours de traduction de l'anglais

La logique n'implique donc pas de dispositif expérimental et ne décrit pas alors pas notre Univers observable. Ce n'est donc de toute évidence pas une méthode scientifique[11] ! Voyons une liste non exhaustive d'erreurs de logique/intuition de certains philosophes, ingénieurs et scientifiques célèbres qui prouvent ce point :

- Aristote n'était pas le premier à dire que la Terre occupait le centre de l'univers, mais il était le plus dogmatique à ce sujet, et croyait l'avoir établi comme incontestablement vrai en utilisant... la logique.
- Euclide était sûr, par la logique, que l'axiome des parallèles (postulat des parallèles) aurait toujours dû être vrai. Cependant, les mathématiques et la science expérimentale modernes ont prouvé qu'il avait tort.
- Selon la logique de Kepler, les orbites des planètes devaient être des ellipses en raison

[10]Et ce concept n'a pas été défini par Gödel...

[11]Il y a un livre assez célèbre de 700 pages [402] écrit par un philosophe qui présente et critique en détail (d'une manière horrible parce qu'évidemment la plupart des philosophes ne savent pas écrire correctement des manuels en LaTeX) la plupart des preuves et réfutations ontologiques existantes des divinités, mais cependant sans s'appuyer sur des évidences scientifiques expérimentales et en se concentrant uniquement sur les principales religions abrahamiques. Erreurs typiques de la plupart des philosophes occidentaux d'ailleurs...

de sa foi religieuse dans la perfection. Nous savons maintenant qu'en fait les planètes décrivent du point de vue d'un observateur positionné sur le centre galactique un mouvement hélicoïdal et décrivent une ellipse donnée dont les paramètres changent à travers les milliards d'années et qui peuvent même devenir chaotiques avec le temps.

- Selon l'intuition (logique) de Boyle, la lumière devait se propager dans quelque chose appelé "éther". Cela s'est avéré plus tard expérimentalement et théoriquement faux.

- Selon l'intuition (logique) de Darwin, les caractéristiques de la mère et du père se mélangent simplement dans la progéniture, tout comme un pot de peinture noire et un pot de peinture blanche se mélangent pour créer du gris lorsqu'ils sont combinés. Cela a été prouvé faux plus tard par Mendel et le génétique moderne.

- Selon la méthode de raisonnement de Kelvin, l'âge de la Terre aurait été 50 fois plus jeune que ce que les méthodes modernes de datation radio-isotopique fournissent comme évidence.

- Selon la logique de Kelvin, des machines volantes plus lourdes que l'air devaient être impossibles...

- Au début du 120ème siècle (calendrier holocène), la grande majorité des géologues ont rejeté l'idée de Wegener sur la dérive des continents, arguant que les fonds océaniques étaient fixes et que les continents ne pouvaient logiquement pas bouger.

- Selon l'intuition (logique) d'Einstein, l'Univers devait être statique. Il a donc introduit la constante cosmologique dans sa théorie. Les évidence expérimentales ont montré que sa logique était erronée.

- Selon l'intuition et la logique d'Einstein (et d'autres !), une action instantanée à distance (intrication) était quelque chose d'impossible et de mauvais.

- Einstein a nié à plusieurs reprises que des Trous Noirs puissent se former.

- Aux débuts de la mécanique quantique, Einstein a essayé de montrer que le principe d'incertitude n'était pas valide. En 11927 (calendrier holocèrne), il était devenu convaincu de son utilité, mais il s'y est toujours opposé.

- Eddington n'a pas pris au sérieux la théorie de l'effondrement gravitationnel de Chandrasekhar parce que pour lui c'était quelque chose d'illogique.

- etc...

En cours de traduction de l'anglais

Mais en quoi la science expérimentale est-elle une logique ?

Eh bien, le concept de base de la méthode scientifique est le raisonnement inductif. En gros, c'est l'idée que si nous faisons X et que Y se produit $1,000$ fois de suite, X conduira probablement à Y la prochaine fois aussi. Si nous faisons cela suffisamment de fois - et sommes suffisamment prudents - nous conclurons simplement que X cause Y. C'est la raison pour laquelle les expériences ont du sens et nous permettent de prédire l'avenir dans une certaine mesure. Comme nous le verrons plus loin lors de notre étude des tests d'hypothèses statistiques, ces

dernières reposent sur une sorte d'inférence probabiliste et donc sur la logique. Donc la logique scientifique est basée sur la logique mais... la logique n'est pas une méthode scientifique !

Et en passant... Certaines personnes sans formation universitaires postgrade affirment qu'il n'y a qu'une seule "méthode scientifique". C'est assez ambigu de faire une telle affirmation étant donné que cette dernière est en constante évolution ! La méthode scientifique documentée par Francis Bacon en 1620 n'a presque plus rien à voir avec la méthode scientifique du début du 21ème siècle !

Pour finir, citons maintenant une partie d'un texte écrit par Donald E. Simanek sur son site Internet, car ça vaut le coup :

«Les scientifiques n'arrivent pas à des modèles et à des théories par application de la logique. Ils y parviennent par de nombreux procédés regroupés sous le nom "d'induction". L'induction ne peut pas être réduite à un ensemble de règles logiques (bien que beaucoup aient essayé). Pour voir des modèles (parfois subtils et cachés) dans les données et les observations, il faut une capacité créative. C'est la capacité d'anticiper et de dire : "*Quel modèle, ensemble d'énoncés (lois) ou construction théorique pourrais-je concevoir à partir duquel ces observations et données pourraient être déduites ?*"

Nous ne pouvons pas trouver, découvrir ou construire des lois et des théories scientifiques uniquement par les mathématiques et la logique. Mais nous pouvons dériver des résultats testables et utiles en appliquant les mathématiques et la logique aux lois et aux théories, et si ces résultats déduits passent les tests expérimentaux, notre confiance dans la validité de la théorie dont ils sont dérivés est renforcée.

Certaines personnes sont profondément troublées par le fait que la raison seule ne peut pas générer de vérités. Lorsque l'utilisation des mathématiques et de la logique dans la science leur est expliquée, ils répondent : "*Si les mathématiques et la logique ne peuvent pas produire de vérités absolues, alors elles ne produisent que des contrevérités ou des vérités partielles, et sont donc sans valeur*". Cette phrase est elle-même un exemple d'absurdité revêtue de l'apparence de la logique.

Il faut admettre d'emblée que la science n'a pas pour mission de trouver des vérités absolues. La science procède comme s'il n'y avait pas de vérités absolues, ou si de telles vérités existent, nous ne pourrons jamais savoir ce qu'elles sont. Comme l'ont observé les sceptiques pré-socratiques : Si nous devions tomber sur une vérité absolue, nous n'aurions aucun moyen d'être certains qu'il s'agit d'une vérité absolue. Les modèles et les théories de la science sont des approximations de la Nature, vraisemblablement jamais parfaites. Mais dans la plupart des cas, nous savons assez bien à quel point ils sont utilisables. Nous pouvons énoncer quantitativement les limites d'incertitude des résultats numériques et leur domaine d'applicabilité. Pourtant, il est toujours possible que nous trouvions des exceptions à l'une de nos lois acceptées, ou que nous trouvions même des théories alternatives qui font un meilleur travail que les anciennes.

[...]

Certains critiques de la Science attaquent ce processus de la science, au motif qu'il ne peut pas produire de vérités absolues. C'est une vision noir/blanc du processus scientifique. Peu importe qu'ils n'aient proposé aucun autre processus capable de produire quoi que ce soit proche de la puissance et de l'exhaustivité de la science actuelle. Ils disent que la "Théorie X" n'est pas

En cours de traduction de l'anglais

parfaite donc c'est "faux".

[...]

Le fait que la science ne revendique aucune vérité absolue est utilisé par les personnes qui ont de fortes croyances religieuses et qui n'aiment pas les conclusions de la science qui vont à l'encontre de leurs convictions émotionnelles. Pour eux, si une chose n'est pas absolument et définitivement vraie, elle est fausse, et donc les méthodes utilisées pour la formuler doivent être défectueuses. »

quote 5.1:206.#32

> *La philosophie débat sur Dieu, les maths l'ignorent, la climatologie n'a pas besoin de lui, la physique ne le trouve pas, la biologie le contredit, la logique le tue !*

Bill Flavell

~80 %

64 votes, 80.94%

En cours de traduction de l'anglais

5.2. Nombres

LA base des mathématiques, mis à part le raisonnement (voir section Théorie de la Démonstration page 130), est sans nul doute pour le commun des personnes l'arithmétique. Il est donc obligatoire que nous y fassions étape pour étudier sa provenance, quelques-unes de ses propriétés et conséquences.

Les nombres, comme les figures géométriques, constituent les bases de l'arithmétique. Ce sont aussi les bases historiques car la mathématique a certainement commencé par l'étude de ces objets, mais aussi les bases pédagogiques, car c'est en apprenant à compter que nous entrons dans le monde de la mathématique.

L'histoire des nombres, appelés également parfois "scalaires", est beaucoup trop longue pour être relatée ici, mais nous ne pouvons que vous conseiller un des meilleurs ouvrages francophones sur le sujet : *Histoire Universelle des chiffres* (environ 2'000 pages), Georges Ifrah, ISBN : 2221057791.

Cependant voici une petite bride de cette dernière qui nous semble fondamentale :

Notre système décimal actuel, de base 10, utilise les chiffres de 0 à 9, dits "chiffres arabes", mais au fait d'origine indienne (hindous). Effectivement, les chiffres arabes (d'origine indienne...) dans le tableau ci-dessous sont la première ligne et nous voyons qu'ils sont nettement différents des "chiffres indiens" de la deuxième ligne :

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

FIG. 5.5 – Nombres Indo-Arabes

Il faut lire dans ce tableau : 0 "zéro", 1 "un", 2 "deux", 3 "trois", 4 "quatre", 5 "cinq", 6 "six", 7 "sept", 8 "huit", 9 "neuf". Ce système est beaucoup plus efficace que les chiffres romains (essayez de faire un calcul avec le système de notation romain vous allez voir...).

Ces chiffres ne furent introduits en Europe que vers l'an 1000. Utilisés en Inde, ils furent transmis par des Arabes au monde occidental par le pape Gerbert d'Aurillac lors de son séjour en Andalousie à la fin du 9ème siècle.

Remarque

Le mot français "chiffre" est une déformation du mot arabe "sifr" désignant "zéro". En italien, "zéro" se dit "zero", et serait une contraction de "zefiro", on voit là encore la racine arabe mais le zéro serait aussi d'origine indienne... Ainsi nos termes "chiffre" et "zéro" ont la même origine.

En cours de traduction de l'anglais

L'usage précoce d'un symbole numérique désignant "rien", au sens de "aucune quantité" ou "absence de quantité", c'est à dire notre "zéro", provient du fait que les indiens utilisèrent un système dit "système positionnel". Dans un tel système, la position d'un chiffre dans l'écriture d'un nombre exprime la puissance de 10 et le nombre de fois qu'elle intervient... et l'absence d'une position dans ce système posait d'énormes problèmes de relecture et pouvait engendrer de grosses erreurs de calculs. L'introduction révolutionnaire et pourtant simple du concept de rien permettait un relecture sans erreur des nombres.

L'absence d'une puissance est notée par un petit rond... : c'est le zéro. Notre système actuel est donc le "système décimal et positionnel".

✍**Exemple :**

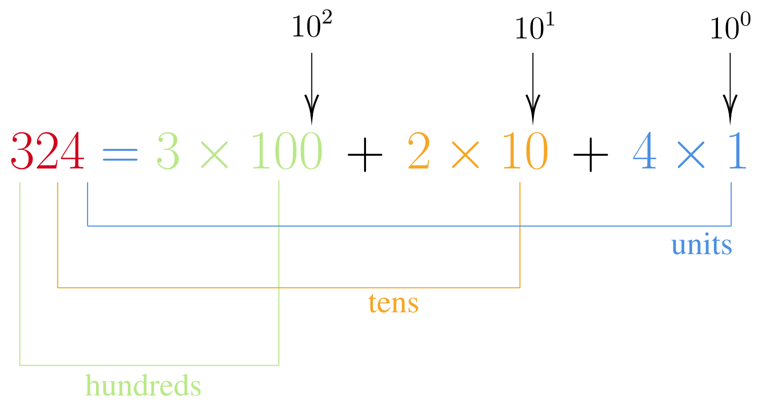


FIG. 5.6 – **Description système décimal et positionnel**

Le nombre 324 s'écrit de gauche à droite comme étant trois centaines : 3 fois 100, deux dizaines : 2 fois 10 et quatre unités : 4 fois 1.

Donc un "nombre décimal" est donc u nombre qui a une écriture finie en base 10.

Nous voyons parfois (et c'est conseillé) un séparateur de milliers représenté par une apostrophe $'$ en Suisse (posé tous les trois chiffres à partir du premier en partant de la droite pour les nombres entiers). Ainsi, nous écrirons $1'034$ au lieu de 1034 ou encore $1'344'567'569$ au lieu de 1344567569. Les séparateurs de milliers permettent de rapidement quantifier l'ordre de grandeur des nombres lus.

Ainsi :

- Si nous voyons uniquement une apostrophe nous saurons que le nombre est de l'ordre du millier
- Si nous voyons deux apostrophes nous saurons que le nombre est de l'ordre du million
- Si nous voyons trois apostrophes nous saurons que le nombre est de l'ordre du milliard
- etc.

et ainsi de suite... :

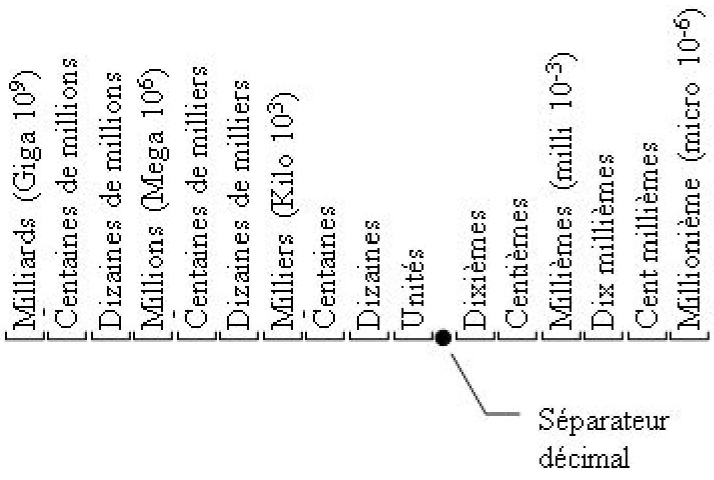


FIG. 5.7 – **Principe de construction du système positionnel**

Au fait, tout nombre entier, autre que l'unité, peut être pris pour base d'un système de numérotation. Nous avons ainsi les systèmes de numérotation binaire, ternaire, quaternaire,..., décimal, duodécimal qui correspondent respectivement aux bases deux, trois, quatre,..., dix, douze.

Une généralisation de ce qui a été vu précédemment, peut s'écrire sous la forme suivante :

Tout nombre entier positif N peut être représenté dans une base b sous forme de somme, où les coefficients a_i sont multipliés chacun par leur poids respectif b^i. Tel que :

$$N = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 \qquad (5.2.1)$$

Plus élégamment écrit :

$$\boxed{N = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i} \qquad (5.2.2)$$

avec $a_i \in [0, b-1]$ et $b_i \in [1, b^{n-1}]$.

Remarques

R1. Comme très fréquemment en mathématique, nous remplacerons l'écriture des chiffres ou des nombres par des lettres latines ou grecques afin de généraliser leur représentation. Ainsi, lorsque nous parlons d'une base b la valeur b peut prendre n'importe quelle valeur entière $1, 2, 3, \ldots$

R2. Lorsque nous prenons la valeur 2 pour b, N aura pour valeur maximale $2^n - 1$. Les nombres qui s'écrivent sous cette forme s'appellent les "nombres de Mersenne". Ces nombres ne peuvent être premiers (voir plus bas ce qu'est un nombre premier) que si n est premier.

Effectivement, si nous prenons (par exemple) $b = 10$ et $n = 3$, la plus grande valeur que

En cours de traduction de l'anglais

nous pourrons obtenir sera :

$$(b-1)10^2+(b-1)10^1+(b-1)10^0=900+90+9=999=10^3-1=b^3-1 \quad (5.2.3)$$

R3. Lorsque qu'un nombre est le même lu de gauche à droite ou de droite à gauche, nous parlons de nombre "palindrome".

5.2.1 Bases Numériques

Pour écrire un nombre dans un système en base b, nous devons commencer par adopter b caractères destinés à représenter les b premiers nombres, par exemple dans le système décimal : $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ces caractères sont comme nous les avons déjà définis, les "chiffres" que nous énonçons comme à l'ordinaire : {zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf}.

Pour la numérotation écrite, nous faisons cette convention, qu'un chiffre, placé à gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur, ou b fois plus grandes. Pour tenir la place des unités qui peuvent manquer dans certains ordres, nous nous servons du zéro "0" et par suite, le nombre de chiffres employés peut varier.

Définition (#5.2.29) : Pour la numérotation parlée, nous convenons d'appeler "unité simple", "dizaine", "centaine", "millier", etc., les unités du premier ordre, du second, du troisième, du quatrième, etc. Ainsi les nombres 10, 11, ..., 19 se liront de même dans tous les systèmes de numérotation. Les nombres $1a, 1b, a0, b0, \ldots$ se liront dix-a, dix-b, a-dix, b-dix, etc. Ainsi, le nombre 5b6a71c se lira :

cinq millions b-cent soixante-a mille sept cent dix-c

Cet exemple est pertinent car il nous montre l'expression générale de la langue parlée que nous utilisons quotidiennement et intuitivement en base dix (faute à notre éducation).

Remarques

R1. Les règles des opérations définies pour les nombres écrits dans le système décimal sont les mêmes pour les nombres écrits dans un système quelconque de numérotation.

R2. Pour opérer rapidement dans un système quelconque de numérotation, il est indispensable de savoir par coeur toutes les sommes et tous les produits de deux nombres d'un seul chiffre.

R3. Le choix de la base décimale semblerait dû au fait que l'humain a dix doigts.

Voyons comment nous convertissons un système de numérotation dans un ordre :

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. En base dix nous savons que $142'713$ s'écrit :

$$142,713_{10} = 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \tag{5.2.4}$$

E2. En base deux (base binaire) le nombre 0110 s'écrirait en base 10 :

$$0110_2 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6_{10} \tag{5.2.5}$$

et ainsi de suite...

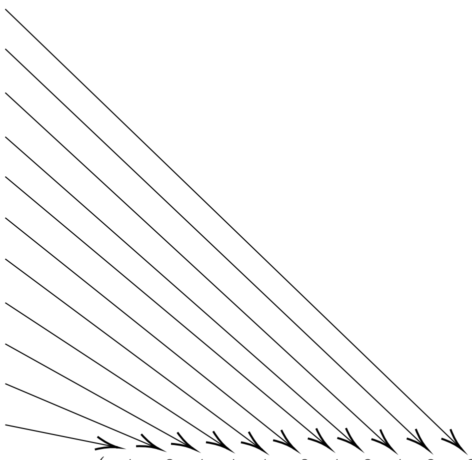
L'inverse (pour l'exemple de la base deux) est toujours un peu plus délicat :

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. la conversion du nombre décimal $1'492$ en base deux se fait par divisions successives par 2 des restes et donne (le principe est à peu près identique pour toutes les autres bases) :

Quotient	**Reste**
1492	
746	0
373	0
186	1
93	0
46	1
23	0
11	1
5	1
2	1
1	0
0	1



$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)_2 = (1492)_{10}$

FIG. 5.8 – **Conversion décimal en binaire**

E2. Pour convertir le nombre $142'713$ (base décimale) en base duodécimale (base douze) nous avons (notation : q est le "quotient", et r le "reste") :

$$\begin{aligned} \frac{142,713}{12} &\Rightarrow q = 11,892 \quad r = 9 \\ \frac{11,892}{12} &\Rightarrow q = 991 \quad r = 0 \\ \frac{991}{12} &\Rightarrow q = 82 \quad r = 7 \\ \frac{82}{12} &\Rightarrow q = 6 \quad r = 10 \\ \frac{6}{12} &\Rightarrow q = 0 \quad r = 6 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Ainsi nous avons les restes 6, 10, 7, 0, 9 ce qui nous amène à écrire :

$$142,713_{10} = 6a709_{12} \tag{5.2.7}$$

Nous avons choisi pour ce cas particulier la symbolique que nous avions définie précédemment (a-dix) pour éviter toute confusion.

5.2.2 Types de Nombres

Il existe en mathématiques une très grande variété de nombres (naturels, rationnels, réels, irrationnels, complexes, p-adiques, quaternions, transcendants, algébriques, constructibles...) puisque le mathématicien peut à loisirs en créer en ayant uniquement à poser les axiomes (règles) de manipulations de ceux-ci

Cependant, il y en a quelques-uns que nous retrouvons plus souvent que d'autres et certains qui servent de base de construction à d'autres et qu'il conviendrait de définir suffisamment rigoureusement (sans aller dans les extrêmes) pour pouvoir savoir de quoi nous parlerons lorsque nous les utiliserons.

5.2.2.1 Nombres Entiers Naturels

L'idée du "nombre entier" (nombre pour lequel il n'y a pas de chiffres après la virgule) est le concept fondamental de la mathématique et nous vient à la vue d'un groupement d'objets de même espèce (un mouton, un autre mouton, encore un autre, etc.).

Lorsque la quantité d'objets d'un groupe est différente de celle d'un autre groupe nous parlons alors de groupe numériquement supérieur ou inférieur quel que soit l'espèce d'objets contenus dans ces groupes. Lorsque la quantité d'objets d'un ou de plusieurs groupes est équivalente, nous parlons alors "d'égalité".

À chaque objet correspond le nombre "un" ou "unité" noté "1" dans le système décimal.

Pour former des groupements d'objets, nous pouvons opérer ainsi : à un objet, ajouter un autre objet, puis encore un et ainsi de suite... chacun des groupements, au point de vue de sa collectivité, est caractérisé par un nombre. Il résulte de là qu'un nombre peut être considéré comme représentant un groupement d'unités tel que chacune de ces unités corresponde à un objet de la collection.

Définition (#5.2.30) : Deux nombres sont dits "égaux" si à chacune des unités de l'un nous pouvons faire correspondre une unité de l'autre et inversement. Si ceci ne se vérifie pas alors nous parlons "d'inégalité".

Ci-dessous, nous avons un exemple graphique d'un ensemble défini par deux inégalités :

En cours de traduction de l'anglais

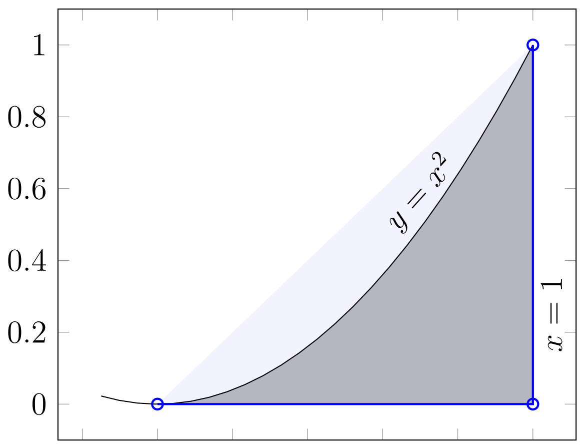


FIG. 5.9 – $R = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^2, x \leq 1\}$

Prenons un objet, puis un autre, puis au groupement formé, ajoutons encore un objet et ainsi de suite. Les groupements ainsi constitués sont caractérisés par des nombres qui, considérés dans le même ordre que les groupements successivement obtenus, constituent la "suite naturelle", aussi parfois appelée "nombres entiers", et notée :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{5.2.8}$$

Pour être sans ambiguïté quant à l'inclusion ou non du 0, un index (ou un exposant) est parfois ajouté dans le dernier cas :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}^1 = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{5.2.9}$$

Remarque

La présence du 0 (zéro) dans la définition ci-dessus de $\mathbb{N}$ est débatable 0 puisqu'il est ni positif ni négatif. C'est pourquoi dans de nombreux ouvrages vous trouverez la définition de $\mathbb{N}$ sans le 0 (correspondant alors aussi à $\mathbb{Z}^+$) et alors l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (aussi parfois noté $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ou $\mathbb{N}_0$) est nommé "l'ensemble calculable" ou des "nombres entiers". Mais gardez à l'esprit qu'il ne semble pas y avoir d'accord général et que ce n'est pas défini dans la série de normes ISO 80000 ! ! !

Les constituants de cet ensemble peuvent être définis par (nous devons cette définition au mathématicien Frege Gottlob) les propriétés (avoir lu au préalable le chapitre de Théorie des Ensembles est recommandé... à la page 376) suivantes :

P1. 0 (lire "zéro") est le nombre d'éléments (défini comme une relation d'équivalence) de tous les ensembles équivalents à (en bijection avec) l'ensemble vide.

P2. 1 (lire "un") est le nombre d'éléments de tous les ensembles équivalents à l'ensemble dont le seul élément est 1.

P3. 2 (lire "deux") est le nombre d'éléments de tous les ensembles équivalents à l'ensemble dont tous les éléments sont 0 et 1.

P4. En général, un nombre entier est le nombre d'éléments de tous les ensembles équivalents à l'ensemble des nombres entiers le précédant !

La construction de l'ensemble des entiers naturels s'est faite de la manière la plus naturelle et cohérente qui soit. Les naturels doivent leur nom à ce qu'ils avaient pour objet, aux prémices de leur existence, de dénombrer des quantités et des choses de la nature ou qui intervenaient dans la vie de l'homme. L'originalité de l'ensemble réside dans la manière empirique dont il s'est construit car il ne résulte pas réellement d'une définition mathématique, mais davantage d'une prise de conscience par l'homme du concept de quantité dénombrable, de nombre et de lois qui traduisent des relations entre eux.

La question de l'origine de $\mathbb{N}$ est dès lors la question de l'origine des mathématiques. Et de tout temps des débats confrontant les pensées des plus grands esprits philosophiques ont tenté d'élucider ce profond mystère, à savoir si la mathématique est une pure création de l'esprit humain ou si au contraire l'homme n'a fait que redécouvrir une science qui existait déjà dans la nature. Outre les nombreuses questions philosophiques que cet ensemble peut susciter, il n'en est pas moins intéressant d'un point de vue exclusivement mathématique. Du fait de sa structure, il présente des propriétés remarquables qui peuvent se révéler d'une grande utilité lorsque l'on pratique certains raisonnements ou calculs.

Remarquons immédiatement que la suite naturelle des nombres entiers est illimitée $\mathbb{N}$ (voir section Théorie des Nombres page 213) mais dénombrable (nous verrons cela plus bas), car, à un groupement d'objets qui se trouve représenté par un certain nombre n, il suffira d'ajouter un objet pour obtenir un autre groupement qui sera défini par un nombre entier immédiatement supérieur $n + 1$.

Définition (#5.2.31) : Deux nombres entiers qui diffèrent d'une unité positive sont dits "consécutifs".

En cours de traduction de l'anglais

5.2.2.1.1 Axiomes de Peano

Lors de la crise des fondements des mathématiques, les mathématiciens ont bien évidemment cherché à axiomatiser l'ensemble $\mathbb{N}$ et nous devons l'axiomatisation actuelle à Peano et à Dedekind.

Les axiomes de ce système comportent les symboles $<$ et $=$ pour représenter les relations "plus petit" et "égal" (voir section Opérateurs page 287). Ils comprennent d'autre part les symboles 0 pour le nombre zéro et s pour représenter le nombre "successeur". Dans ce système, 1 est noté :

$$1 = s(0) \tag{5.2.10}$$

dit "successeur de zéro", 2 est noté :

$$2 = s(s(0)) = s(1) \tag{5.2.11}$$

Les axiomes de Peano qui construisent $\mathbb{N}$ sont les suivants (voir le chapitre de la Théorie de la Démonstration page 130 pour certains symboles) :

A1. 0 est un entier naturel (permet de poser que $\nvdash$ n'est pas vide).

A2. Tout entier naturel n a un successeur, noté $s(n)$.

Donc s est une application injective (voir section de Théorie des Ensembles page 404), c'est-à-dire :

$$\forall x, y \quad s(x) = s(y) \Leftrightarrow x = y \tag{5.2.12}$$

C'est-à-dire que si deux successeurs sont égaux, ils sont les successeurs d'un même nombre.

A3. Le successeur d'un entier naturel n'est jamais égal à zéro (ainsi $\mathbb{N}$ à un premier élément) :

$$\forall x \quad \neg(s(x) = 0) \tag{5.2.13}$$

A4. Si nous démontrons un propriété φ qui est vraie pour x et son successeur $s(x)$, alors la propriété est vraie pour tout x (c'est "l'axiome de récurrence") :

$$(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(s(x))) \Rightarrow \forall x \; \varphi(x) \tag{5.2.14}$$

Ainsi, l'ensemble de tous les nombres satisfaisant les quatre axiomes ci-dessus est noté :

Donc l'ensemble de tous les nombres vérifiant ces 4 axiomes est :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \tag{5.2.15}$$

Remarque

Les axiomes de Peano permettent de construire très rigoureusement les deux opérations de base de l'arithmétique que sont l'addition et la multiplication (voir la section Opérateurs page 296 et page 296) et ainsi tous les autres ensembles que nous verrons par la suite.

En correction de l'anglais

5.2.2.1.2 Nombres Pairs, Impairs et Parfaits

En arithmétique, étudier la parité d'un entier, c'est déterminer si cet entier est ou non un multiple de 2. Un entier multiple de 2 est un entier pair, les autres sont les entiers impairs.

Définitions (#5.2.32) :

D1. Les nombres obtenus en comptant par deux à partir de zéro, (soit 0, 2, 4, 6, 8, ...) dans cette suite naturelle sont appelés "nombres pairs".

Le n^{th} nombre pair est donné par la relation :

$$\mathbb{E}: \quad 2n = n + n \quad \forall \mathbb{N} \tag{5.2.16}$$

Ou plus esthétiquement :

$$\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}(x = 2n)\} \tag{5.2.17}$$

D2. Les nombres que nous obtenons en comptant par 2 à partir de 1 (soit 1, 3, 5, 7,...) dans cette suite naturelle s'appellent "nombres impairs".

Le $(n+1)^{\text{th}}$ nombre impair est donné par :

$$\mathbb{O}: \quad 2n + 1 = \overline{\mathbb{E}} \quad \forall \mathbb{N} \tag{5.2.18}$$

Ou plus esthétiquement :

$$\mathbb{O} = \{x \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}(x = 2n + 1)\} \tag{5.2.19}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Nous appelons "nombres parfaits", les nombres égaux à la somme de leurs diviseurs entiers strictement plus petits qu'eux mêmes (concept que nous verrons en détail plus tard) comme par exemple : $6 = 1 + 2 + 3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Que vaut la somme des n premiers entiers impairs ?

Quelques vérifications s'imposent. Le premier entier impair est 1. La somme des deux premiers impairs vaut :

$$1 + 3 = 4 \tag{5.2.20}$$

La somme des trois premiers impairs vaut :

$$1 + 3 + 5 = 9 \tag{5.2.21}$$

La somme des quatre premiers impairs vaut :

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \tag{5.2.22}$$

Nous pouvons penser que la somme des n premiers entiers impairs vaut n^2 autrement dit que :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \tag{5.2.23}$$

Soit $\mathrm{P}(n)$ cette relation que nous souhaitons établir pour tout n.

Déroulons les trois phases de la récurrence :

- Première phase : la vérification initiale. Elle consiste à vérifier la relation pour le premier indice. Ici 1. Pour $n = 1$, dans chaque membre de la relation ci-dessus, nous trouvons 1, nous pouvons affirmer que $P(1)$ est vraie. Remarquons que nous venons de faire précédemment les vérifications au rang $2, 3$ et 4.

- Deuxième phase : nous établissons le caractère héréditaire de la propriété (le passage pour tout n de n à $n+1$). Soit l'hypothèse de récurrence : «Nous supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang n». Passage à $n + 1$: Nous démontrons que la relation est vraie au rang $n + 1$, autrement dit que :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2 \qquad (5.2.24)$$

Dans le premier membre nous reconnaissons la somme des n premiers impairs (qui vaut n^2 d'après l'hypothèse de récurrence) à laquelle nous avons ajouté le $(n+1)$-ième nombre impair $2n + 1$. Ainsi :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 \qquad (5.2.25)$$

Or :

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \qquad (5.2.26)$$

- Troisième phrase : La clause de fermeture permet de faire le bilan. Par récurrence sur n, nous venons d'établir que la somme des n premiers entiers impairs vaut n^2.

5.2.2.1.3 Nombres Premiers

Définition (#5.2.33) : Un "nombre premier" est un entier possédant exactement 2 diviseurs (ces deux diviseurs sont donc "1" et le nombre lui-même). Dans le cas où il y a plus de deux diviseurs on parle de"nombre composé". La propriété d'être premier est ce que l'on appelle la "primalité".

L'étude des nombres premiers est un sujet vate en mathématiques (voir, pour un petit exemple, la section de la page Théorie des Nombres 352 ou la section de Cryptographie **??**). Il existe des livres de milliers de pages sur le sujet et probablement des centaines d'articles de recherche par mois, même en ce début de 21ème siècle ! La plupart des théorèmes sont en grande partie hors du niveau du présent livre (et de l'intérêt de son auteur principal ...) !

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 1000 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

L'ensemble des nombres premiers est traditionnelement noté $\mathbb{P}$.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

A noter que la définition de nombre premier exclut le chiffre "1" de l'ensemble des nombres premiers car il a un unique diviseur (lui-même) et pas deux comme le veut la définition.

Nous pouvons nous demander s'il existe une infinité de nombres premiers ? La réponse est positive et en voici une démonstration (parmi tant d'autres) par l'absurde.

Démonstration 5.3.3. Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers qui seraient :

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \tag{5.2.27}$$

Nous formons un nouveau nombre à partir du produit de tous les nombres premiers auquel nous ajoutons "1" :

$$N = (p_1 p_2 \ldots p_n) + 1 \tag{5.2.28}$$

Selon notre hypothèse initiale et le théorème fondamental de l'arithmétique (voir Section de Théorie des Nombres page 352) ce nouveau nombre N devrait être divisible par l'un des nombres premiers p_i existants selon :

$$N = q \cdot p_i \tag{5.2.29}$$

où q est un nombre entier. Nous pouvons effectuer la division :

$$q = \frac{(p_1 p_2 \ldots p_n) + 1}{p_i} = \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{p_i} + \frac{1}{p_i} \tag{5.2.30}$$

Le premier terme se simplifie, car p_i est dans le produit. Nous notons E cet entier :

$$q = E + \frac{1}{p_i} \tag{5.2.31}$$

Or, q et E sont deux entiers, donc $1/p_i$ doit être un entier. Mais p_i est par définition supérieur à 1. Donc $1/p_i$ n'est pas un entier et il en est de même pour q.

Il y a alors contradiction et nous en concluons que les nombres premiers ne sont pas en nombre fini, mais infini.

■ Q.E.D.

Remarques

R1. Le produit $p_n = p_1 p_2 \ldots p_n$ (le produit des n premiers nombres premiers inférieurs ou égaux à n) est appelé "n primorielle".

R2. Nous renvoyons le lecteur au chapitre de Cryptographie de la section d'Informatique Théorique à la page **??** pour étudier quelques propriétés remarquables des nombres premiers dont la non moins fameuse fonction phi d'Euler (ou appelé aussi "fonction

En cours de traduction de l'anglais

indicatrice") et une application industrielle/économique type au 20-21ème sciècle.

5.2.2.2 Nombres Entiers Relatifs

L'ensemble $\mathbb{N}$ à quelques défauts que nous n'avons pas énoncés tout à l'heure. Par exemple, la soustraction de deux nombres dans $\mathbb{N}$ n'a pas toujours un résultat dans $\mathbb{N}$ (les nombres négatifs n'y existent pas). Autre défaut..., la division de deux nombres dans $\mathbb{N}$ n'a également pas toujours un résultant dans $\mathbb{N}$ (les nombres fractionnaires - rationnels ou irrationnels - n'y existent pas). Nous idosn alors dans le language de la théorie des ensembles que : la soustraction et la division ne sont pas des opérations internes dans $\mathbb{N}$.

Nous pouvons dans un premier temps résoudre le problème de la soustraction en ajoutant à l'ensemble des entiers naturels, les entiers négatifs (concept révolutionnaire pour ceux qui en sont à l'origine) nous obtenons "l'ensemble des entiers relatifs" noté $\mathbb{Z}$ (pour "Zahl" de l'allemand) :

$$\mathbb{Z} = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots = \{p - q \mid p, q \in \mathbb{N}\} \quad (5.2.32)$$

L'ensemble des entiers naturels est donc inclus dans l'ensemble des entiers relatifs. C'est ce que nous notons sous la forme (voir section de Théorie des Ensembles page ??) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad (5.2.33)$$

et nous avons par définition (ce sont des notations qu'il faut apprendre) :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^+ &= \mathbb{Z}_{>0} = \{n \in \mathbb{Z} | n > 0\} = \mathbb{N}^* \\ \mathbb{Z}_0^+ &= \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\} = \mathbb{N} \\ \mathbb{Z}_0^- &= \mathbb{Z}_{<0} = \{n \in \mathbb{Z} | n < 0\} \\ \mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z}_{\neq 0} = \{n \in \mathbb{Z} | n \neq 0\} \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

Cet ensemble a été créé à l'origine pour faire de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ un objet que nous appelons un "groupe" (voir section de Théorie des Ensembles page 418) par rapport à l'addition.

Définition (#5.2.34) : Nous disons qu'un ensemble E est un "ensemble dénombrable", s'il est équipotent à $\mathbb{N}$. C'est-à-dire s'il existe une bijection de (voir section de Théorie des Ensembles page 404) S sur E. Ainsi, grosso modo, deux ensembles équipotents ont "autant" d'éléments au sens de leurs cardinaux (voir section de Théorie des Ensembles page 386), ou tout au moins la même infinité.

L'objectif de cette concept est de faire comprendre que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

Démonstration 5.3.4. Montrons que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en posant :

$$x_{2k} = k \quad \text{et} \quad x_{2k+1} = -k - 1 \quad (5.2.35)$$

pour tout entier $k \geq 0$. Ceci donne l'énumération suivante :

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots \quad (5.2.36)$$

de tous les entiers relatifs à partir des entiers naturels seuls.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

5.2.2.3 Nombres Rationnels

L'ensemble $\mathbb{Z}$ a aussi un défaut. Ainsi, la division de deux nombres dans $\mathbb{Z}$ n'a également pas toujours un résultat dans $\mathbb{Z}$ (tous les nombres fractionnaires n'y existent pas). Nous disons alors dans le langage de la théorie des ensembles que : la division n'est pas une loi interne dans $\mathbb{Z}$.

Nous pouvons ainsi définir un nouvel ensemble qui contient tous les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de "fraction", c'est-à-dire du rapport d'un dividende (numérateur) et d'un diviseur (dénominateur). Quand un nombre peut se mettre sous cette forme, nous disons que c'est une "nombre fractionnaire" :

$$\text{fraction}: \left\{ \frac{2}{3} \begin{array}{l} \swarrow \text{ numérateur} \\ \longleftarrow \text{ barre de fraction} \\ \nwarrow \text{ dénominateur} \end{array} \right. \tag{5.2.37}$$

Une fraction peut être employée pour exprimer une partie, ou une part, de quelque chose (d'un objet, d'une distance, d'un terrain, d'une somme d'argent...).

Pour mieux comprendre le nombre rationnel (fractions), considérons deux individus : Andy et Bobby qui adorent la pizza. Le lundi soir, ils partagent une pizza à parts égales. Quelle quantité de pizza chaque personne reçoit-elle ? Vous pensez que chaque garçon reçoit la moitié de la pizza ? C'est juste ! Il y a une pizza entière, divisée également en deux parties, de sorte que chaque garçon reçoit l'une des deux parties égales. En maths, nous écrivons $\dfrac{1}{2}$ comme une partie sur deux :

En cours de traduction de l'anglais

FIG. 5.10 – Une 1/2 fraction de pizza (source : OpenStax)

Mardi, Andy et Bobby partagent une pizza avec leurs parents, Fred et Christy, chaque personne obtenant une quantité égale de la pizza entière. Quelle quantité de pizza chaque personne reçoit-elle ? Il y a une pizza entière, divisée également en quatre parties égales. Chaque personne a l'une des quatre parties égales, donc chacune a $\dfrac{1}{4}$ de la pizza :

FIG. 5.11 – Une $1/4$ fraction de pizza (source : OpenStax)

Mercredi, la famille invite des amis pour un dîner de pizza. Il y a un total de 12 personnes. S'ils partagent la pizza à parts égales, chaque personne recevra $\frac{1}{12}$ de la pizza :

FIG. 5.12 – Une $1/12$ fraction de pizza (source : OpenStax)

En cours de traduction de l'anglais

Par définition, "l'ensemble des rationnels" est donné par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | (p,q) \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \tag{5.2.38}$$

En d'autres termes, tout nombre rationnel est un nombre pouvant être exprimé sous la forme du quotient ou de la fraction p/q de deux entiers, p et q, le dénominateur q n'étant pas égal à zéro. Puisque q peut être égal à 1, chaque entier est pour le coup aussi un nombre rationnel !

Dans le cas où nous mettons une restriction supplémentaire sur le dénominateur tel que $q = 10^n$ et $n \in \mathbb{N}$ nous définissons alors "l'ensemble de nombres décimaux" donné par :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} | p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \tag{5.2.39}$$

Remarque

Les purs mathématiciens diront que la définition ci-dessus est fausse. Oui, en effet, ce n'est pas exact, mais suffisant pour les ingénieurs et les physiciens. Alors voici la bonne

définition :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | (p, q) \in \mathbb{Z}, q > 0 \ \text{ et } \ \text{pgcd}(p, q) = 1 \right\} \quad (5.2.40)$$

où $q > 0$ évite la division par zéro ET la répétition du signe "$-$" au dessus ou en dessous de la fraction. Nous avons également ajouté une propriété importante : le plus grand commun diviseur (voir section de Théorie des Nombres page 340), noté pgcd, entre les deux nombres doit être égal à zéro. Ainsi, dans le but que nous considérons, par exemple, $3/6$ et $1/2$ ne sont pas deux nombres distincts. En fait, nous savons que nous pouvons toujours amener une fraction à sa forme irréductible, où dans ce dernier cas nous aurons $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Nous supposerons par ailleurs comme évident que :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad (5.2.41)$$

La logique de la création de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est similaire à celle des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Effectivement, les mathématiciens ont souhaité faire de l'ensemble des nombres relatifs un "groupe" par rapport à la loi de multiplication et de division (voir section de Théorie des Ensembles page 307 et page 313).

De plus, contrairement à l'intuition, l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$ et nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont équipotents. Nous pouvons nous persuader de cette équipotence en rangeant comme le fit Cantor, les rationnels dans un premier temps de la façon suivante :

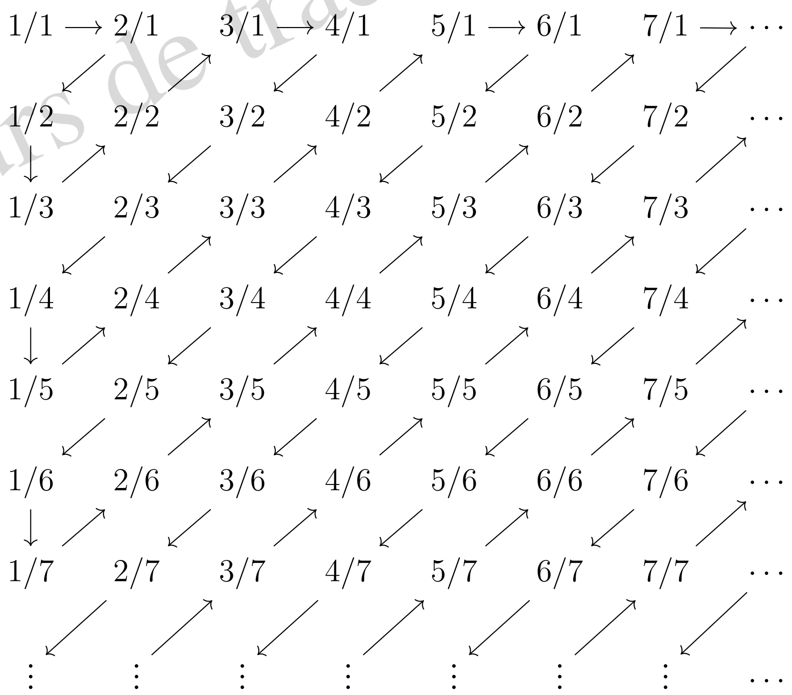


FIG. 5.13 – **Métode diagonale de Cantor**

Ce tableau est construit de telle manière que chaque rationnel n'apparaît qu'une seule fois (au sens de sa valeur décimale) par diagonale d'où le nom de la méthode : "diagonale de Cantor".

En cours de traduction de l'anglais

Si nous éléminons de chaque diagonale les rationnels qui apparaissent plus d'une fois (les "fractions équivalentes") pour ne garder plus que ceux qui sont irréductibles (donc ceux dont le PGCD du numérateur et dénominateur est égal à 1), nous pouvons alors ainsi grâce à cette distinction définir une application $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}$ qui est injective (deux rationnels distincts admettent des rangs distincts) et surjective (à toute place sera inscrit un rationnel).

L'application f est donc bijective : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont donc bien équipotents !

La définition un peu plus rigoureuse (et donc moins sympathique) de $\mathbb{Q}$ se fait à partir de $\mathbb{Z}$ en procédant comme suit (il est intéressant d'observer les notations utilisées) :

Sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; \{0\}$, qu'il faut lire comme étant l'ensemble construit à partir de deux éléments entiers relatifs dont on exclut le zéro pour le deuxième, on considère la relation R entre deux couples d'entiers relatifs définie par :

$$(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b \tag{5.2.42}$$

Nous vérifions facilement ensuite que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (voir la section Opérateurs page 290 sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

L'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation $\mathcal{R}$ noté alors $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \mathcal{R}$ est par définition $\mathbb{Q}$. C'est-à-dire que nous posons alors plus rigoureusement :

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \mathcal{R} \tag{5.2.43}$$

La classe d'équivalence de $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est explicitement notée par :

$$\frac{a}{b} \tag{5.2.44}$$

conformément à la notation que tout le monde a l'habitude d'employer.

Nous vérifions facilement que l'addition et la multiplication qui étaient des opérations définies sur $\mathbb{Z}$ passent sans problèmes à $\mathbb{Q}$ en posant :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{b \cdot q} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq + bp}{bq} \tag{5.2.45}$$

De plus ces opérations munissent $\mathbb{Q}$ d'une structure de corps (voir section Théorie des Ensembles page 427) avec $\dfrac{0}{1}$ comme élément neutre additif et $\dfrac{1}{1}$ comme élément neutre multiplicatif. Ainsi, tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ est inversible, en effet :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1} \tag{5.2.46}$$

ce qui s'écrit aussi plus techniquement :

$$(ab, ab)\mathcal{R}(1, 1) \tag{5.2.47}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Même si nous aurions envie de définir $\mathbb{Q}$ comme étant l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus 0$ où $\mathbb{Z}$ représente les numérateurs et $\mathbb{Z} \setminus 0$ les dénominateurs des rationnels, ceci n'est pas possible car autrement nous aurions par exemple $(1, 2) \neq (2, 4)$ tandis que nous nous attendons à une égalité.

D'où le besoin d'introduire une relation d'équivalence qui nous permet d'identifier, pour revenir à l'exemple précédent, $(1, 2)$ et $(2, 4)$. La relation $\mathcal{R}$ que nous avons définie ne tombe pas du ciel, en effet le lecteur qui a manipulé les rationnels jusqu'à présent sans jamais avoir vu leur définition formelle sait que :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b \qquad (5.2.48)$$

Il est donc naturel de définir la relation $\mathcal{R}$ comme nous l'avons fait. En particulier, en ce qui concerne l'exemple ci-dessus, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ car $(1, 2)\mathcal{R}(2, 4)$ et le problème est résolu.

Outre les circonstances historiques de sa mise en place, ce nouvel ensemble se distingue des ensembles d'entiers relatifs car il induit la notion originale et paradoxale de quantité partielle. Cette notion qui a priori n'a pas de sens, trouvera sa place dans l'esprit de l'homme notamment grâce à la géométrie où l'idée de fraction de longueur, de proportion s'illustre plus intuitivement.

En cours de traduction de l'anglais

5.2.2.4 Nombres Irrationnels

Il peut sembler évident de présenter les nombres irrationnels avant des nombres réels (voir plus bas), mais cela peut s'expliquer par le fait que c'est l'ordre de la découverte dans l'histoire humaine et qu'il nous semble donc plus pédagogique de les présenter donc aussi dans ce même ordre.

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est limité et non suffisant lui aussi. Effectivement, nous pourrions penser que tout calcul mathématique numérique avec les opérations communément connues se réduisent à cet ensemble mais ce n'est pas le cas.

✍**Exemples :**

E1. Prenons le calcul de la racine carrée de deux que nous noterons $\sqrt{2}$. Supposons que cette dernière racine soit un rationnel. Alors s'il s'agit bien d'un rationnel, nous devrions pouvoir l'exprimer comme a/b, où par de par la définition d'un rationnel a et b sont des entiers sans facteurs communs. Pour cette raison, a et b ne peuvent tous les deux être pairs. Il y a trois possibilités restantes :

1. a est impair (alors b est pair)
2. a est pair (alors b est impair)
3. a est impair (alors b est impair)

En mettant au carré, nous avons :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{5.2.49}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$2b^2 = a^2 \tag{5.2.50}$$

Puisque le carré d'un nombre impair est impair et le carré d'un nombre pair est pair, le cas (1) est impossible, car a^2 serait impair et $2b^2$ serait pair.

Le cas (2) est aussi impossible, car alors nous pourrions écrire $a = 2c$, où c est un entier quelconque, et donc si nous le portons au carré nous avons $a^2 = 4c^2$ où nous avons un nombre pair des deux côtés de l'égalité. En remplaçant dans $2b^2 = a^2$ nous obtenons après simplification que $b^2 = 2c^2$. Alors b^2 serait impair alors que $2c^2$ serait pair.

Le cas (3) est aussi impossible, car a^2 est donc alors impair et $2b^2$ est pair (que b soit pair ou impair !).

Il n'y a pas de solutions ! C'est donc que l'hypothèse de départ est fausse et qu'il n'existe pas deux entiers a et b tels que $\sqrt{2} = a/b$.

E2. Démontrons, aussi par l'absurde, que le fameux nombre d'Euler e est irrationnel. Pour cela, rappelons que e (voir section d'Analyse Fonctionnelle page 2264) peut aussi être défini par la série de Taylor (viur section Séquences et Séries page 1683) :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{5.2.51}$$

Alors si e est rationnel, il doit pouvoir s'écrire sous la forme p/q (avec $q > 1$, car nous savons que e n'est pas entier). Multiplions les deux côtés de l'égalité par $q!$:

$$q!e = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \ldots \tag{5.2.52}$$

Le premier membre $q!e$ serait alors un entier, car par définition de la factorielle :

$$q! = q \cdot (q-1) \cdot (q-2) \ldots 2 \cdot 1 \tag{5.2.53}$$

est un entier.

Les premiers termes du second membre de la relation antéprécédente, jusqu'au terme $q!/q! = 1$ sont aussi des entiers car $q!/m!$ se simplifie si $q > m$. Donc par soustraction nous trouvons :

$$q!e - \left(q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \ldots\right) = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \ldots \tag{5.2.54}$$

où la série à droite devrait aussi être un entier !

Après simplification, le second membre de l'égalité devient :

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots \tag{5.2.55}$$

le premier terme de cette somme est strictement inférieur à $1/2$, le deuxième inférieur à $1/4$, le troisième inférieur à $1/8$, etc.

Donc, vu que chaque terme est strictement inférieur aux termes de la série harmonique suivante qui converge vers 1 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1 \tag{5.2.56}$$

alors par conséquent, la série n'est pas un entier puisque étant strictement inférieure à 1. Ce qui constitue une contradiction !

Ainsi, les nombres rationnels ne satisfont pas à l'expression numérique de $\sqrt{2}$ comme de e (pour citer seulement ces deux exemples particuliers).

Il faut donc les compléter par l'ensemble de tous les nombres qui ne peuvent s'écrire sous forme de fraction (rapport d'un dividende et d'un diviseur entiers sans facteurs communs) et que nous appelons des "nombres irrationnels".

Finallement nous pouvons dire :

Définition (#5.2.35) : En mathématiques, un "nombre irrationnel" est un nombre réel qui ne peut pas être exprimé sous forme de ratio d'entiers. Les nombres irrationnels ne peuvent pas être représentés comme des nombres décimaux finaux ou répétés.

5.2.2.5 Nombres Réels

Définition (#5.2.36) : La réunion des nombres rationnels et irrationnels donne l'ensemble des "nombres réels que nous notons :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad (5.2.57)$$

Remarque

Les mathématiciens dans leur rigueur habituelle ont différentes techniques pour définir les nombres réels. Ils utilisent pour cela des propriétés de la topologie (entre autres) et en particulier les suites de Cauchy mais c'est une autre histoire qui dépasse le cadre formel du présent chapitre. Pour une définition de $\mathbb{R}$ du point de vue de la théorie des ensembles (les nombres réels sont souvent décrits comme le "corps complet ordonné") le lecteur doit se référer à la section de Théorie des Ensembles page 427.

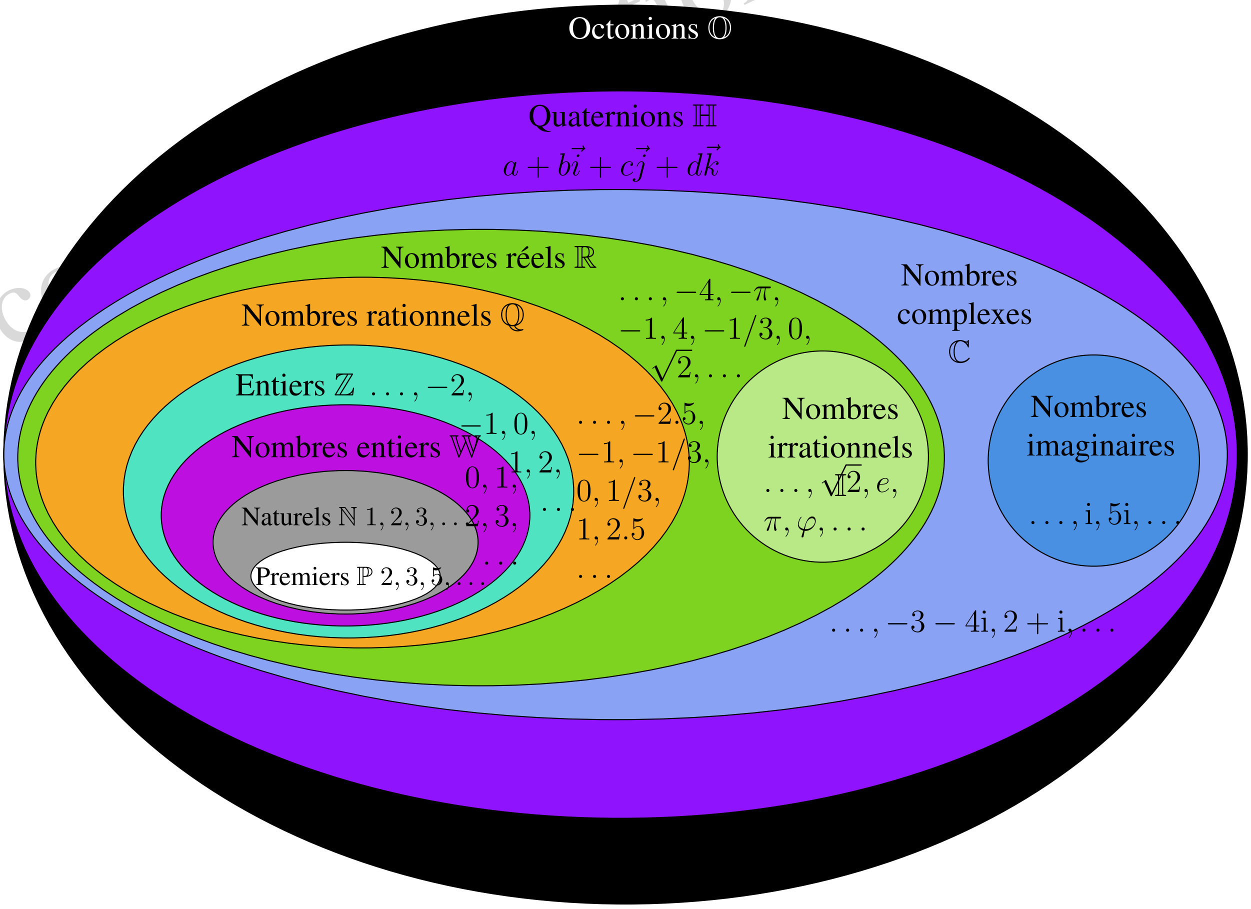


FIG. 5.14 – **Résumé simplifié d'ensemble de nombres**

Nous sommes évidemment amenés à nous poser la question si $\mathbb{R}$ est dénombrable ou non. La démonstration est assez simple.

Démonstration 5.3.5. Par définition, nous avons vu plus haut qu'il doit y avoir une bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ pour dire que $\mathbb{R}$ soit dénombrable.

Pour simplifier, nous allons montrer que l'intervalle $[0,1[$ n'est alors pas dénombrable. Ceci impliquera bien sûr par extension que $\mathbb{R}$ ne l'est pas !

Les éléments de cet intervalle sont représentés par des suites infinies entre 0 et 9 (dans le système décimal) :

- Certaines de ces suites sont nulles à partir d'un certain rang, d'autres non.
- Nous pouvons donc identifier $[0,1[$ à l'ensemble de toutes les suites (finies ou infinies) d'entiers compris entre 0 et 9.

$n°1$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\cdots$	x_{1p}	$\cdots$
$n°2$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$\cdots$	x_{2p}	$\cdots$
$n°3$	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	$\cdots$	x_{3p}	$\cdots$
$n°4$	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	$\cdots$	x_{4p}	$\cdots$
$n°5$	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	$\cdots$	x_{5p}	$\cdots$
$n°6$	x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	$\cdots$	x_{6p}	$\cdots$
	$\ldots$						
		$\ldots$					
			$\ldots$				
$n°k$	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	x_{k4}	$\cdots$	x_{kp}	$\cdots$
						$\ldots$	

En cours de traduction de l'anglais

Si cet ensemble était dénombrable, nous pourrions classer ces suites (avec une première, une deuxième, etc.). Ainsi, la suite $x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\ldots x_{1p}\ldots$ serait classée première et ainsi de suite... comme le propose le tableau ci-dessus.

Nous pourrions alors modifier cette matrice infinie de la manière suivante : à chaque élément de la diagonale, rajouter 1, selon la règle : $0+1=1, 1+1=2, 8+1=9$ et $9+1=0$:

$n°1$	$x_{11}+1$	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\cdots$	x_{1p}	$\cdots$
$n°2$	x_{21}	$x_{22}+1$	x_{23}	x_{24}	$\cdots$	x_{2p}	$\cdots$
$n°3$	x_{31}	x_{32}	$x_{33}+1$	x_{34}	$\cdots$	x_{3p}	$\cdots$
$n°4$	x_{41}	x_{42}	x_{43}	$x_{44}+1$	$\cdots$	x_{4p}	$\cdots$
$n°5$	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	$\cdots$	x_{5p}	$\cdots$
$n°6$	x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	$\cdots$	x_{6p}	$\cdots$
	$\ldots$						
		$\ldots$					
			$\ldots$				
$n°k$	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	x_{k4}	$\cdots$	x_{kp}	$\cdots$
						$\ldots$	

Alors considérons la suite infinie qui se trouve sur la diagonale :

– Elle ne peut être égale à la première car elle s'en distingue au moins par le premier élément.
– Elle ne peut être égale à la deuxième car elle s'en distingue au moins par le deuxième élément.
– Elle ne peut être égale à la troisième car elle s'en distingue au moins par le troisième élément.
  et ainsi de suite... Elle ne peut donc être égale à aucune des suites contenues dans ce tableau !

et ainsi de suite... Elle ne peut donc être égale à aucune des suites contenues dans ce tableau !

Donc, quel que soit le classement choisi des suites infinies de $0 \ldots 9$, il y en a toujours une qui échappe à ce classement ! C'est donc qu'il est impossible de les numéroter... tout simplement parce qu'elles ne forment pas un ensemble dénombrable !

■ Q.E.D.

La technique qui nous a permis d'arriver à ce résultat est connue sous le nom de "procédé diagonal de Cantor" (car similaire à celle utilisée pour l'équipotence entre ensemble naturel et rationnel) et l'ensemble des nombres réels est dit avoir la "puissance du continu" de par le fait qu'il est indénombrable.

Nous pouvons supposer qu'il est intuitif pour le lecteur que tout nombre réel puisse être approché à l'infini par un nombre rationnel (pour les nombres irrationnels, nous nous arrêtons simplement à un nombre de décimales donné et trouvons le rationnel correspondant). Les mathématiciens disent donc que $\mathbb{Q}$ est "dense" dans $\mathbb{R}$ et le notent par :

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad (5.2.58)$$

Pour voir cela (dans le style des mathématicien ...), prenons un nombre réel x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$p_n = [10^n x] \qquad (5.2.59)$$

la partie entière de x précédemment multipliée par 10^n.

Par définition de la partie entière d'un nombre réel, on a :

$$p_n \leq 10^n x < p_n + 1 \qquad (5.2.60)$$

Cette inégalité est équivalente à :

$$\frac{[10^n x]}{10^n} \leq x < \frac{[10^n x] + 1}{10^n} \qquad (5.2.61)$$

écrivons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{[10^n x]}{10^n} \qquad \text{et} \qquad b_n \frac{[10^n x] + 1}{10^n} \qquad (5.2.62)$$

En cours de traduction de l'anglais

où a_n et b_n sont respectivement les valeurs décimales approchées à $x \cdot 10^{-n}$ par défaut ou par excès.

Notez que $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$b_n - a_n = 10^{-n} \tag{5.2.63}$$

et que $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons $\{a_n, b_n\} \in \mathbb{Q}$.

✍**Exemple :**

Nous voulons calculer $\sqrt{2}$. Alors :

n		a_n	b_n	error
1	$1 < \sqrt{2} < 2$	1	2	1
2	$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$	1.4	1.5	0.1
3	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$	1.41	1.42	0.01
4	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$	1.414	1.415	0.001

Théorème 5.4. Si les séquences (a_n) et (b_n) sont adjacentes, c'est-à-dire que (a_n) est ascendante et (b_n) descendante, nous avons alors :

$$b_n - a_n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5.2.64}$$

Démonstration 5.4.1. Donné $n \in \mathbb{N}$, nous avons pour rappel :

$$p_n \leq 10^n x < p_n + 1 \tag{5.2.65}$$

où $p_n = [10^n x]$. Multiplions des deux côtés par 10, nous avons alors :

$$10p_n \leq 10^{n+1} x < 10(p_n + 1) \tag{5.2.66}$$

Alors :

- Nous avons de manière triviale :

$$10p_n \leq p_{n+1} \tag{5.2.67}$$

Il vient alors :

$$\frac{p_n}{10^n} \leq \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \tag{5.2.68}$$

Dès lors $a_n \leq a_{n+1}$. La séquence (a_n) est alors bien ascendante.

- Et nous avons aussi de manière triviale :

$$1 + p_{n+1} < 10p_{n+1} \tag{5.2.69}$$

Il vient alors :

$$\frac{1 + p_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \frac{p_{n+1}}{10^n} \tag{5.2.70}$$

Dès lors $b_{n+1} \leq b_n$. La séquence (b_n) est alors bien descendante.

En cours de traduction de l'anglais

Comme :

$$b_n - a_n = 10^{-n} \tag{5.2.71}$$

Nous avons bien :

$$b_n - a_n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5.2.72}$$

et alors nous avons prouvé que les deux séquences (a_n) et (b_n) sont bien adjacentes. Elles convergent toutes deux vers la même limite $L \in \mathbb{R}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$p_n \leq 10^n x < p_n + 1 \tag{5.2.73}$$

Nous avons nécessairement $L = x$.

■ Q.E.D.

Corollaire 5.4.1. Un nombre réel est la limite d'une séquence de nombres rationnels.

Démonstration 5.4.2. Ceci est une conséquence immédiate du théorème précédent. En effet, les séquences (a_n) et (b_n) sont des séquences de rationnels.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

5.2.2.5.1 Pourcentages

Dans le monde des affaires[12] il est commun avec les nombres réels de communiquer en pourcentage ou en pourmille.

Définitions (#5.2.37) :

D1. étant donné un scalaire $x \in \mathbb{R}$, alors exprimé en "pourcentage" il sera noté :

$$x\% = x \cdot 100 \tag{5.2.74}$$

D2. étant donné un scalaire $x \in \mathbb{R}$, alors exprimé en "pourmille" il sera noté :

$$x‰ = x \cdot 1,000 \tag{5.2.75}$$

[12]Pour les taux d'intérêts, les rabais, les bonus, etc.

✍**Exemples :**

E1. Le scalaire 0.5 exprimé en pourcentage est donné par :

$$0.5 \cdot 100 = 50\%$$

E2. Le scalaire 1 exprimé en pourcentage est donné par :

$$1 \cdot 100 = 100\%$$

E3. Le pourcentage 75% exprimé comme un scalaire est donné par :

$$\frac{75}{100} = 0.75$$

Mais nous avons aussi un autre pourcentage bien connu (autre que dans le monde des affaires !) par presque tous ceux qui prennent parfois la route en vélo on en voiture... :

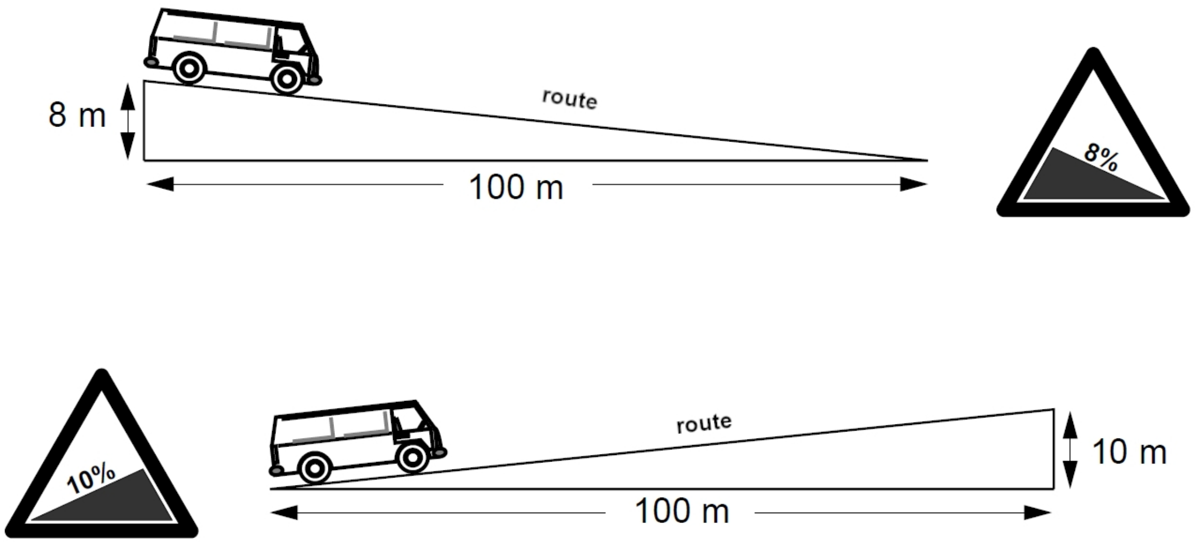


FIG. 5.15 – **Illustration commune du concept de pourcentage**

Remarque

Remarquez quelque chose de drôle à propos des pourcentages ! Nous avons :

$$x\% \text{ of } y = y\% \text{ of } x$$

C'est simplement parce que :

$$y\frac{x}{100} = x\frac{y}{100} \tag{5.2.76}$$

Donc, pour calculer un pourcentage dans votre tête, vous pouvez le faire de la manière suivante : combien font 2% de 50 ? C'est le 50% de 2.

Vous devez être particulièrement prudent lorsque vous manipulez des pourcentages (qui sont des valeurs relatives pour rappel !) et encore plus lorsque vous comparez cela à des valeurs

absolues. Une célèbre "fake news" récente (en juin 2018) faite par un militant socialiste (supposément diplômé en ingénierie ...) en France sur Twitter (un média social réputé pour ses fausses nouvelles) a fait rire beaucoup de gens ... mais en même temps, un nombre considérable de personnes pensaient que le "fait" était vrai [13]. Voici la communication (essayez de deviner où se trouve l'erreur, et notez que l'auteur du message dit que le gouvernement français communique des "fake new", mais en réalité ... c'est lui qui communique les "fake news" pour le coup...) :

En cours d l'anglais

Ok, voyons si le bien-être gouvernemental a effectivement diminué en France alors que la population et le produit intérieur brut (PIB) ont augmenté en même temps, comme le prétend l'auteur de ce Tweet...

D'abord nous avons (si nous faisons les calculs correctement) :

$$\text{Augmentation du PIB} = \frac{2300 - 511}{511} \cdot 100 \cong +350.1\% \tag{5.2.77}$$

Deuxièmement :

$$\text{Augmentation de la population} = \frac{67.2 - 55.4}{55.4} \cdot 100 \cong +21.3\% \tag{5.2.78}$$

Finalement :

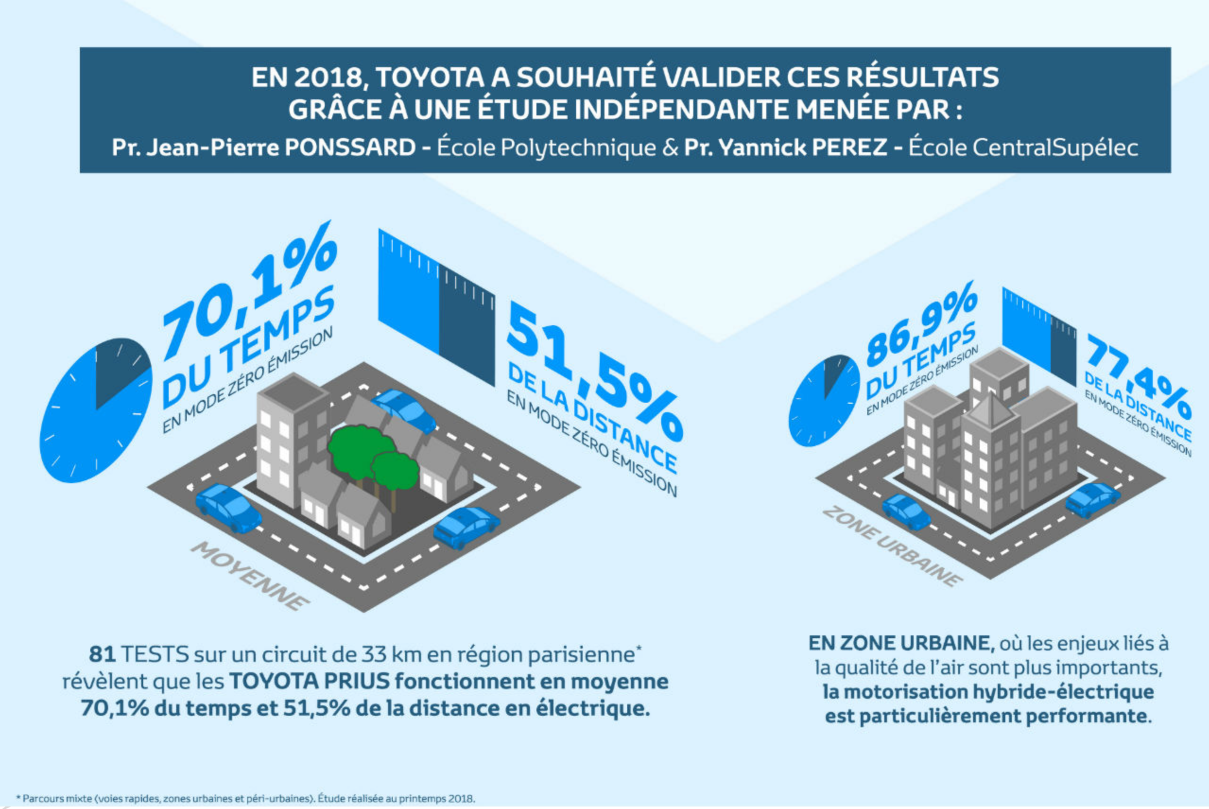
$$\text{Augmentation des prestations sociales} = \frac{33.8 - 24.7}{24.7} \cdot 100 \cong +36.84\% \tag{5.2.79}$$

[13]Les journaux sérieux, comme textitLe Monde, ont également relayé les informations comme étant manifestement fausses

Vous voyez l'erreur maintenant ... ? L'auteur du tweet calcule pour les prestations sociales l'augmentation de ce que nous appelons en finance "points de base" "et non pas en "pourcentages" comme il le fait pour les deux premiers indicateurs. C'est un très bel exemple d'utilisation de statistiques pour mentir ... (le mensonge ne fonctionne évidemment qu'avec des illettrés scientifiques !)

Inutile de dire que ce "tweet" a été supprimé quelques jours après par son auteur sur Twitter...

Un autre exemple intéressant de pseudo-tromperie avec les pourcentages est le cas de Toyota qui communiquait la performance de ses voitures en mode électrique en temps plutôt qu'en distance. Une étude indépendante a donné :



Enfin, vous devez également faire extrêmement attention aux communications scientifiques dans les médias de masse (et même davantage sur les réseaux sociaux...) lorsque vous lisez quelque chose comme "... *le produit* X *augmente le syndrome mortel* Y *de* 400% ...". Parce que parfois, l'augmentation pourrait être (exemple prix au hasard) en fait de 2 individus sur $100'000$ à 8 individus (toujours sur $100'000$ bien évidemment !). Il s'agit là d'une façon de biaiser notre cerveau en associant un pourcentage énorme à des quantités de petites amplitudes ... Dans de telles situations, recherchez toujours les valeurs absolues originales et faites y correspondre le ratio de risque (voir la section Méthodes Numériques page **??**).

N'oubliez pas non plus qu'en pratique, il est fréquent de normaliser une série de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec $x_i \in \mathbb{R}$ (considérées comme un vecteur $\vec{x}$) en pourcentages. , tel que $x_{p,i} \in [0, 1]$

en utilisant la transformation évidente suivante [14] :

$$x_{p,i} = \frac{x_i - \min(\vec{x})}{\max(\vec{x}) - \min(\vec{x})} \tag{5.2.80}$$

Cette transformation de normalisation est particulièrement bien connue dans les tableurs tels que Microsoft Excel lorsque vous utilisez des diagrammes à barres normalisés, ou des indicateurs de performance clés normalisés (mise en forme conditionnelle), ou également dans la Data Science pour l'utilisation de certains algorithmes de réseaux neuronaux.

5.2.2.6 Nombres Transfinis

Nous nous retrouvons donc avec un "infini" des nombres réels qui est différent de celui des nombres naturels. Cantor osa alors ce que personne n'avait (a priori) osé depuis Aristote : la suite des entiers positifs est infinie, l'ensemble $\mathbb{N}$, est donc un ensemble qui a une infinité dénombrable d'éléments, alors il affirma que le cardinal (voir section Théorie des Ensembles page 386) de cet ensemble était un nombre qui existait comme tel sans que l'on utilise le symbole fourre tout ∞, il le nota :

$$\aleph_0 = \text{Card}(\mathbb{N}) \tag{5.2.81}$$

Ce symbole est la première lettre de l'alphabet hébreu (voir section Théorie des Ensembles 388), qui se prononce "aleph zéro". Cantor allait appeler ce nombre étrange, un "nombre transfini".

L'acte décisif est d'affirmer qu'il y a, après le fini, un transfini, c'est-à-dire une échelle illimitée de modes déterminés qui par nature sont infinis, et qui cependant peuvent être précisés, tout comme le fini, par des nombres déterminés, bien définis et distinguables les uns des autres ! !

Après ce premier coup d'audace allant à l'encontre de la plupart des idées reçues depuis plus de deux mille ans, Cantor allait poursuivre sur sa lancée et établir des règles de calcul, paradoxales à première vue, sur les nombres transfinis. Ces règles se basaient, comme nous l'avons précisé tout à l'heure, sur le fait que deux ensembles infinis sont équivalents s'il existe une bijection entre les deux ensembles.

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, nous pouvons facilement montrer que l'infini des nombres pairs est équivalent à l'infini des nombres entiers : pour cela, il suffit de montrer qu'à chaque nombre entier, nous pouvons associer un nombre pair, son double, et inversement.

Ainsi, même si les nombres pairs sont inclus dans l'ensemble des nombres entiers, il y en a une infinité α_0 égaux, les deux ensembles sont donc équipotents. En affirmant qu'un ensemble peut être égal à une de ses parties, Cantor va à l'encontre ce qui semblait être une évidence pour Aristote et Euclide : l'ensemble de tous les ensembles est infini ! Cela va ébranler la totalité des mathématiques et va amener à l'axiomatisation de Zermelo-Fraenkel que nous verrons dans le chapitre de Théorie des Ensembles à la page 380.

À partir de ce qui précède, Cantor établit les règles de calculs suivants sur les cardinaux :

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 \qquad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \qquad \aleph_0^2 = \aleph_0 \tag{5.2.82}$$

[14]Le lecteur doit éviter la confusion entre "normaliser une variable" et "centrer une variable aléatoire" pour créer une variable statistique $Z = mathcalN(0,1)$ comme nous le verrons plus loin !

À première vue ces règles semblent non intuitives mais en fait elles le sont bien ! En effet, Cantor définit l'addition de deux nombres transfinis comme le cardinal de l'union disjointe des ensembles correspondants.

✍**Exemples :**

E1. En notant donc $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$ nous avons $\aleph_0 + \aleph_0$ qui est équivalent à dire que nous sommons le cardinal de $\mathbb{N}$ union disjointe $\mathbb{N}$. Ou $\mathbb{N}$ union disjointe $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$ donc $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (il suffit pour s'en convaincre de prendre l'ensemble des entiers pairs et impairs tout deux dénombrables dont l'union disjointe est dénombrable).

E2. Autre exemple trivial : $\aleph_0 + 1$ correspond au cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ union un point. Ce dernier ensemble est encore équipotent à $\mathbb{N}$ donc $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$.

Nous verrons également lors de notre étude de la section de Théorie des Ensembles (page 389) que le concept de produit cartésien de deux ensembles dénombrables est tel que nous ayons :

$$\text{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}^2) = [\text{Card}(\mathbb{N})]^2 \tag{5.2.83}$$

et donc :

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \tag{5.2.84}$$

De même (voir section Théorie des Ensembles page 381) puisque $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ nous avons :

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \tag{5.2.85}$$

et en identifiant $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (rapport d'un numérateur sur un dénominateur), nous avons immédiatement :

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = (\aleph_0)^2 = \aleph_0 \tag{5.2.86}$$

Nous pouvons d'ailleurs démontrer un énoncé intéressant : si nous considérons le cardinal de l'ensemble de tous les cardinaux, il est nécessairement plus grand que tous les cardinaux, y compris lui-même (il vaut mieux avoir lu la section de Théorie Des Ensembles au préalable à la page 376) ! En d'autres termes : le cardinal de l'ensemble de tous les ensembles de A est plus grand que le cardinal de A lui-même.

Ceci implique qu'il n'existe aucun ensemble qui contient tous les ensembles puisqu'il en existe toujours un qui est plus grand (c'est une forme équivalente du fameux ancien paradoxe de Cantor).

Dans un langage technique cela revient à considérer un ensemble non vide A et alors d'énoncer que :

$$\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A)) \tag{5.2.87}$$

où $\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble des parties de A (voir le chapitre de Théorie des Ensembles pour le calcul général du cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable).

C'est-à-dire par définition de la relation d'ordre $<$ (strictement inférieur), qu'il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f : A \mapsto \mathcal{P}(A)$, en d'autres termes qu'à chaque élément de l'ensemble des parties de A il ne correspond pas au moins une pré-image dans A.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est par exemple constitué de l'ensemble des nombres impairs, pairs, premiers, et l'ensemble des naturels, ainsi que l'ensemble vide lui-même, etc. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est donc l'ensemble de toutes les "patates" (pour emprunter le vocabulaire de la petite école...) possibles qui forment $\mathbb{N}$.

Démonstration 5.4.3. L'idée maintenant est de supposer que nous pouvons numéroter chacune des patates de $\mathcal{P}(A)$ avec au moins un élément de A (imaginez cela avec $\mathbb{N}$ ou allez voir l'exemple dans le chapitre de Théorie des Ensembles). En d'autres termes cela revient à supposer que $f : A \mapsto \mathcal{P}(A)$ est surjective et considérons un sous-ensemble E de A tel que :

$$E = \{x \in A | x \notin f(x)\} \tag{5.2.88}$$

c'est-à-dire l'ensemble d'éléments x de A qui n'appartiennent pas à l'ensemble numéro x (l'élément x n'appartient pas à la patate qu'il numérote... en d'autres termes).

Or, si f est surjective il doit alors exister aussi un $y \in A$ pour ce sous-ensemble E tel que :

$$f(y) = E = \{x \in A | x \notin f(x)\} \tag{5.2.89}$$

puisque E est aussi une partie de A.

Suàpposons que y appartienne E. Dans ce cas, par définition de E, $y \notin f(y) = E$ (par définition de E qui s'applique pour chaque x et x peut bien évidemment être aussi y ou z peu importe !). Par conséquence, $y \notin E$, mais dans ce seconde cas, toujours par définition de E, $y \in f(y) = E$ (comme y n'est pas dans E). Nous voyons alors que l'élément y ne peut existe et dès lors que f ne peut être surjective.

Nous recommandons fortement au lecteur au besoin de relire plusieurs fois le paragraphe précédent si nécessaire...

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

David Hilbert a soutenu que l'infini ne peut pas exister dans la réalité physique. La conséquence de cette déclaration est encore un débat aujourd'hui. Cependant... l'infini a d'innombrables applications pratiques ! Voici une façon d'y penser : les nombres négatifs ont-ils des applications pratiques ? Je veux dire, vous ne pouvez pas vraiment avoir une quantité négative de quoi que ce soit, n'est-ce pas ? Vous ne pouvez pas avoir moins cinq pommes ! Mais les nombres négatifs sont utiles en comptabilité ! Vous pouvez également prendre des limites aux fonctions lorsque la variable va vers l'infini. De cette façon, vous pouvez calculer des choses comme la vitesse terminale et la vitesse d'échappement et bien d'autres ! L'infini peut être en quelque sorte observé car plus un objet est éloigné, plus la lumière qu'il émet sera décalée vers le rouge, c'est-à-dire que la longueur d'onde tend vers l'infini à mesure que l'objet s'approche de l'horizon de la sphère de Hubble (ou peut-être qu'un jour dans le futur nous pourrons pour observer un objet entrant dans l'horizon d'un Trou Noir où le même genre d'effet se produit).

Les ingénieurs considèrent l'infini ∞ comme étant simplement une grandeur qui est trop grande pour être mesurable par un instrument donné. Comme l'illustre la graduation (coin supérieur gauche) du multimètre ci-dessous :

FIG. 5.16 – VOLTCRAFT VC-5080 Multimeter with ohmic graduation displaying ∞ symbol

En cours de tra
’ anglais

5.2.2.7 Nombres Complexes

Inventés au 16ème siècle entre autres par Jérôme Cardan et Rafaello Bombelli, les "nombres complexes" (aussi souvent nommés "nombres imaginaires numbers") permettent de résoudre des problèmes n'ayant pas de solutions dans $\mathbb{R}$ ainsi que de formaliser mathématiquement certaines transformations dans le plan telles que la rotation, la similitude, la translation, etc et aussi de généraliser certains théorèmes restreints a priori à $\mathbb{R}$ et alors en faire émerger certaines propriétés subtiles très utiles en ingénierie. Pour les physiciens, les nombres complexes constituent surtout un moyen très commode de simplifier les notations. Il est ainsi très difficile d'étudier les phénomènes ondulatoires, la relativité générale ou la mécanique quantique sans recourir aux nombres et expressions complexes.

L'importance et l'utilité des nombres complexes en biologie, cosmologie, physique, astrophysique, électronique, électromécanique, astrophysique, microélectronique, génie électrique, statistiques, optique, génie mécanique, mécanique des fluides, etc. ne sont presque jamais remises en question par les étudiants et les professionnels car ils apparaissent très rapidement dans les cours correspondants (la plupart du temps juste après trente à cinquante heures) ou les manuels scolaires. Cependant, un pourcentage important d'étudiants et de professionnels de la finance et de l'assurance remettent en question l'utilité des nombres complexes car leurs cas d'application n'apparaissent dans ces domaines la plupart du temps qu'au niveau postdoctoral (doctorat). Voici donc une petite liste non exhaustive de sujets en Finance et Assurance où les nombres complexes apparaissent et sont vraiment utiles (la plupart des sujets ci-dessous sont traités dans le présent ouvrage) :

- Dans les transformées de Fourier pour la résolution des équations différentielles partielles non linéaires (Black-Sholes par exemple)
- Dans les transformées de Laplace pour la résolution des équations différentielles partielles non linéaires (modèle de Heston)
- Dans les transformées de Fourier pour l'analyse spectral des séries temporelles
- Dans la résolution des polynômes des modèles de séries temporelles auto-régressifs
- Dans l'utilisation de la fonction caractéristique dans le modèle CreditRisk First Boston
- Dans l'ACP (Analyse en Composantes Principales) lorsque des erreurs d'arrondis IEEE avec R et Python produisent des valeurs propres complexes

En cours de traduction de l'anglais

Il existe plusieurs manières de construire les nombres complexes. La première est typique de la construction telle que les mathématiciens en ont l'habitude dans le cadre de la théorie des ensembles. Ils définissent un couple de nombres réels et définissent des opérations entre ces couples pour arriver enfin à une signification du concept de nombre complexe. La deuxième est moins rigoureuse mais son approche est plus simple et consiste à définir le nombre imaginaire pur unitaire i et ensuite de construire les opérations arithmétiques à partir de sa définition. Nous allons opter pour cette deuxième méthode.

Définition (#5.2.38) :

1. Nous définissons le "nombre imaginaire unitaire pur" que nous notons i par la propriété suivante :

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1 \Leftrightarrow \mathrm{i} = \sqrt{-1}} \tag{5.2.90}$$

2. Un "nombre complexes" est un couple d'un nombre réel a et d'un nombre imaginaire $\mathrm{i}b$ et s'écrit généralement sous la forme suivante :

$$\boxed{z = a + \mathrm{i}b} \tag{5.2.91}$$

a et b étant des nombres appartenant à $\mathbb{R}$.

3. Nous notons l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ et avons donc par construction :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{5.2.92}$$

Remarque

L'ensemble $\mathbb{C}$ est identifié au plan euclidien orienté E (voir section de Calcul Vectoriel page 1807) grâce au choix d'une base orthonormée directe (nous obtenons ainsi le plan d'Argand-Cauchy", appelé aussi "plane de Gauss-Argand plane" ou encore plus communément "plan de Gauss" que nous verrons un peu plus loin et qui aurait proposé pour la première fois en 1806).

L'ensemble des nombres complexes qui constitue un corps (voir section Théorie des Ensembles page 427), et noté $\mathbb{C}$, est défini (de manière simple pour commencer) dans la notation de la théorie des ensembles par :

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z = (x + \mathrm{i}y) | x, y \in \mathbb{R}\}} \tag{5.2.93}$$

En d'autres termes nous disons que le corps $\mathbb{C}$ est le corps $\mathbb{R}$ auquel nous avons "adjoint" le nombre imaginaire i. Ce qui se note formellement :

$$\mathbb{R}[\mathrm{i}] \tag{5.2.94}$$

L'addition et la multiplication de nombres complexes sont des opérations internes à l'ensemble des complexes (nous reviendrons beaucoup plus en détail sur certaines propriétés des nombres complexes dans le chapitre traitant de la Théorie des Ensembles page 418) et définies par :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \tag{5.2.95}$$

La "partie réelle" de z est traditionnellement notée :

$$\Re(z) = x \tag{5.2.96}$$

La "partie imaginaire" de z est traditionnellement notée :

$$\Im(z) = x \tag{5.2.97}$$

En cours de traduction en anglais

Le "conjugué" ou "nombre complexe !conjugaison" de z est défini par :

$$\bar{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y \tag{5.2.98}$$

et est aussi parfois noté z^* (en particulier en physique quantique dans certains ouvrages !).

À partir d'un complexe et de son conjugué, il est possible de trouver ses parties réelles et imaginaires. Ce sont les relations évidentes suivantes :

$$\Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} \tag{5.2.99}$$

Le "module" de z (ou "norme") représente la longueur par rapport au centre du plan de Gauss (voir un peu plus bas ce qu'est le plan de Gauss) et est simplement calculé avec l'aide du théorème de Pythagore :

Le "module" de z (ou "norme") représente la longueur par rapport au centre du plan de Gauss (voir un peu plus bas ce qu'est le plan de Gauss) et est simplement calculé avec l'aide du théorème de Pythagore :

$$\boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}} \tag{5.2.100}$$

et est donc toujours un nombre positif ou nul.

Nous considérerons comme évident que le module satisfait toutes les propriétés d'une distance (voir la section de Topologie 2427 et de Calcul Vectoriel 1773).

Remarque

La notation $|z|$ pour le module n'est pas innocente puisque $|z|$ coïncide avec la valeur absolue de z lorsque z est réel.

La division entre deux complexes se calcule comme (le dénominateur étant évidemment non nul) :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\cdot\frac{x_2-\mathrm{i}y_2}{x_2-\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2} \tag{5.2.101}$$

L'inverse d'un complexe se calculant de façon similaire :

$$\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{5.2.102}$$

Nous pouvons aussi énumérer 8 importantes propriétés du module et du conjugué complexe :

P1. Nous affirmons que :

$$|z|=0 \Leftrightarrow z=0 \tag{5.2.103}$$

Démonstration 5.4.4. Par définition du module $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, pour que la somme x^2+y^2 soit nulle, la condition nécessaire est que comme $(x,y)\in\mathbb{R}$:

$$x=y=0 \tag{5.2.104}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

P2. Nous affirmons que :

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| \tag{5.2.105}$$

Démonstration 5.4.5. Ceci est immédiat par :

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-x)^2+(-y)^2} = |-z| = \sqrt{(x)^2+(-y)^2} = |\bar{z}| \tag{5.2.106}$$

■ Q.E.D.

P3. Nous affirmons que :

$$\begin{aligned} |\Re(z)| &\leqslant |z| \quad \text{avec égalité ssi } z \text{ est réél} \\ |\Im(z)| &\leqslant |z| \quad \text{avec égalité ssi } z \text{ est imaginaire} \end{aligned} \tag{5.2.107}$$

Démonstration 5.4.6. Les deux inégalités ci-dessus peuvent être écrites :

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| &\leq \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned} \tag{5.2.108}$$

Dès lors équivalentes respectivement à :

$$\begin{aligned} x^2 &\leq \sqrt{x^2+y^2} \\ y^2 &\leq \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned} \tag{5.2.109}$$

qui sont triviales. La suite est alors triviale... !

■ Q.E.D.

P4. Nous avons :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{5.2.110}$$

et si $z_2 \neq 0$:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{5.2.111}$$

Démonstration 5.4.7. Premièrement :

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{5.2.112}$$

(nous allons prouver un peu plus bas qu'en toute généralité $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$) et pour $z_2 \neq 0$:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\bar{z}_1\overline{\frac{1}{z_2}} = \frac{z_1}{z_2}\bar{z}_1\frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_1}{z_2\bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \tag{5.2.113}$$

et en prenant la racine carrée, cela termine la démonstration.

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

P5. Nous affirmons que :

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad (5.2.114)$$

Démonstration 5.4.8. C'est immédiate :

$$|z|^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}yx + y^2 = x^2+y^2 = \bar{z}z \quad (5.2.115)$$

■ Q.E.D.

P6. Nous affirmons que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' \quad (5.2.116)$$

Démonstration 5.4.9. La première égalité est immédiate :

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x+\mathrm{i}y}} = \overline{x-\mathrm{i}y} = x+\mathrm{i}y = z \quad (5.2.117)$$

et :

$$\begin{aligned}\overline{z+z'} &= \overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)} = \overline{(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)} = (x_1+x_2)-\mathrm{i}(y_1+y_2)\\ &= (x_1-\mathrm{i}y_1)+(x_2-\mathrm{i}y_2) = \bar{z}+\bar{z}'\end{aligned} \quad (5.2.118)$$

et :

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)} = \overline{(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_2x_2)}\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_2x_2) = (x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2) = \bar{z}\bar{z}'\end{aligned} \quad (5.2.119)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

R1. En des termes mathématiques, la première démonstration permet de montrer que la conjugaison complexe est ce que l'on appelle "involutive" (dans le sens qu'elle ne fait rien évoluer...).

R2. En des termes tout aussi mathématiques (ce n'est que du vocabulaire !), la deuxième démonstration montre que la conjugaison de la somme de deux nombres complexes est ce que nous appelons un "automorphisme du groupe" $(\mathbb{C}, +)$ (voir section Théorie des Ensembles page 441).

R3. Encore une fois, pour le vocabulaire..., la troisième démonstration montre que la conjugaison du produit de deux nombres complexes est ce que nous appelons un "automorphisme du corps" $(\mathbb{C}, +, \times)$ (voir section Set Theory page 441).

P7. Nous affirmons que pour z différent de zéro :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (5.2.120)$$

Démonstration 5.4.10. Nous nous restreindrons à la démonstration de la seconde relation qui est un cas général de la première (pour $z = 1$).

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2}\right)\left(\frac{x_2 - \mathrm{i}y_2}{x_2 - \mathrm{i}y_2}\right)} = \overline{\frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \mathrm{i}\frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(y_2x_1 - y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 - \mathrm{i}y_1}{x_2 - \mathrm{i}y_2}\frac{x_2 + \mathrm{i}y_2}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}\end{aligned} \tag{5.2.121}$$

■ Q.E.D.

P8. Nous avons :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{5.2.122}$$

pour tous complexes z_1, z_2 (rigoureusement non nuls car sinon le concept d'argument du nombre complexe que nous verrons plus loin est alors indéterminé !). De plus l'égalité a lieu si et seulement si z_1 et z_2 sont colinéaires (les vecteurs sont "sur la même droite") et de même sens, autrement dit .... s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda z_1 = z_2$.

Démonstration 5.4.11. Directement, nous avons :

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \tag{5.2.123}$$

Cette inégalité peut ne pas paraître évidente à tout le monde alors développons un peu et supposons-la vraie :

$$\begin{aligned}&|z_1 + z_2|^2 \overset{?}{\leqslant} (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}^2 \overset{?}{\leqslant} \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 \\ &(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \overset{?}{\leqslant} (x_1^2 + y_1^2) + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + (x_2^2 + y_2^2) \\ &x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 \overset{?}{\leqslant} (x_1^2 + y_1^2) + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + (x_2^2 + y_2^2)\end{aligned} \tag{5.2.124}$$

Après simplification :

$$\begin{aligned}&x_1x_2 + y_1y_2 \overset{?}{\leqslant} \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \overset{?}{\leqslant} (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\ &x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 \overset{?}{\leqslant} x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2\end{aligned} \tag{5.2.125}$$

et encore après simplification :

$$\begin{aligned}&2x_1x_2y_1y_2 \overset{?}{\leqslant} x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 \\ &0 \overset{?}{\leqslant} x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2 \\ &0 \overset{?}{\leqslant} (x_1y_2 - y_1x_2)^2\end{aligned} \tag{5.2.126}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc comme la parenthèse au carré est forcément positive ou nulle il s'ensuit :

$$0 \leq (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \tag{5.2.127}$$

cette dernière relation démontre donc que l'inégalité est vraie.

■ Q.E.D.

Remarque

Il existe une forme plus générale de cette inégalité appelée "inégalité de Minkowski" présentée dans le chapitre de Calcul Vectoriel à la page3 page 1805 (les nombres complexes peuvent effectivement s'écrire sous la forme de vecteurs comme nous allons le voir de suite).

5.2.2.7.1 Interprétation géométrique des nombres complexes

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons aussi représenter un nombre complexe $a + ib$ ou $a - ib$ dans un plan délimité par deux axes (deux dimensions) de longueur infinie et orthogonaux entres eux. L'axe vertical représentant la partie imaginaire d'un nombre complexe et l'axe horizontal la partie réelle (voir figure ci-après).

Il y a donc bijection entre l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ et l'ensemble des vecteurs du plan de Gauss $\mathbb{R}^2$ (notion d'affixe).

Nous nommons parfois ce type de représentation "plan de Gauss" et nous nommons "affixe" le point de coordonnées cartésiennes (a, b) qui est identifié avec le nombre complexe $a + ib$ lui-même.

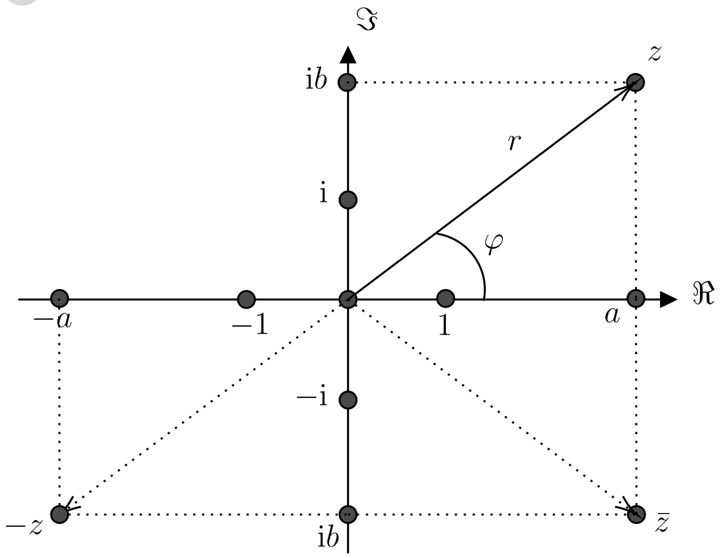


FIG. 5.17 – **Plan de Gauss**

et alors nous écrivons :

$$\text{Aff}(\vec{r}) = a + ib \tag{5.2.128}$$

Nous voyons sur ce diagramme qu'un nombre complexe a donc une interprétation vectorielle (voir section de Calcul Vectoriel page 1776) donnée par :

$$z = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a + \mathrm{i}b \tag{5.2.129}$$

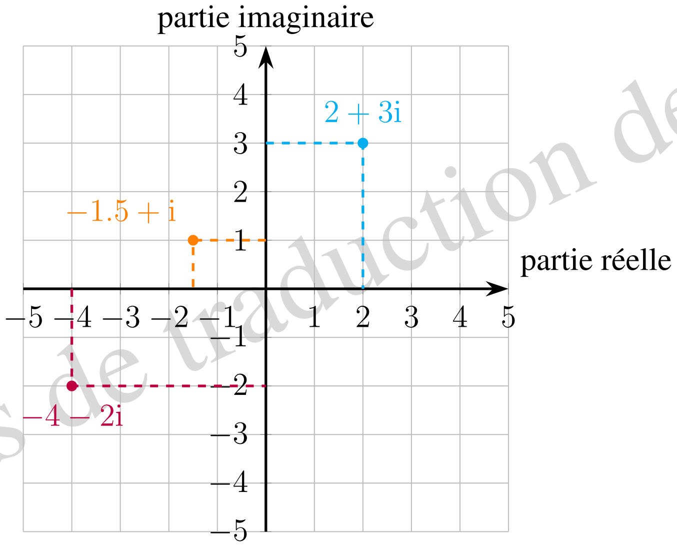
où la base canonique est définie telle que :

$$\left\{1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathrm{i} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \tag{5.2.130}$$

avec :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5.2.131}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est le vecteur de la base unitaire porté par l'axe horizontal $\mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur de la base unitaire porté par l'axe imaginaire $\mathbb{R}_\mathrm{i}$ et r est le module (la norme) positif ou nul.



En cours de traduction de l'anglais

Ceci est à comparer avec les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (voir section de Calcul Vectoriel page 1789) :

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{5.2.132}$$

avec :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.2.133}$$

ce qui fait que nous pouvons identifier le plan complexe avec le plan euclidien.

À l'aide de l'interprétation géométrique du plan de Gauss, l'égalité ci-dessous est par exemple immédiate et évite de faire quelques développements :

$$\left|\frac{a + b\mathrm{i}}{b + a}\right| = 1 \tag{5.2.134}$$

Par ailleurs, les définitions du cosinus et sinus (voir section de Trigonometrie page 2491) nous donnent :

$$a = r\cos(\varphi) \qquad b = r\sin(\varphi) \tag{5.2.135}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}&r = \sqrt{a^2+b^2}\\ &\varphi^{-1} = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{b}{r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}} \tag{5.2.136}$$

Ainsi :

$$z = a + ib = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = r\mathrm{cis}(\varphi) \tag{5.2.137}$$

complexe qui est toujours égal à lui-même modulo 2π de par les propriétés des fonctions trigonométriques :

$$\boxed{z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + 2k\pi))} \tag{5.2.138}$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et où φ est appelé "argument de z" et est noté traditionnellement :

$$\arg(z) \tag{5.2.139}$$

Les propriétés du cosinus et du sinus (voir section Trigonometrie page 2497) nous amènent directement à écrire pour l'argument :

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \arg(z+\pi) \tag{5.2.140}$$

Nous démontrons entre autres avec les séries de Taylor (voir section Suites et Séries page 1684) que :

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots + (-1)^k\frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + \ldots \tag{5.2.141}$$

et :

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots + (-1)^k\frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \tag{5.2.142}$$

dont la somme est semblable à :

$$e^{\varphi} = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots + \frac{\varphi^k}{k!} + \ldots \tag{5.2.143}$$

mais par contre parfaitement identique au développement de Taylor de $e^{\mathrm{i}x}$:

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = 1 + \mathrm{i}\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{\varphi^3}{3!} + \ldots + \mathrm{i}^k\frac{\varphi^k}{k!} + \ldots = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) \tag{5.2.144}$$

Donc finalement, nous pouvons écrire :

$$\boxed{z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = re^{\mathrm{i}\varphi}} \tag{5.2.145}$$

relation nommée "formule d'Euler".

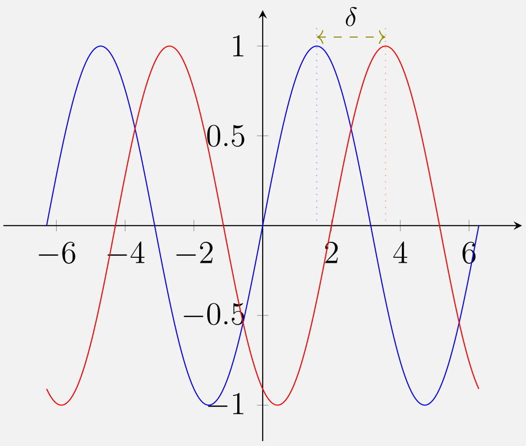
En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le lecteur noter que :

$$z = r(\cos(\varphi+\delta)+\mathrm{i}\sin(\varphi+\delta)) = re^{\mathrm{i}(\varphi+\delta)} = re^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\delta} \tag{5.2.146}$$

où δ est nommé le "décalage de phase" et $e^{\mathrm{i}\delta}$ est nommé le "facteur de décalage de phase" :



En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned}\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi) &= e^{\mathrm{i}\varphi}\\ \cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\varphi) &= e^{-\mathrm{i}\varphi}\end{aligned} \tag{5.2.147}$$

Suivant que nous sommons ou soustrayons cela nous donne les "formules d'Euler" ou "formules de Moivre et Euler" :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\varphi) &= \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\\ \sin(\varphi) &= \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\end{aligned}} \tag{5.2.148}$$

Remarquons que l'angle peut être un nombre purement complexe et dans ce cas les deux formules d'Euler donnent un nombre réel. Si l'angle est un nombre complexe avec une partie réelle plus imaginaire alors dans ce cas les fonctions trigonométriques redonnent un nombre complexe en sortie. Ceci pour dire qu'en toute généralité les fonctions trigonométriques peuvent être considérées commes des fonctions qui vont de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque

Notez que ces relations sont très utiles pour linéariser des expressions telles que $\cos^k(\theta)$

En cours de traduction de l'anglais

ou $\sin^k(\theta)$. Effectivement :

$$\begin{aligned}
\sin^6(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}-6e^{i5\theta}e^{-i\theta}+15e^{i4\theta}e^{-i2\theta}-20e^{i3\theta}e^{-i3\theta}+15e^{i2\theta}e^{-i4\theta}-6e^{i\theta}e^{-i5\theta}+e^{-i6\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}-6e^{i4\theta}+15e^{i2\theta}-20+15e^{-i2\theta}-6e^{-i4\theta}+e^{-i6\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}+e^{-i6\theta}-6\left(e^{i4\theta+e^{-i4\theta}}\right)+15\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{32}\left(\cos(6\theta)-6\cos(4\theta)+15\cos(2\theta)-10\right)
\end{aligned} \tag{5.2.149}$$

Un cas particulier bien connu pour les formules ci-dessus est le cas où $\varphi=\pi$ et $r=1$. Nous avons alors :

$$e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1 \tag{5.2.150}$$

après réarrangement, nous obtenons la fameuse relation que de nombreux "geek" connaissent :

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{5.2.151}$$

Un autre cas célèbre est celui où nous prenons encore $r=1$ mais avec $\varphi=\pi/2$ et que nous élevons à la puissance de i. Nous obtenons alors :

$$e^{i\pi/2}=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)=i \tag{5.2.152}$$

et si nous élevons cela à la puissance de i :

$$i^i=\left(e^{i\pi/2}\right)^i=e^{i^2\pi/2}=e^{-\pi/2}\cong 0.20788 \tag{5.2.153}$$

Certaines personnes considèrent alors comme un fait curieux que i élevé à la puissance i donne un nombre réel.

Grâce à la forme exponentielle d'un nombre complexe, très fréquemment utilisée dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingénierie, nous pouvons très facilement tirer des relations telles que (cis est une vieille notation qui est l'abréviation du $\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$ se trouvant dans la parenthèse) :

$$\begin{aligned}
z &= r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))=r\text{cis}(\varphi)=re^{i\varphi} \\
z_1 &= r_1(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))=r_1\text{cis}(\varphi_1)=r_1e^{i\varphi_1} \\
z_2 &= r_2(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2))=r_1\text{cis}(\varphi_2)=r_2e^{i\varphi_2}
\end{aligned} \tag{5.2.154}$$

et en supposant connues les relations trigonométriques de bases (voir section de Trigonométrie page 2502) nous avons les relations suivantes pour la multiplication de deux nombres complexes :

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]=r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2\text{cis}(\varphi_1+\varphi_2)=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{5.2.155}$$

En cours de traduction de l'anglais

dès lors :

$$\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2) \tag{5.2.156}$$

et donc si n est un entier positif :

$$\arg(z^n)=n\arg(z) \tag{5.2.157}$$

Pour le module de la multiplication (nous changeons de notation pour la lisibilité) :

$$|z_1z_2|=|r_1e^{\mathrm{i}\varphi_1}r_2e^{\mathrm{i}\varphi_2}|=|r_1r_2e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}|=r_1r_2=|r_1||r_2| \tag{5.2.158}$$

d'où :

$$|z^m|=|z|^m \tag{5.2.159}$$

Pour la division de deux nombres complexes :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]=\frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{r_1}{r_2}\frac{e^{\mathrm{i}\varphi_1}}{e^{\mathrm{i}\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{5.2.160}$$

Le module de leur division vient alors immédiatement :

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{5.2.161}$$

dès lors nous avons pour l'argument :

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg\left(\frac{r_1e^{\mathrm{i}\phi_1}}{r_2e^{\mathrm{i}\phi_2}}\right)=\arg\left(\frac{r_1}{r_2}e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}\right)=\varphi_1-\varphi_2=\arg(z_1)-\arg(z_2) \tag{5.2.162}$$

ainsi il vient immédiatement :

$$\arg(z^{-1})=\arg\left(\left(re^{\mathrm{i}\phi}\right)^{-1}\right)=\arg\left(\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}\varphi}\right)=-\varphi=-\arg(z) \tag{5.2.163}$$

Pour la mise en puissance d'un nombre complexe (ou la racine) :

$$z^m=r^me^{\mathrm{i}m\varphi}=r^m\left[\cos(m\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)\right]=r^m\text{cis}(m\varphi) \tag{5.2.164}$$

ce qui nous donne immédiatement un résultat déjà mentionné plus haut :

$$|z^m|=|z|^m \tag{5.2.165}$$

et pour l'argument :

$$\arg(z^m)=\arg\left(\left(re^{\mathrm{i}\varphi}\right)^m\right)=\arg\left(r^me^{m\mathrm{i}\varphi}\right)=m\varphi=m\arg(z) \tag{5.2.166}$$

Dans le cas où nous avons un module unité (norme égale à 1) tel que $z=\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)$ nous avons alors la relation :

$$(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^m=\left(e^{\mathrm{i}\varphi}\right)^m=e^{\mathrm{i}m\varphi}=\cos(m\varphi)+\mathrm{i}\sin(m\varphi) \tag{5.2.167}$$

appelée "formule de Moivre".

Pour le logarithme népérien d'un nombre complexe, nous avons trivialement la relation suivante sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre d'Analyse Complexe (page 2259) :

$$\ln(z)=\ln\left(re^{\mathrm{i}\varphi}\right)=\ln(r)+\mathrm{i}\varphi \tag{5.2.168}$$

où $\ln(z)$ est souvent dans le cas complexe écrit $\text{Log}(z)$ avec un "L" majuscule.

Toutes les relations précédentes pourraient bien sûr être obtenues avec la forme trigonométrique des nombres complexes mais nécessiteraient alors quelques lignes supplémentaires de développements.

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

Notez que les développements précédents nous autorisent à calculer des choses (..) du genre $\cos(\bar{z})$. Effectivement, posons $z = x + \mathrm{i}y$ et considérons :

$$\overline{e^{\mathrm{i}z}} = \overline{e^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}} = \overline{e^{-y}e^{\mathrm{i}x}} = e^{-y}e^{-\mathrm{i}x} = e^{-\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)} = e^{-\mathrm{i}\bar{z}} \quad (5.2.169)$$

Similairement, nous avons :

$$\overline{e^{-\mathrm{i}z}} = e^{\mathrm{i}\bar{z}} \quad (5.2.170)$$

Maintenant considérons :

$$\overline{\cos(z)} = \overline{\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z})} = \frac{1}{2}(e^{-\mathrm{i}\bar{z}} + e^{\mathrm{i}\bar{z}}) = \cos(\bar{z}) \quad (5.2.171)$$

5.2.2.7.1.1 Vecteurs de Fresnel (phaseurs)

Une variation sinusoïdale $f(t) = r\sin(\omega t)$ peut être représentée comme la projection (voir section de Trigonométrie page 2486) sur l'axe vertical y (axe des imaginaires de l'ensemble $\mathbb{C}$) d'un vecteur $\vec{r}$ tournant à vitesse angulaire ω autour de l'origine dans le plan $x\mathrm{O}y$:

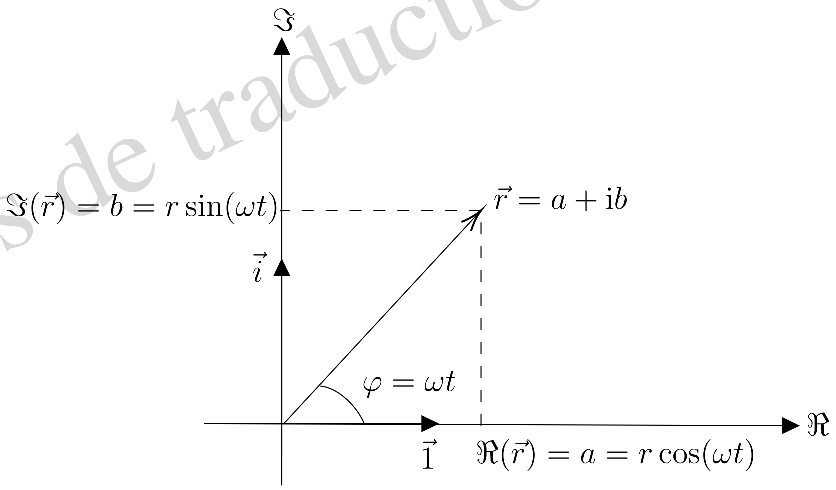


FIG. 5.18 – **Représentation de Fresnel**

Un tel vecteur tournant s'appelle "vecteur de Fresnel" et peut très bien être interprété comme la partie imaginaire d'un nombre complexe donné par :

$$\vec{r} = \Re(\vec{r}) + \mathrm{i}\Im(\vec{r}) = r(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)) = re^{\mathrm{i}\omega t} = re^{\mathrm{i}\phi} \quad (5.2.172)$$

C'est-à-dire :

En cours de traduction de l'anglais

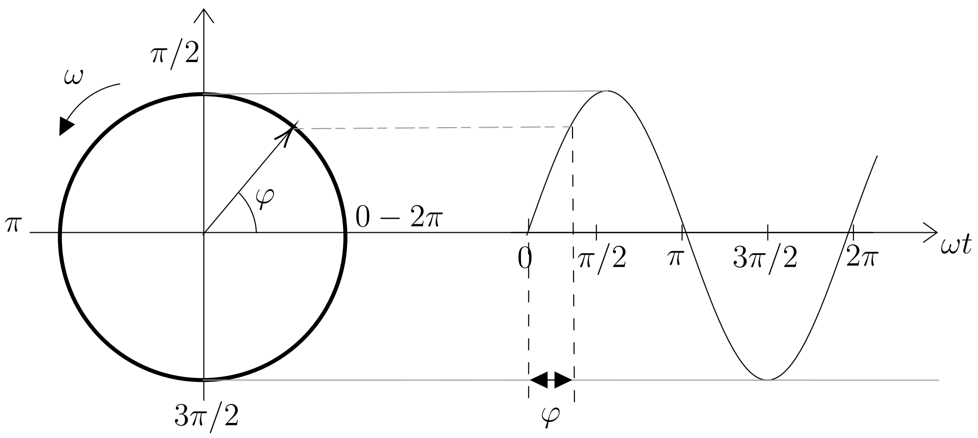


FIG. 5.19 – Vecteur tournant de Fresnel (oscillateurs complexes)

Ou avec une dimension supplémentaire :

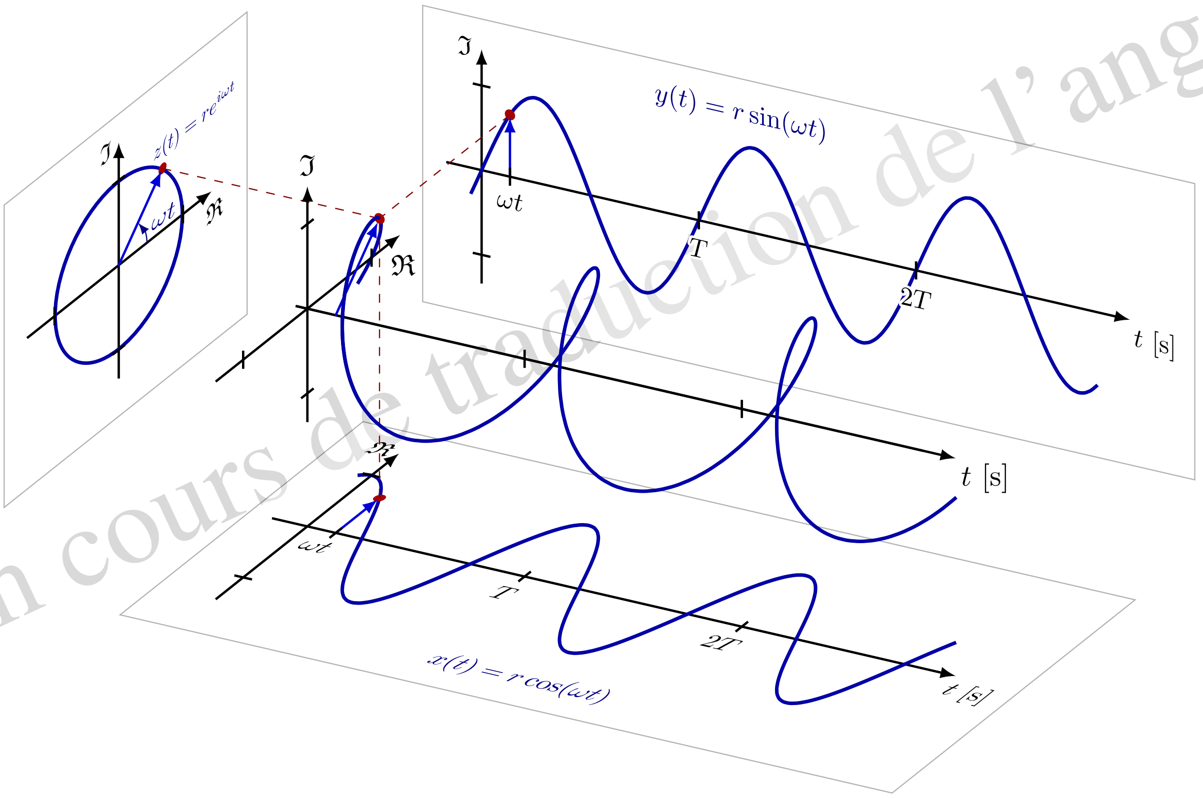


FIG. 5.20 – Oscillateur 3D complexe (auteur : Izaak Neutelings)

En cours de traduction de l'anglais

Nous retrouverons les vecteurs tournants de façon explicite lors de notre étude de la mécanique ondulatoire et optique géométrique (dans le cadre de la diffraction) dans les sections correspondantes aux pages respectives **??** et **??**.

5.2.2.7.2 Transformations dans le plan

Il est habituel de représenter les nombres réels comme points d'une droite graduée. Les opérations algébriques y ont leur interprétation géométrique : l'addition est une translation, la multiplication une homothétie centrée à l'origine.

En particulier nous pouvons parler de la "racine carrée d'une transformation". Une translation d'amplitude T peut être obtenue comme l'itération d'une translation d'amplitude $T/2$. De même une homothétie de rapport S peut être obtenue comme l'itérée d'une homothétie de rapport $\sqrt{S}$. En particulier une homothétie de rapport 9 est la composée de deux homothéties de rapport 3 (ou -3).

La racine carrée prend alors un sens géométrique. Mais qu'en est-il de la racine carrée de nombres négatifs ? En particulier de la racine carrée de -1 ?

Une homothétie de rapport -1 peut être vue comme une symétrie par rapport à l'origine. Toutefois si nous voulons voir cette transformation d'une manière continue, force nous est de placer la droite dans un plan. Dès lors une homothétie de rapport -1 peut être vue comme une rotation de π radians autour de l'origine.

Du coup, le problème de la racine carrée négative se simplifie. En effet, il n'est guère difficile de décomposer une rotation de π radians en deux transformations : nous pouvons répéter soit une rotation de $\pi/2$ soit une rotation de $-\pi/2$. L'image de 1 sera la racine carrée de -1 et i est située sur une perpendiculaire à l'origine à une distance 1 soit vers le haut soit vers le bas.

Ayant réussi à positionner le nombre i il n'est plus guère difficile de disposer les autres nombres complexes dans un plan de Gauss. Nous pouvons ainsi associer à $2\mathrm{i}$ le produit de l'homothétie (voir section de Géométrie Euclidenne page 2622) de rapport 2 par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$, soit une similitude centrée à l'origine. C'est ce que nous allons nous efforcer à montrer maintenant.

En cours de traduction de l'anglais

Soient :

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = ae^{\mathrm{i}\alpha}, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = be^{\mathrm{i}\beta} \tag{5.2.173}$$

Nous avons les propriétés de transformations géométriques suivantes pour les nombres complexes (voir le chapitre de Trigonométrie pour les propriétés du sinus et cosinus) que nous pouvons joyeusement combiner selon notre bon vouloir :

P1. La multiplication de z_1 par un réel λ dans le plan de Gauss correspond (trivial) à une homothétie (agrandissement) de centre O (l'intersection des axes imaginaires et réels), de rapport λ.

Effectivement :

$$\lambda z_1 = (\underline{\lambda a})e^{\mathrm{i}\alpha} \tag{5.2.174}$$

P2. La multiplication de z_1 par un nombre complexe de module unitaire correspond à une rotation de centre 0 et à un angle correspondant à l'argument de z_1. Effectivement :

$$z_0 z_1 = e^{\mathrm{i}\omega} ae^{\mathrm{i}\alpha} = ae^{\mathrm{i}(\alpha+\omega)} \tag{5.2.175}$$

Remarque

Nous voyons alors immédiatement, par exemple, que multiplier un nombre complexe par i (c'est-à-dire $\sin(\omega) = 1, \cos(\omega) = 0$) correspond à une rotation de $\pi/2$.

Théorème 5.5. Il est intéressant d'observer que sous forme vectorielle la rotation de centre O de z_1 par z_0 peut s'écrire à l'aide de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \tag{5.2.176}$$

Démonstration 5.5.1. Nous savons que $z_0 z_1$ est une rotation de centre O et d'angle ω. Il suffit de l'écrire à l'ancienne :

$$z_0 z_1 = (x_0 + \mathrm{i} y_0)(x_1 + \mathrm{i} y_1) = (x_0 x_1 - y_0 y_1) + \mathrm{i}(x_0 y_1 + y_0 x_1) \tag{5.2.177}$$

ce qui donne sous forme vectorielle :

$$z_0 z_1 = \begin{pmatrix} x_0 x_1 - y_0 y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 y_1 + y_0 x_1 \end{pmatrix} \tag{5.2.178}$$

donc l'application linéaire est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 x_1 - y_0 x_1 \\ x_0 y_1 + y_0 y_1 \end{pmatrix} \tag{5.2.179}$$

ou encore (nous retombons sur la matrice de rotation dans le plan que nous avons dans le chapitre de Géométrie Euclidienne page 2628 ce qui est un résultat remarquable !) en utilisant :

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi + k2\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + k2\pi)) \tag{5.2.180}$$

dans le cas particulier et arbitraire où r serait unitaire (afin d'avoir une rotation pure !) :

$$z = \cos(\varphi + k2\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + k2\pi) = x_0 + \mathrm{i} y_0 \tag{5.2.181}$$

nous avons immédiatement (nous avons repris les notations de l'angle tel que nous l'avons dans le chapitre de Géométrie) :

$$\begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 x_1 - y_0 y_1 \\ x_0 y_1 + y_0 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) x_1 - \sin(\omega) y_1 \\ \cos(\omega) y_1 + \sin(\omega) x_1 \end{pmatrix} \tag{5.2.182}$$

Remarquons que la matrice de rotation 2D peut aussi s'écrire sous la formes :

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix} = \cos(\omega) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin(\omega) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \cos(\omega) I + \sin(\omega) J \tag{5.2.183}$$

de même :

$$\begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = x_0 \cdot I + y_0 \cdot J \tag{5.2.184}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

Ainsi nous remarquons que ces matrices de rotation ne sont pas que des applications mais sont des nombres complexes aussi (bon c'était évident dès le début mais fallait le montrer de manière esthétique et simple).

Ainsi, nous avons pour habitude de poser que :

$$1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{i}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{5.2.185}$$

ou avec une autre notation fréquente en alègbre linéaire :

$$\mathbb{1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{i}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{5.2.186}$$

Le corps des nombres complexes est donc isomorphe au corps des matrices réelles carrées de dimension 2 du type :

$$\begin{bmatrix}x_0 & -y_0\\ y_0 & x_0\end{bmatrix} \tag{5.2.187}$$

C'est un résultat que nous réutiliserons de nombreuses fois dans divers chapitres de ce livre pour des études particulières en algèbre, géométrie et en physique quantique relativiste.

P3. La multiplication de deux complexes correspond à une homothétie ajoutée à une rotation. En d'autres termes, d'une "similitude directe".

Démonstration 5.5.2.

$$z_1 z_2 = ae^{\mathrm{i}\alpha}be^{\mathrm{i}\beta}=(\underline{ab})e^{\mathrm{i}\underline{(\alpha+\beta)}} \tag{5.2.188}$$

il s'agit donc bien d'une similitude de rapport b et d'angle β.

Au contraire, l'opération suivante :

$$z_1\overline{z_2} = ae^{\mathrm{i}\alpha}be^{-\mathrm{i}\beta}=(\underline{ab})e^{\mathrm{i}\underline{(\alpha-\beta)}} \tag{5.2.189}$$

sera appelée une "similitude linéaire rétrograde".

Par ailleurs, il en retourne trivialement la relation déjà connue suivante :

$$\arg(z_1 z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2) \tag{5.2.190}$$

Remarques

R1. La somme de deux nombres $z_1 + z_2$ complexes ne pouvant avoir une écriture mathématique simplifiée sous quelque forme que ce soit, nous disons alors que la somme équivaut à une "translation d'amplitude".

R2. La combinaison d'une similitude linéaire (multiplication de deux nombres complexes) directe et d'une translation d'amplitude (sommation par un troisième

En cours de traduction de l' anglais

nombre complexe) correspond à ce que nous appelons une "similitude linéaire directe".

■ Q.E.D.

P4. Le conjugué d'un nombre complexe est géométriquement son symétrique par rapport à l'axe réél tel que :

$$\bar{z}_1 = x_1 - \mathrm{i}y_1 = r(\cos(\alpha) - \mathrm{i}\sin(\alpha)) = r(\cos(-\alpha) - \mathrm{i}\sin(-\alpha)) = re^{-\mathrm{i}\alpha} \quad (5.2.191)$$

sans oublier que (trigonométrie de base) :

$$\cos(\varphi) = \cos(\varphi + k2\pi) \qquad \sin(\varphi) = \sin(\varphi + k2\pi) \quad (5.2.192)$$

Ce qui nous donne un résultat déjà connu :

$$\arg(\bar{z}_1) = -\arg(z_1) \quad (5.2.193)$$

D'où nous pouvons tirer la propriété suivante :

$$r(\cos(\varphi + \pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \pi)) = r\left(-\cos(\varphi) - \mathrm{i}\sin(\varphi)\right) = -r\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right) = -z_1 \quad (5.2.194)$$

d'où :

$$\arg(z_1) + \pi = -\arg(-z_1) \quad (5.2.195)$$

P5. La négation du conjugué d'un nombre complexe est géométriquement son symétrique par rapport à l'axe des imaginaires tel que :

$$-\bar{z}_1 = -x_1 + \mathrm{i}y_1 = r(-\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = r(\cos(\pi \pm \alpha) + \mathrm{i}\sin\alpha) \quad (5.2.196)$$

En cours de traduction de l' anglais

Remarques

R1. La combinaison des propriétés P4, P5 est appelée une "similitude rétrograde".

R2. L'opération géométrique qui consiste à prendre l'inverse du conjugué d'un nombre complexe (soit $\bar{z}^{-1}$) est appelée une "inversion de pôle".

P6. La rotation de centre c et d'angle φ est donnée par :

$$\mathcal{R}(z_1) = c + e^{\mathrm{i}\varphi}(z_1 - c) \quad (5.2.197)$$

Explications :

Le complexe c donne un point dans le plan de Gauss qui sera le centre de rotation. La différence $z_1 - c$ donne le rayon r choisi. La multiplication par $e^{\mathrm{i}\varphi}$ est la rotation du rayon par rapport à l'origine du plan de Gauss dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Finalement, l'addition par c est la translation nécessaire pour ramener le rayon r tourné à l'origine du centre c. Ce qui donne schématiquement :

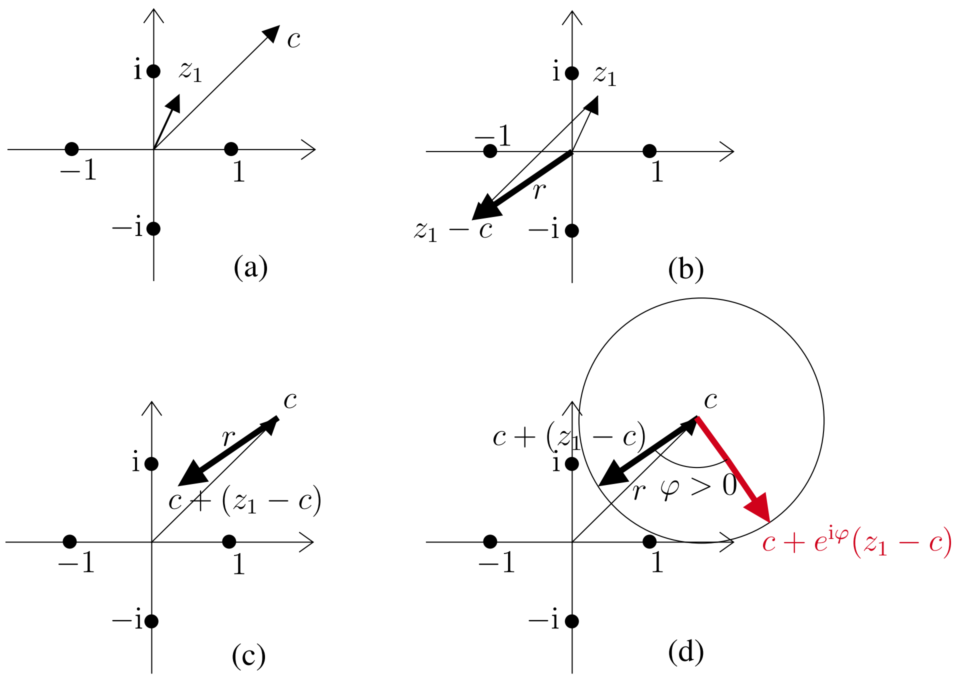


FIG. 5.21 – Représentation de la rotation complexe

P7. Sur la même idée, nous obtenons une homothétie de centre c, de rapport λ par l'opération :

$$\mathcal{H}(z_1) = c + \lambda(z_1 - c) \tag{5.2.198}$$

Explications :

La différence $z_1 - c$ donne toujours le rayon r et c un point dans le centre de Gauss. L'expression $\lambda(z_1 - c)$ donne l'homothétie du rayon par rapport à l'origine du plan de Gauss et finalement l'addition par c la translation nécessaire pour que l'homothétie soit vue comme étant faite de centre c.

5.2.2.8 Nombres Quaternions

Appelés aussi "hypercomplex", les nombres quaternions ont été inventés en 11843 (calendrier holocène) par William Rowan Hamilton pour généraliser les nombres complexes.

Définition (#5.2.39) : Un "quaternion" est un élément $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et dont nous notons $\mathbb{H}$ l'ensemble qui le contient et que nous appelons "ensemble des quaternions".

Un quaternion peut aussi bien être représenté en ligne ou en colonne tel que :

$$(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \tag{5.2.199}$$

Nous définissons la somme de deux quaternions (a, b, c, d) et (a', b', c', d') par :

$$(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d') \tag{5.2.200}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il est évident (du moins nous l'espérons pour le lecteur) que $(\mathbb{H}, +)$ est un groupe commutatif (voir section Théorie des Ensembles page ??), d'élément neutre $(0, 0, 0, 0)$, l'opposé d'un élément (a, b, c, d) étant $(-a, -b, -c, -d)$.

L'associativité se vérifie en appliquant les propriétés correspondantes des opérations sur $\mathbb{R}$.

Nous définissons également la multiplication :

$$(a, b, c, d) \cdot (a', b', c', d') \tag{5.2.201}$$

de deux quaternions (a, b, c, d) et (a', b', c', d') par l'expression :

$$(a, b, c, d) \cdot (a', b', c', d') = \begin{pmatrix} aa' - bb' - cc' - dd' \\ (ab' + ba') + (cd' - dc') \\ (ac' + ca') - (bd' - db') \\ (da' + ad') + (bc' - cb') \end{pmatrix} \tag{5.2.202}$$

C'est peut-être difficile à accepter mais nous verrons un peu plus loin qu'il y a un air de famille avec les nombres complexes.

Nous pouvons remarquer que la loi de multiplication n'est pas commutative. Effectivement, en prenant la définition de la multiplication ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) &= (0, 0, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) &= (0, 0, 0, -1) \end{aligned} \tag{5.2.203}$$

Mais nous pouvons aussi remarquer que :

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = -1(0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) \tag{5.2.204}$$

Remarque

C'est l'addition naturelle dans $\mathbb{R}^4$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ((voir section Théorie des Ensembles page 429).

La loi de multiplication est distributive avec la loi d'addition mais c'est un excellent exemple où il faut quand même prendre garde à démontrer la distributivité à gauche et à droite, puisque le produit n'est pas commutatif !

La multiplication a pour élément neutre :

$$(1, 0, 0, 0) \tag{5.2.205}$$

Effectivement :

$$(1, 0, 0, 0) \cdot (a, b, c, d) = (a, b, c, d) \cdot (1, 0, 0, 0) = (a, b, d, c) \tag{5.2.206}$$

Tout élément :

$$(a, b, c, d) \in \mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{(0, 0, 0, 0)\} \tag{5.2.207}$$

est inversible.

En cours de traduction de l'anglais

En effet, si (a, b, c, d) est un quaternion non nul, nous avons alors nécessairement :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0 \tag{5.2.208}$$

sinon les quatre nombres a, b, c, d sont de carré nul, donc tous nuls. Soit alors le quaternion (a_1, b_1, c_1, d_1) défini par :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ b_1 &= \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ c_1 &= \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ d_1 &= \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{aligned} \tag{5.2.209}$$

alors en appliquant machinalement la définition de la multiplication des quaternions, nous vérifions que :

$$(a, b, c, d) \cdot (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0) \tag{5.2.210}$$

ce dernier quaternion est donc l'inverse pour la multiplication !

Montrons maintenant (pour la culture générale) que le corps des complexes equation est un sous-corps de $(\mathbb{H}, +, \times)$.

Remarque

Nous aurions pu mettre cette démonstration dans le chapitre de Théorie Des Ensembles car nous faisons usage de beaucoup de concepts qui y sont vus mais il nous a semblé un peu plus pertinent de la mettre ici.

Soit $\mathbb{H}'$ l'ensemble des quaternions de la forme $(a, b, 0, 0)$. Si $\mathbb{H}'$ est non vide, et si $(a, b, 0, 0)$, $(a', b', 0.0)$ sont des éléments de $\mathbb{H}'$ alors $(\mathbb{H}', +\times)$ est un corps. Effectivement :

P1. Pour la soustraction (et donc l'addition) :

$$(a, b, 0, 0) - (a', b', 0, 0) = (a - a', b - b', 0, 0) \in \mathbb{H}' \tag{5.2.211}$$

P2. La multiplication :

$$(a, b, 0, 0) \cdot (a', b', 0, 0) = (aa' - bb', ab' + ba', 0, 0) \in \mathbb{H}' \tag{5.2.212}$$

P3. L'élément neutre :

$$(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}' \tag{5.2.213}$$

P4. Et finalement l'inverse :

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}, 0, 0\right) \in \mathbb{H}' \tag{5.2.214}$$

de $(a, b, 0, 0)$ est encore dans $\mathbb{H}'$.

En cours de traduction de l'anglais

Donc $(\mathbb{H}',+,\times)$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$. Soit alors l'application :

$$\begin{gathered} f : a + \mathrm{i}b \rightarrow (a,b,0,0) \\ \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \end{gathered} \tag{5.2.215}$$

f est bijective, et nous vérifions aisément que pour tous complexes z_1, z_2, nous avons :

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= f(z_1) + f(z_2) \\ f(z_1 z_2) &= f(z_1) f(z_2) \end{aligned} \tag{5.2.216}$$

Donc f est un isomorphisme de $(\mathbb{C},+,\times)$ sur $(\mathbb{H}',+,\times)$.

Cet isomorphisme a pour intérêt (provoqué) d'identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{H}'$ et d'écrire $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, les lois d'addition et de soustraction sur $\mathbb{H}$ prolongeant les opérations déjà connues sur $\mathbb{C}$.

Ainsi, par convention, nous écrirons tout élément de $(a,b,0,0)$ de $\mathbb{H}'$ sous la forme complexe $a + \mathrm{i}b$. En particulier 0 est l'élément $(0,0,0,0)$, 1 est l'élément $(1,0,0,0)$ et i est l'élément $(0,1,0,0)$.

Nous notons par analogie et par extension j l'élément $(0,0,1,0)$ et k l'élément $(0,0,0,1)$. La famille $\{1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ forme une base de l'ensemble des quaternions vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et nous écrirons :

$$a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \tag{5.2.217}$$

le quaternion (a,b,c,d).

La notation des quaternions sous forme définie ci-avant est parfaitement adaptée à l'opération de multiplication. Pour le produit de deux quaternions nous obtenons en développant l'expression :

$$(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}) \cdot (a' + b'\mathrm{i} + c'\mathrm{j} + d'\mathrm{k}) \tag{5.2.218}$$

16 termes que nous devons identifier à la définition d'origine de la multiplication des quaternions pour obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathrm{i} \cdot \mathrm{j} = \mathrm{k} = -\mathrm{j} \cdot \mathrm{i} \\ &\mathrm{j} \cdot \mathrm{k} = \mathrm{i} = -\mathrm{k} \cdot \mathrm{j} \\ &\mathrm{k} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{j} = -\mathrm{i} \cdot \mathrm{k} \\ &\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \end{aligned} \tag{5.2.219}$$

Ce qui peut se résumer dans un tableau :

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-\mathrm{j}$
j	j	$-\mathrm{k}$	-1	i
j	j	j	$-\mathrm{i}$	-1

(5.2.220)

Ou dans une représentation 3D de ce qu'il se passe dans la sphère 4D correspondante (rouge, vert et bleu pour i, j et k respectivement) :

En cours de traduction de l'anglais

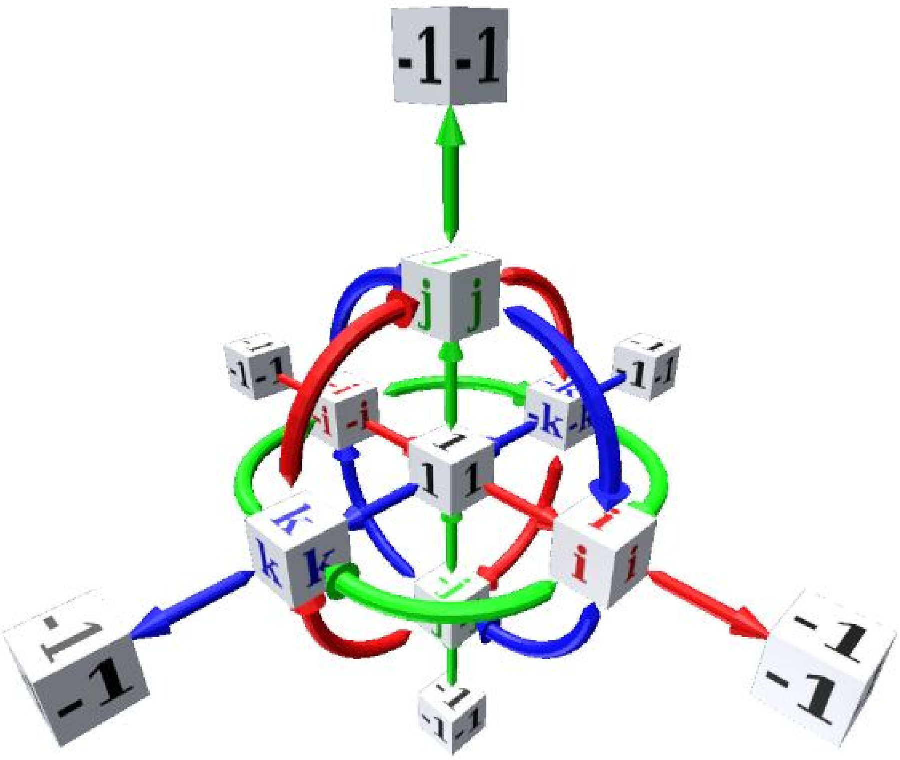


FIG. 5.22 – **Situation de départ pour rotation des quaternions**

Nous pouvons constater que l'expression de la multiplication de deux quaternions ressemble en partie beaucoup à un produit vectoriel (noté $\circ$ dans ce livre) et scalaire (noté equation sur ce site) :

$$\begin{pmatrix} aa'-bb'-cc'-dd' \\ (ab'+ba')+(cd'-dc') \\ (ac'+ca')-(bd'-db') \\ (da'+ad')+(bc'-cb') \end{pmatrix} \tag{5.2.221}$$

Si ce n'est pas évident (ce qui serait tout à fait compréhensible), faisons un exemple concret :

En cours de traduction de … glais

✍**Exemple :**

Soient deux quaternions sans partie réelle :

$$p = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} \qquad q = x'\mathrm{i} + y'\mathrm{j} + z'\mathrm{k} \tag{5.2.222}$$

et $\vec{u}, \vec{v}$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z'). Alors le produit :

$$pq = (0, \vec{u})(0, \vec{v}) \tag{5.2.223}$$

est égal à :

$$p \cdot q = (-xx' - yy' - zz', yz' - zy', -xz' + zx', xy' - yx') = (-\vec{u} \circ \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) \tag{5.2.224}$$

Nous pouvons aussi par curiosité nous intéresser au cas général... Soient pour cela deux quaternions :

$$p = (a, \vec{u}) \qquad q = (b, \vec{v}) \tag{5.2.225}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (a + (0, \vec{u})) \cdot (b + (0, \vec{v})) \\ &= ab + (0, a\vec{v}) + (0, b\vec{u}) + (-\vec{u} \circ \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) \\ &= (ab - \vec{u} \circ \vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}) \end{aligned} \tag{5.2.226}$$

Définition (#5.2.40) : Le centre du corps non-commutatif $(\mathbb{H}, +, \times)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ commutant pour la loi de multiplication avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

Théorème 5.6. Le centre de $(\mathbb{H}, +, \times)$ est l'ensemble des réels !

Démonstration 5.6.1. Soit $\mathbb{H}_1$ le centre de $(\mathbb{H}, +, \times)$, et (x, y, z, t) un quaternion. Nous devons avoir les conditions suivantes qui soient satisfaites :

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{H}_1$ alors pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ nous cherchons :

$$(x, y, z, t) \cdot (a, b, c, d) = (a, b, c, d) \cdot (x, y, z, t) \tag{5.2.227}$$

ce qui donne en développant :

$$\begin{aligned} xa - yb - zc - td &= ax - by - cz - dt \\ xb + ya + zd - tc &= ay + bx + ct - dz \\ xc + za - yd + tb &= az + cx - bt + dy \\ ta + xd + yc - zb &= dx + at + bz - cy \end{aligned} \tag{5.2.228}$$

après simplification (la première ligne du système précédent est nulle des deux côtés de l'égalité) :

$$\begin{aligned} ct - dz &= 0 \\ bt - dy &= 0 \\ bz - cy &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.229}$$

En cours de ... anglais

la résolution de ce système, nous donne :

$$y = z = t = 0 \tag{5.2.230}$$

Donc pour que le quaternion (x, y, z, t) soit le centre de $\mathbb{H}$ il doit être réel (sans parties imaginaires) !

■ Q.E.D.

Au même titre que pour les nombres complexes, nous pouvons définir un conjugué des quaternions :

Définition (#5.2.41) : Le conjugué d'un quaternion $Z = (a, b, c, d)$ est le quaternion $\bar{Z} = (a, -b, -c, -d)$.

Au même titre que pour les complexes, nous remarquons que :

1. D'abord de manière évidente que si $Z = \bar{Z}$ alors cela signifie que $Z \in \mathbb{R}$.
2. Que $Z + \bar{Z} \in \mathbb{R}$
3. Qu'en développant le produit $Z\bar{Z}$ nous avons :

$$\begin{aligned} Z\bar{Z} &= (a, b, c, d) \cdot (a, -b, -c, -d) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, -ab + ba - cd + dc, -ac + ca + bd - db, da - ad - bc + cb) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, 0, 0, 0) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.2.231}$$

que nous adopterons, par analogie avec les nombres complexes, comme une définition de la norme (ou module) des quaternions tel que :

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}} \tag{5.2.232}$$

Dès lors nous avons aussi immédiatement (relation qui nous sera utile plus tard) :

$$|ZZ'| = \sqrt{(ZZ')(\overline{ZZ'})} \tag{5.2.233}$$

Comme pour les nombres complexes (voir plus loin), il est aisé de montrer que la conjugaison est un automorphisme du groupe $(\mathbb{H}, +)$.

Effectivement, soient $Z = (a, b, c, d)$ et $Z' = (a', b', c', d')$ alors :

$$\begin{aligned} \overline{Z + Z'} &= (a + a', -b - b', -c - c', -d - d') \\ &= (a, -b, -c, -d) + (a', -b', -c', -d') \\ &= \bar{Z} + \bar{Z}' \end{aligned} \tag{5.2.234}$$

Il est aussi aisé de démontrer qu'elle est involutive. Effectivement :

$$\bar{\bar{Z}} = (a, -(-b), -(-c), -(-d)) = (a, b, c, d) = Z \tag{5.2.235}$$

En cours de traduction de l'anglais

La conjugaison n'est par contre pas un automorphisme multiplicatif du corps $(\mathbb{H},+,\times)$. En effet, si nous considérons la multiplication de Z et Z' et en prenons le conjugué :

$$ZZ' = \begin{pmatrix} aa'-bb'-cc'-dd' \\ (ab'+ba')+(cd'-dc') \\ (ac'+ca')-(bd'-db') \\ (da'+ad')+(bc'-cb') \end{pmatrix} \qquad \overline{ZZ'} = \begin{pmatrix} aa'-bb'-cc'-dd' \\ -(ab'+ba')-(cd'-dc') \\ -(ac'+ca')+(bd'-db') \\ -(da'+ad')-(bc'-cb') \end{pmatrix} \tag{5.2.236}$$

nous voyons immédiatement (ne serait-ce que pour la deuxième ligne) que nous avons :

$$ZZ' \neq \overline{ZZ'} \tag{5.2.237}$$

Revenons maintenant sur notre norme (ou module).... Pour cela, calculons le carré de la norme de $|ZZ'|$:

$$|ZZ'|^2 = (ZZ')\cdot(\overline{ZZ'}) \tag{5.2.238}$$

Nous savons (par définition) que :

$$ZZ' = \begin{pmatrix} aa'-bb'-cc'-dd' \\ (ab'+ba')+(cd'-dc') \\ (ac'+ca')-(bd'-db') \\ (da'+ad')+(bc'-cb') \end{pmatrix} \tag{5.2.239}$$

notons ce produit de manière telle que :

$$Z\cdot Z' = (\alpha,\beta,\gamma,\lambda) = Z" \tag{5.2.240}$$

Nous avons alors :

$$Z"\overline{Z"} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\lambda^2 \tag{5.2.241}$$

en substituant il vient :

$$\begin{aligned}(ZZ')\cdot\overline{(ZZ')} = &(aa'-bb'-cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'-dc')^2\\ &+(ac'+ca'-bd'+db')^2+(da'+ad'+bc'-cb')^2\end{aligned} \tag{5.2.242}$$

après un développement algébrique élémentaire (honnêtement ennuyeux), nous trouvons :

$$(ZZ')\cdot\overline{(ZZ')} = (a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)(a^2+b^2+c^2+d^2) = |Z'|^2|Z|^2 \tag{5.2.243}$$

Donc :

$$(ZZ')\cdot\overline{(ZZ')} = |Z|^2|Z'|^2 = |ZZ'|^2 \tag{5.2.244}$$

Remarque

La norme est donc un homomorphisme de $(\mathbb{H},\times)$ dans $(\mathbb{R},\times)$. Par la suite, nous noterons $\mathbb{G}$ l'ensemble des quaternions de norme unitaire.

En cours de traduction de l' anglais

5.2.2.8.1 Interprétation matricielles des quaternions

Soient q et p deux quaternions donnés, soit l'application :

$$p \to qp \tag{5.2.245}$$

La multiplication (à gauche) peut être faite avec une application linéaire (voir section d'Algèbre Linéaire page 1907) sur $\mathbb{H}$.

Si q s'écrit :

$$a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \tag{5.2.246}$$

cette application a pour matrice, dans la base $(1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$:

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \tag{5.2.247}$$

Ce que nous vérifions bien :

$$ZZ' = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' - cc' - dd' \\ (ab' + ba') + (cd' - dc') \\ (ac' + ca') - (bd' - db') \\ (da' + ad') + (bc' - cb') \end{pmatrix} \tag{5.2.248}$$

En fait, nous pouvons alors définir les quaternions comme l'ensemble des matrices ayant la structure visible ci-dessus si nous le voulions. Cela les réduirait alors à un sous espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$.

En particulier, la matrice de 1 (la partie réelle du quaternion q) n'est alors rien d'autre que la matrice identité :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1} \tag{5.2.249}$$

de même :

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2.250}$$

En cours de traduction de l'anglais

5.2.2.8.2 Rotations avec les quaternions

Nous allons maintenant voir que la conjugaison par un élément du groupe $\mathbb{G}$ des quaternions de norme unité peut s'interpréter comme une rotation pure dans l'espace !

Définition (#5.2.42) : La "conjugaison" par un quaternion q non nul et de norme unité est l'application S_q définie sur $\mathbb{H}$ par :

$$S_q : p \rightarrow q \cdot p \cdot q^{-1} = q \cdot p \cdot \bar{q} \tag{5.2.251}$$

et nous affirmons que cette application est une rotation.

Remarques

R1. Comme q est de norme 1, nous avons bien évidemment $|q| = q\bar{q} = 1$ donc $q^{-1} = \bar{q}$. Ce quaternion peut être vu comme la valeur propre (unitaire) de l'application (matricielle) p sur le vecteur $\bar{q}$ (on se retrouve avec un concept en tout point similaire aux matrices orthogonales de rotation vues dans la section d'Algèbre Linéaire page 1927).

R2. S_q est une application linéaire (donc si c'est bien une rotation, la rotation peut être décomposée en plusieurs rotations). Effectivement, prenons deux quaternions p_1, p_2 et deux réels λ_1, λ_2, alors nous avons :

$$S_q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)\bar{q} = \lambda_1 q p_1 \bar{q} + \lambda_2 q p_2 \bar{q} = \lambda_1 S_q(p_1) + \lambda_2 S_q(p_2) \tag{5.2.252}$$

Vérifions maintenant que l'application est bien une rotation pure. Comme nous l'avons vu lors de notre étude de l'algèbre linéaire et en particulier des matrices orthogonales (voir section d'Algèbre Linéaire page 1927), une première condition est que l'application conserve la norme.

Vérifions cela :

$$|S_q(p)| = |qp\bar{q}| = |q||p||\bar{q}| = |p| \tag{5.2.253}$$

Par ailleurs, nous pouvons vérifier qu'une rotation d'un quaternion purement complexe (tel qu'alors nous nous restreignons à $\mathbb{R}^3$) et la même rotation inverse sommées est nulle (le vecteur sommé à son opposé s'annulent) :

$$S_q(p) + \overline{S_q(p)} = qp\bar{q} + \overline{qp\bar{q}} = qp\bar{q} + \overline{q(p\bar{q})} \tag{5.2.254}$$

nous vérifions trivialement que si nous avons deux quaternions q, p alors $\overline{p \cdot q} = \bar{q}\bar{p}$ dès lors :

$$\begin{aligned} S_q(p) + \overline{S_q(p)} &= qp\bar{q} + \overline{q(p\bar{q})} = qp\bar{q} + \overline{(p\bar{q})}\bar{q} \\ &= q \cdot p \cdot \bar{q} + \bar{\bar{q}} \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} = q \cdot p \cdot \bar{q} + q \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} \\ &= S_q(p + \bar{p}) \end{aligned} \tag{5.2.255}$$

pour que cette opération soit nulle, nous voyons immédiatement que nous devons restreindre p aux quaternions purement complexes. Dès lors :

$$S_q(p + \bar{p}) = S_q(0) = 0 \tag{5.2.256}$$

Nous en déduisons alors que p doit être purement complexe pour que l'application S_q soit une rotation et que $S_q(p)$ est un quaternion pur. En d'autres termes, cette application est stable (en d'autres termes : un quaternion pur par cette application reste un quaternion pur).

S_q restreint à l'ensemble des quaternions purement complexes est donc une isométrie vectorielle, c'est-à-dire une symétrie ou une rotation.

Nous avons vu également lors de notre étude des matrices de rotation dans la section d'Algèbre Linéaire page 1973 que d telles matrices devaient avoir un déterminant de $+1$ pour que nous ayons une rotation. Voyons si c'est le cas de S_q :

Pour cela, nous calculons explicitement en fonction de :

$$q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \tag{5.2.257}$$

la matrice (dans la base canonique $(\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$) de S_q et nous en calculons le déterminant. Ainsi, nous obtenons les coefficients des colonnes en se rappelant que :

$$\begin{aligned} \mathrm{ij} &= \mathrm{k} = -\mathrm{ji} \\ \mathrm{jk} &= \mathrm{i} = -\mathrm{kj} \\ \mathrm{ki} &= \mathrm{j} = -\mathrm{ik} \\ \mathrm{i}^2 &= \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \end{aligned} \tag{5.2.258}$$

et ensuite en calculant :

$$\begin{aligned} S_q(\mathrm{i}) &= (a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})\mathrm{i}(a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}) \\ &= (a\mathrm{i} + b(\mathrm{i}^2) + c(\mathrm{ji}) + d(\mathrm{ki}))(a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}) \\ &= (a\mathrm{i} - b - c\mathrm{k} + d\mathrm{j})(a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}) \\ &= (a2\mathrm{i} + ab - ac\mathrm{k} + ad\mathrm{j}) - (ba - b^2\mathrm{i} - bc\mathrm{j} - bd\mathrm{k}) \\ &- (ca\mathrm{k} - cb\mathrm{j} + c^2\mathrm{i} + cd) + (da\mathrm{j} + db\mathrm{k} + cd - d^2\mathrm{i}) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\mathrm{i} + (\cancel{ab} - ac\mathrm{k} + ad\mathrm{j}) - (\cancel{ba} - bc\mathrm{j} - bd\mathrm{k}) \\ &- (ca\mathrm{k} - cb\mathrm{j} + \cancel{cd}) + (da\mathrm{j} + db\mathrm{k} + \cancel{cd}) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\mathrm{i} + 2(ad + bc)\mathrm{j} + 2(bd - ac)\mathrm{k} \end{aligned} \tag{5.2.259}$$

$$\begin{aligned} S_q(\mathrm{j}) &= (a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k})\mathrm{j}(a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}) \\ &= (a\mathrm{j} + b(\mathrm{ij}) + c(\mathrm{j}^2) + d(\mathrm{kj}))(a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}) \\ &= (a\mathrm{j} + b\mathrm{k} - c - d\mathrm{i})(a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}) \\ &= (a^2\mathrm{j} + ab\mathrm{k} + ac - ad\mathrm{i}) + (ba\mathrm{k} - b^2\mathrm{j} + bc\mathrm{i} + bd) \\ &- (ca - cb\mathrm{i} - c^2\mathrm{j} - cd\mathrm{k}) - (da\mathrm{i} + db - dc\mathrm{k} + d^2\mathrm{j}) \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\mathrm{j} + (ab\mathrm{k} + \cancel{ac} - ad\mathrm{i}) + (ba\mathrm{k} + bc\mathrm{i} + \cancel{bd}) \\ &- (\cancel{ca} - cb\mathrm{i} - cd\mathrm{k}) - (da\mathrm{i} + \cancel{db} - dc\mathrm{k}) \\ &= 2(bc - ad)\mathrm{i} + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\mathrm{j} + 2(ab + cd)\mathrm{k} \end{aligned} \tag{5.2.260}$$

En cours de traduction de l' anglais

$$\begin{aligned}
S_q(\mathrm{k}) &= (a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k})\mathrm{k}(a-b\mathrm{i}-c\mathrm{j}-d\mathrm{k})\\
&= (a\mathrm{k}+b(\mathrm{ik})+c(\mathrm{jk})+d)(\mathrm{k}^2))(a-b\mathrm{i}-c\mathrm{j}-d\mathrm{k})\\
&= (a\mathrm{k}-b\mathrm{j}+c\mathrm{i}-d)(a-b\mathrm{i}-c\mathrm{j}-d\mathrm{k})\\
&= (a^2\mathrm{k}-ab\mathrm{j}+ac\mathrm{i}+ad)-(ab\mathrm{j}+b^2\mathrm{k}+bc-bd\mathrm{i})\\
&+(ca\mathrm{i}+cb-c^2\mathrm{k}+cd\mathrm{j})-(da-db\mathrm{i}-dc\mathrm{j}-d^2\mathrm{k})\\
&= (a^2-b^2-c^2+d^2)\mathrm{k}+(-ab\mathrm{j}+ac\mathrm{i}+\cancel{ad})-(ab\mathrm{j}+\cancel{bc}-bd\mathrm{i})\\
&+(ca\mathrm{i}+\cancel{cb}+cd\mathrm{j})-(\cancel{da}-db\mathrm{i}-dc\mathrm{j})\\
&= 2(ac+bd)\mathrm{i}+2(cd-ab)\mathrm{j}+(a^2-b^2-c^2+d^2)\mathrm{k}
\end{aligned} \tag{5.2.261}$$

Il faut alors calculer le déterminant de la matrice (pfff...) :

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(ad+bc) & 2(bd-ac)\\ 2(bc-ad) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(ab+cd)\\ 2(ac+bd) & 2(cd-ab) & (a^2-b^2-c^2+d^2)\end{bmatrix} \tag{5.2.262}$$

en se souvenant que (ce qui permet aussi de simplifier l'expression des termes de la diagonale comme nous pouvons le voir dans certains ouvrages) :

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1 \tag{5.2.263}$$

nous trouvons que le déterminant vaut bien 1. Sinon, nous pouvons vérifier cela avec Maple 4.00b :

```
>with(linalg):
>A:=linalg[matrix](3,3,[a^2+b^2-c^2-d^2,2*(a*d+b*c),
2*(b*d-a*c),2*(b*c-a*d),a^2-b^2+c^2-d^2,2*(a*b+c*d),
2*(a*c+b*d),2*(c*d-a*b),a^2-b^2-c^2+d^2]);
>factor(det(A));
```

Montrons maintenant que cette rotation est un demi-tour d'axe (l'exemple qui peut sembler particulier est général !) :

D'abord, si :

$$q=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k} \tag{5.2.264}$$

nous avons :

$$S_q(q)=qq\bar{q}=q \tag{5.2.265}$$

ce qui signifie que l'axe de rotation (x,y,z) est fixé par l'application S_q elle-même !

D'autre part, nous avons vu que si q est un quaternion purement complexe de norme 1 alors :

$$q^{-1}=\bar{q} \qquad \text{et} \qquad \bar{q}=-q \tag{5.2.266}$$

Ce qui nous donne la relation :

$$q^2=q\cdot(-\bar{q})=q\cdot(-(q^{-1}))=-1 \tag{5.2.267}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce résultat nous amène à calculer la rotation d'une rotation :

$$S_q(S_q(p)) = q(qp\bar{q})\bar{q} = q^2p\bar{q}^2 = S_{q^2}(p) = (-1)p(-q)^2 = -pq^2 = (-1)p(-1) = p \qquad (5.2.268)$$

Conclusion : Puisque la rotation d'une rotation est un tour complet, alors S_q est nécessairement un demi-tour :

$$S_q(p) = -p \qquad (5.2.269)$$

relativement (!) aux axes (x, y, z).

À ce stade, nous pouvons affirmer que toute rotation de l'espace peut se représenter par S_q (la conjugaison par un quaternion q de norme 1). En effet, les demi-tours engendrent le groupe des rotations, c'est-à-dire que toute rotation peut s'exprimer comme le produit d'un nombre fini de demi-tours, et donc comme la conjugaison par un produit de quaternions de norme unitaire (produit qui est lui-même un quaternion de norme unitaire ...).

Nous allons tout de même donner une forme explicite reliant une rotation et le quaternion qui la représente, au même titre que nous l'avons fait pour les nombres complexes.

Théorème 5.7. Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur unitaire et $\theta \in [0, 2\pi]$ un angle. Alors nous affirmons que la rotation d'axe $\vec{u}$ et d'angle θ correspond à l'application S_q, où q est le quaternion :

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{j} + z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{k} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u}\right)\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix} \qquad (5.2.270)$$

Pour que cette affirmation soit vérifiée, nous savons qu'il faut que :

- La norme de q soit unitaire 1
- Le déterminant de l'application S_q soit égal à l'unité 1
- Que l'application S_q conserve la norme
- Que l'application S_q renvoie tout vecteur colinéaire à l'axe de rotation sur l'axe de rotation

Démonstration 5.7.1. Ok contrôlons chacun de ces points !

1. La norme du quaternion proposé précédemment vaut effectivement 1 :

$$\begin{aligned}|q| &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + x^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + y^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + z^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1\end{aligned} \qquad (5.2.271)$$

et comme $\vec{u}(x, y, z)$ est unitaire alors nous avons :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (5.2.272)$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc :

$$|q| = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x^2+y^2+z^2) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 \qquad (5.2.273)$$

2. Le fait que q soit un quaternion de norme unitaire amène immédiatement à ce que le déterminant de l'application equation soit unitaire. Nous l'avons déjà montré plus haut dans le cas général de n'importe quel quaternion de norme 1 (condition nécessaire et suffisante).

3. Il en est de même pour la conservation de la norme. Nous avons déjà montré plus haut que c'était de toute façon le cas dès que le quaternion q était de norme 1 (condition nécessaire et suffisante).

4. Voyons maintenant que tout vecteur colinéaire à l'axe de rotation est projeté sur l'axe de rotation. Notons q' le quaternion purement imaginaire et unitaire $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$. Nous avons alors :

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q' \qquad (5.2.274)$$

Alors :

$$S_q(q') = qq'\bar{q} \qquad (5.2.275)$$

mais comme q' est la restriction de q à ces éléments purs qui le constituent, cela revient à écrire :

$$S_q(q') = S_q(q) = qq\bar{q} = q \qquad (5.2.276)$$

Montrons maintenant le choix de l'écriture $\theta/2$. Si $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ désigne un vecteur unitaire orthogonal à equation (perpendiculaire à l'axe de rotation donc), et p le quaternion $x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$ alors nous avons :

$$\begin{aligned}S_q(p) &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q'\right)p\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q'\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)p + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(q'p - pq') - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)q'pq'\end{aligned} \qquad (5.2.277)$$

Nous avons montré lors de la définition de la multiplication de deux quaternions que :

$$pq' = -q'p \qquad (5.2.278)$$

nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}S_q(p) &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)p + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q'p - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)q'pq'\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)p + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q'p + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)q'p(-q')\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)p + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q'p + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)q'p\bar{q}'\end{aligned} \qquad (5.2.279)$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons également démontré plus haut que :

$$S_q(p) = -p = qp\bar{q} \tag{5.2.280}$$

dès lors :

$$q'p\bar{q'} = S_{q'}(p) = -p \tag{5.2.281}$$

(le demi-tour d'axe (x, y, z)). Donc :

$$\begin{aligned} S_{q'}(p') &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)p + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q'p - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)p \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)p + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)q'p \\ &= \cos(\theta)p + \sin(\theta)q'p \end{aligned} \tag{5.2.282}$$

Remarque

Nous commençons à entrevoir ici déjà l'utilité d'avoir écrit dès le début $\theta/2$ pour l'angle !

■ Q.E.D.

Nous savons que p est le quaternion pur assimilé à un vecteur unitaire $\vec{v}$ orthogonal à l'axe de rotation $\vec{u}$, lui-même assimilé à la partie purement imaginaire de q'. Nous remarquons alors de suite que la partie imaginaire du produit (défini !) des quaternions $q'p$ est alors égal au produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$. Ce produit vectoriel engendre donc un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}, \vec{v}$.

Le couple $(\vec{v}, \vec{w})$ forme donc un plan perpendiculaire à l'axe de rotation $\vec{u}$ (c'est comme pour les nombres complexes simples $\mathbb{C}$ dans lequel nous avons le plan de Gauss et perpendiculairement à celui-ci un axe de rotation !).

Alors finalement :

$$S_q(p) = \cos(\theta)p + \sin(\theta)q'p = \cos(\theta)\vec{v} + \sin(\theta)\vec{w} \tag{5.2.283}$$

Nous nous retrouvons avec une rotation basée sur un plan (mais qui a donc lieu dans l'espace !) identique à celle présentée plus haut avec les nombres complexes standards dans le plan de Gauss. Pour plus de détails le lecteur peut se référer à la section sur le Calcul Spinoriel à la page 2119.

Nous savons donc maintenant comment faire n'importe quel type de rotation dans l'espace en une seule opération mathématique et ce en plus par rapport à un libre choix de l'axe !

Nous pouvons aussi maintenant mieux comprendre pourquoi l'algèbre des quaternions n'est pas commutative. Effectivement, les rotations vectorielles du plan sont commutatives mais celles de l'espace ne le sont pas comme nous le montre l'exemple ci-dessous :

Soit la configuration initiale :

En cours de traduction de Magistris

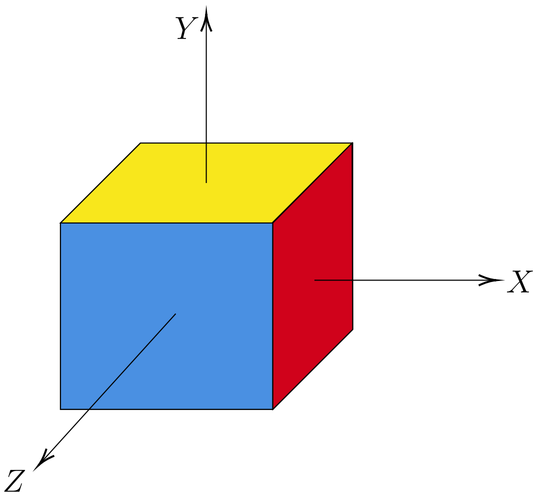


FIG. 5.23 – Situation initiale pour rotations quaternions

Alors une rotation autour de l'axe X suivie d'une rotation autour de l'axe Y :

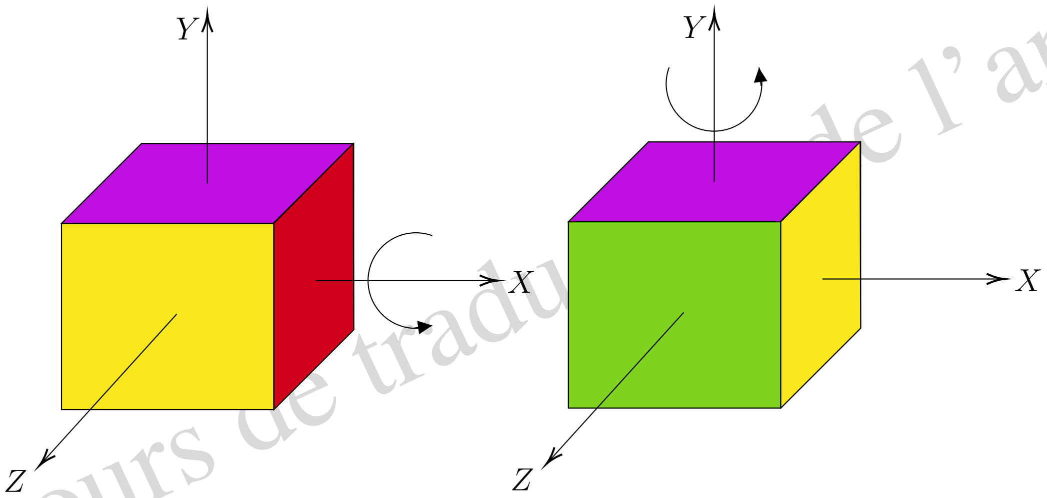


FIG. 5.24 – Exemple rotation quaternion $X - Y$

En cours de traduction de l'anglais

n'est pas égale à une rotation autour de l'axe Y suivie d'une rotation autour de l'axe X :

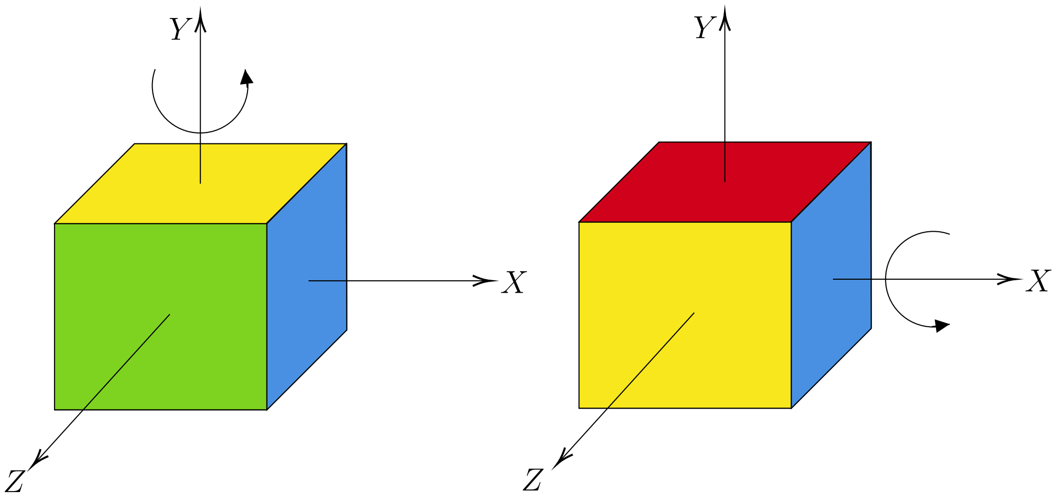


FIG. 5.25 – Exemple de non-équivalence pour la rotation des quaternions

Les résultats obtenus seront fondamentaux pour notre compréhension des spineurs (voir section de Calcul Spinoriel page 2119) !

Remarque

Notez que nous avons (où $\mathbb{K}$ est un type de nombre appelé "nombres de Cayley" que nous n'as pas planifié de traiter dans ce livre) :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{K} \tag{5.2.284}$$

et qu'à chaque étape certaines propriétés de la structure abstraite sont perdues. L'ordre est perdu lors du passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. La commutativité disparaît de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{H}$. Les nombres de Cayley $\mathbb{K}$ perdent eux l'associativité.

5.2.2.9 Nombres Algébriques et Transcendants

Définitions (#5.2.43) :

D1. Nous appelons "nombre entier algébrique de degré n", tout nombre qui est solution d'une équation algébrique de degré n, à savoir : un polynôme de degré n (concept que nous aborderons dans la section d'Algèbre) dont les coefficients sont des entiers relatifs et dont le coefficient dominant vaut 1.

D2. Nous appelons "nombre algébrique de degré n", tout nombre qui est solution d'une équation algébrique de degré n, à savoir : un polynôme de degré n dont les coefficients sont des rationnels.

L'ensemble des nombres algébriques est parfois noté $\overline{\mathbb{Q}}$ ou encore $\mathbb{A}$.

En cours de traduction de l'anglais

Théorème 5.8. Un premier résultat intéressant et particulier dans ce domaine d'étude (curiosité mathématique...) est qu'un nombre rationnel est un "nombre entier algébrique de degré n" si et seulement si c'est un entier relatif (lisez plusieurs fois au besoin...). En termes savants, nous disons alors que l'anneau $\mathbb{Z}$ est "intégralement clos".

Démonstration 5.8.1. Nous supposons que le nombre p/q, où p et q sont deux entiers premiers entre eux (c'est-à-dire dont le rapport ne donne pas un entier ou plus rigoureusement... que le plus grand commun diviseur est 1 !), est une racine du polynôme (voir la section de Calcul Algébrique page page 1351) suivant à coefficients entiers relatifs ($\in \mathbb{Z}$) et dont le coefficient dominant est unitaire :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{5.2.285}$$

où l'égalité avec zéro du polynôme est implicite.

Dans ce cas :

$$p^n = -(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})q \tag{5.2.286}$$

Puisque les coefficients sont par définition tous entiers et leurs multiples aussi dans la parenthèse, alors la parenthèse à nécessairement une valeur dans $\mathbb{Z}$.

Ainsi, q (à droite de la parenthèse) divise une puissance de p (à gauche de l'égalité), ce qui n'est possible, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ (car notre parenthèse a une valeur dans cet ensemble pour rappel...), que si q vaut ± 1 (puisqu'ils étaient premiers entre eux).

Donc parmi tous les nombres rationnels, les seuls qui sont solutions d'équations polynômiales à coefficients entiers relatifs ($\in \mathbb{Z}$) et dont le coefficient dominant est unitaire sont des entiers relatifs !

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Pour prendre un autre cas intéressant et particulier, il est facile de montrer qu'absolument tout nombre rationnel est un "nombre algébrique". Effectivement, si nous prenons le plus simple polynôme suivant :

$$qx - p = 0 \tag{5.2.287}$$

où q et p sont premiers entre eux et où q est différent de 1. Alors comme il s'agit d'une polynôme à coefficients rationnels simples ($\in \mathbb{Q}$), après remaniement nous avons :

$$x = \frac{p}{q} \tag{5.2.288}$$

Donc puisque q et p sont premiers entre eux et que q est différent de l'unité, nous avons bien que tout nombre rationnel est un "nombre algébrique de degré 1".

Nous avons aussi le nombre réel (et irrationnel) $\sqrt{2}$ qui est un "nombre entier algébrique de degré 2", car il est racine de :

$$x^2 - 2 = 0 \tag{5.2.289}$$

et le nombre complexe i qui est aussi un "nombre entier algébrique de degré 2", car il est racine de l'équation :

$$x^2 + 1 = 0 \tag{5.2.290}$$

etc.

Définition (#5.2.44) : Un "nombre transcendant" est un nombre réel ou complexe qui n'est pas algébrique. C'est-à-dire qui n'est pas la racine d'une équation polynômiale non-nulle avec coefficient rationnels.

Théorème 5.9. L'ensemble de tous les nombres transcendants est non dénombrable. La preuve est simple et ne nécessite aucun développement mathématique difficile.

Démonstration 5.9.1. Effectivement, puisque les polynômes à coefficients entiers sont dénombrables, et puisque chacun de ces polynômes possède un nombre fini de zéros (voir le théorème de factorisation dans la section de Calcul Algébrique page 1358), l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable ! Mais l'argument de la diagonale de Cantor (voir la section de Théorie des Ensembles pages 224) établit que les nombres réels (et par conséquent les nombres complexes aussi) sont non dénombrables, donc l'ensemble de tous les nombres transcendants doit être non dénombrable.

En d'autres termes, il y a beaucoup plus de nombres transcendants que de nombres algébriques.

■ Q.E.D.

Les transcendants les plus connus sont π et e. Les démonstrations de leur transcendance est en cours de rédaction. Nous sommes toujours entrain de regarder pour en faire une démonstration pour ce livre mais si possible plus simple et intuitive que celle données par Hilbert ou Lindemann–Weierstrass.

Voici un petit résumé de tout ce que nous avons vu jusqu'à maintenant :

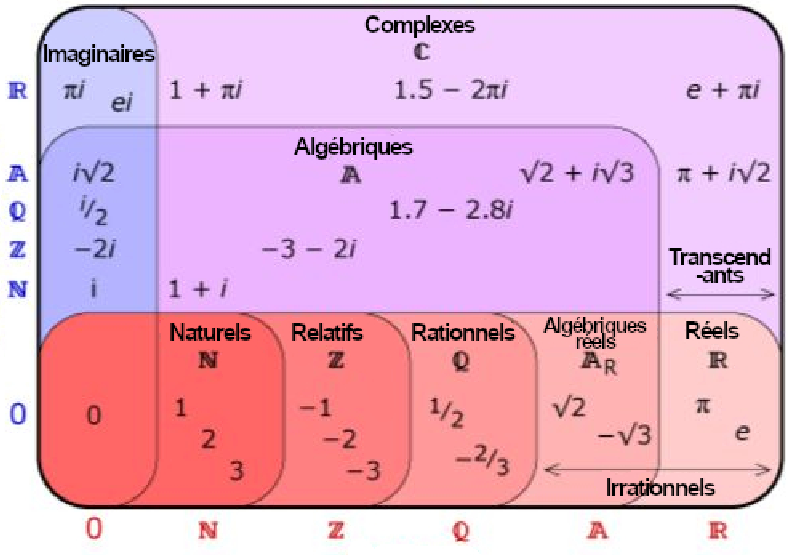


FIG. 5.26 – **Types de nombres** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$,...

En cours de traduction de l'anglais

5.2.2.10 Nombres Univers (nombres normaux)

Définition (#5.2.45) : Un "nombres Univers" aussi appelé "nombre normal" est un nombre réel dont la séquence infinie de chiffres dans chaque base b est répartie uniformément dans le sens que chacune des valeurs du chiffre b a la même densité naturelle $1/b$. Intuitivement, cela signifie qu'aucun chiffre, ni aucune combinaison de chiffres (finie), ne se produisent plus fréquemment que les autres. L'ensemble des numéros d'Univers est parfois noté $\mathbb{U}$.

Bien qu'une preuve générale puisse être donnée que presque tous les nombres purement réels sont des nombres Univers [136] cette preuve n'est pas constructive et très peu de nombres spécifiques ont été montrés comme étant des nombres Univers. Il est largement admis que les nombres (calculables) comme $\sqrt{2}$, π et e sont des nombres Univers, mais une preuve demeure insaisissable encore en cette année 12016 (selon calendrier holocène) où nous écrivons ces lignes. Tous sont cependant fortement conjecturés à être des nombres Univers en raison de certaines preuves empiriques. On ne sait même pas si tous les chiffres apparaissent infiniment souvent dans les développements décimaux de ces constantes. En particulier, la revendication populaire "chaque chaîne de nombres se produit finalement dans π" ou "tout le livre sacré est contenu dans π n'est pas connue pour être vraie. Nous supposons que tout nombre algébrique irrationnel est un Numéro d'univers, bien qu'aucun contre-exemple ne soit connu, il n'existe pas non plus de nombre algébrique qui s'est avéré être un numéro Univers dans aucune base.

Plus formellement, posons que $\sum$ est un alphabet fini de b digits et $\sum^\infty$ l'ensemble des séquences pouvant être tirées de cet alphabet. Soit $S \in \sum^\infty$ une telle séquence. Pour chaque a dans $\sum$ laissons $N_S(a,n)$ indiquer le nombre de fois que la lettre a apparaît dans les premiers n chiffres de la séquence S. Nous disons que S est un "numéro Univers simple" si la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N_S(a,n)}{n}=\frac{1}{b} \tag{5.2.291}$$

pour chaque a est vérifiée.

Maintenant, supposons que w soit une chaîne finie dans $\sum^*$ et que $N_S(w,n)$ soit le nombre de fois que la chaîne w apparaît comme une sous-chaîne dans les premiers n digits de la séquence S (par exemple, si $S = 01010101\ldots$, alors $N_S(010,8) = 3$). Alors S est un "numéro Univers" si, pour toutes les chaînes finies $w \in \sum^*$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N_S(a,n)}{n}=\frac{1}{b^n} \tag{5.2.292}$$

S est donc un numéro Univers si toutes les chaînes de longueur égale se produisent avec une fréquence asymptotique égale. Une séquence infinie donnée est un numéro Univers ou non, alors qu'un nombre pur, ayant une expansion de base b différente pour chaque entier $b \geq 2$, peut être un numéro Univers dans une base mais pas dans une autre. Une "séquence disjonctive" est une séquence dans laquelle chaque chaîne finie apparaît. Une séquence de numéro Univers est une "séquence disjonctive" mais une séquence disjonctive n'est pac nécessairement un numéro Univers.

Il est possible de prouver (avec le "théorème des nombres Univers" que nous ne souhaitons pas présenter dans un livre de mathématiques appliquées) que presque tous les nombres réels purs sont des nombres Univers. L'ensemble des nombres non-Univers, bien que "petit" au sens d'un

En cours de traduction de l'anglais

ensemble nul, est "grand" au sens d'être indénombrable (par exemple, aucun nombre rationnel est normal à toute base, car les séquences de chiffres des nombres rationnels sont finalement périodiques !). Par exemple, il existe d'innombrables nombres dont le développement décimal ne contient pas le chiffre 5, et aucun de ceux-ci n'est un numéro Univers.

5.2.2.11 Nombres Abstraits (variables)

Définition (#5.2.46) : Le nombre peut être envisagé en faisant abstraction de la nature des objets qui constituent le groupement qu'il caractérise et ainsi qu'à la façon de codifier (chiffre arabe, romain, ou autre système universel). Nous disons alors que le nombre est un "nombre abstrait".

Remarque

Arbitrairement, l'être humain a adopté un système numérique majoritairement utilisé de par le monde et représenté par les symboles $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ du système décimal et qui seront supposés connus aussi bien en écriture qu'oralement par le lecteur (apprentissage du langage).

Pour les mathématiciens, il n'est pas avantageux de travailler avec ces symboles car ils représentent uniquement des cas particuliers. Ce que cherchent les physiciens théoriciens ainsi que les mathématiciens, ce sont des "relations littérales" applicables dans un cas général et que les ingénieurs puissent en fonction de leurs besoins changer ces nombres abstraits par les valeurs numériques qui correspondent au problème qu'ils ont besoin de résoudre.

Ces nombres abstraits appelés aujourd'hui communément "variables" ou "inconnues", utilisées dans le cadre du "calcul littéral", sont très souvent représentés par :

1. Les lettres de l'alphabet latin :

$$a, b, c, d, e, \ldots, x, y, z; A, B, C, D, E, \ldots, X, Y, Z$$

   où les lettres minuscules du début l'alphabet latin ($a, b, c, d, e \ldots$) sont souvent utilisées pour représenter de manière abstraite des constantes, alors que les lettres minuscules de la fin de l'alphabet latin (...x, y, z) sont utilisées pour représenter des entités (variables ou inconnues) dont nous recherchons la valeur. Les lettrees majuscules sont souvent réservées pour représenter des matrices ou des variables aléatoires.

2. L'alphabet grec :

En cours de traduction de l'anglais

Aα	Alpha	$\Lambda\lambda$	Lambda
Bβ	Beta	Mμ	Mu
$\Gamma\gamma$	Gamma	Nν	Nu
$\Delta\delta$	Delta	$\Xi\xi$	Xi
E$\epsilon\varepsilon$	Epsilon	Oo	Omicron
Zζ	Zeta	$\Pi\pi$	Pi
Hη	Eta	Pρ	Rho
$\Theta\theta\vartheta$	Theta	$\Sigma\sigma$	Sigma
Iι	Iota	Tτ	Tau
Kκ	Kappa	$\Upsilon\upsilon$	Upsilon
$\Phi\phi\varphi$	Phi	Xχ	chi
$\Psi\psi$	Psi	$\Omega\omega$	Omega

TAB. 5.15 – Alphabet Grec

qui est particulièrement utilisé pour représenter soit des opérateurs mathématiques plus ou moins complexes (comme la somme indexée Σ, le produit indexé Π, le variationnel δ, l'élément infinitésimal ε, le différentiel partiel ∂, etc.) soit des variables dans le domaine de la physique (comme ω pour la pulsation, la fréquence ν, la densité ρ, etc.).

3. L'alphabet hébraïque modernisé (à moindre mesure...)

   Comme nous l'avons vu, les nombres transfinis sont par exemples donnés par la lettre $\mathcal{N}_0$ dite "aleph".

Bien que ces symboles puissent représenter n'importe quel nombre il en existe quelques-uns qui peuvent représenter en physique des valeurs dites "constantes Universelles" comme la vitesse de la lumière c, la constante gravitationnelle G, la constante de Planck h, etc.

Nous utilisons très souvent encore d'autres symboles que nous introduirons et définirons au fur et à mesure.

Erreurs de traduction de l'anglais

Remarque

Les lettres pour représenter les nombres auraient été employées pour la première fois par Viète au 16ème siècle.

5.2.2.11.1 Domaine de définition de variables

Une variable est un nombre abstrait susceptible de prendre des valeurs numériques différentes. L'ensemble de ces valeurs peut varier suivant le caractère du problème considéré.

Soient a et b deux nombres tel que $a < b$. Alors :

Définitions (#5.2.47) :

D1. Nous appelons "domaine de définition" d'une variable, l'ensemble des valeurs numériques qu'elle est susceptible de prendre entre deux valeurs finies ou infinies appelées "bornes" sur un ensemble donnée (comme $\mathbb{N},\mathbb{R},\mathbb{R}^+$, etc.).

D2. Nous appelons "intervalle fermé d'extrémités a et b", l'ensemble de tous les nombres x compris entre ces deux valeurs incluses et nous le désignons de la façon suivante :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (5.2.293)$$

Le notation à gauche est appelée trivialement "notation d'intervalle", celle est à droite est appelée "notation ensemblisste".

D3. Nous appelons "intervalle ouvert d'extrémités a et b", l'ensemble de tous les nombres x compris entre ces deux valeurs non incluses et nous le désignons de la façon suivante :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (5.2.294)$$

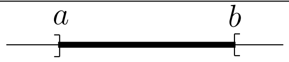
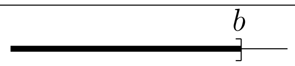
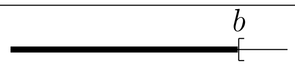
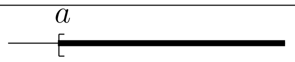
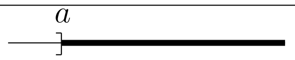
D4. Nous appelons "intervalle fermé à gauche, ouvert à droite" l'ensemble suivant :

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (5.2.295)$$

D5. Nous appelons "intervalle ouvert à gauche, fermé à droite" l'ensemble suivant :

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (5.2.296)$$

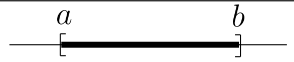
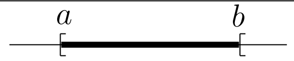
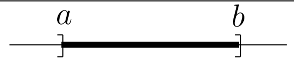
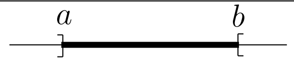
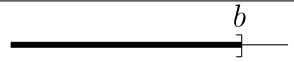
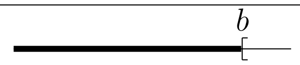
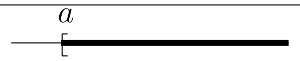
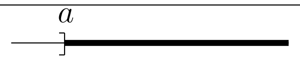
Soit sous forme résumée et imagée telle que souvent notée en Suisse :

Type	Visuel	Notation	Explicitement
$[a, b]$		$a \leq x \leq b$	Intervalle fermé borné
$[a, b[$		$a \leq x < b$	Intervalle borné semi-fermé en a et semi-ouvert en b (ou semi-fermé à gauche et semi-ouvert à droite)
$]a, b]$		$a < x \leq b$	Intervalle borné semi-ouvert en a et semi-fermé en b (ou semi-ouvert à gauche et semi-fermé à droite)
$]a, b[$		$a < x < b$	Intervalle ouvert borné
$]-\infty, b]$		$x \leq b$	Intervalle non borné fermé en b (ou fermé à droite)
$]-\infty, b[$		$x \leq b$	Intervalle non borné ouvert en b (ou ouvert à droite)
$[a, +\infty[$		$a \leq x$	Intervalle non borné fermé en a (ou fermé à gauche)
$]a, +\infty[$		$a < x$	Intervalle non borné ouvert en a (ou ouvert à gauche)

TAB. 5.16 – Types d'intervalles et de bornes tels que notés en Suisse

En cours de traduction de l'anglais

et selon la norme internationale ISO 80000-2 :2009 (car les Suisses sont assez doués dans le non-respect des normes et standards internationales...) :

Type	Visuel	Notation	Explicitement
$[a, b]$		$a \leq x \leq b$	Intervalle fermé borné
$[a, b)$		$a \leq x < b$	Intervalle borné semi-fermé en a et semi-ouvert en b (ou semi-fermé à gauche et semi-ouvert à droite)
$(a, b]$		$a < x \leq b$	Intervalle borné semi-ouvert en a et semi-fermé en b (ou semi-ouvert à gauche et semi-fermé à droite)
(a, b)		$a < x < b$	Intervalle ouvert borné
$(-\infty, b]$		$x \leq b$	Intervalle non borné fermé en b (ou fermé à droite)
$(-\infty, b[$		$x \leq b$	Intervalle non borné ouvert en b (ou ouvert à droite)
$[a, +\infty)$		$a \leq x$	Intervalle non borné fermé en a (ou fermé à gauche)
$(a, +\infty)$		$a < x$	Intervalle non borné ouvert en a (ou ouvert à gauche)

TAB. 5.17 – Types d'intervalles et de bornes tels que notés selon les normes

Erreurs de traduction de l'anglais

Remarques

R1. La notation $\{x \text{ tel que } a < x < b\}$ désigne l'ensemble des réels x strictement plus grands que a et strictement inférieurs à b.

R2. Le fait de dire qu'un intervalle est par exemple ouvert en b signifie que le réel b ne fait pas partie de celui-ci. Par contre, s'il avait été fermé, alors b en aurait fait partie.

R3. Si la variable peut prendre toutes les valeurs négatives et positives possibles nous écrivons dès lors : $]-\infty, +\infty[$ où le symbole "∞" signifie une "infinité". évidemment il peut y avoir des combinaisons d'intervalles ouverts et infinis à droite, fermé et limité gauche et réciproquement.

R4. Nous rappellerons ces concepts avec une autre approche lorsque nous étudierons l'Algèbre (calcul littéral).

Nous disons que la variable x est une "variable ordonnée" si en représentant son domaine de définition par un axe horizontal où chaque point de l'axe représente une valeur de x, alors pour chaque couple de valeurs, nous pouvons indiquer celle qui est "antécédente" (qui précède) et

celle qui est "conséquente" (qui suit). Ici la notion d'antécédente ou de conséquente n'est pas liée au temps, elle exprime juste la façon d'ordonner les valeurs de la variable !

Définitions (#5.2.48) :

D1. Une variable est dite "croissante" si chaque valeur conséquente est plus grande que chaque valeur antécédente.

D2. Une variable est dite "décroissante" si chaque valeur conséquente est plus petite que chaque valeur antécédente.

D3. Les variables croissantes et les variables décroissantes sont appelées "variables à variations monotones" ou simplement "variables monotones".

~90 %
31 votes, 69.68%

En cours de traduction de l'anglais

5.3. Opérateurs Arithmétiques

Parler des nombres comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent amène naturellement à considérer les opérations de calculs. Il est donc logique que nous fassions une description non exhaustive des opérations qui peuvent exister entre les nombres. Ce sera l'objectif de ce chapitre.

Nous considérerons dans ce livre qu'il existe deux types d'outils fondamentaux en arithmétique (nous ne parlons pas de l'Algèbre mais de l'Arithmétique !) :

- Les opérateurs arithmétiques :

  Il existe deux opérateurs de base (addition "$+$" et soustraction "$-$") à partir desquels nous pouvons construire d'autres opérateurs : la "multiplication" $\times$ (dont le symbole contemporain aurait été introduit en 11574 - selon calendrier holocène - par William Oughtred) et la "division" (dont le vieux symbole est "$\div$" mais depuis la fin du 120ème siècle (selon calendrier holocène) on utilise plutôt le symbole $/$).

  Ces quatre opérateurs $(+, -, \times, /)$ sont couramment appelés "opérateurs rationnels". Nous verrons ces derniers plus en détails après avoir défini les relations binaires.

  Remarque

  Rigoureusement l'addition suffirait si nous considérons l'ensemble commun des réels $\mathbb{R}$ car dès lors la soustraction n'est que l'addition d'un nombre négatif.

- Les opérateurs (relations) binaires :

  Il existe six relations binaires fondamentales (égal $=$, différent de $\neq$, plus grand que $>$, plus petit que $\leq$, plus grand ou égal $\geq$, plus petit ou égal) qui permettent de comparer des grandeurs d'éléments se trouvant à gauche et à droite (donc au nombre de deux, d'où leur nom) afin d'en tirer certaines conclusions. La majorité des symboles de relations binaires auraient été introduites par Viète et Harriot au 16ème siècle).

Il est bien évidemment essentiel de connaître au mieux ces deux outils et leurs propriétés avant de se lancer dans des calculs plus ardus.

En cours de traduction de l'anglais

5.3.1 Relations binaires

Le concept de "relation" est la base de toute la mathématique dont le but est d'étudier - par observation et déduction (raisonnement), calcul et comparaison - des configurations ou relations abstraites ou concrètes de ses objets (nombres, formes, structures) en cherchant à établir les liens logiques, numériques ou conceptuels entre ces objets.

Définitions (#5.3.49) :

D1. Considérons deux ensembles non vides E et F (voir section de Théorie des Ensembles page 380) non nécessairement identiques. Si à certains éléments x de E nous pouvons associer par une règle mathématique précise $\mathcal{R}$ (non ambiguë) un élément y de F, nous définissons ainsi une "relation fonctionnelle" de E vers F et qui s'écrit :

$$\mathcal{R} : E \mapsto F \tag{5.3.1}$$

Ainsi, de façon plus générale, une relation fonctionnelle $\mathcal{R}$ peut être définie comme une règle mathématique qui associe à certains éléments x de E, certains éléments y de F.

Alors, dans ce contexte plus général, si $x\mathcal{R}y$, nous disons que y est une "image" de x par $\mathcal{R}$ et que x est un "antécédent" ou "préimage" de y.

L'ensemble des couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$ soit une assertion vraie forme un "graphe" ou une "représentation" de la relation $\mathcal{R}$. Nous pouvons représenter ces couples dans un repère adéquatement choisi pour faire une représentation graphique de la relation R.

Il s'agit d'un type de relations sur lequel nous reviendrons dans le chapitre d'Analyse Fonctionnelle (page 2189) sous la forme : $\mathcal{R} : f(x) = y \circ f$ et qui ne nous intéresse pas directement dans cette section.

D2. Considérons un ensemble E non vide, si nous associons à cet ensemble (et à celui-ci uniquement !) des outils permettant de comparer les éléments le composant alors nous parlons de "relation binaire" ou "relation de comparaison" et qui s'écrit pour tout élément x et y composant E :

$$x\mathcal{R}y \tag{5.3.2}$$

Ces relations peuvent aussi être représentées sous forme graphique. Dans le cas des opérateurs binaires classiques de comparaisons où E est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$,

En cours de traduction de l'anglais

relatifs $\mathbb{Z}$, rationnels $\mathbb{Q}$ ou réels $\mathbb{R}$, cette forme graphique est représentée par une droite horizontale (le plus souvent...) ; dans le cas de la congruence (voir section Théorie des Nombres page 353) elle est représentée par des droites dans le plan dont les points sont donnés par la contrainte de la congruence.

Comme nous l'avons déjà mentionné, il existe 6 relations binaires fondamentales (égal $=$, différent de $\neq$, plus grand que $>$, plus petit que $<$, plus grand ou égal $\geq$, plus petit ou égal $\leq$). Mais nous verrons un peu plus loin que la définition rigoureuse des relations binaires permet donc de construire des outils plus abstraits (comme par exemple la congruence bien connue par les élèves de petites classes et que nous étudierons dans le chapitre de Théorie des Nombres).

5.3.1.1 Égalités

Il est fort difficile de définir la notion "d'égalité" dans un cas général applicable à toute situation. Pour notre part, nous nous permettrons pour cette définition de nous inspirer du théorème d'extensionalité de la Théorie des Ensembles (que nous verrons plus tard page 380).

Définitions (#5.3.50) :

D1. Deux éléments sont "égaux" si, et seulement si, ils ont les mêmes valeurs. L'égalité est décrite par le symbole $=$ qui signifie "égal à" (ce symbole aurait été introduit par Robert Rocorde en 1557).

Propriété (triviale) : Si nous avons $a = b$, et c un nombre et $\star$ une opération quelconque (telle que l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division) alors :

$$a \star c = b \star c \tag{5.3.3}$$

Cette propriété est très utilisée pour résoudre ou simplifier des équations de type quelconque.
Evidemment nous avons (propriété de réflexivité) :

$$a = b \Leftrightarrow b = a \tag{5.3.4}$$

Et aussi (propriété de transitivité) :

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = c \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

Nous n'énumérerons pas les autres propriétés de l'égalité dans cette section (pour plus de détails, voir la section de Théorie des Ensembles page 286).

D2. Si deux éléments ne sont pas égaux (donc sont inégaux...), nous les relions par le symbole $\neq$ et nous disons qu'ils sont "non égaux" ou simplement "différents".

Si nous avons $a > b$ ou $a < b$ alors :

$$a \neq b \tag{5.3.5}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il existe encore d'autres symboles d'égalités, qui sont une extension des deux que nous avons définis précédemment. Malheureusement, ils sont assez souvent mal utilisés (disons plutôt qu'ils sont utilisés aux mauvais endroits) dans la plupart des ouvrages disponibles sur le marché :

1. $\cong$: Devrait être utilisé pour la congruence mais est en fait principalement utilisé pour indiquer une approximation.
2. $\approx$: Devrait être utilisé pour des approximations mais en fait, $\cong$ est souvent utilisé (à tort !) à la place.
3. $\equiv$: Devrait être utilisé pour dire que deux éléments sont équivalents mais en pratique la plupart des gens utilisent (à tort !) $=$.
4. $:=$: Devrait utilisé pour dire qu'un élément est "égal par définition à" un autre.
5. $\doteq$: Est aussi utilisé pour dire "égal par définition à" mais en fait la plupart des gens utilisent plutôt $:=$.
6. $\sim$: Est utilisé le plus souvent dans les statistiques pour dire "suit la loi ..." mais certains praticiens utilisent plutôt $=$ ou pour dire "asymptotiquement égal".

En cours de traduction de l'anglais

5.3.1.2 Comparateurs

Les comparateurs sont des outils qui nous permettent de comparer et d'ordonner tout couple de nombres (et in extenso aussi des ensembles !).

La possibilité d'ordonner des nombres est presque fondamentale en mathématique. Dans le cas contraire (s'il n'était pas possible ou non imposé d'ordonner), il y aurait des tas de choses qui choqueraient nos habitudes, par exemple (certains des concepts présentés dans la phrase qui suit n'ont pas encore été vus mais nous souhaitons quand même y faire référence) : plus de fonctions monotones (en particulier de suites) et lié à cela la dérivation n'indiquerait donc rien sur un "sens de variation", plus d'approche de zéros d'un polynôme par dichotomie (algorithme classique de recherche dans un ensemble ordonné partagé en deux à chaque itération), en géométrie, plus de segments ni de demi-droites, plus de demi-espace, plus de convexité, nous ne pouvons plus orienter l'espace, etc. C'est donc important de pouvoir ordonner les choses comme vous l'aurez compris.

Ainsi, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$ nous écrivons lorsque a est plus grand ou égal à b :

$$a \geqslant b \tag{5.3.6}$$

et lorsque a est plus petit ou égal à b :

$$a \leqslant b \tag{5.3.7}$$

Remarque

Il est utile de rappeler que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est un groupe totalement ordonné (voir section Théorie des Ensembles page 418), sans quoi nous ne pourrions pas définir des relations d'ordre entre ses éléments (ce qui n'est pas le cas des nombres complexes que nous ne pouvons pas ordonner !).

Définition (#5.3.51) : Le symbole $\leq$ est une "relation d'ordre" (voir la définition rigoureuse plus bas !) qui signifie "plus petit ou égal à" et inversement le symbole $\geq$ est aussi une relation d'ordre qui signifie "plus grand ou égal à".

Nous avons également concernant la comparaison stricte les propriétés suivantes qui sont relativement intuitives :

$$\begin{aligned} a<b \quad \text{et} \quad b<c \quad &\Rightarrow \quad a<c \\ a>b \quad \text{et} \quad b>c \quad &\Rightarrow \quad a>c \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

et :

$$\begin{aligned} a>b \quad \text{et} \quad b=c \quad &\Rightarrow \quad a>c \\ a<b \quad \text{et} \quad b=c \quad &\Rightarrow \quad a<c \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

si :

$$a<b \quad \text{et} \quad c>0 \quad \Rightarrow \quad ac<bc \tag{5.3.10}$$

si :

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c \qquad \text{et} \qquad a<b \Rightarrow a-c<b-c \tag{5.3.11}$$

et vice versa :

$$a>b \Rightarrow a+c>b+c \qquad \text{et} \qquad a>b \Rightarrow a-c>b-c \tag{5.3.12}$$

Nous avons aussi :

$$0<a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b} \tag{5.3.13}$$

et vice versa :

$$b<a<0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b} \tag{5.3.14}$$

Nous pouvons bien évidemment multiplier, diviser, additionner ou soustraire un terme de chaque côté de la relation telle que celle-ci soit toujours vraie. Petite remarque cependant, si vous multipliez les deux membres par un nombre négatif il faudra bien évidemment changer le comparateur tel que si :

$$a>b \quad \text{et} \quad c>0 \quad \Rightarrow \quad ac<bc \tag{5.3.15}$$

et vice versa :

$$a<b \quad \text{et} \quad c<0 \quad \Rightarrow \quad ac>bc \tag{5.3.16}$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons aussi :

$$0 < a < b \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{R}^{*+} \quad \Rightarrow \quad a^p < b^p \tag{5.3.17}$$

Considérez maintenant $b < a < 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors p est un nombre entier pair :

$$0 < a^p < b^p \tag{5.3.18}$$

sinon si p est impair :

$$a^p > b^p \tag{5.3.19}$$

Ce résultat provient simplement de la multiplication des signes puisque la puissance lorsqu'elle est non fractionnaire n'est qu'une multiplication.

Finalement :

$$0 < a < b \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \tag{5.3.20}$$

Les relations d'ordre :

$$\boxed{> \quad < \quad \leqslant \quad \geqslant \quad \gg \quad \ll} \tag{5.3.21}$$

correspondent donc respectivement à : (strictement) plus grand que, (strictement) plus petit que, plus petit ou égal à, plus grand ou égal à, beaucoup plus grand que et enfin beaucoup plus petit que.

Ces relations peuvent être définies de façon un peu plus subtile et rigoureuse et ne s'appliquent pas seulement aux comparateurs (voir par exemple la relation de congruence dans le chapitre de Théorie Des Nombres page 353) !

Voyons cela de suite (le vocabulaire qui va suivre est aussi défini dans la section de Théorie Des Ensembles page 403) :

En cours de traduction de l' anglais

Définition (#5.3.52) : Soit une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble A vers lui-même, une relation $\mathcal{R}$ dans A est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ (c'est-à-dire que la relation binaire engendre un sous-ensemble de par les contraintes qu'elle impose aux éléments de A qui satisfont la relation) avec la propriété d'être :

P1. Une "relation réflexive" si $\forall x \in A$:

$$x\mathcal{R}x \tag{5.3.22}$$

P2. Une "relation symétrique" si $\forall x, y \in A$:

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \tag{5.3.23}$$

P3. Une "relation antisymétrique" si $\forall x, y \in A$:

$$(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y \tag{5.3.24}$$

P4. Une "relation transitive" si $\forall x, y, z \in A$:

$$(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z \tag{5.3.25}$$

P5. Une "relation connexe" si $\forall x, y \in A$:

$$\forall x, y \in A \Rightarrow x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x \tag{5.3.26}$$

Les mathématiciens ont donné des noms particuliers aux familles de relations satisfaisant certaines de ces propriétés.

Définitions (#5.3.53) :

D1. Une relation est appelée "relation d'ordre stricte" si et seulement si elle est uniquement transitive (certains spécifient alors qu'elle est donc forcément antiréflexive mais on s'en doute...).

D2. Une relation est appelée un "pré-ordre" si et seulement si elle est réflexive et transitive.

D3. Une relation est appelée "relation d'équivalence" si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

D4. Une relation est appelée "relation d'ordre" si et seulement si elle est réflexive, transitive et antisymétrique (donc les relations $>$, $<$ ne sont pas des relations d'ordre car non réflexives !).

D5. Une relation est appelée "relation d'ordre total" si et seulement si elle est réflexive, transitive, connexe et antisymétrique.

Pour les autres combinaisons il semblerait (?) qu'il n'y ait pas de désignations particulières chez les mathématiciens...

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Les relations d'ordre binaire ont toutes des propriétés similaires dans les ensembles naturels $\mathbb{N}$, rationnels $\mathbb{Q}$, relatifs $\mathbb{Z}$ et réels $\mathbb{R}$ (il n'y a pas de relation d'ordre naturelle sur l'ensemble des nombres complexes).

✍**Exemple :**

Sur l'ensemble ci-dessous de huit livres, la relation "... a le même numéro ISBN que ..." est une relationd d'équivalence :

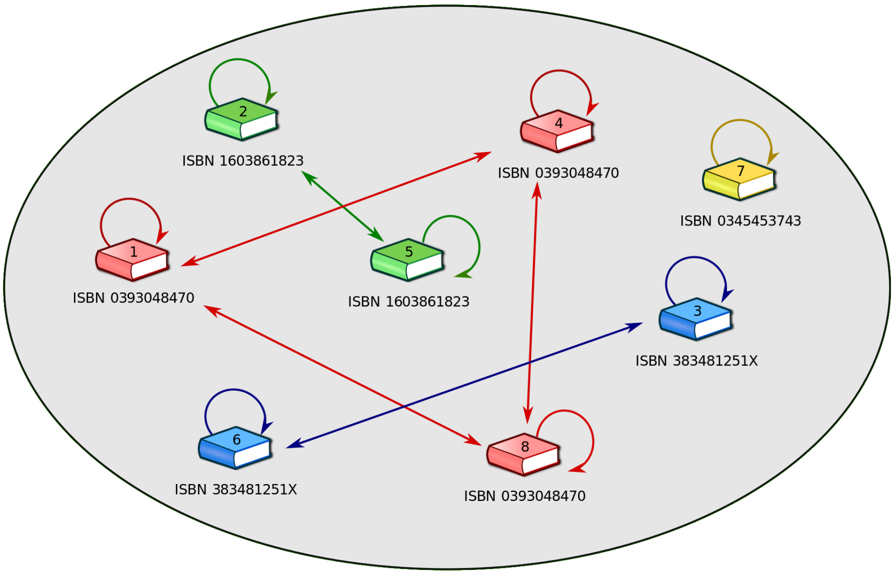


FIG. 5.27 – **Illustration d'une relation d'équivalence (source : Wikipédia, auteur : Stephan Kulla)**

Si nous résumons :

RELATION BINAIRE	$=$	$\neq$	$>$	$<$	$\leqslant$	$\geqslant$
réflexive	oui	non	non	non	oui	oui
symétrique	oui	oui	non	non	non	non
transitive	oui	non	oui	oui	oui	oui
connexe	non	non	non	non	oui	oui
antisymétrique	oui	non	non	non	oui	oui

TAB. 5.18 – **Relation binaires**

En cours de traduction

Ainsi, nous voyons que les relations binaires $\leq, \geq$ forment avec les ensembles précités, des relations d'ordre total et qu'il est très facile de voir quelles relations binaires sont des relations d'ordre partiel, total ou d'équivalence.

Définition (#5.3.54) : Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A. Pour $\forall x \in A$, la "classe d'équivalence" de x est par définition l'ensemble :

$$[x] = \{y \in A : x\mathcal{R}y\} \tag{5.3.27}$$

$[x]$ est donc un sous-ensemble de A ($x \subseteq A$) que nous noterons aussi... par la suite $\mathcal{R}$.

Nous disposons ainsi d'un nouvel ensemble qui est "l'ensemble des classes d'équivalences" ou "ensemble quotient" noté $A/\mathcal{R}$. Ainsi :

$$A/\mathcal{R} = \{[x] | x \in A\} \tag{5.3.28}$$

Il faut savoir que dans $A/\mathcal{R}$ nous ne regardons plus $[x]$ comme un sous-ensemble de A mais comme un élément !

Une relation d'équivalence, de manière vulgarisée sert donc à coller une seule étiquette à des éléments qui vérifient une même propriété, et à les confondre avec ladite étiquette (en sachant ce que nous faisons avec cette étiquette).

Une relation d'équivalence, de manière vulgarisée sert donc à coller une seule étiquette à des éléments qui vérifient une même propriété, et à les confondre avec ladite étiquette (en sachant ce que nous faisons avec cette étiquette).

✍**Exemples :**

E1. Ensemble des classes d'équivalences de l'illustration précédente avec les numéros ISBN :

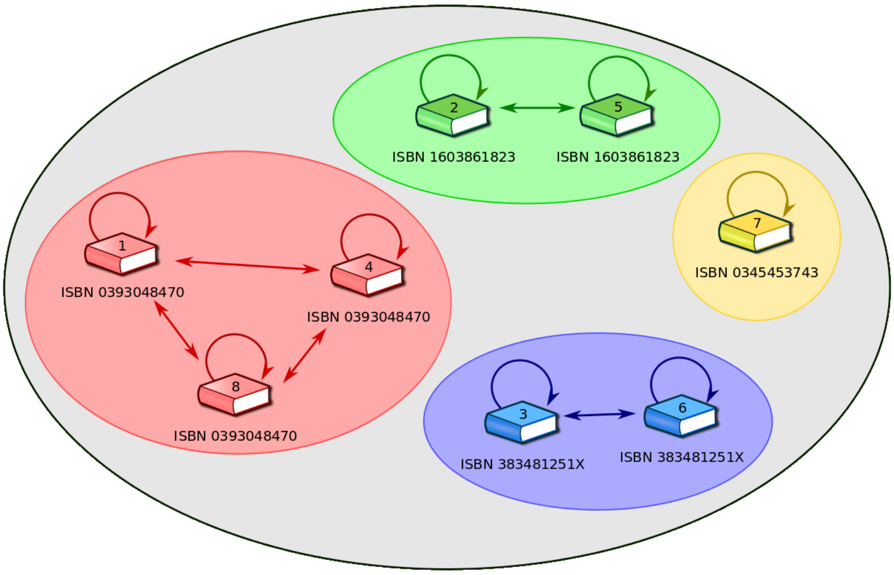


FIG. 5.28 – **Illustration des ensembles de classes d'équivalences (source : Wikipédia, auteur : Stephan Kulla)**

E2. Dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, si nous étudions les restes de la division par 2, nous avons que ceux-ci valent toujours soit 0 soit 1.

La classe d'équivalence de zéro est alors appelée "l'ensemble des nombres entiers pairs", la classe d'équivalence de 1 est appelée "l'ensemble des entiers impairs". Nous avons donc deux classes d'équivalences pour deux partitions de $\mathbb{Z}$ (gardez toujours cet exemple simple en tête pour les éléments théoriques qui suivront cela aide énormément).

Si nous nommons la première 0 et la deuxième 1, nous retrouvons les règles d'opérations entre nombres pairs et impairs :

$$0+0=0 \qquad 0+1=0 \qquad 1+1=0 \tag{5.3.29}$$

ce qui signifie respectivement que la somme de deux entiers pairs est paire, que la somme d'un pair et d'un impair est impaire et que la somme de deux impairs est paire.

Et pour la multiplication :

$$0\times 0=0 \qquad 0\times 1=0 \qquad 1\times 1=1 \tag{5.3.30}$$

ce qui signifie respectivement que le produit de deux pairs est pair, le produit d'un pair et d'un impair est pair et que le produit de deux impairs est impair.

Et hop, nous avons déplacé les opérations de $\mathbb{Z}$ sur cet ensemble quotient noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Maintenant, pour vérifier que nous avons bien affaire à une relation d'équivalence, il faudrait encore vérifier qu'elle est réflexive ($x\mathcal{R}x$), symétrique (si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$) et transitive (si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$). Nous verrons comment vérifier cela quelques paragraphes plus loin car cet exemple constitue un cas très particulier de relation de congruence.

Définition (#5.3.55) : L'application $f: A \mapsto A/\mathcal{R}$ définie par $x \mapsto [x]$ est appelée "projection canonique". Tout élément $z \in [x]$ est alors appelé "représentant de la classe" $[x]$.

Théorème 5.10. Considérons maintenant un ensemble E. Alors nous proposons de démontrer qu'il y a bijection entre l'ensemble des relations d'équivalence sur E et l'ensemble des partitions de E. En d'autres termes cette proposition dit qu'une relation d'équivalence sur E n'est rien d'autre qu'une partition de E.

Démonstration 5.10.1. Soit R une relation d'équivalence sur E. Nous choisissons $I = E/\mathcal{R}$ comme ensemble d'indexation des partitions et nous posons pour tout $[x] \in E/\mathcal{R}$, $E_{[x]} = [x]$.

Il suffit de vérifier les deux propriétés suivantes de la définition des partitions pour montrer que la famille $\left(E_{[x]}\right)_I$ est une partition de E :

P1. Soient $[x],[y] \in E/\mathcal{R}$ tels que $[x] \neq [y]$ alors (trivial) $E_{[x]} \cap E_{[y]} = \varnothing$.

P2. $E = \bigcup\limits_{[x]\in E/\mathcal{R}}$ est évident car si $x \in E$ alors $x \in [x] = E_{[x]}$.

■ Q.E.D.

Encore une fois, il est aisé de vérifier avec l'exemple pratique de la division par 2 donné plus haut que la partition des nombres pairs et impairs satisfait ces deux propriétés.

Nous avons donc associé à la relation d'équivalence R une partition de E. Réciproquement si $(E_i)_I$ est une partition de E alors nous vérifions facilement que la relation R définie par xRy si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $x, y \in E_i$ est une relation d'équivalence ! Les deux applications ainsi définies sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

✍**Exemple :**

Nous allons à présent appliquer sur un exemple un peu moins trivial que le précédent ce que nous venons de voir à la construction des anneaux $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ après quelques rappels (pour le concept d'anneau voir la section de Théorie Des Ensembles page 423).
Rappels :

1. Soit deux nombres $n, m \in \mathbb{Z}$. Nous disons que "n divise m" et nous écrivons $n|m$ si et seulement si il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = k \cdot n$ (voir section Théorie des Nombres page 313).

2. Soit $d \geq 1$ un entier. Nous définissons la relation $\mathcal{R}$ par $n\mathcal{R}m$ si et seulement si $d|(n-m)$ ou dit autrement $n\mathcal{R}m$ si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $n = m + kd$. Généralement nous écrivons ceci aussi $n \equiv m \pmod{d}$ au lieu de $n\mathcal{R}m$ et nous disons que "n est congru à m modulo d". Rappelons aussi que $n \equiv 0 \pmod{d}$ si et seulement si d divise n (voir section Théorie des Nombres page 353).

Nous allons maintenant introduire une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Démontrons que pour tout entier $d \geq 1$, la congruence modulo d est une relation d'équivalence sur equation (nous avons déjà démontré cela dans la section de Théorie des Nombres lors de notre étude de la congruence mais refaisons le travail pour le plaisir...).

Pour prouver cela nous avons simplement besoin de contrôler que les trois propriétés de la relation d'équivalence existent :

P1. Réflexivité : $n \equiv n$ puisque $n = n + 0d$.

P2. Symétrie : Si $n \equiv m$ alors $n = m + kd$ et donc $m = n + (-k)d$ c'est-à-dire $m \equiv n$.

P3. Transitivité : Si $n \equiv m$ et $m \equiv j$ alors $n = m + kd$ et $m = j + k'd$ dès lors $n = j + (k + k')d$ c'est-à-dire $n \equiv j$.

Dans la situation ci-dessus, nous notons $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence et noterons $[n]_d$ la classe d'équivalence de la congruence d'un entier n donnée par :

$$[n]_d = \{\ldots, n - 2d, n - d, n, n + d, n + 2d, n + 3d, \ldots\} \quad (5.3.31)$$

(chaque différence de deux valeurs se trouvant dans les accolades est divisible par d et c'est bien ainsi une classe d'équivalence) et ainsi :

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \{[0]_d, [1]_d, [2]_d, \ldots, [d-1]_d\} \quad (5.3.32)$$

En particulier (trivial car nous obtenons ainsi tout $\mathbb{Z}$) :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\} \quad (5.3.33)$$

Ainsi, nous voyons que le premier exemple que nous avions donné avec les nombres pairs et impairs est un cas particulièrement simple des classes d'équivalence de congruence modulo 2 car elles se réduisent toutes à seulement deux classes.

Remarque

Les opérations d'addition et de multiplication définies sur $\mathbb{Z}$ définissent des opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Nous disons alors que ces opérations sont compatibles avec la relation d'équivalence et forment alors un anneau (voir section Théorie des Ensembles page 423).

En cours de traduction de l' anglais

5.3.2 Lois Fondamentales de l'Arithmétique

Comme nous l'avons déjà dit précédemment, il existe un opérateur de base (addition) à partir duquel il possible de définir la multiplication, la soustraction (à condition que l'ensemble de nombres soit ad hoc) et la division (même remarque que pour la soustraction) et autour desquels nous pouvons construire toute la Mathématique Analytique.

Bien évidemment il y a certaines subtilités à prendre en compte lorsque le niveau de rigueur augmente. Le lecteur peut alors se reporter au chapitre de Théorie Des Ensembles (page 376) où ses lois fondamentales sont redéfinies avec plus de justesse.

En cours de traduction de l'anglais

5.3.2.1 Addition

Définition (#5.3.56) : "L'addition" de nombres entiers est une opération notée "+" qui a pour seul but de réunir en un seul nombre toutes les unités contenues dans plusieurs autres. Le résultat de l'opération se nomme "sum" ou "total" ou encore "cumul". Les nombres à additionner sont appelés "termes de l'addition".

> **Remarque**
>
> Les signes d'addition "$+$" et de soustraction "$-$" seraient dus au mathématicien allemand Johannes Widmann (1489)

Ainsi, $A + B + C$... sont les termes de l'addition et le résultat est la somme des termes de l'addition.

Ou sous forme schématique d'un cas particulier :

$$0 + 4 + 3 = 4 + 3 = 7$$

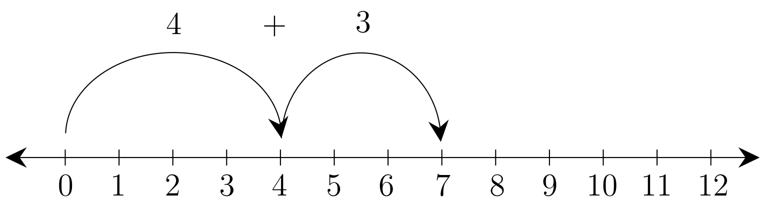


FIG. 5.29 – **Exemple schématique d'un cas particulier d'addition**

Voici une liste de quelques propriétés intuitives que nous admettrons sans démonstrations de l'opération de l'addition :

P1. La somme de plusieurs nombres ne dépend pas de l'ordre des termes. Nous disons alors que l'addition est une "opération commutative". Ce qui signifie concrétement pour deux nombres quelconques :

$$A + B = B + A \tag{5.3.34}$$

P2. La somme de plusieurs nombres ne change pas si nous remplaçons deux ou plusieurs d'entre eux par leur résultat intermédiaire. Nous disons alors que l'addition est "opération associative".

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{5.3.35}$$

P3. Le zéro est l'élément neutre de l'addition car tout nombre additionné à zéro donne ce même nombre :

$$A + 0 = 0 \tag{5.3.36}$$

P4. Suivant l'ensemble dans lequel nous travaillons ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$), l'addition peut comporter un terme de telle façon à ce que le total soit nul. Nous disons alors qu'il existe un "opposé" pour l'addition :

$$A + \bar{A} = 0 \tag{5.3.37}$$

Nous allons définir plus rigoureusement l'addition en utilisant l'axiomatique de Peano dans le cas particulier de l'ensemble des nombres entiers naturels comme nous en avons déjà fait mention dans la section traitant des Nombres. Ainsi, avec ces axiomes il est possible de démontrer qu'il existe (existence) une et une seule application (unicité), notée "+", de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} : & n + 0 &= n \\ &\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N} : & p + s(q) &= s(p + q) \\ &\forall n \in \mathbb{N} : & s(n) &= n + 1 \end{aligned} \tag{5.3.38}$$

où s signifie "successeur".

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Ce livre n'ayant pas pour vocation de s'adresser à des mathématiciens, nous nous passerons de la démonstration (relativement longue) et admettrons intuitivement que l'application "+" existe et est unique... et qu'il en découle les propriétés susmentionnées.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres quelconques alors nous pouvons noter également la somme ainsi :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5.3.39}$$

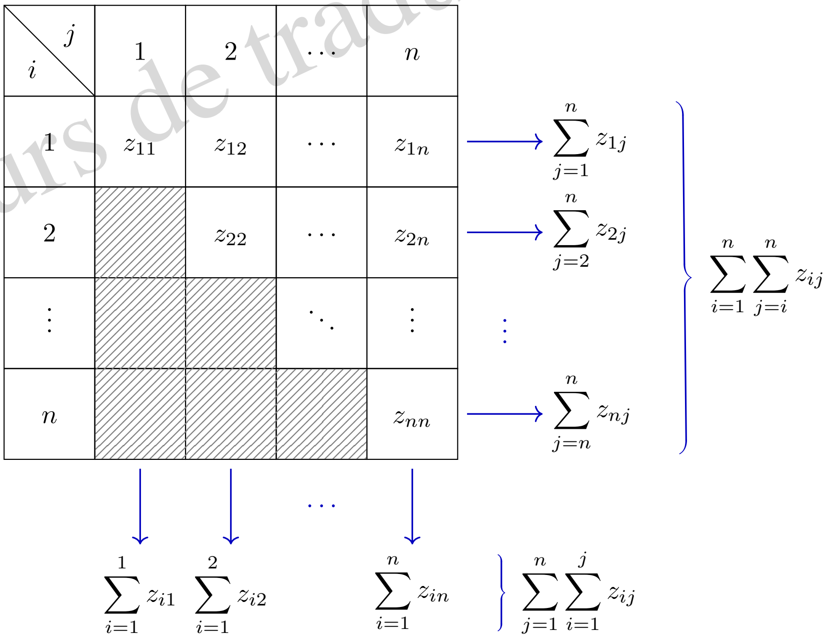
en définissant des bornes supérieure et inférieure à la somme indexée (au-dessus et en-dessous de la lettre grecque majuscule "sigma").

Voici quelques rappels des propriétés relatives à cette notation condensée :

$$\sum_{i=1}^{n} kx_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} k = nk \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{5.3.40}$$

où k est une constante.

Une telle notation est particulièrement utile lorsque nous devons sommer par exemple des tables à double entrée comme le cas particulier illustré ci-dessous (matrice carrée symétrique) :



En cours de traduction de l'anglais

Voyons maintenant quelques cas concrets d'additions de différents nombres simples afin de mettre en pratique les bases.

✍**Exemples :**

L'addition de deux nombres relativement petits est assez facile dès que nous avons appris par coeur à compter jusqu'au nombre résultant de cette opération. Ainsi (exemples pris sur la base décimale) :

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ \ 2 \\ \hline 7 \end{array} \tag{5.3.41}$$

et :

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ \ 3 \\ \hline 13 \end{array} \tag{5.3.42}$$

et :

$$\begin{array}{r} 1014 \\ +\ \ 3 \\ \hline 1017 \end{array} \tag{5.3.43}$$

Pour les plus grands nombres il faut adopter une autre méthode qu'il s'agit d'apprendre par coeur. Ainsi par exemple :

$$\begin{array}{r} 9244 \\ +\,3475 \\ \hline ? \end{array} \tag{5.3.44}$$

L'algorithme (processus) est le suivant : nous additionnons les colonnes (4 colonnes dans cet exemple) de droite à gauche. Pour la première colonne nous avons donc $4 + 5 = 9$ ce qui nous donne :

$$\begin{array}{r} 9244 \\ +\,3475 \\ \hline 9 \end{array} \tag{5.3.45}$$

et nous continuons ainsi pour la deuxième $4 + 7 = 11$ mais à la différence que comme nous avons un nombre supérieur à > 10, nous reportons le premier chiffre (de gauche) sur la colonne suivante de l'addition. Ainsi :

$$\begin{array}{r} 9\,2^{+1}\,4\,4 \\ +\,3\ \ 4\ \ 7\,5 \\ \hline 1\,9 \end{array} \tag{5.3.46}$$

La troisième colonne se calcule dès lors comme $4 + 2 + 1 = 7$ ce qui nous donne :

$$\begin{array}{r} 9\,2^{+1}\,4\,4 \\ +\,3\ \ 4\ \ 7\,5 \\ \hline 7\ \ 1\,9 \end{array} \tag{5.3.47}$$

Pour la dernière colonne nous avons $9+5=14$ et à nouveau nous reportons le premier chiffre (de gauche) sur la colonne suivante de l'addition. Ainsi :

$$\begin{array}{cccccc} & {}^{+1}9 & 2^{+1} & 4 & 4 \\ + & 3 & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 2 & 7 & 1 & 9 \end{array} \tag{5.3.48}$$

Et finalement la dernière colonne donne :

$$\begin{array}{cccccc} & & {}^{+1}9 & 2^{+1} & 4 & 4 \\ + & & 3 & 4 & 7 & 5 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 1 & 9 \end{array} \tag{5.3.49}$$

Cet exemple montre comment nous pouvons procéder pour l'addition de nombres quelconques : nous faisons une addition par colonne de droite à gauche et si le résultat d'une addition est supérieur à la dizaine, nous reportons une unité sur la colonne suivante.

Suite à une demande d'une lecteur, voici également un exemple illustré sur la façon dont nous enseignons l'addition de fractions simples au niveau du collège, d'abord dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes :

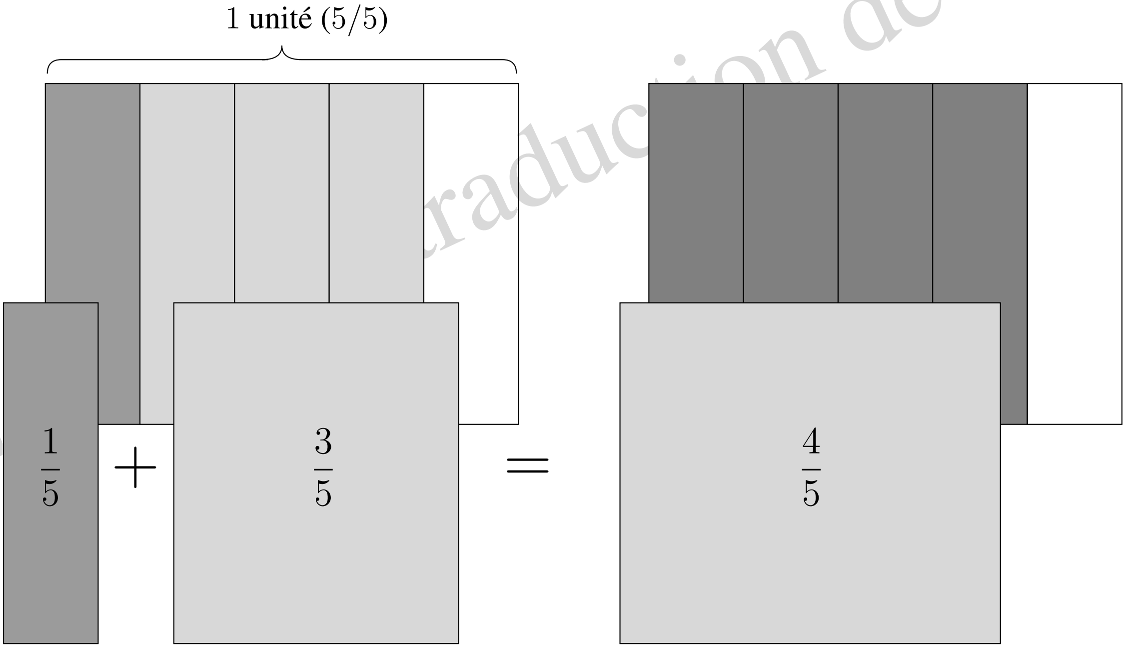


FIG. 5.30 – **Addition de fractions avec dénominateurs communs**

En traduction de l'anglais

Ou si les dénominateurs ne sont pas communs, nous recherchons des fractions communes équivalentes à chaque terme de l'addition, de manière à ce que toutes les fractions aient un dénominateur commun et nous ajoutons ensuite comme nous le faisions auparavant :

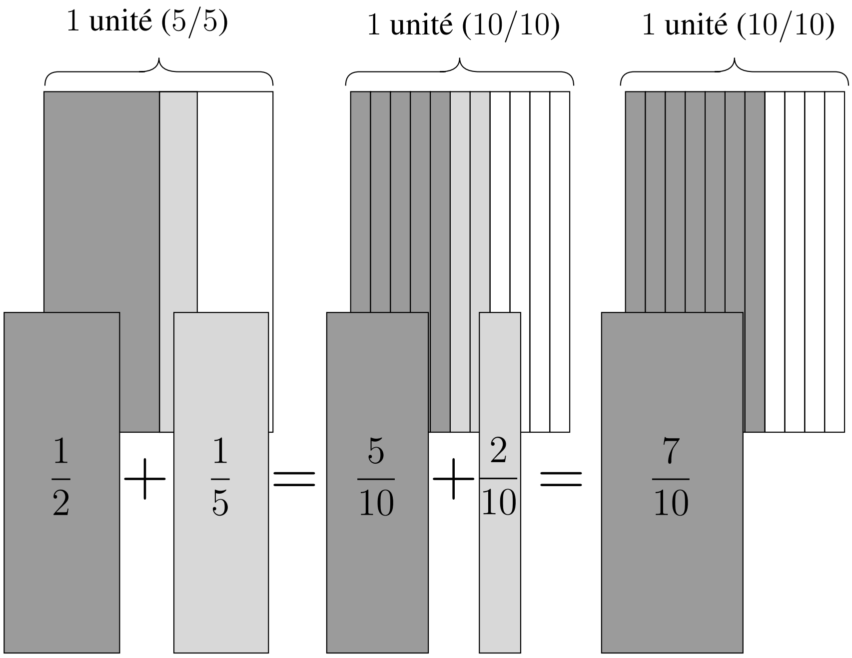


FIG. 5.31 – **Addition de fractions sans dénominateurs communs**

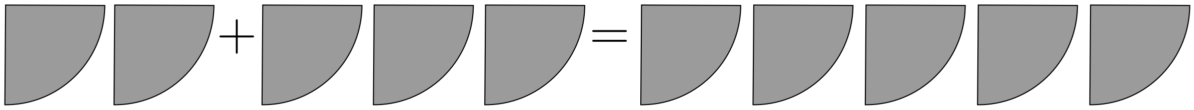
Nous voyons ensuite ci-dessus que pour ajouter une fraction à autre, nous la mettons d'abord au même dénominateur, puis nous ajoutons les numérateurs et nous conservons le dénominateur s'il n'y a pas de simplification possible :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10} \tag{5.3.50}$$

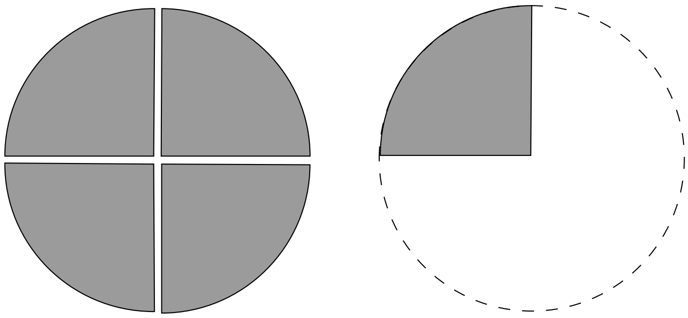
évidemment, lorsque nous additionnons des fractions, nous pourrions également obtenir un nombre représentant un autre nombre supérieur à 1, comme par exemple :

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1.25 \tag{5.3.51}$$

Ceci peut être illustré comme suit :



Si vous voulez assembler ces quarts de disques, voici ce que nous obtenons :



En cours de traduction de l'anglais

Vous comprenez alors pourquoi on peut dire que nous avons $5/4$ de disque !

Cet algorithme (processus ou méthodologie) d'addition est assez simple à comprendre et à exécuter. Nous n'irons pas plus loin sur ce sujet du moins à ce jour !

Ci-dessous une table d'addition typique pour les douze premiers nombres naturels :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

FIG. 5.32 – **Table d'addition des 12 premiers nombres naturels**

Remarque

L'addition semble être une opération simple, mais dans certains livres bien connus, les sommes simples de niveau maternelle sont fausses. Comme par exemple dans la Bible (l'une des nombreuses versions traduites de la Bible existantes dans le monde), Esdras `1:9-10` (ancien testament). L'inventaire de la somme conduit à un total erroné ($5'469$ au lieu de $2'499$) :

Numéro Verset	Description	Quantité
`I-9`	bassins d'or	30
	bassins d'argent	1'000
	couteaux	29
`I-10`	coupes d'or	30
	coupes d'argent	410
	autres ustensiles	1'000
`I-11`	Total	5'400

Certains théologiens professionnels de haut niveau et réputés ont tenté de trouver une solution pour expliquer cette erreur dans un livre « divin », mais ont échoué (voir [388]).

Et ce type d'erreur se reproduit plusieurs fois dans la Bible !

5.3.2.2 Soustraction

Définition (#5.3.57) : La "soustraction" est une opération mathématique qui représente le fait de retirer des entités d'une collection. Plus formellement, la soustraction du nombre entier A par le nombre entier B notée par le symbole "$-$", c'est trouver le nombre C qui, ajouté à B, redonne A.

Remarque

Comme nous l'avions vu dans la section de Théorie des Ensembles (page 401), la soustraction dans l'ensemble $\mathbb{N}$ est possible seulement si $A > B$.

Nous écrivons la soustraction sous la forme :

$$A - B = C \tag{5.3.52}$$

qui doit vérifier :

$$A = B + C \tag{5.3.53}$$

Ou sous forme schématique avec un cas particulier :

$$10 - 3 - 4 = 7 - 4 = 3$$

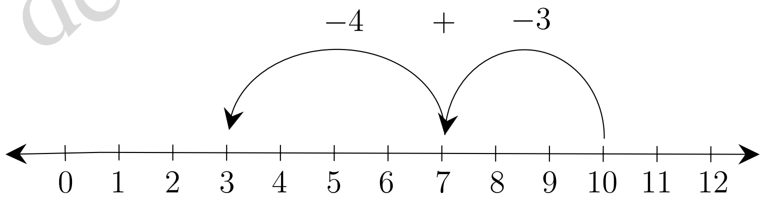


FIG. 5.33 – **Un schéma possible pour la soustraction**

Voici quelques propriétés intuitives que nous admettrons sans démonstrations de l'opération de soustraction (bon cela découle de l'addition de nombres négatifs en réalité...) :

P1. La soustraction de plusieurs nombres dépend de l'ordre des termes. Nous disons alors que la soustraction est une "opération non-commutative". Effectivement :

$$5 - 2 \neq 2 - 5 \tag{5.3.54}$$

P2. La soustraction de plusieurs nombres change si nous remplaçons deux ou plusieurs d'entre eux par leur résultat intermédiaire. Nous disons alors que la soustraction est une "opération non-associative". Effectivement :

$$5 - (3 - 2) \neq (5 - 3) - 2 \tag{5.3.55}$$

En cours de traduction de l'anglais

P3. Le zéro n'est pas l'élément neutre de la soustraction. Effectivement, tout nombre à qui nous soustrayons zéro donne ce même nombre, donc le zéro est neutre à droite... mais pas à gauche car tout nombre que nous soustrayons à zéro ne donne pas zéro ! Nous disons alors que le zéro est seulement "neutre à droite" dans le cas de la soustraction. Effectivement :

$$0 - 5 \neq 0 \tag{5.3.56}$$

P4. Suivant l'ensemble dans lequel nous travaillons, la soustraction peut comporter un terme de telle façon à ce que le total soit nul. Nous disons alors qu'il existe un "opposé" pour la soustraction.

Dans les cas les plus compliqués, nous avons un vocabulaire spécial :

$$\begin{array}{rrrl} -1 & & & \longleftarrow \text{ retenue} \\ 7 & 0 & 4 & \longleftarrow \text{ diminuende} \\ 5 & 1 & 2 & \longleftarrow \text{ diminuteur} \\ \hline 1 & 9 & 2 & \longleftarrow \text{ Reste ou Différence} \end{array} \tag{5.3.57}$$

Le "diminuende" est 704, le "diminuteur" est 512. Les digits du diminuende sont $m_3 = 7$, $m_2 = 0$ et $m_1 = 4$. Les digits du diminuteur sont $s_3 = 5$, $s_2 = 1$ et $s_1 = 2$. À la position des unités, 4 n'est pas inférieureur 2, la différence 2 est donc inscrite à la ligne du reste. À la position des dizaines, 0 est inférieur à 1, de sorte que le 0 est augmenté de 10 et que la différence avec 1, soit 9, est reportée dans la reste à la position des dizaines. La méthode de soustraction américaine corrige l'augmentation de dix en réduisant le chiffre de la place des centaines dans la diminuend de 1. Autrement dit, le 7 est rayé et remplacé par la valeur 6. La soustraction continue ensuite à la position des centaines, où 6 n'est pas inférieur à 5, de sorte que la différence est inscrite à la position des centaiens du reste. Nous avons maintenant terminé, le résultat est 192.

Voyons maintenant quelques exemples concrets de soustraction de divers nombres simples dans le but de pratiquer la base :

✍**Exemple :**

La soustraction de deux nombres relativement petits est assez facile dès que nous avons appris par coeur à compter jusqu'à au moins le nombre résultant de cette opération. Ainsi :

$$\begin{array}{rr} & 5 \\ - & 2 \\ \hline & 3 \end{array} \tag{5.3.58}$$

et :

$$\begin{array}{rr} & 10 \\ - & 3 \\ \hline & 7 \end{array} \tag{5.3.59}$$

En cours de traduction de l'anglais

et :

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,4 \\ -\quad\quad 3 \\ \hline 1\,0\,1\,1 \end{array} \tag{5.3.60}$$

Pour les plus grands nombres il faut adopter une autre méthode qu'il s'agit d'apprendre par coeur (au même titre que l'addition). Ainsi par exemple :

$$\begin{array}{r} 4\,5\,7\,4 \\ -\,3\,7\,8\,5 \\ \hline ? \end{array} \tag{5.3.61}$$

nous soustrayons les colonnes (4 colonnes dans cet exemple) de droite à gauche. Pour la première colonne nous avons $4-5=-1<0$ ce qui fait que nous reportons -1 sur la colonne suivante (deuxième) et écrivons $10-1=9$ en bas de la barre d'égalité de la première colonne :

$$\begin{array}{r} 4\,5\,7^{-1}\,4 \\ -\,3\,7\;\;8\;\;5 \\ \hline 9 \end{array} \tag{5.3.62}$$

et nous continuons ainsi pour la deuxième $7-8=-1<0$ ce qui fait que nous reportons -1 sur la colonne suivante (troisième) et comme $-1-1=-2$ nous reportons $10-2=8$ en bas de la barre d'égalité de la deuxième colonne :

$$\begin{array}{r} 4\,5^{-1}\,7^{-1}\,4 \\ -\;3\;\;7\;\;\;8\;\;5 \\ \hline 8\;\;9 \end{array} \tag{5.3.63}$$

La troisième colonne se calcule dès lors comme $5-7=-2<0$ et nous reportons -1 sur la colonne suivante (quatrième) et comme $-1-2=-3$ nous reportons $10-3=7$ en bas de la barre d'égalité de la troisième colonne :

$$\begin{array}{r} 4^{-1}\,5^{-1}\,7^{-1}\,4 \\ -\;\;3\;\;\;7\;\;\;8\;\;5 \\ \hline 7\;\;\;8\;\;9 \end{array} \tag{5.3.64}$$

Pour la dernière colonne nous avons $4-3=1>0$ nous reportons donc rien sur la colonne suivante et comme $1-1=0$ nous reportons 0 en bas de la barre d'égalité de la quatrième colonne :

$$\begin{array}{r} 4^{-1}\,5^{-1}\,7^{-1}\,4 \\ -\;\;3\;\;\;7\;\;\;8\;\;5 \\ \hline 0\;\;\;7\;\;\;8\;\;9 \end{array} \tag{5.3.65}$$

Voilà comment nous procédons donc pour la soustraction de nombres quelconques. Nous faisons une soustraction par colonne de droite à gauche et si le résultat d'une soustraction est inférieur à zéro nous faisons reporter -1 sur la colonne suivante et l'addition du dernier report sur la soustraction obtenue en bas de la barre d'égalité.

Suite à une demande d'un lecteur, voici également un exemple illustré sur la façon dont nous enseignons à soustraire des fractions simples du niveau du collège (en France) :

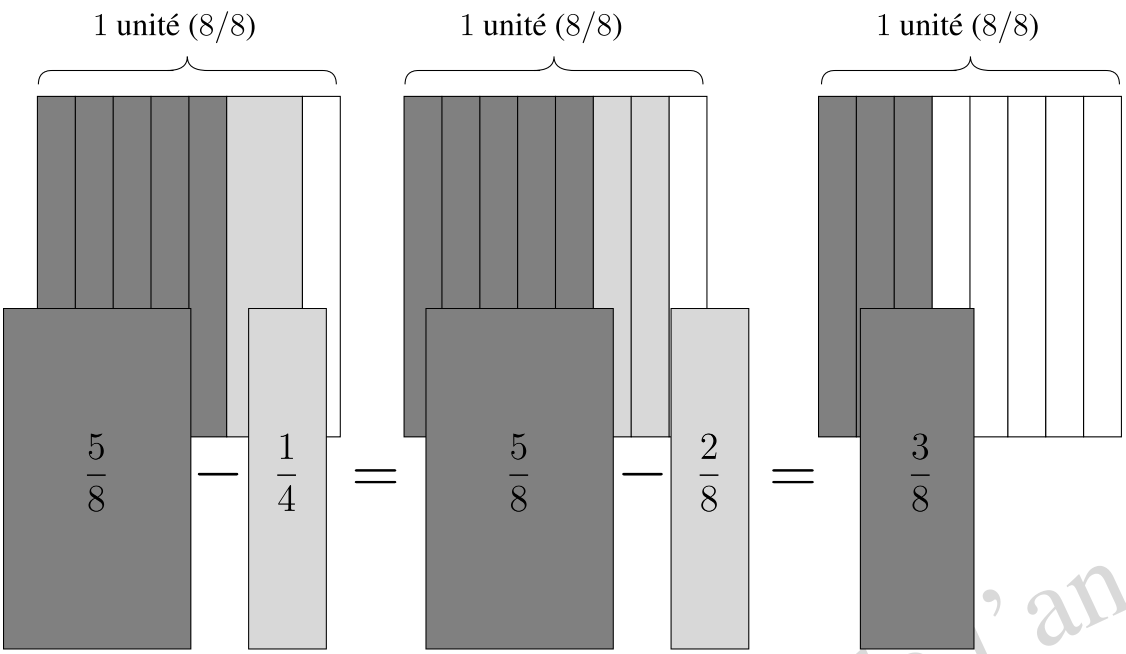


FIG. 5.34 – **Soustraction de fractions sans dénominateur commun**

En cours de traduction de l'anglais

Nous voyons ensuite ci-dessus que pour soustraire une fraction à une autre, nous mettons d'abord les fractions au même dénominateur, puis nous soustrayons les numérateurs et nous conservons le dénominateur s'il n'y a pas de simplification possible :

$$\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}-\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8} \qquad (5.3.66)$$

Nous avons lorsque nous mélangeons l'addition et la soustraction les relations suivantes qui en découlent :

$$\begin{aligned} a+(b-c)&=(a+b)-c\\ a-(b+c)&=(a-b)-c\\ a-(b-c)&=(a-b)+c\\ a-b&=(a-c)-(b-c) \end{aligned} \qquad (5.3.67)$$

La méthodologie utilisée pour la soustraction se basant sur exactement le même principe que l'addition nous ne nous étendrons pas plus sur le sujet. Cette méthode est très simple et nécessite bien sûr une certaine habitude à travailler avec les chiffres pour être totalement appréhendée.

Ci-dessous une table de soustraction typique pour les douze premiers nombres naturels :

−	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
11	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
12	−11	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0

FIG. 5.35 – **Table de soustraction des 12 premiers nombres naturels**

En cours de traduction de l'anglais

5.3.2.3 Multiplication

Définition (#5.3.58) : La "multiplication" de nombres est une opération qui a pour but, étant donné deux nombres, l'un appelé "multiplicateur" m, et l'autre "multiplicande" M, d'en trouver un troisième appelé "produit" P qui soit la somme (donc la multiplication d'écoule de la somme !) d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y a d'unités au multiplicateur :

$$m \times M = \underset{(1)}{M} + \underset{(2)}{M} + \underset{(3)}{M} + \ldots + \underset{(m)}{M} = \sum_{i=1}^{m} M = P \tag{5.3.68}$$

Le multiplicande et le multiplicateur sont appelés les "facteurs du produit".

La multiplication s'indique à l'aide du signe "$\times$" (anciennement) ou du point de ponctuation surélevé "$\cdot$" (notation moderne) ou sans aucun symbole s'il n'y pas de confusion possible... tel que :

$$\boxed{a \times b = a \cdot b = ab} \tag{5.3.69}$$

Nous pouvons définir la multiplication en utilisant l'axiomatique de Peano dans le cas particulier des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ comme nous en avons déjà fait mention dans la section traitant des Nombres (page 215). Ainsi, avec ces axiomes il est possible de démontrer qu'il existe (existence) une et une seule application (unicité), notée "$\times$" ou plus souvent "$\cdot$", de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : & \quad n \cdot 0 = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N} : & \quad p(q+1) = pq + q \end{aligned} \tag{5.3.70}$$

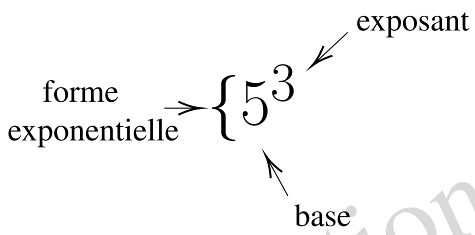
Remarque

Ce livre n'ayant pas pour vocation de s'adresser à des mathématiciens, nous nous passerons de la démonstration (relativement longue) et admettrons intuitivement que l'application "$\times$" existe et est unique...

La "puissance" est une notation particulière d'un cas précis de multiplications. Lorsque le(s) multiplicateur(s) et multiplicande(s) sont identique(s) en valeur numérique, nous notons la multiplication (par exemple) :

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n = n^8 \tag{5.3.71}$$

c'est ce que nous nommons la "notation en puissance" ou "l'exponentiation". Le nombre en exposant est ce que nous nommons la "puissance" ou "l'exposant" du nombre (n en l'occurrence). La notation en exposants se trouve pour la première fois dans l'ouvrage de Chuquet intitulé "*Triparty en la science des nombres*" en 11484 (calendrier holocène).



En cours de traduction de l'anglais

Vous pouvez vérifier par vous-même que ses propriétés sont les suivantes (par exemple) :

$$n^x n^y = n^{x+y} \tag{5.3.72}$$

de même :

$$a^x b^x = (ab)^x \tag{5.3.73}$$

Voici quelques propriétés intuitives que nous admettrons sans démonstrations de l'opération de multiplication :

P1. La multiplication de plusieurs nombres ne dépend pas de l'ordre des termes. Nous disons alors que la multiplication est une "opération commutative".

P2. La multiplication de plusieurs nombres ne change pas si nous remplaçons deux ou plusieurs d'entre eux par leur résultat intermédiaire. Nous disons alors que la multiplication est "opération associative".

P3. L'unité est l'élément neutre de la multiplication car tout multiplicande multiplié par le multiplicateur 1 est égal au multiplicande.

P4. La multiplication peut comporter un terme de telle façon à ce que le produit soit égal à l'unité (l'élément neutre). Nous disons alors qu'il existe un "inverse pour la multiplication" (mais cela dépend rigoureusement dans quel ensemble de nombres nous travaillons puisque dans certains ensemble le concept de nombre décimal n'existe pas !).

P5. La multiplication est "opération distributive", c'est-à-dire que :

$$a \cdot (b+c) = ab + ac \quad (5.3.74)$$

l'opération inverse s'appelant la "factorisation".

✍Exemple :

Le cas probablement le plus connu au monde de factorisation (par les utilisateur de tableurs de type Microsoft Excel) est le calcul de l'ajout ou du retrait d'une taxe sur un montant donné ! Considérons par exemple l'ajout de 8% de TVA à un montant de 100.-. Cela s'écrira typiquement d'une des différentes manières suivantes :

$$100+100\cdot 8\% = 100\cdot 1+100\cdot 8\% = 100\cdot(1+8\%) = 100\cdot(1+8/100) = 100\cdot 1.08$$

P6. Tout nombre à la puissance zero est égal 1 étant donné que :

$$n^0 = n^m n^{-m} = \frac{n^m}{n^m} = 1 \quad (5.3.75)$$

De ce résultat certains déduisent trop vite (et même certains professeurs l'enseignent !) que $0^0 = 1$. Mais en réalité, 0^0 n'est tout simplement pas défini.

Remarque

Il y a deux raisons principales pour lesquelles certains professeurs enseignent $0^0 = 1$. La première est une application du théorème du binôme (voir section Calcul Algébrique page 1347) :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k$$

Quand $x = 0$, cette expression devient :

$$\begin{aligned}(1+0)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 0^k \\ 1^n &= 1 \cdot 0^0 \\ 1 &= 1 \cdot 0^0\end{aligned}$$

Dans ce contexte, 0^0 doit être égal à 1.

La seconde raison part du raisonnement selon lequel 1^1 vaut 1, $0.5^{0.5}$ vaut 0.70 etc. x^x descend diminue jusqu'à ce qu'il atteigne 0.4, puis il remonte et approche la limite de un mais sans jamais l'atteindre. C'est-à-dire que $0.000000001^{0.000000001}$ équivaut à presque 1, donc certaines personnes arrondissent 0^0 à 1.

Pour résumer, il semble qu'il n'y ait pas de convention internationale à notre connaissance.

En co ... tion de l' anglais

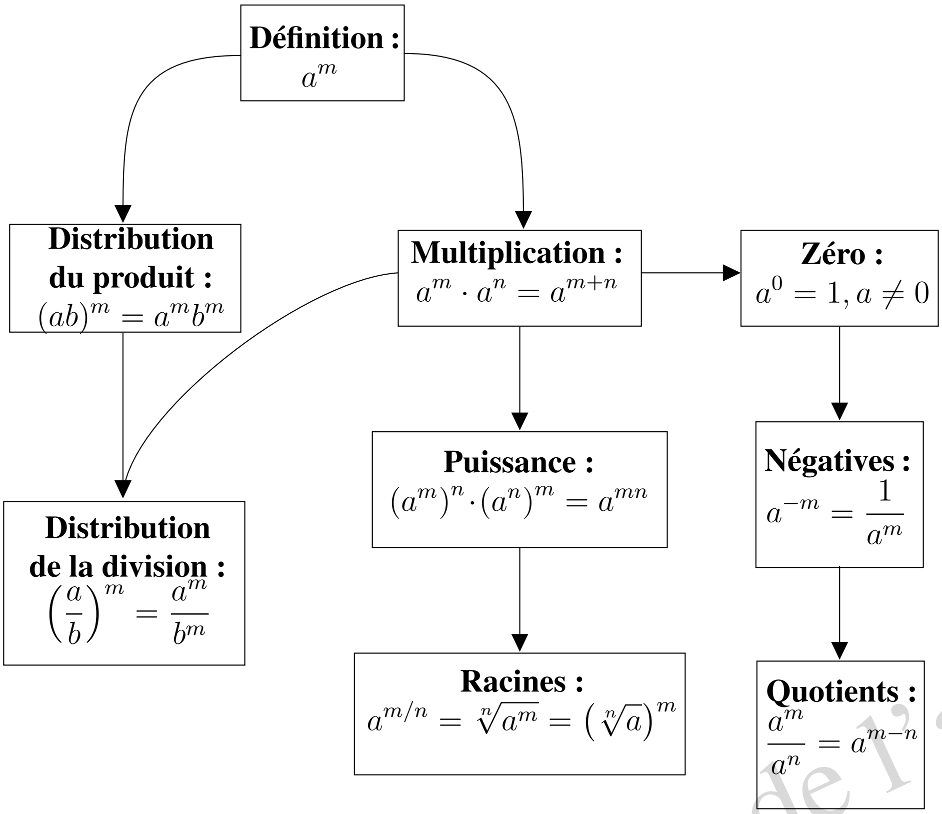


FIG. 5.36 – **Résumé des règles des exposants**

En cours de traduction de l'anglais

Introduisons encore quelques notations particulières relatives à la multiplication :

1. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres quelconques (non nécessairement égaux) alors nous pouvons noter le produit ainsi :

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{5.3.76}$$

en définissant des bornes supérieure et inférieure au produit indexé (au-dessus et en-dessous de la lettre grecque majuscule "Pi").

Nous avons triviallement relativement à cette notation (sur demande nous pouvons détailler plus...) :

$$\prod_{i=1}^{n} kx_i = k^n \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{5.3.77}$$

pour tout nombre k tel que :

$$\prod_{i=1}^{n} k = k^n \tag{5.3.78}$$

Nous avons aussi par exemple :

$$\prod_{i=1}^{n} (x+y) = (x+y)^n \tag{5.3.79}$$

2. Nous définissons également la "factorielle" simplement (car il existe aussi une manière complexe de la définir en passant par la fonction Gamma d'Euler comme cela est fait dans la section de Calcul Différentiel Et Intégral page 1552) par :

$$\boxed{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n = n!} \tag{5.3.80}$$

avec le fait particulier que (seule la définition complexe mentionnée précédemment peut rendre ce fait évident comme on le prouve aussi à la page 1555...) :

$$0! = 1 \tag{5.3.81}$$

Voyons quelques exemples simples de multiplications :

✍**Exemples :**

E1. La multiplication de deux nombres relativement petits est assez facile dès que nous avons appris par coeur à compter jusqu'à au moins le nombre résultant de cette opération. Ainsi :

$$\begin{array}{lr} & 5 \\ \times & 2 \\ \hline & 1\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 10 \\ \times & 3 \\ \hline & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 1\,0\,1\,4 \\ \times & 3 \\ \hline & 3\,0\,4\,2 \end{array} \tag{5.3.82}$$

E2. Pour les beaucoup plus grands nombres il faut adopter une autre méthode qu'il s'agit d'apprendre par coeur.

Ainsi par exemple :

$$\begin{array}{lr} & 4\,5\,7\,4 \\ \times & 8 \\ \hline & 3\,2 \\ & 5\,6 \\ & 4\,0 \\ & 3\,2 \end{array} \tag{5.3.83}$$

Cette méthodologie est très logique si vous comprenez comment nous construisons un nombre en base dix. Ainsi nous avons (nous supposerons que la propriété distributive est maîtrisée) :

$$\begin{aligned} 8 \times 4574 &= 8 \times (4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) \\ &= 8 \times 4000 + 8 \times 500 + 8 \times 70 + 8 \times 4 \\ &= 32 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^2 + 56 \cdot 10^1 + 32 \cdot 10^0 \\ &= 36592 \end{aligned} \tag{5.3.84}$$

Pour ne pas surcharger l'écriture dans la multiplication par la méthode "verticale", nous ne représentons pas les zéros qui surchargeraient inutilement les calculs (et ce d'autant plus si le multiplicateur et/ou le multiplicande sont de très grands nombres).

Suite à la demande d'un lecteur, voici également un exemple illustré sur la façon dont nous enseignons (une manière parmi d'autres !) à multiplier des fractions simples ensembles au niveau du collège :

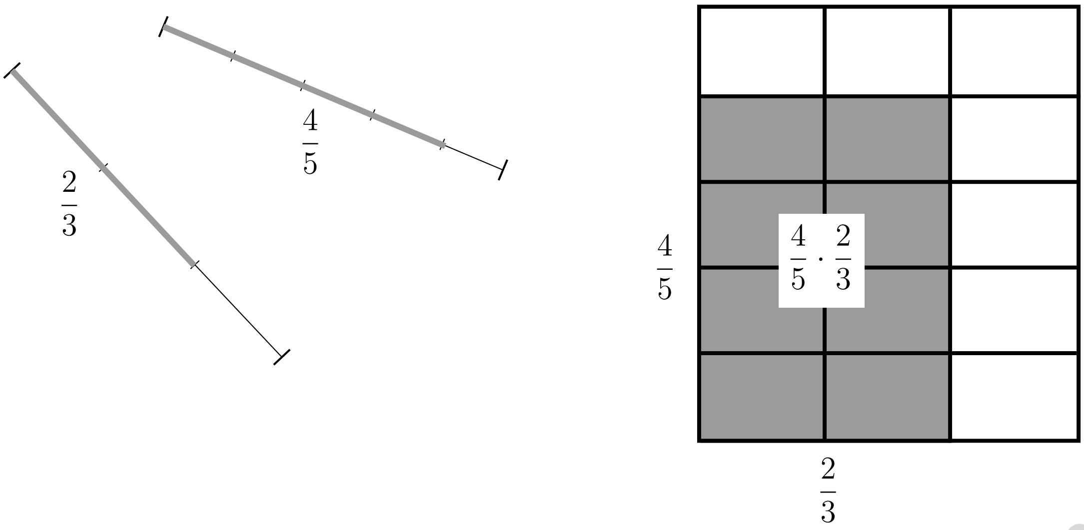


Fig. 5.37 – Multiplication de fractions avec dénominateurs non-communs

Nous avons alors :

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15} \tag{5.3.85}$$

Cet exemple montre que pour multiplier deux fractions, il suffit simplement de multiplier les numérateurs et les dénominateurs.

Ci-dessous une table de multiplication typique pour les douze premiers nombres naturels :

En cours de traduction de l' anglais

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

FIG. 5.38 – **Table de multiplication des 12 premiers nombres naturels**

Attention ! ! La multiplication ne peut être appliquée universellement dans la vie ou les sciences, surtout lorsque des dimensions sont impliquées, ce qui est lié à ce que l'on appelle "l'analyse dimensionnelle", qui vise à vérifier la cohérence des opérations mathématiques appliquées à des cas concrets. La multiplication (et les opérations dérivées) n'est valable que lorsque la quantité résultante fait sens. Par conséquent, multiplier 0 vache par 5 vaches n'a aucun sens et constitue un calcul à proscrire, car le résultat dimensionnel est égal au à des vaches au, soit $[\text{vache}^2]$. L'analyse dimensionnelle est une sorte de grammaire du langage physique. De même qu'on ne mélange pas les verbes et les noms au hasard dans une phrase, on ne peut pas mélanger arbitrairement les unités et les dimensions dans les relations mathématiques. La multiplication est puissante, mais seulement lorsqu'elle respecte la structure du monde physique.

5.3.2.4 Division

Définition (#5.3.59) : La "division" de nombres entiers (pour commencer par le cas le plus simple...) est une opération, qui a pour but, étant donné deux nombres entiers, l'un appelé "dividende" D, l'autre appelé "diviseur" d, d'en trouver un troisième appelé "quotient" Q qui soit le plus grand nombre dont le produit par le diviseur puisse se retrancher (donc la division découle de la soustraction !) du dividende (la différence étant nommée le "reste" R ou la "congruence").

Remarque

Dans les cas des nombre réels il n'y a jamais de reste à la fin de l'opération de division (car le quotient multiplié par le diviseur donne exactement le dividende) !

D'une façon générale dans le cadre des nombres entiers $\mathbb{N}$ (ou les divions d'équations algébriques), si nous notons D le dividende, d le diviseur, Q le quotient et R le reste nous avons la relation :

$$D = Q \cdot d + R \tag{5.3.86}$$

en sachant que la division était initialement notée de la manière suivante :

$$D : d = \frac{D}{d} \tag{5.3.87}$$

Nous indiquons l'opération de division en plaçant entre les deux nombres, le dividende et le diviseur, un ":" ou une barre de division "/" ou même parfois au jardin d'enfant par le symbole "$\div$".

Nous désignons également souvent par "fraction" (au lieu de "quotient"), le rapport de deux nombres ou autrement dit, la division du premier par le deuxième.

Remarque

Le signe de la division ":" est dû à Leibniz. La barre de fraction se trouve elle pour la première fois dans les ouvrages de Fibonacci (1202) et elle est probablement due aux Hindous.

Si nous divisons deux nombres entiers et que nous souhaitons un entier comme quotient et comme reste (s'il y en a un...), alors nous parlons de "division euclidienne".

Par exemple, la division d'un gâteau, n'est pas un division euclidienne car le quotient n'est pas un entier, excepté si l'on en prend les quatre quarts... :

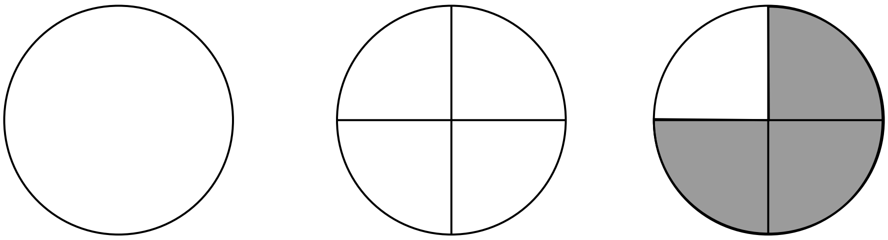


FIG. 5.39 – **Exemple schématique de la division et du fractionnement (fraction)**

Remarque

Les fractions peuvent sembler faciles à maîtriser. Cependant, ce n'est pas le cas pour tout le monde. Comme dans le Coran par exemple, ils ont essayé d'établir une règle générale

En cours de tr… de l'anglais

d'héritage qui échoue dans certains cas et c'est assez dommage pour un livre "divin" avec des règles censées être données par une entité omnisciente... Voyons cela avec la Sourate An-Nisa (les Femmes) 4:11-12 du Coran Warsh (l'un des nombreux Corans arabes différents existant dans le monde) :

Voici ce qu'Allah vous enjoint au sujet de vos enfants : au fils, une part équivalente à celle de deux filles. S'il n'y a que des filles, même plus de deux, à elles alors deux tiers de ce que le défunt laisse. Et s'il n'y en a qu'une, à elle alors la moitié. Quant aux père et mère du défunt, à chacun d'eux le sixième de ce qu'il laisse, s'il a un enfant. S'il n'a pas d'enfant et que ses père et mère héritent de lui, à sa mère alors le tiers. Mais s'il a des frères, à la mère alors le sixième, après exécution du testament qu'il aurait fait ou paiement d'une dette. De vos ascendants ou descendants, vous ne savez pas qui est plus près de vous en utilité. Ceci est un ordre obligatoire de la part d'Allah, car Allah est, certes, Omniscient et Sage.

Et à vous la moitié de ce que laissent vos épouses, si elles n'ont pas d'enfants. Si elles ont un enfant, alors à vous le quart de ce qu'elles laissent, après exécution du testament qu'elles auraient fait ou paiement d'une dette. Et à elles un quart de ce que vous laissez, si vous n'avez pas d'enfant. Mais si vous avez un enfant, à elles alors le huitième de ce que vous laissez après exécution du testament que vous auriez fait ou paiement d'une dette. Et si un homme, ou une femme meurt sans héritier direct, cependant qu'il laisse un frère ou une sœur, à chacun de ceux-ci alors, un sixième. S'ils sont plus de deux, tous alors participeront au tiers, après exécution du testament ou paiement d'une dette, sans préjudice à quiconque. (Telle est l') Injonction d'Allah ! Et Allah est Omniscient et Indulgent.

Imaginons le cas particulier mais simple où nous sommes un homme, qui a une femme, deux filles, un père et une mère. Nous n'avons ni soeurs, ni frères. Imaginons malheureusement que nous décédé dans un accident de voiture et que nous avons laissé $1'000$ EUR en héritage. Appliquons donc les règles ci-dessus :

1. En accord avec le verset 4:12, notre femme recevra $1/8$ de nos $1'000$ EUR. Dès lors : $(1/8) \cdot 1,000 = 125$ EUR.
2. En accord avec le verset 4:11, nos 2 filles recevront $2/3$. Dès lors : $(2/3) \cdot 1000 = 666.\bar{6}$ EUR.
3. En accord avec le verset 4:11, notre père recevra $1/6$. Dès lors : $(1/6) \cdot 1000 = 166.\bar{6}$ EUR.
4. En accord avec le verset 4:11, notre mère recevra $1/6$. Dès lors : $(1/6) \cdot 1000 = 166.\bar{6}$ EUR.

Donc un total de :

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot 1000 = 125+666.\bar{6}+166.\bar{6}+166.\bar{6} = \frac{27}{24}\cdot 1000 = 1125$$

Donc une fraction de $27/24 > 1$ du montant initial (l'argent a été créé à partir de rien). Échec retentissant...

Si nous avons :

$$D : d = D \cdot \frac{1}{d} = D \cdot i_D \quad (5.3.88)$$

nous notons i_D l'inverse du dividende. A tout nombre est associé un inverse qui satisfait cette condition.

De cette définition il vient la notation (avec x étant un nombre quelconque différent de zéro) :

$$\frac{x}{x} = x^1 \cdot x^{-1} = x^{1-1} = x^0 = 1 \quad (5.3.89)$$

Dans le cas de deux nombres fractionnaires, nous disons qu'ils sont "inverses" ou "réciproques", lorsque leur produit est égal à l'unité (comme la relation précédente).

Remarques

R1. Une division par zéro est ce que nous nommons une "singularité". C'est-à-dire que le résultat de la division est indéterminé. Mais en analyse, on peut essayer de donner un sens à la limite de la fonction inverse en 0, c'est-à-dire du quotient $1/x$ lorsque x tend vers zéro.

R2. Lorsque nous multiplions le dividende et le diviseur d'une division (fraction) par un même nombre, le quotient ne change pas (il s'agit d'une "fraction équivalente"), mais le reste est multiplié par ce nombre !

R3. Diviser un nombre par un produit effectué de plusieurs facteurs revient à diviser ce nombre successivement par chacun des facteurs du produit et réciproquement.

R4. Les fractions supérieures à 0 mais inférieures à 1 sont parfois nommées "fractions propres". Dans les fractions propres, le numérateur est inférieur au dénominateur. Lorsqu'une fraction a un numérateur supérieur ou égal au dénominateur, la fraction est une "fraction impropre". Une fraction impropre est toujours égale ou supérieure à 1. Et, enfin, un "nombre mixte" est la combinaison d'un nombre entier et d'une fraction propre.

Les propriétés des divisions avec les notations condensées de puissances (exponentiation) sont les suivantes (nous laisserons le soin au lecteur de le vérifier avec des valeurs numériques) :

$$\frac{x \cdot x \cdot x}{y \cdot y} = x^3 \cdot y^{-2} \quad (5.3.90)$$

ou un autre exemple trivial :

$$\frac{x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot x = 1 \cdot 1 \cdot x = x^3 \cdot x^{-2} = x^1 = x \quad (5.3.91)$$

Nous en déduisons donc :

$$\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q} \quad (5.3.92)$$

Rappelons qu'un nombre premier (entier relatif) est un nombre qui n'a d'autres diviseurs que lui-même et l'unité (rappelons que 1 n'est pas un nombre premier !). Donc tout nombre qui

n'est pas premier a au moins un nombre premier comme diviseur (excepté 1 par définition !). Le plus petit des diviseurs d'un nombre entier est donc un nombre premier (nous détaillerons les propriétés des nombres premiers relativement au sujet de la division dans la section de Théorie des Nombres 218).

Voyons quelques propriétés de la division (certaines nous sont déjà connues car elles découlent d'un raisonnement logique des propriétés de la multiplication) :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c & \dfrac{a\cdot d}{b\cdot d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot 1=\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{a}{-b}=\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b} & \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b} \\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} & \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d} \\ \dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c} & \dfrac{a}{b}b=a \end{array} \tag{5.3.93}$$

où :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc \tag{5.3.94}$$

est ce que nous appelons une "amplification des termes" et :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \tag{5.3.95}$$

est une opération consistant à tout mettre avec un "démoninateur commun".

Nous avons aussi les propriétés suivantes :

P1. La division de plusieurs nombres dépend de l'ordre des termes. Nous disons alors que la division est une "opération non-commutative". Ce qui signifie que nous avons quand a est différent de b :

$$\frac{a}{b}\neq\frac{b}{a} \tag{5.3.96}$$

P2. Le résultat de la division de plusieurs nombres change si nous remplaçons deux ou plusieurs d'entre eux par leur résultat intermédiaire. Nous disons alors que la division est "opération non-associative" :

$$\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c}\neq\frac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)} \tag{5.3.97}$$

P3. L'unité est l'élément neutre à droite de la division car tout dividende divisé par le diviseur 1 est égal au dividende mais l'unité n'est par contre pas neutre à gauche :

$$\frac{a}{b}=\frac{1\cdot a}{b}=\frac{a}{1\cdot b}=1\cdot\frac{a}{b} \tag{5.3.98}$$

En cours de traduction de l' anglais

P4. La division peut comporter un diviseur de telle façon à ce que la division soit égale à l'unité (l'élément neutre 1). Nous disons alors qu'il existe un "symétrique pour la division" qui est trivialement quand le diviseur est égal au numérateur (dividende) lui-même !

P5. L'incrémentation du numérateur et du dénominateur d'une valeur constante n'est pas égale au rapport initial dans le cas général où $a \neq b$:

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a + c^{te}}{b + c^{te}} \tag{5.3.99}$$

Maintenant que nous connaissons la multiplication (et donc la notation de puissance) et la division, si nous considérons que a et b sont deux nombres réels positifs, différents de zéro (ie $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$), nous avons :

$$a^p a^q = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{p\text{-times}} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{q\text{-times}} = a^{p+q} \tag{5.3.100}$$

et (nommé parfois la "règle des exposants zéro") :

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{\underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{p\text{-fois}}}{\underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{q\text{-fois}}} = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{p-q\text{-fois}} = a^{p-q} \Rightarrow a^{-q} = \frac{1}{a^q} \tag{5.3.101}$$

et :

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p \Leftrightarrow \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \tag{5.3.102}$$

Nous avons aussi trivialement :

$$\frac{a^n}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{-fois}}}{\underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{-fois}}} = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n-n\text{-fois}} = a^0 = 1 \tag{5.3.103}$$

Ainsi que :

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{-fois}} \cdot \ldots \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{-fois}}}_{m\text{ -fois}} = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{mn\text{-fois}} = a^{mn} \tag{5.3.104}$$

En cours de traduction de l' anglais

5.3.2.5 Racine n-ème

Maintenant que nous avons introduit de manière simple et pas trop formelle les opérations de multiplication (et de notation de puissance) et de division, nous pouvons introduire le concept de racine n-ème.

Comme nous savons par exemple que :

$$(2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = 2^3 2^2 = 2^{3+2}$$

nous pouvons alors par inférence aussi écrire :

$$2^1 = 2^{0.5+0.5} = 2^{0.5}2^{0.5} = 2^{1/2}2^{1/2} \tag{5.3.105}$$

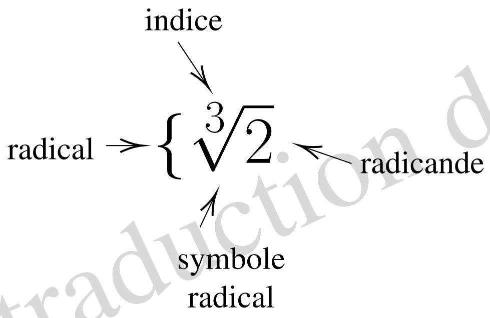
et donc cela signifie que la racine fractionnaire d'un nombre existe ! Ce ce que nous appelons la racine n-ème (donc dans l'exemple ci-dessus on parlera de racine 2-ème mais plus couramment de "racine carrée").

Nous pouvons maintenant définir la racine n-ème principale de n'importe quel nombre !

Définition (#5.3.60) : En mathématiques, la "racine n-ème" d'un nombre a, où n est un entier positif, est un nombre r qui, lorsqu'il est élevé à la puissance n, donne x. C'est-à-dire tel que : $r^n = x$, où n est le degré de la racine. Par convention nous écrivons :

$$\boxed{r = x^{1/n} := \sqrt[n]{x}} \tag{5.3.106}$$

Les racines sont habituellement notées en utilisant le symbole du "radical" qui est $\sqrt[n]{\ldots}$. Le nombre $n \in \mathbb{N}^*$ est appelé le "radicande" ou très rarement appelé "indice".



En cours de traduction de l' anglais

De ce qui a déjà été dit pour les puissances, nous pouvons conclure aisément que la racine n-ème d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des racines n-ème de chacun des facteurs :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{5.3.107}$$

et (comme vu précédemment) :

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} = (a^q)^p \tag{5.3.108}$$

Et dès lors :

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p \quad \text{et} \quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} \tag{5.3.109}$$

Il en ressort que :

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \sqrt[n]{a}}_{n\text{-times}} = n \tag{5.3.110}$$

Nous avons aussi si $a < 0$:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \tag{5.3.111}$$

si $n \in \mathbb{N}^*$ est impair et :

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \tag{5.3.112}$$

si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair.

Si $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, alors :

$$y = a^{1/n} = \sqrt[n]{x} \tag{5.3.113}$$

est le nombre réel négatif y tel que :

$$b^n = x \tag{5.3.114}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair alors bien sûr, comme nous l'avons déjà vu, la racine est complexe (voir section Nombres page 242).

Si le dénominateur d'un quotient contient un facteur de la forme $\sqrt[n]{a^k}$ avec $a \neq 0$, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt[n]{a^{n-}}$, nous supprimerons la racine au dénominateur, puisque :

$$\frac{x}{\sqrt[n]{a^k}}\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k}\sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k a^{n-k}}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{k+n-k}}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-k}}}{|a|} \tag{5.3.115}$$

✍**Exemple :**

Voyons un exemple mondialement connu de l'application de la racine qui concerne l'origine des formats papier A6, A5, A4, A3, A2, A1, A0 etc. Ce format a au fait la propriété (c'est un objectif à l'origine) de conserver ses proportions lorsque nous plions ou coupons la feuille en deux dans sa grande dimension. Ainsi, si nous notons L la longueur et W la largeur de la feuille, nous avons :

$$\frac{L}{W} = \frac{W}{\dfrac{L}{2}} \Rightarrow L^2 = 2l^2 \tag{5.3.116}$$

Il en ressort que :

$$L = \sqrt{2}W \tag{5.3.117}$$

Comme le format A0 à par définition une superficie de $1\ [\text{m}^2]$. Pour ce format nous avons alors :

$$LW = 1\ [\text{m}^2] \tag{5.3.118}$$

Nous en déduisons donc :

$$LW = \sqrt{2}W^2 = \frac{L^2}{\sqrt{2}} = 1\ [\text{m}^2] \tag{5.3.119}$$

et donc :

$$W = 2^{-1/4} \cdot 1\ [m] \cong 84.1\ [\text{cm}] \tag{5.3.120}$$

d'où nous tirons aussi :

$$L = 2^{-1/4} \cdot 1 \; [m] \cong 118.9 \; [\text{cm}] \qquad (5.3.121)$$

Les autres formats de déduisant donc pour rappel en divisant par deux la feuille dans sa grande dimension.

En cours de traduction de l' anglais

5.3.3 Polynômes Arithmétiques

Définition (#5.3.61) : Un "polynôme arithmétique" (à ne pas confondre avec les polynômes algébriques qui seront étudiés dans la section d'Algèbre page 1351) est un ensemble de nombres séparés les uns des autres par les opérations d'addition ou de soustraction ($+$ ou $-$).

Les composants enfermés dans le polynôme sont appelés "termes" du polynôme. Lorsque le polynôme contient un unique terme, nous parlons alors de "monôme", s'il y a deux termes nous parlons de "binôme", et ainsi de suite...

Théorème 5.11. La valeur d'un polynôme arithmétique est égale à l'excès de la somme des termes précédés du signe $+$ sur la somme des termes précédés du signe $-$.

Démonstration 5.11.1.

$$\begin{aligned}n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 + \ldots - n_{i-1} + n_i = \\ (n_1 + n_3 + n_5 + \ldots + n_i) \\ + (-1)(n_2 + n_4 + n_6 + \ldots + n_{i-1})\end{aligned} \tag{5.3.122}$$

quelles que soient les valeurs des termes.

■ Q.E.D.

Mettre en évidence l'unité négative -1 est ce que nous appelons une "factorisation" ou "mise en facteurs". L'opération inverse, s'appelant une "distribution" ou "development".

Le produit de plusieurs polynômes peut toujours être remplacé par un polynôme unique que nous appelons le "produit effectué". Nous opérons habituellement comme suit : nous multiplions successivement tous les termes du premier polynôme, en commençant par la gauche, par le premier, le second, ..., le dernier terme du second polynôme. Nous obtenons ainsi un premier produit partiel. Nous faisons, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables. Nous multiplions ensuite chacun des termes du produit partiel successivement par le premier, le second, ..., le dernier terme du troisième polynôme en commençant par la gauche et ainsi de suite.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

$$\begin{aligned}P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 &= (a+b+c)(d+e+f)(g+h+i) \\ &= a(d+e+f)(g+h+f) + b(d+e+f)(g+h+i) \\ &+ c(d+e+f)(g+h+i) \\ &= ad(g+h+i) + ae(g+h+i) + af(g+h+i) + bd(g+h+i) \\ &+ be(g+h+i) + bf(g+h+i) + cd(g+h+i) + ce(g+h+i) \\ &+ cf(g+h+i) \\ &= adg + adh + adi + aeg + aeh + aei + afg + afh + afi + bdg + bdh \\ &+ bdi + beg + beh + bei + bfg + bfh + bfi + cdg + cdh + cdi + ceg + ceh \\ &+ cei + cfg + cfh + cfi\end{aligned} \tag{5.3.123}$$

Le produit des polynômes P_1, P_2, P_3, ..., P_k, ... est la somme de tous les produits de n_i facteurs formés avec un terme de P_i, un terme de P_2, ..., et un terme de P_k et ainsi de suite. S'il n'y a aucune réduction, le nombre de termes du produit est alors égal au produit des nombres de termes des facteurs tel que le nombre final de termes soit égal à :

$$n = \prod_{i=1}^{n} n_i \quad (5.3.124)$$

5.3.4 Valeur absolue

Définition (#5.3.62) : En mathématiques, le "valeur absolue" $|x|$ d'un nombre réel x est la valeur non négative de x sans tenir compte de son signe. À savoir, $|x| = x$ pour un nombre positif x, $|x| = -x$ pour un nombre x négatif (auquel cas $-x$ est positif) et $|0| = 0$. Par exemple, la valeur absolue de 3 est de -3 et la valeur absolue de -3 est également de 3. La valeur absolue d'un nombre peut être considérée comme sa distance à zéro.

En cours de traduction anglais

Remarques

R1. Le terme "valeur absolue" est utilisé dans ce sens depuis au moins 1806. La notation $|x|$, avec une barre verticale de chaque côté, semble avoir été introduit par Karl Weierstrass en 1841.

R2. Pour les tracés relatifs à la valeur absolue, le lecteur est invité à se reporter à la section Analyse fonctionnelle de ce livre (page 2191).

Pour tout nombre réel x, la "valeur absolue" de x, notée $|x|$ est donc donnée par :

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (5.3.125)$$

A l'origine, la valeur absolue aurait était définie comme suit :

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad (5.3.126)$$

Nous remarquons aussi la notation possible suivante qui est mathématiquement équivalente :

$$|x| = \max(-x, x) \quad (5.3.127)$$

Et les expressions d'équivalences :

$$x \leqslant |x| \quad (5.3.128)$$
$$|-x| = |x| \quad (5.3.129)$$

ainsi que :

$$|x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y \quad (5.3.130)$$
$$|x| \geqslant y \Leftrightarrow x \leqslant -y \vee x \geqslant y \quad (5.3.131)$$

ces dernières étant souvent utilisées dans le cadre de la résolution des inéquations que nous verrons plus tard en détails.

✍**Exemple :**

Résoudre l'inégalité suivante telle que :

$$|x-3| \leq 9 \tag{5.3.132}$$

est alors résolue simplement en utilisant le concept intuitif de distance. La solution est l'ensemble des nombres réels dont la distance par rapport au nombre réel 3 est inférieure ou égale à 9. Ceci est la plage de valeurs de centre 3 et de rayon 9 ou formellement :

$$[3-9, 3+9] = [-6, 12] \tag{5.3.133}$$

Indiquons qu'il est aussi utile d'interpréter l'expression :

$$|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} \tag{5.3.134}$$

comme la distance entre les deux nombres x et y sur la droite réelle. Ainsi, en munissant l'ensemble des nombres réels de la distance valeur absolue, il devient un espace métrique (voir la section de Topologie page 2431 pour une définition assez rigoureuse du concept de distance) ! !

En cours de traduction de l'anglais

La valeur absolue a quatre propriétés fondamentales que nous énoncerons sans démonstrations :

P1. Non-negativité :

$$|x| \geq 0 \tag{5.3.135}$$

P2. Positif défini :

$$|x| = 0 \iff x = 0 \tag{5.3.136}$$

P3. La valeur absolue du produit (multiplication) est égale au produit des valeurs absolues :

$$|xy| = |x||y| \tag{5.3.137}$$

P4. La valeur absolue de la somme algébrique de plusieurs nombres réels est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues des composantes de la somme :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{5.3.138}$$

ce que les mathématiciens appellent parfois la "première inégalité triangulaire". Cela peut être démontré facilement en un seul jet :

$$\begin{gathered}
|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \geq a^2 + b^2 + 2ab \\
(|a| + |b|)^2 \geq (a+b)^2 \quad (\because \forall x \in \mathbb{R}; x^2 = |x|^2) \\
||a| + |b|| \geq |a+b| \\
\therefore |a| + |b| \geq |a+b|
\end{gathered} \tag{5.3.139}$$

Les autres propriétés importantes de la valeur absolue incluent :

P5. L'idempotence (la valeur absolue de la valeur absolue est la valeur absolue) :

$$|(|x|)| = |x| \tag{5.3.140}$$

P6. Parité (symétrie réflexive de la fonction) :

$$|-x| = |x| \tag{5.3.141}$$

P7. Préservation de la division (équivalent à la propriété P3) si $y \neq 0$:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \tag{5.3.142}$$

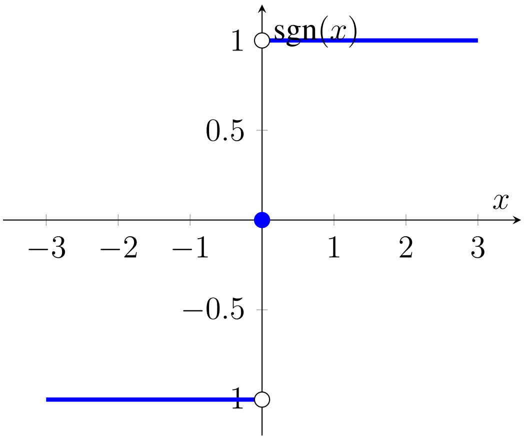
P8. La valeur absolue de la différence est supérieure ou égale à la valeur absolue de la différence des valeurs absolues des composantes de la différence :

$$|x-y| \geq ||x|-|y|| \tag{5.3.143}$$

ce que les mathématiciens appellent parfois la "deuxième inégalité triangulaire".

La fonction valeur absolue est fortement liée à d'autres fonctions que nous utiliserons assez souvent dans différentes sections de ce livre. Un exemple important bien connu est la "fonction signum" ou fonction signe" qui est une fonction mathématique étrange mais à la fois simple qui extrait le signe d'un réel nombre et défini par :

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{5.3.144}$$



Alternativement (la fonction signum est donc la dérivée de la fonction valeur absolue, à l'indétermination de zéro près) :

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|, \quad x \neq 0 \tag{5.3.145}$$

Tout nombre réel peut être exprimé comme le produit de sa valeur absolue et de sa fonction de signe :

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x| \tag{5.3.146}$$

En cours de traduction de l'anglais

5.3.5 Règles de Calcul (priorité des opérateurs)

Fréquemment en informatique (dans le développement de code en particulier), nous parlons de "priorité des opérateurs". En mathématiques nous parlons plutôt de "priorité des ensembles d'opérations et des règles des signes". De quoi s'agit-il exactement ?

Nous avons déjà vu quelles étaient les propriétés des opérations d'addition, soustraction, multiplication, mise en puissance et division. Nous tenons donc à ce que le lecteur différencie la notion de "propriété" de celle de "priorité" (que nous allons tout de suite voir) qui sont deux notions complètement différentes !

En mathématiques, en particulier, nous définissons d'abord les priorités des symboles $\{[()]\}$:

1. Les opérations qui sont entre parenthèses $()$ doivent être effectuées en premier dans le polynôme.
2. Les opérations qui sont entre crochets $[]$ doivent être effectuées en second à partir des résultats obtenus des opérations qui se trouvaient entre les parenthèses $()$.
3. Finalement, à partir des résultats intermédiaires des opérations qui se trouvaient entre parenthèses $()$ et crochets $[]$, nous calculons les opérations qui se situent entre les accolades $\{\}$.

Faisons un exemple, ce sera plus éloquent.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Soit à calculer le polynôme arithmétique :

$$\{[5 \cdot (8+2) + 3 \cdot [4 + (8+6) \cdot 2]] \cdot (1+9)\} \cdot 7 + 1 \tag{5.3.147}$$

Selon les règles que nous avons définies tout à l'heure, nous calculons d'abord tous les éléments qui sont entre parenthèses $()$, c'est-à-dire :

$$8+2=10 \quad (8+6)=14 \quad (1+9)=10 \tag{5.3.148}$$

ce qui nous donne :

$$\{[5 \cdot 10 + 3 \cdot [4 + 14 \cdot 2]] \cdot 10\} \cdot 7 + 1 \tag{5.3.149}$$

Toujours selon le règles que nous avons définies tout à l'heure, nous calculons maintenant tous les éléments entre crochets en commençant toujours à calculer les termes qui sont dans les crochets $[\,]$ au plus bas niveau des autres crochets $[\,]$. Ainsi, nous commençons par calculer l'expression $[4 + 14 \cdot 2]$ qui se trouve dans le crochet de niveau supérieur : $[5 \cdot 10 + 3 \cdot \ldots]$.

Cela nous donne $[4 + 14 \cdot 2] = 32$ et donc :

$$\{[5 \cdot 10 + 3 \cdot 32] \cdot 10\} \cdot 7 + 1 \tag{5.3.150}$$

En cours de traduction Opera Magistris

Il nous reste à calculer maintenant $[5 \cdot 10 + 3 \cdot 32] = 146$ et donc :

$$\{146 \cdot 10\} \cdot 7 + 1 \quad (5.3.151)$$

Nous calculons maintenant l'unique terme entre accolades, ce qui nous donne :

$$\{146 \cdot 10\} = 1460 \quad (5.3.152)$$

Finalement il nous reste :

$$1460 \cdot 7 + 1 = 10221 \quad (5.3.153)$$

évidemment il s'agit d'un cas particulier... Mais le principe est toujours le même.

La priorité des opérateurs arithmétiques est une notion spécifique aux langages informatiques (comme nous en avons déjà fait mention) du fait qu'on ne peut dans ces derniers écrire des relations mathématiques que sur une ligne unique.

Ainsi, en informatique l'expression :

$$\frac{-a \cdot (b+c)^d}{e^f} - g \quad (5.3.154)$$

s'écrit (à peu de choses près dans la majorité des languages de programmation) :

$$-a * (b+c)\hat{}d/e\hat{}f - g \quad (5.3.155)$$

Un non-initié pourrait lire cette dernière expression de multiples façons :

$$\frac{-a \cdot (b+c)^d}{e^f} - g; \quad \frac{[-a \cdot (b+c)]^d}{e^f} - g; \quad \left\{\frac{-a \cdot (b+c)^d}{e}\right\}^f - g; \quad [-a \cdot (b+c)]^{\frac{d}{e^f}} - g \quad (5.3.156)$$

ce qui vous en conviendrez, est fort dangereux car nous arriverons à des résultats différents à chaque fois (cas particuliers mis à part...) !

Ainsi, il a logiquement été défini un ordre de priorité des opérandes tel que les opérations soient effectuées dans l'ordre suivant :

1. $-$ Négation
2. ˆ Puissance (exponentiation)
3. $*$ Multiplication et $/$ division[15]
4. $\backslash$ Division entière (spécifique à l'informatique)
5. mod Modulo (voir la section de Théorie des Nombres page 353)
6. $+, -$ Addition et soustraction

[15]La revue *Physical Review*, par exemple, précise que la multiplication est prioritaire à la division dans ses règles de publication !

En cours de traduction de l' anglais

évidemment les règles des parenthèses (), crochets [], et accolades {} qui ont été définies en mathématiques s'appliquent à l'informatique.

Ainsi, nous obtenons dans l'ordre (nous remplaçons chaque opération effectuée par un symbole) :

D'abord les termes entre parenthèses :

$$-a * (b + c)\hat{}d/e\hat{}f - g = -a * \alpha\hat{}d/e\hat{}f - g \quad (5.3.157)$$

Ensuite les règles de priorité des opérateurs s'appliquent dans l'ordre défini précédemment :

1. D'abord la négation (rège 1) :

$$-a * \alpha\hat{}d/e\hat{}f - g = \beta * \alpha\hat{}d/e\hat{}f - g \quad (5.3.158)$$

2. Ensuite la puissance (règle 2) :

$$\beta * \alpha\hat{}d/e\hat{}f - g = \beta * \chi/\delta - g \quad (5.3.159)$$

3. Nous appliquons la multiplication (règle 3) :

$$\beta * \chi/\delta - g = \varepsilon/\delta - g \quad (5.3.160)$$

4. Nous appliquons la division (règle 3 encore) :

$$\varepsilon/\delta - g = \phi - g \quad (5.3.161)$$

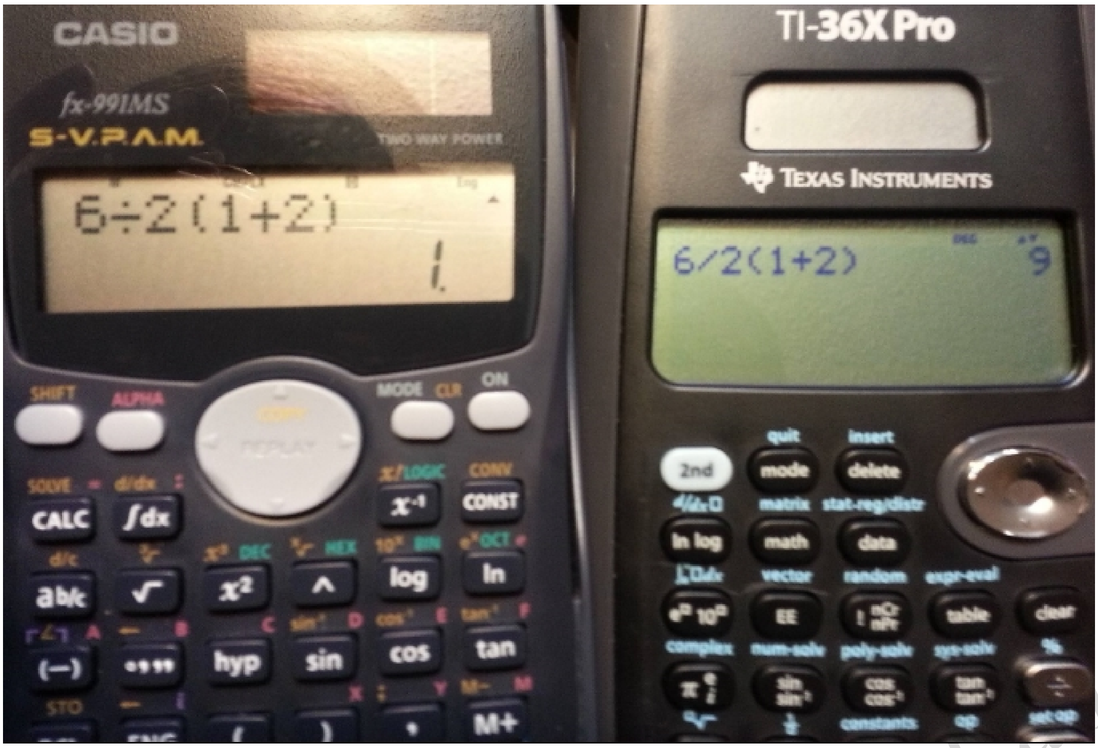
   Les règles (4) et (5) ne s'appliquent pas à cet exemple particulier.

5. Et finalement (règle 6) :

$$\phi - g = \varphi \quad (5.3.162)$$

Ainsi, en suivant ces règles, ni l'ordinateur, ni l'être humain ne peuvent (ne devraient) se tromper lors de l'interprétation d'une équation écrite sur une ligne unique (d'où l'importance d'avoir des normes ISO dans l'industrie) :

En cours de traduction de l'anglais



Remarque

Des mnémoniques sont souvent utilisés pour aider les élèves du primaire et sconedaire à se rappeler les règles les plus élémentaires. Aux états-Unis, l'acronyme "PEMDAS" est courant. Il représente respectivement les Parenthèses, les Exposants, la Multiplication, la Division, l'Addition et enfin la Soustraction. Le Canada et la Nouvelle-Zélande utilisent PEDMAS, acronyme de Parenthèses, Exposants, Division, Multiplication, Addition, Soustraction. Les plus courantes au Royaume-Uni, en Inde et en Australie sont PODMAS, qui est respectivement l'acronyme de Parenthèses, Ordre, Division, Addition et enfin Soustraction. Le Nigeria et certains autres pays d'Afrique de l'Ouest utilisent PIDMAS, etc.

En informatique, il existe cependant plusieurs opérateurs que nous ne retrouvons pas en mathématiques et qui changent souvent de propriétés d'un langage informatique à un autre. Nous ne nous attarderons pas trop là-dessus cependant, nous avons mis ci-dessous un petit descriptif :

- L'opérateur de concaténation "&" est évalué avant les opérateurs de comparaisons
- Les opérateurs de comparaison ($=, <, >, \ldots$) possèdent tous une priorité identique

Cependant, les opérateurs les plus à gauche dans une expression, détiennent une priorité plus élevée.

Les opérateurs logiques (notés en anglais quelle que soit la langue de travail dans la très grande majorité des cas) sont évalués dans l'ordre de priorité suivant :

1. Not ($\neg$)

2. And ($\wedge$)
3. Or ($\vee$)
4. Xor ($\oplus$)
5. Eqv ($\Leftrightarrow$)
6. Imp ($\Rightarrow$)

Maintenant que nous avons vu les priorités des opérateurs, quelles sont les règles des signes en vigueur en mathématiques ?

D'abord, il faut savoir que ces dernières ne s'appliquent que dans le cas de la multiplication et de la division. Soient deux nombres positifs $(+x)$, $(+y)$. Nous avons :

$$(+x)\cdot(+y)=(+x)\cdot(+y)=+(x\cdot y) \tag{5.3.163}$$

Autrement dit, la multiplication de deux nombres positifs est un nombre positif et ceci est généralisable à la multiplication de n nombres positifs.

Nous avons :

$$(-x)\cdot(+y)=(+x)\cdot(-y)=-(x\cdot y) \tag{5.3.164}$$

Autrement dit, la multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif est négative. Ce qui est généralisable à un résultat positif de la multiplication s'il y a un nombre pair de nombres négatifs et à un résultat négatif pour un nombre impair de nombres négatifs sur la totalité n des nombres de la multiplication.

Nous avons :

$$(-x)\cdot(-y)=(-x)\cdot(-y)=+(x\cdot y) \tag{5.3.165}$$

Autrement dit, la multiplication de deux nombres négatifs est positive. Ce qui est généralisable à un résultat positif de la multiplication s'il y a un nombre pair de nombre négatifs et à un résultat négatif pour un nombre impair de nombres négatifs.

Pour ce qui est des divisions, le raisonnement est identique :

$$\frac{(+x)}{(+y)}=+\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{(+y)}{(+x)}=+\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.3.166}$$

Autrement dit, si le numérateur et le dénominateur sont positifs, alors le résultat de la division sera positif.

Nous avons :

$$\frac{(+x)}{(-y)}=\frac{(-x)}{(+y)}=-\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{(-y)}{(+x)}=\frac{(+y)}{(-x)}=-\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.3.167}$$

Autrement dit, si soit le numérateur ou le dénominateur est négatif, alors le résultat de la division sera forcément négatif.

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons :

$$\frac{(-x)}{(-y)}=+\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{(-y)}{(-x)}=+\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.3.168}$$

Autrement dit, si le numérateur et le dénominateur sont positifs, alors le résultat de la division, sera forcément positif.

évidemment, si nous avons une soustraction de termes, il est possible de la réécrire sous la forme :

$$x-y=x+(-1)y=-1\cdot(-x+y) \tag{5.3.169}$$

~80 %

16 votes, 70.00%

En cours de traduction de l' anglais

5.4. Théorie des Nombres

Traditionnellement, la théorie des nombres est une branche des mathématiques qui s'occupe des propriétés des nombres entiers, qu'ils soient entiers naturels ou entiers relatifs. Plus généralement, le champ d'étude de cette théorie concerne une large classe de problèmes qui proviennent naturellement de l'étude des entiers. La théorie des nombres peut être divisée en plusieurs branches d'étude (théorie algébrique des nombres, théorie calculatoire des nombres, etc.) en fonction des méthodes utilisées et des questions traitées.

Remarque

Le terme "arithmétique" était aussi utilisé pour faire référence à la théorie des nombres mais c'est un terme assez ancien, qui n'est plus aussi populaire que par le passé.

Nous avons choisi de ne présenter dans cet exposé que les sujets qui sont indispensables à l'étude de la mathématique et de la physique théorique ainsi que ceux devant faire absolument partie de la culture générale de l'ingénieur (certains résultats ont aussi des applications en Biostatistiques !).

En cours de traduction de l'anglais

5.4.1 Principe du bon ordre

Nous tiendrons pour acquit ce principe qui dit que tout ensemble non vide $S \subset \mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

Nous pouvons utiliser ce théorème pour démontrer une propriété importante des nombres appelée " propriété archimédienne" ou "axiome d'Archimède" qui s'énonce ainsi :

Pour $\forall a, b \in \mathbb{N}$ où a est non nul, il existe au moins un entier positif n tel que :

$$n \cdot a \geqslant b \tag{5.4.1}$$

En d'autres termes, pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande. Nous appelons "archimédiennes" des structures dont les éléments vérifient une propriété comparable (voir section Théorie des Ensembles page 378).

Même si cela est trivial à comprendre dans le cas des nombres entiers faisons la démonstration car elle permet de voir le type de démarches utilisées par les mathématiciens quand ils doivent démontrer des éléments triviaux de ce genre...

Démonstration 5.11.2. Supposons le contraire en disant que pour $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$n \cdot a < b \tag{5.4.2}$$

Si nous démontrons que cela est absurde pour tout n alors nous aurons démontré la propriété archimédienne (et ce également si a, b sont réels).

Considérons alors l'ensemble :

$$S = \{b - na | n \in \mathbb{N}\} \tag{5.4.3}$$

En utilisant le principe du bon ordre, nous en déduisons qu'il existe $s_0 \in S$ tel que $s_0 \leq s$ pour tout $s \in S$. Posons donc que ce plus petit élément est :

$$s_0 = b - n_0 a \tag{5.4.4}$$

et nous avons donc aussi :

$$b - (n_0 + 1)a \in S \tag{5.4.5}$$

Comme par hypothèse $na \leq b$ nous devons alors avoir :

$$b - (n_0 + 1)a \geq b - n_0 a \tag{5.4.6}$$

et si nous réarrangeons et simplifions :

$$-(n_0 + 1) \geq -n_0 \tag{5.4.7}$$

et que nous simplifions le signe négatif nous devions donc avoir... :

$$n_0 + 1 \geq n_0 \tag{5.4.8}$$

d'où une contradiction évidente !

ette contradiction amène que l'hypothèse initiale comme quoi $na < b$ pour tout n alors est fausse et donc que la propriété archimédienne est démontrée par l'absurde.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

5.4.2 Principe d'induction

Soit S un ensemble de nombres naturels qui possède les deux propriétés suivantes :

P1. $1 \in S$

P2. So $k \in S$, alors $k + 1 \in S$

Alors :

$$S = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^* \tag{5.4.9}$$

Nous construisons ainsi l'ensemble des nombres naturels (se référer à la section de Théorie des Ensembles page 380 pour voir la construction rigoureuse de l'ensemble des nombres entiers avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel).

Théorème 5.12. Soit maintenant :

$$B = \mathbb{N}^* \setminus S \tag{5.4.10}$$

le symbole "\" signifiant "excluant". Nous voulons démontrer que :

$$B = \varnothing \tag{5.4.11}$$

A nouveau, même si cela est trivial à comprendre faisons la démonstration car elle permet de voir le type de démarches utilisées par les mathématiciens quand ils doivent démontrer des éléments triviaux de ce genre...

Démonstration 5.12.1. Supposons le contraire, c'est-à-dire :

$$B \neq \varnothing \tag{5.4.12}$$

Par le principe du bon ordre, puisque $B \subset \mathbb{N}$, B doit posséder un plus petit élément que nous noterons b_0.

Mais puisque $1 \in S$ de par (P1), nous avons que $b_0 > 1$ et bien évidemment aussi que $1 \in B$, c'est-à-dire aussi $b_0 - 1 \in S$. En faisant appel à (P2), nous avons finalement que $b_0 \in S$, c'est-à-dire que $b_0 \notin B$, donc une contradiction !

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Nous souhaitons montrer à l'aide du principe d'induction, que la somme des n premiers carrés est égale à $n(n+1)(2n+1)/6$, c'est-à-dire que pour $n \geq 1$ nous aurions (voir la section Suites Et Séries page 1646) :

$$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{5.4.13}$$

D'abord la relation ci-dessus est facilement vérifiée pour $n = 1$ nous allons montrer que equation vérifie aussi cette relation. En vertu de l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned} \tag{5.4.14}$$

nous retrouvons bien l'hypothèse de la validité de la première relation mais avec $n = k+1$, d'où le résultat.

Ce procédé de démonstration est donc d'une très grande importance dans l'étude de l'arithmétique ; souvent l'observation et l'induction ont permis de soupçonner des lois qu'il eût été plus difficile de trouver par a priori. Nous nous rendons compte de l'exactitude des formules par la méthode précédente qui a donné naissance à l'algèbre moderne par les études de Fermat et de Pascal sur le triangle de Pascal (voir la section d'Algèbre page 1347).

5.4.3 Divisibilité

Définition (#5.4.63) : Soit $A, B \in \mathbb{Z}$ avec $A \neq 0$. Nous disons que "A divise B (sans reste)" s'il existe un entier q (le quotient) tel que :

$$B = Aq \tag{5.4.15}$$

auquel cas nous écrivons pour ne pas confondre avec la division classique :

$$A|B \tag{5.4.16}$$

Sinon nous écrivons (si A ne divise pas B sans reste) :

$$A \nmid B \tag{5.4.17}$$

et nous disons donc que "A ne divise pas B".

Remarques

R1. Se rappeler que le symbole | est une relation alors que le symbole / est une opération !

R2. Il ne faut pas confondre l'expression "A divise B" qui signifie que le reste est obligatoirement nul et "A est le diviseur de la division de B" qui indique que le reste n'est pas forcément nul !

Par ailleurs, si $A|B$, nous dirons aussi que "B est divisible par A" ou "B est un multiple de A".

Dans le cas où $A|B$ et que $1 \geq A < B$, nous dirons que A est un "diviseur propre" de B.

De plus, il est clair que $A|0$ quel que soit $A \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sinon quoi nous avons une singularité.

Voici maintenant quelques théorèmes élémentaires se rattachant à la divisibilité :

Théorème 5.13. Si $A|B$, alors $A|BC$ quel que soit $C \in \mathbb{Z}$. Ou plus formellement :

$$\forall C \in \mathbb{Z} : \quad A|B \Rightarrow A|BC \tag{5.4.18}$$

Démonstration 5.13.1. Si $A|B$, alors il existe un entier q tel que :

$$B = Aq \tag{5.4.19}$$

Alors :

$$BC = (Aq)C = A(qC) \tag{5.4.20}$$

et finalement :

$$A|BC \tag{5.4.21}$$

■ Q.E.D.

En cours de traducti lais

Théorème 5.14. Si $A|B$ et $B|C$, alors $A|C$ ou plus formellement :

$$A|B \wedge A|B \Rightarrow A|C \tag{5.4.22}$$

Démonstration 5.14.1. Si $A|B$ et $B|C$ alors, il existe des entiers q et r tel que $B = Aq$ et $C = Br$. Plus formellement :

$$A|B \wedge B|C \rightarrow \exists(q, r) \in \mathbb{N} : \quad B = Aq \wedge C = Br \tag{5.4.23}$$

Dès lors :

$$C = A(qr) \tag{5.4.24}$$

et ainsi :

$$C = A|C \tag{5.4.25}$$

■ Q.E.D.

Théorème 5.15. Si $A|B$ et $A|C$ alors :

$$A|(Bx + Cy) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z} \tag{5.4.26}$$

Démonstration 5.15.1. Si $A|B$ et $A|C$ alors, il existe des entiers q et r tel que $B = Aq$ et $C = Ar$. Il en découle :

$$Bx + Cy = (Aq)x + (Ar)y = A(qx + ry) \tag{5.4.27}$$

et dès lors :

$$A|(Bx + Cy) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z} \tag{5.4.28}$$

■ Q.E.D.

Théorème 5.16. Si $A|B$ et $B|A$ alors :

$$A = \pm B \tag{5.4.29}$$

Démonstration 5.16.1. Si $A|B$ et $B|A$ alors, il existe des entiers q et r tel que $B = Aq$ et $A = Br$.

Nous avons alors

$$B = B(qr) \tag{5.4.30}$$

et donc $qr = 1$. C'est pourquoi nous pouvons avoir $q = \pm 1$ et $r = \pm 1$ et dès lors :

$$A = \pm B \tag{5.4.31}$$

■ Q.E.D.

Théorème 5.17. Si $A|B$ et $B \neq 0$ alors :

$$|A| \leq |B| \tag{5.4.32}$$

Démonstration 5.17.1. Si $A|B$ alors il existe un entier $q \neq 0$ tel que $B = Aq$. Mais alors :

$$|B| = |A||q| \geq |A| \tag{5.4.33}$$

puisque $|q| \geq 1$.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

5.4.3.1 Division Euclidienne

La division euclidienne est une opération qui, à deux entiers naturels appelés "dividende" et "diviseur", associe deux entiers appelés "quotient" et "reste". Initialement définie aux entiers naturels non nuls, elle se généralise aux entiers relatifs et aux polynômes, par exemple.

Définition (#5.4.64) : Nous appelons "division euclidienne" ou "division entière" de deux nombres A et B l'opération consistant à diviser B par A en s'arrêtant quand le reste devient strictement inférieur à A.

Rappelons (voir section Nombres page 218) que tout nombre qui admet exactement les deux diviseurs euclidiens (dont la division donne un reste nul) que sont 1 et le nombre lui-même est dit "nombre premier" (ce qui exclut le nombre 1 de la liste des nombres premiers) et que tout couple de nombres qui n'ont que 1 comme diviseur euclidien commun sont dits "premiers entre eux".

Théorème 5.18. Soient $A, B \in \mathbb{Z}$ avec $A > 0$. Le "théorème de la division euclidienne" affirme qu'il existe des entiers uniques q et r tels que :

$$B = Aq + r \Leftrightarrow r = B - Aq \tag{5.4.34}$$

où $0 \leq r < A$. De plus, si $A \nmid B$, alors $0 < r < A$.

✍**Exemple :**

Nous avons un gâteau avec 9 parts (B), nous devons le diviser entre 4 personne (A) avec une part restante ($r = 1$) tel que $q = 2$:

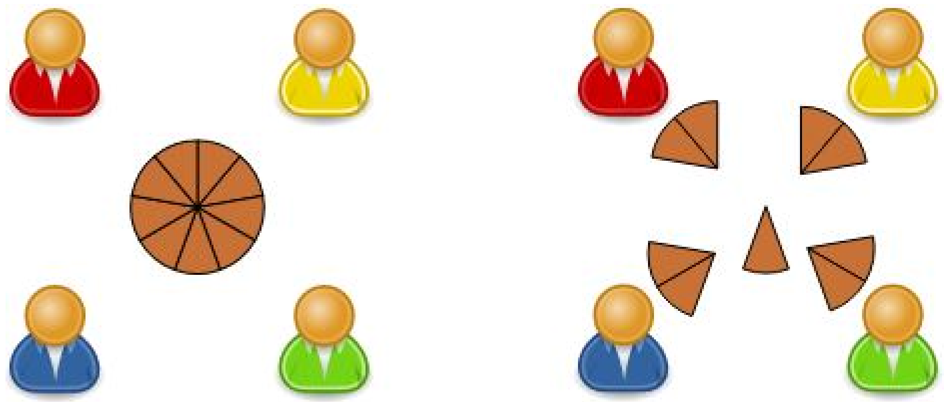


FIG. 5.40 – Le gâteau a 9 parts, donc chacune des 4 personnes recevra 2 parts et il en restera 1.

et dès lors :

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \tag{5.4.35}$$

Démonstration 5.18.1. Considérons l'ensemble :

$$S = \{r = B - qA | q, B \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{Z}^*, B - qA \geq 0\} \tag{5.4.36}$$

Il est relativement facile de voir que $S \subset \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ et que $S \neq \varnothing$, d'où, d'après le principe du bon ordre, nous concluons que S contient un plus petit élément $r \geq 0$.

Soit q l'entier satisfaisant donc à :

$$r = B - Aq \tag{5.4.37}$$

Nous voulons d'abord montrer que $r < A$ en supposant le contraire (démonstration par l'absurde), c'est-à-dire que $r \geq A$. Alors, dans ce cas, nous avons :

$$B - qA = r \geq A \tag{5.4.38}$$

ce qui est équivalent à :

$$B - (q+1)A = r - A \geq 0 \tag{5.4.39}$$

mais $B - (q+1)A \in S$ et :

$$B - (q+1)A < B - qA \tag{5.4.40}$$

ce qui contredit le fait que :

$$r = B - qA \tag{5.4.41}$$

est le plus petit élément de S. Donc, $r < A$. Enfin, il est clair que si $r = 0$, nous avons $A|B$, d'où la seconde affirmation du théorème.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Dans l'énoncé de la division euclidienne, nous avons supposé que $A > 0$. Qu'obtenons-nous lorsque $A < 0$? Dans cette situation, $-A$ est positif, et alors nous pouvons appliquer la division euclidienne à B et $-A$. Par conséquent, il existe des entiers q et r tels que :

$$B = q(-A) + r \tag{5.4.42}$$

où $0 \geq r < |A|$. Or, cette relation peut s'écrire :

$$B = -q(A) + R \tag{5.4.43}$$

où bien sûr, $-q$ est un entier. La conclusion est que la division euclidienne peut s'énoncer sous une forme plus générale !

Soient $A, B \in \mathbb{Z}$, alors il existe des entiers q et r tels que :

$$B = Aq + r \tag{5.4.44}$$

où $0 \geq r < |A|$. De plus, si $A \nmid B$, alors $0 < r < |A|$

Les entiers q et r sont uniques dans la division euclidienne. En effet, s'il existe deux autres entiers q' et r' tels que :

$$B = Aq' + r' \tag{5.4.45}$$

avec toujours $0 \leq r' < A$, alors :

$$A(q' - q) = r - r' \tag{5.4.46}$$

et ainsi :

$$A|(r - r') \tag{5.4.47}$$

En vertu du théorème précédent nous avons si $r - r' \neq 0$ que $|r - r'| \geq A$.

Or, cette dernière inégalité est impossible puisque par construction $-A < r - r'$. Donc $r = r'$ et puisque $A \neq 0$, alors $q' = q$ d'où l'unicité.

En mathématiques et plus précisément en Algèbre Ensembliste, dans le contexte de la théorie des anneaux, un anneau est appelé "anneau euclidien" s'il est possible d'y définir une division euclidienne. Les entiers relatifs forment l'anneau euclidien le plus simple. Cet ensemble vérifie la propriété suivante :

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \forall b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \exists q, r \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad a = bq + r \quad \text{et} \quad |r| < |b| \tag{5.4.48}$$

Le lecteur doit se rappeler que les nombres naturels avec addition et multiplication comme opérations ne forment pas un anneau ou un corps. Ils ne forment pas un anneau car l'addition n'a pas d'inverse dans les nombres naturels, ce qui est une propriété requise pour un anneau. D'où le fait que le plus petit anneau euclidien est celui constitué d'entiers relatifs !

En cours de traduction de l'anglais

5.4.3.1.1 Plus grand commun diviseur

Le "plus grand commun diviseur" (gpcd) (également appelé "plus grand facteur commun" (gcf), "plus grande mesure commune" (gcm)) de deux ou plusieurs entiers, quand au moins l'un d'entre eux n'est pas nul, est le plus grand entier positif qui divise les nombres sans un reste.

Définition (#5.4.65) : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ab \neq 0$. Le "plus grand commun diviseur" (gpcd) de a et b, noté :

$$(a, b) \tag{5.4.49}$$

est l'entier naturel d non nul qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

P1. $d|a$ et $d|b$ (donc sans reste r dans la division !)

P2. Si $c|a$ et $c|b$ alors $c \leq d$ et $c|d$ (par définition !)

Notons que 1 est toujours un diviseur commun de deux entiers arbitraires.

✍**Exemple :**

Considérons les entiers positifs 36 et 54. Un diviseur commun de 36 et 54 est un entier positif qui divise 36, et aussi 54. Par exemple, 1 et 2 sont des diviseurs communs de 36 et 54.

$$\begin{aligned}\text{Div}_{36} &= \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}\\ \text{Div}_{54} &= \{1,2,3,6,9,18,27,54\}\end{aligned} \tag{5.4.50}$$

Nous avons alors l'intersection représentée par le diagramme de Venn suivant (voir section Théorie des Ensembles page 376) :

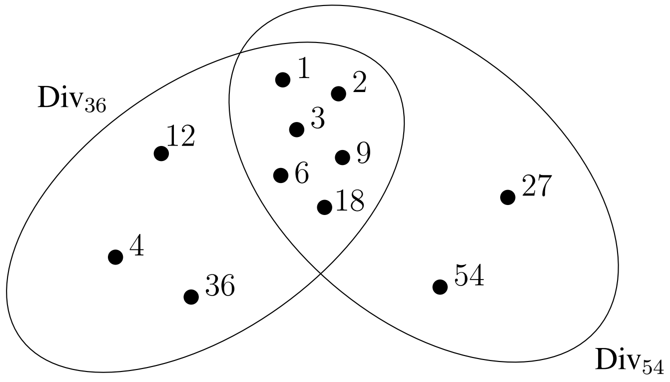


FIG. 5.41 – **Diagramme de Venn des diviseurs communs**

avec l'ensemble des diviseurs communs suivant :

$$\text{Div}_{36} \cap \text{Div}_{54} = \{1,2,3,6,9,18\} \tag{5.4.51}$$

et donc le PGCD est :

$$\max\{1,2,3,6,9,18\} = 18 \tag{5.4.52}$$

et nous constatons que l'ensemble des diviseurs communs de 36 et 54 est aussi l'ensemble des diviseurs de 18.

Cependant, il n'est pas forcément évident que le PGCD autre qu'unitaire (c'est-à-dire différent 1) de deux entiers a et b qui ne sont pas premiers entre eux existe toujours. Ce fait est démontré dans le théorème suivant (cependant, si le PGCD existe, il est de par sa définition unique !) dit "théorème de Bézout" qui permet aussi de démontrer d'autres propriétés intéressantes de deux nombres comme nous le verrons plus tard.

Théorème 5.19. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ab \neq 0$. Si d divise a et d divise b (pour les deux sans reste r !) il existe alors obligatoirement des entiers relatifs x et y tels que :

$$\boxed{d = (a,b) = ax + by} \tag{5.4.53}$$

Cette relation est appelée "identité de Bézout" et il s'agit d'une équation diophantienne linéaire (voir section Calcul Algébrique page 1359).

Démonstration 5.19.1. évidemment, si a et b sont premiers entre eux nous savons que d vaut alors 1.

Pour démontrer l'identité de Bézout considérons d'abord l'ensemble :

$$S = \{d = ax + by | x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\} \tag{5.4.54}$$

Comme $S \subset \mathbb{N}$ et $S \neq \varnothing$, nous pouvons utiliser le principe du bon ordre et conclure que S possède un plus petit élément d. Nous pouvons alors écrire :

$$d = ax_0 + by_0 \tag{5.4.55}$$

pour un certain choix $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que $d = (a, b)$ pour démontrer l'identité de Bézout !

Procédons via une démonstration par l'absurde en posant supposant $d \nmid a$. Alors si c'est le cas, d'après la division euclidienne, il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $a = qd + r$, où $0 < r < d$. Mais alors :

$$r = a - qd = a - q(ax_0 + by_0) = a(1 - qx_0) + b(-qy_0) \tag{5.4.56}$$

Ainsi, nous avons que $r \in S$ et $r < d$, ce qui contredit le fait que d est le plus petit élément possible de S. Donc nous avons démontré ainsi non seulement que $d|a$ mais qu'en plus d existe toujours et, de la même façon, nous démontrons que $d|b$.

■ Q.E.D.

Corollaire 5.19.1. Comme corollaire important montrons maintenant que si $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ab \neq 0$, alors :

$$S = \{ax + by | x, y \in \mathbb{Z}\} \tag{5.4.57}$$

constitue l'ensemble de tous les multiples de $d(a, b)$.

Démonstration 5.19.2. Comme $d|a$ et $d|b$, alors nous avons forcément $dax + by|$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$. Soit $M = \{nd | n \in \mathbb{Z}\}$. Notre problème se réduit au fait à montrer que $S = M$.

Soit d'abord $s \in S$ ce qui signifie que $d|s$ et qui implique $s \in M$.

Soit un $m \in M$, cela voudrait donc dire que $m = nd$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

Comme $d = ax_0 + by_0$ pour un choix d'entiers quelconques $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, alors :

$$m = nd = n(ax_0 + by_0) = a(nx_0) + b(ny_0) \in S \tag{5.4.58}$$

■ Q.E.D.

Les hypothèses peuvent sembler compliquées mais portez plutôt votre attention un certain temps sur la dernière relation. Vous allez tout de suite comprendre !

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Si au lieu de définir le PGCD de deux entiers non nuls, nous permettons à l'un d'entre eux d'être égal à 0, disons : $a \neq b$, $b = 0$. Dans ce cas, nous avons $a|b$ et , selon notre définition du PGCD, il est clair que $(a, 0) = |a|$.

Soit $d = (a, b)$ et soit $m \in \mathbb{Z}$,alors nous avons les propriétés suivantes du PGCD (sans prevues, mais si un lecteur le souhaite nous pourrons donner les détails) :

P1. $(a, b + ma) = (a, b) = (a, -b)$

P2. $(am, bm) = |m|(a, b)$ où $m \neq 0$

P3. $\left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right) = 1$

P4. Si $g \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $g|a$ et $g|b$ alors $\left(\dfrac{a}{g}, \dfrac{b}{g}\right) = \dfrac{1}{|g|}(a, b)$

Dans certains ouvrages, ces quatre propriétés sont démontrées en utilisant intrinsèquement la propriété elle-même. Personnellement nous nous en abstiendrons car faire cela est plus ridicule qu'autre chose à notre goût car la propriété est une démonstration en elle-même.

En ... tion de l' anglais

✍**Exemple :**

Dans une salle de bains, un client haut de gamme souhaite recouvrir le mur au-dessus de la baignoire d'un nombre entier de carreaux de faïence (très onéreux) de forme carrée dont le côté est le plus grand possible d'un nombre entier de centimètres. Sachant que le mur mesure 210 [cm] de haut et 135 [cm] de large, quelle est la longueur, en centimètres, du côté d'un carreau. Combien de tuiles faudra-t-il alors ?

Pour que le nombre de tuiles soit un entier, la taille d'une tuile doit être un diviseur commun à 210 et 135. La plus grande taille possible correspond au PGCD de 210 et 135, il faut prendre des tuiles de côté 15 [cm]. Il nous faudra donc $210/15 = 14$ tuiles de hauteur et $135/15 = 9$ tuiles de largeur. Soit un total de $14 \cdot 9 = 126$ tuiles.

Élaborons maintenant une méthode (algorithme) qui s'avérera très importante pour calculer (déterminer) le plus grand commun diviseur de deux entiers (utile en informatique parfois).

5.4.3.2 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide est un algorithme permettant donc de déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers.

Pour aborder cette méthode de manière intuitive, il faut savoir que vous devez comprendre un nombre entier comme une longueur, un couple d'entiers comme un rectangle (côtés) et leur PGCD est la taille du plus grand carré permettant de carreler (paver) ce rectangle par définition (oui si vous réfléchissez un petit moment c'est assez logique !).

L'algorithme décompose le rectangle initial en carrés, de plus en plus petits, par divisions euclidiennes successives, de la longueur par la largeur, puis de la largeur par le reste, jusqu'à un reste nul. Il faut bien comprendre cette démarche géométrique pour comprendre ensuite l'algorithme.

✍**Exemple :**

Considérons que nous cherchons le PGCD de (a, b) où b vaut 21 et a vaut 15 et gardons à l'esprit que le PGCD, outre le fait qu'il divise a et b, doit laisser un reste nul ! En d'autres termes il doit pouvoir diviser le reste de la division de b par a aussi !

Nous avons donc le rectangle de 21 par 15 suivant :

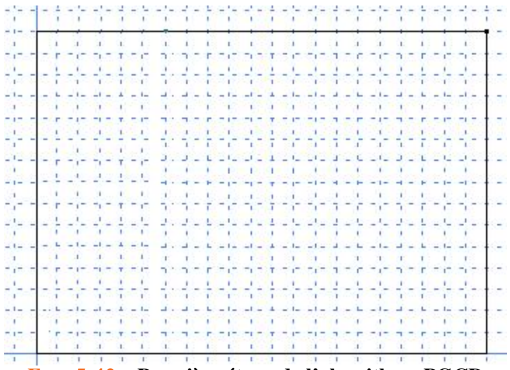


FIG. 5.42 – Première étape de l'algorithme PGCD

D'abord nous regardons si 15 est le PGCD (on commence toujours par le plus petit). Nous divisons alors 21 par 15 ce qui équivaut géométriquement à :

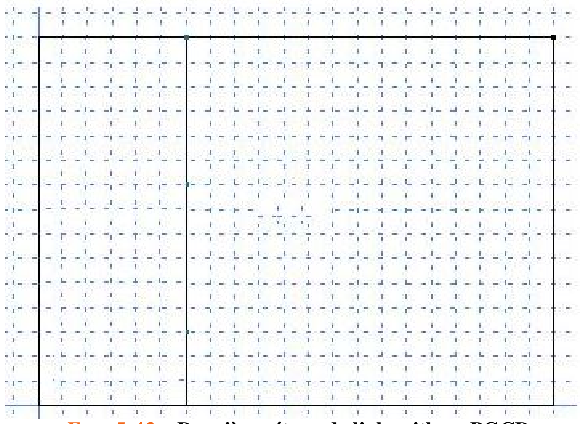


FIG. 5.43 – Deuxième étape de l'algorithme PGCD

15 n'est donc pas le PGCD (on s'en doutait...). Nous voyons immédiatement que nous n'arrivons pas à paver le rectangle avec un carré de 15 par 15.

Nous avons donc un reste de 6 (rectangle de gauche). Le PGCD comme nous le savons doit, s'il existe, par définition pouvoir diviser ce reste et laisser un reste nul.

Il nous reste donc un rectangle de 15 par 6. Nous cherchons donc maintenant à paver ce nouveau rectangle car nous savons que le PGCD est par construction inférieur ou égal à 6. Nous avons alors :

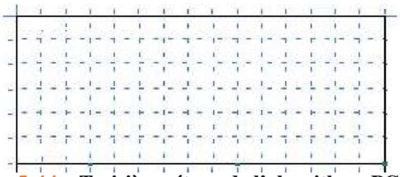


FIG. 5.44 – **Troisième étape de l'algorithme PGCD**

Et nous divisons donc 15 par le reste 6 (ce résultat sera inférieur à 6 et permet immédiatement de tester si le reste sera le PGCD). Nous obtenons :

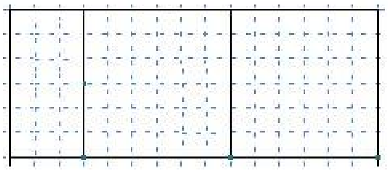


FIG. 5.45 – **Quatrième étape de l'algorithme PGCD**

A nouveau, nous n'arrivons pas à paver ce rectangle rien qu'avec des carrés. En d'autres termes, nous avons un reste non nul qui vaut 3. Soit un rectangle de 6 par 3. Nous cherchons donc maintenant à paver ce nouveau rectangle car nous savons que le PGCD est par construction inférieur ou égal à 3 et qu'il laissera un reste nul s'il existe. Nous avons alors géométriquement :

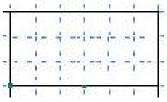


FIG. 5.46 – **Cinquième étape de l'algorithme PGCD**

Nous divisons 6 par 3 (ce qui sera inférieur à 3 et permet immédiatement de tester si le reste sera le PGCD) :

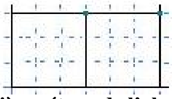


FIG. 5.47 – **Sixième étape de l'algorithme PGCD**

et c'est tout bon ! Nous avons 3 qui laisse donc un reste nul et divise le reste 6 il s'agit donc du PGCD. Nous avons donc au final :

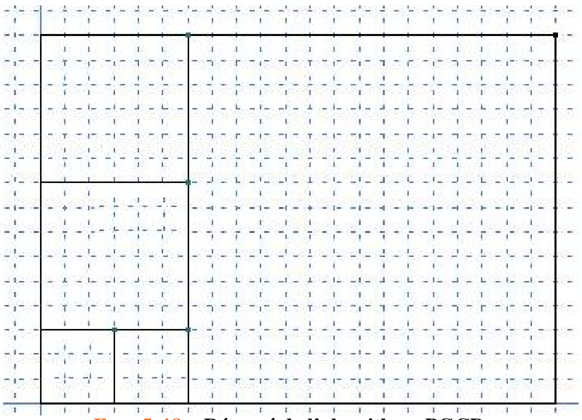


FIG. 5.48 – **Résumé de l'algorithme PGCD**

Maintenant, voyons l'approche formelle équivalente :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, où $a > 0$. En appliquant successivement la division euclidienne (avec $b > a$), nous obtenons la suite d'équations :

$$\begin{aligned}
b &= qa_1 + r_1 & 0 < r_1 < a\\
a &= r_1 q_2 + r_2 & 0 < r_2 < r_1\\
r_1 &= r_1 2 q_3 + r_3 & 0 < r_3 < r_2\\
&\ldots\\
r_{j-2} &= r_{j-1} q_j + r_j & 0 < r_j < r_{j-1}\\
r_{j-1} &= r_j q_{j+1}
\end{aligned} \tag{5.4.59}$$

si $d = (a, b)$, alors $d = r_j$. Avec le pseudo-code correspondant :

Algorithm 1: Algorithme en pseudo-code du PGCM

Data: a,b
Result: b

```
initialization;
r = a mod b;
while r ≠ 0 do
    a := b;
    b := r;
    f(b) := f(a);
    a := x_1;
    f(a) := f(x_1);
Display x_1;
```

Sinon de manière plus formelle :

Démonstration 5.19.3. Nous voulons d'abord montrer que $r_j = (a, b)$. Or, d'après la propriété P1 :

$$(a, b + ma) = (a, b) = (a, -b) \tag{5.4.60}$$

nous avons :

$$(a, b) = (a, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{j-1}, r_j) \tag{5.4.61}$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour démontrer la deuxième propriété de l'algorithme d'Euclide, nous écrivons l'avant-dernière équation du système sous la forme :

$$r_j = r_{j-2} - q_j r_{j-1} \quad (5.4.62)$$

Or, en utilisant l'équation qui précède cette avant-dernière équation du système, nous avons :

$$r_j = r_{j-2} - q_j(r_{j-3} - q_{j-1}r_{j-2}) = (1 + q_j q_{j-1})r_{j-2} + (-q_j)r_{j-3} \quad (5.4.63)$$

En continuant ce processus, nous arrivons à exprimer r_j comme une combinaison linéaire de a et b.

■ Q.E.D.

✍**Exemple :**

Calculons le plus grand commun diviseur de $(429, 966)$ et exprimons ce nombre comme une combinaison linéaire de 429 et de 966.

Nous appliquons bien évidemment l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 966 &= 429 \cdot 2 + 108 \\ 429 &= 108 \cdot 3 + 105 \\ 108 &= 105 \cdot 1 + 3 \\ 105 &= 35 \cdot 3 \end{aligned} \quad (5.4.64)$$

Nous en déduisons donc que :

$$r_j = d = (966, 429) = 3 \quad (5.4.65)$$

et, de plus, que :

$$\begin{aligned} 3 &= 108 - 105 \cdot 1 = 108 - (429 - 108 \cdot 3) = 108 \cdot 4 - 429 \\ &= (966 - 429 \cdot 2) \cdot 4 - 429 \\ &= 966 \cdot 4 - 429 \cdot 9 = 966 \cdot 4 + 429 \cdot (-9) \end{aligned} \quad (5.4.66)$$

Donc le PGCD est bien exprimé comme une combinaison linéaire de a et b et constitue à ce titre le PGCD.

Définition (#5.4.66) : Nous disons que les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont "relativement premiers" ou "premiers entre eux" si :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 \quad (5.4.67)$$

5.4.3.3 Plus petit commun multiple (PPCM)

Le "plus petit commun multiple" de deux entiers a et b, généralement désigné par PPCM(a, b), est le plus petit entier positif divisible par a et b. Puisque la division des nombres entiers par zéro n'est pas définie, cette définition n'a de sens que si a et b sont tous deux différents de zéro.

Le PPCM est bien connu dans l'arithmétique des écoles primaires comme le "plus petit dénominateur commun" qui doit être déterminé avant que les fractions puissent être ajoutées, soustraites ou comparées. Le PPCM de plus de deux entiers est également bien défini : il s'agit du plus petit entier positif divisible par chacun d'eux.

Définitions (#5.4.67) :

D1. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous disons que m est "multiple commun" de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si $a_i|m$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$

D2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous appelons "plus petit commun multiple" (PPCM) de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si $a_i|m$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ noté traditionnellement par :

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \tag{5.4.68}$$

le plus petit entier commun multiple positif à tous les communs multiples de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

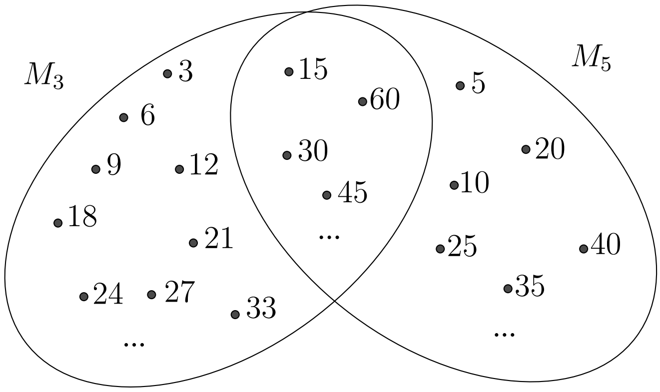
E... uction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Considérons les entiers positifs 3 et 5. Un multiple commun de 3 et 5 est un entier positif qui est à la fois un multiple de 3, et un multiple de 5. Autrement dit, qui est divisible par 3 et aussi par 5. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} M_3 &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots\} \\ M_5 &= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \ldots\} \end{aligned} \tag{5.4.69}$$

Nous avons alors l'intersection représentée par le diagramme de Venn suivant : (voir section Théorie des Ensembles 376) :



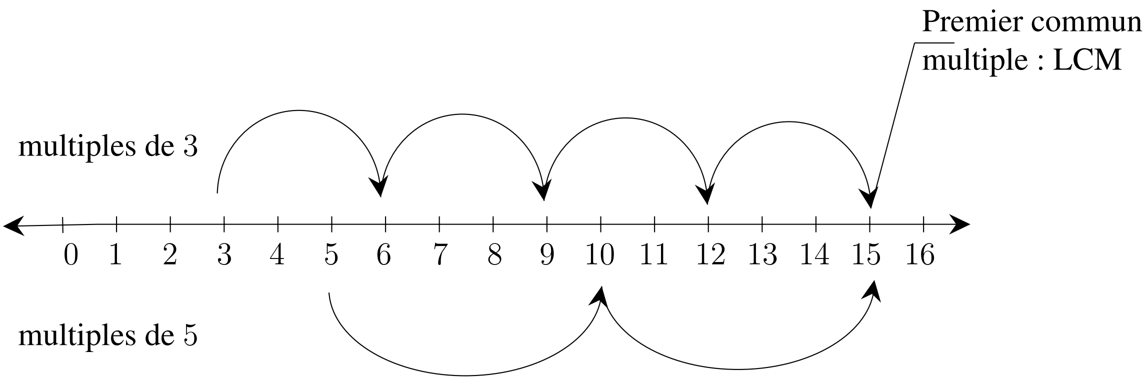
avec l'ensemble des communs multiples suivants :

$$M_3 \cap M_5 = \{15, 30, 45, 60, \ldots\} \quad (5.4.70)$$

et le PPCM est alors :

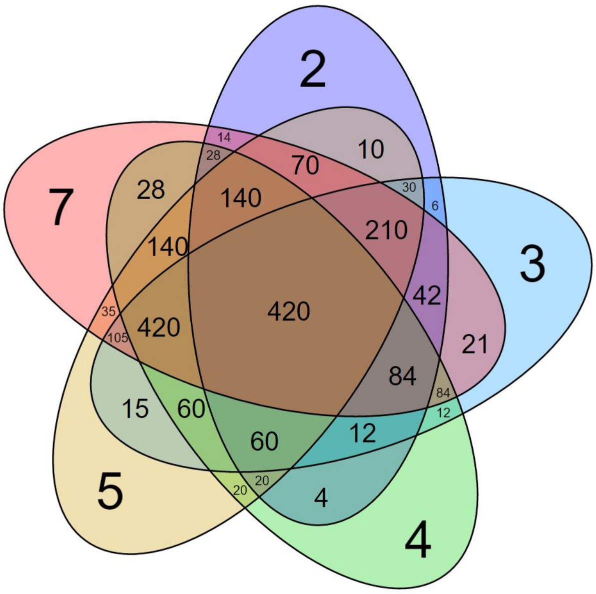
$$\text{LCM} = \min\{15, 30, 45, 60, \ldots\} = 15 \quad (5.4.71)$$

Soit sous une autre forme schématique :



Nous constatons que l'ensemble des multiples communs de 3 et 5 est aussi l'ensemble des multiples de 15.

E2. Wikipédia donne également un bel exemple de diagramme de Venn (voir la section de Théorie des Ensembles page ??) lorsque nous recherchons un PPCM de multiples de 5 à l'aide d'un outil visuel :



Remarque

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors, le plus petit commun multiple existe. En effet, considérons l'ensemble E des entiers naturels m qui pour tout i divisent a_i. Ce que nous noterons :

$$E = \{m | a_i | m \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{5.4.72}$$

Puisque nous avons forcément $|a_1 a_2 \ldots a_n| \in E$, alors l'ensemble est non vide et, d'après l'axiome du bon ordre, l'ensemble E contient un plus petit élément positif.

Voyons maintenant quelques théorèmes relatifs au PPCM :

Théorème 5.20. Si m est un commun multiple quelconque de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ alors $[a_1, a_2, \ldots, a_n] | m$, c'est-à-dire que m divise chacun des a_i.

Démonstration 5.20.1. Soit $M = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Alors, d'après la division euclidienne, il existe des entiers q et r tels que :

$$m = qM + r \quad 0 \leq r < M$$

Il suffit de montrer que $r = 0$. Supposons $r \neq 0$ (démonstration par l'absurde). Puisque $a_i | m$ et $a_i | M$, alors nous avons $a_i | r$ et cela pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Donc, r est un commun multiple de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ plus petit que le PPCM. On vient d'obtenir une contradiction, ce qui prouve le théorème.

■ Q.E.D.

Théorème 5.21. Si $k > 0$, alors $[ka_1, ka_2, \ldots, ka_n] = k[a_1, a_2, \ldots, a_n]$

La démonstration sera supposée évidente (dans le cas contraire contactez-nous et cela sera détaillé !).

Théorème 5.22. $[a, b] \cdot (a, b) = |ab|$

Démonstration 5.22.1.

Lemme 5.22.1. Pour la démonstration, nous allons utiliser le "lemme d'Euclide" qui dit que si $a | bc$ et $(a, b) = 1$ alors $a | c$.

En d'autres termes, le lemme d'Euclide capture une propriété fondamentale des nombres premiers, à savoir : Si un nombre premier divise le produit de deux nombres, il doit diviser au moins un de ces nombres. Il s'appelle également du "premier théorème d'Euclide". Ce lemme est la clé de la preuve du théorème fondamental de l'arithmétique que nous verrons plus loin !

Effectivement cela se vérifie aisément car nous avons vu qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = ax + by$ et alors $c = acx + bcy$. Mais $a | ac$ et $a | bc$ impliquent que $a | (acx + bcy)$, c'est-à-dire également que $a | c$.

Revenons à notre théorème :

Puisque $(a, b) = (a, -b)$ et $[a, b] = [a, -b]$, il suffit de prouver le résultat pour des entiers positifs a et b.

En cours de traduction de l'anglais

En tout premier lieu, considérons le cas où $(a, b) = 1$. L'entier $[a, b]$ étant un multiple de a, nous pouvons écrire $[a, b] = ma$. Ainsi, nous avons $b|ma$ et, puisque $(a, b) = 01$, il s'ensuit, d'après le lemme d'Euclide, que $b|m$. Donc, $b \leq m$ et alors $ab \leq am$. Mais ab est un commun multiple de a et b qui ne peut être plus petit que le PPCM. c'est pourquoi $ab = ma = [a, b]$.

Pour le cas général, c'est-à-dire $(a, b) = d > 1$, nous avons, d'après la propriété :

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \tag{5.4.74}$$

et avec le résultat obtenu précédemment que :

$$\left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right]\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{a}{d}\frac{b}{d} \tag{5.4.75}$$

Lorsque nous multiplions des deux côtés de l'équation par d^2, le résultat suit et la démonstration est effectuée.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

5.4.3.4 Théorème fondamental de l'arithmétique

Le théorème fondamental de l'arithmétique dit que tout nombre naturel $n > 1$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, et cette représentation est unique, à part l'ordre dans lequel les facteurs premiers sont disposés.

Le théorème établit l'importance des nombres premiers. Essentiellement, ils sont les briques élémentaires de construction des entiers positifs, chaque entier positif contenant des nombres premiers d'une manière unique.

> **Remarque**
>
> Ce théorème est parfois appelé "théorème de factorisation" (un peu à tort... car d'autres théorèmes portent le même nom...).

Ok, alors allons-y :

Théorème 5.23. Chaque nombre entier supérieur à 1 est soit lui-même nombre premier, soit le produit de nombres premiers, et ce produit est unique, à l'ordre près des facteurs.

> **Remarque**
>
> Ce théorème est l'une des principales raisons pour lesquelles 1 n'est pas considéré comme un nombre premier : si 1 était premier, la factorisation ne serait pas unique.

Démonstration 5.23.1. La preuve utilise le lemme d'Euclide : si un nombre premier p divise le produit de deux nombres naturels a et b, alors p divise a ou p divise b (ou les deux).

Si n est premier, et donc produit d'un unique entier premier, à savoir lui-même le résultat est vrai et la démonstration est terminée (dire qu'un nombre premier est produit de lui-même est bien évidemment un abus de langage !). Supposons que n n'est pas premier et donc strictement supérieur à 1 et considérons l'ensemble :

$$D = \{d|n \text{ et } 1 < d < n\} \quad (5.4.76)$$

Alors, $D \subset \mathbb{N}$ et , puisque n est composé, nous avons que $D \neq \varnothing$. D'après le principe du bon ordre, D possède un plus petit élément p_1 qui est premier, sans quoi le choix minimal de p_1 serait contredit. Nous pouvons donc écrire $n = p_1 n_1$. Si n_1 est premier, alors la preuve est terminée. Si n_1 est aussi composé, alors nous répétons le même argument que précédemment et nous en déduisons l'existence d'un nombre premier p_2 et d'un entier $n_2 < n_1$ tels que $n = p_1 p_2 n_2$. En poursuivant ainsi nous arrivons forcément à la conclusion que n_k sera premier.

Donc finalement nous avons bien démontré qu'un nombre quelconque est décomposable en facteurs de nombres premiers à l'aide du principe du bon ordre.

■ Q.E.D.

Nous ne connaissons pas à ce jour de loi simple qui permette de calculer le n-ième facteur premier p_n. Ainsi, pour savoir si un entier m est premier, il est pratiquement plus facile à ce jour de vérifier sa présence dans une table de nombres premiers.

En cours de traduction l'anglais

En fait, nous utilisons aujourd'hui la méthode suivante :

Soit un nombre m, si nous voulons déterminer s'il est premier ou non, nous calculons s'il est divisible par les nombres premiers p_n qui appartiennent à l'ensemble :

$$\{p_n \in \mathbb{N} | p_n < \sqrt{M}\} \tag{5.4.77}$$

✍**Exemple :**

L'entier 223 n'est ni divisible par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13. Il est inutile de continuer avec le prochain nombre premier, car $17^2 = 289 > 223$. Nous en déduisons dès lors que le nombre 223 est premier.

5.4.3.5 Congruences (arithmétique modulaire)

En cours de traduction de l'anglais

L'arithmétique modulaire est un système d'arithmétique pour les nombres entiers, dans lequel les nombres se "retournent" lorsqu'ils atteignent une certaine valeur, appelée le "module" (plural moduli).

Une utilisation familière de l'arithmétique modulaire est l'horloge à 12 heures (ainsi que le calendrier), dans laquelle le jour est divisé en deux périodes de 12 heures. Si l'heure est maintenant $7:00$ heures, 8 heures plus tard, il sera $3:00$ heures. Les ajouts habituels suggéreraient que l'heure ultérieure devrait être de $7+8=15$, mais ce n'est pas la réponse, car le temps de l'horloge se "retourne" toutes les 12 heures; dans un système à 12 heures, il n'y a pas de "15 heures". De même, si l'horloge commence à $12:00$ (midi) et que 21 heures s'écoulent s'écoulent, l'heure sera alors $9:00$ le lendemain, au lieu de $33:00$. Parce que le nombre d'heures recommence après avoir atteint la valeur 12, il s'agit d'un calcul arithmétique modulo 12. Selon la définition ci-dessous, 12 est congruent non seulement à 12 lui-même, mais également à 0, de sorte que l'heure "$12:00$" pourrait également être écrite "$0:00$", puisque 12 est congru à 0 modulo 12.

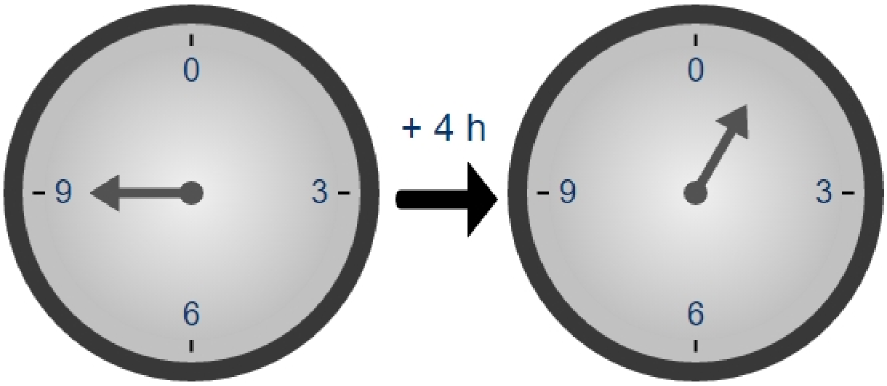


FIG. 5.49 – Mesure de l'heure sur une horloge utilisant l'arithmétique modulo 12 (source : Wikipédia)

Définition (#5.4.68) : Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Si a et b ont même reste dans la division euclidienne par

m nous disons que "a est congru à b modulo m", et nous écrivons :

$$\boxed{a \equiv b \mod (m)} \tag{5.4.78}$$

ou de manière équivalente il existe (au moins) un nombre entier relatif k tel que :

$$\boxed{a = b + km} \tag{5.4.79}$$

Souvent noté :

$$x = qm + r \tag{5.4.80}$$

où q est le "quotient" et r le "reste" de la division euclidienne.

✍**Exemple :**

Nous avons :

$$51 \equiv 1 \mod (10)$$

comme (nous appliquons $a = b + km$) :

$$51 = 1 + 5 \cdot 10$$

Et nous avons :

$$-51 \equiv 9 \mod (10)$$

comme (nous appliquons encore $a = b + km$) :

$$-51 = 9 + (-6) \cdot 10$$

Nous appelons aussi le nombre b "résidu". Ainsi, un résidu est un entier congru à un autre, modulo un entier m donné.

$$m|(a-b) \tag{5.4.81}$$

Une autre manière de dire tout cela si ce n'est pas clair... : L'étude des propriétés qui relient trois nombres entre eux est appelée communément "l'arithmétique modulaire".

Le cas des nombres négatifs est souvent difficile à appréhender. Faisons donc un exemple de compagnon étape par étape !

Supposons que nous essayons de calculer $-3 \div 12$. Une réponse possible est :

$$-3 = -1 \cdot 12 + 9$$

Autrement dit, que $-3 \mod 12 = 9$. Mais ne pouvons-nous pas représenter cela comme :

$$-3 = -2 \cdot 12 + 21$$

C'est vrai que $-3 \equiv 21 \mod 12$. Et aussi que $-3 \equiv 117 \mod 12$, et bien sûr $-3 \equiv 9 \mod 12$ (ou alternativement $-3 \mod 12 = 9$). Tous ces nombres sont dans la même "classe de congruence ou de résidu". Typiquement, la plus petite valeur non négative est utilisée pour représenter la classe par tradition telle que $0 \geq b < m$.

En cours de ...lais

Nous pourrions donc écrire cette classe de congruence sous la forme $\{\ldots,-15,-3,9,21,33,\ldots\}$ mais cela deviendrait fastidieux donc par convention nous représentons la classe de congruence par un seul de ses membres , souvent le plus petit membre non négatif. Nous représentons donc $\{\ldots,-15,-3,9,21,33,\ldots\}$ par $9 \mod 12$.

✍**Exemple :**

Tous les tableurs et logiciels de business intelligence ont une fonction modulo souvent notée `MOD(valeur,congruence)` (qui renvoie le b de $a = b + km$) et utilisée pour diverses raisons. Mais le cas pratique le plus utilisé et le plus connu dans la pratique est le calcul du mois fiscal, compte tenu du mois civil (par exemple le mois civil commence évidemment en janvier (1) mais le mois fiscal peut commencer pour une société en avril (4). Alors, comment pouvons-nous implémenter une formule qui donne la bonne colonne dans le tableau ci-dessous (dans la pratique, vous ne pouvez pas créer la colonne en écrivant les mois fiscaux manuellement car la plupart des sociétés travaillent avec une fréquence journaliere et ont des milliers de jours pour lesquelles elles veulent savoir quel est le mois fiscal correspondant !) :

	Mois Civil (MC)	**Mois Fiscal** (MF)
JAN	1	$(-3 \mod 12) + 1 = 9 + 1 = 10$
FEV	2	$(-2 \mod 12) + 1 = 10 + 1 = 11$
MAR	3	$(-1 \mod 12) + 1 = 11 + 1 = 12$
AVR	4	$(0 \mod 12) + 1 = 0 + 1 = 1$
MAI	5	$(1 \mod 12) + 1 = 1 + 1 = 2$
JUN	6	$(2 \mod 12) + 1 = 2 + 1 = 3$
JUL	7	$(3 \mod 12) + 1 = 3 + 1 = 4$
AUT	8	$(4 \mod 12) + 1 = 4 + 1 = 5$
SEP	9	$(5 \mod 12) + 1 = 5 + 1 = 6$
OCT	10	$(6 \mod 12) + 1 = 6 + 1 = 7$
NOV	11	$(7 \mod 12) + 1 = 7 + 1 = 8$
DEC	12	$(8 \mod 12) + 1 = 8 + 1 = 9$

Dans le cas particulier ci-dessus où le mois fiscal est avril (4), dans tous les tableurs, logiciels d'informatique décisionnelle, logiciels d'ingénierie et langages de programmation, la formule serait :

```
Mois Fiscal = MOD(Mois Civil-4,12)+1
```

Ou écrit de façon plus générale :

```
MOD(Civil Month-Fiscal Month Start,12)+1
```

Cela équivaut à :

$a = b + km \Leftrightarrow$ `b = MOD(a,m)` $\Rightarrow$ `FM=MOD(CM-FMS,12)+1`

En ... is

Remarques

R1. Que nous soyons bien d'accord, la congruence implique un reste nul pour la division !

R2. Nous excluons en plus de 0 aussi 1 et -1 pour les valeurs que peut prendre m dans la définition de la congruence dans certains ouvrages.

R3. Derrière le terme de congruence se cachent des notions semblables mais de niveaux d'abstraction différents :

- En arithmétique modulaire, nous disons donc que "deux entiers relatifs a et b sont congrus modulo m s'ils ont même reste dans la division euclidienne par m". Nous pouvons aussi dire qu'ils sont congrus modulo m si leur différence est un multiple de m.

- Dans la mesure des angles orientés, nous disons que "deux mesures sont congrues modulo 2π [rad] si et seulement si leur différence est un multiple de 2π [rad]". Cela caractérise deux mesures d'un même angle (voir section Trigonométrie page 2496).

- En algèbre, nous parlons de congruence modulo I dans un anneau commutatif (voir section Théorie des Ensembles page 423) dont I est un idéal : "x est congru à y modulo I si et seulement si leur différence appartient I". Cette congruence est une relation d'équivalence, compatible avec les opérations d'addition et multiplication et permet de définir un anneau quotient de l'ensemble parent avec son idéal I.

- Nous trouvons parfois, dans l'étude de la géométrie (voir section Géométrie Euclidienne page 2612) le terme de congru mis à la place de semblable. Il s'agit alors d'une simple relation d'équivalence sur l'ensemble des figures planes.

La relation de congruence $\equiv$ est une relation d'équivalence (voir section sur les Opérateurs 290), en d'autres termes , soient $a, b, c, m \in \mathbb{Z}, m > 1$ alors la relation de congruence est :

P1. Réflexive :

$$a \equiv a \mod (m) \tag{5.4.82}$$

P2. Symétrique :

$$a \equiv b \mod (m) \Leftrightarrow b \equiv b \mod (m) \tag{5.4.83}$$

P3. Transitive :

$$a \equiv b \mod (m), b \equiv c \mod (m) \Rightarrow a \equiv b \mod (m) \tag{5.4.84}$$

Les propriétés P1 et P2 sont évidentes (si ce n'est pas le cas faites-le nous savoir nous développerons !). Nous allons démontrer maintenant P3. equation.

Démonstration 5.23.2. Les hypothèses impliquent que :

$$b = a + km \qquad c = b + lm \tag{5.4.85}$$

Mais alors :

$$c = b + lm = (a + km) + lm = a + (k + l)m \tag{5.4.86}$$

ce qui montre que a et c sont congrus modulo m.

■ Q.E.D.

La relation de congruence $\equiv$ est compatible avec la somme et le produit (se rappeler que la puissance n'est finalement qu'une extension du produit !).

Effectivement, soient $(a, b, a', b', m) \in \mathbb{Z}, m > 1$ tel que $a \equiv \mod (m)$ et $a' \equiv b'$ alors :

P1. $a + a' \equiv b + b' \mod (m)$

P2. $aa' \equiv bb' \mod (m)$

Démonstration 5.23.3. Nous avons :

$$a = b + km \qquad a' = b' + lm \tag{5.4.87}$$

par hypothèse. Mais alors :

$$a + a' = b + b' + (l + k)m \tag{5.4.88}$$

ce qui démontre P1. Nous avons également :

$$aa' = bb' + blm + b'km + klm'2 = bb' + sm \tag{5.4.89}$$

ce qui démontre P2.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

La relation de congruence se comporte sur de nombreux points comme la relation d'égalité. Néanmoins une propriété de la relation d'égalité n'est plus vraie pour celle de congruence, à savoir la simplification : si $ab \equiv \mod (m)$, nous n'avons pas nécessairement $b \equiv c \mod (m)$.

✍**Exemples :**

E1. Considérons le cas simple suivant :

$$2 \cdot 1 \equiv 2 \cdot 3 \mod (4) \quad \text{mais} \quad 1 \not\equiv 3 \mod (4) \tag{5.4.90}$$

E2. Des gangsters viennent de voler un million de dollars, en coupures de $1, 10, 100$ et $1'000$ dollars. L'un d'eux affirme qu'il y a exactement $92'000$ dollars en billets. Cette affirmation est-elle correcte ?

Selon la déclaration du gangster, le montant volé peut être écrit comme suit :

$$1'000'000 = a + 10b + 100c + 1'000d$$

où :

$$a + b + c + d = 92,000$$

Modulo 9 (c'est un bon choix !), cela donne :

$$1 \equiv a + b + c + d$$

dès lors :

$$1 \equiv 2$$

Nous avons donc la preuve de la malhonnêteté du gangster (mais c'était quelque chose que nous soupçonnions).

Jusqu'ici, nous avons vu des propriétés des congruences faisant intervenir un seul modulus. Nous allons maintenant étudier le comportement de la relation de congruence lors d'un changement de modulus :

P1. Si $a \equiv b \mod (m)$ et $d|m$, alors $a \equiv b \mod (d)$

P2. Si $a \equiv b$ et $a \equiv b \mod (s)$ alors a et b sont congrus modulo $[r, s]$

Nous pensons que ces deux propriétés sont évidentes. Inutile d'aller dans les détails pour P1. Pour P2, puisque $b - a$ est un multiple de r et de s puisque par hypothèse :

$$\frac{b-a}{r} = k, \frac{b-a}{s} = l \Rightarrow b - a = rk = sl \tag{5.4.91}$$

$b - a$ st donc un multiple du PPCM de r et s, ce qui démontre P2.

De ces propriétés il vient que si nous désignons par $f(x)$ un polynôme à coefficient entiers (positifs ou négatifs) :

$$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Kx + L \tag{5.4.92}$$

La congruence $a \equiv b \mod (m)$ donnera aussi $f(a) \equiv f(b) \mod (m)$.

Si nous remplaçons x successivement par tous les nombres entiers dans un polynôme $f(x)$ à coefficients entiers, et si nous prenons les résidus pour le module m, ces résidus se reproduisent

En cours de traduction anglais

de m en m (dans le sens où la congruence se vérifie), puisque nous avons, quel que soit l'entier m et x :

$$f(x) \equiv f(x+m) \mod (m) \tag{5.4.93}$$

Nous en déduisons alors l'impossibilité de résoudre la congruence suivante :

$$f(x) \equiv r \mod (m) \tag{5.4.94}$$

en nombres entiers, si r désigne l'un quelconque des non-résidus (un résidu qui ne satisfait pas la congruence).

5.4.3.5.1 Classes de congruences

Définition (#5.4.69) : Nous appelons "classe de congruence modulo m", le sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{Z}$ défini par la propriété que deux éléments a et b de $\mathbb{Z}$ sont dans la même classe si et seulement si $a \equiv b \mod (m)$ ou qu'un ensemble d'éléments entre eux sont congrus par ce même modulo.

Remarque

Nous avons vu dans le section traitant des Opérateurs (page 291) qu'il s'agit en fait d'une classe d'équivalence car la congruence modulo m est, comme nous l'avons démontré plus haut, une relation d'équivalence ! ! !

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Soit $m = 3$. Nous divisons l'ensemble des entiers en classes de congruence modulo 3. Exemple de trois ensembles dont tous les éléments sont congrus entre eux sans reste (observez bien ce que donne l'ensemble des classes !) :

$$\{\ldots, -9, -6-3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \tag{5.4.95}$$
$$\{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\} \tag{5.4.96}$$
$$\{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\} \tag{5.4.97}$$

Ainsi, nous voyons que pour chaque couple d'élément d'une classe de congruence, la congruence modulo 3 existe. Cependant, nous voyons que nous ne pouvons pas prendre $-9 \equiv -8 \mod (3)$ où -9 se trouve dans la première classe et -8 dans la seconde.

Le plus petit nombre non négatif de la première classe est 0, celui de la deuxième est 1 et celui de la dernière est 2. Ainsi, nous noterons ces trois classes respectivement $[0]_3, [1]_3, [2]_3$, le chiffre 3 en indice indiquant le modulus.

Il est intéressant de noter que si nous prenons un nombre quelconque de la première classe et un nombre quelconque de la deuxième, alors leur somme est toujours dans la deuxième classe. Ceci se généralise et permet de définir une somme sur les classes modulo 3 en posant :

$$\begin{array}{ll} [0]_3+[0]_3=[0]_3; & [0]_3+[1]_3=[1]_3 \\ [0]_3+[2]_3=[2]_3; & [1]_3+[1]_3=[2]_3 \\ [1]_3+[2]_3=[0]_3; & [2]_3+[2]_3=[1]_3 \end{array} \tag{5.4.98}$$

et aussi :

$$\begin{array}{ll} [0]_3\times[0]_3=[0]_3; & [0]_3\times[1]_3=[0]_3 \\ [0]_3\times[2]_3=[0]_3; & [1]_3\times[1]_3=[1]_3 \\ [1]_3\times[2]_3=[2]_3; & [2]_3\times[2]_3=[1]_3 \end{array} \tag{5.4.99}$$

Ainsi, pour tout $m > 1$, la classe de congruence de :

$$a \mod (m) \tag{5.4.100}$$

est l'ensemble des entiers congrus à a modulo m (et congrus entre eux modulo m). Cette classe est notée :

$$\boxed{[a]_m := a \mod (m)} \tag{5.4.101}$$

Remarque

Le fait d'avoir mis entre parenthèses l'expression "et congrus entre eux modulo m" est dû au fait que la congruence, étant une relation d'équivalence nous avons comme nous l'avons démontré plus haut que si $b \equiv a \mod (m)$, $c \equiv \mod (m)$, alors $b \equiv a \mod (m)$.

Définition (#5.4.70) : L'ensemble des classes de congruence $[a]_m$ (qui forment par le fait que la congruence est une relation d'équivalence des : "classes d'équivalence"), pour un m fixe donne ce que nous appelons un "ensemble quotient" (voir section Opérateurs page 291). Plus rigoureusement, nous parlons de "l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence" dont les éléments sont les classes de congruence (ou : classes d'équivalence) et qui forment alors l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Nous déduisons de la définition les deux propriétés triviales suivantes :

1. Le nombre b est dans la classe $[a]_m$ si et seulement si $a \equiv b \mod (m)$
2. Les classes $[a]_m$ et $[b]_m$ sont égales si et seulement $a \equiv b \mod (m)$

Théorème 5.24. Montrons maintenant qu'il y a exactement m différentes classes de congruence modulo m, à savoir $[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m$.

Démonstration 5.24.1. Soit $m > 1$, alors tout nombre entier a est congru modulo m à un et un seul entier r de l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ (remarquez bien, c'est important, que nous nous restreignons aux entiers positifs ou nuls sans prendre en compte les négatifs !). De plus, cet entier r est exactement le reste de la division de a par m. En d'autres termes, si $0 \leq r < m$, alors :

$$a \equiv r \mod (m) \tag{5.4.102}$$

si et seulement si $a = qm + r$ où q est le quotient de a par m et r le reste. La démonstration est donc une conséquence immédiate de la définition de la congruence et de la division euclidienne.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#5.4.71) : Un entier b dans une classe de congruence modulo m est appelé "représentant de cette classe" (il est clair que par la relation d'équivalence que deux représentants d'une même classe sont donc congrus entre eux modulo m).

Nous allons pouvoir maintenant définir une addition et une multiplication sur les classes de congruences. Pour définir la somme de deux classes $[a]_m, [b]_m$, il suffit de prendre un représentant de chaque classe, de faire leur somme et de prendre la classe de congruence du résultat. Ainsi (voir les exemples plus haut) :

$$[a]_m + [b]_m = [a+b]_m \tag{5.4.103}$$

et de même pour la multiplication :

$$[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m \tag{5.4.104}$$

Par construction de la somme et du produit, nous constatons que la classe de 0 (zéro) est l'élément neutre pour l'addition :

$$[a]_m + [0]_m = [a]_m, \quad \forall a \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} \tag{5.4.105}$$

et la classe de l'entier 1 est l'élément neutre pour la multiplication :

$$[a]_m \cdot [1]_m = [a]_m, \quad \forall a \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} \tag{5.4.106}$$

Définition (#5.4.72) : Un élément $[a]_m$ de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est une "unité" s'il existe un élément $[b]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tel que $[a]_m \cdot [b]_m$.

Le théorème suivant permet de caractériser les classes modulo m qui sont des unités dans $\mathbb{Z}/m/\mathbb{Z}$:

Théorème 5.25. Soit $[a]$ un élément de $\mathbb{Z}/m/\mathbb{Z}$. Alors $[a]$ est une unité si et seulement si $(a, m) = 1$.

Démonstration 5.25.1. Supposons d'abord que $(a, m) = 1$. Alors par Bézout, nous avons son identité :

$$as + mr = 1 \qquad (5.4.107)$$

Autrement dit, as est congru à 1 modulo m. Mais ceci est équivalent à écrire par définition que $[a][s] = 1$ ce qui montre que $[a]$ est une unité. Réciproquement, si $[a]$ est une unité, ceci implique qu'il existe une classe $[s]$ telle que $[a][s] = 1$.

Ainsi, nous venons de démontrer que $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ constitue bien un anneau puisqu'il possède une addition, une multiplication, un élément neutre et un inverse ! !

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

5.4.3.5.2 Système complet de résidus

Définition (#5.4.73) : Un ensemble de nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{(m-1)} \mod (m)$ forme un "système complet de résidus", aussi nommé un "système de couverture", s'il satisfait $a_i = i \mod (m)$ pour $i = 0, 1, \ldots, m - 1$.

Ce type de système nous aidera à introduire dans la section Cryptographie (page **??**) une fonction importante utilisée pour sécuriser les dispositifs de communication à la fin du 20ème siècle et au début du 21ème siècle.

Pour introduire ce système, considérons le système fini suivant de congruences modulo 6 :

$$\begin{aligned} 6 &\equiv 0 \mod (6) \\ 13 &\equiv 1 \mod (6) \\ 2 &\equiv 2 \mod (6) \\ -3 &\equiv 3 \mod (6) \\ 22 &\equiv 4 \mod (6) \\ 11 &\equiv 5 \mod (6) \end{aligned} \qquad (5.4.108)$$

où comme le lecteur l'aura peut-être remarqué : aucun résidu ne se répète et les résidus pris deux à deux ne sont pas congrus modulo m (c'est ce dernier point qui fait que nous nous arrêtons à 5 dans l'exemple). Nous disons alors que "mutuellement non-congrus".

Si ces conditions sont satisfaites, nous disons alors que l'ensemble ordonné $\{6, 13, 2, -3, 22, 11\}$ est un "système complet de résidus modulo m". Un tel ensemble

n'est pas unique pour un module donné. Ainsi, l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ est aussi un système complet (trivial) de résidus modulo 6.

Si nous éliminons de ce sytème complet tous les nombres qui ne sont pas premier avec m, nous avons alors un "système réduit de résidus modulo m". Ainsi dans la cas ci-dessus, le système réduit de résidus module 6 sera $\{13, 11\}$.

Les systèmes réduits nous seront utiles dans la section de Cryptographie (page **??**) pour démontrer un résultat important dans les systèmes asymétriques à clé publique.

Nous verrons aussi dans la section de Cryptographie (page **??**), que la "fonction indicatrice d'Euler" lorsque m est premier (ce qui n'est pas le cas de l'exemple précédent) donne le cardinal du système réduit de résidus modulo m comme étant :

$$\phi(m) = m - 1 = \text{Card}\left(\{n \leq m, (n, m) = 1\}\right) \tag{5.4.109}$$

Donc sous couvert que m est premier, le système réduit de résidu s'écrira bien évidemment :

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_\phi(m)\} \tag{5.4.110}$$

5.4.3.5.3 Théorème des restes chinois

Dans sa forme de base, le théorème des résidus chinois déterminera un nombre n qui, divisé par certains diviseurs, laissera certains résiuds. Dans l'exemple de Sun Tzu (énoncé une terminologie moderne) : quel est le plus petit nombre n qui, divisé par 3, laisse un reste de 2, divisé par 5, laisse un reste de 3 et divisé par 7 laisse un reste de 2 ?

Le théorème des restes chinois peut être vu comme la résolution d'un système linéaire mais dans un ensemble modulaire. Pour beaucoup d'étudiants et futurs ingénieurs, ce théorème ne servira jamais dans la pratique, mais certains le retrouveront dans le domaine de la cryptographie (dans le cadre du décryptage en particulier).

Il existe comme toujours plusieurs démonstrations possibles mais nous avons opté pour celle qui nous semblait comme toujours la plus pédagogique.

Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Le système particulier de congruence (voir plus bas pour un exemple de résolution d'un système de trois congruences) :

$$\begin{aligned} x &\equiv a \mod (m) \\ x &\equiv b \mod (m) \end{aligned} \tag{5.4.111}$$

admet une unique solution.

Démonstration 5.25.2. Comme m et n sont imposés comme étant premiers entre eux, il existe alors u et v deux entiers relatifs tels que (application de l'identité de Bézout démontrée plus haut) :

$$um + vn = 1 \tag{5.4.112}$$

Nous avons donc :

$$aum + avn = a \tag{5.4.113}$$

En cours de traduction de l' anglais

C'est-à-dire :

$$avn \equiv a \mod (m) \tag{5.4.114}$$

Nous avons aussi in extenso :

$$bum + bvn = b \tag{5.4.115}$$

C'est-à-dire :

$$bum \equiv b \mod (n) \tag{5.4.116}$$

Donc afin d'être clair, nous avons donc pour l'instant :

$$um + vn = 1 \Rightarrow \begin{cases} avn \equiv a \mod (m) \\ bum \equiv b \mod (n) \end{cases} \tag{5.4.117}$$

Nous avons donc pour rappel :

$$bum \equiv b \mod (n) \Rightarrow bum + bvn = b \tag{5.4.118}$$

Mais nous pouvons aussi écrire avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$bum + \underbrace{(k + av)}_{=bv} n = b \tag{5.4.119}$$

Dès lors :

$$bum + avn \equiv b \mod (n) \tag{5.4.120}$$

De même, nous avons :

$$avn \equiv a \mod (m) \Rightarrow aum + avn = a \tag{5.4.121}$$

Mais nous pouvons aussi écrire avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\underbrace{(K + bu)}_{=au} m + avn = a \tag{5.4.122}$$

Dès lors :

$$bum + avn \equiv a \mod (m) \tag{5.4.123}$$

Donc afin d'être toujours clair, nous avons donc pour l'instant :

$$\begin{aligned} um + vn = 1 = (m, n) &\Rightarrow \begin{cases} avn \equiv a \mod (m) \\ bum \equiv b \mod (n) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} bum + avn \equiv a \mod (m) \\ bum + avn \equiv b \mod (n) \end{cases} \end{aligned} \tag{5.4.124}$$

Donc, il vient finalement que :

$$x = bum + avn \tag{5.4.125}$$

En cours de traduction de l'anglais

est une solution particulière du système. Mais nous avons aussi pour $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ de par la définition de la congruence :

$$\begin{aligned} bum + avn + im &\equiv a \mod (m) \\ bum + avn + jn &\equiv b \mod (n) \end{aligned} \tag{5.4.126}$$

Afin que x soit toujours solution du système, il faut avoir :

$$\begin{aligned} i &= n \\ j &= m \end{aligned} \tag{5.4.127}$$

et donc :

$$\begin{aligned} bum + avn + nm &\equiv a \mod (m) \\ bum + avn + mn &\equiv b \mod (n) \end{aligned} \tag{5.4.128}$$

Dès lors, une solution un peu plus générale est :

$$x = bum + avn + nm \tag{5.4.129}$$

mais in extenso, nous avons la solution générale :

$$x = bum + avn + znm \tag{5.4.130}$$

avec $z \in \mathbb{Z}$. Nous disons alors parfois que la solution est "x modulo nm".

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

A titre d'exemple, considérons le problème de la recherche d'un entier x tel que :

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod (3) \\ x &\equiv 3 \mod (4) \\ x &\equiv 1 \mod (3) \end{aligned} \tag{5.4.131}$$

Une approche par force brute convertit ces congruences en ensembles et écrit les éléments jusqu'auproduit de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (les solutions modulo 60 pour chaque congruence) :

$$\begin{aligned} x &\in \{2, 5, 8, \mathbf{11}, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59\} \\ x &\in \{3, 7, \mathbf{11}, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59\} \\ x &\in \{1, 6, \mathbf{11}, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56\} \end{aligned} \tag{5.4.132}$$

Pour trouver un x qui satisfait les trois congruences, intersectez les trois ensembles pour obtenir :

$$x = 11 \tag{5.4.133}$$

Cette solution est modulo 60, donc toutes les solutions sont exprimées comme suit :

$$x \equiv 11 \mod (60) \tag{5.4.134}$$

Une autre façon de trouver une solution consiste à utiliser l'algèbre de base, l'arithmétique modulaire et la substitution par étapes.

Nous commençons par traduire ces congruences en équations pour certains t, s et u :

$$\begin{aligned} x &= 2+3t \\ x &= 3+4s \\ x &= 1+5u \end{aligned} \tag{5.4.135}$$

Après nous substituons le x de la première équation dans la deuxième congruence :

$$2+3t \equiv 3 \mod (4) \tag{5.4.136}$$

C'est-à-dire :

$$3t \equiv 1 \mod (4) \tag{5.4.137}$$

Dès lors :

$$t \equiv 3 \mod (4) \tag{5.4.138}$$

ce qui signifie que $t = 3+4s$ pour un entier s. Remplaçons maintenant t par la première équation :

$$x = 2+3t = 2+3(3+4s) = 11+12s \tag{5.4.139}$$

Substituons ce x à la troisième congruence :

$$11+12s \equiv 1 \mod (5) \tag{5.4.140}$$

C'est-à-dire :

$$1+1s \equiv 1 \mod (5) \tag{5.4.141}$$

Dès lors :

$$2s \equiv 0 \mod (5) \tag{5.4.142}$$

signifiant que $s = 0+5u$ pour un entier donné u. Finalement :

$$x = 11+12s = 11+12(5u) = 11+60u \tag{5.4.143}$$

Donc nous avons pour solution $\{11, 71, 131, 191, \ldots\}$.

5.4.3.6 Fractions continues

Définition (#5.4.74) : Une "fraction continue" est une expression obtenue par un processus itératif consistant à représenter un nombre comme la somme de sa partie entière et l'inverse d'un autre nombre, puis à écrire cet autre nombre comme la somme de sa partie entière et l'invere d'une autre nombre, etc. Dans une fraction continue finie (ou "fraction continue terminée"), l'itération / récursivité est terminée après un nombre fini d'étapes en utilisant un entier au lieu d'une autre fraction continue. En revanche, une fraction continue infinie est une expression infinie. Dans les deux cas, tous les entiers de la séquence, autres que le premier, doivent être positifs. Les entiers a_i sont nommés les "coefficients" ou "termes" de la fraction continue.

La notion de fraction continue remonte à l'époque de Fermat et atteint son apogée avec les travaux de Lagrange et Legendre vers la fin du 18ème siècle. Ces fractions sont importantes en physique car nous les retrouvons en acoustique ainsi que dans la démarche intellectuelle qui a amené Galois à créer sa théorie des groupes et aussi dans l'étude des engrenages (pour les complications horlogères comme discuté dans la section d'Ingénierie Mécanique **??**).

Pour comprendre la motivation des fractions continues, introduisons un exemple élémentaire.

Considérons un nombre rationnel typique :

$$\frac{415}{93} \qquad (5.4.144)$$

qui est à peu près égal à 4.4624.

En première approximation, commençons avec 4, qui est la partie entière :

$$\frac{415}{93}=4+\frac{43}{93} \qquad (5.4.145)$$

Notez que la partie décimale est l'inverse de $93/43$, ce qui correspond à environ 2.1628. Utilisons la partie entière, 2, comme approximation de l'inverse, pour obtenir une seconde approximation de :

$$\frac{93}{43}=2+\frac{7}{43} \qquad (5.4.146)$$

Nous avons donc jusqu'ici :

$$\frac{415}{93}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{7}{43}} \qquad (5.4.147)$$

Notez que la partie décimale est maintenant l'inverse de $43/7$, soit environ 6.1429. Utilisons la partie entière, 6, comme approximation de l'inverse, pour obtenir une seconde approximation de :

$$\frac{43}{7}=6+\frac{1}{7} \qquad (5.4.148)$$

Ainsi :

$$\frac{415}{93}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}} \qquad (5.4.149)$$

En cours de traduction de l'anglais

Notez que la partie fractionnaire $1/7$ est l'inverse de 7, ce qui correspond à ... 7 Utilisons la partie entière, 7, comme approximation de l'inverse, pour obtenir une seconde approximation de :

$$\frac{7}{1}=7+\frac{0}{1} \tag{5.4.150}$$

Ainsi, nous avons :

$$\frac{415}{93}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{0}{1}}}}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}} \tag{5.4.151}$$

Cette expression est nommée comme nous le savons la "représentation en fraction continue du nombre".

En abandonnant certaines des parties les moins essentielles de l'expression :

$$\frac{415}{93}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}} \tag{5.4.152}$$

nous donne la notation condensée :

$$\frac{415}{93}=[4;2,6,7] \tag{5.4.153}$$

Notez qu'il est habituel de remplacer uniquement la première virgule par un point-virgule.

Comme généralisation de l'exemple précédent, considérons dans un premier temps le nombre rationnel a/b avec $(a,b)=1$ avec $b>0$ et $a>b$. Nous savons que tous les quotients q_i et les restes r_i sont dans le cadre de la division euclidienne des entiers positifs.

Rappelons l'algorithme d'Euclide vu plus haut (mais noté de manière un peu différente) :

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b}\\&\frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1}\\&\frac{r_1}{r_2}=q_3+\frac{r_3}{r_2}\\&\ldots\\&\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_n\end{aligned} \tag{5.4.154}$$

En cours de traduction de l' anglais

Par substitutions successives, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=q_1+\frac{1}{b/r_1}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{r_1/r_2}}\\&=\ldots\\&=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{\cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{q_{n_1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}}\end{aligned}\tag{5.4.155}$$

Ce qui est aussi parfois noté :

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{1}{1/\varepsilon_1}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\varepsilon_2}=\ldots}\tag{5.4.156}$$

Ainsi, tout nombre rationnel positif peut s'exprimer comme une fraction continue finie où $q_n \in \mathbb{N}$.

Reprenant notre dernier exemple :

$$\frac{415}{93}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{0}{1}}}}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}}\tag{5.4.157}$$

nous notons qu'effectivement que $q_n \in \mathbb{N}$ et que par construction :

$$q_n=\left[\frac{1}{\varepsilon_{n-1}}\right]\tag{5.4.158}$$

où les crochets représentent la partie entière et nous avons aussi :

$$\frac{1}{\varepsilon_{n_1}}=q_n+\varepsilon\tag{5.4.159}$$

Le développement du nombre a/b est nommé le "développement du nombre a/b en fraction continue finie" et est condensé dans la notation suivante :

$$\boxed{[q_1;q_2,q_3,\ldots,q_n]}\tag{5.4.160}$$

Voyons un autre exemple :

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Voyons comment extraire la racine carrée d'un nombre A (par exemple $A = 2$ tel que nous voulons extraire $\sqrt{2}$) par la méthode des fractions continues.

Soit a le plus grand nombre entier dont le carré a^2 est plus petit que A. On le soustrait de A. Il y a donc un reste de (pour $A = 2$, nous avons $a = 1$) :

$$r = A - a^2 = (\sqrt{A} - a)(\sqrt{A} + a) \tag{5.4.161}$$

où nous avons utilisé une des identités remarquables que nous prouverons dans la section d'Algèbre plus loin (page 1345). D'où en divisant les deux membres par la deuxième parenthèse, nous avons :

$$\sqrt{A} - a = \frac{r}{\sqrt{A} + a} \tag{5.4.162}$$

Soit :

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{\sqrt{A} + a} \tag{5.4.163}$$

Dans le dénominateur, nous remplaçons $\sqrt{A}$ par :

$$a + \frac{r}{\sqrt{A} + a} \tag{5.4.164}$$

Cela donne :

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{\sqrt{A} + a}} \tag{5.4.165}$$

etc.... on voit ainsi que le système est simple pour déterminer l'expression d'une racine en termes de fraction continue.

Nous considérons maintenant comme intuitif que chaque nombre rationnel peut être exprimé en fraction continue finie et inversement que toute fraction continue finie représente un nombre rationnel. Par extension, un nombre irrationnel est représenté par une fraction continue infinie !

Considérons maintenant $[q_1; q_2, q_3, \ldots, q_n]$ une fraction continue finie. La fraction continue :

$$C_k = [q_1; q_2, \ldots, q_n] \tag{5.4.166}$$

où $k = 1, 2, \ldots, n$ est appelée la "k-ème réduite" ou "k-ème convergente" ou encore le "k-ème quotient partiel".

Avec cette notation, nous avons :

$$\begin{aligned}
C_1 &= [q_1] = q_1 \\
C_2 &= [q_1; q_2] = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1q_2+1}{q_2} \\
C_3 &= [q_1; q_2, q_3] = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} = \frac{(q_1q_2+1)\cdot q_3 + q_1}{q_2q_3+1} \\
C_4 &= [q_1; q_2, q_3, q_4] = \frac{((q_1q_2+1)\cdot q_3 + q_1)\cdot q_4 + (q_1q_2+1)}{(q_2q_3+1)\cdot q_4 + q_2}
\end{aligned} \tag{5.4.167}$$

Pour simplifier les expressions ci-dessus, nous introduisons les suites $\{n_i\}, \{d_i\}$ (n pour **n**umérateur et d pour **d**énominateur) définies par :

$$\begin{array}{lll}
n_0 = 1 & n_1 = q_1, \ldots & n_i = q_i n_{i-1} + n_{i-2} \\
d_0 = 0 & d_1 = 1, \ldots & d_i = q_i d_{i-1} + d_{i-2}
\end{array} \tag{5.4.168}$$

à l'aide de cette construction, nous avons une petite inégalité immédiate intéressante pour un peu plus loin :

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < \ldots \tag{5.4.169}$$

Avec la définition ci-dessus, nous constatons que :

$$C_1 = \frac{n_1}{d_1}, \quad C_2 = \frac{n_2}{d_2}, \quad C_3 = \frac{n_3}{d_3}, \quad \ldots, \quad C_i = \frac{n_i}{d_i} \tag{5.4.170}$$

Soit en généralisant :

$$C_k = [q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k] = \frac{n_k}{d_k} \tag{5.4.171}$$

Maintenant, montrons pour un usage ultérieur que pour $i \geq 1$, nous avons :

$$n_i d_{i-1} - d_i n_{i-1} = (-1)^i \tag{5.4.172}$$

Le résultat est immédiat pour $i = 1$. En supposant que le résultat est vrai pour i montrons qu'il est aussi vrai pour $i+1$. Puisque :

$$n_{i+1}d_i - d_{i+1}n_i = (q_{i+1}n_i + n_{i-1})d_i - (q_{i+1}d_i + d_{i-1})n_i = -(d_{i-1}n_i - n_{i-1}d_i) = (-1)^{i+1} \tag{5.4.173}$$

alors en utilisant l'hypothèse d'induction, nous obtenons le résultat !

Nous pouvons maintenant établir une relation indispensable pour la suite.

Théorème 5.26. Montrons que si C_k est la k-ème réduite de la fraction continue simple finie $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ alors :

$$C_1 < C_3 < C_5 < \ldots < C_6 < C_4 < C_2 \tag{5.4.174}$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 5.26.1.

$$\begin{aligned}C_{k+2}-C_k &= (C_{k+2}-C_{k+1})+(C_{k+1}-C_k)=\left(\frac{n_{k+2}}{d_{k+2}}-\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}}\right)+\left(\frac{n_{k+1}}{d_{k+1}}-\frac{n_k}{d_k}\right)\\ &=\left(\frac{n_{k+2}d_{k+1}-n_{k+1}d_{k+2}}{d_{k+2}d_{k+1}}\right)+\left(\frac{n_{k+1}d_k-n_kd_{k+1}}{d_{k+1}d_k}\right)=\frac{(-1)^{k+2}}{d_{k+2}d_{k+1}}+\frac{(-1)^{k+1}}{d_{k+1}d_k}\\ &=\frac{(-1)^{k+2}d_k+(-1)^{k+1}d_{k+2}}{d_{k+2}d_{k+1}d_k}=\frac{(-1)^{k+1}(-1)d_k+(-1)^{k+1}d_{k+2}}{d_{k+2}d_{k+1}d_k}\\ &=\frac{-(-1)^{k+1}d_k+(-1)^{k+1}d_{k+2}}{d_{k+2}d_{k+1}d_k}=\frac{(-1)^{k+1}(d_{k+2}-d_k)}{d_{k+2}d_{k+1}d_k}\end{aligned} \quad (5.4.175)$$

puisque :

$$0=d_0<d_1<d_2<d_3<\ldots \quad (5.4.176)$$

donc :

$$d_{k+2}-d_k>0 \quad (5.4.177)$$

ce qui nous indique que le signe $C_{k+1}-C_k$ est le même que celui de $(-1)^{k+1}$.

Il en résulte que $C_{k+2}>C_k$ pour k impair, et que $C_{k+2}<C_k$ pour k pair. Il s'ensuit que :

$$C_1<C_3<C_5<\ldots \quad \text{et} \quad C_2>C_4>C_6>\ldots \quad (5.4.178)$$

Ensuite, puisque :

$$C_k-C_{k-1}=\frac{n_k}{d_k}-\frac{n_{k-1}}{d_{k-1}}=\frac{n_kd_{k-1}-n_{k-1}d_k}{d_kd_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{d_kd_{k-1}} \quad (5.4.179)$$

Donc pour k pair, nous avons $C_k>C_{k-1}$, nous en déduisons donc :

$$C_1<C_3<C_5<\ldots<C_6<C_4<C_2 \quad (5.4.180)$$

■ Q.E.D.

Montrons maintenant que toute fraction continue infinie peut représenter un nombre irrationnel quelconque.

En des termes formels, si $\{q_n\}$ est une suite d'entiers tous positifs et que nous considérons $C_n=[q_1;q_2,\ldots,q_n]$ alors celui-ci converge nécessairement vers un nombre réel si $n\rightarrow+\infty$.

Effectivement il n'est pas difficile d'observer (c'est assez intuitif) avec un exemple pratique que nous avons :

$$C_k-C_{k-1}\rightarrow 0 \quad (5.4.181)$$

lorsque $k\rightarrow+\infty$.

Maintenant, notons x un nombre réel quelconque et $q_1=[x]$ la partie entière de ce nombre réel. Alors nous avons vu tout au début de notre étude des fractions continues que :

$$x=q_1+\varepsilon_1 \quad (5.4.182)$$

En cours de traduction de l'anglais

Il vient donc que :

$$\varepsilon_1 = x - q_1 \tag{5.4.183}$$

Attardons-nous pour les nécessités de la section d'Acoustique (page **??**) sur le calcul d'une fraction continue d'un logarithme en utilisant la relation précédente !

D'abord rappelons que :

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{1/\varepsilon_1} = q_1 + \frac{1}{q_2 + 1/\varepsilon_2} = \ldots \tag{5.4.184}$$

Soit (relation démontrée dans la section d'Analyse Fonctionnelle page 2259) :

$$x = \log_a(u) = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} \tag{5.4.185}$$

avec $1 < a < u$ et $(a, u) = 1$.

Soit y_n défini par :

$$y_{-1} = u \quad y_0 = a \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{y_n^{q_1}} \tag{5.4.186}$$

Alors démontrons que :

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(y_{n-2})}{\ln(y_{n-1})} - q_n \tag{5.4.187}$$

En effet, pour $n = 1$ nous avons :

$$\varepsilon_1 = x - q_1 = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} - q_1 = \frac{\ln(y_{-1})}{\ln(y_0)} - q_1 \tag{5.4.188}$$

pour $n = 2$ nous utilisons d'abord le fait que :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = x - q_1 = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} - q_1 = \frac{\ln(u) - q_1\ln(a)}{\ln(a)} = \frac{\ln(u) - \ln(a^{q_1})}{\ln(a)}\\ = \frac{\ln\left(\dfrac{u}{a^{q_1}}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\dfrac{y_{-1}}{y_0^{q_1}}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln(y_1)}{\ln(a)}\end{aligned} \tag{5.4.189}$$

donc :

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{\ln(a)}{\ln(y_1)} \tag{5.4.190}$$

et puisque nous avions montré que :

$$\frac{1}{\varepsilon_{n-1}} = q_n + \varepsilon_n \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} - q_2 = \frac{\ln(a)}{\ln(y_1)} - q_2 = \frac{\ln(y_0)}{\ln(y_1)} - q_2 \tag{5.4.191}$$

etc... par récurrence ce qui démontre notre droit d'utiliser ce changement d'écriture.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Cherchons l'expression de la fraction continue de :

$$x=\log_a(u)=\log_2(3) \tag{5.4.192}$$

Nous savons en jouant avec la définition du logarithme que :

$$2^1<3<2^2 \tag{5.4.193}$$

donc :

$$\begin{gathered}\log_2(2^1)<\log_2(3)<\log_2(2^2)\Rightarrow\log_2(2)<\log_2(3)<2\log_2(2)\\ \Rightarrow 1<\dfrac{\log_2(3)}{\log_2(2)}<2\Rightarrow 1<\log_2(3)<2\end{gathered} \tag{5.4.194}$$

donc $q_1=1$. Nous avons alors :

$$\varepsilon_1=\frac{\ln(y_{1-2})}{\ln(y_{1_1})}-q_1=\frac{\ln(y_{-1})}{\ln(y_0)}-q_1 \tag{5.4.195}$$

et puisque :

$$y_{-1}=u=3 \qquad y_0=a=2 \tag{5.4.196}$$

il vient :

$$\varepsilon_1=\frac{\ln(3)}{\ln(2)}-1 \tag{5.4.197}$$

Donc nous avons le premier quotient partiel :

$$\frac{a}{b}=\log_2(3)=q_1+\frac{1}{1/\varepsilon_1}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}-1}}=\ldots \tag{5.4.198}$$

Et in extenso nous avons déjà :

$$y_{0+1}=y_1=\frac{y_{-1}}{y_0^{q_1}}=\frac{3}{2^1}=\frac{3}{2} \tag{5.4.199}$$

Simplifions :

$$\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}-1\right)^{-1}=\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{\ln(2)}{\ln(y_1)} \tag{5.4.200}$$

Donc le premier quotient partiel peut s'écrire :

$$\log_2(3)=1+\cfrac{1}{\cfrac{\ln(2)}{\ln(y_1)}}=\ldots \tag{5.4.201}$$

et passons au deuxième quotient partiel. Nous savons déjà pour cela que :

$$1<\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}<2 \tag{5.4.202}$$

~90 %

21 votes, 68.57%

En cours de traduction de l' anglais

5.5. Théorie des Ensembles

Lors de notre étude des nombres, des opérateurs, et de la théorie des nombres (dans les chapitres du même nom), nous avons assez souvent utilisé les termes "groupes", "anneaux", "corps", "homomorphisme", etc. et continuerons par la suite à le faire encore de nombreuses fois. Outre le fait que ces concepts soient d'une extrême importance, permettant de faire des démonstrations ou de construire des concepts mathématiques indispensables à l'étude de la physique théorique contemporaine (physique quantique des champs, théories des cordes, modèle standard,...), ils permettent de comprendre les composants et les propriétés de base de la mathématique et de ses opérateurs en rangeant ceux-ci par catégories distinctes. Ainsi, choisir de mettre la théorie des ensembles aussi tard dans ce livre est un choix tout à fait discutable puisque rigoureusement c'est par là que tout commence... Cependant, nous avions besoin d'exposer quand même la théorie de la démonstration ne serait-ce que pour les notations et les méthodes dont il sera fait usage ici.

Par ailleurs, lors de l'enseignement des mathématiques modernes dans le secondaire, voire primaire (années 1970), on introduisit le langage des ensembles et l'étude préalable des relations binaires pour une approche plus rigoureuse de la notion de fonctions et d'applications (voir la définition plus loin) et de la mathématique en général.

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#5.5.75) : Nous parlons de "diagramme sagittal" (ou de "schéma sagittal" du latin sagitta = flèche) pour tout schéma représentant une correspondance entre les composantes de deux ensembles reliés totalement ou partiellement par un ensemble de flèches. Quand il n'y a de pas de flèches nous parlons de "Diagramme de Venn".

La représentation graphique d'une fonction définie de l'ensemble $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ vers l'ensemble $F = \{0, 1, 2, 4, 9\}$ conduirait au diagramme sagittal ci-dessous :

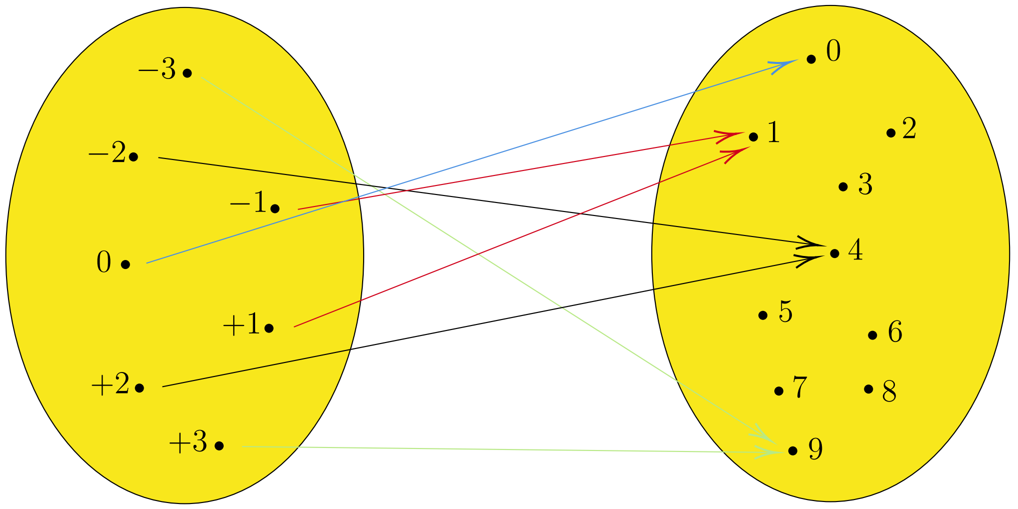


FIG. 5.50 – Exemple de diagramme sagittal d'un ensemble de définition à un autre ensemble d'arrivée

Une relation de E dans E (usuellement noté $E \mapsto E$) fournirait un diagramme sagittal du type :

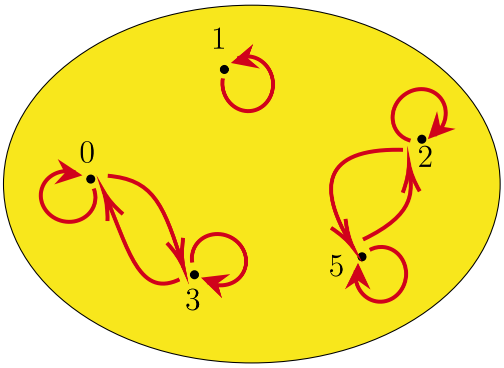


FIG. 5.51 – **Fonction renvoyant dans son propre ensemble de définition**

Le bouclage de chaque élément montrant une "relation réflexive" et la présence systématique d'une flèche retour indiquant une "relation symétrique".

Définition (#5.5.76) : Si l'ensemble d'arrivée est identique à l'ensemble de départ, nous disons que nous avons une "relation binaire".

Cependant le choix d'introduire la théorie des ensembles dans les classes d'école a une raison aussi un peu autre. Au fait, dans un souci de rigueur interne (in extenso : non liée à la réalité), une très grande partie des mathématiques a été reconstruite à l'intérieur d'un seul cadre axiomatique, dénommé donc "théorie des ensembles", dans le sens où chaque concept mathématique (autrefois indépendant des autres) est ramené à une définition dont tous les constituants logiques proviennent de ce même cadre : elle est considérée comme fondamentale. Ainsi, la rigueur d'un raisonnement effectué au sein de la théorie des ensembles est garantie par le fait que le cadre est "non-contradictoire" ou "consistant". Voyons les définitions qui construisent ce cadre.

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#5.5.77) :

D1. Nous appelons "ensemble" toute liste, collection ou rassemblement d'objets bien définis, explicitement ou implicitement.

D2. Un "Univers" U est un objet dont les constituants sont des ensembles.

Il faut noter que ce que les mathématiciens appellent "Univers" n'est pas un ensemble ! En fait il s'agit d'un modèle qui satisfait aux axiomes des ensembles.

Effectivement, nous verrons que nous ne pouvons pas parler de l'ensemble de tous les ensembles (ce n'est pas un ensemble), pour désigner l'objet qui est constitué de tous les ensembles ainsi, nous parlons "d'Univers".

D3. Nous appelons "éléments" ou "membres de l'ensemble" les objets appartenant à l'ensemble et nous notons :

$$p \in A \tag{5.5.1}$$

si p est un élément de l'ensemble A et dans le cas contraire :

$$p \notin A \tag{5.5.2}$$

Si B est une "partie" de A, ou "sous-ensemble" de A, nous notons cela :

$$B \subset A \quad \text{or} \quad A \supset B \tag{5.5.3}$$

Dès lors :

$$\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A \tag{5.5.4}$$

✍**Exemples :**

E1. $A = \{1, 2, 3\}$

E2. $X = \{X \mid x \text{ est un entier positif}\}$

D4. Nous pouvons munir les ensembles d'un certain nombre de relations qui permettent de comparer leurs éléments (c'est utile parfois...) ou de comparer certaines de leurs propriétés. Ces relations sont appelées "relations de comparaisons" ou "relations d'ordre" (voir section Opérateurs page 290).

Edition de l'anglais

Remarques

R1. La structure d'ensemble ordonné a été mise en place à la base dans le cadre de la théorie des Nombres par Cantor et Dedekind.

R2. Comme nous l'avons démontré dans la section sur les Opérateurs, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont totalement ordonnés par les relations usuelles $\leq, \geq$. La relation $<$, souvent dite "d'ordre strict", n'est pas une relation d'ordre car non réflexive et non antisymétrique (voir section Opérateurs page 289). Par exemple, dans $\mathbb{N}$, la relation "a divise b", souvent notée par le symbole "|", est un ordre partiel.

R3. Si $\mathcal{R}$ est un ordre sur E et F est une partie de E, la restriction à F de la relation $\mathcal{R}$ est un ordre sur F, dit "ordre induit par $\mathcal{R}$ dans F".

R4. Si $\mathcal{R}$ est un ordre sur E, la relation $\mathcal{R}'$ définie par :

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

est un ordre sur E, dit "ordre réciproque" de $\mathcal{R}$. L'ordre réciproque de l'ordre usuel $\leq$ est l'ordre noté $\geq$ ainsi que l'ordre réciproque de l'ordre "a divise b" dans $\mathbb{N}$ est l'ordre "b est multiple de a".

L'ensemble est l'entité mathématique de base, dont l'existence est posée : il n'est pas défini en tant que tel, mais par ses propriétés, données par les axiomes. Il fait appel à une procédure humaine : une sorte de fonction de catégorisation, qui permet à la pensée de distinguer plusieurs éléments qualifiés d'indépendants.

Théorème 5.27. Nous pouvons démontrer à partir de ces concepts, que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal n est 2^n.

Démonstration 5.27.1. Il y a d'abord l'ensemble vide $\varnothing$, soit 0 élément choisi parmi n, in extenso C_0^n (notation du coefficient binomial non conforme à la norme ISO 31-11 !) conformément à ce que nous avons vu dans le section de Probabilités :

$$C_k^n = \vec{v} = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)} \tag{5.5.5}$$

et ainsi de suite...

Le nombre de sous-ensembles (cardinal) de E correspond donc à la sommation de tous les coefficients binomiaux :

$$\text{Card}\,(P\,(E)) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \tag{5.5.6}$$

Or, nous avons (voir section Calcul Algébrique page 1347) :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k} \tag{5.5.7}$$

Donc :

$$\text{Card}\,(P\,(E)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \tag{5.5.8}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

✍**Exemple :**

Considérons l'ensemble $S = \{x_1, x_2, x_3\}$, nous avons l'ensemble des parties $P(S)$ constitué par :

- L'ensemble vide : $\{\} = \varnothing$
- Les singletons : x_1, x_2, x_3
- Les duets : $x_1, x_2, x_1, x_3, x_2, x_3$
- Lui-même : $\{x_1, x_2, x_3\}$

Tel que :

$$P(S) = \{\varnothing, x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_1, x_3, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3\} \tag{5.5.9}$$

Ce qui fait bien 8 éléments !

Remarque

L'ordre dans lequel sont différenciés les éléments ne rentre pas en compte lors du comptage des parties de l'ensemble de départ.

En mathématique appliquée, nous travaillerons presque exclusivement avec des ensembles de nombres. Nous nous restreindrons donc à l'étude des définitions et propriétés de ces derniers.

Maintenant, formalisons les concepts de base permettant de travailler avec les ensembles les plus courants que nous rencontrons dans les cursus scolaires de base.

5.5.1 Axiomatique de Zermelo-Fraenkel

L'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, abrégée "axiomatique ZF-C", présentée ci-dessous a été formulée par Ernst Zermelo puis précisée par Adolf Abraham Fraenkel au début du 20ème siècle et complétée par l'axiome du choix (d'où le C majuscule dans ZF-C). Elle est considérée comme la plus naturelle dans le cadre de la théorie des ensembles.

Remarque

Il existe bien d'autres axiomatiques, basées sur le concept plus général de "classe", comme celle développée par von Neumann, Bernays et Gödel (pour les notations, voir le section traitant de la Théorie De La Démonstration page 130).

Strictement et techniquement parlant, les axiomes de ZF sont des énoncés du calcul des prédicats du premier ordre (voir section Théorie De La Démonstration page 161) égalitaire dans un langage ayant un seul symbole primitif pour l'appartenance (relation binaire). Ce qui suit doit donc seulement être perçu comme une tentative d'exprimer en français la signification attendue de ces axiomes.

A1. Axiome d'extensionnalité :

Deux ensembles sont égaux si, et seulement si ils ont les mêmes éléments. C'est ce que nous notons :

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B) \wedge (\forall x \in B, x \in A) \tag{5.5.10}$$

Donc A et B sont égaux si tout élément x de A appartient aussi à B et tout élément x de B appartient aussi à A.

A2. Axiome de l'ensemble vide :

L'ensemble vide existe, nous le notons :

$$\varnothing \tag{5.5.11}$$

et il n'a aucun élément, son cardinal vaut donc 0.

En réalité cet axiome peut être déduit à partir d'un autre axiome que nous verrons un peu plus loin mais il est pratique à introduire en tant que tel par commodité pédagogique dans les petites classes.

A3. Axiome de la paire :

Si A et B sont deux ensembles, alors, il existe un ensemble C contenant A et B et eux seuls comme éléments. Cet ensemble C se note alors $\{A, B\}$.

Du point de vue des ensembles considérés comme des éléments cela donne :

$$\forall A \forall B \exists C : \quad A \in C \wedge B \in C \tag{5.5.12}$$

Cet axiome montre aussi l'existence du "singleton" (single=seul) d'un ensemble noté :

$$\{X\} \tag{5.5.13}$$

qui est un ensemble dont le seul élément est X (donc de cardinal unitaire). Il suffit pour cela d'appliquer l'axiome en posant l'égalité entre A et B.

A4. Axiome de la somme (dit aussi "axiome de l'union" ou encore "axiome de la réunion") :

Cet axiome permet de construire la réunion (ou "union") d'un ensemble. Dit de façon plus commune : la réunion d'une famille quelconque d'un ensemble, est un... ensemble.

La réunion d'une famille quelconque d'un ensemble est souvent noté :

$$\bigcup_i A_i \tag{5.5.14}$$

ou si nous prenons certains de ses éléments :

$$\bigcup_{x \in A} x_i \tag{5.5.15}$$

A5. Axiome des parties (dit aussi "axiome de l'ensemble des parties") :

Il exprime que pour tout ensemble A, l'ensemble de ses parties $P(A)$ existe (ne pas confondre la notation "P" avec celle de la probabilité !).

Donc à tout ensemble A, nous pouvons associer un ensemble B qui contient exactement les parties (in extenso les sous-ensembles) C du premier :

$$\forall A \exists B \forall C : \quad (C \in B \Leftrightarrow C \subset A) \tag{5.5.16}$$

A6. Axiome de l'infini :

Cet axiome exprime le fait qu'il existe un ensemble infini. Pour le formaliser, nous disons qu'il existe un ensemble, dit "ensemble autosuccesseur" A contenant $\varnothing$ (l'ensemble vide) tel que si x appartient à A, alors $x \cup \{x\}$ appartient également à A :

$$A \text{ est autosuccesseur} \Leftrightarrow (\varnothing \in A) \wedge (x \in A \Rightarrow (x \cup \{x\}) \in A) \tag{5.5.17}$$

Cet axiome exprime donc que l'ensemble des entiers existe. Effectivement, $\mathbb{N}$ est ainsi le plus petit ensemble autosuccesseur, au sens de l'inclusion $\mathbb{N} = \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing, \ldots\}\}\}$ et par convention nous notons (où nous construisons l'ensemble des Naturels) :

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ 1 &= \{\varnothing\} \\ 2 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{5.5.18}$$

En cours de traduction de l' anglais

A7. Axiome de régularité (dit aussi "axiome de fondation") :

Le but principal de cet axiome est d'éliminer la possibilité d'avoir A comme élément de lui-même.

Ainsi, pour tout ensemble non vide A, il existe un ensemble B qui est élément de A tel qu'aucun élément de A ne soit élément de B (il faut bien différencier le niveau du langage utilisé, un ensemble et ses éléments n'ont pas le même statut) ce que nous notons :

$$\forall A \neq \varnothing : \quad \exists B \in A, A \cap B = \varnothing \tag{5.5.19}$$

et en conséquence nous obtenons ce que nous voulons. c'est-à-dire :

$$\forall A, A \notin A \tag{5.5.20}$$

Démonstration 5.27.2. En effet, soit A un ensemble tel que $A \in A$. Considérons le singleton $\{A\}$, ensemble dont le seul élément est A. D'après l'axiome de fondation, nous devons avoir un élément de ce singleton qui n'a aucun élément en commun avec lui. Mais le seul élément possible est A lui-même, c'est-à-dire que nous devons avoir :

$$A \cap \{A\} = \varnothing \tag{5.5.21}$$

Or par hypothèse, $A \in A$ et par construction $A \in \{A\}$. Donc :

$$A \in (A \cap \{A\}) \tag{5.5.22}$$

ce qui contredit l'assertion précédente. Dès lors

$$A \notin A \tag{5.5.23}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Tout ensemble contient comme sous-ensemble l'ensemble vide $\emptyset = \{\}$, et il se contient également de manière tout aussi triviale comme sous-ensemble. Pour l'ensemble vide, ces deux cas sont en fait les mêmes, et en effet l'ensemble vide est le sous-ensemble unique de l'ensemble vide. Nous pouvons donc former l'ensemble $\{\emptyset\}$ dont le seul membre est $\emptyset$ mais notez que $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, car $\emptyset \in \{\emptyset\}$ cependant $\emptyset \notin \emptyset$. Autrement dit : rien peut faire partie de quelque chose mais ne peut pas se contenir lui-même !

A8. Axiome de remplacement (dit aussi "schéma de remplacement") :

Cet axiome exprime le fait que si une formule f est une fonctionnelle alors pour tout ensemble A, il existe un ensemble B constitué exactement des images des éléments A par cette fonction.

Soient, de manière un peu plus formelle, l'ensemble A d'éléments a et la relation binaire f (qui est donc en toute généralité une fonctionnelle), il existe un ensemble B constitué des éléments b tel que $f(a, b)$ soit vraie. Si f est une fonction où b est non libre cela signifie alors que :

$$b = f(A) \text{ et } B = f(A) \tag{5.5.24}$$

De manière technique nous écrivons cet axiome sous la forme :

$$\forall A\ \exists a \in A\ \exists! f: \quad f(a,b) \Rightarrow \exists B \forall a \in A \exists b \in B f(a,b) \tag{5.5.25}$$

Donc pour tout ensemble A et tout élément qu'il contient, il existe un et un seul b défini par la fonctionnelle f tel qu'il existe un ensemble B où pour tout élément a appartenant à l'ensemble A il existe un b appartenant à l'ensemble B défini par la fonctionnelle f.

Voyons un exemple avec le prédicat binaire suivant qui pour la valeur de tout a de A détermine la valeur de tout b de B :

$$P(a,b) = (a = 1 \wedge b = 2) \vee (a = 3 \wedge b = 4) \tag{5.5.26}$$

Donc de la connaissance que a vaut 1 nous en dérivons que b vaut 2 et de manière similaire (in extenso par remplacement) si a vaut 3, nous en dérivons que b vaut 4.

Nous voyons bien au travers de ce petit exemple la relation forte qu'il y a à considérer le prédicat P comme une fonction naïve ! Par ailleurs, comme il y une infinité possible de fonctions f, le schéma de remplacement est considéré comme une infinité d'axiomes.

A9. Axiome de sélection (dit aussi "schéma de compréhension") :

Cet axiome exprime simplement que pour tout ensemble A et toute propriété P exprimable dans le langage de la théorie des ensembles, l'ensemble des éléments de A qui satisfont la propriété P existe.

Donc de manière plus formelle, à tout ensemble A et toute condition ou proposition $P(x)$, il correspond un ensemble B dont les éléments sont exactement les éléments x de A pour lesquels $P(x)$ est vraie. C'est ce que nous notons :

$$B = \{x \in A : P(x)\} \tag{5.5.27}$$

De manière plus complète et rigoureuse nous avons en réalité pour toute fonctionnelle f ne comportant pas a comme variable libre :

$$\forall A \exists B \forall a: \quad a \in B \Leftrightarrow a \in A \wedge f \tag{5.5.28}$$

C'est typiquement l'axiome qui nous sert à construire l'ensemble des nombres pairs :

$$\{a \in \mathbb{N} \mid \exists b \in \mathbb{N}, a = 2b\} \tag{5.5.29}$$

ou à démontrer l'existence de l'ensemble vide (et qui rend caduc l'axiome de l'ensemble vide) car il suffit de poser qu'il existe un ensemble satisfaisant la propriété :

$$A \neq A \tag{5.5.30}$$

et ce quel que soit l'ensemble A. Et seulement l'ensemble vide satisfait cette propriété de par l'axiome de sélection.

Le respect des conditions très strictes de cet axiome permet d'éliminer les paradoxes de la "théorie naïve des ensembles", comme le paradoxe de Russell ou le paradoxe de Cantor qui ont invalidé la théorie naïve des ensembles.

Considérons par exemple l'ensemble R de Russell de tous les ensembles qui ne s'autocontiennent pas (notez bien que nous donnons une propriété de R sans expliciter quel est cet ensemble) :

$$R = \{E : E \notin E\} \tag{5.5.31}$$

En cours de traduction de l'anglais

Le problème est de savoir si R se contient ou non. Si $R \in R$, alors, R s'auto-contient, et, par définition $R \notin R$ et inversement. Chaque possibilité est donc contradictoire.

Si maintenant nous désignons par C l'ensemble de tous les ensembles (l'Universel de Cantor), nous avons en particulier :

$$P(C) \in C \tag{5.5.32}$$

ce qui est impossible (c.-à-d. par exemple avec la puissance du continu de l'ensemble de réels), d'après le théorème de Cantor (voir section Théorie des Nombres page 224).

Ces "paradoxes" (ou "antinomies syntaxiques") proviennent d'un non-respect des conditions d'application de l'axiome de sélection : pour définir E (dans l'exemple de Russel), il doit exister une proposition P qui porte sur l'ensemble R, qui doit être explicitée. La proposition définissant l'ensemble de Russell ou celui de Cantor n'indique pas quel est l'ensemble E. Elle est donc invalide !

Un exemple fort sympathique et fort connu (c'est la raison pour laquelle nous le présentons) permet peut-être de mieux comprendre (il s'agit du paradoxe de Russell dont nous avons déjà parlé plus longuement dans la sectopm de Théorie De La Démonstration page 138) :

Un jeune étudiant se rendit un jour chez son barbier. Il engagea la conversation et lui demanda s'il avait de nombreux concurrents dans sa jolie cité. De manière apparemment innocente, le barbier lui répondit : "Je n'ai aucune concurrence. En effet, de tous les hommes de la cité, je ne rase évidemment pas ceux qui se rasent eux-mêmes, mais j'ai le bonheur de raser tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes."

En quoi donc, une telle affirmation si simple put-elle mettre en défaut la logique de notre jeune étudiant si malin ?

La réponse est en effet innocente, jusqu'au moment où nous décidons de l'appliquer au cas du barbier : Se rase-t-il lui-même, Oui ou Non ?

Supposons qu'il se rase lui-même : il entre dans la catégorie de ceux qui se rasent eux-mêmes, dont le barbier a précisé qu'il ne les rasait évidemment pas.... Donc il ne rase pas lui-même........

Très bien ! Supposons alors qu'il ne se rase pas lui-même : il entre alors dans la catégorie de ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes, dont le barbier a précisé qu'il les rasait tous. Donc il se rase lui-même.

Finalement, ce malheureux barbier est dans une position étrange : s'il se rase lui-même, il ne se rase pas, et s'il ne se rase pas lui-même, il se rase. Cette logique est autodestructrice, stupidement contradictoire, rationnellement irrationnelle.

Vient alors l'axiome de sélection : Nous excluons le barbier de l'ensemble des personnes auxquelles s'applique la déclaration. Car en réalité, le problème vient du fait que le barbier est un élément de l'ensemble de tous les hommes de la cité. Ainsi, ce qui s'applique à tous les hommes ne s'applique pas au cas individuel du barbier.

A10. Axiome du choix :

étant donné un ensemble A d'ensembles non vides mutuellement disjoints, il existe un ensemble B (l'ensemble de choix pour A) contenant exactement un élément pour chaque membre de A.

En cours de traduction de l'anglais

Indiquons cependant que la question de l'axiomatisation et donc des fondements se trouva quand même ébranlée de deux questions à l'époque de leur construction : quels axiomes valides doivent être choisis et dans un système d'axiomes la mathématique est-elle cohérente (ne risque-t-on pas de voir apparaître une contradiction) ?

La première question fut soulevée d'abord par l'hypothèse du continu : si nous pouvons mettre deux ensembles de nombres en correspondance terme à terme, ils ont le même nombre d'éléments (cardinal). Nous pouvons mettre en correspondance les entiers $\mathbb{N}$ avec les rationnels $\mathbb{Q}$ comme nous l'avons démontré dans le section sur les Nombres (page 224), ils ont donc même cardinal, nous ne pouvons par contre mettre en correspondance les entiers avec les réels. La question est alors de savoir s'il y a un ensemble dont le nombre d'éléments serait situé entre les deux ou pas ? Cette question est importante pour construire la théorie classique de l'analyse et les mathématiciens choisissent en général de dire qu'il n'y en a pas, mais nous pouvons aussi dire le contraire.

En fait l'hypothèse du continu est liée de manière plus profonde à l'axiome du choix qui peut aussi être formulé de la manière suivante : si C est une collection d'ensembles non vides alors nous pouvons choisir un élément de chaque ensemble de la collection. Si C a un nombre fini d'éléments ou un nombre dénombrable d'éléments, l'axiome semble assez évident : nous pouvons ranger les ensembles de C en les numérotant, et le choix d'un élément dans chaque ensemble est simple. Là où ça se complique c'est lorsque l'ensemble C a la puissance du continu : comment choisir des éléments s'il n'y pas la possibilité de les numéroter ?

Finalement en 1938 Kurt Gödel montre que la théorie des ensembles est cohérente sans l'axiome du choix et sans l'hypothèse du continu aussi bien qu'avec ! Et pour clore tout ça Paul Cohen montre en 1963 que l'axiome du choix et l'hypothèse du continu ne sont pas liés.

Ok pour faire un résumé pédagogique de tout ça, considérons la figure suivante (en excluant l'axiome de choix) :

En cours de traduction de l'anglais

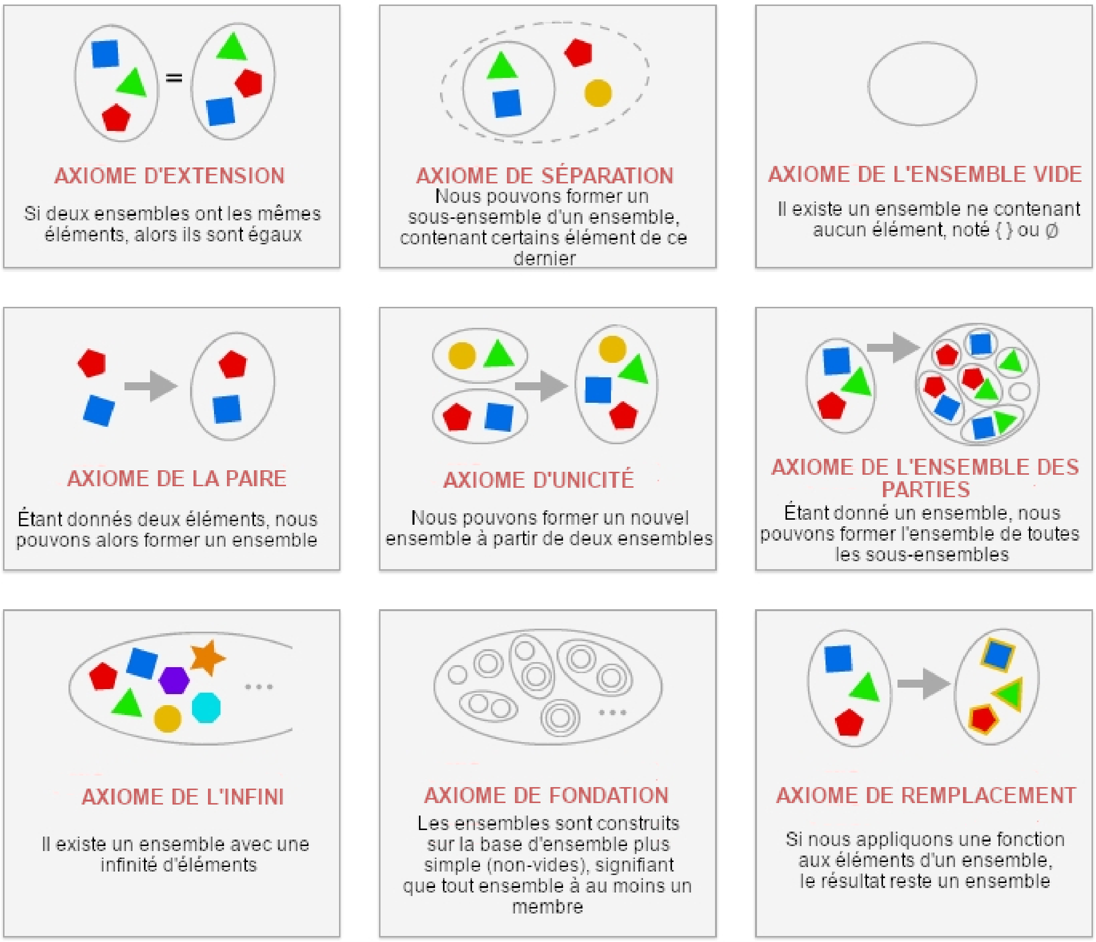


FIG. 5.52 – **Résumé visuel des axiomes de Zermelo-Fraenkel (source : ?)**

5.5.1.1 Cardinaux

Définition (#5.5.78) : Des ensembles sont dits "équipotents" s'il existe une bijection (correspondance biunivoque) entre ces ensembles. Nous disons qu'ils ont alors même "cardinal" que la norme ISO 3111 préconise d'écrire $card(S)$ mais dans le présent livre nous utiliserons aussi la notation $\text{Card}(S)$ (de nombreux livres américains utilisent la notation qui ressemble en tout point à la valeur absolue $\mid S \mid$ ou $\#S$).

Ainsi, plus rigoureusement, un cardinal (qui quantifie le nombre d'éléments contenus dans l'ensemble) est une classe d'équivalence (voir la section Opréateurs page 291) pour la relation d'équipotence.

Remarque

Cantor est le principal créateur de la théorie des ensembles, sous une forme que nous qualifions aujourd'hui de "théorie naïve des ensembles". Mais, à côté de considérations élémentaires, sa théorie comportait des niveaux d'abstraction élevés. La vraie nouveauté de la théorie de Cantor, c'est qu'elle permet de parler de l'infini. Par exemple, une idée importante de Cantor a justement été de définir "l'équipotence".

Si nous écrivons $c_1 = c_2$ en tant qu'égalité de cardinaux, nous entendons alors par là qu'il existe deux ensembles équipotents A et B tels que :

$$c_1 = \text{Card}(A) \quad \text{et} \quad c_2 = \text{Card}(B) \tag{5.5.33}$$

Les cardinaux peuvent donc être comparés. L'ordre ainsi défini est une relation d'ordre total (voir section Opérateurs page 290) entre les cardinaux (la preuve que la relation d'ordre est totale utilise l'axiome du Choix et la preuve qu'elle soit antisymétrique est connue sous le nom de théorème de Cantor-Bernstein que nous démontrons d'ailleurs plus bas).

Dire que $c_1 < c_2$ signifie dans un vocabulaire simple que A est équipotent à une partie propre de B, mais B n'est équipotent à aucune partie propre de A. Les mathématiciens diraient que le $\text{Card}(A)$ est plus petit ou égal au $\text{Card}(B)$ s'il existe une injection de A dans B.

Nous avons vu lors de notre étude des nombres (voir section Nombres page 387), en particulier des nombres transfinis, qu'un ensemble équipotent (ou en bijection) à $\mathbb{N}$ était dit "ensemble dénombrable".

Voyons cette notion un petit peu plus dans les détails :

Soit A un ensemble, s'il existe un entier n tel qu'il y ait au moins à chaque élément de A un correspondant dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ (au fait rigoureusement il s'agit d'une bijection... concept que nous définirons plus tard) nous disons alors que le cardinal de $\text{Card}(A)$, noté $\text{Card}(A)$ ou $\text{card}(A)$, est un "cardinal fini" et vaut n.

Dans le cas contraire, nous disons que l'ensemble A est de "cardinal infini" et nous posons :

$$\text{Card}(A) = +\infty \tag{5.5.34}$$

Un ensemble A est donc "dénombrable" s'il existe une bijection entre A et (N). Un ensemble de nombre A est "au plus dénombrable" s'il existe une bijection entre A et une partie (N). Un ensemble au plus dénombrable est donc soit de cardinal fini, soit dénombrable.

Nous vérifions dès lors les propositions suivantes :

P1. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

P2. Un ensemble contenant un ensemble non-dénombrable n'est lui aussi pas dénombrable.

P3. Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Remarque

Nous pouvons restreindre un ensemble de nombres par rapport à l'élément nul et aux éléments négatifs ou positifs qu'il contient et dès lors nous notons (exemple pour l'ensemble

En cours de traduction de l'anglais

des réels) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^* &= \mathbb{R} \setminus \{\varnothing\} \\
\mathbb{R}_+ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\} \\
\mathbb{R}_- &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq 0\} \\
\mathbb{R}_+^* &= \mathbb{R}_+ \setminus \{\varnothing\} \\
\mathbb{R}_-^* &= \mathbb{R}_- \setminus \{\varnothing\}
\end{aligned} \tag{5.5.35}$$

Ces notions étant analogues pour $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ (l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ n'étant pas ordonné, la deuxième et troisième ligne ne s'y appliquent pas).

Donc tout sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$ lui-même, ce qui peut sembler contre-intuitif au premier abord... !

En particulier, il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels quelconques (utiliser la bijection $f(n) = 2n$) de $\mathbb{N}$ vers P, où P désigne l'ensemble des entiers naturels pairs. Autant d'entiers relatifs que d'entiers naturels, autant d'entiers relatifs que de nombres rationnels (voir la section Nombres page 224 pour la démonstrations).

Nous pouvons donc écrire : :

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Z}) = \text{Card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0 \tag{5.5.36}$$

et plus généralement, toute partie infinie de $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Nous avons donc un résultat important : tout ensemble infini possède donc une partie infinie dénombrable.

Puisque nous avons démontré dans la section traitant des nombres (page 231) que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ avait la "puissance du continu" et que l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ était de cardinal transfini $\aleph_0$, Cantor souleva la question s'il existait un cardinal transfini entre $\aleph_0$ et le cardinal de $\mathbb{R}$? Autrement dit, nous avons donc une quantité infinie de nombres entiers, et une quantité encore plus grande de nombres réels. Alors, existe-t-il un infini qui soit à la fois plus grand que celui des entiers et plus petit que celui des nombres réels ?

Le problème apparaît en écrivant $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$ et $\aleph_1$ (nouveau) le cardinal de $\mathbb{R}$ et en proposant de démontrer ou de contredire ce qui suit :

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} \tag{5.5.37}$$

selon la loi combinatoire qui donne le nombre d'éléments que l'on peut obtenir de tous les sous-ensembles d'un ensemble (comme nous l'avons déjà prouvé).

Ce problème se résout d'une façon assez étonnante. D'abord, en 1938, un des plus grands logiciens du 20ème siècle, Kurt Gödel, démontra que l'hypothèse de Cantor n'était pas réfutable, c'est-à-dire qu'on ne pourrait jamais démontrer qu'elle était fausse. Puis en 1963, le mathématicien Paul Cohen boucla la boucle. Il démontra qu'on ne pourrait jamais non plus démontrer qu'elle était vraie ! ! ! Nous pouvons conclure à juste raison que Cantor avait perdu la raison à chercher à démontrer un problème qui ne pouvait pas l'être.Le reste de sa vie, Cantor essaya,

En cours de traduction de l'anglais

en vain, de démontrer ce résultat que l'on nomma "l'hypothèse du continu". Il n'y réussit pas et sombra dans la folie. En 1900, au congrès international des mathématiciens, Hilbert estima qu'il s'agissait là d'un des 23 problèmes majeurs qui devraient être résolus au 20ème siècle.

Ce problème se résout d'une façon assez étonnante. D'abord, en 1938, un des plus grands logiciens du 20ème siècle, Kurt Gödel, démontra que l'hypothèse de Cantor n'était pas réfutable, c'est-à-dire qu'on ne pourrait jamais démontrer qu'elle était fausse. Puis en 1963, le mathématicien Paul Cohen boucla la boucle. Il démontra qu'on ne pourrait jamais non plus démontrer qu'elle était vraie ! ! ! Nous pouvons conclure à juste raison que Cantor avait perdu la raison à chercher à démontrer un problème qui ne pouvait pas l'être.

5.5.1.2 Produit cartésien

Définition (#5.5.79) : Si E et F sont deux ensembles, nous appelons "produit cartésien de E par F l'ensemble noté $E \times F$ (à ne pas confondre avec le produit vectoriel !) formé de tous les couples possibles (e, f) où e est un élément de E et f un élément de F.

Autrement écrit :

$$\boxed{E \times F = \{(e, f) \mid e \in E \wedge f \in F\}} \tag{5.5.38}$$

Nous notons le produit cartésien de E par lui-même :

$$E \times E = E^2 \tag{5.5.39}$$

et nous disons alors E^2 est "l'ensemble des couples d'éléments de E".

Nous pouvons effectuer le produit cartésien d'une suite d'ensembles $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et ainsi obtenir l'ensemble des n-uplets $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_n \in E_n$.

Dans le cas où tous les ensembles E_i sont identiques à E, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ se note bien évidemment E^n. Nous disons alors que e^n est "l'ensemble des n-uplets d'éléments de E".

Si E et F sont finis alors le produit cartésien $E \times F$ est fini. De plus :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(F) \tag{5.5.40}$$

De là, nous voyons que si les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont finis alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est aussi fini et nous avons :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \text{Card}(E_i) \tag{5.5.41}$$

En particulier :

$$\text{Card}(E^n) = [\text{Card}(E)]^n \tag{5.5.42}$$

si E est un ensemble fini.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Si $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^2$ est alors l'ensemble des couples de réels. Dans le plan rapporté à un repère, tout point M admet des coordonnées qui sont un élément de $\mathbb{R}^2$.

E2. Lorsque nous lançons deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, chaque dé peut être symbolisé par l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Le résultat d'un lancer est alors un élément de $E^2 = E \times E$. Le cardinal de $E \times E$ est alors 36. Il y a donc 36 résultats possibles quand nous lançons 2 dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Remarque

La théorie des ensembles ainsi que le concept de cardinal constituent la base théorique des logiciels de bases de données relationnelles.

5.5.1.3 Intervalles (bornes)

Soit M un ensemble de nombres quelconques de façon à ce que $M \subset \mathbb{R}$ (exemple particulier mais fréquent). Nous avons comme définitions :

En cours de traduction de l' anglais

Définitions (#5.5.80) :

D1. $x \in \mathbb{R}$ est appelé "borne supérieure" ou "majorant" de l'ensemble M, si $x \geq m$ pour $x \geq m$ pour $\forall m \in M$. Inversement, nous parlons de "borne inférieure" ou de "minorant" (il ne faut donc pas confondre le concept de borne avec le concept d'intervalle !).

D2. Soit $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$. $x \in \mathbb{R}$ est appelé "plus petite borne supérieure" noté :

$$x = \text{sup} M \tag{5.5.43}$$

de M si x est une borne supérieure de M et si pour toute borne supérieure $y \in \mathbb{R}$ nous avons $x \leq y$. Inversement, nous parlons de "plus petite borne inférieure" que nous notons :

$$x = \text{inf} M \tag{5.5.44}$$

Les définitions sont équivalentes dans le cadre de l'analyse fonctionnelle (voir du même nom page 2144) puisque les fonctions sont définies sur des ensembles.

Effectivement, soit f une fonction dont le domaine de définition I balaie tout equation. Ce que nous notons :

$$f : E \mapsto \mathbb{R} \tag{5.5.45}$$

et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définitions (#5.5.81) :

D1. Nous disons que f présente un "maximum global" en x_0 si :

$$\forall x \in E : \quad f(x) \leq f(x_0) \tag{5.5.46}$$

D2. Nous disons que f présente un "minimum global" en x_0 si :

$$\forall x \in E : \quad f(x) \geq f(x_0) \tag{5.5.47}$$

Dans chacun de ces deux cas, nous disons que f présente un "extremum global" en x_0 (c'est un concept que nous retrouverons souvent dans section de Mécanique Analytique page **??** et Méthodes Numériques page **??**!).

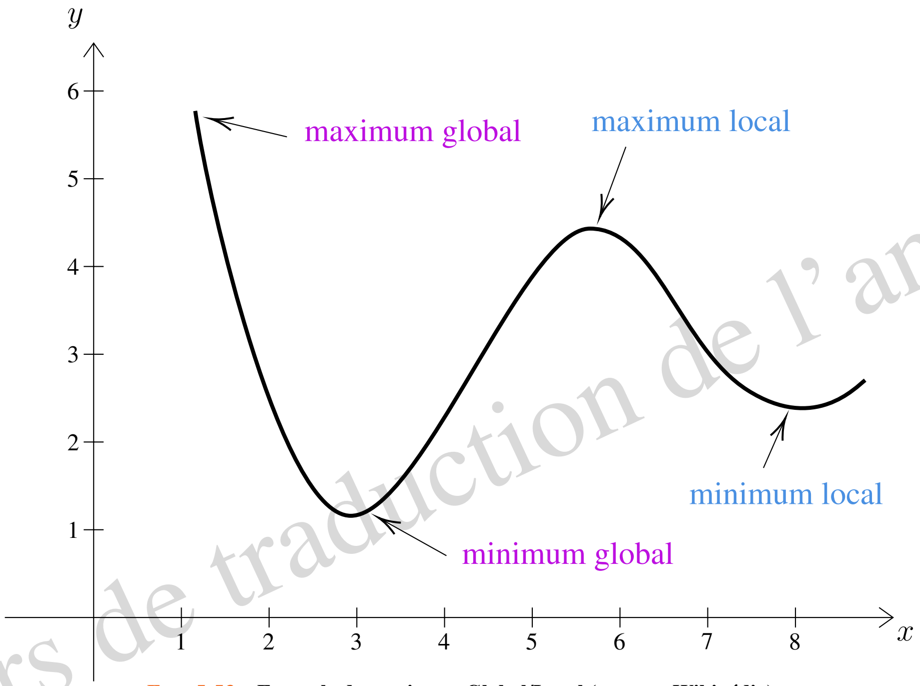


FIG. 5.53 – **Exemple de maximum Global/Local (source : Wikipédia)**

En cours de traduction de l'anglais

D3. f est "majorée" s'il existe un réel M tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$. Dans ce cas, la fonction possède une borne supérieure de f sur son domaine de définition I notée traditionnellement :

$$\sup_I f \tag{5.5.48}$$

et elle représente donc la plus petite borne supérieure (le plus petit majorant).

D4. f est "minorée" s'il existe un réel M tel que $\forall x \in I, f(x) \geq M$. Dans ce cas, la fonction possède une borne inférieure de f sur son domaine de définition I notée traditionnellement :

$$\inf_I f \tag{5.5.49}$$

et elle représente la plus grande borne inférieure (le plus grand minorant).

D5. Nous disons que f est "bornée" si elle est à la fois majorée et minorée (c'est le cas des fonctions trigonométriques).

5.5.2 Opérations ensemblistes

Nous pouvons construire à partir d'au moins trois ensembles A, B, C l'ensemble des opérations (dont nous devons les notations à Richard Dedekind) existant dans la théorie des ensembles (très utiles dans l'étude des probabilités et statistiques).

Remarque

Certaines des notations présentes ci-dessous se retrouveront fréquemment dans des théorèmes complexes, il est donc nécessaire de bien comprendre de quoi il en retourne.

Ainsi, nous pouvons construire les opérations ensemblistes suivantes :

5.5.2.1 Inclusion

Dans le cas le plus simple, nous définissons "l'inclusion" par :

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in B] \tag{5.5.50}$$

En langage non spécialisé voici ce qu'il faut lire : A est "inclus" (ou "fait partie", ou encore est un "sous-ensemble") dans B alors pour tout x appartenant à A chacun de ces x appartient aussi à B :

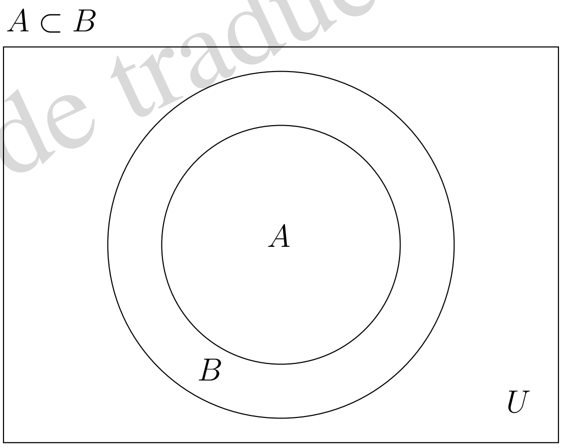


Fig. 5.54 – Exemple visuel (diagramme d'Euler) de l'inclusion

où le U dans le coin inférieur droit de la figure représente l'univers (de Cantor).

De ceci il en découle les propriétés suivantes :

P1. Si $A \in B$ et $B \in A$ alors cela implique $A = B$ et réciproquement.

P2. Si $A \in B$ et $B \in C$ alors cela implique $A \in C$.

En cours de traduction de l' anglais

5.5.2.2 Intersection

Dans le cas le plus simple, nous définissons "l'intersection" par :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad (5.5.51)$$

En langage non spécialisé voici ce qu'il faut lire : "L'intersection" des ensembles A et B consiste en l'ensemble des éléments qui se trouvent à la fois dans A et dans B :

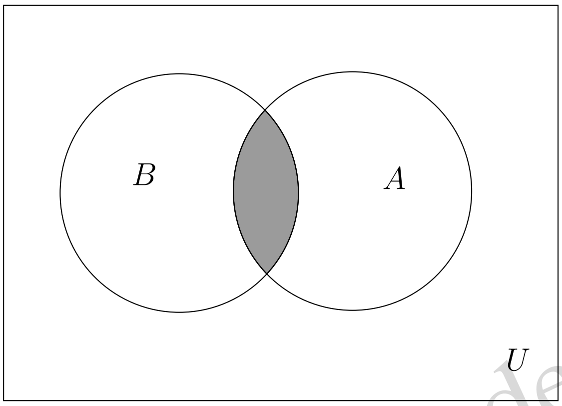


FIG. 5.55 – Exemple visuel (diagramme d'Euler) de l'intersection

En cours de traduction de l'anglais

Plus généralement, si (A_i) est une famille d'ensembles indexés par $i \in I$, l'intersection des $(A_i), i \in I$ est notée :

$$\bigcap_{i \in I} A_i \quad (5.5.52)$$

Cette intersection est donc définie explicitement par :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I x \in A_i\} \quad (5.5.53)$$

C'est-à-dire que l'intersection de la famille d'ensembles indexés comprend tous les x qui se trouvent dans chaque ensemble de tous les ensembles de la famille.

Soient deux ensembles A et B, nous disons qu'ils sont "disjoints" si et seulement si :

$$A \cap B = \varnothing \quad (5.5.54)$$

Par ailleurs, si :

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \quad (5.5.55)$$

Les mathématiciens notent cela :

$$A \sqcup B \quad (5.5.56)$$

et l'appellent "union disjointe".

On plaisante parfois en disant que la connaissance se construit sur la disjonction... (ceux qui comprendront apprécieront...).

Définition (#5.5.82) : Une collection $S = \{S_i\}$ d'ensembles non vides forment une "partition" d'un ensemble A si les propriétés suivantes sont vérifiées :

P1. $\forall S_i, S_j \in S$ et $i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \varnothing$

P2. $A = \bigcup\limits_{S_i \in S} S_i$

> ✍**Exemple :**
>
> L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de $\mathbb{Z}$.

La loi d'intersection $\cap$ est une loi commutative (voir plus loin la définition du concept de "loi") telle que :

$$A \cap B = B \cap A \tag{5.5.57}$$

5.5.2.3 Union

Dans le cas le plus simple, nous définissons "l'union" (aussi parfois nomée "fusion" ou "réunion") par :

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}} \tag{5.5.58}$$

En langage non spécialisé voici ce qu'il faut lire : "L'union" des ensembles A et B consiste en l'ensemble des éléments qui se trouvent dans A et en plus dans B :

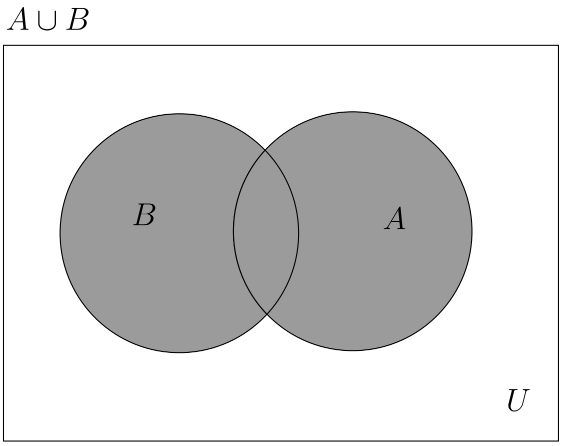


FIG. 5.56 – Exemple visuel (diagrammer d'Euler) de l'union

En cours de traduction de l'anglais

Plus généralement, si (A_i) est une famille d'ensembles indexés par $i \in I$, l'union des $(A_i), i \in I$ est notée :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad (5.5.59)$$

Cette réunion est explicitement définie par :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I x \in A_i\} \quad (5.5.60)$$

C'est-à-dire que la réunion de la famille d'ensembles indexés comprend tous les x pour lesquels il existe un ensemble indexé par i tel que x soit inclus dans cet ensemble A_i.

Nous avons les propriétés de distributivité suivantes :

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad (5.5.61)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B) \quad (5.5.62)$$

La loi de réunion $\cup$ est une loi commutative (voir plus loin la définition du concept de "loi") telle que :

$$A \cup B = B \cup A \quad (5.5.63)$$

Nous appelons par ailleurs "lois d'idempotences" les relations (précisons cela pour la culture générale) :

$$A \cap A = A \quad (5.5.64)$$

$$A \cup A = A \quad (5.5.65)$$

et "lois d'absorptions" les lois :

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (5.5.66)$$

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (5.5.67)$$

Les lois de réunion et d'intersection sont associatives telles que :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (5.5.68)$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (5.5.69)$$

et distributives telles que :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (5.5.70)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (5.5.71)$$

Si nous rappelons le concept de "cardinal" (voir ci-dessus), nous avons avec les opérations définies précédemment, la relation suivante :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \quad (5.5.72)$$

Donc si $A \cap B = \varnothing$:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \quad (5.5.73)$$

En cours de traduction de l'anglais

5.5.2.4 Différence

Dans le cas le plus simple, nous définissons la "différence" par :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad (5.5.74)$$

En langage non spécialisé voici ce qu'il faut lire : La "différence" des ensembles A et B consiste en l'ensemble des éléments qui se trouvent uniquement dans A (et qui excluent donc les éléments de B) :

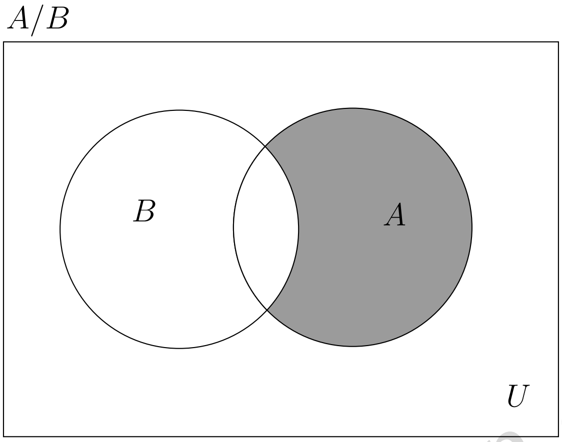


FIG. 5.57 – Exemple visuel (diagramme d'Euler) de la différence

5.5.2.5 Différence symétrique

Soit U un ensemble. Pour tout $A, B \subseteq U$ nous définissons la "différence symétrique" entre A et B par :

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (5.5.75)$$

En langage non spécialisé voici ce qu'il faut lire : La "différence symétrique" des ensembles A et B consiste en l'ensemble des éléments qui se trouvent uniquement dans A et de ceux se trouvant uniquement dans B (nous laissons donc de côté les éléments qui sont communs) :

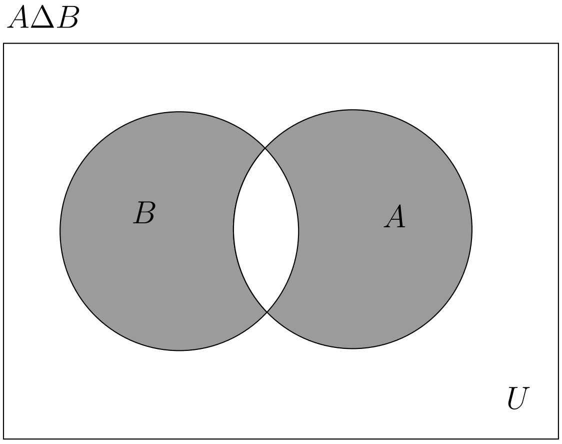


FIG. 5.58 – Exemple visuel (diagramme d'Euler) de la différence symétrique

En cours de traduction de l'anglais

Donc comme nous pouvons le voir, nous avons :

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \tag{5.5.76}$$

Les propriétés triviales sont les suivantes :

P1. Commutativité : $A \triangle B = B \triangle A$

P2. Complémentarité (voir définition plus bas) : $A^c \triangle B^c = A \triangle B$

5.5.2.6 Produit

Dans le cas le plus simple, nous définition le "produit ensembliste" ou "produit cartésien" comme :

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}} \tag{5.5.77}$$

En langage non spécialisé voici ce qu'il faut lire : "l'ensemble produit" (à ne pas confondre avec la multiplication ou le produit vectoriel) de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples tels que chaque élément de chaque ensemble est combiné avec chaque élément de l'autre ensemble.

L'ensemble de produits de nombres réels, par exemple, génère le plan dans lequel chaque élément est défini par les axes X et Y.

Nous retrouvons souvent les ensembles produits en mathématiques et en physique lors que nous travaillons avec des fonctions. Par exemple, une fonction de deux variables réelles qui donne un réel en sortie sera noté :

$$\underbrace{f(x, y)}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}} \to z \tag{5.5.78}$$

ou plus simplement :

$$f(x, y) = z \tag{5.5.79}$$

5.5.2.7 Complémentarité

Dans le cas le plus simple, nous définissons la "complémentarité" par :

$$\boxed{\forall A \subset U \quad \bar{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}} \tag{5.5.80}$$

En langage non spécialisé voici ce qu'il faut lire : Le "complémentaire" est défini comme en prenant U un ensemble et A un sous-ensemble de U alors le complémentaire de A dans U est l'ensemble des éléments qui sont dans U mais pas dans A.

En cours de traduction de l'anglais

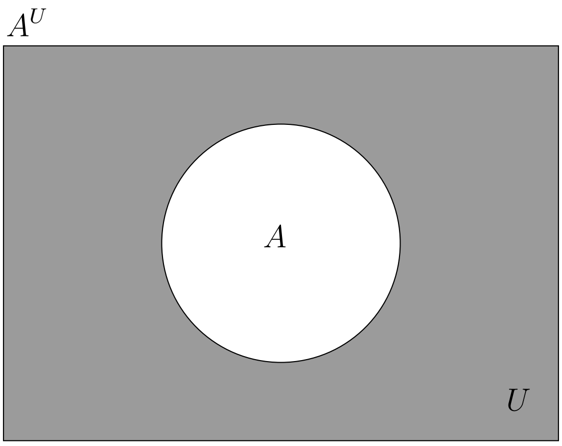


FIG. 5.59 – **Exemple visuel (diagramme d'Euler) de la complémentarité**

Une autre notation très importante de la complémentarité qu'on retrouve parfois dans la littérature est la suivante :

$$ {}_U A^c \text{ ou } A^c \tag{5.5.81}$$

où dans le cas particulier à droite ci-dessus, nous pourrions aussi écrire $U \setminus A$ (la notation ${}_U A^c$ serait rarement utilisée car elle peut prêter à confusion dans certaines situations).

Nous avons comme propriétés pour tout A_i inclus dans B :

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \tag{5.5.82}$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \tag{5.5.83}$$

Voici quelques lois triviales relatives aux compléments :

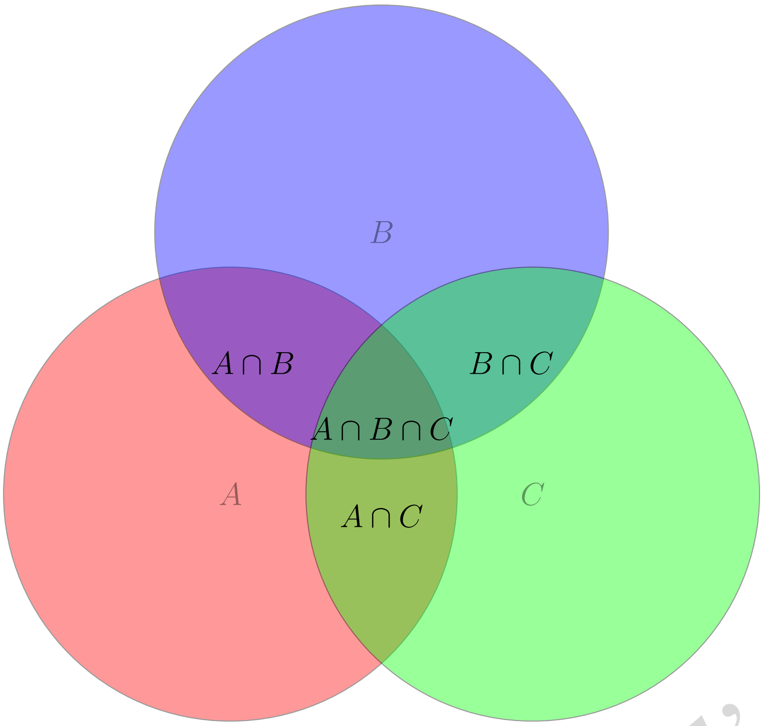
$$\bar{\bar{A}} = A \tag{5.5.84}$$

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \tag{5.5.85}$$

$$A \cup \bar{A} = U \tag{5.5.86}$$

Il existe d'autres lois très importantes en logique booléenne (voir la section de Systèmes Logiques page ??). Si nous considérons trois ensembles A, B, C comme représentés ci-dessous :

En cours de traduction de l'anglais



Nous avons donc :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (5.5.87)$$
$$A \setminus B \setminus C = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad (5.5.88)$$

et les fameuses "lois de De Morgan" sous forme ensembliste (voir section de Systèmes Logiques page ??) et qui sont données par les relations :

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned} \quad (5.5.89)$$

Indiquons avant de passer à un autre sujet, qu'un nombre significatif d'adultes en emploi (souvent des cadres) en entreprise ayant oublié ces notions après leur sortie de l'école obligtoire doivent les étudier à nouveau lorsqu'ils apprennent le language SQL (Structured Query Language) qui est le plus répandu à travers le monde pour interroger les serveurs de bases de données des entreprises au 20ème et 21ème siècles. Ils apprennent alors très en formation continue professionnelle le schéma suivant pour construire leurs requêtes avec des jointures :

En cours de traduction de l'anglais

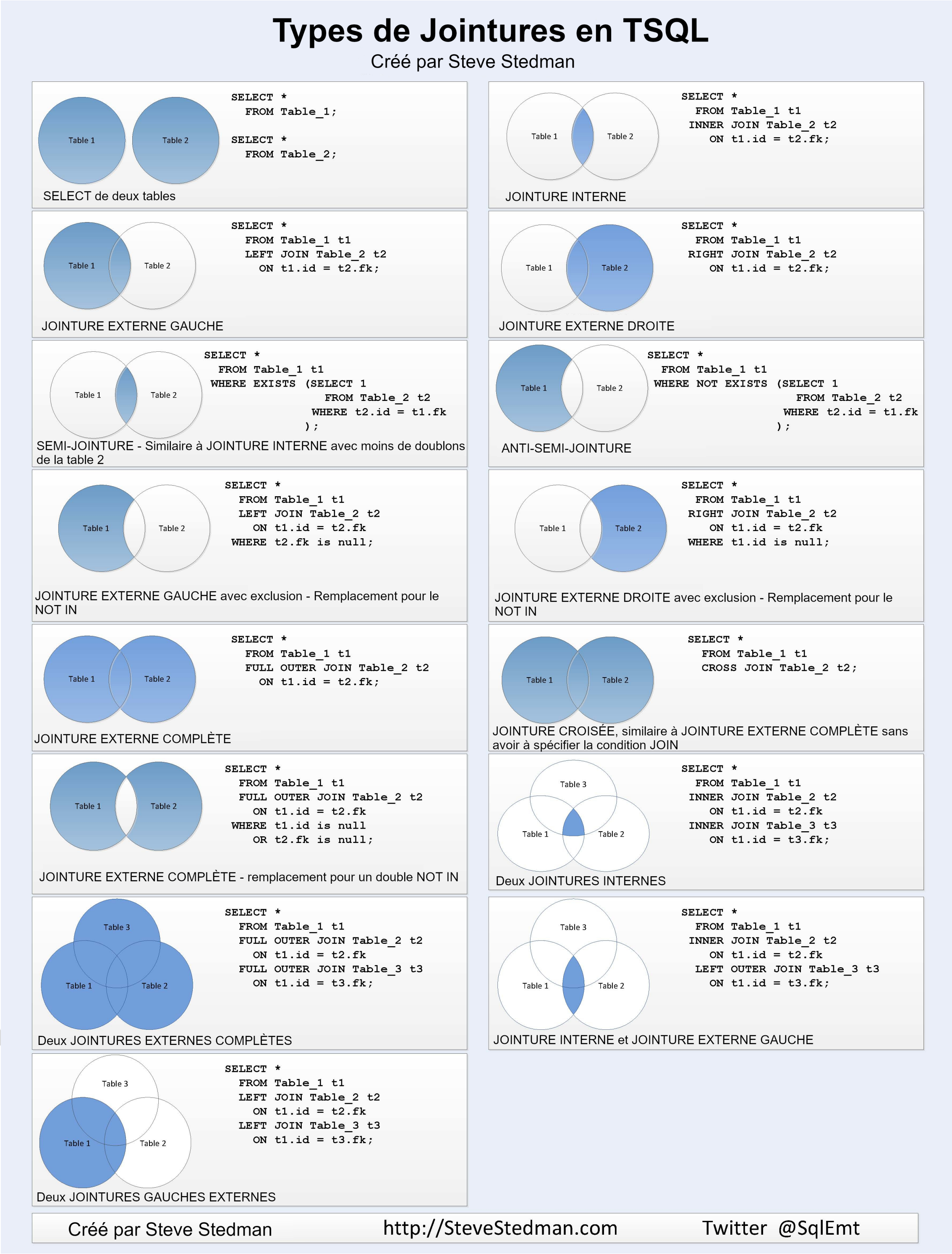


FIG. 5.60 – **Jointures courantes du langage SQL basé sur la théorie des ensembles**

5.5.3 Fonctions et Applications

Définition (#5.5.83) : En mathématiques, une "application" (ou "fonction") notée f - en analyse fonctionnelle - ou A - en algèbre linéeaire - est la donnée de deux ensembles, l'ensemble de départ E et l'ensemble d'arrivée F (ou d'image de E), et d'une relation associant à chaque élément x de l'ensemble de départ un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée, que nous appelons "image de x par f" et que nous notons dans le domaine de l'analyse fonctionnelle par $f(x)$ ou $f(E)$ pour expliciter l'ensemble de départ. Nous appelons "images" les éléments de $f(E)$ et les éléments de E sont appelés les "antécédents".

Nous disons alors que f est une application de E dans F notée :

$$f : E \mapsto F \tag{5.5.90}$$

(se rappeler du premier diagramme sagittal présenté au début de ce chapitre), ou encore une application à arguments dans E et valeurs dans F.

Remarque

Le terme "fonction" est souvent utilisé pour les applications à valeurs numériques, réelles ou complexes, c'est-à-dire lorsque l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous parlons alors de "fonction réelle", ou de "fonction complexe".

Définitions (#5.5.84) :

D1. Le "graphe" (ou encore "graphique" ou "représentative") d'une application $f : E \mapsto F$ est le sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$ constitué des couples $(x, f(x))$ pour x variant dans E. La donnée du graphe de f détermine son ensemble de départ (par projection sur la première composante souvent notée x) et son image (par projection sur la seconde composante souvent notée y).

D2. Si le triplet $f(E, F, \Gamma)$ est une fonction où E et F sont deux ensembles et $\Gamma \subset (E \times F)$ est un graphe, E et F sont respectivement la source et le but de f. Le "domaine de définition" ou "ensemble de départ" de f est :

$$D_f = I = \{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in \Gamma\} \tag{5.5.91}$$

D3. étant donnés trois ensembles E, F et G (non vides), toute fonction de $E \times F$ vers G est appelée "loi de composition" de $E \times F$ à valeurs dans G.

D4. Une "loi de composition interne" (ou simplement "loi interne") dans E est une loi de composition de equation à valeurs dans E (cas $E = F = G$).

Remarque

La soustraction dans $\mathbb{N}$ n'est pas une loi de composition interne bien qu'elle fasse partie des quatre opérations élémentaires apprises à l'école. Par contre l'addition sur $\mathbb{N}$ en est bien une !

En cours de traduction

D5. Une "loi de composition externe" (ou simplement "loi externe") dans E est une loi de composition de $F \times E$ à valeurs dans E, où F est un ensemble distinct de E. En général, F est un corps, dit "corps de scalaires".

✍Exemple :

Dans le cas d'un espace vectoriel (voir définition beaucoup plus bas) la multiplication d'un vecteur (dont les composantes se basent sur un ensemble donné) par un réel est une loi de composition externe.

Remarque

Une loi de composition externe à valeurs dans E est aussi appelée "action de F sur E". L'ensemble F est alors le domaine d'opérateurs. On dit aussi que F opère sur E (ayez en tête l'exemple des vecteurs précédemment cité).

D5. Nous appelons "image de f", et nous notons $\text{Im}(f)$, le sous-ensemble défini par :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in E \mid \exists x \in E, y = f(x)\} \tag{5.5.92}$$

Ainsi, "l'image" d'une application $f : E \mapsto F$ est la collection des $f(x)$ pour x parcourant E, c'est un sous-ensemble de F.

Et nous appelons "noyau de f", et nous notons $\ker(f)$, le sous-ensemble très important en mathématiques défini par :

$$\ker(f) = f(\{0\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} \tag{5.5.93}$$

Selon la figure (il faut bien comprendre ce concept de noyau car nous le réutiliserons de nombreuses fois pour démontrer des théorèmes ayant des applications pratiques importantes) :

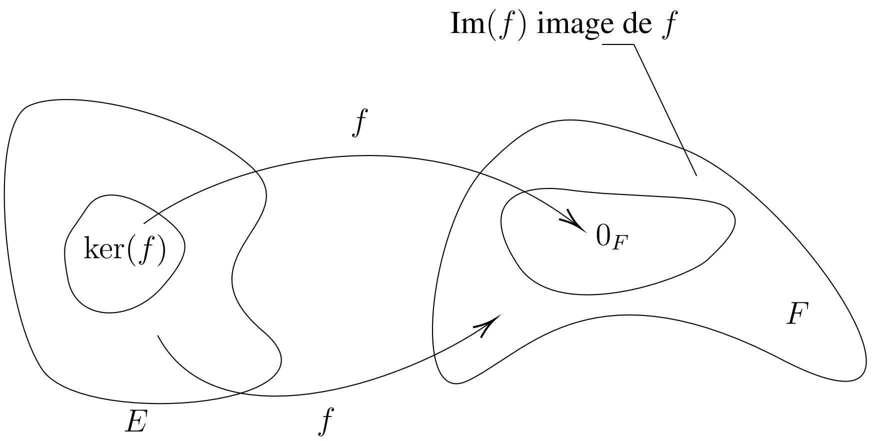


FIG. 5.61 – **Représentation du concept de noyau d'une fonction**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

R1. $\ker(f)$ provient de l'allemand "Kern", signifiant tout simplement "noyau". En anglais, le noyau se dit aussi "kernel", signifiant "amande" dans le civil.

R2. Normalement les notations Im et $\ker$ sont réservées aux homomorphismes de groupes, d'anneaux, de corps et aux applications linéaires entre espaces vectoriels ou modules etc.... (voir plus loin). Nous n'avons normalement pas l'habitude de les utiliser pour des applications quelconques entre ensembles quelconques. Mais bon...ça ne fait rien.

✍**Exemple :**

La fonction sinus a de son argument un noyau qui est $2\pi\mathbb{Z}$.

Les applications peuvent avoir une quantité phénoménale de propriétés dont voici celles qui font partie des connaissances générales du physicien (pour plus de renseignements sur ce qu'est une fonction, voir le chapitre traitant de l'Analyse Fonctionnelle page 2144).

Soit f une application d'un ensemble E à un ensemble F alors nous avons les propriétés suivantes :

P1. Une application est dite "surjective" si :

Tout élément y de F est l'image par f d'au moins (nous insistons sur le "au moins") un élément de E. Nous disons encore que c'est une "surjection" de E dans F. Il découle de cette définition, qu'une application ou fonction $f : E \mapsto F$ est surjective et notée :

$$f : E \twoheadrightarrow F \tag{5.5.94}$$

si et seulement si $F = \mathrm{Im}(f)$. En d'autres termes, nous écrivons aussi cette définition ainsi :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : \quad y = f(x) \tag{5.5.95}$$

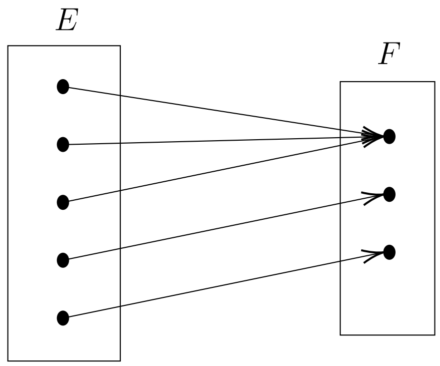


FIG. 5.62 – **Représentation d'une fonction surjective**

En cours de traduction de l'anglais

P2. Une application est dite "injective" si :

Tout élément y de F est l'image par f d'au plus (nous insistons sur le "au plus") un seul élément de E. Nous disons encore que f est une injection de E dans F. Il résulte de cette définition, qu'une application $f : E \mapsto F$ est injective et notée :

$$\boxed{f : E \rightarrowtail F} \tag{5.5.96}$$

si et seulement si les relations $x_1, x_2 \in E$ et $f(x_1) = f(x_2)$ impliquent $x_1 = x_2$ autrement dit : une application pour laquelle deux éléments distincts ont des images distinctes est dite "injective". Ou encore, une application est injective si l'une aux moins des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

P2.1 $\forall x, y \in E^2 : \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

P2.2 $\forall x, y : \ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

P2.3 $\forall y \in F$ l'équation en x, $y = f(x)$ a au plus une solution dans E

Tout cela s'illustrant par :

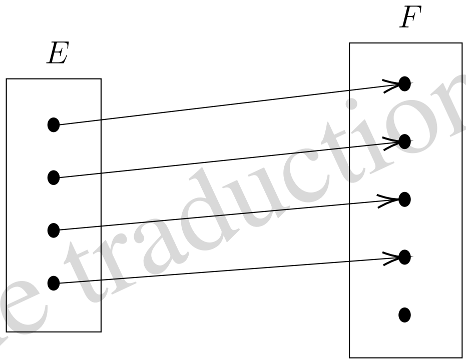


FIG. 5.63 – **Représentation d'une fonction injective**

En cours de traduction de l'anglais

P3. Une application est dite "bijective" ou "application/fonction totale" si :

Une application f de E dans F est à la fois surjective et injective. Dans ce cas, nous avons que pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ admet dans E une unique (ni "au plus", ni "au moins") pré-image x et noté :

$$\boxed{f : E \leftrightarrow F} \tag{5.5.97}$$

Ce que nous écrivons aussi plus explicitement :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : \quad y = f(x) \tag{5.5.98}$$

ce qui s'illustre par :

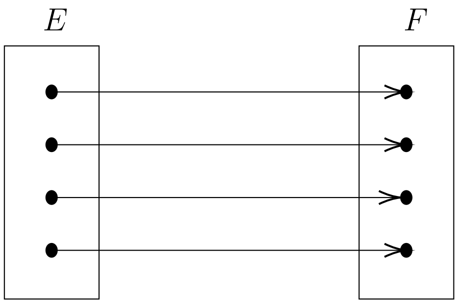


FIG. 5.64 – Représentation d'une fonction bijective

Nous sommes ainsi tout naturellement amenés à définir une nouvelle application de F dans E, appelée "fonction réciproque" de f et notée f^{-1} (certaines auteurs et professeurs notent cela aussi ${}^r f$ parfois...), qui a tout élément y de F, fait correspondre l'élément x de E pré-image (ou aussi appelé "solution") unique de l'équation $y = f(x)$. Autrement dit :

$$x = f^{-1}(y) \tag{5.98}$$

L'existence d'une application réciproque implique que le graphique d'une application bijective (dans l'ensemble des réels...) et celui de son application réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Effectivement, nous remarquons que si $y = f(x)$ est équivalent à $x = f^{-1}(y)$, alors ces équations impliquent que le point (x, y) est sur le graphique de f si et seulement si le point (y, x) est sur le graphique de f^{-1}.

Comme vous pouvez le voir par exemple dans la figure ci-dessous avec la fonction sinus (voir section de Trigonométrie page 2486) :

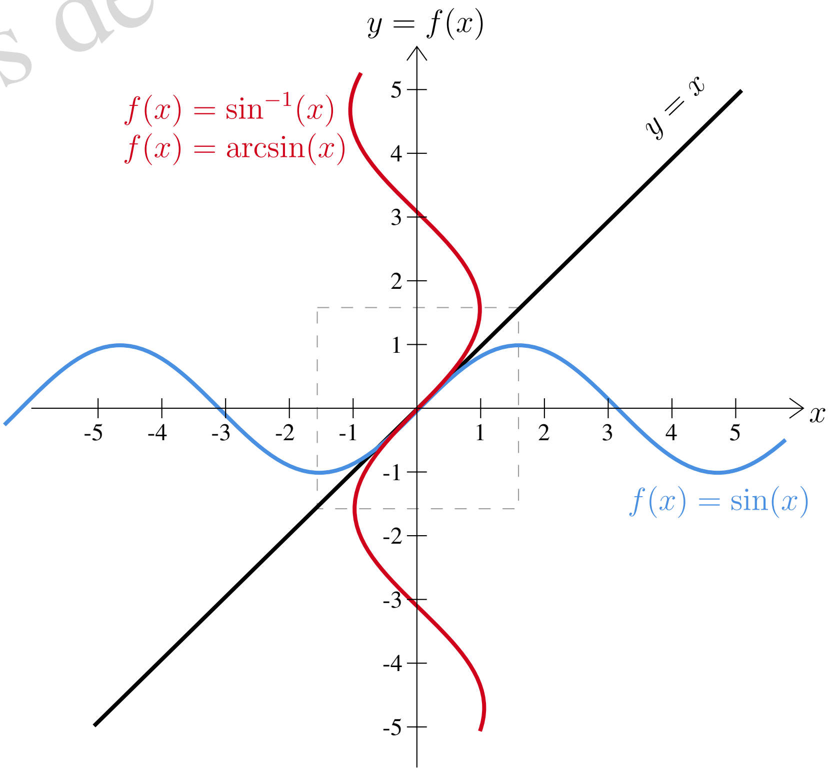


FIG. 5.65 – Exemple de fonction bijective

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Prenons le cas d'une station de vacances où un groupe de touristes doit être logé dans un hôtel. Chaque façon de répartir ces touristes dans les chambres de l'hôtel peut être représentée par une application de l'ensemble des touristes vers l'ensemble des chambres (à chaque touriste est associée une chambre).

- Les touristes souhaitent que l'application soit injective, c'est-à-dire que chacun d'entre eux ait une chambre individuelle. Cela n'est possible que si le nombre de touristes ne dépasse pas le nombre de chambres.
- L'hôtelier souhaite que l'application soit surjective, c'est-à-dire que chaque chambre soit occupée. Cela n'est possible que s'il y a au moins autant de touristes que de chambres.
- S'il est possible de répartir les touristes de telle sorte qu'il y en ait un seul par chambre, et que toutes les chambres soient occupées : l'application sera alors à la fois injective et surjective nous dirons qu'elle est bijective.

Remarques

R1. Il vient des définitions ci-dessus qu'une application f est bijective (ou "biunivoque") dans l'ensemble des réels si et seulement si toute droite horizontale coupe la représentation graphique de la fonction en un seul point. Nous sommes donc amenés à faire la seconde remarque suivante :

R2. Une application qui vérifie le test de la droite horizontale est continument croissante ou décroissante en tout point de son domaine de définition.

P4. Une application est dite "fonction composée" ou "fonction composite" si :

Soit φ une application de E dans F et ψ une fonction de F dans G. L'application qui associe à chaque élément x de l'ensemble de E, un élément $\psi(\varphi(x))$ de G s'appelle "application composée" de φ et de ψ et se note :

$$\psi \circ \varphi \tag{5.5.100}$$

où symbole "$\circ$" est appelé "rond" (à ne pas confondre avec la notation du produit scalaire que nous verrons dans la section de Calcul Vectoriel !). Donc, la relation précédente s'écrit "psi rond phi" mais se lit "phi rond psi"... Ainsi :

$$\boxed{(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))} \tag{5.5.101}$$

Soit, de plus, χ une application (pas une fonction !) de G dans H. Nous vérifions aussitôt que l'opération de composition est associative pour les applications (pous plus de détails voir la section d'Algèbre Linéaire page 1920) :

$$\chi \circ (\psi \circ \varphi) = (\chi \circ \psi) \circ \varphi \tag{5.5.102}$$

Cela nous permet d'omettre les parenthèses et d'écrire plus simplement :

$$\chi \circ \psi \circ \varphi \tag{5.5.103}$$

Dans le cas particulier où φ serait une application de E dans E, nous notons φ^k l'application composée $\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (k fois).

Ce qui est important dans ce que nous venons de voir dans ce chapitre, c'est que toutes les propriétés définies et énoncées ci-dessus sont applicables aux ensembles de nombres.

Voyons en un exemple très concret et très puissant :

5.5.3.1 Théorème de Cantor-Bernstein

Attention ! Ce théorème, dont le résultat peut sembler évident, n'est pas forcément simple à aborder (son formalisme mathématique n'est pas très esthétique...). Nous vous conseillons de lire très lentement et de vous imaginer les diagrammes sagittaux dans la tête lors de la démonstration.

Voici l'hypothèse à démontrer :

Théorème 5.28. Soient X et Y deux ensembles. S'il existe une injection (voir la définition d'une fonction injective ci-dessus) de X vers Y et une autre de Y vers X, alors les deux ensembles sont en bijection (voir la définition d'une fonction bijective ci-dessus). Il s'agit donc aussi d'une relation antisymétrique !

Ce qui s'illustre par :

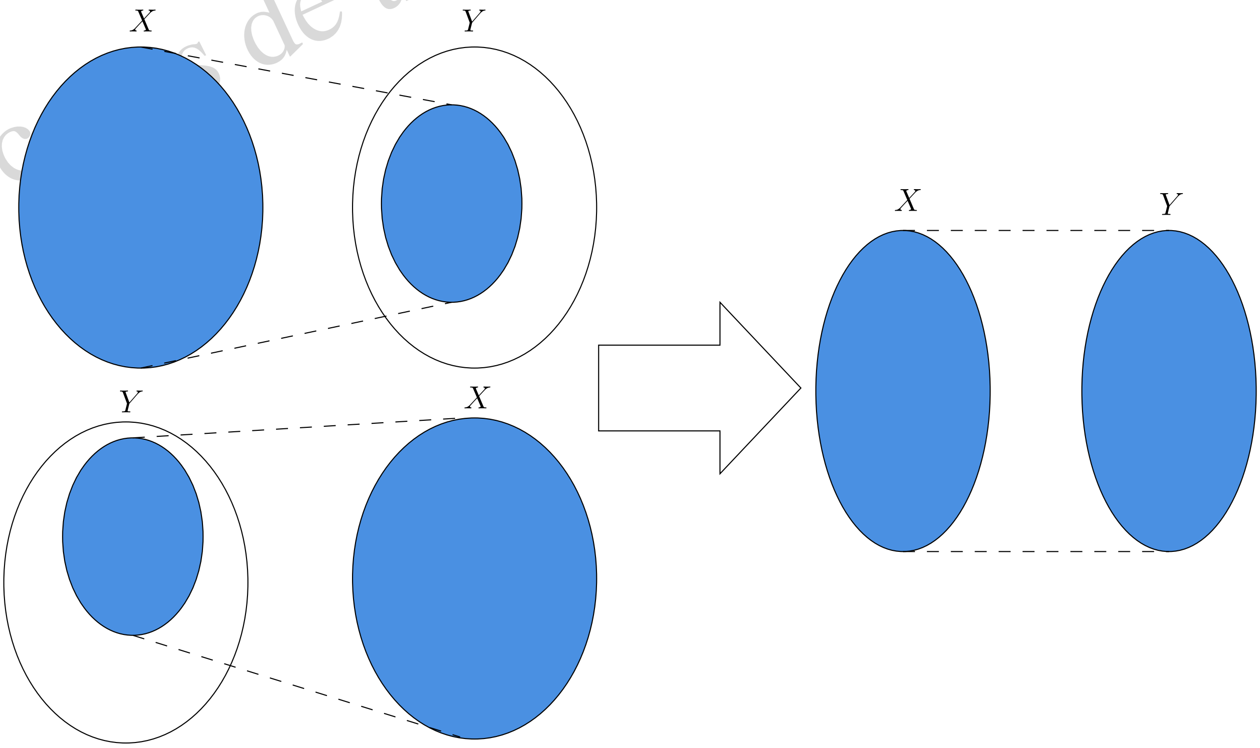


FIG. 5.66 – **Représentation d'une relation antisymétrique**

En cours de traduction de l'anglais

Formellement ce théorème est parfois écrit :

$$\text{Card}(Y) \leq \text{Card}(X) \quad \text{et} \quad \text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y) \Leftrightarrow \text{Card}(X) = \text{Card}(Y) \tag{5.5.104}$$

ou plus techniquement :

$$(X \rightarrowtail Y) \wedge (Y \rightarrowtail X) \Leftrightarrow X \leftrightarrow Y \tag{5.5.105}$$

Pour la démonstration, nous avons besoin en toute rigueur de démontrer au préalable un lemme (évident intuitivement mais pas formellement...) dont l'énoncé est le suivant :

Lemme 5.28.1. Soient X, Y, Z trois ensembles tels que $X \subseteq Z \subseteq Y$. Si X et Y sont en bijection à travers une fonction f, alors X et Z sont en bijection à travers une fonction g.

Techniquement, nous écrivons ceci :

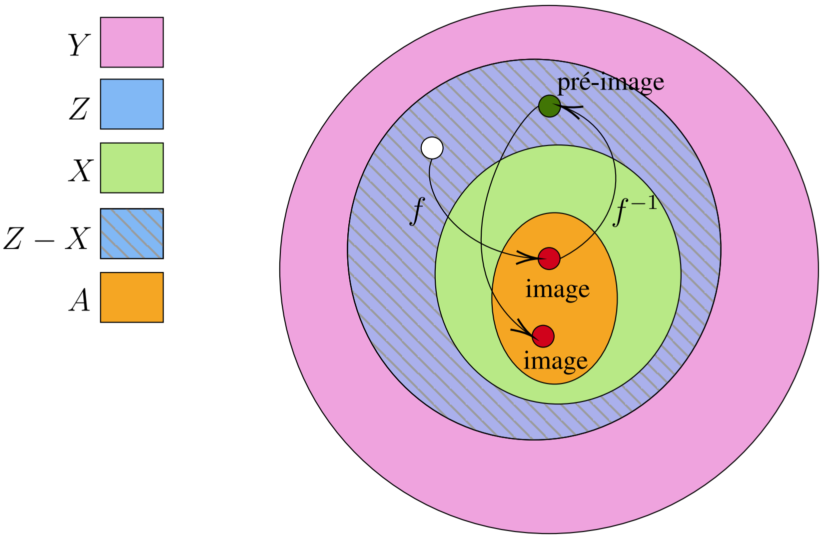
$$\left.\begin{array}{l} X \subseteq Z \subseteq Y \\ f : X \leftrightarrow Y \end{array}\right\} g : X \leftrightarrow Z \tag{5.5.106}$$

Un exemple d'application de ce lemme est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ et des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ qui sont en bijection. Dès lors, l'ensemble des entiers relatifs est en bijection avec l'ensemble des nombres naturels puisque $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Démonstration 5.28.1. D'abord, au niveau formel, créons une fonction f de Y à X telle quelle soit bijective :

$$f : Y \leftrightarrow X \tag{5.5.107}$$

Nous avons besoin pour la suite d'un ensemble A qui sera défini par l'union des images des fonctions des fonctions f (du genre $f(f(f\ldots)))$ et consturire un tel outil est là où réside l'astuce !) des pré-images de l'ensemble Z (rappelez-vous que $Z \subseteq Y$) dont nous excluons les éléments de X (ce que nous noterons pour cette démonstration : $Z - X$) :



En d'autres termes (si la première forme n'est pas claire...) nous définissons l'ensemble A comme étant l'union des images de $(Z - X)$ par les applications $f \circ f \circ \ldots \circ f$ Ce que nous

En cours de traduction de l'anglais

noterons :

$$A=\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^n(Z-X) \tag{5.5.108}$$

Parce que $f:Y\mapsto X$ et que $(Z-X)\subseteq Y$ nous avons par construction $A\subseteq X$ et donc :

$$((Z-X)\cup A)\subseteq Z \tag{5.5.109}$$

Remarquons que nous avons aussi :

$$A=\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^n(Z-X)\Rightarrow f(A)=f\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^n(Z-X)\right)=\bigcup_{n=1}^{+\infty} f\left(f^n(Z-X)\right)=\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{n+1}(Z-X) \tag{5.5.110}$$

et en réindexant :

$$f(A)=\bigcup_{n=2}^{+\infty} f^n(Z-X) \tag{5.5.111}$$

Nous avons alors (faire un schéma de tête des diagrammes sagittaux peut aider à ce niveau-là...) quel que soit A :

$$f((Z-X)\cup A)=A \tag{5.5.112}$$

Nous pouvons démontrer élégamment cette dernière relation (étant donné que c'est aussi un des résultats les plus importants !) :

$$f((Z-X)\cup A)=f(Z-X)\cup f(A)=f(Z-X)\cup\bigcup_{n=2}^{+\infty} f^n(Z-X)=\bigcup_{n=1}^{+\infty} f^n(Z-X) \tag{5.5.113}$$

Comme Z peut être partitionné (rien nous en empêche !) en les deux sous-ensembles disjoints suivants :

$$(Z-X)\cup A \qquad \text{et} \qquad (X-A) \tag{5.5.114}$$

et sans oublier que $X\subseteq Z\subseteq Y$ et $A\subseteq X$, nous introduisons maintenant par définition la fonction g (pour laquelle nous ne donne pas plus d'informations pour l'instant) telle que :

$$g:Z\mapsto X \tag{5.5.115}$$

tel que pour toute pré-image a de g de la partition $((Z-X)\cup A)\subseteq Z$ nous ayons :

$$\forall a\in((Z-X)\cup A)\to f(a) \tag{5.5.116}$$

Ce qui signifie que parce que $((Z-X)\cup A)\subseteq Z$ et $Z\subseteq Y$ nous pouvons alors appliquer (associer) la fonction bijective f (rappelez-vous que $f:Y\to X$) comme équivalent de la fonction g à tout élément de $((Z-X)\cup A)$.

Nous avons aussi pour tout pré-image a de g de la partition $(X-A)$ (rappelez-vous que $A\subseteq X$) :

$$\forall a\in(X-A)\to a \tag{5.5.117}$$

En cours de traduction de l'anglais

ce qui signifie que nous appliquons juste la fonction identité que nous pouvons aussi associer à la fonction g.

Donc pour résumer, nous avons construit une fonction g qui est alors bijective parce que ses restrictions à $((Z-X)\cup A)$ est f et $(X-A)$ is l'identitié qui sont toutes deux bijectives, la première par définition, la deuxième par construction !

Finalement il existe bien, par construction, une bijection entre X et Z et nous avons démontré le lemme que :

$$\left.\begin{array}{l} X\subseteq Z\subseteq Y \\ f: X\leftrightarrow Y \end{array}\right\} g: X\leftrightarrow Z \tag{5.5.118}$$

■ Q.E.D.

Maintenant que nous avons prouvé le lemme, rappelons les hypothèses du théorème de Cantor-Bernstein en utilisant le résultat du lemme :

Soit φ une injection de X à Y et ψ une injection de Y à X avec $X\subseteq Y$.

Nous avons alors :

$$\varphi(X)\subseteq Y \quad \text{et} \quad \psi(Y)\subseteq X \tag{5.5.119}$$

donc :

$$\psi(\varphi(X))\subset\psi(Y)\subset X \tag{5.5.120}$$

Dès lors, nous avons jusqu'ici :

- Comme φ est injective, alors X et $\varphi(X)$ sont pas définition bijectifs (oui ! effectivement, une fonction injective est par définition bijective lorsque nous réduisons son ensemble image à son ensemble de pré-image[16])
- Comme ψ est injective, $\psi(\varphi(X))$ et $\varphi(X)$ est bijective.

Donc, du précédent lemme prouvé, X et $\psi(\varphi(X))$ sont alors aussi en bijection !

En utilisant le lemme sur $\psi(\varphi(X))$, $\psi(Y)$ et X , il vient donc que $\psi(\varphi(X))$ est en bijection avec $\psi(Y)$ ce qui nous donne avec ce que nous avons vu juste précédemment, que puisque $\psi(\varphi(X))$ et aussi $\varphi(X)$ sont en bijection, que $\psi(Y)$ est en bijection avec $\varphi(X)$, et alors que X et Y sont reliés par une application bijective (ouf ! c'est beau mais c'est aussi vicieux que simple) et que nous avons :

$$(X\rightarrowtail Y)\wedge(Y\rightarrowtail X)\Leftrightarrow X\leftrightarrow Y \tag{5.5.121}$$

[16]mais il faut noter que cela ne fonction que pour des ensembles infinis !

En cours de traduction de l'anglais

Ce théorème s'interprète de la manière suivante : Si nous pouvons compter une partie d'un ensemble avec la totalité des éléments d'un autre ensemble, et réciproquement, alors ils ont le même nombre d'éléments. Ce qui est évident pour des ensembles finis. Ce théorème généralise alors cette notion pour des ensembles infinis et c'est là sa force !

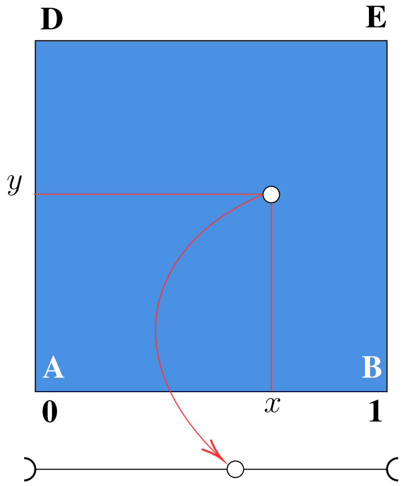
À partir de là, ce théorème représente l'une des briques de base pour généraliser la notion de tailles d'ensembles à des ensembles infinis.

✍**Exemple :**

La droite est un objet géométrique de dimension 1, comme ses intervalles. Le plan a une dimension égale à 2. Sa nature est donc très différente de celle de la droite. Cependant, ces deux ensembles de points sont toujours équipotents ! Autrement dit l'intervalle ouvert $]0,1[$ a la même puissance que le carré ouvert $]0,1[\times]0,1[$.

Le seul point technique à prendre en considération est le suivant : tout nombre réel est parfaitement déterminé par les données de son développement décimal propre.

Soit un point du carré ouvert de coordonnées (x,y) avec $x = 0.x_0x_1x_2\ldots$ et $y = 0.y_0y_1y_2\ldots$. Nous lui associons le point $z = 0.x_0y_0x_1y_1x_2y_2\ldots$ de l'intervalle ouvert $]0,1[$.



L'application f ainsi définie est clairement injective !

Considérons maintenant un nombre réel z de $]0,1[$ avec $z = 0.z_0z_1z_2z_3z_4z_5\ldots$ Ce point est l'image du point du carré dont les coordonnées sont :

$$0.z_0z_2z_4\ldots \text{ et } y = 0.z_1z_3z_5\cdots$$

La surjectivité semble en découler.

Le lecteur méticuleux montrera probablement l'image réelle $0.909090\ldots$ du point $(0.999\ldots, 0.000\ldots)$, autrement dit $(1,0)$ qui a le défaut notable de ne pas appartenir au carré ouvert !

Nous avons, en fait, le même problème avec tous les nombres du type $0.9y_0 9y_1 \ldots$ "images" du "segment" $\{1\} \times]0,1[$ (le segment "ouvert" $]BC[$ dans la figure ci-dessus).

Notre application f de l'intervalle $]0,1[$ au carré ouvert $]0,1[\times]0,1[$ est donc injective mais pas surjective ! Elle n'est donc pas bijective, contrairement à notre première attente. D'une certaine manière, ce résultat est encore plus surprenant que celui annoncé. Que nous puissions "injecter" un objet bidimensionnel "dans" et non "sur" un objet absolument plat défie toute intuition ! «*Je le vois, mais je n'y crois pas*» selon les propres mots de Cantor.

Il y a donc une injection du carré ouvert dans $]0,1[$.

Le théorème de Cantor-Berstein sauve la mise ! Comme nous l'avons démontré juste avant, ce théorème stipule que s'il existe une injection de X sur Y et une injection de Y sur X, alors il existe une bijection de X sur Y :

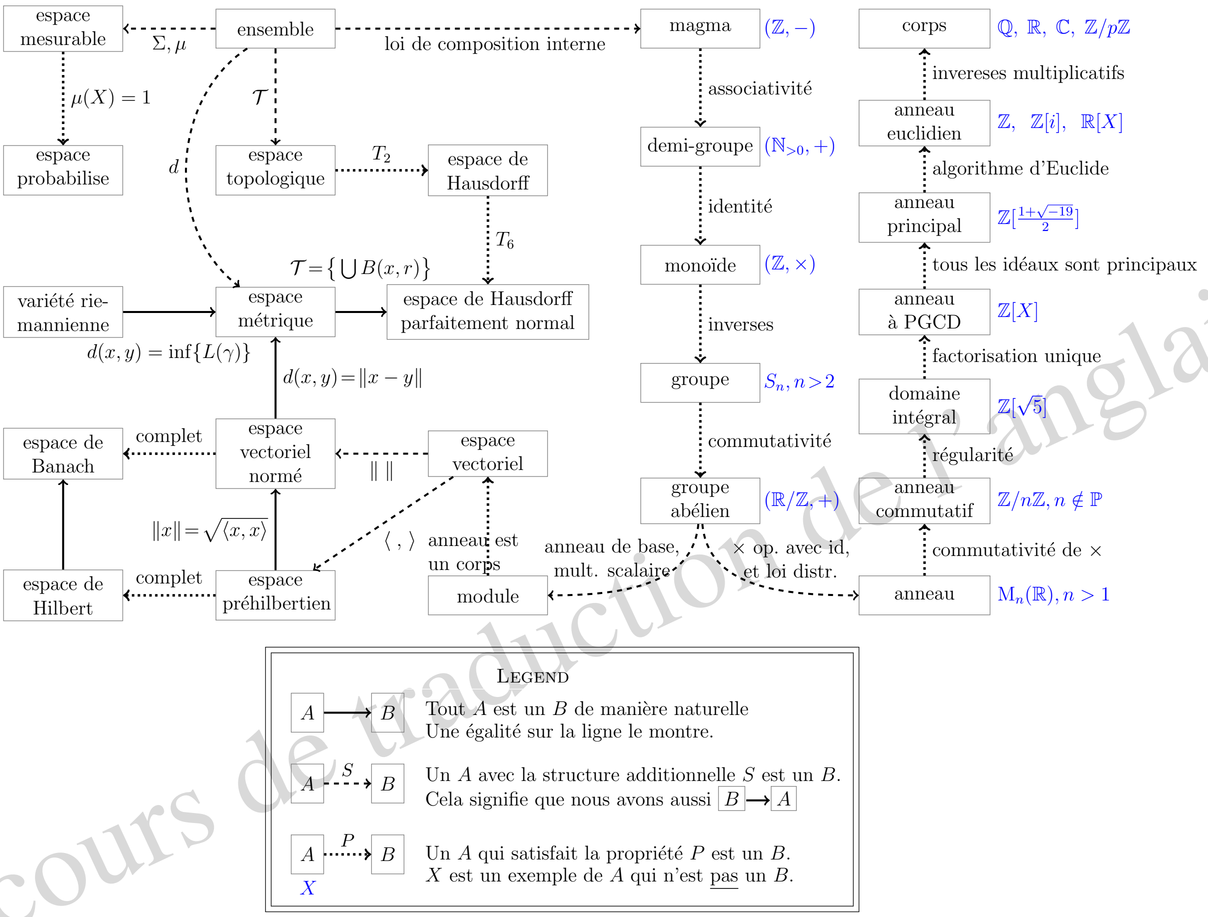
$$(X \mapsto Y) \wedge (Y \mapsto X) \Leftrightarrow X \leftrightarrow Y$$

Nous pouvons conclure : l'intervalle ouvert $]0,1[$ et le carré ouvert $]0,1[\times]0,1[$ sont équipotents !

En cours de traduction de l'anglais

5.5.4 Structures

L'algèbre dite "algèbre moderne" commence avec la théorie des structures algébriques due en partie à Carl F. Gauss et surtout à Évariste Galois. Ces structures existent en un très grand nombre mais seulement les fondamentales nous intéresseront ici. Avant de les détailler, voici un diagramme synoptique de ces principales structures et de leur hiérarchie :



En cours de traduction de l'anglais

FIG. 5.67 – **Synoptic diagram of common algebraic structures (author : ?)**

Remarque

Tout en haut du diagramme, la structure au nombre minimal de contraintes, en bas, un maximum. Soit, plus nous descendons, plus la structure est en quelque sorte spécialisée.

Soit pour simplifier les écritures, supposons que $\star$ et $\circ$ représentent des lois de compositions[17] (comme l'addition, la soustraction, la multiplication ou encore la division,...), alors :

Définitions (#5.5.85) : Soit $\star$ et $\circ$ des symboles de lois internes à un ensemble E (cela pourrait être l'addition et la multiplication pour prendre les cas les plus connus) alors :

[17]Cette notation généralisée est souvent appelée "notation stellaire".

D1. $\star$ est une "loi commutative" si :

$$a \star b = b \star a \tag{5.5.122}$$

D2. $\star$ est une "loi associative" si :

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \tag{5.5.123}$$

D3. n est "l'élément neutre" pour $\star$ si :

$$a \star n = n \star a = a \tag{5.5.124}$$

Nous admettrons par ailleurs sans démonstration (c'est intuitif) que s'il existe un élément neutre, il est unique.

D4. a' est "l'élément symétrique" (dans le sens général de l'opposé par exemple pour l'addition et l'inverse pour la multiplication) de a pour $\star$ si :

$$a' \star a = a \star a' = n \tag{5.5.125}$$

Nous admettrons également et sans démonstration que le symétrique de tout élément est unique.

D5. $\circ$ est une "loi distributive" par rapport à $\star$ si :

$$a \circ (b \star c) = (a \circ b) \star (a \circ c) \tag{5.5.126}$$
$$(a \star b) \circ c = (a \circ b) \star (b \circ c) \tag{5.5.127}$$

D6. b est "l'élément absorbant" si pour tout a et une loi $\star$ nous avons :

$$a \star b = 0 \tag{5.5.128}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Si a est son propre symétrique par rapport à la loi $\star$, les mathématiciens disent que a est "involutif".

R2. Si un élément b de E vérifie :

$$a \star b = b \star a = b \tag{5.5.129}$$

alors b est dit "élément absorbant" pour la loi $\star$.

R3. Il faut toujours vérifier que les neutres et les symétriques le soient "à gauche" et "à droite". Ainsi, par exemple, dans $(\mathbb{Z}, -)$, l'élément 0 n'est un neutre qu'à droite car $x - 0 = x$ mais $0 - x = -x$.

5.5.4.1 Magma

Définition (#5.5.86) : Nous désignons un ensemble par le terme "magma" M, si les composants le constituant sont opérables par rapport à une loi interne $\star$:

$$(M,\star) \text{ est un magma} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \star \text{ est une opération} \\ \star \text{ est une loi interne} \end{cases} \tag{5.5.130}$$

Il est donc important de se rappeler que si nous désignons une structure algébrique par le terme "magma" tout court, cela ne signifie en aucun cas que la loi interne est commutative, associative ou même qu'elle possède un élément neutre !

Remarques

R1. Si de plus la loi interne $\star$ est commutative, nous parlons de "magma commutatif".

R2. Si de plus la loi interne $\star$ est associative, nous parlons de "magma associatif".

R3. Si de plus la loi interne $\star$ possède un élément neutre n, nous parlons de "magma unitaire associatif" ou respectivement de "magma unitaire commutatif" mais nous verrons just pluse bas que les deux ont officiellement dénommés autrement par les spécialistes.

Définition (#5.5.87) : Dans un magma $(M,\star)$, un élément x est nommé "élément régulier" (ou "élément simplifiable") à gauche si pour tout couple $(a,b)\in M$ nous avons :

$$x\star a = x\star b \Longrightarrow a=b \tag{5.5.131}$$

Remarque

Nous définissons sur la même logique un élément régulier à droite.

Ainsi, un élément est dit "régulier" s'il est régulier à droite et à gauche. Si $\star$ est commutatif (comme dans le cas d'un magma commutatif), les notions d'élément régulier à gauche ou à droite coïncident.

Un magma $(M,\star)$ est donc une structure algébrique élémentaire. Il existe des structures plus subtiles (monoïdes, groupes, anneaux, champs, espace vectoriel, etc.) dans lesquelles un ensemble est doté de plusieurs lois et de différentes propriétés. Nous les verrons tout de suite et les utiliserons tout au long de ce livre de manière explicite ou implicite.

En cours de traduction

5.5.4.2 Monoïde

Définition (#5.5.88) : Si la loi $\star$ est associative et possède un élément neutre nous disons alors que le "magma associatif unitaire" est un "monoïde" :

$$(\ddot{M},\star) \text{ est un monoïde} \Longleftrightarrow \begin{cases} \star \text{ est associative} \\ \exists \text{ un élément neutre } n \in \ddot{M} \text{ pour la loi } \star \end{cases} \quad (5.5.132)$$

Remarques

R1. Si de plus la loi interne $\star$ est commutative alors nous disons alors que la structure forme un "monoïde abélien" (ou simplement "monoïde commutatif").

R2. Dans certains ouvrages nous trouvons aussi comme définition que le monoïde est un "semi-groupe" (avec une loi associative $\star$) muni d'un élément neutre n.

Montrons tout de suite que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est un monoïde abélien totalement ordonné (comme nous l'avons partiellement vu dans la section sur les Opérateurs 287) par rapport aux lois d'addition et de multiplication :

La loi d'addition "$+$" est-elle une loi interne telle que $\forall a,b \in \mathbb{N}$ nous ayons :

$$a+b=c \quad (5.5.133)$$

Nous pouvons démontrer que c'est bien le cas en sachant que 1 appartient à $\mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{a} 1 + \sum_{i=1}^{b} 1 = \sum_{i=1}^{a+b} 1 \quad (5.5.134)$$

Donc $c \in \mathbb{N}$ et l'addition est bien une loi interne (nous disons également que l'ensemble $\mathbb{N}$ est "stable" par rapport à l'addition) et en même temps associative puisque 1 peut être additionné à lui-même par définition dans n'importe quel ordre sans que le résultat en soit altéré. Si vous vous rappelez que la multiplication est une loi qui se construit sur l'addition (voir la section Opérateurs page 307), alors la loi de multiplication $\times$ est aussi une loi interne et associative !

Nous admettrons à partir d'ici qu'il est trivial que la loi d'addition $+$ est également commutative et que le zéro "0" en est l'élément neutre (n) à droite. Ainsi, la loi de multiplication est elle aussi commutative et il est trivial que "1" en est l'élément neutre (n).

Par ailleurs, pour parler déjà de quelque chose qui n'est pas directement en relation avec le monoïde... mais qui nous sera utile un peu plus loin, existe-t-il en restant dans la lignée de l'exemple précédent pour la loi d'addition $+$ un symétrique $\exists c$ tel que $\forall a,b \in \mathbb{N}$ nous ayons :

$$\left(\sum_{i=1}^{a} 1 + \sum_{i=1}^{b} 1\right) + c = \left(\sum_{i=1}^{a+b} 1\right) + c = 0 \quad (5.5.135)$$

avec $c \in \mathbb{N}$?

Il est assez trivial que pour que cette égalité soit satisfaite nous ayons :

$$\left(\sum_{i=1}^{a+b} 1\right) = -c \quad (5.5.136)$$

En cours de traduction de l'anglais

soit :

$$a + b = -c \tag{5.5.137}$$

or les nombres négatifs n'existent pas dans $\mathbb{N}$. Ce qui nous amène aussi à la conclusion que la loi d'addition $+$ n'a pas de symétrique dans $\mathbb{N}$ et que la loi de soustraction $-$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$ (la soustraction étant rigoureusement l'addition d'un nombre négatif !).

De même, car cela va aussi nous être utile un peu plus loin, existe-t-il pour la loi de multiplication $\times$ un symétrique a' tel que $\forall a \in \mathbb{N}$ nous ayons :

$$a' \cdot a = n = 1 \tag{5.5.138}$$

avec $a' \in \mathbb{N}$?

D'abord il est évident que :

$$a' = \frac{1}{a} \tag{5.5.139}$$

Mais excepté pour $a = 1$, le quotient $1/a$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$. Donc nous devons conclure qu'il n'existe pas pour tout élément de $\mathbb{N}$ de symétriques pour la loi de multiplication et ainsi que la loi de division n'existe pas dans $\mathbb{N}$ et que la loi de multiplication ne forme pas un monoïde dans cet ensemble.

Synthèse :

$\mathbb{N}$	$(+)$	$(-)$	$\times$	/
Loi interne	oui		oui	
Commutative	oui		oui	
Élément neutre	oui (0)	non	oui (1)	non
Élément absorbant	non		oui (0)	
Symétrique	non		non	

TAB. 5.19 – Lois et leurs propriétés dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons par exemple les propriétés suivantes relativement à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et au concept de monoïde :

P1. $(\mathbb{N}, \leq, \geq)$ est totalement ordonné (attention cette notation est un peu abusive ! il suffit qu'il y ait juste une des deux relations d'ordre $\mathcal{R}$ pour que l'ensemble soit totalement ordonné).

P2. $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{N}, \times)$ sont des monoïdes abéliens.

P3. L'élément zéro "0" est l'élément absorbant pour le monoïde $(\mathbb{N}, \times)$.

P4. Les lois de soustraction $-$ et division / n'existent pas dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

P5. $\mathbb{N}$ est un monoïde abélien totalement ordonné par rapport aux lois d'addition et de multiplication (attention la notation suivante est abusive car le monoïde n'est composé que d'une seule loi interne et d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ ce qui donnerait au total 4 monoïdes) :

$$(\mathbb{N}, +, \leq, \geq) \tag{5.5.140}$$

Remarques

R1. Il est rare d'utiliser les monoïdes dansla pratique du physicien et de l'ingénieur. Effectivement, souvent, lorsque nous nous trouvons face à une structure trop pauvre pour pouvoir vraiment discuter, nous la prolongeons vers quelque chose de plus riche, comme un groupe, ou un anneau (voir plus loin) tel que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Q}$ ou les nombres réels $\mathbb{R}$ (au moins...).

R2. Dire qu'une structure algébrique est totalement ordonnée par rapport à certaines lois signifie que soit $\star$ une loi, et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre et a, b, c, d quatre éléments de la structure intéressée, alors si $a\ \mathcal{R}\ b$ et $c\ \mathcal{R}\ d$ implique $(a \star c)\mathcal{R}(b \star d)$. Nous notons alors cette structure $(S, \star, \mathcal{R})$ ou simplement $(S, \mathcal{R})$ et en indiquant la (ou les) loi concernée.

5.5.4.3 Groupes

Définition (#5.5.89) : Nous désignons un ensemble par le terme "groupe", si les composants le constituant satisfont aux trois conditions de ce que nous nommons la "loi interne de groupe", définie ci-dessous :

$$(G, \star) \text{ est une groupe} \iff \begin{cases} \star \text{ est associative} \\ \exists \in G \text{ un élément neutre pour } \star \\ \forall x \in G \text{ il y a un symétrique (inverse) pour } \star \end{cases} \tag{5.5.141}$$

Dans ce cas, la loi de compositions interne $\star$ sera souvent (mais pas exclusivement !) notée "$+$" et appelée "l'addition, le neutre e noté "0" et le symétrique de x noté "$-x$".

Insistons sur le fait que la structure de groupe est probablement une des plus importantes dans la pratique de l'ingénieur et de la physique moderne en général. Raison pour laquelle il convient d'y porter une attention toute particulière (voir la section d'Algèbre Ensembliste page 418) !

Si de plus, la loi interne $\star$ est également commutative, nous disons alors que le groupe est un "groupe abélien" ou simplement "groupe commutatif".

S'il existe dans G au moins un élément a tel que tout élément de G est une puissance de a ou du symétrique a' de a, nous disons que $(G, \star)$ est un "groupe cyclique de générateur a" s'il est fini, sinon nous disons qu'il est "monogène" (nous reviendrons sur les groupes cycliques dans la section d'Algèbre Ensembliste page 1399).

Plus généralement un groupe $(G, \star)$ d'élément neutre e, non réduit uniquement à $\{e\}$ sera monogène, s'il existe un élément a de G distinct de e tel que $G = \{e, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots\}$. Un tel groupe sera cyclique, s'il existe un entier n non nul pour lequel $a^n = e$. Le plus petit entier non nul vérifiant cette égalité est alors nommé "l'ordre du groupe".

Montrons tout de suite que l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien totalement ordonné (comme nous l'avons vu dans la section des Opérateurs page 287) par rapport aux lois d'addition $+$ et de multiplication $\times$.

D'abord pour raccourcir les développements, il est utile de rappeler que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est un

En cours de traduction de l'anglais

"prolongement" de $\mathbb{N}$ par le fait que nous y avons ajouté tous les nombres symétriques de signe négatif ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

Ainsi, en abusant toujours des notations (car normalement un groupe n'a qu'une seule loi $\star$ et une seule relation d'ordre $\mathcal{R}$ suffit à l'ordonner) :

$$(\mathbb{Z}, +, -, \leq, \geq) \tag{5.5.142}$$

forme un groupe abélien totalement ordonné (4 groupes au fait !) et :

$$(\mathbb{Z}, \times, \leq, \geq) \tag{5.5.143}$$

un monoïde abélien (deux monoïdes au fait !) totalement ordonné.

Remarquons aussi que la loi de division n'existe pas pour tout élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$! Donc en toute généralité nous disons qu'elle n'y existe pas !

Synthèse :

$\mathbb{Z}$	$(+)$	$(-)$	$(\times)$	$(/)$
Loi interne	oui	oui	oui	
Associativité	oui	non	oui	
Commutativité	oui	non	oui	
Élément neutre	oui (0)	non (0 pas neutre à gauche)	oui (1)	non
Élément absorbant	non	non	oui (0)	
Symétrique	oui (signe opposé)	oui	non	

TAB. 5.20 – **Lois et leurs propriétés dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$**

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons donc les propriétés suivantes :

P1. $(\mathbb{Z}, \leq, \geq)$ est totalement ordonné (attention à nouveau cette notation est un peu abusive ! il suffit qu'il y ait juste une des deux relations d'ordre $\mathcal{R}$ pour que l'ensemble soit totalement ordonné).

P2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif dont zéro "0" est l'élément neutre.

P3. La loi de division n'existe pas dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.

P4. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien totalement ordonné par rapport à la loi d'addition (attention la notation suivante est encore une fois abusive car le groupe est composé que d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ ce qui donnerait au total deux groupes) :

$$(\mathbb{Z}, +, \leq, \geq) \tag{5.5.144}$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas un groupe commutatif totalement ordonné par rapport à la loi de multiplication :

$$(\mathbb{Z}, \times, \leq, \geq) \tag{5.5.145}$$

Nous voyons de suite alors que $\mathbb{Z}$ a des propriétés trop restreintes, c'est la raison pour laquelle il est intéressant de le prolonger par l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ défini de manière très simpliste... par (voir la section Nombres page 223) :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| (p,q) \in \mathbb{Z}/q = 0 \right\} \tag{5.5.146}$$

Ce qui signifie pour rappel que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est défini par l'ensemble des quotients p et q appartenant chacun à $\mathbb{Z}$ dont nous excluons à q de prendre la valeur nulle (la notation $/q$ signifiant pour rappel l'exclusion).

Et nous avons évidemment :

$$(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \subset \mathbb{Q} \tag{5.5.147}$$

Il est dès lors évident (sans démonstration et toujours en utilisant la notation abusive déjà commentée maintes fois plus haut...) que $(\mathbb{Q}, \leq, \geq)$ est aussi totalement ordonné et aussi que $\mathbb{Q}$ est un groupe abélien totalement ordonné par rapport à la loi d'addition $+$ seulement :

$$(\mathbb{Q}, +, \leq, \geq) \tag{5.5.148}$$

Ce qui devient intéressant avec $\mathbb{Q}$, c'est que la loi de multiplication $\times$ devient une loi interne et forme un groupe abélien commutatif dit "groupe multiplicatif" par rapport à $\mathbb{Q}^*$.

Démonstration 5.28.2. Démontrons donc que le symétrique existe pour la loi de multiplication $\times$ tel que :

$$a \times a = n = 1 \tag{5.5.149}$$

Puisque dans $\mathbb{Q}^*$ tout nombre peut se mettre sous la forme :

$$a = \frac{p}{q} \tag{5.5.150}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$.

Alors puisque :

$$a' = \frac{1}{a} = \frac{1}{\left(\dfrac{p}{q}\right)} = \frac{q}{p} \tag{5.5.151}$$

Il existe donc un symétrique à tout rationnel dans $\mathbb{Q}^*$ pour la loi de multiplication.

■ Q.E.D.

Par définition, ou par construction, la division existe dans $\mathbb{Q}^*$ et est une loi interne. Mais est-elle associative telle que pour $\forall (p,q,r) \in \mathbb{Q}^*$ nous ayons :

$$\frac{\dfrac{p}{q}}{r} = \frac{p}{\dfrac{q}{r}} \tag{5.5.152}$$

En cours de traduction de l'anglais

Au fait, la démonstration est assez triviale si nous nous rappelons que la division se définit à partir de la loi de multiplication par l'inverse et que cette dernière loi est (elle !) associative. Ainsi, il vient :

$$\frac{\frac{p}{q}}{r} = \left(p\frac{1}{q}\right)\frac{1}{r} = p\left(\frac{1}{q}\frac{1}{r}\right) = p\left(\frac{1}{qr}\right) \neq \frac{p}{\frac{q}{r}} = \frac{p}{q\frac{1}{r}} = p\frac{r}{q} \qquad (5.5.153)$$

Donc la loi de division n'est pas associative dans $\mathbb{Q}^*$.

Nous pouvons aussi nous demander si la loi de division $(/)$ est cependant commutative tel que la relation :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \qquad (5.5.154)$$

soit valable pour $\forall(a, b) \in \mathbb{Q}^*$.

Nous voyons très bien que cela n'est pas le cas puisque nous pouvons écrire cette dernière relation sous la forme :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = \pm 1 \Rightarrow a = \pm b \qquad (5.5.155)$$

Pour résumer :

$\mathbb{Q}$	$(+)$	$(-)$	$(\times)$	$(/)$
Loi interne	oui	oui	oui	oui
Associativité	oui	non	oui	non
Commutativité	oui	non	oui	non
élément neutre	oui (0)	non (0 pas neutre à gauche)	oui (1)	oui (1 neutre à droite)
élément absorbant	non	non	oui (0)	oui (0 au numérateur)
Symétrique	oui (signe opposé)	oui (signe opposé)	non (excepté dans $\mathbb{Q}^*$)	non

TAB. 5.21 – **Lois et leurs propriétés dans l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$**

Nous avons donc les propriétés suivantes :

P1. $(\mathbb{Q}, \leq, \geq)$ est totalement ordonné

P2. $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}^*, \times)$ sont indépendamment des groupes abéliens totalement ordonnés

P3. Zéro "0" est l'élément absorbant par rapport au groupe $(\mathbb{Q}^*, \times)$

P4. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un groupe abélien totalement ordonné par rapport aux lois d'addition et de multiplication que nous notons :

$$(\mathbb{Q}, +, \leq, \geq) \qquad \text{et} \qquad (\mathbb{Q}^*, \times, \leq, \geq) \qquad (5.5.156)$$

En cours de traduction de l'anglais

Les mêmes propriétés sont applicables à $\mathbb{R}$ et à $\mathbb{C}$ mais à la différence que ce dernier n'est pas ordonnable.

Cependant, il peut être compréhensible que pour $\mathbb{C}$ vous soyez sceptiques. Développons donc tout cela :

Nous devons nous assurer que la somme "$+$", la différence "$-$", le produit "$\times$" et le quotient "$/$" de deux nombres de la forme $x + \mathrm{i}y$ donne quelque chose d'encore de cette forme (c'est-à-dire une application du type $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$).

Additionnons les nombres $a + \mathrm{i}b$ et $c + \mathrm{i}d$ où a, b, c et d sont des réels :

$$\begin{aligned}&(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)\\ &\quad = a + \mathrm{i}b + c + \mathrm{i}d\\ &\quad = a + c + \mathrm{i}b + \mathrm{i}d\\ &\quad = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)\end{aligned} \tag{5.5.157}$$

Donc l'addition est bien une loi interne commutative et associative pour laquelle il existe un élément neutre et symétrique dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$.

Soustrayons les nombres $a + \mathrm{i}b$ et $c + \mathrm{i}d$ où a, b, c et d sont ici encore, des réels :

$$\begin{aligned}&(a + \mathrm{i}b) - (c + \mathrm{i}d)\\ &\quad = a + \mathrm{i}b - c - \mathrm{i}d\\ &\quad = a - c + \mathrm{i}b - \mathrm{i}d\\ &\quad = (a - c) + \mathrm{i}(b - d)\end{aligned} \tag{5.5.158}$$

Donc la soustraction est une opération interne ; elle n'est ni commutative, ni associative elle n'a pas d'élément neutre à gauche et pas de symétrique.

Multiplions maintenant les nombres $a + \mathrm{i}b$ et $c + \mathrm{i}b$ où a, b, c et d là toujours, sont des réels. Pour parvenir à nos fins, nous emploierons la distributivité (voir section Algèbre page 1345) de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned}&(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d)\\ &\quad = ac + aid + ibc + ibid\\ &\quad = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2bd\\ &\quad = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + (-1)bd\\ &\quad = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)\end{aligned} \tag{5.5.159}$$

Donc la loi de multiplication est bien une opération interne commutative, associative et distributive (!) pour laquelle il existe un élément neutre et symétrique dans $\mathbb{C}^*$ (voir ci-après).

Une division est avant tout une multiplication par l'inverse. Prouver qu'il existe un inverse c'est prouver qu'il existe un symétrique pour la multiplication. Inversons donc le nombre $x + \mathrm{i}y$ où

En cours de traduction de l' anglais

x et y sont des réels (différents de zéro) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+\mathrm{i}y} &= \frac{(x-\mathrm{i}y)}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}\\ &= \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2-(\mathrm{i}y)^2}\\ &= \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned} \tag{5.5.160}$$

Donc l'inverse d'un nombre complexe est bien une opération interne non associative et non commutative pour laquelle il existe un élément neutre, et elle est symétrique. Il en est de même pour la division, qui correspond au produit par l'inverse d'un nombre complexe.

Voyons un exemple de groupe cyclique (nous approfondirons le sujet dans la section d'Algèbre Ensemble à la page 1399) : Dans $\mathbb{C}$, considérons $G=\{1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}\}$ muni de la multiplication usuelle des nombres complexes. Alors $(G,\times)$ est évidemment un groupe abélien. Un tel groupe est aussi monogène car engendré par les puissances d'un de ses éléments : i (ou bien $-\mathrm{i}$). Ce groupe monogène étant fini, il s'agit alors d'un "cyclic group".

En cours de traduction de l'anglais

5.5.4.4 Anneaux

L'anneau est le coeur de l'algèbre commutative qui est la structure algébrique correspondant aux concepts collégiens d'addition, de soustraction, et de multiplication.

Définition (#5.5.90) : Un groupe commutatif (ou "groupe abélien") A est un "anneau" s'il est muni d'une seconde loi de composition interne vérifiant les propriétés suivante :

$$(A,+,\times)\text{ est un anneau} \Longleftrightarrow \begin{cases}(A,+)\text{ est un groupe abélien}\\ \text{La loi }\times\text{ est associative}\\ \text{La loi }\times\text{ est distributive par rapport à loi }+\end{cases} \tag{5.5.161}$$

Comme nous le savons déjà, l'élément neutre de la première loi de composition interne "+" est noté "0" et appelé le "zéro" de l'anneau. La deuxième loi interne est souvent notée par un point à mi-hauteur $\cdot$ (ou par une crois $\times$ dans les petites classes) et appelée la "multiplication".

Remarques

R1. Si de plus, la deuxième loi interne de composition "$\times$" est également commutative, l'anneau est dit "anneau commutatif". Nous rencontrons aussi des anneaux non-commutatifs dans lesquels la relation de commutativité n'est pas imposée ou ne s'impose pas et alors nous devons parfois l'imposer, il faut alors renforcer la propriété de l'élément neutre de cette deuxième loi en imposant à "1" d'être un élément neutre à la fois à droite et à gauche tel que : $1a=a1=a$ (un exemple d'anneau non-commutatif est fourni par l'ensemble des matrices carrées $n\times n$ à coefficients dans un anneau A, par exemple $M_n(\mathbb{R})$ comme nous le verrons dans la section d'Algèbre Linéaire page 1920).

R2. Si de plus, il existe dans A un élément neutre pour la deuxième loi de composition interne "$\times$", et que cet élément neutre est l'unité "1" nous disons alors que l'anneau est un "anneau unitaire" et 1 est appelé "unité de l'anneau". Si l'anneau est commutatif et possède un élément neutre pour la deuxième loi de composition interne alors nous parlons "d'anneau commutatif unitaire".

R3. Si $a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$, quels que soient les éléments a, b de A, l'anneau est dit "anneau intègre" ou "anneau sans diviseurs de zéro" (dans le cas contraire il est bien évidemment un "anneau non-intègre").

R4. Un "anneau factoriel" est un anneau commutatif unitaire et intègre dans lequel le théorème fondamental de l'arithmétique est vérifié (voir Sectoin Théorie des Nombres page 352).

Définitions (#5.5.91) :

D1. Un élément a d'un anneau A est un "élément unité" s'il existe $b \in A$ tel que $ab = ba = 1$. Si un tel b existe il est unique (nous en avons vu un exemple lors de notre étude des classes de congruence dans la section de Théorie des Nombres page 353).

D2. Un élément a d'un anneau A s'appelle un "diviseur nul à gauche " s'il existe $x \neq 0$ tel que $ax = 0$. De même, un élément a d'un anneau est nommé "diviseur nul à droite" s'il existe $y \neq 0$ tel que $ya = 0$. Un élément a qui est à la fois un diviseur gauche ET un diviseur égal à zéro s'appelle un "diviseur nul bilatéral[18]".

En traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Le seul diviseur nul de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est 0.

E2. Dans l'anneau des matrices carrées 2×2 (sur tout anneau non-nul)nous pouvons trouver un a et un x non-nul comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5.162}$$

Dans ce dernier exemple, il est difficile de choisir laquelle des matrices le "diviseur null", c'est pourquoi nous pouvons trouver dans certains manuels scolaires que a ET x sont considérés tous deux comme des "diviseurs nuls"...

Remarques

R1. Il devrait être clair à ce niveau de lecture qu'un anneau est intègre si et seulement si il ne possède aucun diviseur de zéro.

R2. Les notions d'unité et de diviseurs de zéro sont incompatibles mais un élément d'un anneau peut être ni l'un ni l'autre. C'est le cas, par exemple, de tous les entiers différents

[18] Si l'anneau est commutatif, les diviseurs nuls à gauche et à droite sont évidemment les mêmes.

de $\{0, -1, 1\}$ dans $\mathbb{Z}$. Ce ne sont ni des unités, ni des diviseurs de zéro ! Nous les appelons des "éléments réguliers".

Nous verrons un exemple important d'anneaux dans le cadre de notre étude des polynômes (voir section de Calcul Algébrique page 1351) mais nous en avons déjà vu de très importants lors de notre étude des classes de congruence dans la section de Théorie des Nombres page 353.

Voyons quelques exemples d'anneaux ! Lors de notre étude des groupes plus haut, nous avons trouvé que les structures :

$$(\mathbb{Z}, +) \qquad (\mathbb{Q}, +) \qquad (\mathbb{R}, +) \qquad (\mathbb{C}, +) \tag{5.5.163}$$

sont tous les quatre des groupes abéliens et les trois premiers sont en plus totalement ordonnés.

La loi de division n'étant en aucun cas associative, nous pouvons nous restreindre à étudier pour chacun des groupes précités, le couple de lois : "$+$" et "$\times$".

Ainsi, il vient très vite que :

$$(\mathbb{Z}, +, \times) \qquad (\mathbb{Q}, +, \times) \qquad (\mathbb{R}, +, \times) \qquad (\mathbb{C}, +, \times) \tag{5.5.164}$$

constituent des anneaux commutatifs unitaires et intègres.

Remarque

Nous considérerons comme évident, à ce niveau du discours, que le lecteur aura remarqué que est $\mathbb{Z}$ un "sous-anneau" de $\mathbb{Q}$ dans le sens où les opérations définies sont internes à chacun des ensembles et que les éléments neutres et identité sont identiques et qu'il existe pour chaque élément de ces ensembles un opposé qui est dans le même ensemble. Nous allons approfondir le concept de sous-anneau un peu plus loin.

En cours de l'anglais

Soit A un anneau. Nous avons les propriétés suivantes :

P1. $a + b = a + c \Rightarrow (b = c) \qquad \forall a, b, c \in A$

Démonstration 5.28.3. Ceci découle de la définition D4 vue au début de la partie concernant les structures algébriques (chaque élément a un opposé / symétrique). En effet, nous pouvons ajouter à :

$$a + b = a + c \tag{5.5.165}$$

l'élément $-a$. Nous obtenons alors :

$$(-a) + a + b = (-a) + a + c \tag{5.5.166}$$

par l'existence de l'opposé cela donne :

$$0 + b = 0 + c \tag{5.5.167}$$

d'où :

$$b = c \tag{5.5.168}$$

■ Q.E.D.

P2. $0 \cdot a = 0 \qquad \forall a \in A$

Démonstration 5.28.4. Cette propriété découle des définitions D3 (existence de l'élément neutre), D4 (existence de l'opposé/symétrique), D5 (distributivité par rapport à l'autre loi) ainsi que de la propriété P1 ci-dessus. En effet, nous avons :

$$0 \cdot a + a = 0 \cdot a + 1 \cdot a = (0+1) \cdot a = 1 \cdot a = 0a \tag{5.5.169}$$

Nous avons donc :

$$0 \cdot a + a = a \tag{5.5.170}$$

La propriété P1 ci-dessus permet de conclure que :

$$0 \cdot a = 0 \tag{5.5.171}$$

(nous pourrions discuter de la pertinence de ce genre de démonstration...).

■ Q.E.D.

P3. $(-1) \cdot a = -a \qquad \forall a \in A$

Démonstration 5.28.5. Cette propriété se démontre à l'aide de P2. Nous avons :

$$0 = 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a \tag{5.5.172}$$

en ajoutant $-a$ à cette dernière égalité, nous avons :

$$(-a) = (-1) \cdot a \tag{5.5.173}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

5.5.4.4.1 Sous-anneau

Définitions (#5.5.92) : Soit A un anneau et $S \subset A$ un sous-ensemble de A. Nous disons que S est un "sous-anneau" de A si :

P1. $n \in S$ (l'élément neutre de A est aussi celui de S)

P2. $a \in S \Rightarrow -a \in S$

P3. $(a, b) \in S \Rightarrow a + b \in S$

P4. $(a, b) \in S \Rightarrow a \cdot b \in S$

✍**Exemple :**

L'anneau $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

5.5.4.5 Corps

Définition (#5.5.93) : Nous désignons un ensemble de nombres par le terme "corps" si :

$$(F,+,\times) \text{ est un corps si } \Longleftrightarrow \begin{cases} (F,+,\times) \text{ est un anneau unitaire} \\ (F-\{0\},\times) \text{ est un groupe} \end{cases} \tag{5.5.174}$$

Donc un corps est un anneau non nul dans lequel tout élément non nul est inversible ou en d'autres termes : un anneau dont tous les éléments non nuls sont des unités est un corps.

Remarques

R1. Si la loi interne $\times$ est également commutative, le corps est dit "corps commutatif".

R2. Les quaternions (voir section Nombres page 259) forment par exemple un corps non commutatif pour l'addition et la multiplication.

Voyons des exemples de corps parmi les anneaux unitaires suivant :

$$(\mathbb{Z},+,\times) \qquad (\mathbb{Q},+,\times) \qquad (\mathbb{R},+,\times) \qquad (\mathbb{C},+,\times) \tag{5.5.175}$$

Il nous faut d'abord déterminer lesquels ne constituent pas des groupes par rapport à la loi interne de multiplication "$\times$".

Comme nous l'avons déjà vu dans notre étude des groupes précédemment, il est évident qu'il nous faut éliminer $(\mathbb{Z},+,\times)$ à cause de l'existence des inverses qui n'est pas assurée dans cet ensemble.

Ainsi, les corps fondamentaux de l'arithmétique sont :

$$(\mathbb{Q},+,\times) \qquad (\mathbb{R},+,\times) \qquad (\mathbb{C},+,\times) \tag{5.5.176}$$

et puisque la loi de multiplication "$\times$" est commutative dans ces ensembles, nous pouvons affirmer que ces corps sont également des corps commutatifs.

Nous avons souvent dans les petites classes le schéma suivant pour le corps le plus important :

$$\underset{\text{corps commutatif totalement ordonné}}{(\mathbb{R},+,\times)}\left\{\begin{array}{l} \underset{\text{corps commutatif}}{(\mathbb{R},+)}\left\{\begin{array}{l} \underset{\text{groupe commutatif}}{(\mathbb{R},+)}\left\{\begin{array}{l} \text{L'addition est une loi interne} \\ \text{L'addition est une loi interne associative} \\ \text{L'addition est une loi interne commutative} \\ \text{Il existe un élément neutre pour l'addition : } 0 \\ \text{Tout nombre réél a un opposé} \end{array}\right. \\ \underset{\text{groupe commutatif}}{(\mathbb{R},\times)}\left\{\begin{array}{l} \text{La multiplication est une loi interne} \\ \text{La multiplication est une loi interne associative} \\ \text{La multiplication est une loi interne commutative} \\ \text{Il existe un élément neutre pour la multiplication : } 1 \\ \text{Tout nombre réél a un inverse} \end{array}\right. \\ \text{La multiplication est distributive par rapport à l'addition} \end{array}\right. \\ \underset{\text{ensemble totalement ordonné}}{(\mathbb{R},\leq)}\left\{\begin{array}{l} \text{La relation } \leq \text{ est réflexive} \\ \text{La relation } \leq \text{ est antisymétrique} \\ \text{La relation } \leq \text{ est transitive} \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{5.5.177}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ainsi, nous appellerons "corps" un système C de nombres réels ou complexes a tels que la somme, la différence, le produit et le quotient de deux quelconques de ces nombres a appartiennent au même système C.

Nous énonçons également cette propriété de la manière suivante : les nombres d'un corps se reproduisent par les opérations rationnelles (addition, soustraction, multiplication, division). Ainsi, il est évident que le nombre zéro ne pourra jamais former le dénominateur d'un quotient et l'ensemble des entiers ne peut former un corps car la division dans l'ensemble des nombres entiers ne donne pas nécessairement un résultat dans ce même ensemble.

En cours de traduction de l' anglais

5.5.4.6 Espaces vectoriels

Lorsque nous définissons un "vector" (voir section de Calcul Vectorel page 1776), nous faisons habituellement référence à un "espace euclidien" (voir aussi la section de Calcul Vectoriel) de n dimensions de $\mathbb{R}^n$. Cependant, la notion d'espace vectoriel est beaucoup beaucoup plus vaste que ce dernier qui ne représente qu'un cas particulier !

Définition (#5.5.94) : Un "espace vectoriel" (EV) ou "K-espace vectoriel" (abrégé parfois K-ev) sur le corps K (nous prendrons fréquemment pour ce corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ensemble $(E,+,\cdot)$ possédant les propriétés suivantes :

$$(E,+,\cdot) \Longleftrightarrow \begin{cases} (E,+) \text{ est une groupe abélien} \\ \cdot \text{ est une loi externe définie par } \begin{cases} \cdot : E \times K \mapsto E \\ (x,a) \rightarrow a \cdot x \end{cases} \end{cases} \tag{5.5.178}$$

Nous avons donc deux lois de composition (en prenant les notations traditionnelles des vecteurs qui sera peut-être plus parlante et utile pour la suite...) :

1. Une loi de composition interne : l'addition notée "+" qui vérifie :

   1.1. Associativité :

$$\forall \vec{x},\vec{y}\vec{z} \in E: \quad (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) \tag{5.5.179}$$

   1.2. Commutativité :

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in E: \quad \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x} \tag{5.5.180}$$

   1.3. élément neutre :

$$\exists \vec{0} \in E: \quad \forall \vec{x} \in E, \vec{x}+\vec{0}+\vec{x} \tag{5.5.181}$$

   1.4. élément opposé

$$\forall \vec{x} \in E, \exists \vec{x}' \in E: \quad \vec{x}+\vec{x}'=\vec{0} \tag{5.5.182}$$

2. Une loi de composition externe : la multiplication par un scalaire, notée "$\cdot$" (pour éviter la confusion avec le produit vectoriel que nous introduirons dans la section de Calcul Vectoriel à la page 1808), qui vérifie :

   2.1. Associativité :

$$\forall \lambda,\mu \in K, \forall \vec{x} \in E: \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x} \tag{5.5.183}$$

   2.2. Distributivité à droite par rapport au corps K :

$$\forall \lambda,\mu \in K, \forall \vec{x} \in E: \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x} \tag{5.5.184}$$

   2.3. Distributivité à gauche par rapport à E :

$$\forall \lambda \in K, \forall \vec{x},\vec{y} \in E: \quad \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y} \tag{5.5.185}$$

En cours de traduction de l'anglais

2.4. Élément neutre (de K sur E) :

$$\forall \vec{x} \in E : \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \tag{5.5.186}$$

D'où 10 propriétés au total (oui... le fait d'avoir une loi interne ou externe est une propriété en soit !).

Nous disons alors que l'espace vectoriel a une "structure algébrique vectorielle" et que ces éléments sont des "vecteurs", les éléments de K étant des "scalaires" (voir section Nombres page ??).

Remarques

R1. Les opérations respectives s'utilisent fréquemment comme l'addition et la multiplication que nous connaissons déjà très bien sur equation, ce qui est bien commode pour nos habitudes...

R2. Dorénavant, pour distinguer les éléments du corps K et de l'ensemble E, nous noterons ceux de K par des lettres grecques et ceux de E par des lettres latines majuscules.

Il est inutile de démontrer que ces propriétés sont respectées pour $\mathbb{R}^n$ et, par conséquent pour $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons cependant nous poser la question à propos de certains sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

Extrait de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Considérons la région rectangulaire de $\mathbb{R}^3$ illustrée dans la figure (a) et en perspective dans la figure (c) ci-dessous :

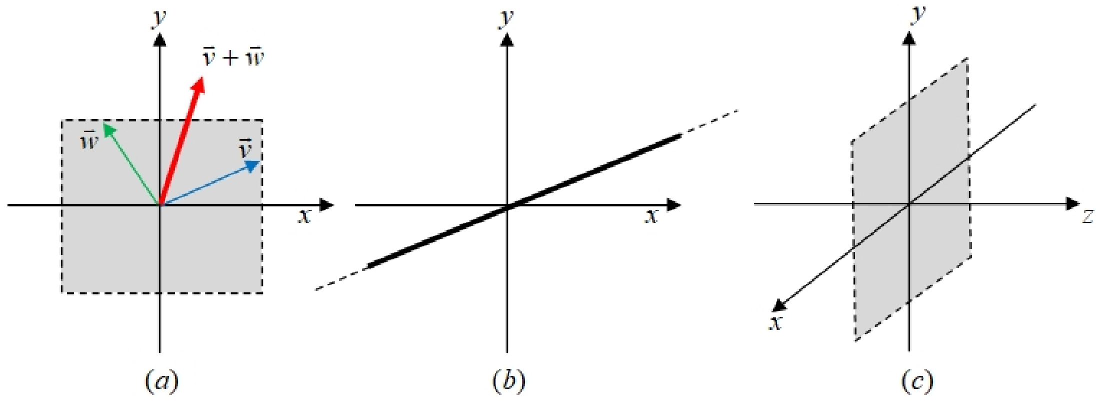


FIG. 5.68 – **Exemple du concept d'espace vectoriel**

Ce sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un espace vectoriel car, entre autres, la propriété d'opération interne du groupe abélien n'est pas satisfaite. En effet, si nous prenons deux vecteurs $\vec{v}$,$\vec{w}$ à l'intérieur du rectangle et que nous les additionnons $\vec{v}+\vec{w}$, il se peut que le résultat sorte du rectangle. Par contre, il est facile de voir que la droite $\mathbb{R}^1$ (infinie) illustrée dans la figure (b) respecte toutes les propriétés énumérées précédemment et, par conséquent, défini un espace vectoriel. Notons bien, cependant, que cette droite se doit

de passer par l'origine, sinon la propriété d'élément neutre du groupe abélien ne serait pas respectée (l'élément neutre n'existant plus).

E2. Un autre exemple d'un espace vectoriel est "l'espace vectoriel polynomial" des polynômes de degré deux ou moins noté $\mathcal{P}^2$ (voir section de Calcul Algébrique page 1351). Par exemple, deux éléments choisis aléatoirement de cet espace sont :

$$\begin{aligned} x &= t^2 + 2t + 3 \\ y &= -t + 5 \end{aligned} \quad (5.5.187)$$

Cet ensemble respecte les propriétés d'un espace vectoriel. En effet, si nous additionnons deux polynômes de degré deux ou moins, nous obtenons un autre polynôme de degré deux ou moins. Nous pouvons aussi multiplier un polynôme par un scalaire sans changer l'ordre (ou degré) de celui-ci, etc. Nous pouvons donc représenter un polynôme par des vecteurs dont les termes sont les coefficients du polynôme.

Mentionnons que nous pouvons aussi former des espaces vectoriels avec des ensembles de fonctions plus générales que des polynômes. Il importe seulement de respecter les 10 propriétés fondamentales d'un espace vectoriel !

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi défini, un espace vectoriel E sur K est une action de $(K, \times)$ sur $(E, +)$ qui est compatible avec la loi de groupe (par extension un "automorphisme" - voir la définition plus loin - sur $(E, +)$).

Définition (#5.5.95) : Soit E un espace vectoriel, nous appelons "sous-espace vectoriel" (SEV) F de E un sous-ensemble de E si et seulement si (notation des matheux...) :

$$\begin{aligned} & F \neq \varnothing \\ & \forall (X, Y) : \quad \in F^2, X + Y \in F \\ & \forall \lambda \in K, \forall X \in F : \quad \lambda X \in F \end{aligned} \quad (5.5.188)$$

ou en utilisant une autre notation (celle utilisée plutôt par les physiciens) :

$$\begin{aligned} & F \neq \varnothing \\ & \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2 : \quad \vec{x} + \vec{y} \in F \\ & \forall \lambda \in K, \forall \vec{x} \in F : \quad \lambda \vec{x} \in F \end{aligned} \quad (5.5.189)$$

5.5.4.7 C-algèbre A

Définition (#5.5.96) : Une "C-algèbre A" où C est un corps commutatif (appelée aussi souvent "K-alègbre A" pour "Körper" en allemand)), est un ensemble A muni de deux lois de composition internes $+$ (addition) et $\times$ (produit en croix) et d'une loi externe "$\cdot$" (multiplication) à domaine d'opérateurs C (produit par un scalaire) si et seulement si :

$$(A, C, +, \cdot, \times) \text{ est une } C\text{-algèbre} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (A, +, \cdot) \text{ est un } C\text{-espace vectoriel} \\ (A, +, \times) \text{ est un anneau unitaire} \\ \forall \lambda \in C, \forall a, b \in A : \quad (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda (a \cdot b) \end{cases} \quad (5.5.190)$$

✍**Exemples :**

E1. Pour reprendre un exemple dans la lignée de celui sur les exemples vectoriels, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de l'addition "$+$", de la multiplication "$\cdot$" et du produit vectoriel "$\times$" est une $\mathbb{R}$-algèbre non associative et non commutative notée $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot, \times)$.

E2. L'ensemble $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (un nombre complexe pouvant être vu comme un vecteur à deux composantes selon ce que nous avons vu dans la section des Nombres page **??**).

En cours de traduction de l' anglais

5.5.4.8 Résumé

Ok ... jusqu'ici il y a eu beaucoup de définitions et de concepts. Pour résumer les structures algébriques les plus importantes observées jusqu'à présent, nous avons obtenu l'autorisation de Kevin Binz de reproduire ses très belles figures visuelles qui pourraient aider le cerveau du lecteur à avoir une vue d'ensemble des concepts les plus importants vus jusqu'à présent.

Commençons donc par introduire les différentes structures d'ensembles du point de vue où nous les construisons en ajoutant à chaque fois une nouvelle propriété :

Magma	Semi-groupe	Monoid	Groupe	Groupe Abélien
Clos	Clos	Clos	Clos	Clos
	Associativité	Associativité	Associativité	Associativité
		élément identité	élément identité	élément identité
			élément inverse	élément inverse
				Commutativité

TAB. 5.22 – Résumé des structures algébriques les plus courantes
(source : https://kevinbinz.com/tag/identity-element/, auteur : Kevin Binz)

Bien sûr, il n'y a pas de raison particulièrement forte pour "couper" les axiomes dans cet ordre. Des options plus ésotériques sont disponibles (ci-dessous, les axiomes rouges sont supprimés, les verts sont réintroduits), introduisant en même temps certaines structures ensemblistes que nous n'avons présentées précédemment :

En cours de traduction de l'anglais

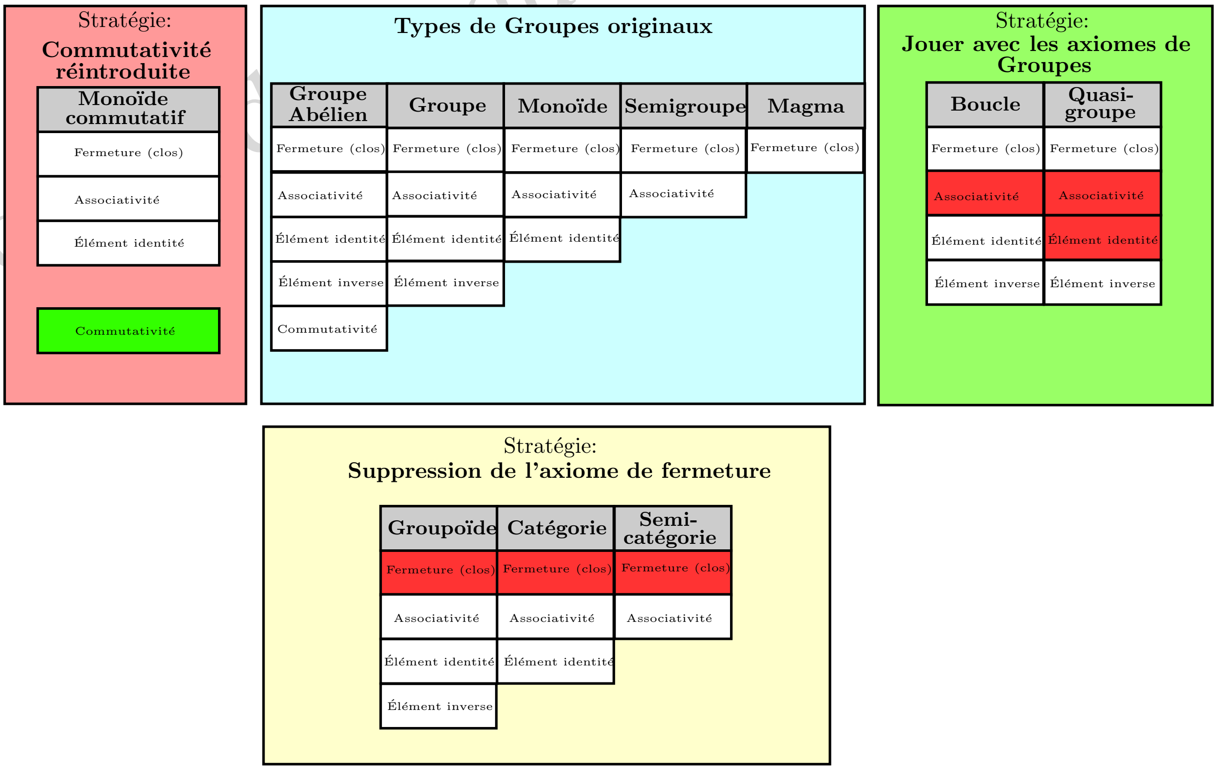


FIG. 5.69 – Résumé des structures algébriques les plus courantes
(source : https://kevinbinz.com/tag/identity-element/, auteur : Kevin Binz)

Fermeture (clos): Pour tout a, b dans S, $a+b$ est aussi S
Associativité: Pour tout a, b, c dans S, la relation $(a+b)+c=a+(b+c)$ est valable
Élément identité: Il existe une élément 0 tel que pour chaque a dans S, $0+a=a+0=a$ est valable
Élément inverse: Pour tout a dans S, il existe une élément $-a$ tel que $a+(-a)=-a+a=0$
Commutativité: Pour tout a, b dans S, la relation $a+b=b+a$ est valable

FIG. 5.70 – Théorie des groupes résumé addition
(source : https://kevinbinz.com/tag/identity-element/, auteur : Kevin Binz)

Si nous considérons ce qui précède comme une fonction, alors trois entrées nous concernent : la cible, l'opérateur et l'élément d'identité. Ainsi, nous pouvons condenser ce qui précède en $(S,+,0)$.

Fermeture (clos): Pour tout a, b dans S, $a\times b$ est aussi dans S
Associativité: Pour tout a, b, c dans S, la relation $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ est valable
Élément identité: Il existe l'élément 1 tel que pour tout a in S, $1\times a=a\times 1=a$ est valable
Élément inverse: Pour tout a dans S, Il existe un élément $1/a$ tel que $a\times(1/a)=1/a\times a=1$
Commutativité: Pour tout a, b dans S, la relation $a\times b=b\times a$ est valable

FIG. 5.71 – Théorie des groupes résumé multiplication
(source : https://kevinbinz.com/tag/identity-element/, auteur : Kevin Binz)

Si nous considérons ce qui précède comme une fonction, alors trois entrées nous concernent : la cible, l'opérateur et l'élément d'identité. Ainsi, nous pouvons condenser ce qui précède en $(S,\times,0)$..

Les deux tableaux ci-dessus vous ont-ils été douloureusement similaires ? Oui c'est possible !

Une leçon qu'on vous enseigne en informatique est la suivante : si vous remarquez que vous copiez-collez du code, vous devriez essayer de consolider votre logiciel en une seule fonction.

De manière analogue, nous pouvons généraliser l'addition et la multiplication, comme ceci :

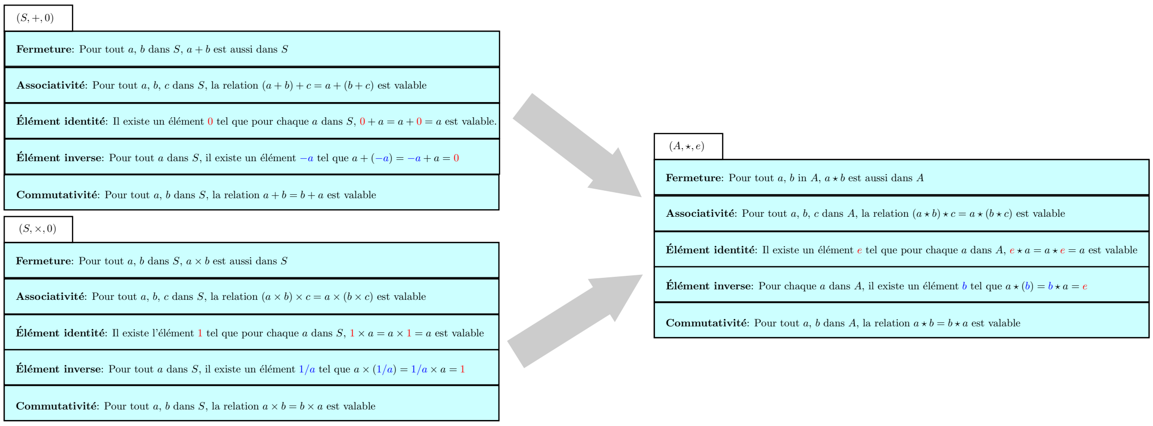


FIG. 5.72 – Fusion de l'addition et de la multiplication
(source : https://kevinbinz.com/tag/identity-element/, auteur : Kevin Binz)

Ici, nous généralisons nos trois entrées définies ci-dessus :

- S devient une instance spécifique d'un ensemble d'entrée.
- $+$ et $\times$ deviennent des instances spécifiques d'une classe générale d'opérateurs.
- 0 et 1 deviennent des instances spécifiques d'une classe générale d'éléments d'identité.

Nous avons vu précédemment que cet ensemble particulier de cinq axiomes est un "groupe abélien" (également appelé "groupe commutatif") qui peut être résumé comme suit :

En cours de traduction de l'anglais

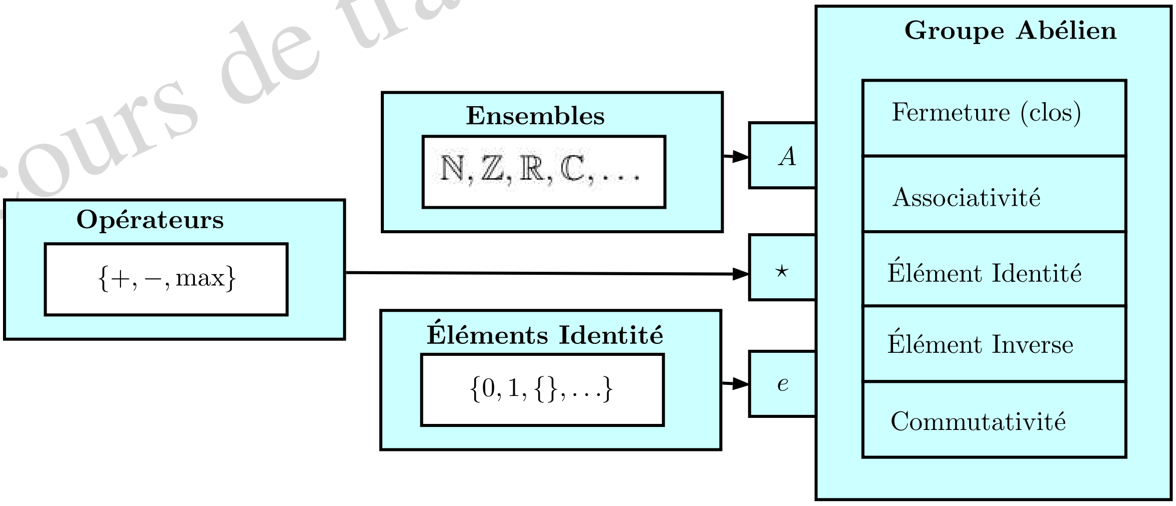


FIG. 5.73 – Structure de groupe abélien (source : https://kevinbinz.com/tag/identity-element/, auteur : Kevin Binz)

Fusionnons ensemble les groupes d'addition et de multiplication dans un corps :

Corps $(F, +, 0, \times, 1)$	
Fermeture (clos): Pour tout a, b dans F, $a+b$ est aussi dans F	Groupe Abélien $F(+,0)$
Associativité: Pour tout a, b, c dans F, la relation $(a+b)+c=a+(b+c)$ est valable	
Élément identité: Il existe l'élément 0 tel que pour chaque a dans F, $0+a=a+0=a$ est valable	
Élément inverse: Pour tout a dans F, il exisste un élément $-a$ tel que $a+(-a)=-a+a=0$	
Commutativité: Pour tout a, b dans F, la relation $a+b=b+a$ est valable	
Fermeture (clos): Pour tout a, b dans F, $a \times b$ est aussi dans F	Groupe Abélien $(F-\{0\}, \times, 1)$
Associativité: Pour tout a, b, c dans F, la relation $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ est valable	
Élément identité: Il existe l'élément 1 tel que pour chaque a in F, $1 \times a = a \times 1 = a$ est valable	
Élément inverse: Pour tout a dans F, il existe un $1/a$ tel que $a \times (1/a) = 1/a \times a = 1$	
Commutativité: Pour tout a, b dans F, la relation $a \times b = b \times a$ est valable	
Distributivité à gauche: Pour tout a, b, c dans F, l'équation $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$ est valable	Relations entre "+" et "×"
Distributivité à droite: Pout tout a, b, c dans F, l'équation $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ est valable	

FIG. 5.74 – Structure d'un corps (source : https://kevinbinz.com/tag/identity-element/, auteur : Kevin Binz)

En cours de trad glais

5.5.5 Morphismes

Dans de nombreux domaines mathématiques, le morphisme fait référence à une application préservant les règles d'une structure mathématique à une autre. La notion de morphisme est récurrente dans une grande partie des mathématiques contemporaines. Dans la théorie des ensembles, les morphismes sont des fonctions ; en algèbre linéaire, ce sont des transformations linéaires ; en théorie des groupes, ce sont des homomorphismes de groupe ; dans la topologie, ce sont les fonctions continues, etc.

Le concept d'homomorphismes (du grec homoios = semblable et morphê = forme) a été défini par les mathématiciens car permettant de mettre en évidence des propriétés remarquables des fonctions en particulier avec leurs structures, leur noyau, et de ce que nous appelons les "idéaux" (voir plus loin). Ils nous permettront ainsi d'identifier une structure algébrique d'une autre.

Définitions (#5.5.97) :

En cours de traduction de l'anglais

D1. Si $(A,\star)$ et $(B,\circ)$ sont deux magmas (peu importe la notation utilisée pour les lois internes), une application f de A dans B est nommé un "homomorphisme de magma" ou "morphisme de magma" (par abus de langage nous écrivons parfois juste "homomorphisme") si :

$$\boxed{f(a\star b)=f(a)\circ f(b)\quad \forall a,b\in A} \tag{5.5.191}$$

en d'autres termes, si l'image d'un composé dans A est le composé des images dans B.

D2. Si $(A,\star)$ et $(B,\circ)$ sont deux monoïdes, une application f de A dans B est un "homomorphisme de monoïde" si :

$$\boxed{\begin{aligned} f(a\star b)&=f(a)\circ f(b)\quad \forall a,b\in A\\ f(1_A)&=1_B \end{aligned}} \tag{5.5.192}$$

où 1_A et 1_B sont les éléments neutres respectifs des monoïdes A, B.

D3. Si A, B sont deux anneaux, un "homomorphisme d'anneaux" (très important pour la section de Cryptographie page **??** !) de A dans B est une application $f:A\mapsto B$ telle que nous ayons pour tout $a,a'\in A$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(1_A)&=1_B\\ f(a+a')&=f(a)+f(a')\\ f(a\cdot a')&=f(a)f(a') \end{aligned}} \tag{5.5.193}$$

où 1_A, 1_B sont les éléments neutres des anneaux A, B par rapport à la multiplication "$\cdot$".

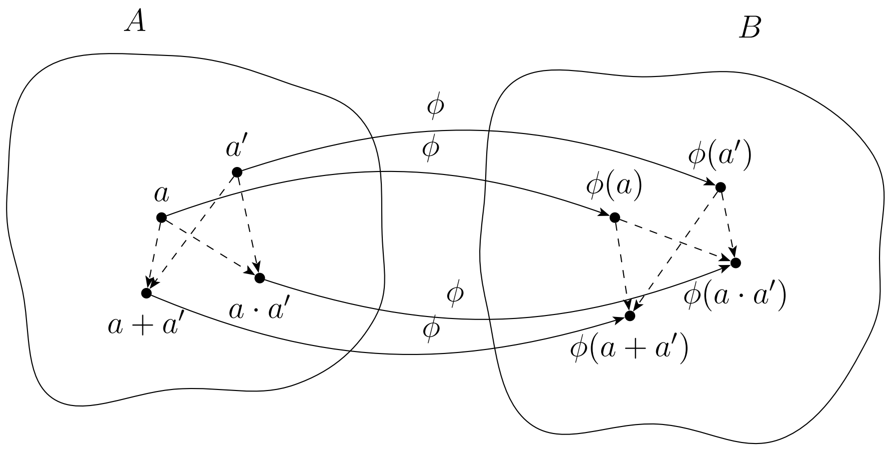


FIG. 5.75 – **Homomorphisme d'anneau**

Soit $f : A \mapsto B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors :

P1. $f(0) = 0$

Démonstration 5.28.6. Par :

$$f(a + a') = f(a) + f(a') \tag{5.5.194}$$

nous avons :

$$f(a + 0) = f(a) + f(0) \tag{5.5.195}$$

En ajoutant $-f(a)$ des deux côtés de l'égalité nous avons :

$$0 = f(0) \tag{5.5.196}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

P2. $f(-a) = -f(a)$

Démonstration 5.28.7. Cette propriété découle aussi de :

$$f(a + a') = f(a) + f(a') \tag{5.5.197}$$

et de la propriété P1. Effectivement, nous avons :

$$f(0) = f(a + (-a)) = f(a) + f(-a) = 0 \tag{5.5.198}$$

En ajoutant $-f(a)$ des deux côtés de l'égalité, nous obtenons :

$$f(-a) = -f(a) \tag{5.5.199}$$

■ Q.E.D.

P3. Si a est une unité de A, alors $f(a)$ est une unité de B et $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

Démonstration 5.28.8. Soient $a, b \in A$ tels que :

$$ab = ba = 1 \tag{5.5.200}$$

Alors par $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ et $f(1_A) = 1_B$, nous avons :

$$1 = f(1) = f(ab) = f(a)f(b) \tag{5.5.201}$$

et aussi :

$$1 = f(b)f(a) \tag{5.5.202}$$

ce qui montre que $f(b)$ est l'inverse de $f(a)$ si b est l'inverse de a.

■ Q.E.D.

Introduisons maintenant un théroème relativement puissant :

Théorème 5.29. Montrons maintenant qu'un homomorphisme d'anneaux $f : A \mapsto B$ est injectif si et seulement si l'élément 0 est la seule pré-image de 0 (et donc réciproquement), ce qui se note techniquement :

$$\ker(f) = \{0\} \tag{5.5.203}$$

c'est-à-dire que le noyau est "trivial".

Démonstration 5.29.1. La condition est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante :

Nous supposons donc que $\ker(f) = 0$. Soit $a, a' \in A$ tel que $f(a) = f(a')$. Alors comme nous avons un homomorphisme d'anneaux nous pouvons écrire :

$$0 = f(a) - f(a') = f(a - a') \tag{5.5.204}$$

Ce qui implique que $a - a' = 0$ donc que $a = a'$.

Ce qui montre que f est injectif si c'est un homomorphisme et que $\ker(f) = 0$ en est effectivement une condition suffisante.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

D4. Soient $(A, +)$ et $(B, \star)$, deux groupes et f une application $f : A \mapsto B$. Nous disons que f est un "homomorphisme de groupe" si (nous pourrions tout aussi bien mettre "$\star$" au lieu de "$+$" dans le premier groupe et "$+$" au lieu de "$\star$" dans le deuxième groupe, la définition resterait la même en remplaçant simplement les opérateurs respectifs !) :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) \star f(y) \quad \forall x, y \in A \\ f(1_A) &= 1_B \\ f(x^{-1}) &= (f(x))^{-1} \quad \forall x \in A \end{aligned}} \tag{5.5.205}$$

où 1_A, 1_B sont les éléments neutres respectifs des groupes A, B. Nous remarquons que la seule différence entre un homomorphisme d'anneau et un homomorphisme de groupe est que ce dernier à deux lois au lieu d'une et que nous y rajoutons le concept d'inverse.

Ceci dit, la troisième proposition ci-dessus est en fait une conséquence de la définition composée uniquement des deux premières lignes. Effectivement, considérons un homomorphisme f entre les groupes $(A, +)$ et $(B, \star)$ avec 1_A et 1_B respectivement les éléments neutres de A et B, nous avons alors :

$$\forall x \in A : \quad 1_B = f(1_A) = f(x + x^{-1}) = f(x) \star f(x^{-1}) \tag{5.5.206}$$

Dès lors :

$$\forall x \in A: \quad 1_B = f(x) \star f(x^{-1}) \tag{5.5.207}$$

Enfin :

$$\forall x \in A: \quad f(x) = \frac{1_B}{f(x^{-1}} = (f(x^{-1}))^{-1} \tag{5.5.208}$$

✍Exemple :

La fonction exponentielle e est un mrophisme du groupe $(\mathbb{R}^+, +)$ sur le groupe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

D5. Soit f une application $f : A \mapsto B$ d'un corps vers un autre. Nous disons que f est un "homorophisme de corps" si f est un homomorphisme d'anneaux...

Effectivement, le fait que l'homomorphisme de corps soit le même que celui d'un anneau tient juste au fait que la différence entre les deux structures est que les éléments du corps sont tous inversibles (aucune loi ou propriété de loi ne diffère entre les deux selon leur définition).

Montrons maintenant que tout homomorphisme de corps est injectif ("homomorphisme injectif") en se rappelant que plus haut nous avons démontré que tout homomorphisme d'anneaux l'était !

Démonstration 5.29.2. Si a est différent de 0 et $b = a^{-1}$ (nous utilisons ici la propriété que les éléments d'un corps sont inversibles !) alors :

$$1 = f(1) = f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \tag{5.5.209}$$

Donc lorsque a est différent de zéro, $f(a)$ est différent de 0 ce qui prouve que $\ker(f) = \{0\}$ et donc que f est injective.

■ Q.E.D.

D6. Soient A et B deux K-espace vectoriels et $f : A \mapsto B$ une application de A dans B. Nous disons que f est une "application linéaire" ou "homomorphisme d'espaces vectoriels" (il est sous-entendu que c'est relativement aux lois indiquées et pour l'application choisie) si :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \quad \forall (x,y) \in A \\ f(\lambda x) &= \lambda f(x) \quad \forall x \in A, \forall \lambda \in K \end{aligned} \tag{5.5.210}$$

et nous notons $L(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires.

Remarques

R1. Nous avions déjà défini plus haut le concept d'application linéaire mais n'avions pas précisé que les deux ensembles A et B étaient des K-espace vectoriels.

En cours de traduction de l'anglais

R2. L'application linéaire est appelée "forme linéaire" si et seulement si $B = K$.

D7. Si l'homomorphisme est bijectif nous dirons alors que f est un "isomorphisme". S'il existe un isomorphisme entre A et B, nous disons que A et B sont "isomorphes" et nous noterons cela $A \simeq B$.

Remarque

L'isomorphisme permet au fait d'identifier deux ensembles munis d'une structure algébrique identique (que ce soit groupe, anneau, etc.) mais dont les éléments sont nommés d'une façon différente.

D8. Si l'homomorphisme f est une application uniquement interne, nous dirons alors que f est un "endomorphisme" (en d'autres termes, nous avons un endomorphisme si dans la définition de l'homomorphisme nous avons $A = B$).

Remarque

Si nous avons un endomorphisme f de E, f est donc restreint à $\Im(f)$. Donc le terme "endomorphisme" veut juste dire que l'application f arrive dans E et pas qu'elle touche tous les éléments de E lui-même. Nous avons $f(E) \subset E$ et pas forcément $f(E) = E$ car dans ce dernier cas nous disons que f est surjective comme nous l'avons déjà vu.

D9. Si l'endomorphisme f est en plus bijectif (donc en d'autres termes si l'homomorphisme est un endomorphisme et un isomorphisme), nous dirons alors que f est un "automorphisme".

En cours de traduction français

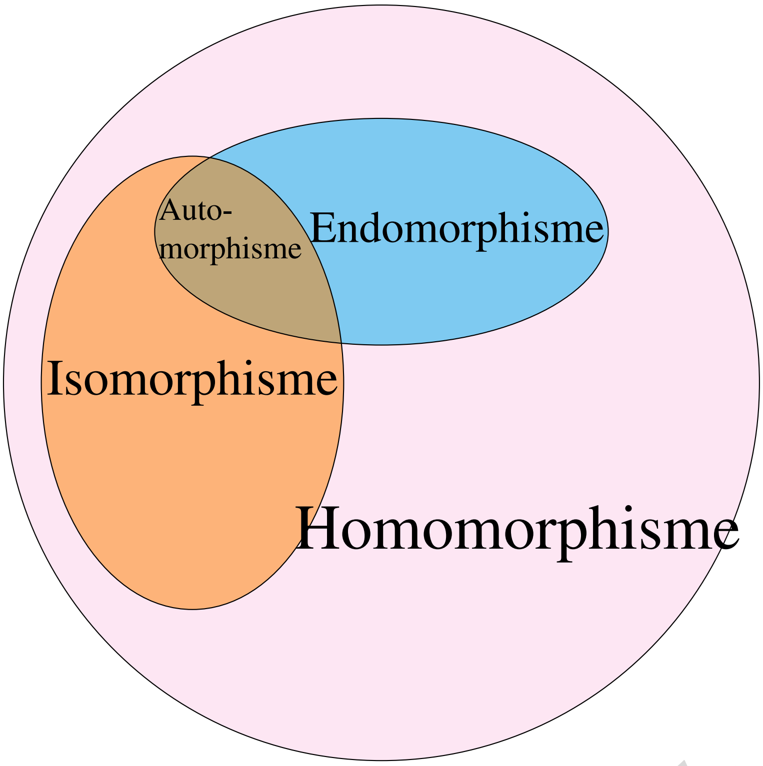


FIG. 5.76 – Diagramme de Venn de différents types d'homomorphismes (source : Wikipédia, auteur : Martin Thoma)

En cours de traduction de l' anglais

5.5.5.1 Idéal

Définition (#5.5.98) : Soit A un anneau commutatif (comme $(\mathbb{R},+,\cdot)$ par exemple). Un sous-ensemble $S\subset A$ est un "idéal" si :

P1. Pour tout $a,a'\in S$:

$$a+a'\in S \tag{5.5.211}$$

P2. Pour tout $a\in S$ et tout $r\in A$:

$$r\cdot a\in S \tag{5.5.212}$$

En d'autres termes, un idéal est un sous-ensemble fermé pour l'addition et stable pour la multiplication par un élément quelconque de A.

✍**Exemple :**

L'ensemble des nombres pairs $\mathbb{Z}_{2k}$ est par un exemple d'idéal de l'ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Z}$.

Remarque

Les idéaux $S=\{0\}$ et $S=A$ sont appelés les "idéaux triviaux".

Pour savoir si un idéal est égal à tout l'anneau, il est utile d'utiliser la propriété suivante qui spécifie que si A est un anneau et I un idéal de A, alors si $1\in A$ nous avons $I=A$.

Démonstration 5.29.3. Ceci résulte de la propriété P2 de la définition d'un idéal :

Pour tout $r\in A$, nous avons $r=r\cdot 1\in 1$ car $1\in I$.

■ Q.E.D.

Un premier exemple d'idéal est donné par le noyau d'un homomorphisme d'anneaux. Effectivement, démontrons que le noyau d'un homomorphisme $F:R\mapsto S$ est un idéal de R.

Démonstration 5.29.4. $R\ a,a'\in\ker(f)$. Alors :

$$f(a+a')=f(a)+f(a')=0+0=0 \tag{5.5.213}$$

ce qui montre que $a+a'\in\ker(f)$. Soit $r\in R$, alors :

$$f(ra)=f(r)f(a)=f(r)\cdot 0=0 \tag{5.5.214}$$

ce qui montre que $r\cdot a\in\ker(f)$.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Proposition : Soit A un anneau et soit $a\in A$. Le sous-ensemble :

$$\{ax|x\in A\} \tag{5.5.215}$$

noté (a) ou aA, est un idéal (nous allons voir un exemple concret après la prochaine définition).

Définitions (#5.5.99) :

D1. Un idéal $I\neq A$ d'un anneau A est dit ""idéal principal" s'il existe $a\in A$ tel que $I=(a)$.

D2. Un anneau dont tous les idéaux sont principaux est dit "anneau principal".

✍**Exemple :**

Montrons maintenant que l'anneau $\mathbb{Z}$ est principal (car tous ses idéaux sont principaux).

Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$ (il est facile d'en choisir un : par exemple, tous les multiples de 2 ou 3, etc.). Soit $r \in I$ le plus petit entier positif non nul de I. Nous montrerons que $I = r\mathbb{Z} = (r)$.

Soit a, un élément quelconque de I. La division euclidienne nous permet d'écrire :

$$a = qr + r' \quad (5.5.216)$$

avec $0 \leq r' < r$ (comme nous l'avons déjà prouvé).

Mais comme $r' = a - qr$ et que $a, r \in I$, selon la définition d'un idéal, nous avons $r' \in I$ (la somme ou la différence des éléments d'un idéal appartenant à l'idéal). Par le choix de r (r' étant inférieur à r), cela signifie que $r' = 0$ et donc que $a = rq$.

Ainsi, chaque élément de I est un multiple r de q :

$$I = r\mathbb{Z} \quad (5.5.217)$$

Donc pour l'ensemble des nombres pairs (notés comme nous le savons par $2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_{2k}$) nous avons :

$$I_{2\mathbb{Z}} = 2 \cdot \mathbb{Z} \quad (5.5.218)$$

L'exemple ci-dessus utilise uniquement la division euclidienne sur $\mathbb{Z}$. On peut alors généraliser ce résultat aux anneaux qui possèdent une division euclidienne. Ainsi, par exemple, l'anneau $K[X]$ des polynômes (voir la section de Calcul Algébrique page 1351) avec des coefficients dans un corps K est un anneau principal car il a une division euclidienne.

Théorème 5.30. L'anneau $K[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps K est un anneau principal (tous ses idéaux sont principaux).

Démonstration 5.30.1. Soit I un idéal de $K[X]$. Notons d le plus petit degré que puisse avoir un polynôme non nul de I. Si $d = 0$ alors $1 \in I$ et donc $I = 1 \cdot K[X] = K[X]$. Autrement, soit $a(X)$ un polynôme de degré d. Si $u(X) \in I$ alors on peut diviser $u(X)$ par $a(X)$. Il existe $q(X), r(X) \in K[X]$ tels que $\deg(r) < \deg(a) = d$ et :

$$u(X) = q(X) \cdot a(X) + r(X) \quad (5.5.219)$$

Donc $r(X) \in I$ ce qui entraîne $r = 0$ (autrement contradiction avec la minimalité de d). Par suite :

$$u(X) = q(X) \cdot a(X) \quad (5.5.220)$$

Nous venons de montrer que :

$$I = a(X) \cdot K[X] \quad (5.5.221)$$

En cours de ... anglais

■ Q.E.D.

Pour en revenir à $\mathbb{Z}$... nous venons alors de prouver que les seuls idéaux sont ceux de la forme $r\mathbb{Z}$. De plus si nous avons d et r qui sont des entiers > 1. Alors $r\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$ si et seulement si $d|r$.

Démonstration 5.30.2. Si $d|r$ alors il existe n avec $r = d \cdot n$. Soit $m \cdot a$ un élément de $r\mathbb{Z}$. Alors :

$$r \cdot a = d \cdot n \cdot a \in d\mathbb{Z} \tag{5.5.222}$$

ce qui montre que $r\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $r \in d\mathbb{Z}$ ceci implique que r est de la forme $d \cdot n$ et ceci prouve que d divise r.

■ Q.E.D.

Théorème 5.31. Démontrons aussi qu'un anneau R est un corps si et seulement s'il ne possède que les idéaux triviaux :

$$I = \{\{0\}, R\} \tag{5.5.223}$$

Démonstration 5.31.1. Montrons que la condition est nécessaire : Soit I un idéal non nul de R (c'est-à-dire différent de $\{0\}$) et $r \in I$ un élément non nul. Par hypothèse (qu'il s'agit d'un corps), il est inversible, c'est-à-dire qu'il existe $t \in R$ tel que :

$$r \cdot t = t \cdot r = 1 \tag{5.5.224}$$

Ceci implique que $1 \in I$ et donc, par un résultat obtenu plus haut $I = R$.

Réciproquement, supposons que tout idéal $I \neq R$ soit l'idéal nul (c'est-à-dire $\{0\}$). Alors si $r \in R$ est un élément non nul de R, l'idéal principal (r) doit être égal à R. Mais ceci implique que $1 \in (r)$ et donc qu'il existe $x \in R$ avec $r \cdot x = 1$ ce qui montre que r est inversible. L'anneau R est donc un corps.

■ Q.E.D.

Cette caractérisation va nous permettre de démontrer relativement facilement que :

Théorème 5.32. Tout homomorphisme partant d'un corps est injectif. Soit que si $f : R \mapsto S$ est un homomorphisme où R est un corps, alors f est injectif.

Démonstration 5.32.1. Nous mettons ensemble ce qui a été vu jusque-là :

- Nous avons démontré plus haut que le noyau $\ker(f)$ d'un homomorphisme d'anneau est un idéal.
- Mais nous avons également démontré plus haut qu'un ensemble était un corps si $\{0\}$ et R sont les seuls triviaux idéaux.

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors pour les deux points, nous avons soit $\ker(f) = 0$ ou $\ker(f) = R$ pour le corps (étant donné qu'il inclut le concept d'anneau !).

Mais vu que $f(1) = 1 \neq 0$ (de par la définition d'un homomorphisme) il s'ensuit qu'il reste $\ker(f) = \{0\}$ (puisque nous avons démontré que si A est un anneau et I un idéal de A alors si $1 \in I$ alors $I = R$). Ceci implique par un théorème précédent (où nous avons démontré que si $\ker(f) = \{0\}$ l'homomorphisme est injectif) que... f est injective.

■ Q.E.D.

étudions maintenant les homomorphismes dont l'anneau de départ est $\mathbb{Z}$. Soit A un anneau et $f : \mathbb{Z} \mapsto A$ un homomorphisme. Par définition d'un homomorphisme et par ses propriétés, il faut que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ (parmi d'autres). Mais il faut encore que :

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{k}}) = \underbrace{1_A + \ldots + 1_A}_{\text{k}}) = n \cdot 1_A \tag{5.5.225}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi f est complètement déterminé par la donnée de $f(1)$ et est donc unique. Réciproquement, nous montrons que l'application $f : \mathbb{Z} \mapsto A$ définie par :

$$f(k) = k \cdot 1_A \tag{5.5.226}$$

est un homomorphisme d'anneaux. En résumé, il existe un et un seul homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans un anneau quelconque A.

Définition (#5.5.100) : Soient A un anneau et $f : \mathbb{Z} \mapsto A$ l'unique homomorphisme défini précédemment. Si f est injectif, nous dirons que A est de "caractéristique nulle" et nous notons cela :

$$\text{char}(A) = k = 0 \tag{5.5.227}$$

Sinon, $\ker(f)$ est un idéal non trivial de $\mathbb{Z}$ et comme $\mathbb{Z}$ est dès lors principal (comme nous l'avons démontré plus haut) il est de la forme $k\mathbb{Z}$ avec $k > 0$. L'entier k est appelé la "caractéristique de A" et nous avons alors :

$$\text{char}(A) = k > 0 \tag{5.5.228}$$

Remarque

Moins formellement, la caractéristique d'un anneau A est le plus petit entier positif k tel que $k \cdot 1_A = 0$. S'il n'y en a pas, alors la caractéristique est nulle.

La définition ci-dessus n'est peut-être pas très claire (du moins pour moi cela ne l'est pas !). Voyons donc une autre approche pour introduire la caractéristique beaucoup plus détaillée ... :

Soit A un anneau et n'importe lequel de ses éléments a, désignons les entiers dans ce qui va suivre en gras. Ainsi, **1** est le nombre entier un, par exemple, **0** est le nombre entier zéro, alors que 0_A et 1_A sont les éléments neutres de A.

Comme A sous l'addition est un groupe abélien, on peut définir comme d'habitude :

$$\mathbf{0}a = 0_A \qquad \text{et} \qquad (\boldsymbol{n} + \mathbf{1})r = \boldsymbol{n}a + a \tag{5.5.229}$$

En cours de traduction de l'anglais

Par définition d'un homomorphisme, nous avons si $f:\mathbb{Z}\mapsto A$ que :

$$f(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}1_A \tag{5.5.230}$$

alors pour rappel :

- $f(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})=f(\boldsymbol{m})+f(\boldsymbol{n})$
- $f(\boldsymbol{mn})=f(\boldsymbol{m})f(\boldsymbol{n})$
- $f(\boldsymbol{1})=1_A$

donc si f est un homomorphisme d'anneaux. Comme tous les homomorphismes d'anneau, $f:\mathbb{Z}\mapsto A$ a un noyau qui est un idéal, comme nous venons de le prouver, donc nous avons $\ker(f)=\boldsymbol{k}\mathbb{Z}$ pour un unique $\boldsymbol{k}\geq\boldsymbol{0}$.

Si $k=0$ alors, comme nous l'avons prouvé beaucoup plus haut, f est injectif. Sinon, nous avons :

$$\boldsymbol{k}1_A=0_A \tag{5.5.231}$$

par définition du noyau, ce qui signifie que :

$$\boldsymbol{k}a=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{\boldsymbol{k}}=\underbrace{(1_A+1_a+\ldots+1_a)}_{\boldsymbol{k}}A=(\boldsymbol{k}1)r=0_Ar=0_A \tag{5.5.232}$$

pour chaque $a\in A$. Cet entier $\boldsymbol{k}$ est la "caractéristique" de S.

C'est-à-dire que $\text{char}(A)$ est le plus petit nombre positif $\boldsymbol{k}$ tel que :

$$\underbrace{1_A+1_A+\ldots+1_A}_{\boldsymbol{k}\text{ fois}}=0 \tag{5.5.233}$$

si un tel nombre $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}$ existe, et 0 sinon.

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Le seul anneau qui a $\text{char}(A)=1$ tel que :

$$\boldsymbol{k}\cdot 1_A=1\cdot 1_A=1_A=0_A \tag{5.5.234}$$

est l'anneau trivial $A=\{0_A\}$.

E2. L'anneau $\mathbb{Z}$ a la caractéristique zéro car l'homomorphisme unique $f:\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Z}$ est l'identité. C'est donc injectif.

E3. Les injections $\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{R}$ montrent que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{C}$ également) sont des corps de caractéristique nulle.

Théorème 5.33. Nous nous proposons maintenant de démontrer que la caractéristique d'un anneau intègre (et en particulier d'un corps) est égale 0 ou à un premier p.

Démonstration 5.33.1. Nous montrons la contraposée. Soit A un anneau de caractéristique $m \neq 0$ avec m non premier.

Il existe alors des entiers naturels $n, r \in \mathbb{N}$ contraints par $n, r < m$ tels que $m = n \cdot r$.

Soit $f : \mathbb{Z} \mapsto A$ l'unique homomorphisme (défini précédemment). Par définition (de l'idéal) de m, nous avons $f(m) = 0_A$ mais (!) $f(r) \neq 0 \neq f(n)$. Mais alors (et c'est là le truc de la preuve !) :

$$f(r)f(n) = f(r \cdot n) = f(m) = 0 \tag{5.5.235}$$

ce qui montre que A n'est pas intègre.

■ Q.E.D.

Remarque

La réciproque du théorème n'est pas vraie comme le montre l'exemple de l'anneau $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où l'addition et la multiplication se font composante par composante. C'est un anneau de caractéristique nulle mais avec des diviseurs de zéro :

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0 \tag{5.5.236}$$

En cours de traduction ... lais

~95 %

16 votes, 62.5%

5.6. Probabilités

Le calcul des probabilités s'occupe des phénomènes aléatoires (dits plus esthétiquement : "processus stochastiques" lorsqu'ils sont dépendants du temps), c'est-à-dire de phénomènes qui ne mènent pas toujours à la même issue et qui peuvent être étudiés grâce aux nombres et à leurs conséquences et apparitions. Néanmoins, même si ces phénomènes ont des issues variées, dépendant du hasard, nous observons cependant une certaine régularité statistique.

La probabilité est quantifiée comme un nombre compris entre 0 et 1 (où 0 indique l'impossibilité et 1 indique la certitude). Plus la probabilité d'un événement est élevée, plus nous sommes certains que l'événement se produira.

Les probabilités sont très importantes dans la pratique, en particulier à un niveau très élevé de gestion d'entreprise ou politique. En effet, dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser une règle simple mais incertaine plutôt qu'une règle complexe mais certaine, même si la vraie règle est déterministe et notre système de modélisation a la fidélité de s'adapter à une règle complexe. Par exemple, la règle simple "les ventes augmenteront" est peu coûteuse à développer et est largement utile, tandis qu'une règle de la forme ", les ventes augmenteront si l'indice d'inflation augmente également, et qu'il n'y a pas d'épidémie, pas de tremblements de terre, pas de conflits, pas d'astéroïdes, pas d'inondations majeures, pas de changements politiques, pas de grèves ..." coûte cher à développer, à entretenir et à communiquer, et après tout cet effort le modèle sera encore très fragile et sujet à l'échec.

Les concepts liés aux probabilités ont reçu une formalisation mathématique axiomatique en théorie des probabilités (voir plus bas), largement utilisée dans des domaines d'études tels que les mathématiques, la statistique, la finance, les jeux de hasard, les sciences (en particulier la physique), l'intelligence artificielle / l'apprentissage machine, l'informatique, la théorie des jeux et la philosophie pour, par exemple, tirer des conclusions sur la fréquence attendue des événements. La théorie des probabilités est également utilisée pour décrire les mécanismes sous-jacents et les régularités de systèmes complexes.

Définitions (#5.6.101) : Il existe plusieurs façons de définir une "probabilité". Il s'agit principalement de (si l'on met de côté le formalisme de la théorie de la mesure que nous étudierons bien plus tard à la page 2476) :

D1. "Probabilité expérimentale ou inductive" qui est la probabilité dérivée de l'ensemble de la population ou d'un échantillon de cette dernière grâce à l'étude des phénomènes sous-jacents avec expérimentation.

D2. "Probabilité théorique ou déductive" qui est la probabilité connue grâce à l'étude du phénomène sous-jacent sans expérimentation. Il s'agit donc d'une connaissance "a priori" par opposition à la définition précédente qui faisait plutôt référence à une notion de probabilité "à posteriori".

En cours de traduction de l'anglais

Comme il n'est pas toujours possible de déterminer des probabilités a priori, nous sommes souvent amenés à réaliser des expériences. Il faut donc pouvoir passer de la première à la deuxième solution. Ce passage est supposé possible en termes de limite (avec une population dont la taille tend vers la taille de la population réelle).

La modélisation formelle par le calcul des probabilités a été inventée par A.N. Kolmogorov dans un livre paru en 1933. Cette modélisation est faite à partir de l'espace de probabilités (U, A, P) que nous définirons plus loin et que nous pouvons relier à la théorie de la Mesure (voir section du même nom page 2463). Cependant, les probabilités ont été étudiées sur le point de vue scientifique par Pierre deFermat et Blaise Pascal au milieu du 17ème siècle.

Remarque

Si vous avez un professeur ou un formateur qui ose vous enseigner les statistiques et probabilités avec des exemples basés sur des jeux de hasard (cartes, dés, allumettes, pile ou face, etc.) débarrassez-vous en ou dénoncez-le à qui de droit car cela signifierait qu'il n'a aucune expérience pratique du domaine et qu'il va vous enseigner n'importe quoi et n'importe comment (normalement les exemples devraient être basés sur l'industrie, l'économie ou la R&D, bref dans des domaines utilisés tous les jours par les entreprises mais surtout pas sur des jeux de hasard... !).

Il est courant de distinguer trois grands types de familles de probabilités dans la pratique :

D1. "Probabilité fréquentiste", également connue sous le nom de "fréquentisme", est une interprétation de la probabilité qui définit la probabilité d'un événement comme la limite de sa fréquence relative dans de nombreux essais. En d'autres termes, elle considère les probabilités en fonction de la fréquence à laquelle un événement se produit dans des expériences ou des observations répétées.

D2. "Probabilité bayésienne" est interprété comme une attente raisonnable ou une quantification d'une opinion personnelle (i.e. une "vraisemblance") plutôt que comme une simple fréquence ou propension. Un probabiliste bayésien commence par spécifier une probabilité a priori pour une hypothèse basée sur les informations disponibles. À mesure que de nouvelles données pertinentes (évidences) deviennent disponibles, la probabilité a priori est mise à jour en probabilité a posteriori en utilisant le théorème de Bayes (voir page 484).

D3. "Probabilité floue" est une extension de la théorie des probabilités traditionnelle qui traite de l'incertitude mixte probabiliste et non probabiliste. Les probabilités floues reflètent séparément à la fois l'incertitude aléatoire (aléatoire) et l'incertitude épistémique (fondée sur la connaissance), fournissant des informations étendues et des aides à la décision.

En cours de traduction de l'anglais

5.6.1 Univers des événements

Définitions (#5.6.102) :

D1. "L'univers des événements", ou "univers des observables", U est l'ensemble de toutes les issues (résultats) possibles, appelées "événements élémentaires", qui se présentent au cours d'une épreuve aléatoire déterminée. L'univers peut être fini (dénombrable) si les événements élémentaires sont en nombre fini ou continu (non dénombrable) s'ils sont infinis.

D2. Un "événement" quelconque A est un ensemble d'événements élémentaires et constitue une partie de l'univers des possibles U. Il est possible qu'un événement ne soit constitué que d'un seul événement élémentaire.

✍**Exemples :**

E1. Considérons l'univers de tous les groupes sanguins possible, alors l'événement A "l'individu est de rhésus positif" est représenté par :

$$A = \{A+, B+, AB+, O+\} \subset U \tag{5.6.1}$$

alors que l'événement B "l'individu est donneur universel" est représenté par :

$$B = \{O-\} \subset U \tag{5.6.2}$$

qui constitue donc un événement élémentaire.

E2. Dans $(\mathbb{N}, +)$ chaque événement est régulier et dans $(\mathbb{N}, \times)$ tout événement non-nul est régulier.

D3. Soit U un univers et A un événement, nous disons que l'événement A "à lieu" (ou "se réalise") si lors du déroulement de l'épreuve se présente l'issue i $(i \in U)$ et que $i \in A$. Dans le cas contraire, nous disons que A "n'a pas lieu" (ou "ne s'est pas réalisé").

D4. Le sous-ensemble vide $\varnothing$ de U s'appelle "événement impossible". En effet, si lors de l'épreuve l'issue i se présente, nous avons toujours $i \in \varnothing$ et l'événement $\varnothing$ n'a donc jamais lieu.

Si U est fini, ou infini dénombrable, tout sous-ensemble de U est un événement, ce n'est plus vrai si U est non dénombrable (nous verrons dans le chapitre de Statistiques pourquoi).

D5. L'ensemble U s'appelle aussi "événement certain". En effet, si lors de l'épreuve l'issue i se présente, nous avons toujours $i \in U$ (car U est l'univers des événements). L'événement U a donc toujours lieu !

D6. Soit A et B deux sous-ensembles de U. Nous savons que les événements $A \cup B$ et $A \cap B$ sont tous deux des sous-ensembles de U donc des événements qui sont respectivement des "événements conjoints" et des "événements disjoints".

D7. Si deux événements A et B sont tels que :

$$A \cap B = \varnothing \quad (5.6.3)$$

les deux événements ne peuvent pas être réalisables pendant la même épreuve, nous disons alors qu'ils sont des "événements incompatibles".

D8. Si deux événements A et B sont tels que :

$$A \cap B \neq \varnothing \quad (5.6.4)$$

les deux événements peuvent être réalisables dans la même épreuve (possibilité de voir un chat noir au moment où on passe sous une échelle par exemple...), nous disons inversement qu'ils sont des "événements indépendants".

D9. Le "hasard" est le manque de structure ou de prévisibilité dans les événements. Une séquence aléatoire d'événements, de symboles ou d'étapes n'a pas d'ordre et ne suit pas un modèle ou une combinaison intelligible. Les événements individuels aléatoires sont par définition imprévisibles, mais dans de nombreux cas, la fréquence de résultats différents sur un grand nombre d'événements (ou "essais") est prévisible.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Si nous choisissons aléatoirement (uniformément) un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1]$, il existe une probabilité nulle que nous choisissions ce nombre. Cela ne signifie pas que nous n'avons pas choisi de numéro du tout !

De même avec les rationnels, bien qu'infinis, et denses et tout cela, ils sont très très rares en termes de mesure et de probabilité. Il est parfaitement possible que si nous lançons d'innombrables fléchettes sur la ligne réelle, nous atteindrons exactement tous les rationnels et chaque rationnel exactement une fois. Ce scénario est hautement improbable, car les nombres rationnels correspondent à une mesure nulle.

Le domaines des probabilités standard traite avec *quelles sont les chances que cela se produise* ? a priori, pas a posteriori (cela est le rôle des probabilités bayésiennes) ! ! Nous sommes donc intéressés par la mesure d'une certaine structure d'un ensemble, dans les aspects modernes de probabilité et de mesure, les nombres rationnels ont une taille égale à zéro, ce qui signifie une probabilité nulle. De manière plus formelle, comme nous le verrons dans la section de Statistiques à la page 636, les probabilités sont obtenues en intégrant une fonction de densité de probabilité $f(x)$ sur un intervalle. La fonction est non négative et a la propriété :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \quad (5.6.5)$$

La probabilité de sélectionner un réel dans un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est alors donnée

par :

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{5.6.6}$$

Le lecteur peut voir maintenant que, étant donné un nombre réel $x_0 \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$P(X = x_0) = P(X \in [x_0, x_0]) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{5.6.7}$$

La théorie des probabilités n'est rien d'autre que le bon sens réduit au calcul.

quote 5.6:453.#33

Pierre Simon de Laplace

En cours de traduction de l'anglais

5.6.1.1 Paradoxe du singe savant (loi de Borel)

Le "paradoxe du singe savant" stipule qu'un singe frappant des touches de manière aléatoire sur un clavier de machine à écrire pendant une durée infinie tapera presque sûrement un texte donné, tel que l'oeuvre complète de William Shakespeare. En fait, le singe taperait sûrement tous les textes finis possibles un nombre infini de fois. Cependant, la probabilité qu'un Univers rempli de singes dactylographiant une oeuvre complète telle que le *Hamlet* de Shakespeare est si infime que la chance qu'elle se produire au cours d'une période de plusieurs centaines de milliers d'ordres de plus que l'âge de l'Univers est extrêmement faible (mais techniquement pas zéro !).

Dans ce contexte, "presque sûrement" est un terme mathématique avec une signification précise, et le "singe" n'est pas un singe réel, mais une métaphore d'un dispositif abstrait produisant une séquence aléatoire infinie de lettres et de symboles.

Théorème 5.34. Si nous avons un nombre infini de singes frappant des touches au hasard sur des claviers de machine à écrire, alors, avec une probabilité de 1, l'un d'entre eux dactylographiera les oeuvres complètes de William Shakespeare (finirait par écrire tout livre qui ait jamais existé, avec suffisamment de temps).

Démonstration 5.34.1. Soit A_n l'événement où n-ème singe tape l'oeuvre complète de Shakespeare. Ensuite, s'il y a m caractères sur le clavier et N caractères dans les oeuvres complètes de Shakespeare, la probabilité d'obtenir les oeuvres complètes de Shakespeare devrait être de :

$$P(A_n) = \frac{1}{m^N} \tag{5.6.8}$$

pour chaque n. De plus, les A_n sont mutuellement indépendants (événements disjoints). Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^{-N} = +\infty \tag{5.6.9}$$

Un nombre infini d'événements A_n se produisent, c'est-à-dire qu'un nombre infini de singes dactylographient les oeuvres complètes de Shakespeare.

■ Q.E.D.

Par conséquent, si nous acceptons l'infini dans un argument, nous pouvons alors accepter également que "l'infini étant donné, tout peut arriver".

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Ce résultat est un cas particulier d'un résultat plus général nommé "second lemme de Borel–Cantelli". Ce lemme énonce que si les événements E_n sont indépendants et que la somme des probabilités des E_n diverge à l'infini, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se produisent est de 1. C'est-à-dire si $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = +\infty$ et les événements $(E_n)_{n=1}^{+\infty}$ sont indépendants, alors $P\left(\limsup_{n\to+\infty} E_n\right) = 1$. Formellement :

$$\because \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = +\infty \wedge (\perp\!\!\!\perp E_n)_{n=1}^{+\infty} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} E_n\right) = 1 \tag{5.6.10}$$

La démonstration détaillée est fournie juste ci-dessous.

> *La vraie logique de ce monde est dans le calcul des probabilités.*
>
> James Clerk Maxwell

quote 5.6:455.#34

En cours de traduction de l'anglais

5.6.1.1.1 Second lemme de Borel-Cantelli

Théorème 5.35. Considérons E_n événements indépendants et dont la somme des probabilités des E_n diverge vers l'infini.

La probabilité qu'un nombre infini d'entre eux se produisent est alors de 1.

C'est-à-dire, si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = +\infty \tag{5.6.11}$$

et les événements $\langle E_n \rangle_{n=1}^{+\infty}$ sont indépendants, alors :

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 1 \tag{5.6.12}$$

Cela signifie que, dans des conditions appropriées, certains événements se produiront presque certainement une infinité de fois. Ce lemme est particulièrement utile en théorie ergodique, en théorie des nombres et dans les processus stochastiques, où il permet de déterminer si certains comportements persistent indéfiniment.

Démonstration 5.35.1. Soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = +\infty \tag{5.6.13}$$

Soit les événements $\langle E_n \rangle_{n=1}^{+\infty}$ indépendants. Il suffit de démontrer que l'événement où les E_n ne se sont pas produits pour une infinité de valeurs de n a une probabilité de 0. Cela revient simplement à démontrer que :

$$1 - P\left(\limsup_{n\to+\infty} E_n\right) = 0 \tag{5.6.14}$$

Notons que[19] :

$$\begin{aligned} 1 - P\left(\limsup_{n\to+\infty} E_n\right) &= 1 - P\left(\{E_n \text{ i.s. }\}\right) = P\left(\{E_n \text{ i.s. }\}^c\right) \\ &= P\left(\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} E_n\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c\right) \\ &= P\left(\liminf_{n\to+\infty} E_n^c\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c\right) \end{aligned} \tag{5.6.15}$$

Il suffit de démontrer :

$$P\left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c\right) = 0 \tag{5.6.16}$$

Comme les $\langle E_n \rangle_{n=1}^{+\infty}$ sont indépendents :

$$P\left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c\right) = \prod_{n=N}^{+\infty} P\left(E_n^c\right) = \prod_{n=N}^{+\infty} \left(1 - P\left(E_n\right)\right) \tag{5.6.17}$$

Introduisons maintenant "l'inégalité de fonction exponentielle", c'est-à-dire par la définition de la fonction exponentielle (voir section Analyse Fonctionnelle page 2264) :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{5.6.18}$$

Nous avons maintenant besoin d'un résultat intermédiaire qui stipule que, étant donné $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel tel que $x > -1$ et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ un entier positif, alors nous obtenons "l'inégalité de Bernoulli" :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{5.6.19}$$

- Case de Base : Pour $n = 1, 1 + x = 1 + x$ alors l'inégalité tient.
- Hypothèse d'induction : Supposons que pour un certain entier $k \geq 1, (1+x)^k \geq 1 + kx$.
- Étape inductive : Il faut démontrer que $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$

Faisons donc la démonstration de l'étape inductive qui confirme l'inégalité de Bernoulli :

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\ &\geq (1+x)(1+kx) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k+1)x, \end{aligned} \tag{5.6.20}$$

[19] Dans les démonstations mathématiques, l'abréviation "i.s." signifie "infiniment souvent".

En cours de traduction de l' anglais

étant donné que $kx^2 \geq 0$. Ceci termine l'étape d'induction !

Dès lors pour $x > -1$, nous pouvons écrire en utilisant l'inégalité de Bernoulli :

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &\geq \lim_{n\to+\infty}(1+x) \\ &= 1+x \end{aligned} \tag{5.6.21}$$

Ou (we just replace x par $-x$) :

$$e^{-x} \geq 1-x \tag{5.6.22}$$

Donc (la condition $P(E_n) > -1$ est satisfaite ici et donc nous pouvons appliquer l'inégalité de Bernoulli !) :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} E_n^c\right) &= \prod_{n=N}^{+\infty}\left(1-P\left(E_n\right)\right) \\ &\leq \prod_{n=N}^{+\infty}\exp\left(-P\left(E_n\right)\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=N}^{+\infty} P\left(E_n\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.6.23}$$

Ceci complète la démonstration.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

5.6.1.2 Est-ce que les probabilités réfutent les structures complexes ?

quote 5.6:458.#35

> *Les questions les plus importantes de la vie ne sont en effet, pour la plupart, en réalité que des problèmes de probabilité.*
>
> P. S. de Laplace

Les créationnistes traditionnels et les auteurs de livres sur Design Intelligent invoquent régulièrement des arguments de probabilité dans les critiques de l'évolution biologique. Ils soutiennent que certaines caractéristiques de la biologie sont si incroyablement improbables qu'elles n'auraient jamais pu être produites par un processus "naturel" purement aléatoire, même en supposant les milliards d'années d'histoire confirmées par les géologues et les astronomes. Ils assimilent souvent l'hypothèse d'évolution à la suggestion absurde que des singes tapant au hasard sur une machine à écrire pourraient composer une sélection des travaux de Shakespeare, ou qu'une explosion dans un parc d'équipements aérospatiaux pourrait produire un avion de ligne 747 fonctionnel (nous ne donnerons pas les noms des gens qui ont écrit cela parce que la qualité de leurs livres ainsi que de leur agenda religieux ne mérite pas d'être cité ici et cela pourrait leur faire de la publicité !). Des écrits plus récents de ce genre, dans le but de promouvoir une vision du monde de la "conception intelligente", soutient que la biologie fonctionnelle fonctionne sur un sous-ensemble extrêmement petit de l'espace de toutes les séquences d'ADN possibles, et que toute modification du "programme informatique" de la biologie sont, comme les changements apportés aux programmes informatiques humains, presque certains de rendre l'organisme non fonctionnel (encore une fois, nous ne donnerins pas les noms des personnes qui ont écrit cela pour les mêmes raisons qu'auparavant !).

Définition (#5.6.103) : "L'évolution biologique" est le changement <u>cumulatif</u> des propriétés caractéristiques héréditaires de groupes de structures au cours de plusieurs générations, de quelques secondes à des millions d'années, selon le type de structure. Elle englobe tout, depuis de légers changements dans les proportions des différentes formes d'une structure codante dus aux contraintes de l'environnement naturel, à la dérive génétique séquentielle aléatoire et aux variations génétiques au sein d'une population, jusqu'aux altérations qui ont conduit depuis les premières structures de molécules auto-réplicatives aux organismes, dinosaures, abeilles, les chênes, les humains, etc. (remarquez la subtilité de la définition grâce au mot souligné qui évite d'avoir le "feu" comme étant une entité ayant une évolution biologique...).

Bien que le public en général ne l'apprécie généralement pas, il est bien connu dans le monde de la recherche scientifique que les arguments fondés sur les probabilités et les statistiques sont chargés de biais et d'erreurs potentielles, et même les chercheurs "experts" peuvent se tromper avec un raisonnement invalide. Pour ces raisons, des cours rigoureux de probabilités et de statistiques sont désormais exigés des étudiants dans pratiquement tous les domaines scientifiques (gardez à l'esprit que l'ingénierie n'est pas une science, c'est pourquoi en fait la grande majorité des ingénieurs ont une très faible compréhension des probabilités et des statistiques) , ainsi que dans de nombreuses autres disciplines. Les avocats doivent être au moins modérément familiarisés avec les arguments de probabilité et de statistiques étant donné que ces derniers peuvent mal compris dans les arguments rhétoriques. Dans le monde de la finance, le surajustement statistique et d'autres erreurs de probabilité et statistiques sont désormais considérés comme l'une

En cours de traduction de l'anglais

des principales raisons du fait que de nombreuses stratégies et fonds d'investissement qui ont fière allure sur papier échouent souvent lamentablement dans l'utilisation dans le monde réel.

Pour illustrer les difficultés avec les arguments de probabilité, les professeurs de mathématiques demandent souvent à leur classe (disons qu'elle compte 23 élèves) s'ils pensent qu'il est probable que deux personnes ou plus dans la classe aient exactement la même date d'anniversaire. La plupart des étudiants disent que c'est très peu probable, pensant que les chances que deux personnes aient le même anniversaire particulier sont de $1/365$, et donc 23 fois cette quantité n'est que de $23/365$. Mais cet argument est fallacieux, en effet, si l'on numérote les 23 personnes de 1 à 23, l'événement selon lequel toutes 23 personnes ont des anniversaires différents est le même que l'événement où la personne 2 n'a pas la même date d'anniversaire que la personne 1, et que personne n'a pas la même date d'anniversaire que la personne 1 ou la personne 2, et ainsi de suite, et finalement que le personne 23 n'a pas le même anniversaire que les personnes de 1 à 22.

Appelons ces événements respectivement "Événement 2", "Événement 3", etc. On peut également ajouter un "Événement 1", correspondant à l'événement de la personne 1 ayant une date d'anniversaire, qui se produit avec la probabilité 1. Cette conjonction d'événements peut être calculée en utilisant une probabilité conditionnelle : la probabilité de l'Événement 2 est de $364/365$, car la personne 2 peut avoir une date d'anniversaire autre que la date d'anniversaire de la personne 1. De même, la probabilité de l'Événement 3 étant donné que l'Événement 2 survenu est de $363/365$, car la personne 3 peut avoir l'une des dates d'anniversaires non déjà prises par les personnes 1 et 2. Cela continue jusqu'à ce que finalement la probabilité de l'Événement 23 étant donné que tous les événements précédents se soient produits est $343/365$. Enfin, le principe de probabilité conditionnelle implique que la probabilité $P(A')$ que deux personnes dans la pièce n'aient pas le même anniversaire est égale au produit de ces probabilités individuelles :

$$P(A') = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365} = \left(\frac{1}{365}\right)^{23} \cdot (365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 343) \cong 0.492703 \quad (5.6.24)$$

Par conséquent, la probabilité qu'au moins deux personnes de la classe aient la même date d'anniversaire est donnée par (car les deux événements s'excluent mutuellement) :

$$P(A) = 1 - P(A') \cong 1 - 0.492703 \cong 0.507297 \quad (5.6.25)$$

En cours de traduction de l'anglais

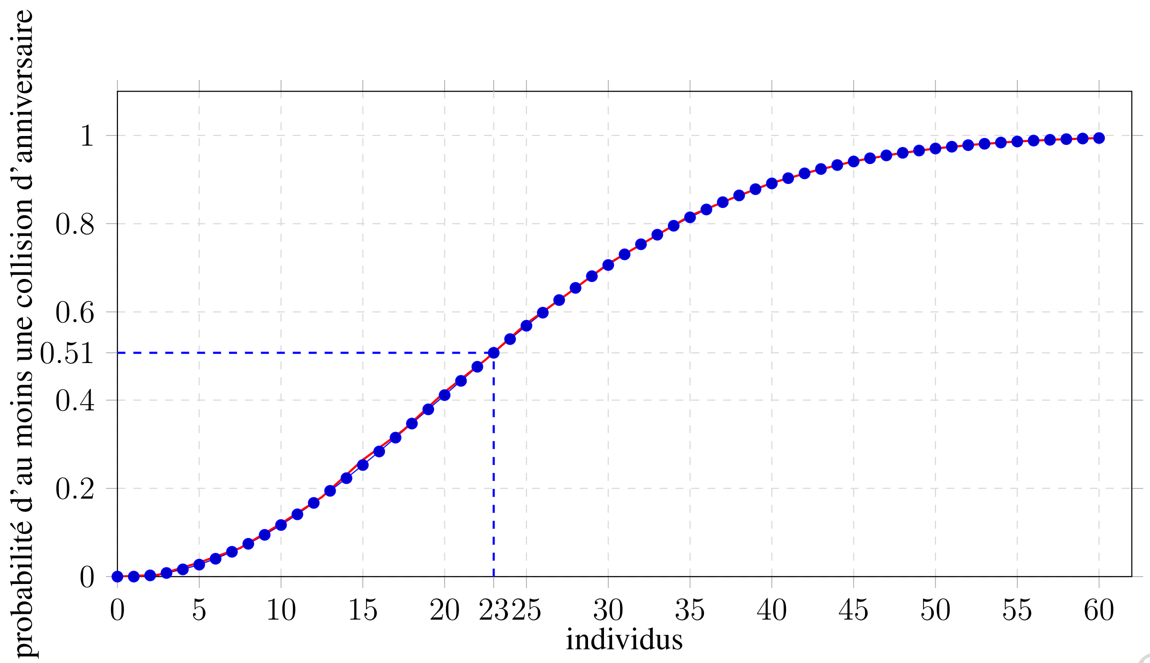


FIG. 5.77 – **Distribution de probabilité du paradoxe d'anniversaire**

En cours de traduction de l'anglais

Un argument typique de conception intelligente des créationnistes (argument de niveau école secondaire ...) se présente ainsi : la molécule d'alpha-globine humaine (abrégé HBA1), un composant de l'hémoglobine qui remplit une fonction clé de transfert d'oxygène, est une chaîne protéique basée sur une séquence de 141 acides aminés[20] (masse moyenne de 10^{-25} [kg]). Il existe 20 différents acides aminés communs dans les systèmes vivants[21] :

[20]La molécule d'hémoglobine est composée de quatre chaînes polypeptidiques : deux chaînes alpha de 141 résidus d'acides aminés chacune et deux chaînes bêta de 146 résidus d'acides aminés chacune.

[21]Notez qu'un total de 23 types d'acides aminés ont été trouvés dans des échantillons d'astéroïdes Ryugu prélevés en novembre 12019 (calendrier holocène) et ramenés sur Terre en décembre 12020 (calendrier holocène) par la sonde spatiale japonaise Hayabusa 2. Cela donne une forte indication que les acides aminés se forment également dans l'espace.

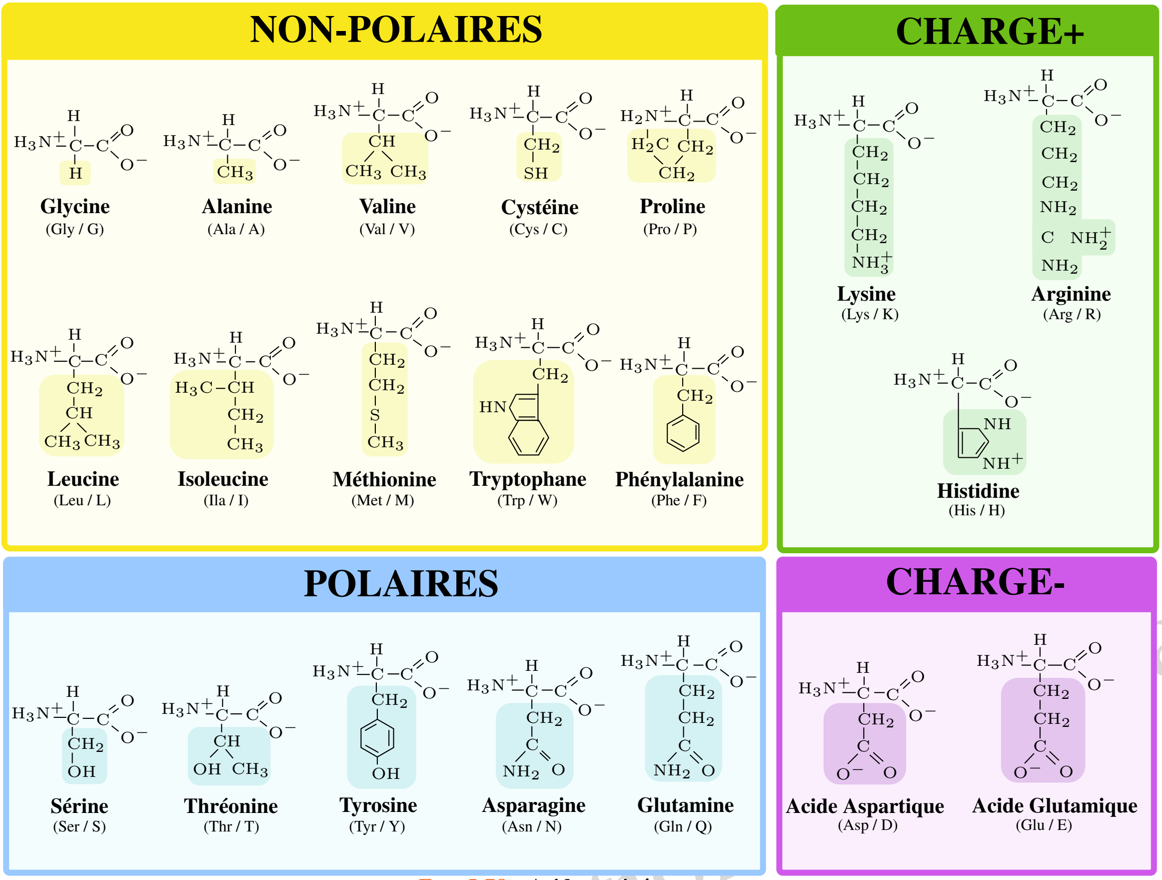


FIG. 5.78 – **Acides aminés courants**

En cours de traduction

Des acides aminés ont été reproduits avec un phénomène naturel dans l'expérience Miller-Urey (voir [134]) et ont également été extraits dans des météorites [83] :

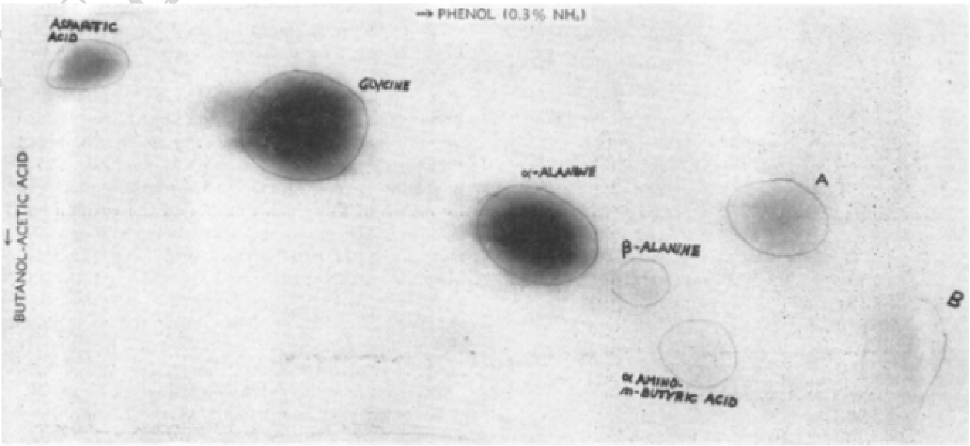


FIG. 5.79 – **Chromatographie sur papier réalisée par Miller, publiée en 11953 (calendrier holocène) dans laquelle les acides aminés trouvés dans son expérience peuvent être observés**

Une reproduction plus récente de l'expérience Miller-Urey comme celle de 12025 (calendrier holocène) a non seulement confirmé une fois de plus la production d'acides aminés mais aussi la formation concomitante de protocellules et de composés prébiotiques (voir [231]) :

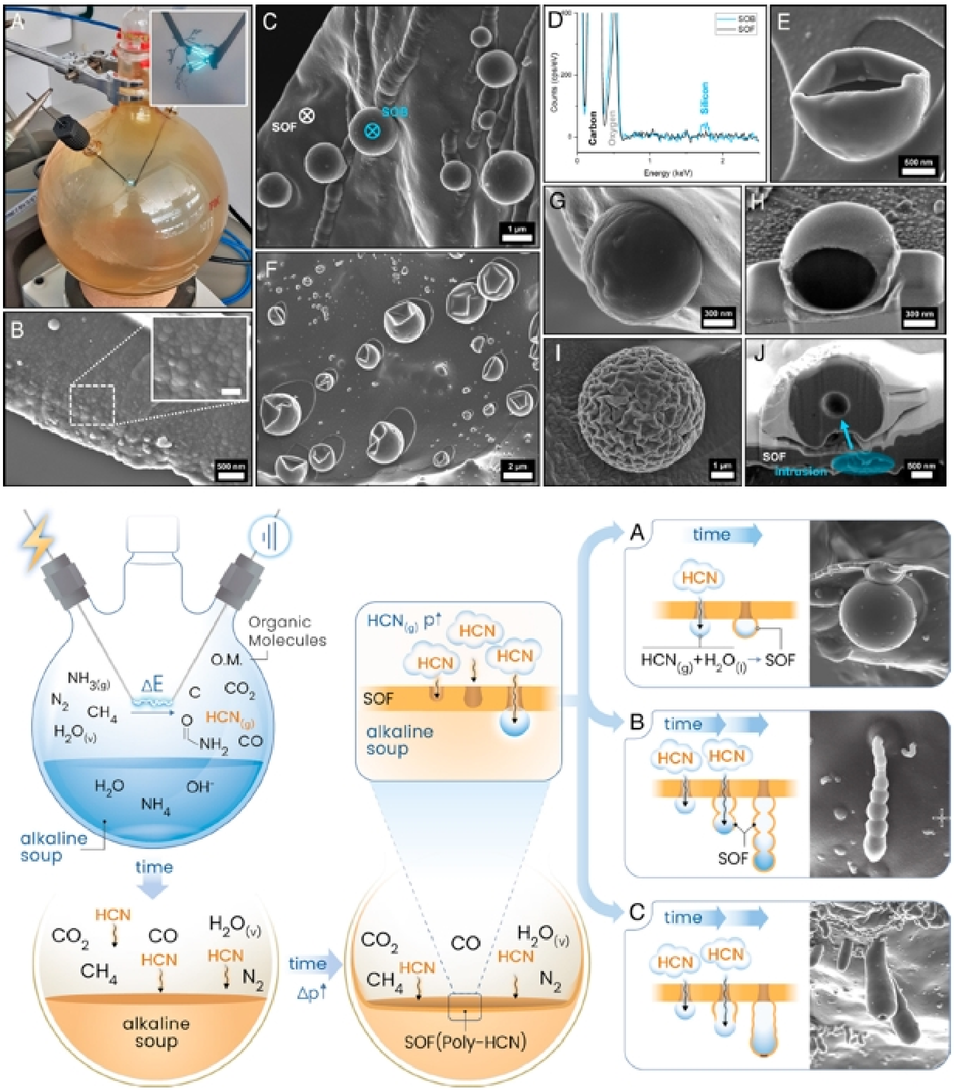


Fig. 5.80 – Formation concomitante de protocellules et de composés prébiotiques dans l'expérience de Miller-Urey

En cours
anglais

Avec le séquençage de l'alpha-globine qui est :

```
Val-Leu-Ser-Pro-Ala-Asp-Lys-Thr-Asn-Val-Lys-Ala-Ala-Trp-Gly-Lys-Val-Gly
-Ala-His-Ala-Gly-Glu-Tyr-Gly-Ala-Glu-Ala-Leu-Glu-Arg-Met-Phe-Ser-Phe-Pro
-Thr-Thr-Lys-Thr-Tyr-Phe-Pro-His-Phe-Leu-Ser-His-Gly-Ser-Ala-GIn-Val-Lys
-Gly-His-Gly-Lys-Lys-Lys-Val-Ala-Asp-Ala-Leu-Thr-Ala-Val-His-Val-Hal-Hal
-Hsp-Met-Pro-Asn-Ala-Leu-Ser-Ala-Leu-Ser-Asp-Leu-His-Ala-Heu-Arg-Val-Asp
-Pro-Val-Asn-Phe-Lys-Leu-Leu-Ser-His-Cys-Leu-Leu-Leu-Ala-His-Leu-Pro-Ala
-Glu-Phe-Thr-Pro-Ala-Val-His-Ala-Ser-Leu-Asp-Lys-Phe-Leu-Ala-Ser-Val-Ser
-Thr-Val-Leu-Thr-Ser-Lys-Tyr-Arg
```

Ou pour une version abrégée des quatre chaînes polypeptidiques :

- Chaîne A :
  VLSPADKTNV KAAUGKVGAH AGEYGAEALE RMFLSFPTTK TYFPHFDLSH GSAOVKGHGK KVADALTHAV AHVDDMPMAL SALSDLHAHK LRVDPVNFKL. LSHCLLVTLA AHLPAEFTPA VHASLDKFLA SVSTVLTSKY R

- Chaîne B :
VHLTPEEKSA VTALUGKVNV DEVGGEALGR LLVVYPUTOR FFESFGDLST pDAVHGWRV KAHGKKWLGA FSDGLAHLDN LKGTFATLSE LHCDKLHWDP ENFRLLGNVL VCVLAHHFGK EFTPPVOAAY OKVVAGVANA LAHKYH

- Chaîne C :
WLSPADKTNV KAAUGKVGAH AGEYGAEALE RMFLSFPTTK TYFPHFDLSH GSAOVKGHGK KVADALTNAV AHVDDHPNAL SALSDLHAHK LRVDPVNFKL LSHCLLVTLA AHLPAEFTPA VHASLDKFLA SVSTVLTSKY R

- Chaîne D :
WHLTPEEKSA VTALUGKVNV DEVGEEALGR LLWYPUTOR FFESFGDLST PDAVMGNPKV KAHGKKVLGA FSDGLAHLDN LKGTFATLSE LHCDKLHVDP ENFRLLGNVL VCVLAHHFGK EFTPPVQ

Donc, le nombre de chaînes potentielles de longueur 141 est[22] (voir plus bas page 516 pour la preuve) :

$$\bar{A}_m^n = n^m = 20^{141} \cong 10^{183} \tag{5.6.26}$$

Les créationnistes et aussi de nombreux autres théistes soutiennent alors que ce chiffre est si énorme que même après des milliards d'années d'essais moléculaires aléatoires, aucune molécule de protéine alpha-globine humaine n'apparaîtrait jamais "au hasard", et donc l'hypothèse que l'alpha-globine humaine est née par un processus évolutif est réfuté de manière décisive.

Définition (#5.6.104) : La "vie" (i.e. "ensemble autocatalytique" en chimie) est un système chimique capable de subir une évolution biologique (voir définition ci-dessus à la page 458) par auto-réplication[23] utilisant les ressources de son environnement (remarquez encore la subtilité de cette définition faisant référence à celle de "l'évolution biologique" pour éviter de classer le "feu" en tant qu'entité vivante... !).

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

En 12023 (calendrier holocène), Ryo Mizuuchi et Norikazu Ichihashi (voir [319]), ont identifié une variante d'ARN à 20 nucléotides qui s'auto-reproduit ! Comme un nucléotide est composé de 5 atomes de carbone, de 8 atomes d'hydrogène, de 1 atome d'azote, de 1 atome de phosphore et de 4 atomes d'oxygène alors un seul nucléotide contient 19 d'atomes. Cela signifie que le plus petit ARN connu capable de s'auto-reproduire ne contient que $19 \cdot 20 = 380$ atomes ! De plus, une autre équipe scientifique (voir [288]) a pu créer l'émergence spontanée de molécules auto-réplicatives contenant des bases nucléiques et des acides aminés (ce que certains qualifient de « créer la vie à partir de la non-vie ») !

Une erreur majeure dans l'argument alpha-globine mentionné ci-dessus, commun à beaucoup d'autres de ce genre, est qu'il ignore le fait qu'une grande classe de molécules d'alpha-globine

[22] Ce calcul est de toute façon relatavíment faux car les permutations symétriques (résultats miroir) sont comptés - mais cela ne changera cependant pas l'ordre de grandeur du résultat - et des preuves expérimentales ont montré qu'il existe des séquences d'acides aminés interdites et/ou instables !

[23] L'autocatalyse, la capacité des systèmes (molécules, réseaux ou compartiments métaboliques) a faire des copies d'eux-mêmes, est au coeur de tous les scénarios évolutifs. Les systèmes où l'autocatalyse s'accompagne de transfert d'information et d'hérédité sont dits auto-réplicatifs !

peut remplir la fonction essentielle de transfert d'oxygène, de sorte que le calcul de la probabilité d'une seule instance est trompeuse a priori. En effet, la plupart des 141 acides aminés dans l'alpha-globine peuvent être modifiés sans altérer la fonction clé de transfert d'oxygène, comme on peut le constater en notant la grande variété de molécules d'alpha-globine à travers le règne animal. Quand on révise le calcul ci-dessus, sur la base de seulement 25 emplacements essentiels à la fonction de transport d'oxygène (ce qui est une surestimation généreuse), on obtient 10^{33} chaînes fondamentalement différentes, un chiffre énorme mais incomparablement plus petit que 10^{183}.

Un calcul comme celui-ci peut être affiné davantage, en tenant compte d'autres caractéristiques de l'alpha-globine et de sa biochimie associée. Certains de ces calculs produisent des valeurs de probabilité encore plus extrêmes que les précédentes. Mais un de ces calculs est-il vraiment important[24] ? Le problème principal est que tous ces calculs, qu'ils soient effectués avec précision ou non, souffrent de l'erreur fatale de présumer qu'une structure telle que l'alpha-globine humaine est née d'un seul événement d'essai aléatoire tout-en-un. Mais générer une molécule "au hasard" en un seul coup n'est décidément pas l'hypothèse scientifique en question - c'est une théorie créationniste, pas une théorie scientifique. Au lieu de cela, les preuves disponibles de centaines d'études publiées sur le sujet ont montré au-delà de tout doute raisonnable que l'alpha-globine était le produit final d'une longue séquence d'étapes intermédiaires, dont chacune était biologiquement utile dans un contexte antérieur.

En bref, l'argument des créationniste de la conception intelligente affirmant que les scientifiques affirment une création tout à la fois "aléatoire" de diverses biomolécules, puis affirmant que cela est probablement impossible, est une erreur classique de "l'homme de paille". Les scientifiques ne l'observent pas ainsi, donc cette argumentation est complètement invalide. En d'autres termes, peu importe à quel point les mathématiques utilisées dans l'analyse sont bonnes ou mauvaises, si le modèle sous-jacent est une description fondamentalement invalide du phénomène en question. Tout calcul de probabilité simpliste de l'évolution qui ne prend pas en compte le processus pas à pas par lequel la structure est apparue est presque certainement fallacieux et peut facilement induire en erreur !

En cours de traduction de l'anglais

Certaines des difficultés des arguments de probabilité des créationnistes peuvent être illustrées en considérant les flocons de neige (même si nous devons garder à l'esprit que *comparaison n'est pas raison* !). Le livre de Bentley et Humphrey *Snow Crystals* comprend plus de 2'000 photos haute résolution en noir et blanc de vrais flocons de neige, chacune avec des motifs complexes mais très réguliers qui sont presque parfaitement symétriques à six axes (voir [284] pour plus d'informations).

En utilisant un calcul basé sur une symétrie à six axes, on peut calculer la probabilité qu'une de ces structures puisse se former "au hasard" comme à peu près une chance sur 10^{2500}. Ce chiffre de probabilité est encore plus extrême que certains qui sont apparus dans la littérature du créationnisme intelligent. Est-ce donc la preuve que chaque flocon de neige individuel a été conçu par une entité intelligente surnaturelle ? On en doutera...

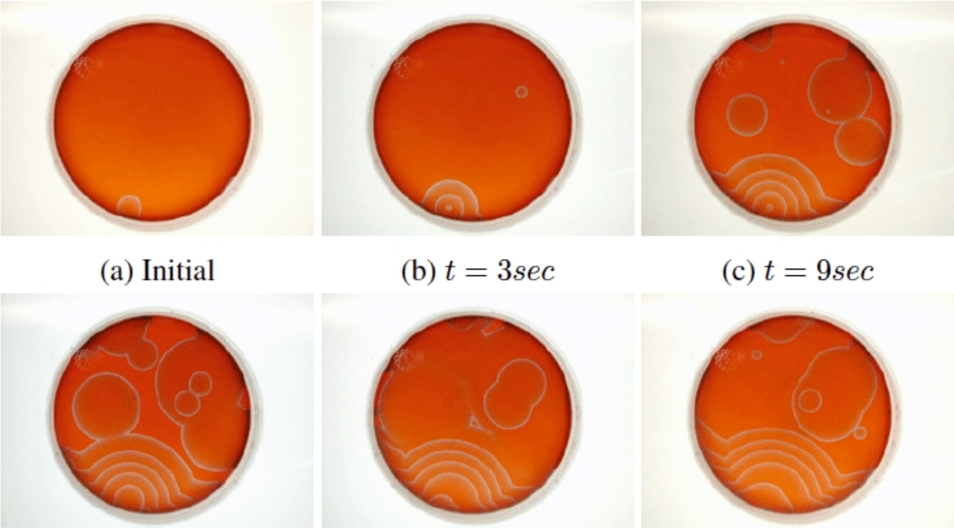
L'illusion ici, encore une fois, suppose un assemblage aléatoire de molécules tout à la fois.

[24] Par exemple un physicien appliquant la méthode scientifique avec l'approche fréquentiste calculera la cote de l'apparition de la vie avec l'évidence expérimentale disponible ! Ainsi les données actuelles qui nous sont disponibles nous donnent 1 univers observable et 1 vie donc une cote de 100% (ie la probabilité d'observer la vie de façon statistique selon l'échantillon disponible).

Au lieu de cela, les flocons de neige, comme les organismes biologiques, sont formés comme le produit d'une longue série d'étapes agissant selon des lois physiques bien connues, et les résultats de ces processus dépendent très sensiblement des conditions de départ et de nombreux paramètres environnementaux. C'est donc une folie de présumer que l'on peut correctement calculer les probabilités d'un résultat donné au moyen de calculs de probabilité superficiels qui ignorent les processus par lesquels ils se sont formés.

En cours ... glais

Un autre exemple célèbre de phénomène aléatoire créant des structures cohérentes est la réaction de Belousov-Zhabotinsky, c'est une classe de réactions qui servent d'exemple classique de thermodynamique hors équilibre, aboutissant à l'établissement d'un oscillateur chimique non linéaire (il est "aléatoire" en car il est très peu probable que les résultats finaux que nous obtenons soient identiques entre deux mêmes configurations expérimentales !) :



(a) Initial (b) $t = 3sec$ (c) $t = 9sec$

(d) $t = 12sec$ (e) $t = 15sec$ (f) $t = 18sec$

Il est temps de mettre des chiffres sur les relations de la Mécanique Statistique pour montrer à quel point les mécanismes à l'intérieur de nos cellules sont impressionantes.

Pour commencer, nous vivons à des températures d'environ 300 [K]. Si vous avez étudié la Mécanique Statistique, vous savez que l'énergie cinétique d'une molécule est (voir section Mécanique des milieux continus page ??) donnée par :

$$E_c = \frac{N}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kNT = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}NT \qquad (5.6.27)$$

Dès lors :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} \qquad (5.6.28)$$

Ou en termes de masse molaire :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M_m}} \qquad (5.6.29)$$

Par conséquent, pour l'eau avec $18.01528 \cdot 10^{-3}$ [kg$\cdot$mol^{-1}] cela donne à température ambiante :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.314 \cdot 300}{18.01528 \cdot 10^{-3}}} \cong 644 \; [\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}] \qquad (5.6.30)$$

Ce n'est pas un trop mauvais résultat car de nombreuses sources donnent 590 [m $\cdot$ s^{-1}]. Nous prendrons cette dernière valeur.

La relation de vitesse thermique fonctionne même pour quelque chose d'aussi grand que l'ARN polymérase II ($\sim 830 \cdot 10^{-24}$ [kg]).

Pour rendre les choses vraiment faciles, nous pouvons travailler avec un complexe moléculaire de masse encore plus grand (c'est-à-dire plus complexe). Quelque chose comme : $1 \cdot 10^{-21}$ [kg]. Une telle masse aurait une vitesse moyenne thermale de :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} \cong \sqrt{\frac{3 \cdot 8.314 \cdot 300}{1 \cdot 10^{-21} \cdot 6.0221 \cdot 10^{23}}} \cong 3.52 \; [\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}] \qquad (5.6.31)$$

En cours de traduction de l'anglais

Prenons une borne inférieure de 2 $[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$ selon certaines sources non revues par les pairs...

Les cellules sont petites. Les 3 polymérases transcrites d'ADN en ARN ont des masses de l'ordre de $1\cdot 10^{-21}$ [kg]. Alors, combien de temps cela devrait-il leur prendre pour traverser un assez gros noyau de 10 microns (10^{-5} [m]) de diamètre ? Si elles vont à 2 $[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$, elle le parcourra donc statistiquement en moyenne $250,000$ fois en une seconde ou une fois tous les 4 $[\mu\mathrm{s}]$.

Nous avons clairement omis quelque chose - rien dans la cellule ne se déplace en ligne droite. Il y a beaucoup de monde, de sorte que même si les choses bougent très rapidement, leur trajectoire n'est pas droite évidemment !

Nous avons prouvé dans la section Mécanique des Milieux Continus (page **??**) que la distance moyenne parcourue par une molécule (supposée sphérique) entre deux collisions est donnée par :

$$\lambda=\frac{1}{n\pi r^2\sqrt{2}} \quad (5.6.32)$$

Et nous avons prouvé au même endroit que le nombre de collisions par seconde était donné par :

$$C=n\pi r^2\sqrt{2}\bar{v}=n\pi r^2\sqrt{2}\sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} \quad (5.6.33)$$

Pour calculer la quantité d'eau pouvant entrer dans un noyau cellulaire, nous devons savoir quelle est sa taille. Une source dit que l'eau peut être considérée comme une sphère écrasée d'un rayon maximum de 1.41 Angstroms (10^{-10} [m]).

Alors, quel est le volume d'une molécule d'eau ? Cela est donné par :

$$V_{\mathrm{H_2O}}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(1.41\cdot 10^{-10})^3\cong 1.174\cdot 10^{-29}\ [\mathrm{m}^3] \quad (5.6.34)$$

La densité des molécules est donc donnée par :

$$n=\frac{1}{1.174\cdot 10^{-29}}\cong 8.5\cdot 10^{28}\ [\text{molécules}\cdot\mathrm{m}^{-3}] \quad (5.6.35)$$

Dés lors :

$$\lambda=\frac{1}{n\pi r^2\sqrt{2}}=\frac{1}{3.5\cdot 10^{14}\cdot\pi\cdot(1.41\cdot 10^{-10})^2\sqrt{2}}\cong 1.4\cdot 10^{-10}\ [\mathrm{m}] \quad (5.6.36)$$

et (toujours pour l'eau seulement et dans un mètre cube !) :

$$C=n\pi r^2\sqrt{2}\bar{v}=8.5\cdot 10^{28}\cdot\pi\cdot(1.41\cdot 10^{-10})^2\cdot\sqrt{2}\cdot 644\cong 4.8\cdot 10^{12}\ [\text{collisions}\cdot\mathrm{s}^{-1}] \quad (5.6.37)$$

c'est comme rencontrer une autre molécule d'eau chaque (environ) 10^{-12} seconde (1 picoseconde).

Remarquez qu'un milliard d'années a :

$$60\cdot 60\cdot 24\cdot 365\cdot 1\cdot 9\cong 3.15\cdot 10^{16}\ [\mathrm{s}] \quad (5.6.38)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons donc par milliard d'années pour un mètre cube d'eau égale un nombre de collisions égal à :

$$C_{\text{bill. years}} = 4.8 \cdot 10^{12} \cdot 3.15 \cdot 10^{16} \cong 1.5 \cdot 10^{29} \; [\text{collisions} \cdot \text{milliards d'années}^{-1}] \tag{5.6.39}$$

Et comme la quantité d'eau sur Terre est estimée approximativement à (en supposant que toute cette eau était impliquée de manière égale sur toute la planète aux mêmes processus et conditions chimiques ...) :

$$V_{\text{TerreH}_2\text{O}} \cong 1 \cdot 10^{18} \; [\text{m}^3] \tag{5.6.40}$$

Par conséquent, sur toute la Terre, nous avons :

$$C_{\text{Tot}} \cong 1.5 \cdot 10^{29} \cdot 1 \cdot 10^{18} \cong 1 \cdot 10^{36} \; [\text{collisions} \cdot \text{milliard d'années}^{-1}] \tag{5.6.41}$$

Donc, par milliard d'années, nous avons $1'000$ fois plus de collisions que le nombre de 10^{33} de combinaisons de différentes chaînes de l'alpha-globine. Même si nous considérons un facteur 100 d'erreur dans le nombre de collisions par seconde (il n'est pas impossible que ce soit la magnitude d'erreur dans nos estimations précédentes !), Nous n'aurions besoin que de 1 milliard d'années pour essayer les 10^{33} combinaison juste par des collisions aléatoires.

Gardez à l'esprit que c'est le résultat de ne considérer qu'une seule planète Terre comme la nôtre. Quel que soit le résultat, nous aurions dû le multiplier par l'approximation de la limite inférieure des planètes semblables à la Terre dans notre Galaxie (estimé en 12020 selon le calendrier holocène entre 1 et 6 milliards, soit $\sim 10^9$) et le nombre de galaxies dans l'Univers observable (estimé entre 100 et $2'000$ milliards, soit entre 10^{11} et 10^{12}). Et ceci n'est que pour l'Univers observable ... (en gardant à l'esprit que l'Univers est à notre connaissance très probablement plat et donc infini avec $\Omega_0 = 1$ ou $k = 0$ comme on le verra dans la section Cosmogonie page **??** ou au moins 250 fois plus grand comme détaillé dans [440]).

l'anglais
En c

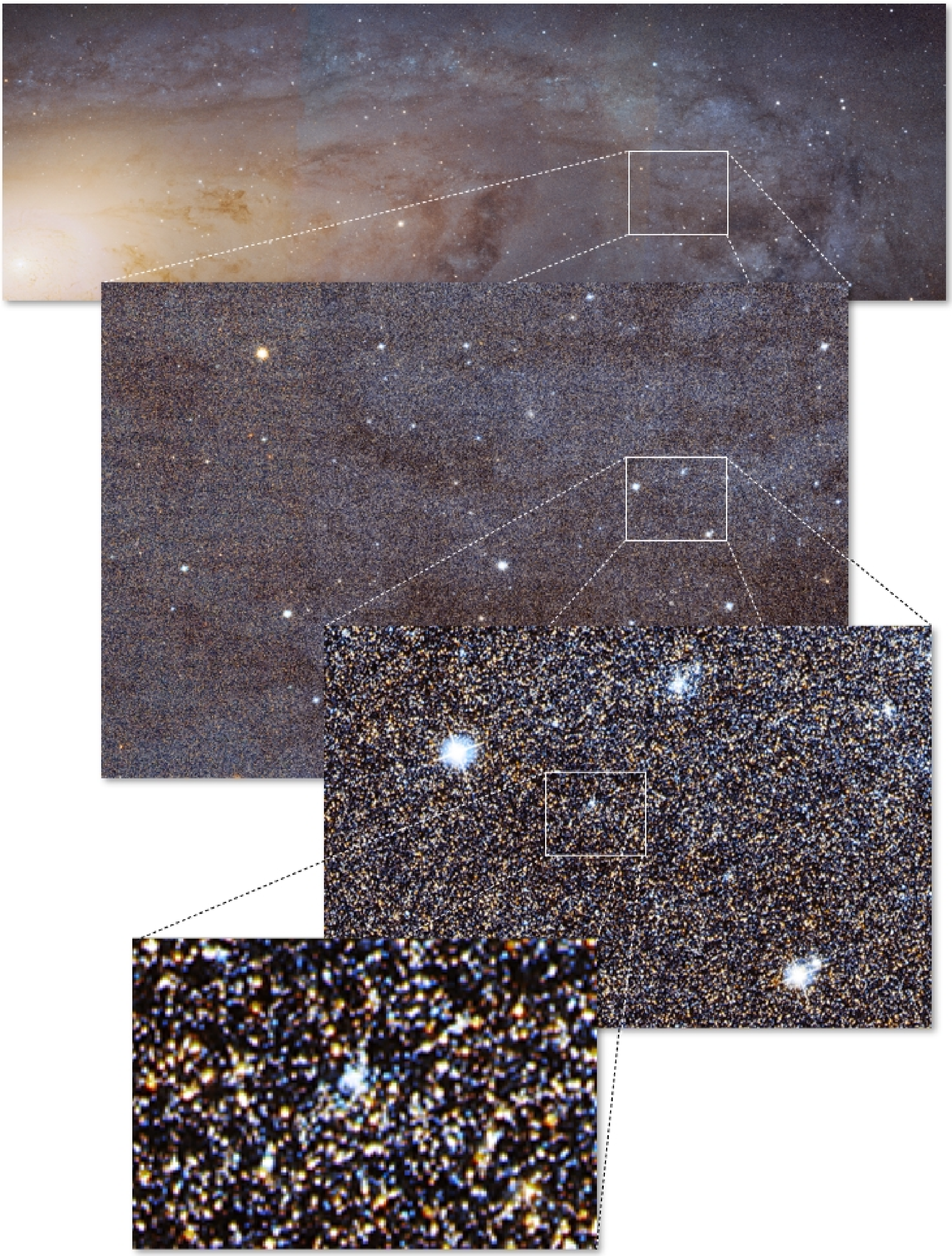


Fig. 5.81 – Image de M31 (galaxie d'Andromède) la plus nette et la plus grande jamais obtenue du téléscope spatial Hubble avec 1.5 milliard de pixels avec environ 100 millions d'étoiles sur plus de 40′000 années-lumière publiée le 5 janvier 12015 (crédit : NASA, ESA, J. Dalcanton (Université de Washington, États-Unis), B. F. Williams (Université de Washington, États-Unis), L. C. Johnson (Université de Washington, États-Unis), l'équipe PHAT et R. Gendler)

Remarque

Jusqu'à présent, nous voyons que le principal facteur du nombre de collisions n'est pas le rayon des molécules impliquées, ni leur vitesse ou leur masse mais leur quantité (c'est-à-dire la densité). Évidemment, le temps est important mais il y a pour l'instant trop d'incertitudes sur la plage de valeurs de ce dernier.

Mais soyons plus réalistes ! Nous devons tenir compte du fait que :

1. L'eau n'est pas un acide aminé (le plus grand acide aminé a un poids de 204.2 $[\text{g}\cdot\text{mole}^{-1}]$) et il y a des collisions élastiques entre les molécules d'eau et ces molécules organiques.

2. La densité des molécules d'eau n'est pas égale à celle de la densité des acides aminés par litre d'eau. Malheureusement, c'est une valeur à laquelle il semble que nous n'avons pas accès et qui est hautement spéculative[25].

Considérons la relation pour une collision élastique en une dimension (voir section Mécanique Classique page ??) :

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_2+m_1}v_{1i} + \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}v_{2i} \tag{5.6.42}$$

Et considérons le pire des cas où $v_{2i} = 0$. Alors :

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_2+m_1}v_{1i} = \frac{2\cdot 18}{18+204.2}\cdot 644 \cong 104\ [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}] \tag{5.6.43}$$

Ainsi, la vitesse des acides aminés ne ferait que de diminuer notre nombre de collisions d'un facteur maximum de 10. Pas assez pour faire de la «vie» quelque chose de rare à l'échelle d'un milliard d'années (pour la rendre rare, il faudrait au moins une diminution de l'ordre de de l'ordre d'un facteur $10,000$).

Faisons maintenant un peu d'ingénierie inverse. Pour rendre la vie émergente rare à l'échelle du milliard d'années, comme déjà mentionné et grâce aux calculs précédents, nous devrions avoir au moins une diminution de d'un facteur $10'000$. Grâce à la collision élastique, nous pouvons ramener cette valeur à $1'000$.

Nous devrions donc trouver quelque part, quelque chose dans nos calculs, pour rendre les collisions à $1'000$ fois plus rares. L'idée serait de prendre cela dans le paramètre n (densité de molécules) dans les relations ci-dessus. Si nous supposons que le rapport des acides aminés aux molécules d'eau est de 1 pour $1'000$, cela commence à rendre les choses difficiles à l'échelle du milliard d'années ! Cela signifie que dans 1 mole d'eau (soit 18 [g] ou 18 [ml]), nous aurions 0.018 [g] d'acides aminés.

Donc, comme les planètes extra-solaires étaient quelque chose d'improbable il y a un siècle, il est très probable que l'avenir prouve que la vie est quelque chose de très commun sur des planètes qui ont de l'eau ou des atmosphères avec les bons composants et la bonne température sur une période de plusieurs milliards d'années...

En cours de traduction de l'anglais

[25] Elle est liée au problème des composés proportionnels de l'expérience Miller-Urey.

Remarque

Certaines personnes illettrées scientifiquement affirment parfois que Roger Penrose a calculé que la probabilité pour que notre Univers (en supposant que ce dernier est dans Trou Noir ...) soit dans l'état d'entropie qu'il est maintenant est de 1 chance sur 10^{123}. Il serait donc alors impossible que notre Univers ne soit pas créé par une divinité (en passant sous silence la question de savoir qui a créé cette divinité complexe ...). Mais ce n'est pas pertinent ! Même si ce qu'il a dit R. Penrose serait 100% précis ou faux d'un facteur googol, ce n'est absolument pas pertinent ! ! En effet, si nous exécutons un programme informatique qui émule une pièce de monnaie lancée un milliard de fois et que nous écrivons la séquence des piles et des faces dans un fichier, alors ce que nous venons de produire est une séquence plus que mille milliards de milliards de fois plus rare que le chiffre obtenu par R. Penrose ! ! En fait, nous pourrions exécuter ce même programme informatique jusqu'à la fin de l'existence humaine et il ne produirait probablement jamais la même chaîne de résultats. Et pourtant, cela s'est produit quand même...

Si le lecteur a le temps, il peut calculer la probabilité de sa propre existence. Ceci peut être calculé naïvement comme la probabilité qu'un spermatozoïde et un ovule se soient unis multipliée par la probabilité que sa mère et son père se soient rencontrés, que ses grands-parents se soient rencontrés, et ainsi de suite à travers les générations. On parie que le nombre obtenu sera petit... Le fait est que des événements à faible probabilité se produisent chaque jour dans notre Univers. Une fois qu'ils se produisent, leurs probabilités sont de 100%.

Remarque

Le lecteur notera également l'art de la cueillette des cerises chez les croyants et les créationnistes. Une divinité aurait selon eux créé quelque chose de "parfait" comme l'ADN (ou les arbres peu importe !). Cependant elle l'aurait fait avec près de 4 à 6 mille maladies génétiques (erreurs de codage), avec une source de lumière (Soleil) qui donne le cancer, sur une planète (Terre) où la majorité de l'eau est imbuvable près d'une étoile (Soleil) qui explosera et qui est sur une orbite qui la rendra invivable dans quelques milliards d'années, avec un écosystème de ressources limitées avec des maladies mortelles endémiques, dans un univers majoritairement inhabitable ... Oui cela fait sens hummm...

En cours de traduction de l'anglais

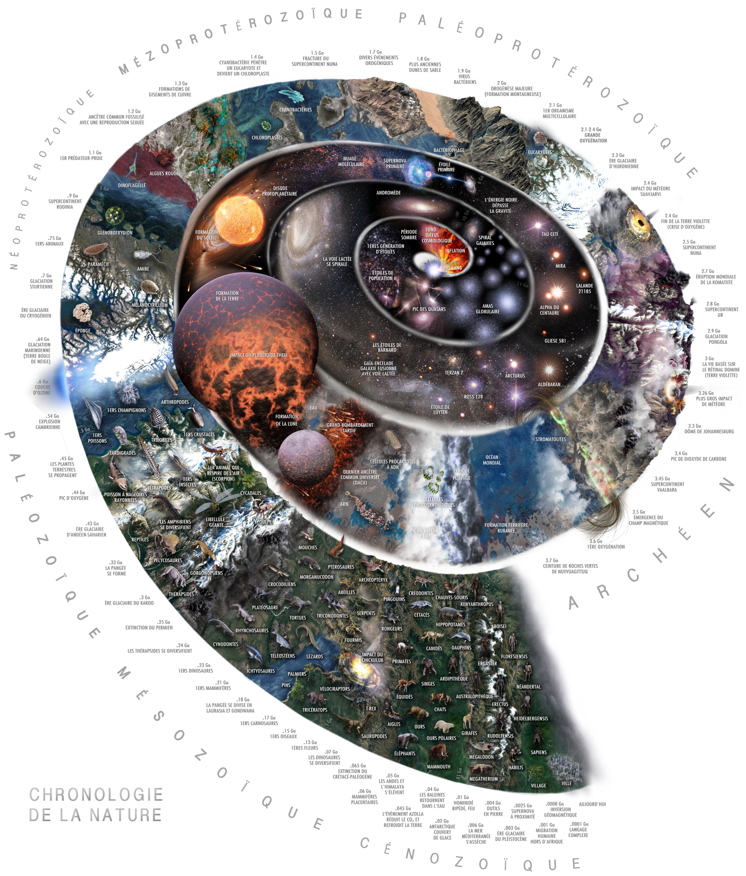


FIG. 5.82 – **Spirale de la Nature (auteur : Pablo Carlos Budassi)**

Ex traduction de l'anglais

Remarque

Une autre argument rhétorique des fanatiques religieux est que la probabilité que la vie cellulaire provienne de la matière non vivante (abiogenèse) telle que calculée par Fred Hoyle est d'environ un sur $10^{40'000}$. Mais il n'y a pas de sources de première main de Fred Hoyle avec la démonstration mathématique détaillée qui conduit à cette valeur. Donc sauf preuve du contraire c'est encore un mensonge des croyants... ! Il y a aussi l'analogie de la tornade qui produit un Boeing utilisée par les bigots mais comme nous l'avons déjà prouvé : toutes les analogies sont de fausses équivalences !

quote 5.6:472.#36

> *J'ai votre lettre et la meilleure chose que je puisse faire est de me référer à mes travaux publiés, à la fois scientifiques et populaires. Le mouvement créationniste est dirigé par une bande de dirigeants malhonnêtes et les citation erronées sont la marque de fabrique de leur travail. Y répondre est une perte de temps et une lettre ne serait pas suffisante pour apaiser vos questions. Il y a des choses qu'il vaut mieux ignorer et la stupidité de ces prétendus fanatiques religieux continue de m'étonner.*
>
> Richard Leakey

Description	**Probablité** (ou estimation)
Probabilité de mourir un jour ou l'autre	100%
Probabilité d'un tremblement de terre >7 sur l'échelle de Richter quelque part sur Terre au cours de votre vie	100%
Probabilité d'éruption d'un volcan quelque part sur Terre au cours de votre vie	100%
Probabilité de gestion Six Sigma de produire un produit sans défaut	99.99966%
Seuil de Value at Risk (VaR) dans le secteur bancaire selon la régulation (Comité de Bâle 12022)	99%
Seuil de déficit attendu (ES) selon la régulation (Comité de Bâle 12022)	97.5%
Puissance typique a priori d'un test statistique (erreur de type II)	80%
Probabilité de lancer une pièce et qu'elle tombe sur face	50%
Probabilité de vivre une pandémie au cours de sa vie	$\sim 38\%$
La solution optimale du problème des 100 prisonniers	$\sim 31.18\%$
Probabilité qu'une étoile massive forme un trou noir (unovae)	$\lesssim$ 10-30%
Probabilité d'anniversaire identique dans un groupe de 23 personnes	50%
Probabilité de mourir d'un cancer donné au cours de sa vie	$\sim 18\%$
Probabilité d'obtenir un six sur un dé à six faces	$16.\bar{6}\%$
Probabilité de fausse couche	$\sim 15.3\%$
Seuil de p-valeur typique en sciences sociales et médicales (erreur de type I)	5%
Probabilité qu'un bébé naisse avec une anomalie congénitale	$\sim 2.63\%$
Probabilité de gagner à la roulette dans un casino	$\sim 2.6\%$
Probabilité de tirer un As de Pique d'un jeu de cartes	$\sim 1.92\%$
Probabilité d'accident vasculaire cérébral chez les personnes âgées de 35 à 40 ans	1.4-2.3%
Seuil de p-valeur typique en sciences de l'ingénieur (erreur de type I)	1%
Probabilité de mourir d'une crise cardiaque au cours de sa vie	$\sim 0.99\%$
Probabilité qu'un nouveau-né ait une anomalie génétique	$\sim 0.2\%$
Probabilité qu'un astéroïde de 10 km entre en collision avec la Terre au cours de votre vie	0.0000830%
Probabilité que vous mourriez demain en tant qu'humain « moyen »	0.000001%
Seuil de p-valeur typique en physique des particules (erreur de type I)	$\sim 0.000001\%$
Probabilité d'obtenir une quinte flush royale au poker	0.00000154%
Probabilité de gagner le jackpot Powerball	0.00000021%
Probabilité de décès pour une personne moyenne utilisant un vol commercial moyen	$\sim 3 \cdot 10^{-8}$
Probabilité de décès pour une personne moyenne traversant une route moyenne	$\sim 4 \cdot 10^{-9}$
Probabilité de décès pour une personne moyenne utilisant un ascenseur moyen	$\sim 1 \cdot 10^{-10}$
Probabilité d'effet tunnel dans le processus de désintégration du polonium	10^{-15}
Probabilité d'alpha-globine créée complètement par hasard sur la base d'acides aminés sur des planètes comme la Terre dans l'Univers observable	$\sim 10^{-4}$-10^{-10}
Probabilité d'alpha-globine créée complètement par hasard sur la base d'acides aminés sur la Terre uniquement	$\sim 10^{-25}$-10^{-31}
Probabilité de l'entropie réelle de notre Univers selon le calcul de Roger Penrose	$\sim 10^{-123}\%$
Probabilité de lancer cinquante dés à six faces et d'obtenir un résultat donné	$\sim 10^{-300}\%$
Probabilité qu'un singe réécrive *Hamlet* par hasard	$\sim 10^{-182,856}$
Probabilité de naître	$\sim 10^{-2,685,000}$
Probabilité qu'un humain traverse un mur par effet tunnel	$\sim 10^{-4.10^{30}}$
Probabilité que notre univers existe tel qu'il est	$\sim 10^{-272,000}$ -$10^{-10^{500}}$

TAB. 5.23 – Quelques valeurs de probabilités (et estimations) connues au début du 121e siècle

En cours de traduction de l'anglais

quote
5.6:474.#37

> *La Nature veut la mort de 5 de vos 7 enfants. Elle vous veut votre mort à vos 50 ans. Tout ce qui est meilleur que cela vous est apporté par la science et la technologie.*
>
> David Frum

En cours de traduction de l' anglais

5.6.2 Axiomatique de Kolmogorov

Dans le chapitre 2 de *A First Course in Probability*, Sheldon Ross nous met en garde contre la "définition" de la probabilité comme la proportion limite d'événements sur des échantillons/essais/expériences répétés : «*...il ne semble pas du tout être a priori évident que cela [fréquence limite] doit être le cas. Aussi,..., comment sait-on que si l'expérience est répétée..., on obtiendra à nouveau la même proportion limite... ? ... ne serait-il pas plus raisonnable de supposer un ensemble d'axiomes plus simples ... puis d'essayer de prouver [mathématiquement] qu'une telle fréquence limite constante existe dans un certain sens ... [en utilisant] la loi de grands nombres... Cette dernière approche est l'approche axiomatique moderne de la théorie des probabilités...*»

À première vue, cela semble tout à fait approprié ; cependant, sous ce formalisme, il apparaît que nous devons traiter la probabilité, P, comme une caractéristique éthérée et éphémère d'un événement A se rapportant à un essai particulier - c'est-à-dire une propension causale infalsifiable. Ensuite, la loi forte des grands nombres est un théorème à prouver rigoureusement[26] mathématiquement affirmant que la proportion limite d'événements sur des essais répétés converge vers cette même propension. C'est à dire :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}=\bar{X} \tag{5.6.44}$$

De ce point de vue, l'existence d'une proportion limite est alors une conséquence reposant sur des axiomes infalsifiables !

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

La loi faible des grands nombres stipule que pour un grand n spécifié, la moyenne $\bar{X}_n$ est susceptible d'être proche de μ (voir page 901 pour la preuve détaillée). Ainsi, il laisse ouverte la possibilité que $\left|\bar{X}_n-\mu\right|>\varepsilon$ se produise un nombre infini de fois, bien qu'à intervalles peu fréquents.

La loi forte des grands nombres montre que cela ne se produira presque certainement pas. Notez que cela n'implique pas qu'avec une probabilité 1, nous avons que pour tout $\varepsilon>0$ l'inégalité $\left|\bar{X}_n-\mu\right|<\varepsilon$ est vraie pour tout assez grand n, puisque la convergence n'est pas nécessairement uniforme sur l'ensemble où elle est vérifiée.

La probabilité d'un événement sera en quelque sorte le répondant de la notion de fréquence d'un phénomène aléatoire, en d'autres termes, à chaque événement nous allons attacher un nombre réel, appartenant à l'intervalle $[0,1]$, qui mesurera sa probabilité (chance) de réalisation. Les propriétés des fréquences que nous pouvons mettre en évidence lors d'épreuves diverses nous permettent de fixer les propriétés des probabilités.

Soit U un univers.

Définition (#5.6.105) : Nous disons que nous définissons une probabilité sur les événements de U si à tout événement A de U nous associons un nombre ou une mesure $P(A)$, appelée

[26] La preuve détaillée de la loi forte des grands nombres est en fait, en raison de sa difficulté, hors du cadre du présent livre. C'est aussi la raison pour laquelle la grande majorité des ingénieurs et des physiciens, astrophysiciens, cosmologistes, biologistes, chimistes, etc. ne l'étudient pas pendant leur cursus

"probabilité a priori de l'événement A" ou "probabilité marginale de A" et aussi brièvement appelée "crédence de A" (force de conviction, exprimée en pourcentage, d'un agent rationnel, à propos d'une hypothèse).

Voici les "axiomes de Kolmogorov" :

A1. Pour tout événement A :

$$\boxed{1 \geq P(A) \geq 0} \tag{5.6.45}$$

Ainsi, la probabilité de tout événement est un nombre réel compris entre 0 et 1 inclus (c'est du bon sens humain...).

A2. La probabilité de l'événement certain ou de l'ensemble (somme) des événements possibles est égale à 1 :

$$\boxed{P(U) = 1} \tag{5.6.46}$$

A3. Si $A \cap B = \varnothing$ sont deux événements incompatibles (disjoints), alors :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \tag{5.6.47}$$

la probabilité de la réunion ("ou") de deux événements incompatibles (ou mutuellement exclusifs) est donc égale à la somme de leurs probabilités (loi d'addition). Nous parlons alors de "probabilité disjointe".

Nous comprenons mieux que le troisième axiome exige que $A \cap B = \varnothing$ sinon quoi la somme de toutes les probabilités pourrait être supérieur à l'unité (imaginez à nouveau le diagramme sagittal des deux événement dans votre tête !).

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Les probabilités sont souvent communiquées sous forme de pourcentages. Faites donc très attention aux biais typiques des médias de masse (et pas seulement !) lorsque que ces derniers communiquent des informations en pourcentages. Nous vous avons déjà prévenu, avec des exemples, de ces dangers à la page **??**.

R2. Vous devez également faire très attention aux probabilités de correspondance ! L'affaire la plus connue s'appelle le "sophisme du procureur". Le piège sous-jacent peut être compris en comparant un échantillon d'ADN d'une scène de crime à une base de données de $20'000$ individus. Une correspondance est trouvée, un individus est alors accusé et lors de son procès, il est affirmé que la probabilité que deux profils ADN correspondent par hasard est seulement de 1 sur $10'000$ (argument du procureur !). Cela ne signifie pas que la probabilité que le suspect soit innocent est de 1 sur $10'000$ (ce que les jurés peuvent mal comprendre ...) ! étant donné que $20'000$ individus ont été testés, il y avait $20'000$ opportunités de trouver une correspondance par hasard (pour voir le calcul détaillé sur la manière d'obtenir la probabilité d'obtenir au moins une correspondance sur la base de l'approche fréquentiste, allez voir la page 648 ainsi que la page 493 pour l'approche bayésienne).

Soit A un événement, P la mesure de probabilité. A a une probabilité nulle si $P(A)=0$. A est impossible si $A=\varnothing$.

L'impossibilité implique une probabilité nulle, mais l'inverse est faux ! Considérez la vraie ligne $\mathbb{R}$; si vous sélectionnez au hasard un nombre x, la probabilité que $x=0$ soit 0, mais ce n'est pas impossible. En fait, la probabilité que x appartient à un ensemble dénombrable, par exemple $\mathbb{Q}$, est également 0.

Ce que nous voulons dire, c'est que $P(A)=0$ n'implique pas $A=\varnothing$, c'est-à-dire que la mesure de probabilité $=0$ ne vous aide pas à déterminer si un ensemble est vide ou non !

✍**Exemple :**

Supposons qu'une machine à écrire a 50 touches, et que le mot à taper est *banane*. Si les touches sont enfoncées de manière aléatoire et indépendante, cela signifie que chaque touche a la même chance d'être enfoncée. Ensuite, la probabilité que la première lettre tapée soit *b* est de $1/50$, et la probabilité que la deuxième lettre tapée soit *a* est également de $1/50$, et ainsi de suite. Par conséquent, la probabilité que les six premières lettres donne le mot *banane* soit :

$$\dfrac{1}{50}\cdot\dfrac{1}{50}\cdot\dfrac{1}{50}\cdot\dfrac{1}{50}\cdot\dfrac{1}{50}\cdot\dfrac{1}{50}=\left(\dfrac{1}{50}\right)^6=\dfrac{1}{15625000000} \tag{5.6.48}$$

moins d'un sur 15 milliards, mais pas zéro, d'où un résultat possible !

De ce qui précède, le risque de ne pas taper le mot *banane* dans un bloc donné de 6 lettres est de $1-(1/50)^6$. étant donné que chaque bloc est saisi indépendamment, la probabilité X_n de ne pas saisir le mot *banane* dans l'un des premiers blocs n de 6 lettres est alors de :

$$X_n=\left(1-\dfrac{1}{50^6}\right)^n \tag{5.6.49}$$

Lorsque n augmente, X_n devient plus petit. Pour un n valant un million, X_n vaut environ 0.9999, mais pour n valant dix milliards de dollars, X_n correspond à environ 0.53 et pour n valant cent milliards, il vaut environ 0.0017. Lorsque n approche l'infini, la probabilité X_n approche donc zéro ; c'est-à-dire qu'en rendant n assez grand, X_n peut être aussi petit que souhaité, et la probabilité de taper *banane* est proche de 100%.

Nous trouverons un exemple de ce type de probabilité disjointe dans la section d'Ingénierie Industrielle lors de l'étude de l'AMDEC (Analyse des modes de défaillance, de leurs effets et de leur criticité) pour les systèmes d'analyse de pannes à structure complexe.

Autrement dit sous forme plus générale si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements disjoints deux à deux (A_i et A_j ne peuvent pas se produire en même temps si equation) alors :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)} \tag{5.6.50}$$

Nous parlons alors de "σ-additivité" car si nous regardons de plus près les trois axiomes ci-dessus la mesure P forme une σ-algèbre (voir section Théorie de la Mesure page 2465).

À l'opposé, si les événements ne sont pas incompatibles (ils peuvent se superposer ou autrement dit : ils ont une probabilité jointe), nous avons alors comme probabilité qu'au plus un des deux ait lieu :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5.6.51)$$

Ceci signifie que la probabilité pour que l'un au plus des événements A ou B se réalise est égale à la somme des probabilités pour que se réalise A ou pour que se réalise B, moins la probabilité pour que A et B se réalisent simultanément (nous démontrerons plus loin que cela est simplement équivalent à la probabilité que les deux n'aient pas lieu en même temps !).

Un cas typique d'utilisation de la dernière relation est l'actuariat. Effectivement nous connaissons les probabilités de survie de deux individus pendant une période de temps imposée et parfois nous souhaiterions calculer qu'elle est la probabilité qu'au moins un des deux survive survive pendant la période donnée. Dès lors nous utilisons la relation ci-dessus (voir section de Dynamique des Populations page **??**).

✍**Exemples :**

E1. Considérons que la probabilité dans une région donnée d'avoir sur 50 ans un tremblement de terre majeur est de 5% et que d'avoir sur la même période une inondation majeure est 10% et que ces deux événements ne sont incompatibles... (c'est-à-dire que pendant les 50 ans, soit il y a le tremblement de terre soit l'inondation mais pas les deux). Nous souhaiterions savoir qu'elle est la probabilité qu'une centrale nucléaire rencontre tout au plus un des deux événements pendant cette même période. Nous avons alors la probabilité qui se calcule à partir de la relation précédente et qui donne alors 14.5%...

E2. Si nous lançons une poignée de deux dés, la probabilité d'obtenir un double est de :

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad (5.6.52)$$

Pourquoi ? Parce que tous les résultats possibles au lancement donnent $6^2 = 36$ et que le nombre de cas favorables est le double 1, le double 2, ... le double 6 est de 6 et donc $P = \frac{6}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Et donc s'ils étaient incompatibles nous aurions $A \cap B = \varnothing$ et nous retrouverions alors bien la probabilité disjointe :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (5.6.53)$$

Remarque

Indiquons que si la somme venait à faire plus de 100% c'est que de par l'axiome des probabilités les deux événements ne sont en réalité pas incompatibles ! ! ! Ainsi, en reprenant l'exemple d'avant si nous avons 660% de probabilité pour le tremble-

ment de terre et 70% de probabilité pour l'indondation alors cela veut dire qu'il y a $(60\% + 70\%) - 100\% = 30\%$ de probabilités que toutefois les deux aient lieux "en même temps" pendant la période de 50 ans (et il y a donc une faible probabilité pour qu'ils aient lieu "exactement" au même moment).

Une conséquence immédiate des axiomes (A2) et (A3) est la relation entre les probabilités d'un événement A et son complémentaire, noté $\bar{A}$ (ou plus rarement conformément à la notation utilisée dans le chapitre de Théorie De La Démonstration le complémentaire peut être noté $\neg A$) :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{5.6.54}$$

Soit U un univers comportant un nombre fini n d'issues possibles :

$$U = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \tag{5.6.55}$$

où les événements :

$$I_1 = \{i_1\}, I_2 = \{i_2\}, I_3 = \{i_3\}, \ldots, I_n = \{i_n\} \tag{5.6.56}$$

sont appelés "événements élémentaires". Lorsque ces événements ont même probabilité, nous disons qu'ils sont "équiprobables". Dans ce cas, il est très facile de calculer leur probabilité. En effet, ces événements étant par définition incompatibles entre eux à ce niveau de notre discours, nous avons en vertu de l'axiome 3 des probabilités :

$$P(I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n) = P(I_1) + P(I_2) + \ldots + P(I_n) \tag{5.6.57}$$

mais puisque :

$$P(I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n) = P(U) = 1 \tag{5.6.58}$$

et que les probabilités du membre de droite sont par hypothèse équiprobables, nous avons :

$$P(I_1) = P(I_2) = \ldots = P(I_n) = \frac{1}{n} \tag{5.6.59}$$

Définition (#5.6.106) : Si A et B ne sont pas incompatibles mais qu'ils sont indépendants, nous savons que par leur compatibilité $A \cap B = \varnothing$, alors (très important en statistiques !) :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{5.6.60}$$

la probabilité de l'intersection (opérateur "et") de deux événements indépendants est égale au produit de leurs probabilités (loi de multiplication). Nous parlons alors de "probabilité conjointe" (c'est le cas le plus fréquent) ou simplement de "probabilité jointe". Si les deux probabilités sont définies par des lois de distributions, nours parlons alors bien évidemment de "distribution conjointe".

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Considérons que la probabilité dans une région donnée d'avoir sur 50 ans un tremblement de terre majeur est de 5% et que d'avoir sur la même période une inondation majeure est 10%. De plus supposons que ces deux événements ne soient pas incompatibles (en d'autres termes ils sont compatibles). Nous allons nous intéresser à leur indépendance. Ainsi, nous souhaiterions savoir qu'elle est la probabilité qu'une centrale nucléaire rencontre les deux événements en même temps, à quel que moment que ce soit, pendant cette même période. Nous avons alors la probabilité qui se calcule à partir de la relation précédente et qui donne alors 0.05%...

Autrement dit sous forme plus générale, les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants si la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{5.6.61}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Attention donc à ne pas confondre "indépendants" et "incompatibles" !

Donc pour résumer jusqu'ici nous avons donc :

Type	Expression
2 événements incompatibles (disjoints)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2 événements non-incompatibles (joints) non-mutually exclusive events	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2 événements non-incompatibles mais indépendents	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

TAB. 5.24 – **Cas classiques de probabilités**

Grâce à la définition précédente, nous pouvons démontrer que la probabilité pour que soit A ou soit B ait lieu (donc au moins un des deux mais pas les deux en même temps), est simplement égale à... la probabilité que les deux n'aient pas lieu en même temps :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \\ &= 1 - P(1 - A)P(1 - B) \end{aligned} \tag{5.6.62}$$

Nous pouvons aussi à l'aide de cette dernière définition déterminer la probabilité qu'un seul des deux événements ait lieu :

$$\begin{aligned} P(A \oplus B) &= P(A)P(\bar{B}) + P(B)P(\bar{A}) \\ &= P(A)(1 - P(B)) + P(B)(1 - P(A)) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \end{aligned} \tag{5.6.63}$$

✍**Exemple :**

Considérons que la probabilité dans une région donnée d'avoir sur 50 ans un tremblement de terre majeur est de 5% et que d'avoir sur la même période une inondation majeure est 10%. Nous souhaiterions savoir qu'elle est la probabilité qu'une centrale nucléaire rencontre exactement un de ces deux événements pendant la même période en considérant qu'ils ne peuvent avoir lieu en même temps. Nous avons alors la probabilité qui se calcule à partir de la relation précédente et qui donne alors 14%...

Il y a deux domaines courants dans l'industrie dans lequel sont appliquées fréquemment les quatre relations suivantes (en anglais) :

$$\begin{aligned} \text{AND} &= P(A)\cdot P(B)\\ \text{OR COMPATIBLE} &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ \text{OR INCOMPATIBLE} &= P(A)+P(B)\\ \text{XOR} &= P(A)+P(B)-2P(A\cap B) \end{aligned} \tag{5.6.64}$$

Il s'agit de "l'analyse par arbres d'erreurs" ou "analyse par arbres probabilistes" qui est utilisée pour analyser les raisons possibles de défaillance d'un système quel qu'il soit (industriel, administratif ou autre) et la modélication de processus dite "event driven process chain" (EPC).

Remarque

Les Data scientists utilisent également certains des résultats ci-dessus, en particulier lorsqu'ils travaillent avec des proportions venant de sondages ou de problèmes de classification (voir section de Méthodes Numériques page ??).

Pour clore cette partie du chapitre considérons la figure suivante qui montre les diagrammes de Venn (voir section Théorie des Ensembles page 376) pour les 16 événements (y compris l'événement impossible) qui peuvent être décrits en termes de deux événements donnés A et B. Dans chaque cas, l'événement est représenté par la zone rouge :

En cours de traduction de l'anglais

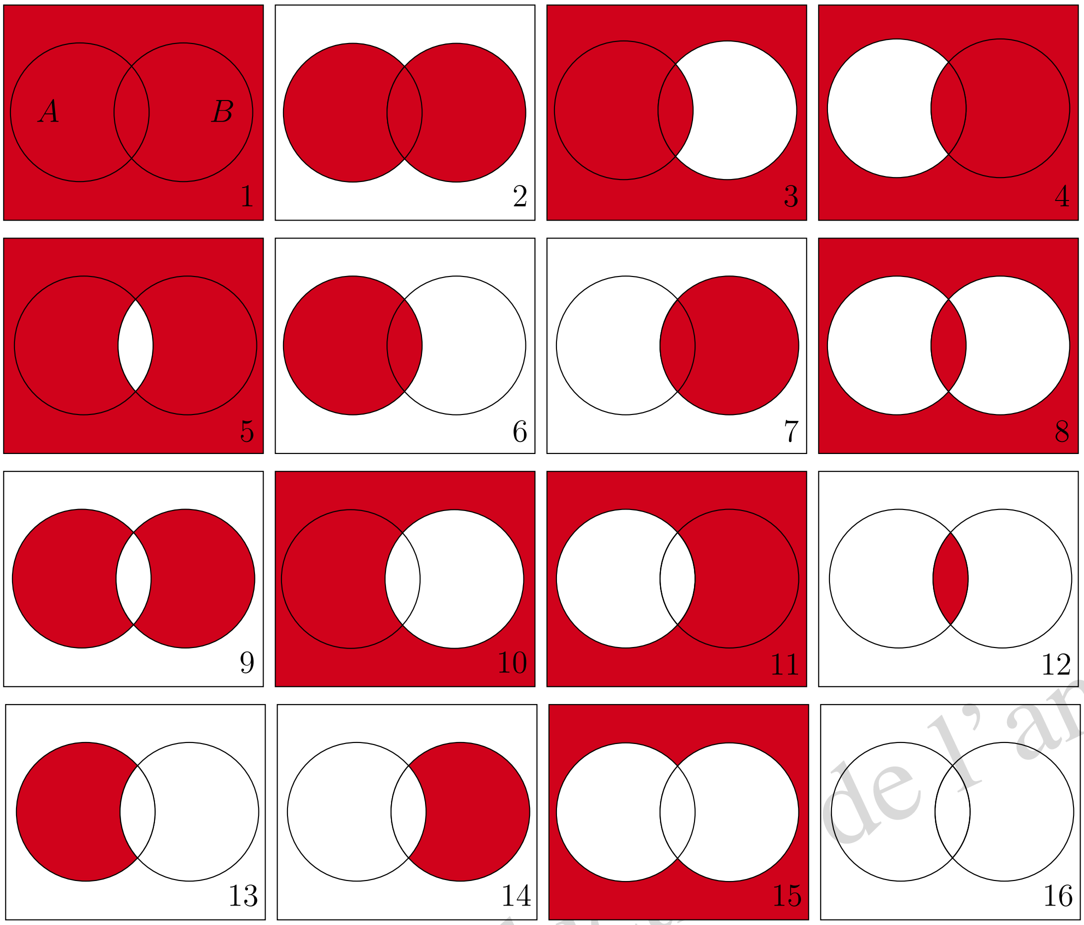


FIG. 5.83 – **Diagrammes de Venn possibles pour deux événements**

En cours de traduction de l'anglais

Considérons la situation où A représente un tremblement de terre et B représente une inondation majeure et U l'univers de tous les événements dramatiques pour une centrale nucléaire. Nous considérons que les deux événements sont indépendants. Ensuite, chacune des 16 combinaisons d'événements peuvent être décrites comme suit, soit mathématiquement ou verbalement :

1. Un tremblement de terre peut se produire ou une inondation ou rien ou l'ensemble à la fois ou tout autre événement (bref n'importe quel événement peut se produire).

$$P(U) = 1 = 100\% \tag{5.6.65}$$

2. $A \cup B$: Tout événement incluant un tremblement de terre, une inondation ou les deux en même temps peut se produire.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \tag{5.6.66}$$

3. $A \cup B^c$: Tout événement incluant un tremblement de terre avec ou sans une inondation peut se produire à l'exception des événements incluant une inondation sans tremblement de terre.

$$P(A \cup B^c) = P(U) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A)P(B) \tag{5.6.67}$$

4. $A^c \cup B$: Tout événement incluant une inondation avec ou sans tremblement de terre peut se produire à l'exception des événements incluant un tremblement de terre sans inondation.
$$P(A^c \cup B) = P(U) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - P(A) + P(A)P(B) \quad (5.6.68)$$

5. $A^c \cup B^c$: Tout événement peut se produire sauf ceux incluant un tremblement de terre accompagné d'une inondation.
$$P(A^c \cup B^c) = P(U) - P(A \cap B) = 1 - P(A)P(B) \quad (5.6.69)$$

6. A : Tout événement avec un tremblement de terre peut se produire (cela inclut donc les événements associant un tremblement de terre et une inondation).
$$P(A) = P(A) \quad (5.6.70)$$

7. B : Tout événement avec une inondation peut se produire (cela inclut donc les événements associant une inondation et un tremblement de terre).
$$P(B) = P(B) \quad (5.6.71)$$

8. $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$: Tout événement peut se produire sauf ceux incluant un tremblement de terre sans inondation ou ceux incluant une inondation sans tremblement de terre.
$$\begin{aligned} P((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)) &= P(U) - P(A) - P(B) + 2P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + 2P(A)P(B) \end{aligned} \quad (5.6.72)$$

9. $(A \cap B^c) \cup (A^c \cup B)$: Tout événement incluant un tremblement de terre sans inondation ou une inondation sans tremblement de terre peut avoir lieu.
$$P((A \cap B^c) \cup (A^c \cup B)) = P(A) + P(B) + 2P(A \cap B) \quad (5.6.73)$$

10. B^c : Tout événement excepté ceux associés à une inondation peuvent avoir lieu.
$$P(B^c) = P(U) - P(B) = 1 - P(B) \quad (5.6.74)$$

11. A^c : Tout événement excepté ceux associés à un tremblement de terre peuvent avoir lieu.
$$P(A^c) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \quad (5.6.75)$$

12. $A \cap B$: Tout événement associant un tremblement de terre et une inondation peut avoir lieu.
$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (5.6.76)$$

13. $A \cap B^c$: Tout événement avec un tremblement de terre sans inondation peut avoir lieu.
$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) \quad (5.6.77)$$

14. $A^c \cap B$: Tout événement avec une inondation sans tremblement de terre peut avoir lieu.
$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A)P(B) \quad (5.6.78)$$

15. $A^c \cap B^c$: Tout événement peut avoir lieu excepté ceux incluant un tremblement de terre et/ou une inondation.
$$P(A^c \cap B^c) = P(U) - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) - P(A)P(B) \quad (5.6.79)$$

16. $A \cap A^c$ or $B \cap B^c$: événement impossible.
$$P(A \cap A^c) = P(B \cap B^c) = P(\varnothing) = 0 \quad (5.6.80)$$

En cours de traduction de l'anglais

5.6.3 Probabilités conditionnelles

Que pouvons-nous déduire sur la probabilité d'un évènement B sachant qu'un évènement A est réalisé sachant qu'il existe une lien entre A et B ? En d'autres termes, s'il existe bien un lien entre A et B, la réalisation de A va modifier notre connaissance sur B et nous voulons savoir s'il est possible de définir la probabilité d'un événement conditionnellement (relativement) à un autre événement.

Ce type de probabilité est appelée "probabilité conditionnelle" ou "probabilité à posteriori" de B sachant A, et se note dans le cadre de l'étude des probabilités conditionnelles :

$$P(B/A) \tag{5.6.81}$$

et souvent dans la pratique pour éviter la confusion avec une possible division au niveau de la notation :

$$P(B \mid A) \tag{5.6.82}$$

et nous trouvons parfois chez les américains la notation (malheureuse...) :

$$P(B \wedge A) \tag{5.6.83}$$

ou encore :

$$P_B(A) \tag{5.6.84}$$

Nous avons aussi le cas :

$$P(A/B) \tag{5.6.85}$$

qui est appelé "fonction de vraisemblance de A" ou encore "probabilité a priori de A sachant B".

Historiquement, le premier mathématicien à avoir utilisé correctement la notion de probabilité conditionnelle semble être Thomas Bayes (1702-1761). Aussi parlons-nous souvent de "Bayes" dès que des probabilités conditionnelles sont en jeu : "formule de Bayes", "statistique bayésienne", etc.

La notion de probabilité conditionnelle que nous allons introduire est beaucoup moins simple qu'elle ne paraît a priori et les problèmes de conditionnement sont une source inépuisable d'erreurs en tout genre (il existe de fameux paradoxes sur le sujet).

Commençons d'abord par un exemple simpliste : Supposons que nous ayons deux dés. Imaginons maintenant que nous ayons lancé seulement le premier dé. Nous voulons savoir quelle est la probabilité qu'en lançant le second dé, la somme des deux chiffres vaille une certaine valeur minimale. Ainsi, la probabilité d'obtenir cette valeur minimale fixée sachant la valeur du premier dé est totalement différente de la probabilité d'obtenir cette même valeur minimale en lançant les deux dés en même temps. Comment calculer cette nouvelle probabilité ?

Formalisons la démarche ! Après le lancer du premier dé, nous avons :

$$A = \{\text{le résultat du premer lancé est...}\} \tag{5.6.86}$$

En cours de traduction de l'anglais

Soit l'hypothèse que $B \subset A$, nous pressentons que $P(B/A)$ doit être proportionnel à $P(B)$, la constante de proportionnalité étant déterminée par la normalisation :

$$P(A/A) = 1 \tag{5.6.87}$$

Soit maintenant $B \subset A^c$ (B est inclus dans le complémentaire de A donc les événements sont incompatibles). Il est relativement intuitif.... que sous hypothèse précédente d'incompatibilité nous ayons la probabilité conditionnelle :

$$P(B/A) = 0 \tag{5.6.88}$$

Ceci nous mène aux définitions suivantes des probabilités à posteriori et respectivement à priori :

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \quad \text{et} \quad \boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \tag{5.6.89}$$

Ainsi, le fait de savoir que A est réalisé réduit l'ensemble des résultats possibles de U de B. À partir de là, seules les éventualités de ont une importance. La probabilité de A sachant B inversement (par symétrie) doit donc être proportionnelle à $P(A \cap B)$!

Le coefficient de proportionnalité qui est le dénominateur permet d'assurer l'événement certain. Effectivement, si les deux événements A et B sont indépendants (pensez à l'histoire du chat noir et de l'échelle par exemple), nous avons donc :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{5.6.90}$$

et nous voyons alors $P(B/A)$ qui vaut $P(B)$ et donc l'événement A n'apporte aucune information complémentaire sur B et réciproquement ! ! Donc en d'autres termes, si A et B sont indépendants nous avons :

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{et} \quad P(A/B) = P(A) \tag{5.6.91}$$

Une autre façon assez intuitive pour voir les choses est de se représenter la mesure de probabilité P comme une mesure d'aires de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$.

Effectivement, si A et B sont deux sous-ensembles d'aires respectives $P(A)$ et $P(B)$ alors à la question de savoir qu'elle est la probabilité qu'un point du plan appartienne à B sachant qu'il appartient à A il est assez évident de répondre que cette probabilité est donnée par :

$$\frac{\text{Surface}(A) \cap \text{Surface}(B)}{\text{Surface}(A)} \tag{5.6.92}$$

Indiquons aussi que la définition des probabilités conditionnelles s'utilise souvent sous la forme suivante :

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A) \tag{5.6.93}$$

appelée "formule des probabilités composées" or "règle produit". Cela est noté d'un certain nombre de manières différentes dans la pratique :

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) \qquad \text{or} \qquad P(A, B) = P(A|B)P(B) \tag{5.6.94}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, la probabilité à posteriori de B sachant A peut donc aussi s'écrire sous la forme :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} \tag{5.6.95}$$

La manière dont cette formule met à jour l'hypothèse de probabilité, B, à la lumière d'un ensemble de données, A, est appelée "interprétation diachronique". "Diachronique" signifie que quelque chose se passe dans le temps, dans ce cas la probabilité de l'hypothèse change, au fil du temps, à mesure que nous voyons de nouvelles données.

Dans cette interprétation, les différents termes, ont différents noms :

- $P(B)$ est la probabilité de l'hypothèse avant de voir les données et nommée comme nous le savons déjà la "probabilité a priori[27]".
- $P(B/A)$ est ce que nous voulons calculer, la probabilité de l'hypothèse après avoir vu les données, nommées comme nous le savons déjà, la "probabilité a posteriori.
- $P(A/B)$ est la probabilité des données sous l'hypothèse, appelée la "vraisemblance".
- $P(A)$ est la probabilité que des données sous l'hypothèse et est nommée "constante de normalisation".

En cours de traduction de l'anglais

[27]D'où vient cette probabilité a priori est un peu la question à un million dollars ... En principe, le statisticien bayésien est censé choisir un a priori qui représente son information de base. Ce sera pour le moins difficile dans les cas multi-dimensionnels. De plus, les critiques diront que les avis antérieurs ne doivent pas être inclus dans une expérience scientifique car justement ce n'est pas très scientifique...

✍**Exemples :**

E1. Supposons une maladie comme la méningite. La probabilité à priori de l'avoir sera notée $P(M) = 0.001$ (chiffre arbitraire pour l'exemple) et l'espérance de cette maladie comme le mal de tête sera noté $P(S) = 0.1$. Supposons connue la vraisemblance d'avoir mal à la tête si nous avons une méningite :

$$P(S/M) = 0.9 \tag{5.6.96}$$

La formule des probabilités composées donne alors la probabilité a posteriori d'avoir une méningite si nous avons mal à la tête ! :

$$P(M/S) = \frac{P(S/M)P(M)}{P(S)} = 0.09 \tag{5.6.97}$$

E2. Dans un jeu télévisé (cet exemple s'appelle le "paradoxe de Montey Hall"), un candidat doit sélectionner une porte parmi trois. Derrière deux portes se trouve une chèvre (un prix indésirable). Derrière une des portes il y a une voiture. Au début, le candidat tente de deviner la porte avec la voiture. Ensuite, le modérateur Monty Hall ouvre l'une des portes avec une chèvre qui n'est pas la porte choisie par le candidat. Il reste donc deux portes, l'une d'elles étant celle choisie par le candidat. Monty demande au candidat s'il souhaite changer d'avis. Il est libre de choisir l'autre porte.

En général, vaut-il mieux changer d'avis, s'en tenir à la première sélection ou est-ce important ?

Hypothèse (un des trois cas) : le candidat choisit la porte #1.

D_1 Voiture derrière la porte #1
D_2 Voiture derrière la porte #2
D_3 Voiture derrière la porte #3

Nous définissons les probabilités correspondantes :

$$P(D_1) = \frac{1}{3} \qquad P(D_2) = \frac{1}{3} \qquad P(D_3) = \frac{1}{3} \tag{5.6.98}$$

Nous devons d'une certaine manière modéliser le comportement de l'animateur (Monty). Nous introduisons donc une hypothèse H selon laquelle il ouvre la porte #3. La probabilité qu'il sélectionne la porte #3 en faveur de la porte #2 est de $\frac{1}{2}$, car #1 est déjà pris par le candidat :

$$P(H)=\frac{1}{2} \tag{5.6.99}$$

De plus :

$$P(H/D_1)=\frac{1}{2} \qquad P(H/D_2)=1 \qquad P(H/D_3)=0 \tag{5.6.100}$$

Donc, la probabilité qu'il ouvre la porte #3 sous la condition que la porte #1 contienne la voiture est $\frac{1}{2}$. La probabilité est de 1 si la voiture est derrière la porte #2. Et si la voiture est derrière la porte #3, le modérateur ne montrera jamais la porte #3.

Nous pouvons repérer une certaine asymétrie ici. Ce point est évidemment responsable de la raison pour laquelle une intuition telle que *cela n'a pas d'importance* peut être fausse !

Nous allons donc utiliser le théorème de Bayes :

$$\underbrace{P(A/B)}_{\text{probabilité a posteriori}}=\frac{\overbrace{P(B/A)}^{\text{Vraisemblance}}\cdot\overbrace{P(A)}^{\text{propabilité a priori}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{constante de normalisation}}} \tag{5.6.101}$$

La question importante est la suivante : dans l'hypothèse où nous avons sélectionné la porte #1 (notre première hypothèse) et que Monty ouvre la porte #3 (notre hypothèse ou notre espérance), quelle est la probabilité que la voiture soit derrière la porte #1 par rapport à porte #2 ?

$$P(D_1|H)=\frac{P(H|D_1)\cdot P(D_1)}{P(H)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3} \tag{5.6.102}$$

$$P(D_2|H)=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3} \tag{5.6.103}$$

Donc, apparemment, la probabilité que la porte #2 contienne la voiture est plus élevée que pour la porte #1. Ou en d'autres termes : dans ce cas, le candidat devrait préférer changer d'avis !

Nous devons maintenant évaluer cela pour d'autres hypothèses (le modérateur ouvre la porte #2) et d'autres sélections du candidat (porte #2 et porte #3). L'approche est la même et n'est pas réalisée ici. Mais la conclusion reste de toute façon la même dans tous les cas : être ouvert au changement d'esprit vous fera gagner la voiture de façon probabiliste !

Pour en revenir à la théorie, notons que nous avons aussi :

$$\begin{aligned}P(A) &= P\left((B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_i) \cap A\right)\\ &= P\left((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_i \cap A)\right)\\ &= P\left((B_1 \cap A) + (B_2 \cap A) + \ldots + (B_i \cap A)\right)\\ &= P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)\end{aligned} \tag{5.6.104}$$

Nous pouvons donc connaître la probabilité de l'événement A connaissant les probabilités $P(B_i)$ élémentaires de ses causes et les probabilités conditionnelles de A pour chaque B_i :

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)} \tag{5.6.105}$$

qui est appelée la "formule des probabilités totales" ou "théorème des probabilités totales" (relation qui est également très utile lorsque nous ne connaissons pas la valeur de $P(A)$ ou ne pouvons pas l'estimer directement et facilement). Mais aussi, pour tout j, nous avons le corollaire suivant en utilisant les résultats précédents qui nous donne suite à un événement A, la probabilité que ce soit la cause B_i qui l'ai produit :

$$\boxed{P(B_j/A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{\displaystyle\sum_i P(A/B_i)P(B_i)}} \tag{5.6.106}$$

qui est la forme générale de la "formule de Bayes" ou "théorème de Bayes" que nous utiliserons un tout petit peu en Mécanique Statistique et dans le cadre de l'étude de la théorie des files d'attentes (voir section de Gestion Quantitative page ??). Il faut savoir que les implications de ce théorème sont cependant considérables dans le quotidien, dans la médecine, dans l'industrie et dans le domaine du Data Mining informatique.

Nous retrouvons souvent dans la littérature de nombreux exemples d'applications de la relation précédente avec uniquement deux issues possibles B relativement à l'événement A. Dès lors nous avons la formule de Bayes écrite sous la forme suivante pour chacune des issues :

$$\begin{aligned}P(B_1/A) &= \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2)} = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B}_1)P(\bar{B}_1)}\\ P(B_2/A) &= \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2)} = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/\bar{B}_2)P(\bar{B}_2) + P(A/B_2)P(B_2)}\end{aligned} \tag{5.6.107}$$

et remarquons que dans ce cas particulier (des issues binaires) :

$$\begin{aligned}P(B_1/A) + P(B_2/A) &= P(B_1/A) + P(\bar{B}_1/A)\\ &= \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B})P(\bar{B})} + \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/\bar{B}_2)P(\bar{B}_2) + P(A/B_2)P(B_2)}\\ &= \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B})P(\bar{B})} + \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B}_1)P(\bar{B}_1)}\\ &= \frac{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B}_1)P(\bar{B}_1)}\\ &= \frac{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B}_1)P(\bar{B}_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B}_1)P(\bar{B}_1)} = 1\end{aligned} \tag{5.6.108}$$

En cours de traduction de l'anglais

ce qui est un résultat intuitif.

Pour les événements binaires, nous avons aussi (en revenant au théorème des probabilités totales vu plus haut) :

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)\\ &= P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2)\\ &= P(A/B_1)P(B_1) + P(A/\bar{B}_1)P(\bar{B}_1)\end{aligned} \tag{5.6.109}$$

Ou dans le cas du "rapport de cotes" :

$$\frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)} = \frac{\dfrac{P(B/A)P(A)}{P(B)}}{\dfrac{P(B/\bar{A})P(\bar{A})}{P(B)}} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/\bar{A})}\frac{P(A)}{P(\bar{A})} \tag{5.6.110}$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Une maladie affecte 10 personnes sur $10'000$ (soit $0.1\% = 0.001$). Un test a été développé qui a 5% de faux positifs (personnes non atteint pour lequel le test dit qu'ils sont atteintes) mais qui détecte toujours cette maladie si une personne est atteinte. Quelle est la probabilité qu'une personne aléatoire pour laquelle le test donne un résultat positif a vraiment cette maladie ?

Il y a donc sur $10'000$ personnes, 500 qui seront des faux positifs et nous savons a posteriori que 10 personnes ont réellement la maladie. Alors la probabilité que quelqu'un qui a un résultat de test positif soit vraiment malade est :

$$\begin{aligned}
P(M) &= 0.001\\
P(\bar{M}) &= 0.999\\
P(T/M) &= 1\\
P(T/\bar{M}) &= 0.05\\
P(T) &= P(T/M)P(M)+P(T/\bar{M})P(\bar{M}) = 0.05095\\
P(M/T) &= \frac{P(T/M)P(M)}{P(T)} = \frac{1\cdot 0.001}{0.05095} = 0.19627
\end{aligned} \tag{5.6.111}$$

Ce résultat est souvent contre-intuitif et même scandaleux. Il met aussi en évidence pourquoi les tests de diagnostiques doivent être extrêmement fiables !

E2. Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 100 et 200 pièces. M_1 produit 5% de pièces défectueuses et M_2 en produit 6% (probabilités a posteriori). Quelle est la probabilité a priori pour qu'un objet défectueux ait été fabriqué par la machine M_1 ?

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
P(M_j/A) &= \frac{P(A/M_j)P(M_j)}{\sum\limits_i P(A/M_i)P(M_i)} = \frac{P(A/M_1)P(M_1)}{P(A/M_1)P(M_1)+P(A/M_2)P(M_2)}\\
&= \frac{\frac{5}{100}\frac{300}{100}}{\frac{5}{100}\frac{100}{300}+\frac{6}{100}\frac{200}{300}} = \frac{5\%\frac{1}{3}}{5\%\frac{1}{3}+6\%\frac{2}{3}} \cong 39\%
\end{aligned} \tag{5.6.112}$$

E3. D'un lot de 10 pièces dont le 30% est défectueux, nous prélevons sans remise un échantillon de taille 3 sans remise. Quelle est la probabilité que la seconde pièce soit bonne (quelle que soit la première) ?

Nous avons :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{2} P(A/B_i)P(B_i)\\
&= P(A/B_1)P(B_1)+P(A/B_2)P(B_2) = \frac{7}{9}\frac{3}{10}+\frac{6}{9}\frac{7}{10} = 70\%
\end{aligned} \tag{5.6.113}$$

E4. Terminons avec un exemple important dans les entreprises où les employés doivent plusieurs fois dans leur carrière passer des examens sous forme de questionnaire à choix multiples (Q.C.M.). Si un employé répond à une question de deux choses l'une : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit p la probabilité que l'employé connaisse la réponse et donc $1-p$ celle qu'il la devine. Nous admettons que l'employé qui devine répondra correctement avec une probabilité $1/m$ où m est le nombre de réponses proposées. Quelle est alors la probabilité a priori qu'un employé connaisse (réellement) la réponse à une question à 5 choix s'il y a répondu correctement ?

Soient B et A respectivement les événements "l'employé connaît la réponse" et "l'employé répond correctement à la question". Alors la probabilité à priori qu'un employé connaisse (réellement) la réponse à une question qu'il a répondu correctement est :

$$P(B/A)=\frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B)+P(A/\bar{B})P(\bar{B})}=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\dfrac{1}{m}(1-p)}=\frac{5}{6}\cong 83\% \tag{5.6.114}$$

E5. Supposons qu'un médecin pense que la cote qu'un patient soit atteint d'une certaine maladie est de $2/1$ (2 contre 1). Il commande deux tests indépendants. Soit H l'événement où le patient a la maladie et E_1 et E_2 le cas où les tests sont positifs. Supposons que le premier test ait une probabilité de 0.1 d'un faux positif et une probabilité de 0.05 d'un faux négatif. Le deuxième test a des probabilités de faux positif et de faux négatif de 0.05 et 0.08 respectivement. Si les deux tests sont positifs, quelle est la probabilité postérieure que le patient soit atteint de la maladie ?

En supposant que E_1 et E_2 soient conditionnellement indépendants de H et de $\bar{H}$, nous travaillons d'abord en termes de cotes, puis convertissons en probabilité :

$$\frac{P(H/E_1E_2)}{P(\bar{H}/E_1E_2)}=\frac{P(H)}{P(\bar{H})}\frac{P(E_1E_2/H)}{P(E_1E_2/\bar{H})}=\frac{P(H)}{P(\bar{H})}\frac{P(E_1/H)P(E_2/H)}{P(E_1/\bar{H})P(E_2/\bar{H})} \tag{5.6.115}$$

Les données numériques sont :

$$\frac{P(H)}{P(\bar{H})}=2, P(E_1/H)=0.95, P(E_1/\bar{H})=0.1, P(E_2/H)=0.92, P(E_2/\bar{H})=0.05 \tag{5.6.116}$$

On substitue les valeurs pour obtenir :

$$\frac{P(H/E_1E_2)}{P(\bar{H}/E_1E_2)}=2\cdot\frac{0.95\cdot 0.92}{0.10\cdot 0.05}=349.6 \tag{5.6.117}$$

De manière similaire, nous obtenons :

$$P(H/E_1E_2)=99.71\% \tag{5.6.118}$$

E6. Revenons encore sur le paradoxe du procureur dans le dossier de l'ADN (voir page précédente ci-dessus 476). Considérons que le profil ADN d'un suspect donne lieu à un trait rare, X, tel que :

$$P(X\text{se produit dans la population générale}) = \frac{1}{10000} \tag{5.6.119}$$

qui équivaut à :

$$P(\text{Correspondance}/\text{Innocent}) = P(\text{M}/\text{I}) = \frac{1}{10000} \tag{5.6.120}$$

Ceci n'a aucun intérêt ! Nous voulons (G est pour "potentiel coupable") :

$$P(\text{I}/\text{M}) = \frac{P(\text{M}/\text{I})P(\text{I})}{P(\text{M}/\text{I})P(\text{I}) + P(\text{M}/\text{G})P(\text{G})} = \frac{\frac{1}{10000}\frac{19999}{20000}}{\frac{1}{10000}\frac{19999}{20000} + 1 \cdot \frac{1}{20000}} \cong 66.67\% \tag{5.6.121}$$

Attention ! Soyez prudent lors de la lecture de livres contenant des calculs de probabilités surtout lorsque les auteurs sont des croyants et encore plus lorsque les probabilités impliquent le théorème de Bayes. Le physicien croyant Stephen Unwin, tel que présenté dans son livre de 2003, calcule la probabilité que son Dieu existe est de 67%. Il commence son calcul en supposant que la probabilité a priori de l'existence de son Dieu, avant que toute évidence ne soit considérée, soit 50% ... Comment le sait-il alors qu'il y a plusieurs milliers de dieux très différents recensés sur Terre ? Comparons le calcul d'Unwin avec celui non publié du physicien non-croyant Larry Ford. Ford a utilisé toutes les mêmes équations que Unwin, ne différant que par les nombres insérés dans le calcul. Il a fait valoir que la probabilité antérieure du Dieu d'Unwin doit être comparée à celle d'autres entités non observées telles que Big Foot ou le monstre du Loch Ness, qu'il a pris pour être un sur un million (10^{-6}). Avec son ensemble de nombres, la conclusion de Ford est que la probabilité que le Dieu d'Unwin existe est de un sur cent mille milliards (10^{-17}).

L'analyse bayésienne fournit également un outil puissant pour formaliser le raisonnement dans l'incertitude et les exemples que nous avons montrés ci-dessus illustrent à quel point cet outil peut être difficile à utiliser !

Enfin, pour une utilisation future dans la section d'Informatique Théorique, pour la technique de Data Mining appelée "classification bayésienne naïve binomiale", nous aurons besoin d'un dernier résultat !

Rappelons-nous la règle de produit vue plus haut :

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) \tag{5.6.122}$$

Nous pouvons étendre cela à trois variables. En effet, considérons :

$$P(A \cap D) = P(A/D)P(D) \tag{5.6.123}$$

et posons $D = B \cap C$ alors :

$$P(A \cap (B \cap C)) = P(A/(B \cap C))P(B \cap C) \quad (5.6.124)$$

Mais comme règle de produit nous donne aussi :

$$P(B \cap C) = P(B/C)P(C) \quad (5.6.125)$$

Alors :

$$P(A \cap (B \cap C)) = P(A/(B \cap C))P(B/C)P(C) \quad (5.6.126)$$

aussi parfois noté :

$$P(A, B, C) = P(A|B, C)P(B|C)P(C) \quad (5.6.127)$$

et en général pour n variables :

$$\boxed{P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1|A_2, \ldots, A_n)P(A_2|A_3, \ldots, A_n)P(A_{n-1}|A_n)P(A_n)} \quad (5.6.128)$$

En général, on parle de "règle en chaîne".

Cette relation est particulièrement importante pour les réseaux bayésiens. Elle fournit un moyen de calculer de manière complète distribution de probabilité conjointe ; Dans les réseaux bayésiens, de nombreuses variables A_i seront indépendantes de manière conditionnelle, ce qui signifie que la formule peut être simplifiée comme indiqué ici.

Maintenant, le lecteur doit garder quelque chose à l'esprit : tout résultat de probabilité qui est vrai pour une probabilité inconditionnelle reste vrai si tout est conditionné par un événement !

Nous savons que par définition :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (5.6.129)$$

et donc si on conditionne tout sur C s'étant produit, nous obtenons que :

$$P(A/(B \cap C)) = \frac{P((A \cap B)/C)}{P(B/C)} \quad (5.6.130)$$

Dès lors :

$$P((A \cap B)/C) = P(A/(B \cap C))P(B \cap C) \quad (5.6.131)$$

aussi parfois (mal) noté :

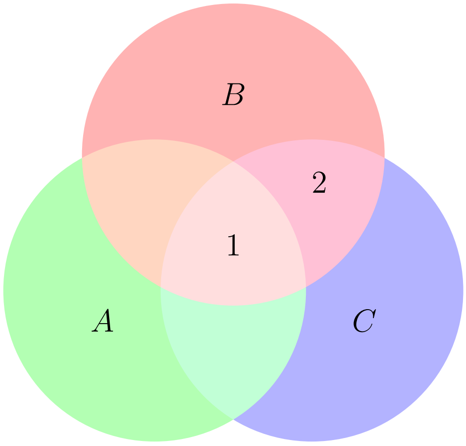
$$P(A, B/C) = P(A/B, C)P(B/C) \quad (5.6.132)$$

ou :

$$P(A, B|C) = P(A|B, C)P(B|C) \quad (5.6.133)$$

Intuitivement, pour obtenir ce résultat, il peut être utile de dessiner le diagramme de Venn correspondant (presque comme toujours) :

En cours de traduction de l'anglais



Nous avons alors :

$$P(A\cap B/C)=\frac{"1"}{"C"},\quad P(B/C)=\frac{"1"+"2"}{"C"},\quad P(A/B\cap C)=\frac{"1"}{"1"+"2"} \qquad (5.6.134)$$

puis faites simplement les multiplications pour voir que tout va bien.

5.6.3.1 Espérance et Variance conditionnelle

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, passons à la version continue de la probabilité conditionnelle en abordant le sujet directement avec un exemple particulier (la théorie avec le cas général étant indigeste) infiniment important dans le domaine de statistiques sociales et de la finance quantitative. Cependant, ce choix (de l'étude d'un cas particulier) implique que le lecteur ait lu au préalable le chapitre de Statistiques pour y étudier les fonctions de distributions continues et plus particulièrement celle de la loi de Pareto.

Donc voilà le scénario : Souvent, en sciences sociales ou en économie, nous trouvons dans la littérature spécialisée traitant des lois de Pareto des affirmations du type suivant (mais quasiment jamais avec une démonstration détaillée) : quel que soit votre revenu, le revenu moyen de ceux qui ont un revenu supérieur au vôtre est dans un rapport constant, supérieur à 1, à votre revenu si celui-ci suit une variable aléatoire de type Pareto. Nous disons alors que la loi est isomorphe à toute partie tronquée elle-même.

Voyons de quoi il s'agit exactement !

Soit X une variable aléatoire égale au revenu et suivant une loi de Pareto de densité (voir section de Statistiques page 733) :

$$f(x)=k\frac{x_m^k}{x^{k+1}} \qquad (5.6.135)$$

avec $k>1, x_m>0, x\geq x_m$ et qui a pour fonction de répartition (voir aussi la section de Statistique pour la démonstration détaillée) :

$$P(X\leq x)=1-\left(\frac{x_m}{x}\right)^k \qquad (5.6.136)$$

La phrase commence par "*quel que soit votre revenu...*", choisissons donc un revenu quelconque $x_0 \geq x_m$.

À présent nous devons calculer "*le revenu moyen de ceux qui ont un revenu supérieur à* x_0". Il s'agit donc de calculer l'espérance (le revenu moyen) d'une nouvelle variable aléatoire Y qui est égale à X mais restreinte à la population des personnes ayant un revenu supérieur à x_0 :

$$Y = X|_{\{X \geq x_0\}} \tag{5.6.137}$$

La fonction de répartition de Y est donnée par :

$$P(Y \leq x) = P\left(X \leq x \mid X \geq x_0\right) \tag{5.6.138}$$

Cette expression est naturellement nulle si . $x \leq x_0$.

Bon, jusqu'à maintenant nous n'avons fait que du vocabulaire. D'abord rappelons la relation de probabilité conditionnelle suivante vue plus haut :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{5.6.139}$$

pour $x \geq x_0$ nous avons la loi conditionnelle à priori :

$$\boxed{P\left(X \leq x \mid X \geq x_0\right) = \frac{P(x_0 \leq X \leq x)}{P(X \geq x_0)}} \tag{5.6.140}$$

Avant d'aller plus loin, il faut être conscient que le numérateur et dénominateur sont indépendants mais que l'ensemble doit être toutefois considéré comme la réalisation d'une seule et unique variable aléatoire que nous noterons Y. Par ailleurs, seulement le numérateur est dépendant d'une variable. Le dénominateur peut lui être considéré comme une constante de normalisation.

Nous voyons donc que la densité de Y est donnée par la fonction :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < x_0 \\ \dfrac{f(y)}{P(X \geq x_0)} & y \geq x_0 \end{cases}$$

À présent nous pouvons calculer l'espérance de Y (assumant $X \geq x_0$) :

$$\begin{aligned} \text{E}(Y) = \text{E}(Y|X \geq x_0) &= \int y f_Y(y)\text{d}y = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{f(y)}{P(X \geq x_0)}\text{d}y = \frac{1}{P(X \geq x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} y f(y)\text{d}y \\ &= \frac{1}{P(X \geq x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} yk\frac{x_m^k}{y^{k+1}}\text{d}y = \frac{kx_m^k}{P(X \geq x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{y^k}\text{d}y \\ &= \frac{kx_m^k}{P(X \geq x_0)} \frac{1}{(k-1)y^{k-1}}\Bigg|_{x_0}^{+\infty} = \frac{1}{P(X \geq x_0)} \frac{kx_m^k}{(k-1)x_0^{k-1}} \end{aligned} \tag{5.6.141}$$

En cours de traduction de l'anglais

Sachant que (voir section Statistiques page 737) :

$$P(X \geq x_0) = \int\limits_{x_0}^{+\infty} k\frac{x_m^k}{x^{k+1}}\mathrm{d}x = \frac{x_m^k}{x_0^k} = \left(\frac{x_m}{x_0}\right)^k \qquad (5.6.142)$$

Nous avons finalement

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{k}{k-1}x_0 \qquad (5.6.143)$$

$\mathrm{E}(Y)$ représente donc le revenu moyen de ceux qui ont un revenu supérieur à x_0 et comme on peut le constater de l'égalité ci-dessus il est bien dans un rapport constant, supérieur à 1, à votre revenu x_0.

Nous pouvons vérifier ce résultat en faisant une simulation de Monte-Carlo dans un tableur (c'est intéressant de le mentionner pour généraliser à des cas non calculable à la main). Il suffit effectivement d'y simuler l'inverse de la fonction de répartition :

$$X = \left(\frac{x_m^k}{1-P(X \leq x)}\right)^{1/k} \qquad (5.6.144)$$

soit dans MS Excel 11.8346 (version anglaise) :

```
=($B$7^$B$6/(1-ALEA.ENTRE.BORNES(1,10000)/10000))^(1/$B$6)
```

et ensuite de prendre la moyenne des valeurs obtenues supérieurs ou égales à un X donné (ce qui correspondra à x_0) et vérifier que nous obtenons bien le résultat démontré précédemment !

évidemment, nous pourrions aussi calculer la variance conditionnelle (in extenso l'écart-type conditionnel). Cela viendra peut-être un jour...

Par conséquent, généralement pour une variable discrète, "l'espérance conditionnelle" est généralement défini par :

$$\mathrm{E}(X|Y)(y) \equiv \mathrm{E}(X|Y=y) \equiv \sum_x x \cdot P(X=x|Y=y) \qquad (5.6.145)$$

Mais ce n'est que le cas où nous prenons et l'égalité avec la variable antérieure. En général, dans toute relation d'ordre, une meilleure définition serait :

$$\boxed{\mathrm{E}(X|Y\mathcal{R}y) \equiv \sum_x x \cdot P(X=x|Y\mathcal{R}y)} \qquad (5.6.146)$$

évidemment, nous pourrions aussi calculer la variance conditionnelle (ie l'écart-type conditionnel) comme nous le verrons un peu plus bas !

Théorème 5.36. Voyons maintenant prouver une propriété qui nous sera utile en particulier lors de notre étude des séries chronologiques financières. Il est basé sur le fait que parfois nous devons calculer des relations telles que la suivante :

$$\boxed{\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X|Y)(y)\right) = \mathrm{E}(X)} \qquad (5.6.147)$$

qui sont appelées "moyenne conditionnelle itérée" ou "loi de l'espérance totale" aussi parfois noté $\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X|Y=y)\right)$ ou $\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X|\pi)\right)$.

En cours de traduction de l' anglais

Démonstration 5.36.1.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X|Y)\right) &= \sum_y \mathrm{E}(X|Y=y)\cdot P(Y=y)\\ &= \sum_y \left(\sum_x x\cdot P(X=x|Y=y)\right)\cdot P(Y=y)\\ &= \sum_y \sum_x x\cdot P(X=x|Y=y)\cdot P(Y=y)\\ &= \sum_y \sum_x x\cdot P(Y=y|X=x)\cdot P(X=x)\\ &= \sum_x x\cdot P(X=x)\cdot\left(\sum_y P(Y=y|X=x)\right)\\ &= \sum_x x\cdot P(X=x)\\ &= \mathrm{E}(X)\end{aligned} \tag{5.6.148}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Faisons de même pour la variance ! Rappelons d'abord la définition de la variance (dite aussi de la "variance inconditionnelle"). Si Y est une variable aléatoire, et qu'on note :

$$Z=(Y-\mathrm{E}(Y))^2 \tag{5.6.149}$$

Alors, la variance inconditionnelle de Y est bien évidemment définie comme suit :

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Z) \tag{5.6.150}$$

Considérons maintenant deux variables aléatoires X,Y et nous voulons calculer la variance conditionnelle de Y donnée X que nous noterons $\mathrm{V}(Y|X)$. De même que la variance inconditionnelle, nous pouvons mettre :

$$Z=(Y-\mathrm{E}(Y|X))^2 \tag{5.6.151}$$

La variance conditionnelle sera définie comme suit :

$$\mathrm{V}(Y|X)=\mathrm{E}(Z|X) \tag{5.6.152}$$

Gardez à l'esprit que la variance inconditionnelle est un scalaire, alors que la variance conditionnelle reste elle-même une variable aléatoire ! Donc, pour obtenir un scalaire pour la variance conditionnelle, nous devons estimer cette dernière pour une valeur donnée de x, ce que nous noterons par $\mathrm{V}(Y|X=x)$.

Dès lors :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y|X=x) &= \mathrm{E}\left((Y-\mathrm{E}(Y|X=x))^2|X\right)=\mathrm{E}\left(Y^2-2Y\mathrm{E}(Y|X=x)+(\mathrm{E}(Y|X=x)^2)|X\right)\\ &= \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right)-2\mathrm{E}\left(Y\mathrm{E}(Y|X=x)|X=x\right)+\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(Y|X=x)^2|X=x\right)\end{aligned} \tag{5.6.153}$$

Comme les termes $\mathrm{E}(Y|X=x)$ sont des scalaires, nous pouvons les factoriser :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y|X=x) &= \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) - 2\mathrm{E}(Y|X=x)\mathrm{E}\left(Y|X=x\right) + \mathrm{E}(Y|X=x)^2\mathrm{E}\left(1|X=x\right) \\ &= \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) - 2\left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2 + \mathrm{E}(Y|X=x)^2\mathrm{E}\left(1|X=x\right)\end{aligned} \tag{5.6.154}$$

La valeur conditionnelle attendue d'une constante est toujours égale à cette constante, c'est-à-dire : $\mathrm{E}(1|X=x)=1$. Donc :

$$\mathrm{E}(1|X=x)=1 \tag{5.6.155}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y|X=x) &= \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) - 2\left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2 + \mathrm{E}(Y|X=x)^2 \\ &= \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) - \left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2\end{aligned} \tag{5.6.156}$$

Nous reconnaissons dans la dernière égalité ci-dessus, la relation de Huygens de la moyenne inconditionnelle. Par conséquent, la variance conditionnelle est définie comme suit :

$$\boxed{\mathrm{V}(Y|X=x) = \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) - \left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2} \tag{5.6.157}$$

Ceci sera écrit explicitement pour des variables continues :

$$\mathrm{V}(Y|X=x) = \int\limits_y y^2 f_{y|x}(y|x)\mathrm{d}y - \left(\int\limits_y y f_{y|x}(y|x)\mathrm{d}y\right)^2 \tag{5.6.158}$$

Théorème 5.37. Démontrons maintenant la loi de la "variance conditionelle itérée", également appelée "loi de la variance totale" :

$$\boxed{\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{V}(Y|X=x)) + \mathrm{V}(\mathrm{E}(Y|X=x))} \tag{5.6.159}$$

Démonstration 5.37.1. Nous commençons par la relation d'Huygens :

$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 \tag{5.6.160}$$

La loi de la moyenne conditionnelle itérée nous donne :

$$\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(Y^2|X=x)\right) \tag{5.6.161}$$

En l'injectant dans la relation précédente, nous obtenons :

$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(Y^2|X=x)\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \tag{5.6.162}$$

En utilisant le résultat obtenu plus haut :

$$\mathrm{V}(Y|X=x) = \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) - \left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{E}\left(Y^2|X=x\right) = \mathrm{V}(Y|X=x) + \left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2 \tag{5.6.163}$$

et en injectant cela dans la relation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{V}(Y|X=x) + \left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2\right] - \mathrm{E}(Y)^2 \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{V}(Y|X=x)\right) + \mathrm{E}\left(\left(\mathrm{E}(Y|X=x)\right)^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2\end{aligned} \tag{5.6.164}$$

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, nous utilisons à nouveau la loi des moyennes conditionnelles itérées que nous mettons au carré :

$$(\mathrm{E}(Y))^2 = (\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X=x)))^2 \tag{5.6.165}$$

Et on l'injecte dans la relation précédente pour obtenir :

$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}\left(\mathrm{V}(Y|X=x)\right) + \mathrm{E}\left((\mathrm{E}(Y|X=x))^2\right) - (\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X=x)))^2 \tag{5.6.166}$$

Nous reconnaissons dans cette dernière égalité la relation de Huygens. Effectivement :

$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}\left(\mathrm{V}(Y|X=x)\right) + \underbrace{\mathrm{E}\left((\mathrm{E}(Y|X=x))^2\right) - (\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X=x)))^2}_{\mathrm{V}(\mathrm{E}(Y|X=x))} \tag{5.6.167}$$

Donc finalement :

$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{V}(Y|X=x)) + \mathrm{V}(\mathrm{E}(Y|X=x)) \tag{5.6.168}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

5.6.3.2 Réseaux bayésiens

Les "Réseaux bayésiens", aussi nommés "réseaux bayésiens naifs" abrégés RBN, sont simplement une représentation graphique d'un problème de probabilités conditionnelles qui permet de mieux visualiser l'interaction entre les différentes variables lorsque que celles-ci commencent à être en grande nombre.

C'est une technique de plus en plus utilisée dans le décisionnel assisté par logiciel (Data Mining), l'intelligence artificielle (AI) et également dans l'analyse et la gestion du risque (norme ISO 31010).

Les réseaux bayésiens sont par définition des graphes orientés acycliques (voir section Théorie des Graphes page 2988), afin qu'un événement ne puisse pas (même indirectement) influencer sa propre probabilité, avec description quantitative des dépendances entre événements.

Ces graphes servent à la fois de modèles de représentation des connaissances et de machines à calculer des probabilités conditionnelles. Ils sont surtout utilisés pour le diagnostic (médical et industriel), l'analyse de risques (diagnostics de pannes, anomalies ou accidents), la détection des spams (filtre bayésien), l'analyse de texte de voix et d'images, l'analyse d'opinions, la détection de fraudeurs ou de mauvais payeurs ainsi que dans le data mining (EGC : Extraction et Gestion de la Connaissance) en général.

Remarque

De nombreux systèmes et logiciels permettent de construire et d'analyser des réseaux bayésiens sur la base de dessins ou de d'informations existantes dans des bases de données. Solutions payantes : SQL Server, Oracle, Hugin. Solutions gratuits (à ce jour) : Bayesia, Tanagra, Microsoft Belief Network MSBNX 1.4.2, RapidMiner. Personnellement je préfère la simplicité du petit logiciel MSBNX de Microsoft. Pour information, en 10 ans d'expérience professionnelle en tant que consultant je n'ai rencontré à ce jour qu'une seule entreprise parmi plus de 800 multinationales dans mon portefeuille qui utilisait les réseaux de bayésiens... (dans le domaine des transports).

Utiliser un réseau bayésien s'appelle faire de "l'inférence bayésienne" ". En fonction des informations observées, nous calculons la probabilité des données possibles connues mais non observées.

Pour un domaine donné (par exemple médical), nous décrivons les relations causales entre variables d'intérêt par un graphe (plus besoin de préciser qu'il est acyclique). Dans ce graphe, les relations de cause à effet entre les variables ne sont pas déterministes, mais probabilisées. Ainsi, l'observation d'une cause ou de plusieurs causes n'entraîne pas systématiquement l'effet ou les effets qui en dépendent, mais modifie seulement la probabilité de les observer.

L'intérêt particulier des réseaux bayésiens est de tenir compte simultanément de connaissances a priori d'experts (dans le graphe) et de l'expérience contenue dans les données.

Exemple de 5 variables avec relations (graphe orienté acyclique) et numérotation des états/variables (en anglais : "states") :

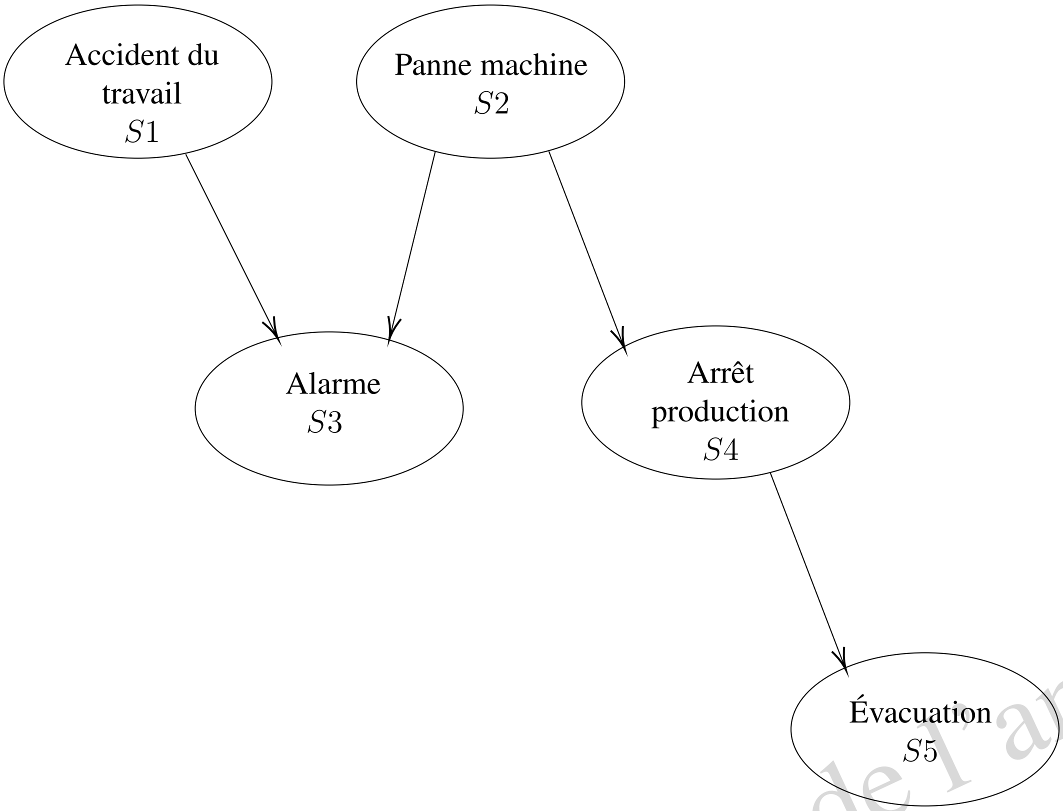


FIG. 5.84 – **Exemple de réseau bayésien (acyclique orienté) à 5 états**

En cours de traduction de l'anglais

Évidemment, la construction du graphe causal se fonde principalement sur le retour d'expériences (REX) et résulte parfois de normes ou de rapports de comités d'experts. Dans l'informatique, le graphe causal évolue automatiquement en fonction des bases de données (pensez à la librairie Amazon qui cible les publicités en fonction de vos achats passés en temps réel ou au service Genius de Apple). Cependant nous pourrons rarement penser à toutes les possibilités et il y aura aussi parfois des états cachés entre deux états qui auront été oubliés mais qui auraient permis de mieux modéliser la situation.

Avant de procéder à un exemple détaillé, rappelons d'abord que :

$$\underbrace{P(A/B)}_{\text{probabilité a posteriori}} = \frac{\overbrace{P(B/A)}^{\text{Vraisemblance}} \cdot \overbrace{P(A)}^{\text{propabilité a priori}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{constante de normalisation}}} \tag{5.6.169}$$

et maintenant imaginons dans la figure ci-dessus qu'à l'aide d'une base de données d'une entreprise, nous sachions que sur $100'000$ jours hommes, nous avons eu dans cette entreprise $1'000$ accidents du travail (soit 1% du total) et 100 pannes machines (soit 0.01% du total). Nous représentons cela alors sous la forme traditionnelle suivante :

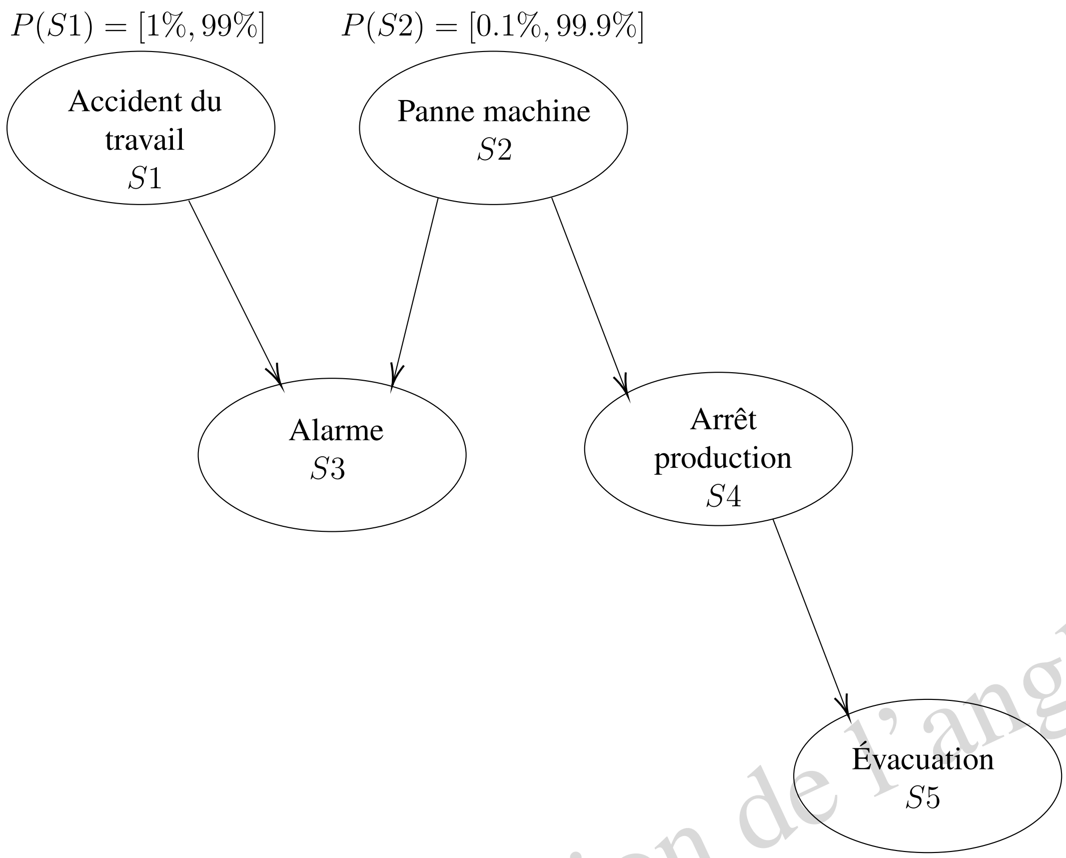


FIG. 5.85 – Réseau bayésien acyclique orienté avec probabilités de départ

En cours de traduction de l'anglais

où nous avons le sous-ensemble $S2, S4, S5$ qui constitue ce que les spécialistes appellent une "connexion série ou linéaire", le triplet $S3, S2, S4$ constitue une "relation divergente" (si les flèches pour ce triplet étaient inversées, nous aurions une "relation convergente").

Avant d'aller plus loin avec notre exemple faisons quelques constats par rapport à ces trois types de relations :

Pour toute clarté, distinguons d'abord "l'indépendance conditionnelle" de la "dépendance conditionnelle".

Nous disons que des événements A et C sont "indépendants conditionnellement" si étant donné un événement B l'égalité suivante est vérifiée :

$$P(A/B) = P(A/B, C) \tag{5.6.170}$$

Donc le qualificatif "conditionnellement" implique la présence de B et le fait que C n'influence pas la probabilité de l'événement A.

Concernant la "dépendance conditionnelle", nous pouvons cette fois distinguer trois types de relations.

1. La dépendance conditionnelle du type suivant est appelée "connexion série ou linéaire" (déjà mentionnée plus haut) :

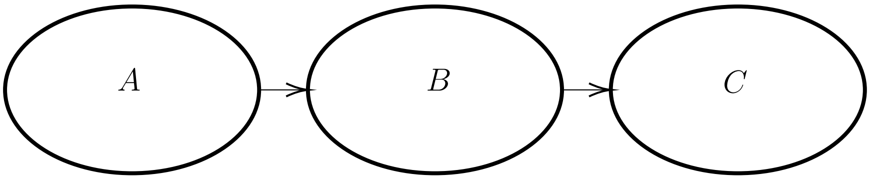


FIG. 5.86 – **Réseau bayésien en connexion série/linéaire**

où A, B et C sont dépendants (dans cet exemple particulier il y a 3 noeuds dépendants A, B et C mais d'une manière générale cette dépendance concernerait tous les noeuds s'il y en avait plus de 3).

En outre A et C sont dépendants mais conditionnellement à B. Mais si la variable B est connue, A n'apporte plus aucune information utile sur C (le cheminement de l'incertitude est en quelque sorte rompu) et dès lors A et C deviennent indépendants conditionnellement. Nous avons la probabilité conditionnelle qui se simplifierait donc sous la forme suivante :

$$P(C/B, A) = P(C/B) \tag{5.6.171}$$

2. La dépendance conditionnelle du type suivant est appelée "connexion divergente" (aussi déjà mentionnée plus haut) :

En cours de traduction de l'anglais

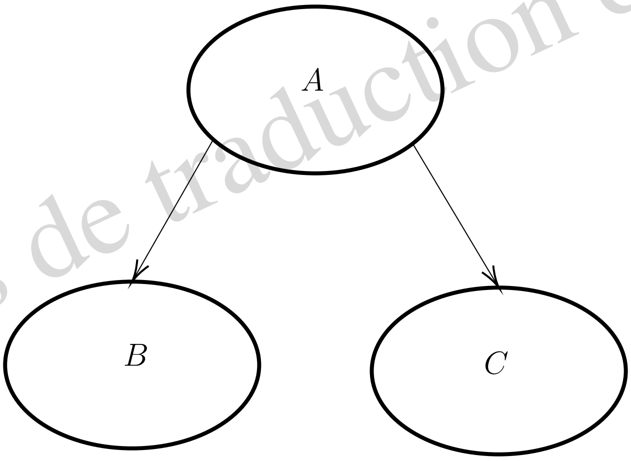


FIG. 5.87 – **Réseau bayésien divergent**

où l'ensemble des noeuds sont dépendants.

En outre B et C sont dépendants conditionnellement à A. Mais si A est connue, B n'apporte plus aucune information sur C (à nouveau le cheminement de l'incertitude est en quelque sorte rompu) et dès lors B et C deviennent indépendants. Nous avons donc par exemple si A est connue :

$$P(C/A, B) = P(C/A) \tag{5.6.172}$$

3. La dépendance conditionnelle du type suivant est appelée "connexion convergente" ou "V-Structure" (aussi déjà mentionnée plus haut) :

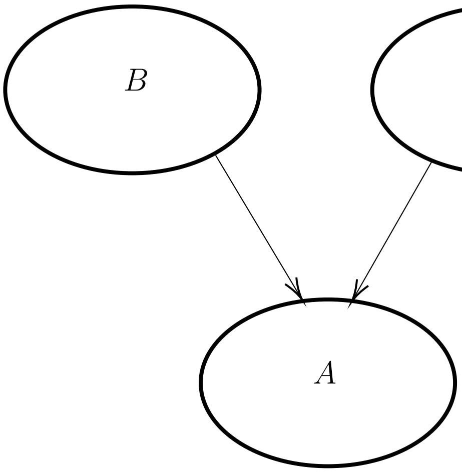


FIG. 5.88 – **Réseau bayésien convergent**

où cette fois les parents sont indépendants.

Donc B et C sont indépendants mais deviennent dépendants conditionnellement à A. Si A est connue, nous avons alors :

$$P(A/B,C) = P(A/B) \tag{5.6.173}$$

La dépendance entre les parents passe donc par l'observation de leur enfant commun.

Maintenant, pour faire un exemple concret, imaginons que notre base de données nous donne (grâce aux responsables qualité qui ont toujours su saisir les anomalies qualité) que lorsqu'une panne machine a eu lieu, 99 fois sur 100 (99%) il y a eu un arrêt total de la production (donc in extenso 1 fois sur 100 : 1% il n'y pas eu d'arrêt de la production) et que sur tous les arrêts de la production 1% n'était pas dû à une panne machine. Ce que nous représentons traditionnellement sous la forme suivante :

En cours de traduction de l' anglais

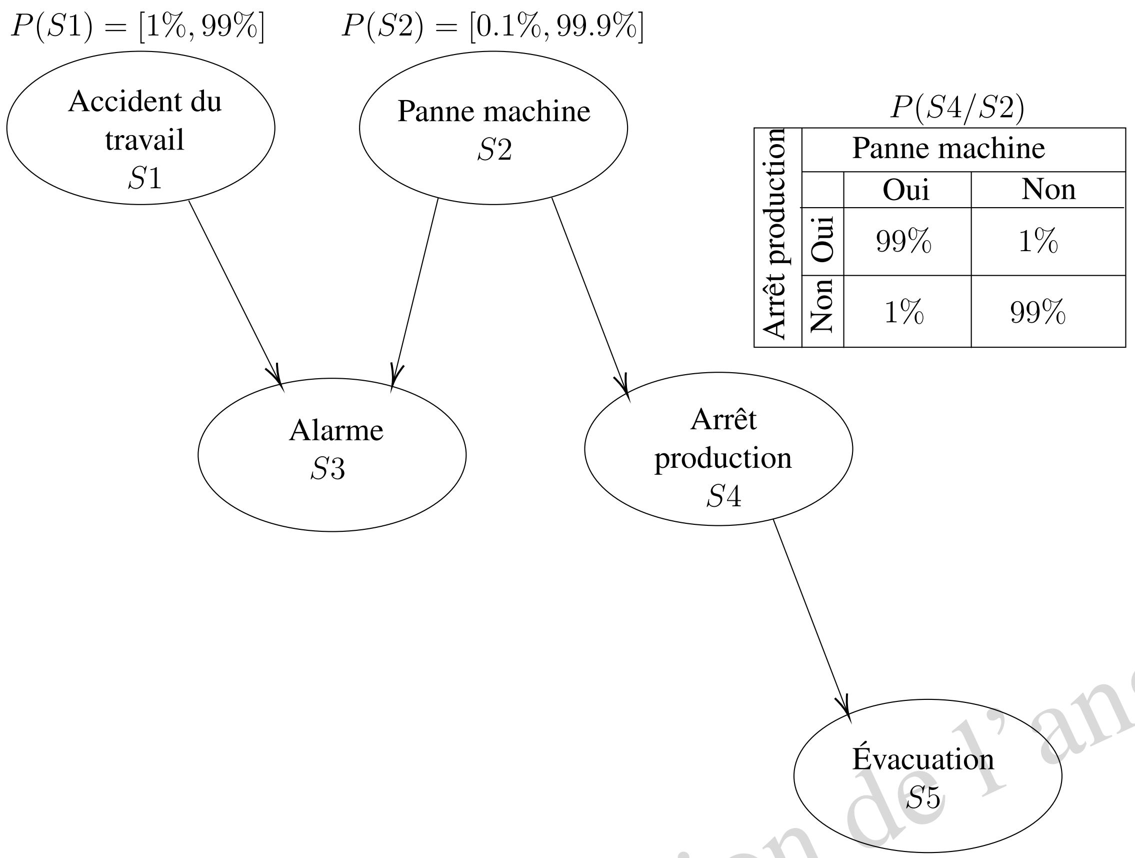


FIG. 5.89 – **Réseau bayésien de 1er niveau**

En cours de traduction de l'anglais

Donc la "probabilité implicite" (constante de normalisation) qu'il y ait un arrêt de la production est donnée par :

$$P(S4) = P(S4/S2)P(S2) + P(S4/\overline{S2})P(\overline{S2}) = 99\% \cdot 0.1\% + 1\% \cdot 99.9\% \cong 1.098\% \tag{5.6.174}$$

Ce chiffre représente donc la proportion implicite d'arrêts de production parmi les $100'000$ jours hommes (nous pouvons donc donner une proportion de lignes de la base données représentant un arrêt production quelle que soit la cause et ce sans même avoir les détails de la base de données).

Il en découle immédiatement alors la probabilité implicite (constante de normalisation) qu'il n'y ait pas d'arrêt de la production :

$$P(S4) = 1 - P(\overline{S4}) \cong 98.902\% \tag{5.6.175}$$

Ce qui est conforme à ce que nous donne le logiciel gratuit MSBNX 1.4.2 :

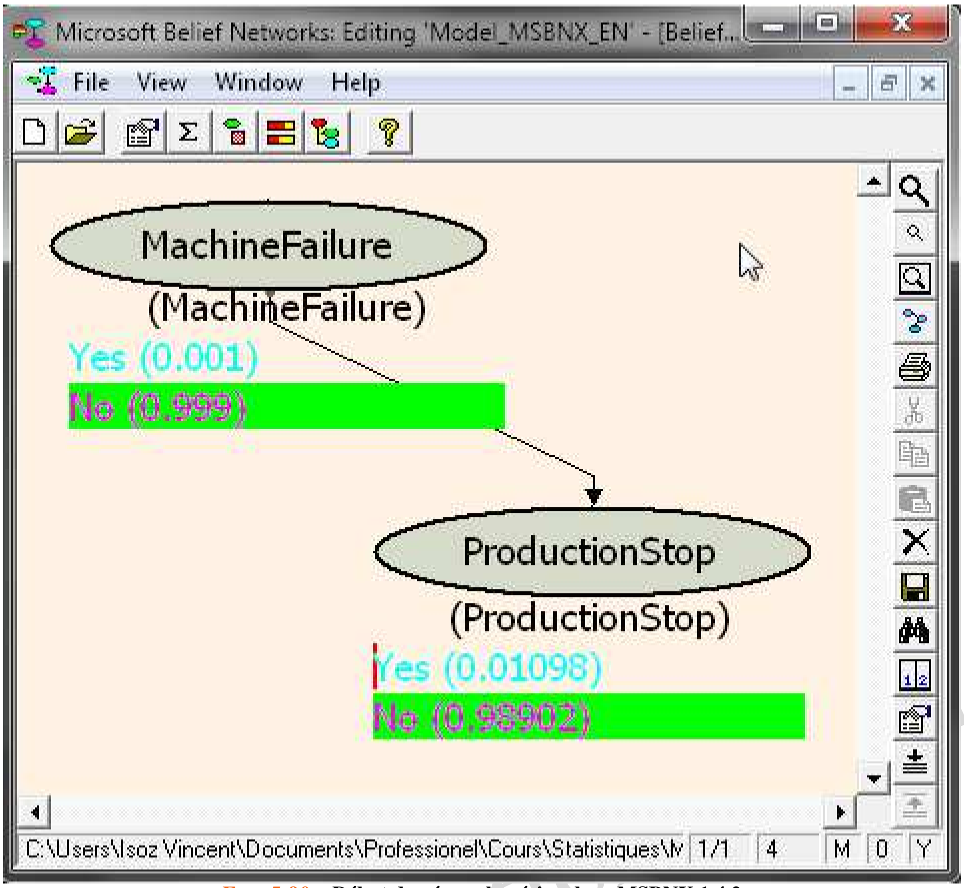


FIG. 5.90 – **Début du réseau bayésien dans MSBNX 1.4.2**

Maintenant supposons que nous avons observé un arrêt de la production. Quelle est la probabilité à posteriori qu'il soit dû à une panne machine ? Nous avons alors :

$$P(S2/S4) = \frac{P(S4/S2)P(S2)}{P(S4)} = \frac{99\% \cdot 0.1\%}{1.098\%} \cong 9.02\% \qquad (5.6.176)$$

Ce que nous pouvons aussi vérifier avec le logiciel MSBNX 1.4.2 :

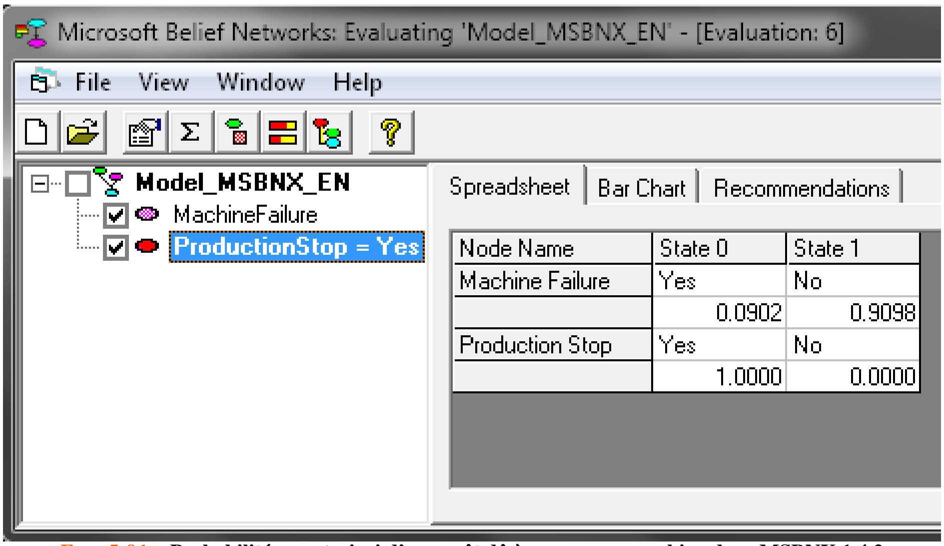
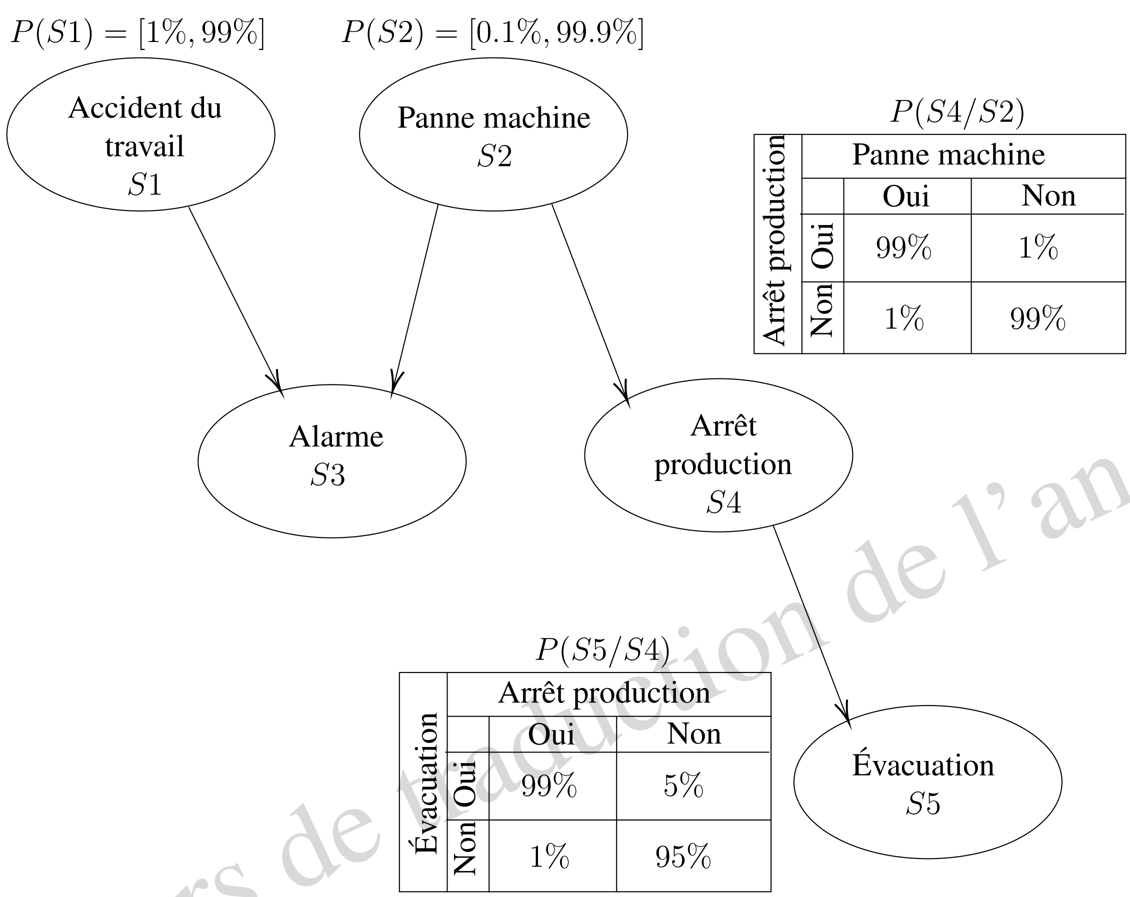


FIG. 5.91 – **Probabilité a posteriori d'un arrêt dû à une panne machine dans MSBNX 1.4.2**

Maintenant, imaginons que notre base de données nous donne (toujours grâce aux responsables qualité qui ont veillé à saisir les anomalies qualité) que 99 fois sur 100 (99%) lorsqu'il y a eu un arrêt de la production, il y a eu une évacuation. En revanche 5% des évacuations ont été identifiées comme n'ayant rien à voir avec un arrêt de la production (donc 95% des évacuations sont dues à des exercices d'incendie OU à d'autres événements) :



$P(S4/S2)$

Arrêt production	Panne machine: Oui	Panne machine: Non
Oui	99%	1%
Non	1%	99%

$P(S5/S4)$

Évacuation	Arrêt production: Oui	Arrêt production: Non
Oui	99%	5%
Non	1%	95%

FIG. 5.92 – **Réseau bayésien de deuxième niveau**

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, pour calculer la probabilité implicite (constante de normalisation) des évacuations a posteriori par rapport aux pannes machines, nous avons vu que lorsque nous avions une dépendance conditionnelle série, la probabilité conditionnelle ne dépendait que du parent direct. Ainsi, il vient :

$$P(S5)=P(S5/S4)P(S4)+P(S5/\overline{S4})P(\overline{S4})=99\%\cdot 1.089\%+5\%\cdot 98.092\%\cong 6.03\% \tag{5.6.177}$$

Ce qui peut se vérifier avec le logiciel MSBNX 1.4.2 :

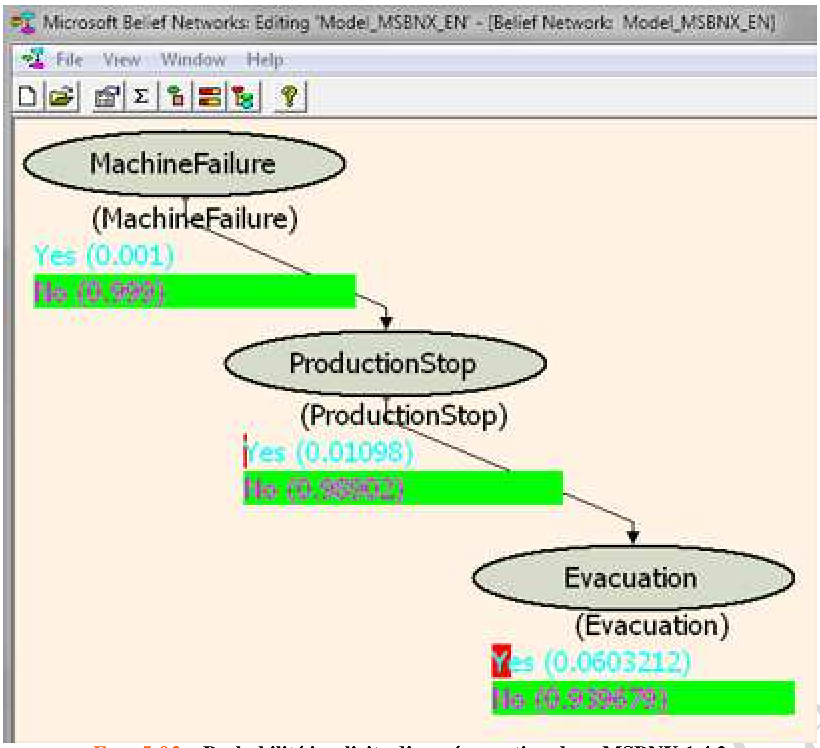


FIG. 5.93 – Probabilité implicite d'une évacuation dans MSBNX 1.4.2

Donc la probabilité implicite (constante de normalisation) de l'évacuation ne dépend effectivement pas des pannes de machines.

Maintenant supposons que nous avons observé une évacuation. Nous voulons savoir quelle est la probabilité a posteriori qu'elle soit due à une panne machine ! Nous avons alors :

$$P(S4/S5) = \frac{P(S5/S4)P(S4)}{P(S5)} = \frac{99\% \cdot 1.098\%}{6.03\%} \cong 18.02\% \qquad (5.6.178)$$

Ce que nous pouvons aussi vérifier avec le logiciel MSBNX 1.4.2 :

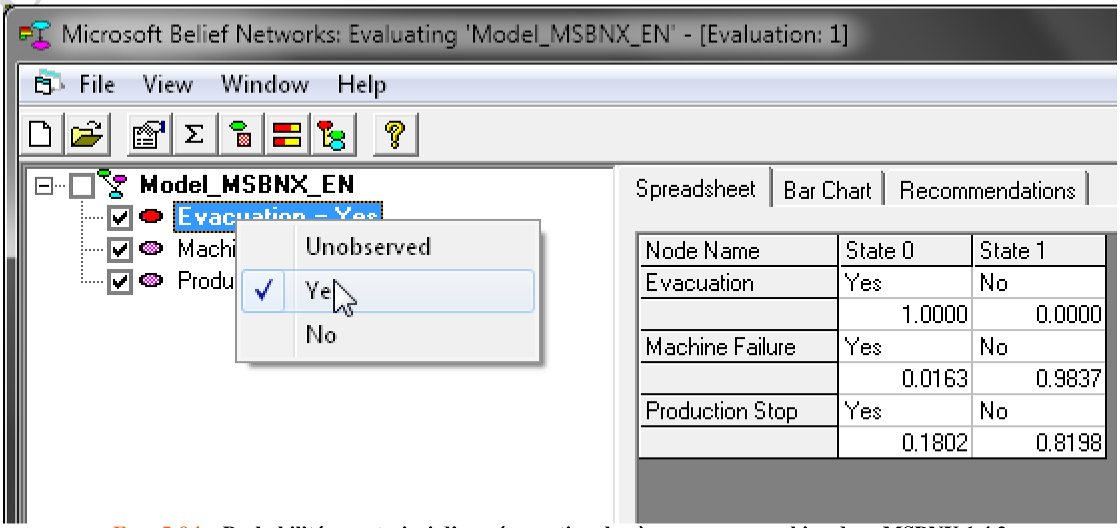
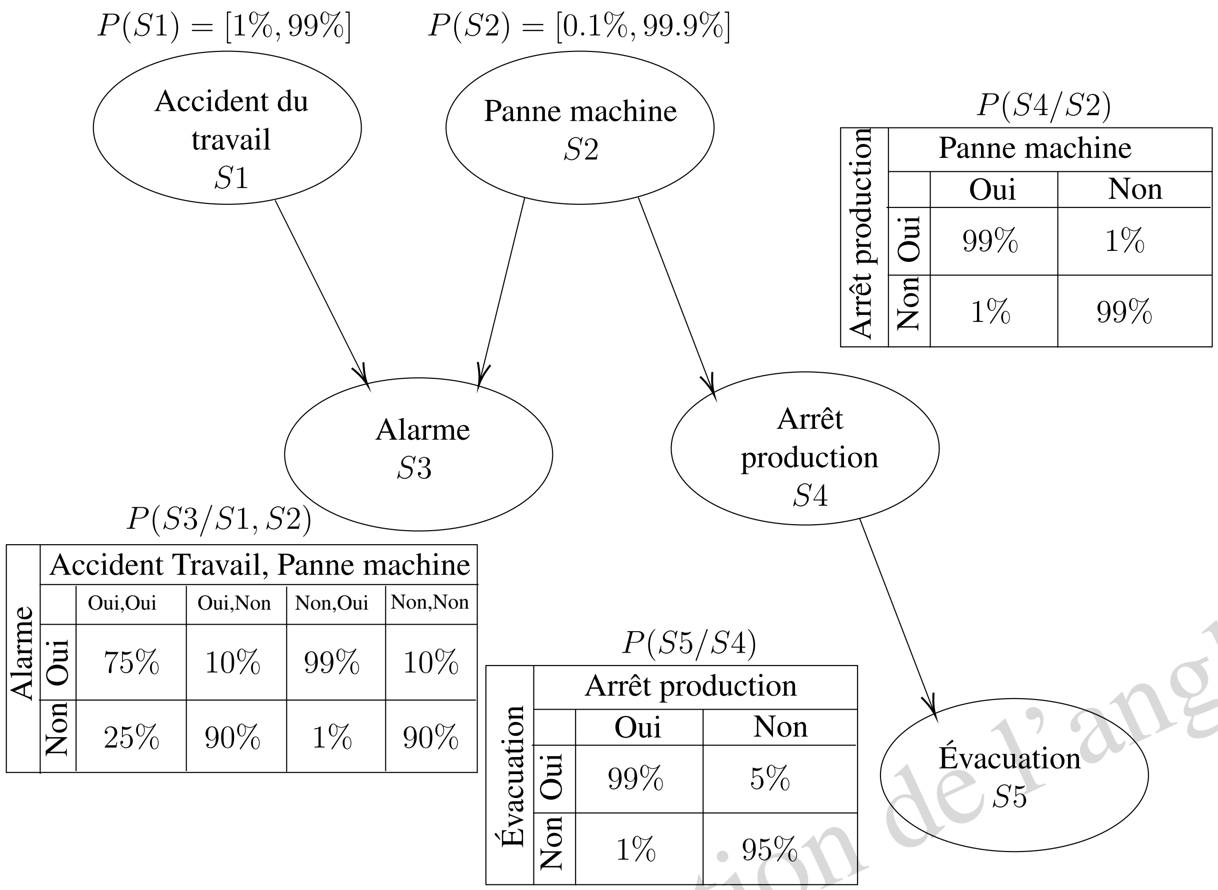


FIG. 5.94 – Probabilité a posteriori d'une évacuation due à une panne machine dans MSBNX 1.4.2

Maintenant nous étudions le cas avec l'alarme et là aussi une base de données nous permet de construire un tableau avec les différentes probabilités :

En cours de traduction de l'anglais



$P(S4/S2)$

Arrêt production	Panne machine: Oui	Panne machine: Non
Oui	99%	1%
Non	1%	99%

$P(S3/S1,S2)$

Alarme	Accident Travail, Panne machine: Oui,Oui	Oui,Non	Non,Oui	Non,Non
Oui	75%	10%	99%	10%
Non	25%	90%	1%	90%

$P(S5/S4)$

Évacuation	Arrêt production: Oui	Arrêt production: Non
Oui	99%	5%
Non	1%	95%

FIG. 5.95 – Réseau bayésien de deuxième niveau avec seconde branche

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, pour calculer la probabilité implicite (constante de normalisation) qu'il y ait une alarme, il va falloir considérer les quatre situations possibles. Nous avons alors en utilisant encore une fois le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(S3)&=P(S3/S1,S2)P(S1)P(S2)+P(S3/\overline{S1},S2)P(\overline{S1})P(S2)\\&+P(S3/S1,\overline{S2})P(S1)P(\overline{S2})+P(S3/\overline{S1},\overline{S2})P(\overline{S1})P(\overline{S2})\end{aligned}\tag{5.6.179}$$

Ce qui un peu plus rigoureusement devrait s'écrire :

$$\begin{aligned}P(S3)&=P(S3/S1\wedge S2)P(S1)P(S2)+P(S3/\overline{S1}\wedge S2)P(\overline{S1})P(S2)\\&+P(S3/S1\wedge\overline{S2})P(S1)P(\overline{S2})+P(S3/\overline{S1}\wedge\overline{S2})P(\overline{S1})P(\overline{S2})\end{aligned}\tag{5.6.180}$$

L'application numérique donne donc pour la probabilité implicite (constante de normalisation) d'une alarme :

$$\begin{aligned}P(S3)&=75\%\cdot1\%\cdot0.1\%+99\%\cdot99\%\cdot0.1\%+10\%\cdot1\%\cdot99.9\%\\&+10\%\cdot99\%\cdot99.9\%\cong10.089\%\end{aligned}\tag{5.6.181}$$

Ce qui se construit et se vérifie de la manière suivante avec MSBNX 1.4.2 :

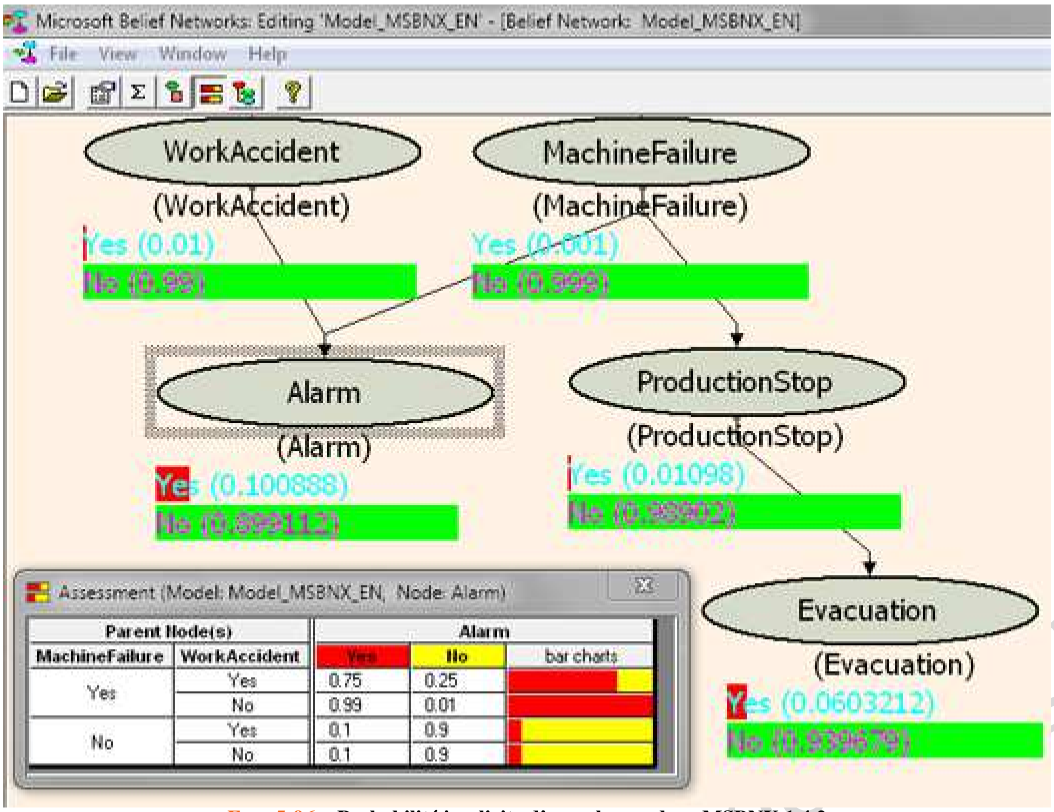


FIG. 5.96 – **Probabilité implicite d'une alarme dans MSBNX 1.4.2**

En cours de traduction en anglais

Concernant les notations, il peut être utile au lecteur de savoir qu'il peut parfois trouver dans la littérature :

$$P(S3/S1 = \text{Oui}, S2 = \text{Oui}) = P(S3/S1, S2) = P(S3/S1 \wedge S2) \quad (5.6.182)$$

ou encore :

$$P(S3|S1 = \text{Oui}, S2 = \text{Oui}) = P(S3|S1, S2) = P(S3/S1 \wedge S2) \quad (5.6.183)$$

Remarque

Dans l'exemple particulier étudié ici les événements ont tous deux états. Mais dans la pratique cela peut aller à 3, 4 et plus. Dès lors les tableaux de croisement de probabilités deviennent vite énormes.

Comme pour les cas précédents, supposons que nous savons qu'il y a eu un accident de travail. Nous souhaitons alors calculer la probabilité implicite d'une alarme. Nous avons alors (observez que la probabilité ne dépend effectivement alors plus que de l'état $S2$ puisque l'état $S1$ est entièrement connu !) :

$$\begin{aligned} P(S3/S1) &= P(S3/S1, S2)P(S2) + P(S3/S1, \overline{S2})P(\overline{S2}) \\ &= 75\% \cdot 0.1\% + 10\% \cdot 99.9\% = 10.065\% \end{aligned} \quad (5.6.184)$$

Ce que nous pouvons aussi vérifier avec le logiciel MSBNX 1.4.2 :

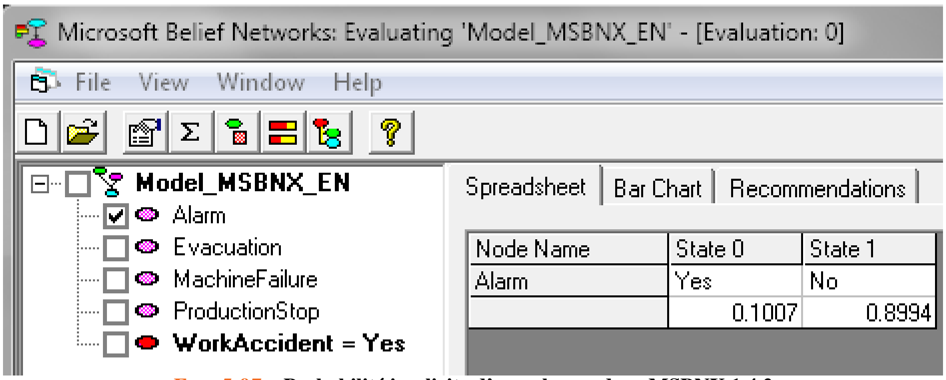


FIG. 5.97 – **Probabilité implicite d'une alarme dans MSBNX 1.4.2**

Pour terminer cet exemple, nous souhaiterions calculer les probabilités a posteriori $P(S2/S3)$ et $P(S1/S3)$. Pour cela, nous devons d'abord calculer les probabilités implicites $P(S3/S2)$ et $P(S3/S1)$ (cette dernière venant d'être calculée).

Nous avons pour la valeur manquante (ce qui se vérifie aussi facilement qu'avant avec le logiciel MSNBX 1.4.2) :

$$\begin{aligned} P(S3/S2) &= P(S3/S2, S1)P(S1) + P(S3/S2, \overline{S1})P(\overline{S1}) \\ &= 75\% \cdot 1\% + 99\% \cdot 99\% \cong 98.76\% \end{aligned} \tag{5.6.185}$$

Nous avons donc pour résumer :

$$\begin{aligned} P(S3/S1) &= 10.065\% \\ P(S3/S2) &= 98.76\% \end{aligned} \tag{5.6.186}$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour calculer les probabilités a posteriori de $P(S2/S3)$ et $P(S1/S3)$:

$$\begin{aligned} P(S2/S3) &= \frac{P(S3/S2)P(S2)}{P(S3)} = \frac{98.76\% \cdot 0.1\%}{10.089\%} = 0.9789\% \\ P(S1/S3) &= \frac{P(S3/S1)P(S1)}{P(S3)} = \frac{10.065\% \cdot 1\%}{10.089\%} = 0.9976\% \end{aligned} \tag{5.6.187}$$

Donc la probabilité a posteriori qu'il y ait une panne machine lorsque nous savons qu'il y a une alarme est de 0.979% (donc in extenso 0.021% que le déclenchement de l'alarme ne soit pas dû a priori à une panne machine). Respectivement il y a, a posteriori, 0.998% de probabilité y ait un accident de travail lorsque nous savons qu'il y a une alarme (et donc 0.002% que cela ne soit pas dû a posteriori à un accident de travail).

Du point de vue critique, lorsqu'il y a donc une alarme finalement nous ne pouvons pas dire grand chose... Cela est dû, dans le cas présent, au fait que les événements d'intérêt notable ont tous deux de faibles probabilités d'avoir lieu (accident de travail et panne machine) et que les employés réagissent plutôt bien au niveau du déclenchement de l'alarme (sinon si les probabilités a priori étaient grandes cela signifierait que le comportement des employés n'est pas bon puisque nous pouvons deviner - avec exaspération - à l'avance quel problème a lieu avec une certaine confiance).

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Nous n'avons pas trouvé comment vérifier ces derniers calculs avec MSNBX 1.4.2. Si quelqu'un trouve comment le faire, ce serait super de nous communiquer le détail de la démarche.

Pour clore, le lecteur aura remarqué que les calculs peuvent vite devenir ennuyeux dès que le graphe devient complexe d'où l'usage de logiciels informatiques. De plus, dans le domaine bancaire qui utilise par exemple les réseaux bayésiens pour les risques de crédit, la probabilité a priori peut être plus complexe. Par exemple nous pourrions vouloir connaître la probabilité a priori qu'il y ait une panne machine sachant que nous avons une alarme et un accident de travail :

$$P(S2/S3, S1) = P(S2/S3 = \text{Oui}, S1 = \text{Oui}) \tag{5.6.188}$$

Pour les personnes souhaitant approfondir le sujet, avec des cas pratiques sur le logiciel R et l'utilisation des réseaux bayésians gaussian, nous conseillons vivement la lecture de [387] !

5.6.4 Martingales

Une martingale en probabilités (il en existe une autre dans les processus stochastiques) est une technique permettant d'augmenter les chances de gain aux jeux de hasard tout en respectant les règles de jeu. Le principe dépend complètement du type de jeu qui en est la cible, mais le terme est accompagné d'une aura de mystère qui voudrait que certains joueurs connaissent des techniques secrètes mais efficaces pour tricher avec le hasard. Par exemple, de nombreux joueurs (ou candidats au jeu) cherchent LA martingale qui permettra de battre la banque dans les jeux les plus courants dans les casinos (des institutions dont la rentabilité repose presque entièrement sur la différence - même faible - qui existe entre les chances de gagner et celles de perdre).

De nombreuses martingales ne sont que le rêve de leur auteur, certaines sont en fait inapplicables, quelques-unes permettent effectivement de tricher un peu. Les jeux d'argent sont en général inéquitables : quel que soit le coup joué, la probabilité de gain du casino (ou de l'état dans le cas d'une loterie) est plus importante que celle du joueur. Dans ce type de jeu, il n'est pas possible d'inverser les chances, seulement de minimiser la probabilité de ruine du joueur.

L'exemple le plus courant est la martingale de la roulette. Elle consiste à jouer une chance simple à la roulette (noir ou rouge, paire ou impaire) de façon à gagner, par exemple, une unité dans une série de coups en doublant sa mise si l'on perd, et cela jusqu'à ce que l'on gagne. Exemple : le joueur mise 1 unité sur le rouge, si le rouge sort, il arrête de jouer et il a gagné 1 unité (2 unités de gain moins l'unité de mise), si le noir sort, il double sa mise en pariant 2 unités sur le rouge et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il gagne.

En cours de traduction de l' anglais

FIG. 5.98 – **Roulette de Casino**

En cours de traduction de l'anglais

Ayant une chance sur deux de gagner, il peut penser qu'il va finir par gagner ; quand il gagne, il est forcément remboursé de tout ce qu'il a joué, plus une fois sa mise de départ.

Cette martingale semble être sûre en pratique. À noter que sur le plan théorique, pour être sûr de gagner, il faudrait avoir la possibilité de jouer au cas où un nombre de fois illimité... Ce qui présente des inconvénients majeurs :

Cette martingale est en fait limitée par les mises que le joueur peut faire car il faut doubler la mise à chaque coup tant que l'on perd : 2 fois la mise de départ, puis 4, 8, 16... s'il perd 10 fois de suite, il doit pouvoir avancer 1024 fois sa mise initiale pour la 11ème partie ! Il faut donc beaucoup d'argent pour gagner peu.

Les roulettes comportent de plus un "0" qui n'est ni rouge ni noir. Le risque de perdre lors de chaque coup est ainsi plus grand que $1/2$...

De plus, pour paralyser cette stratégie, les casinos proposent des tables de jeu par tranche de mise : de 1 à 100.-, de 2 à 200.-, de 5 à 500.-, ... Impossible donc d'utiliser cette méthode sur un grand nombre de coups, ce qui augmente le risque de tout perdre.

Le black jack est un jeu qui possède des stratégies gagnantes : plusieurs techniques de jeu, qui nécessitent généralement de mémoriser les cartes, permettent de renverser les chances en faveur du joueur. Le mathématicien Edward Thorp a ainsi publié en 1962 un livre qui fut à l'époque un véritable best-seller. Mais toutes ces méthodes demandent de longues semaines d'entraînement et sont facilement décelables par le croupier (les brusques changements de montant des mises sont caractéristiques). Le casino a alors tout loisir d'écarter de son établissement les joueurs en question.

Notons qu'il y a assez de méthodes avancées. L'une d'elle est basée sur les combinaisons les moings jouées. Dans le jeux où les gains dépendent sur le nombre de joueurs gagnants (jeux du type Lotto...), jouer les numéros les moins utilisés maximise alors potentiellement les gains. C'est pourquoi certaines personnes vendent des combinaisons rare qui statistiquement sont très très rarement utilisées par les autres joueurs.

Basé sur ce raisonnement, nous pouvons cependant conculre qu'un joueur qui aurait pu déterminer ces combinaisons spécialement rares, pour maximiser son gain, sera probablement pas le seul joueur à procéder ainsi (au fait il y a toujours cependant le premier à avoir trouvé une martingale qui ensuite se faire connaître par la masse... !). Cela signifie sous cette hypothèse que les combinaisons les moins jouées deviennent peut-être les plosu journées, le meilleur étant peut-être de jouer un mélange de combinaisons normales et rares. Une autre conclusion à tout cela est peut-être de jouer avec des combinaisons aléatoires qui sont probablement celles ayant le moins de chances d'être choisies par des joueurs humains qui pour la majorité aiment bien prendre des pattern (motifs) de nombre harmonieux ou sentimentaux.

En cours de traduction de l'anglais

5.6.5 Analyse Combinatoire

"L'analyse combinatoire" (techniques de dénombrement) est le domaine de la mathématique qui s'occupe de l'étude de l'ensemble des issues, événements ou faits (distinguables ou non tous distinguables) avec leurs arrangements (combinaisons) ordonnés ou non selon certaines contraintes données.

Définitions (#5.6.107) :

D1. Une suite d'objets (événements, issues, objets,...) est dite "ordonnée" si chaque suite composée d'un ordre particulier des objets est comptabilisée comme une configuration particulière.

D2. Une suite est donc "non ordonnée" si et seulement si nous intéresse la fréquence d'apparition des objets indépendamment de leur ordre.

D3. Des objets (d'une suite) sont dits "distincts" si leurs caractéristiques ne permettent pas de les confondre avec des autres objets.

Remarque

Nous avons choisi de mettre l'analyse combinatoire dans ce chapitre car lorsque nous calculons des probabilités, nous avons également assez souvent besoin de savoir quelle est la probabilité de tomber sur une combinaison ou un arrangement d'événements donnés sous certaines contraintes.

Souvent les étudiants ont de la peine à se rappeler de la différence entre une permutation, un arrangement et une combinaison. Voici donc un petit résumé de ce que nous allons voir :

- Permutation : On prend tous les éléments.

- Arrangement : On choisit des éléments parmi ceux de l'ensemble de départ et l'ordre intervient.

- Combinaison : Idem que pour l'arrangement mais l'ordre n'intervient pas.

Il ne faut pas oublier que pour le résultat de chacun, l'inverse donnera la probabilité de tomber respectivement sur une Permutation/Arrangement/Combinaison donnée ! !

Nous allons présenter et démontrer ci-dessous les 6 cas les plus répandus à partir desquels nous pouvons trouver (habituellement) tous les autres :

5.6.5.1 Arrangements simples avec répétitions

Définition (#5.6.108) : Un "arrangement simple avec répétitions" ou de manière équivalent un "échantillonnage simple avec remplacement" (ESAR) est une suite ordonnée de longueur m de n objets distincts non nécessairement tous différents dans la suite (soit avec répétitions possibles !).

Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux respectifs m, n tels que trivialement il y ait m façons de choisir un objet dans A (de type a) et n façons de choisir un objet dans B (de type b).

Nous avons vu dans la section de Théorie Des Ensembles que si A et B sont disjoints, que :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = m + n \tag{5.6.189}$$

Nous en déduisons donc les propriétés suivantes :

P1. Si un objet ne peut être à la fois de type a et de type b et s'il y a m façons de choisir un objet de type a et n façons de choisir un objet de type b, alors l'union des objets donne $m+n$ sélections (c'est typiquement le résultat des requêtes d'UNION en SQL, sans filtres, dans les SGBDR des entreprises).

P2. Si nous pouvons choisir un objet de type a de m façons puis un objet de type b de n façons, alors il y a selon le produit cartésien de deux ensembles (voir section Théorie des Ensembles page 389) :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B) = m \cdot n \tag{5.6.190}$$

de manières choisir un seul et unique objet de type a puis un objet de type b (c'est généralement le résultat de requêtes SELECT en SQL, sans filtres, avec plusieurs tables non liées dans les SGBDR d'entreprise).

Avec les mêmes notations pour m et n, nous pouvons donc choisir pour chaque élément de A, son unique image parmi les n éléments de B. Il y a donc n façons de choisir l'image du premier élément de A, puis aussi n façons de choisir l'image du deuxième élément de A, ..., puis n façons de choisir l'image du m-ème élément de A. Le nombre d'applications totales consécutives possibles de A dans B est donc égal aux m produits de n (m fois le produit

En cours de traduction de l'anglais

cartésien du cardinal de l'ensemble B avec lui-même donc !). Ce qu'il est d'usage d'écrire (nous avons mis les différentes écritures que l'on peut trouver dans les livres scolaires) :

$$\text{Card}(B^A) = \text{Card}\left(\underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{m \text{ times}}\right) = \text{Card}(B)^m = \bar{A}_n^m = n^m \tag{5.6.191}$$

où B^A est l'ensemble des applications de A dans B. La progression du nombre de possibilités est donc géométrique (et non "exponentielle" comme il est souvent dit à tort !).

Ce résultat mathématique est assimilable au résultat ordonné (un arrangement equation dont l'ordre des éléments de la suite est pris en compte) de m tirages dans un sac contenant n boules différentes avec remise après chaque tirage. Il est d'usage en France d'appeler cela une "p-liste".

✍**Exemples :**

E1. Combien de "mots" (ordonnés) de 7 lettres pouvons-nous former à partir d'un alphabet de 24 lettres distinctes (très utile pour connaître le nombre d'essais pour trouver un mot de passe par exemple) ? La solution est :

$$\bar{A}_{24}^7 = 24^7 = 4,586,471,424 \tag{5.6.192}$$

Un si grand nombre n'est pas très pratique pour indiquer la force d'un mot de passe. C'est pourquoi les professionnels de l'informatique préfèrent utiliser une mesure basée sur l'entropie comme nous le verrons dans la section de Mécanique statistique (voir page **??**).

E2. Combien de groupes d'individus aurons-nous lors d'une votation sur 5 sujets et où chacun peut être soit accepté, soit rejeté ? La solution (très utilisée dans les entreprises en Suisse) est :

$$\bar{A}_2^5 = 2^5 = 32 \tag{5.6.193}$$

Une généralisation simple de ce dernier résultat peut consister dans l'énoncé du problème suivant :

Si nous disposons de m objets $k_1, k_2, \ldots, k_m$ tels que k_i peut prendre n_i états différents alors le nombre de combinaisons possibles est :

$$A_{mn} = n_1 n_2 \ldots n_i \ldots n_m \tag{5.6.194}$$

Et si nous avons $n_1 = n_2 = \ldots = n_m$ alors nous retombons sur :

$$A_{mn} = A_n^m = n_1 n_2 \ldots n_i \ldots n_m = n^m \tag{5.6.195}$$

5.6.5.2 Permutations simples sans répétitions

Définition (#5.6.109) : Une "permutation simple sans répétitions" (appelée anciennement "substitution") de n objets distincts est une suite ordonnée (différente) de ces n objets par définition tous différents dans la suite (sans répétition).

Remarque

Attention à ne pas confondre le concept de permutation (de n éléments entre eux) et d'arrangement (de n éléments parmi m) !

Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé par récurrence : il y a n places pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant.

Il est dès lors trivial que nous aurons un nombre de permutations donné par :

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(n-1)) \tag{5.6.196}$$

Rappelons que le produit :

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(n-1)) = \prod_{i=1}^{n} i \tag{5.6.197}$$

est appelé "factorielle de n" et nous la notons $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Il y a donc pour n éléments distinguables :

$$\boxed{A_n = \prod_{i=1}^{n} i = n!} \tag{5.6.198}$$

permutations possibles. Ce type de calcul peut être par exemple utile en gestion de projets (calcul du nombre de manière différentes de recevoir dans une chaîne de production n pièces toutes différentes commandées chez des fournisseurs externes).

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Combien de "mots" (ordonnés) de 7 lettres distinctes sans répétition pouvons-nous former ?

$$A_n = 7! = 5040 \tag{5.6.199}$$

Ce résultat nous amène à l'assimiler au résultat ordonné (un arrangement A_n dont l'ordre des éléments de la suite est pris en compte) du tirage de toutes les boules différentes d'un sac contenant n boules distinguables sans remise.

Les énormes valeurs que peut donner la factorielle peuvent être assez surprenantes ou même parfois contre-intuitives (considérons par exemple le nombre de façons dont vous pouvez créer des groupes de disons simplement ... 7 amis !). À propos, on peut aussi se demander si l'Univers est calculable ou non, car de tels calculs conduisent à des nombres énormes !

5.6.5.3 Permutations simples avec répétitions

Définitions (#5.6.110) : Lorsque nous considérons le nombre de permutations ordonnées (différentes) d'une suite de n objets distincts tous nécessairement non différents dans une quantité donnée dans la suite nous parlons de "permutation simple avec répétitions".

Remarque

Il ne faut pas confondre cette dernière définition avec "l'arrangement avec répétition" vu plus haut !

Lorsque certains éléments ne sont pas tous distinguables dans une suite d'objets (ils sont répétitifs dans la suite), alors le nombre de permutations que nous pouvons constituer se réduit alors assez trivialement à un nombre plus petit que si tous les éléments étaient tous distinguables.

Soit n_i le nombre d'objets du type i, avec :

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \quad (5.6.200)$$

alors, nous notons :

$$\bar{A}_n(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_k) \quad (5.6.201)$$

avec $i = 1, 2, \ldots, k$ le nombre de permutations possibles (pour l'instant inconnu) avec répétition (un ou plusieurs éléments répétitifs dans une suite d'éléments sont non distinguables par permutation).

Si chacune des n_i places occupées par des éléments identiques était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par chacun des $n_i!$ (cas précédent).

Il vient alors que nous retombons sur la factorielle telle que :

$$\bar{A}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) n_1! n_2! \ldots n_k! = n! \quad (5.6.202)$$

dont nous déduisons immédiatement :

$$\boxed{\bar{A}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}} \quad (5.6.203)$$

Si les n objets sont tous différents dans la suite, nous avons alors :

$$n_1! = n_2! = \ldots = n_k! = 1! = 1 \quad (5.6.204)$$

Si les n objets sont tous différents dans la suite, nous avons alors :

$$\bar{A}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{1!1! \ldots 1!} = n! \quad (5.6.205)$$

Il conviendra donc de se rappeler que les permutations avec répétition sont en plus petit nombre que celles sans répétition (évident puisque nous ne prenons pas en compte les permutations des éléments identiques entre eux !).

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Combien de "mots" (ordonnés) pouvons-nous former avec les lettres du mot "Mississippi" :

$$\bar{A}_4(\underbrace{1}_{\text{M}},\underbrace{2}_{\text{PP}},\underbrace{4}_{\text{IIII}},\underbrace{4}_{\text{SSSS}}) = \frac{11!}{1!2!4!4!} = 34,650 \tag{5.6.206}$$

Ce résultat nous amène à l'assimiler au résultat ordonné (une permutation $\bar{A}_n$ dont l'ordre des éléments de la suite n'est pas pris en compte) du tirage de n boules non toutes distinguables d'un sac contenant $k \geq n$ boules avec remise limitée pour chaque boule.

5.6.5.4 Arrangements simples sans répétitions

Définition (#5.6.111) : Un "arrangement simple sans répétitions", ou de manière équivalente un "échantillonnage simple sans remise" (ESSR), est une suite ordonnée de p objets tous distincts pris parmi n objets distincts avec $n \geq p$.

Nous nous proposons donc maintenant de dénombrer les arrangements possibles sans répétition de p objets parmi n. Nous noterons A_n^p le nombre de ces arrangements.

Il est aisé de calculer $A_n^1 = n$ et de vérifier que $A_n^2 = n(n-1)$. Effectivement, il existe n façons de choisir le premier objet et $(n-1)$ façons de choisir le deuxième lorsque nous avons déjà le premier.

Pour déterminer A_n^p, nous raisonnons alors par récurrence. Nous supposons A_n^{p-1} connu et nous en déduisons :

$$A_n^p = A_n^{p-1}\left[n-(p-1)\right] = A_n^{p-1}(n-p+1) \tag{5.6.207}$$

Dès lors :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(p-1)) \tag{5.6.208}$$

Alors :

$$n! = A_n^p(n-p)! = \left[n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+2)(n-p+1)\right](n-p)(n-p-1)\ldots \tag{5.6.209}$$

d'où :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}} \tag{5.6.210}$$

Ce résultat nous amène à l'assimiler au résultat ordonné (un arrangement A_n^p dont l'ordre des éléments de la suite est pris en compte) du tirage de p boules distinctes d'un sac contenant n boules différentes sans remise.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Soit les 24 lettres de l'alphabet, combien de "mots" (ordonnés) de 7 lettres distinctes pouvons-nous former ?

$$A_{24}^{7} = \frac{24!}{(24-7)!} = 1,744,364,160 \quad (5.6.211)$$

Le lecteur aura peut-être remarqué que si nous prenons $p = n$ nous nous retrouvons avec :

$$A_{n}^{p} = \frac{n!}{0!} = n! \quad (5.6.212)$$

donc nous pouvons dire qu'une permutation simple de n éléments est comme un arrangement simple sans répétition avec $n = p$.

5.6.5.5 Combinaisons simples sans répétitions

Définition (#5.6.112) : Une "combinaison simple sans répétitions" ou "fonction de choix" est une suite non-ordonnée (dont l'ordre ne nous intéresse pas !) de p éléments tous différents (pas nécessairement dans le sens visuel du terme !) choisis parmi n objets distincts et est par définition notée dans ce livre C_p^n et appelée la "binomiale" ou "coefficient binomial".

Si nous permutons les éléments de chaque arrangement simple de p éléments parmi n, nous obtenons toutes les permutations simples et nous savons qu'il y en a p ! d'où en utilisant la convention d'écriture du présent livre (contraire à celle préconisée par la norme ISO 31-11 et ISO 80000-2 :2009 !) :

$$\boxed{C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}} \quad (5.6.213)$$

C'est une relation très souvent utilisée dans les jeux de hasard mais également dans l'industrie via la loi hypergéométrique (voir section Génie industriel page ??).

L'astuce suivante est un moyen simple de retenir cette fonction : considérons que nous devons sélectionner p parmi n indépendamment de l'ordre, quel est le nombre de possibilités ?

Nous savons que nous avons $6\dot{5} \cdot 4 = 120$ possibilités pour les sélectionner en tenant compte de la commande ! Le calcul que nous venons de faire est évidemment égal à $n!/P! = 6!/3! = 6{\cdot}5{\cdot}4$. Mais comme l'ordre ne doit pas être prise en compte, nous devons diviser 120 par le nombre de façons dont nous pouvons organiser les 3 personnes du groupe. Nous divisons donc 120 par 3! ou plus généralement et logiquement par $(n-p)!$. D'où la relation ci-dessus !

Remarques

R1. Nous avons nécessairement par construction $C_p^n \leq A_n^p$.

R2. En fonction des auteurs nous inversons l'indice ou le suffixe de C il faut donc être

En cours de traduction de l'anglais

prudent !

Ce résultat nous amène à l'assimiler au résultat non ordonné (un arrangement equation dont l'ordre des éléments de la suite n'est pas pris en compte) du tirage de p boules d'un sac contenant n boules différentes sans remise.

✍Exemples :

E1. Soit un alphabet de 24 lettres, combien avons-nous de choix de prendre 7 lettres parmi les 24 sans prendre en compte l'ordre dans lequel sont triées les lettres :

$$C_{7}^{24}=\frac{24!}{7!(24-7)!}=346,104 \qquad (5.6.214)$$

La même valeur peut être obtenue avec la fonction `COMBIN( )` de Microsoft Excel 11.8346 (version française).

E2. Dans un plan d'expérience (voir section de Génie Industriel page ??), nous avons 2 facteurs de $L=3$ niveaux chacun et nous avons donc besoin de $N=9$ essais pour déterminer complètement toutes les interactions. Si nous considérons que nous pouvons prendre un sous-ensemble de $S=3$ essais, combien de combinaisons de 3 parmi les 9 pouvons-nous choisir si les répétitions sont interdites ?

$$C_{3}^{9}=\frac{9!}{3!(9-3)!}=84 \qquad (5.6.215)$$

Nous comprenons donc pourquoi dans les plans d'expérience, il est important de trouver une astuce pour choisir le meilleur sous-ensemble (plans D-optimum par exemple !).

Il existe, relativement à la binomiale, une autre relation très souvent utilisée dans de nombreux cas d'études ou également de manière plus globale en physique ou analyse fonctionnelle. Il s'agit de la "formule de Pascal" :

Démonstration 5.37.2.

$$\begin{aligned}C_{p-1}^{n-1}+C_{p}^{n-1}&=\frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!(p-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!}\\&=\frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!}\end{aligned} \qquad (5.6.216)$$

Or $p!=p(p-1)!$, donc :

$$(p-1)!=\frac{p!}{p} \qquad (5.6.217)$$

et de même $(n-p)(n-p-1)!=(n-p)!$:

$$(n-p-1)!=\frac{(n-p)!}{n-p} \qquad (5.6.218)$$

En cours Anglais

Ainsi :

$$\begin{aligned}C_{p-1}^{n-1}+C_p^{n-1}&=\frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!}=\frac{(n-1)!p}{(n-p)!p!}+\frac{(n-1)!(n-p)}{(n-p)!p!}\\&=\frac{(n-1)!}{(n-p)!p!}\left[p+(n-p)\right]=\frac{(n-1)!n}{(n-p)!p!}=\frac{n!}{(n-p)!p!}=C_p^n\end{aligned}\tag{5.6.219}$$

■ Q.E.D.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

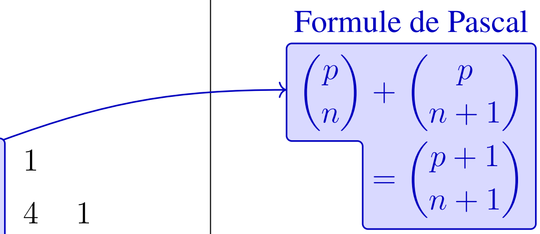


FIG. 5.99 – Formule de Pascal illustrée

En cours de traduction de l'anglais

Une autre relation très courante qui nous sera utile est "l'identité du coefficient binomial", donnée par :

$$\begin{aligned}\binom{n}{a}\binom{n-a}{b-a}&=\frac{n!}{(n-a)!a!}\frac{(n-a)!}{(n-a-(b-a))!(b-a)!}\\&=\frac{n!}{a!}\frac{1}{(n-b)!(b-a)!}\\&=\frac{n!}{(n-b)!b!}\frac{b!}{(b-a)!a!}\\&=\binom{n}{b}\binom{b}{a}\end{aligned}\tag{5.6.220}$$

où troisième égalité s'obtient en multipliant et en divisant par $b!$.

5.6.5.6 Combinaisons simples avec répétitions

Définition (#5.6.113) : Une "combinaison simple avec répétitions" de p éléments parmi n est une collection de p éléments non ordonnée, et non nécessairement distincts.

Les combinaisons simples avec répétitions ont une grande importance pour le test statistique de Wald–Wolfowitz utilisée en économie et biologique que nous étudierons dans le chapitre de Statistiques.

Introduisons ce type de combinaison directement avec un exemple et une approche ingénieuse que l'on doit (du moins c'est ce qui ce dit...) au physicien prix Nobel de physique 1938 : Enrico Fermi.

Considérons $\{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble ayant un nombre n d'éléments égal à 6 et dont nous tirons un nombre p égal à 8. Nous souhaiterions calculer le nombre de combinaisons avec répétitions des éléments d'un ensemble de départ de cardinal 6 dans une ensemble d'arrivée de cardinal 8.

Envisageons, par exemple, les trois combinaisons suivantes :

$$a\ a\ b\ b\ b\ e\ e\ f \tag{5.6.221}$$
$$b\ b\ d\ d\ d\ e\ e\ e \tag{5.6.222}$$
$$b\ b\ b\ d\ d\ d\ d\ d \tag{5.6.223}$$

où comme l'ordre des éléments n'intervient pas, nous avons regroupé les éléments afin de faciliter la lecture. Représentons maintenant tous les éléments ci-dessus par un même symbole : "0" et séparons les groupes constitués d'un même élément par des barres (c'est là l'astuce d'Enrico Fermi). Ainsi, lorsqu'un ou plusieurs éléments ne figurent pas dans une combinaison, nous noterons tout de même les barres de séparation (correspondant au nombre d'éléments absents + la séparation du groupe). Les trois combinaisons ci-dessus s'écrivent alors :

$$0\,0\ |\ 0\,0\,0\ |\,|\,|\ 0\,0\ |\ 0 \tag{5.6.224}$$
$$|\,0\,0\ |\,|\ 0\,0\,0\ |\ 0\,0\,0\ | \tag{5.6.225}$$
$$|\,0\,0\,0\,0\ |\,|\ 0\,0\,0\,0\ |\,| \tag{5.6.226}$$

Nous voyons ci-dessus que dans chaque cas, il a y huit "0" (logique...) mais surtout qu'il y a toujours cinq "|". Le nombre de combinaisons avec répétitions des 6 éléments de l'ensemble de départ à celui d'arrivée de 8 éléments est donc égal au nombre de permutations avec repetitions de $8 + 5 = 13$ éléments, donc :

$$\frac{13!}{5!8!} = 1287 \tag{5.6.227}$$

Nous remarquons que dans le cas général le nombre de combinaisons avec répétitions sans prise en compte de l'ordre s'écrit alors :

$$\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} \tag{5.6.228}$$

Ce qu'il est de tradition de noter :

$$\Gamma_p^n = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} \tag{5.6.229}$$

Nous remarquons par ailleurs que :

$$\Gamma_p^n = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} = \frac{(n+p-1)!}{((n+p-1)-p)!p!} = C_p^{n+p-1} \tag{5.6.230}$$

Soit au final :

$$\boxed{\Gamma_p^n = C_p^{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}} \tag{5.6.231}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce que suivant le context, nous notons aussi :

$$\Gamma_p^n = C_p^{n+p-1} = C_{n-1}^{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} \tag{5.6.232}$$

✍Exemple :

Combien de combinaisons de résultats différents pouvons-nous faire en lançant trois dés standard (6 face) si l'ordre des dés n'a pas d'importance ? ?

La réponse est :

$$\Gamma_p^n = C_p^{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} = \frac{(6+3-1)!}{(6-1)!3!} = 56 \tag{5.6.233}$$

Mais si l'ordre importe, alors c'est simplement $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Pour résumer :

Type	Expression
Arrangement simple avec répétitions (noté ${}^R V_n^m$ selon ISO 80000-2 :2009)	$\bar{A}_n^m = n^m$
Arrangement simple sans répétitions (noté V_n^m selon ISO 80000-2 :2009)	$A_m^n = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
Permutation simple sans répétitions	$A_n = n!$
Permutation simple avec répétitions	$\bar{A}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$
Combinaison simple sans répétitions : cas de l'arrangement simple sans répétitions où l'ordre n'est pas pris en compte	$C_m^n = \dbinom{n}{p} = \dfrac{A_n^m}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
Combinaison simple avec répétitions : cas de permutation simple avec répétitions où l'ordre n'est pas pris en compte (noté ${}^R C_n^p$ selon ISO 80000-2 :2009)	$\Gamma_p^n = C_p^{n+p-1} = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$

TAB. 5.25 – **Résumé des cas possibles**

Quatre des relations ci-dessus peuvent également être présentées comme suit :

	L'ordre importe	L'ordre n'importe pas
Avec remplacement	$\bar{A}_n^m = n^m$	$\Gamma_p^n = C_p^{n+p-1} = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$
Sans remplacement	$A_m^n = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$C_m^n = \dbinom{n}{p} = \dfrac{A_n^m}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Si nous considérons trois éléments A, B et C, le nombre total cumulé de combinaisons où l'ordre est important est de façon relativement évidente donné par :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!}-1&=\frac{3!}{0!}+\frac{3!}{1!}+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}-1\\&=\{A,B,C,AB,AC,BC,BA,CA,CB,ABC,BCA,CBA,BAC,ACB,CAB\}\\&=(6+6+3+1)-1=15\end{aligned}\tag{5.6.234}$$

Mais si l'ordre n'a pas d'importance, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}-1&=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}-1\\&=\{A,B,C,AB,BC,CA,ABC\}=(1+3+3+1)-1=7=2^n-1\end{aligned}\tag{5.6.235}$$

Nous avons également que le nombre de façons dont $m\cdot n$ différents peuvent être divisés en groupes égaux de taille m contenant chacun des objets n et où l'ordre des groupes est important qui est donné par :

$$\frac{(mn)!}{(n!)^m}\tag{5.6.236}$$

et le nombre de façons dont $m\cdot n$ différents éléments peuvent être divisés en groupes égaux de taille m, chacun contenant n objets et où l'ordre des groupes n'a pas d'importance qui est donné par :

$$\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}\tag{5.6.237}$$

Les deux tableaux ci-dessus peuvent également être résumés et illustrés comme suit :

En cours de traduction de l'anglais

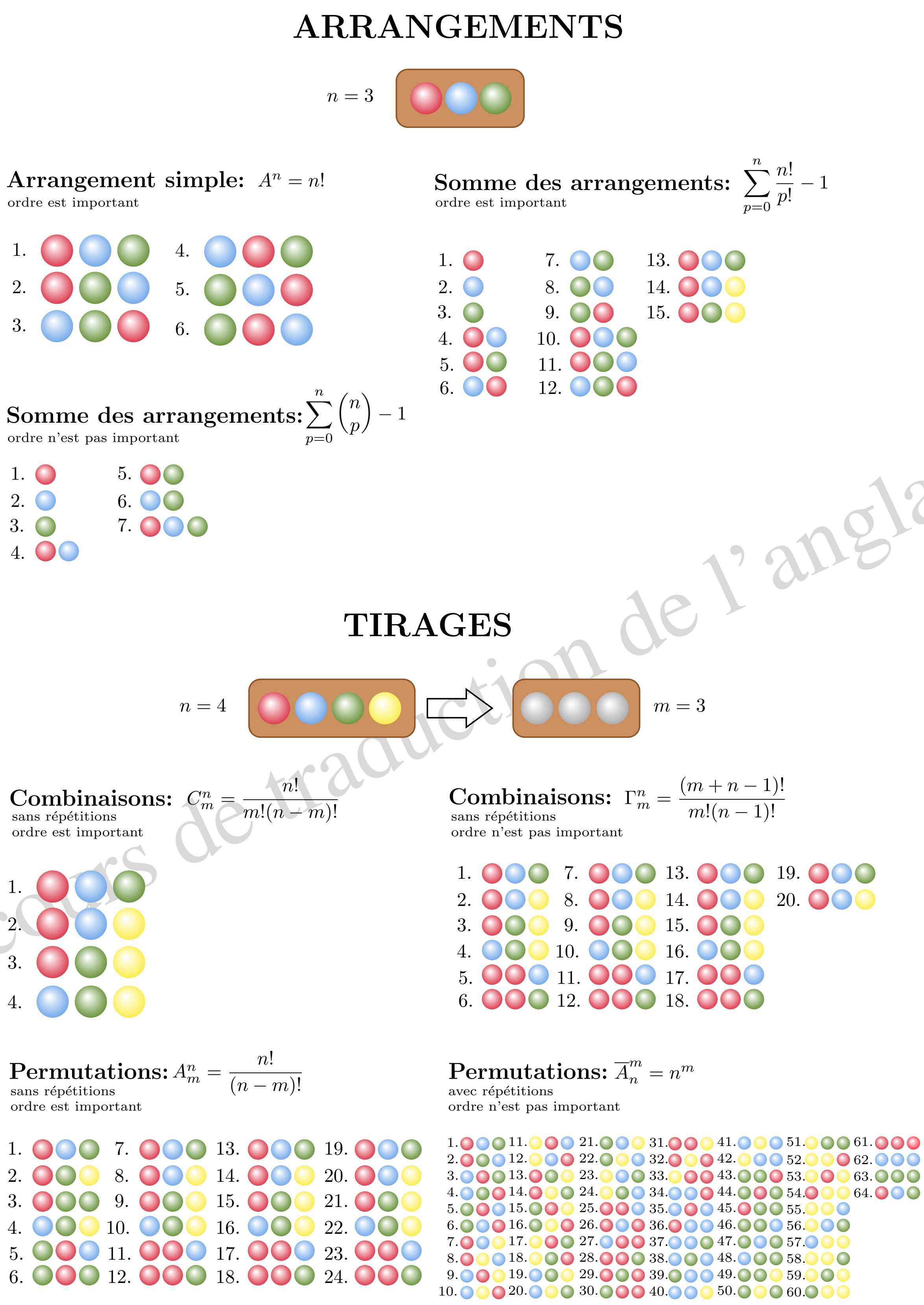
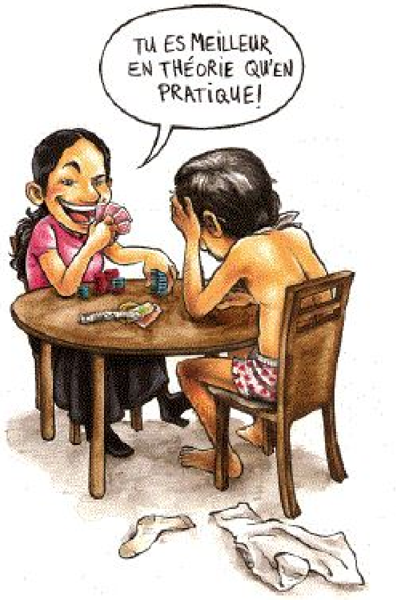


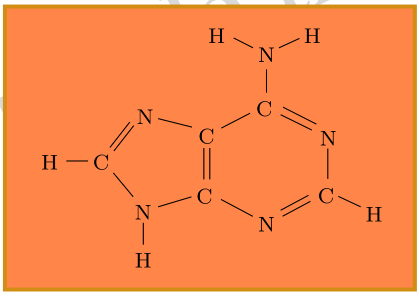
FIG. 5.100 – Résumé des combinaisons, permutations et arrangement simples

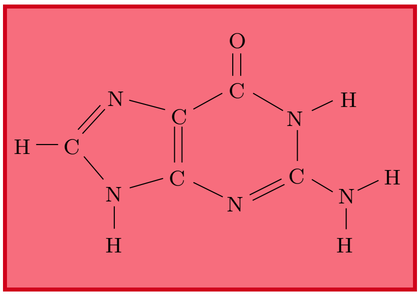
En cours de traduction de l'anglais

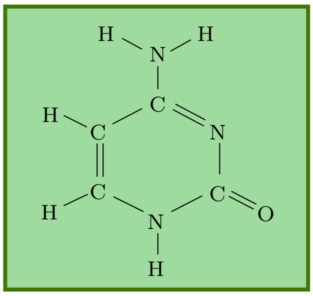


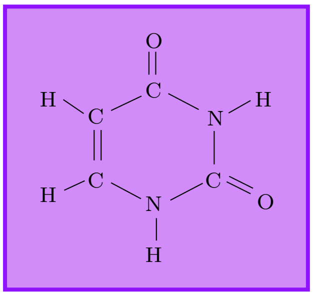
Pour clore cette étude sur les bases de l'analyse combinatoire, il y aurait un autre cas important mais qui semble encore non résolu en ce début de XXIe siècle et qui est lié à la chimie (certains experts parlent de "chimie combinatoire"). En effet, étant donné un certain nombre d'éléments chimiques purs ayant leur valence respective dans certaines conditions de thermodynamique, combien de molécules impliquant l'une d'entre elles peuvent être créées ?

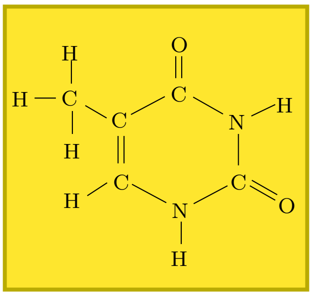
Par exemple, avec l'adénine (l'un des quatre composants fondamentaux de l'ADN) donnée par $C_5N_5H_5$ et visible dans la figure ci-dessous :


Adénine


Guanine


Cytosine


Uracile


Thymine

Nous pourrions alors nous demander quel est le nombre total de combinaisons impliquant 5C, 5N et 5H ?

En cours de traduction de l'anglais

Une limite supérieure à cette question serait donnée (sur la base de leur valence respective par) :

$$4^5 \cdot 3^5 \cdot 2^5 = 7,962,624 \tag{5.6.238}$$

Mais si nous dessinons toutes les combinaisons physiques possibles dans des conditions de température et de pression standard, il semble qu'une limite supérieure se situe plutôt entre 200 et $2'000$ molécules différentes.

Il s'agit donc toujours d'un «problème ouvert» important dans le domaine de la chimie avec d'énormes possibilités d'application (certaines industries utilisent en réalité des ordinateurs pour trouver des combinaisons possibles d'éléments chimiques purs pouvant avoir des applications en médecine !).

En cours de traduction de l' anglais

5.6.6 Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov sont des outils statistiques et probabilistes simples et puissants mais dont la forme de présentation mathématique prête parfois à l'horreur.... Nous allons tenter ici de simplifier un maximum les notations pour introduire cet outil formidable très utilisé au sein des entreprises pour gérer la logistique, les files d'attentes aux centrales d'appel ou aux caisses de magasins jusqu'à la théorie de la défaillance pour la maintenance préventive, en physique statistique ou en génie biologique (et la liste est encore longue et pour plus de détails le lecteur pourra se reporter aux chapitres concernés disponibles dans ce livre...).

Définitions (#5.6.114) :

D1. Nous noterons $\{X(t)\}_{t\in T}$ un processus probabiliste fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire. Ainsi, à chaque instant t, $X(t)$ est donc une variable aléatoire que nous désignons par "processus stochastique" (pour plus de détails dans le cadre de la finance, voir le chapitre d'économie).

D2. Si nous considérons un temps discret, nous notons alors $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un "processus stochastique à temps discret".

D3. Si nous supposons en outre que les variables aléatoires X_n ne peuvent prendre qu'un ensemble discret de valeurs nous parlons alors de "processus à temps discret et à espace discret".

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Il est tout à fait possible comme dans la théorie des files d'attentes (voir section Techniques de Gestion page ??) d'avoir un processus à temps continu et à espace d'états discrets.

Définition (#5.6.115) : $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une "chaîne de Markov" si et seulement si :

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-2}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \quad (5.6.239)$$

en d'autres termes (c'est très simple !) la probabilité pour que la chaîne soit dans un certain état à la n-ème étape du processus ne dépend que de l'état du processus à l'étape n-1 et pas des étapes précédentes !

Remarque

Donc en probabilités un processus stochastique vérifie la propriété markovienne ci-dessus si et seulement si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donné l'instant présent, ne dépend que de ce même état présent et pas des états passés. Un processus qui possède cette propriété est aussi appelé "processus de Markov".

Définition (#5.6.116) : Une "chaîne de Markov homogène" est une chaîne telle que la probabilité qu'elle a pour passer dans un certain état à la n-ième étape soit indépendante du temps. En d'autres termes, la loi de probabilité caractérisant la prochaine étape ne dépend pas du temps

(de l'étape précédente), et en tout temps la loi de probabilité de la chaîne est toujours la même pour caractériser la transition à l'étape en cours.

Nous pouvons alors définir (réduire) la loi de "probabilité de transition" d'un état i vers un état j par :

$$p_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \tag{5.6.240}$$

Il est alors naturel de définir la "matrice de transition" ou "matrice stochastique" :

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.6.241}$$

comme la matrice qui contient donc tous les probabilités possibles de transitions des états d'un graphe d'états orienté.

Les chaînes de Markov peuvent être représentées graphiquement sous la forme d'un graphe orienté G (voir section Théorie des Graphes page 2982) appelé parfois automate" ayant pour sommet les points (états) i et pour arêtes les couples orientés (i, j). Nous associons alors à chaque composante un arc orienté et sa probabilité de transition.

En cours de traduction de l'anglais

✍Exemple :

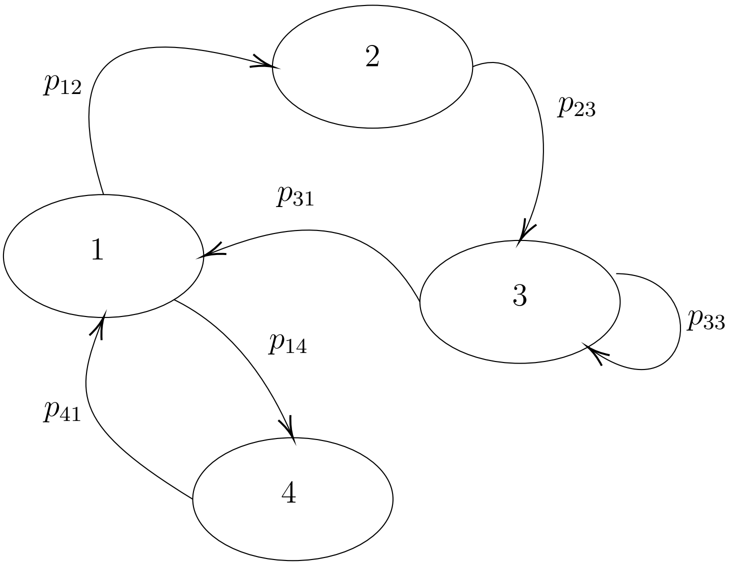


FIG. 5.101 – **Exemple générique d'une chaîne de Markov**

Ainsi, dans l'exemple du graphe orienté ci-dessus, les seules transitions permises par les 4 états (matrice 4×4) ci-dessus sont celles indiquées par les flèches. Ce qui fait que la matrice de transition se simplifie alors en :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\ p_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6.242)$$

où le lecteur remarquera que nous avons la propriété triviale (par construction !) que la somme des termes (probabilités) d'une ligne de la matrice P est toujours unitaire (et donc que la somme des termes d'une colonne de la transposée de la matrice P est toujours unitaire aussi) :

$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad (5.6.243)$$

et que la matrice est positive (ce qui signifie que tous ces termes sont positifs ou nuls).

Remarque

Se rappeler que la somme des probabilités des colonnes obtenues est toujours égale à 1 pour la transposée de la matrice stochastique ! !

L'analyse du régime transitoire (ou : promenade aléatoire) d'une chaîne de Markov consiste à déterminer (ou à imposer à !) la matrice-colonne (vecteur) $p(n)$ d'être dans un état donné à la

En cours ... anglais

n-ième étape de la promenade :

$$p(n)=\begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_{\text{Card}(E)}(n) \end{pmatrix} \tag{5.6.244}$$

avec la somme des composantes qui vaut évidemment toujours 1 (car la somme des probabilités de se trouver dans un quelconque des sommets du graphe à un moment/étape donné(e) doit être égale à 100%).

Nous appelons fréquemment cette matrice-colonne "vecteur stochastique" ou "mesure de probabilité sur le sommet i".

Théorème 5.38. Démontrons que la probabilité de ce vecteur stochastique est effectivement toujours unitaire.

Démonstration 5.38.1. Si $p(n)$ est un vecteur stochastique, alors son image :

$$p(n+1)=P^Tp(n) \tag{5.6.245}$$

l'est aussi. Effectivement, $p_i(n+1)\geq 0$ car :

$$p_i(n+1)=\sum_i p_{ij}p_j(n) \tag{5.6.246}$$

est une somme de termes positifs ou nuls. De plus, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\sum p_i(n+1)&=\sum_i\sum_j p_{ij}p_j(n)=\sum_j\sum_i p_{ij}p_j(n)=\sum_j\left(\sum_i p_{ij}\right)p_j(n)\\ &=\sum_j 1\cdot p_j(n)=\sum_j p_j(n)=1\end{aligned} \tag{5.6.247}$$

■ Q.E.D.

Ce vecteur de probabilités, dont les composantes sont positives ou nulles, dépend (c'est assez intuitif) de la matrice de transition P et du vecteur de probabilités initiales $p(0)$.

Bien que cela soit démontrable (théorème de Perron-Frobenius) le lecteur pourra vérifier par un cas pratique (informatisé ou non !) que si nous choisissons un vecteur d'état $p(n)$ quelconque alors il existe pour toute matrice stochastique P un vecteur unique de probabilité noté traditionnellement π tel que :

$$P^T\pi=\pi \tag{5.6.248}$$

Une telle mesure de probabilité π vérifiant la relation précédente est appelée une "mesure invariante" ou "mesure stationnaire" ou encore "mesure d'équilibre" qui représente l'état d'équilibre du système. En termes d'algèbre linéaire (voir section du même nom page 1898), pour la valeur propre 1, π est un vecteur propre de P (cf. chapitre d'Algèbre Linéaire).

En cours de traduction de l' anglais

Nous en verrons un exemple trivial dans le chapitre de Théorie des Graphes (page 2997) qui sera redéveloppé sous forme détaillée et complète ainsi que dans le chapitre de Théorie Des Jeux Et De La Décision dans le cadre de la pharmaco-économie (page ??) et de l'ingénierie logicielle quand nous étudierons les fondamentaux de l'algorithme PageRank de Google (page ??). Mais signalons également que les chaînes de Markov sont également utilisées le domaine de la casse de mots de passe informatiques et en météorologie :

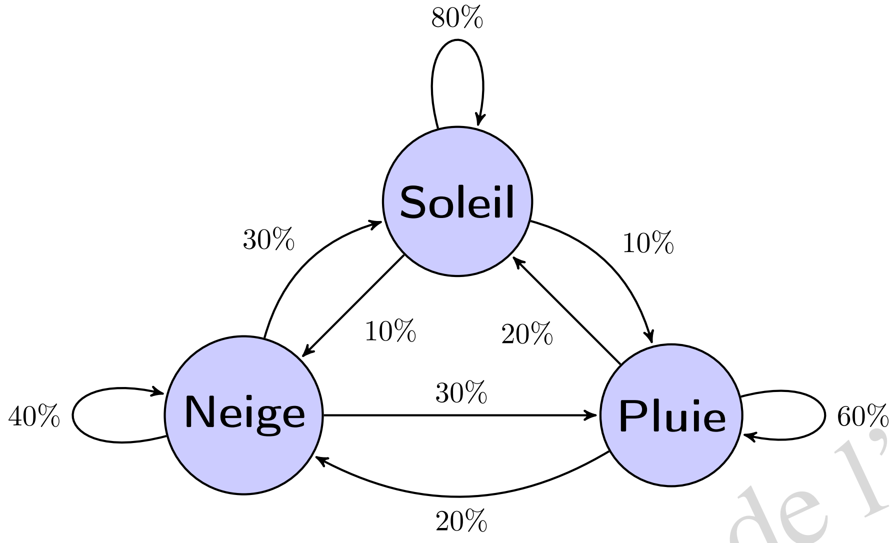


FIG. 5.102 – Exemple concret très simpliste d'une chaîne de Markov

ou dans le domaine médical, financier (MCMC), des transports, du marketing, etc.

Signalons également une égalité trivial à laquelle les mathématicien auraient donné le nom "d'équation de Chapman-Kolmogorov". Il s'agit simple de l'égalité suivante obtenue par récurrence (qui permet de gagner beaucoup de temps en termes de calculs appliqués) :

$$p(n) = P^T p(n-1) = P^T \left(P^T p(n-2)\right) = \ldots = \left(P^T\right)^n p(0) \tag{5.6.249}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dans le domaine du language, à partir de l'analyse fréquentielle de séquence de mots, les ordinateurs arrivent à construire aussi des chaînes de Markov et donc à proposer une sémantique plus correcte lors de corrections grammaticales informatisées ou de transcription de écrite de présentations orales.

Définitions (#5.6.117) :

D1. Une chaîne de Markov est dite "chaîne de Markov irréductible" si tous les états sont liés aux autres (c'est le cas de la chaîne dans la figure ci-dessus).

D2. Une chaîne de Markov est dite "chaîne de Markov absorbante" si un quelconque des états de la chaîne absorbe les transitions (donc rien n'en sort pour dire simplement les choses !).

~90 %

27 votes, 51.11%

5.7. Statistiques

La statistique est une science qui a pour objet le groupement méthodique de faits ou événements répétitifs qui se prêtent à une évaluation numérique ou qualitative dans le temps suivant une loi donnée. Dans l'industrie et dans l'économie en général, la statistique est une science qui permet dans un environnement incertain de faire des inférences valides.

Il faut savoir que parmi tous les domaines de la mathématique, celui qui est utilisé à la plus large échelle dans les entreprises et centres de recherches est bien la statistique et particulièrement depuis que des logiciels en facilitent grandement les calculs ! Raison pour laquelle cette section est une des plus grosse du livre alors que seuls les concepts élémentaires y sont présentés !

Signalons aussi que les statistiques ont très mauvaise réputation à l'université car les notations y sont souvent confuses et varient grandement d'un professeur à l'autre, d'un livre à l'autre, d'un praticien à l'autre. En toute rigueur, il faudrait se conformer au vocabulaire et notations de la norme ISO 3534-1 :2006 et comme malheureusement cette section a été écrite avant la publication de cette norme... un certain temps d'adaptation sera nécessaire avec qu'il y ait conformité.

Il est peut être inutile de préciser que la statistique est beaucoup utilisée en ingénierie, physique théorique, physique fondamentale, économétrie, gestion de projets ainsi que dans l'industrie des processus, dans les domaines des assurances vies et non vies, dans l'actuariat ou dans la simple analyse de banque de données (avec Microsoft Excel très souvent... malheureusement....) et la liste est encore longue. Par ailleurs, nous rencontrerons les outils présentés ici assez souvent dans les chapitres de Mécanique des Fluides, de Thermodynamique, des Techniques de Gestion, du Génie Industriel et d'économie (en particulier dans ces deux dernières). Le lecteur pourra donc s'y reporter pour avoir des applications pratiques concrètes de quelques-uns des éléments théoriques les plus importants qui seront vus ici.

En cours de traduction de l'anglais

Signalons également que outre les quelques exemples simples donnés sur ces pages, de nombreux autres exemples applicatifs sont donnés sur le serveur d'exercices du site dans les catégories Probabilités et Statistiques, Génie Industriel, économétrie et Techniques de Gestion.

Définition (#5.7.118) : Le but principal de la statistique est de déterminer les caractéristiques d'une population donnée à partir de l'étude d'une partie de cette population, appelée "échantillon" ou "échantillon représentatif". La détermination de ces caractéristiques doit permettre aux statistiques d'être un outil d'aide à la décision !

Remarque

Le traitement des données concerne la "statistique descriptive". L'interprétation des données à partir des estimateurs s'appelle "l'inférence statistique" (ou "statistique inférentielle"), et l'analyse de données en masse la "statistique fréquentielle" en opposition à

l'inférence bayésienne (voir section de Probabilités page 484).

Lorsque nous observons un événement prenant en compte certains facteurs, il peut arriver qu'une deuxième observation ait lieu dans des conditions qui semblent identiques. En répétant ces mesures plusieurs fois sur différents objets supposés similaires, nous pouvons constater que les résultats observables sont distribués statistiquement autour d'une valeur moyenne qui est, finalement le résultat possible le plus probable. Dans la pratique, nous n'effectuons cependant parfois qu'une seule mesure et il s'agit alors de déterminer la valeur de l'erreur que nous commettons en adoptant celle-ci comme moyenne mesurée. Cette détermination nécessite de connaître le type de distribution statistique auquel nous avons affaire et c'est ce que nous allons nous attarder (entre autres) à étudier ici (les bases du moins !). Il existe cependant plusieurs approches méthodologiques courantes (les moins courantes n'étant pas citées pour l'instant) face au hasard :

1. Une toute première consiste à ignorer purement et simplement les éléments aléatoires, pour la bonne raison que l'on ne sait pas comment les intégrer. Nous utilisons alors la "méthode des scénarios" appelée aussi "simulation déterministe". C'est typiquement un outil utilisé par les financiers ou gestionnaires non diplômés travaillant avec des outils comme Microsoft Excel (qui inclut un outil de gestion de scénarios) ou Microsoft Project (qui inclut un outil de scénarios déterministes du type optimiste, pessimiste et attendu).

2. Une seconde approche envisageable, quand nous ne savons pas associer des probabilités précises aux futurs événements aléatoires, est la théorie des jeux (voir section Théorie des Jeux et de la Décision page ??) où l'on utilise des critères de sélection semi-empiriques comme le critère du maximax, du minimax, de Laplace, de Savage, etc.

3. Enfin, quand nous pouvons lier des probabilités aux événements aléatoires, soit que ces probabilités découlent de calculs ou de mesures, soit qu'elles reposent sur une expérience acquise auprès de situations antérieures de même nature que la situation actuelle, nous pouvons faire appel aux statistiques descriptives et inférentielles (contenu du présent chapitre) pour tirer des informations exploitables et pertinentes de cette masse de données acquises.

4. Une dernière approche quand nous avons connaissance de probabilités relatives aux issues intervenantes faisant suite à des choix stratégiques est l'utilisation de la théorie de la décision (voir section de Théorie des Jeux et de la Décision pages ?? ou ??, ??, ?? et ??).

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Sans la statistique mathématique, un calcul sur des données (par exemple une moyenne), n'est qu'un "indicateur ponctuel". C'est la statistique mathématique qui lui donne le statut d'estimateur dont on maîtrise le biais, l'incertitude et autres caractéristiques statistiques. Nous cherchons en général à ce que l'estimateur soit sans biais, convergeant et efficace (nous verrons lors de notre étude des estimateurs plus loin de quoi il s'agit exactement).

R2. Lorsque nous communiquons une statistique il devrait être obligatoire de préciser l'intervalle de confiance, la p-valeur ainsi que la taille de l'échantillon étudié (statistiques

absolues) et ses caractéristiques détaillées et mettre à disposition les données sources ainsi que le protocole de mesure sinon quoi elle n'a quasiment aucune valeur scientifique (nous verrons toute ces notions en détails plus loin). Une erreur courante est de communiquer en valeur relative. Par exemple sur un groupe test $1'000$ femmes, 5 femmes mourront d'un cancer du sein sans dépistage, alors qu'avec dépistage 4 femmes. Un peu rapidement on dira (typiquement les médecins....) que le dépistage sauve donc 20% des femmes (valeur relative). Ce qui est faux puisqu'en absolu l'avantage du dépistage est non significatif !

R3. Si vous avez un professeur ou un formateur qui ose vous enseigner les statistiques et probabilités uniquement avec des exemples basés sur des jeux de hasard (cartes, dés, allumettes, pile ou face, etc.) débarrassez-vous en ou dénoncez-le. Normalement les exemples devraient être basés sur l'industrie, l'économie ou la R&D, bref dans des domaines utilisés tous les jours par les entreprises !

Introduisons avant de continuer quelques définitions qui vont nous être utiles pour la suite sur le concept d'échantillons et de moyennes (nous reviendrons plus tard sur ces définitions avec une approche plus formelle et technique !) :

En cours de traduction de l'anglais

5.7.1 Échantillons

Lors de l'étude statistique d'ensembles d'informations, la façon de sélectionner l'échantillon est aussi importante que la manière de l'analyser. Il faut que l'échantillon soit représentatif de la population (nous ne faisons pas nécessairement référence à des populations humaines !). Pour cela, l'échantillonnage aléatoire est le meilleur moyen d'y parvenir.

Définitions (#5.7.119) :

D1. Le statisticien part toujours de l'observation d'un ensemble fini d'éléments, que nous qualifions de "population". Les éléments observés, en nombre n, sont tous de même nature, mais cette nature peut être fort différente d'une population à l'autre.

D2. Nous sommes en présence d'un "caractère quantitatif" lorsque chaque élément observé fait explicitement l'objet d'une même mesure. À un caractère quantitatif donné, nous associons une "variable quantitative" continue ou discrète qui synthétise toutes les valeurs possibles que la mesure considérée est susceptible de prendre (ce type d'information étant représenté par des distributions du type distribution de Gauss-Laplace, distribution bêta, distribution de Poisson, etc.).

> **Remarque**
>
> Nous reviendrons sur le concept de "variable" et de "distribution" un peu plus loin...

D3. Nous sommes en présence d'un "caractère qualitatif" lorsque chaque élément observé fait explicitement l'objet d'un rattachement unique à une "modality" choisie dans un ensemble de modalités exclusives (de type : homme | femme) permettant de classer tous les

éléments de l'ensemble étudié selon un certain point de vue (ce type d'information étant représenté par des diagrammes à barre, fromages, diagrammes à bulles, etc.). L'ensemble des modalités d'un caractère peut être établi a priori avant l'enquête (une liste, une nomenclature, un code) ou après enquête. Une population étudiée peut être représentée par un caractère mixte, ou ensemble de modalités tel que genre, tranche salariale, tranche d'âge, nombre d'enfants, situation matrimoniale par exemple pour un individu.

D4. Un "échantillon aléatoire" est un échantillon tiré au hasard dans lequel tous les individus d'une population ont la même chance, ou "équiprobabilité" (et nous insistons sur le fait que cette probabilité doit être égale), de se retrouver dans l'échantillon.

D5. Dans le cas contraire d'un échantillon dont les éléments n'ont pas été pris au hasard, nous parlons alors "d'échantillon biaisé" (dans le cas inverse nous parlons "d'échantillon non-biaisé").

Remarque

Un petit échantillon représentatif est, de loin, préférable à un grand échantillon biaisé. Mais lorsque la taille des échantillons utilisés est petite, le hasard peut donner un résultat moins bon que celui qui est biaisé...

En cours de traduction de l'anglais

5.7.2 Moyennes

La notion de "moyenne" ou "tendance centrale" (les financiers appellent cela aussi une "mesure de localisation"...) est avec la notion de "variable" à la base des statistiques.

Cette notion nous semble très familière et nous en parlons beaucoup sans nous poser trop de questions. Pourtant il existe divers qualificatifs (nous insistons sur le fait que ce ne sont que des qualificatifs !) pour distinguer la forme de la résolution d'un problème consistant à calculer la moyenne.

Ainsi, il faut être très très prudent quant aux calculs de moyennes car il y a une fâcheuse tendance dans les entreprises à se précipiter et à utiliser systématiquement la moyenne arithmétique sans réfléchir, ce qui peut amener à de graves erreurs ! Un exemple sympathique (pour faire un analogie) est qu'un nombre considérable de législations exigent seulement des seuils moyens de pollution par année alors que par exemple, fumer 1 cigarette par jour pendant 365 jours n'a pas le même impact que fumer 365 cigarettes en une journée sur une année alors que les deux ont la même moyenne pris sur un an... C'est une preuve flagrante d'incompétence statistique du législateur.

Voici un petit échantillon d'erreurs courantes :

- Considérer que la moyenne arithmétique est la valeur qui coupe la population en deux parties égales (alors que c'est la médiane qui fait cela).
- Considérer que la moyenne de ratios du type objectifs/réalisés est égale au ratio des moyennes des objectifs et des moyennées des réalisations (alors que ce n'est pas la même chose !).

- Considérer que la moyenne des salaires de différentes filliales est égale à la moyenne générale des salaires (alors que ceci n'est vrai que si et seulement si il y a le même nombre d'employés dans chaque filliale).
- Considérer que la moyenne de la moyenne des lignes d'un tableau est toujours égal à la moyenne des moyennes des colonnes (alors que ceci n'est vrai que si et seulement si le contenu des cellules est non vide).
- Calculer la moyenne arithmétique de progression de chiffres d'affaires données en % (alors qu'il faut utiliser la moyenne géométrique).
- etc.

Nous verrons ci-dessous différentes moyennes avec des exemples relatifs à l'arithmétique, au dénombrement, à la physique, à l'économétrie, à la géométrie et à la sociologie. Le lecteur trouvera d'autres exemples pratiques en parcourant l'ensemble de ce livre.

Définitions (#5.7.120) : Soient x_i des nombres réels, nous avons alors :

D1. La "moyenne arithmétique" ou "moyenne empirique" (la plus communément connue) est définie par le quotient de la somme des

$$\mu_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5.7.1}$$

et très souvent notée $\bar{x}$ ou encore $\widehat{\mu}$ est pour toute loi statistique discrète ou continue un estimateur sans biais de l'espérance.

La moyenne arithmétique représente donc une mesure statistique (non robuste car trop sensible aux valeurs extrêmes contrairement à la médiane) exprimant la grandeur qu'aurait chacun des membres d'un ensemble de mesures si la somme doit être identique au produit de la moyenne arithmétique par le nombre de membres.

En cours de traduction de l'anglais

✍ **Exemple :**

Considérons trois produits de prix respectifs $\{10.\text{-}, 30.\text{-}, 60.\text{-}\}$ dont le prix a augmenté respectivement de $\{1.\text{-}, 6.\text{-}, 18.\text{-}\}$, d'où respectivement un augmentation totale de 25.-. L'augmentation moyenne arithmétique est donc :

$$\mu_a = \frac{1+6+18}{3} = 8.\bar{3} \Rightarrow 3 \cdot 8.\bar{3} = 25.\text{-}$$

Remarque

Le fait statistique que lorsque les caractéristiques des objets individuels au sein d'une population d'objets similaires sont distribués selon une loi donnée (courbe) nous amène à l'observation que lorsque nous échantillonnons une telle population, nous avons plus de chances de trouver une propriété proche de la moyenne que un sur chaque extrême de la courbe. C'est ce qu'on appelle le "principe de médiocrité".

Si plusieurs valeurs occurrent plus d'une fois dans les mesures, la moyenne arithmétique sera alors souvent notée formellement :

$$\mu_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{5.7.2}$$

et la dernière égalité est appelée "moyenne pondérée (par les effectifs)" et souvent notée :

$$\mu_w = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{5.7.3}$$

Notez que la moyenne arithmétique est un cas particulier de la moyenne pondérée ! Parce que nous pouvons avoir $w_i \neq n_i/n$ dans certaines applications pratiques courantes !

✍**Exemple :**

Considérons trois produits de prix respectifs $\{10.\text{-}, 30.\text{-}, 60.\text{-}\}$ (donc un total de $100.\text{-}$) dont le prix a augmenté respectivement de $\{1.\text{-}, 6.\text{-}, 18.\text{-}\}$, soit $\{10\%, 20\%, 30\%\}$, d'où respectivement une augmentation totale de $25.\text{-}$ (de $100.\text{-}$ à $125.\text{-}$ d'où il est immédiat que l'augmentation globale est de 25%). L'augmentation moyenne arithmétique en pourcentage est donc de :

$$\mu_a = \frac{10\% + 20\% + 30\%}{3} = 20\%$$

et l'augmentation moyenne pondérée est de :

$$\mu_w = \frac{10.\text{-}}{100.\text{-}}10\% + \frac{30.\text{-}}{100.\text{-}}20\% + \frac{60.\text{-}}{100.\text{-}}30\% = 25\%$$

Il est alors facile d'indentifier que le résultat qui fait sens dans le cas présent est la moyenne pondérée et non la moyenne arithmétique !

En ... lais

Enfin, indiquons que dans le cadre de cette démarche, la moyenne pondérée par les effectifs prendra le nom "d'espérance mathématique" ou simplement "espérance" dans le domaine d'étude des probabilités.

Nous pouvons tout aussi bien utiliser les fréquences d'apparition des valeurs observées (dites "fréquence des classes") :

$$f_i = \frac{n_i}{n} \tag{5.7.4}$$

De telle manière que nous obtenons une définition équivalent appelée "moyenne pondérée par les fréquences de classe" :

$$\mu_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \tag{5.7.5}$$

Remarque

Le lecteur trouvera peut-être intéressant de savoir que dans de nombreuses applications métiers des statistiques (notamment en "Machine Learning"), lorsque les statistiques doivent être mises à jour "à la volée" à chaque fois que de nouvelles données apparaissent nous parlons alors de "statistiques en flux de données" ou "data stream mining" ou même "apprentissage en ligne". Il faut donc trouver un moyen algorithmique efficace pour mettre à jour les calculs sans tout recalculer à partir de zéro ! L'exemple typique le plus simple est la moyenne ! Pour calculer la nouvelle moyenne pour chaque nouvelle donnée entrante étant donné une série de données $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous utilisons simplement :

$$\mu_{k+1} = \frac{u_k \cdot k + x_{k+1}}{k+1} \tag{5.7.6}$$

Essayer d'exprimer en streaming un maximum d'algorithmes ou de méthodes de machine learning/statistiques est un travail à plein temps (et un gros travail dans ce sens a déjà été fait) !

Avant de continuer, indiquons que dans le domaine de la statistique il est souvent utile et nécessaire de regrouper les mesures/données dans des intervalles de classe de largeur donnée (voir les exemples plus loin). Il faut souvent faire plusieurs essais pour cela même s'il existe des formules semi-empiriques pour choisir le nombre de classes lorsque nous avons n valeurs à disposition. Une de ces règles semi-empiriques (nous parlons alros de technique de "discrétisation des variables") utilisée par de nombreux praticiens consiste à retenir le plus petit nombre entier de classes k tel que :

$$\boxed{2^k \geq n} \tag{5.7.7}$$

la largeur de l'intervalle de classe étant alors obtenue en divisant l'étendue (différence entre la valeur maximale mesurée et la minimale) par k. Soit :

$$k \geq \log_2(n) \tag{5.7.8}$$

Par convention et en toute rigueur... (donc rarement respecté dans les notations), un intervalle de classe est fermé à gauche et ouvert à droite (voir section Nombres page 2185) :

$$[\ldots, \ldots[\tag{5.7.9}$$

Cette règle empirique se nomme la "règle de Sturges" et est basées sur le raisonnement suivant :

Nous admettons que les valeurs du coefficient binomial C_k^i donnent le nombre d'individus d'un histogramme idéal (nous laissons le lecteur vérifier cela simplement avec un tableau comme Microsoft Excel 11.8346 et la fonction `COMBIN(k,i)` qui y est disponible dans la version française) de k intervalles pour le i-ème intervalle. Au fur et à mesure que k devient grand l'histogramme ressemble de plus en plus à une courbe continue appelée "courbe Normale" que nous verrons plus loin.

Dès lors, en nous basant sur le théorème binomial (voir section Calcul Algébrique page 1347), nous avons :

$$n = \sum_{i=0}^{k} C_k^i = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{i-k} b^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i 1^{i-k} 1^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i = (a+b)^k = (1+1)^k = 2^k \tag{5.7.10}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ensuite, pour chaque intervalle i le praticien prendra par tradition la moyenne entre les deux bornes pour le calcul et la multipliera par la fréquence f_i de classe correspondante. Dès lors, le regroupement en fréquence de classes fait que :

(a) La moyenne pondérée par les effectifs diffère de la moyenne arithmétique.

(b) Vue l'approximation effectuée elle sera un moins bon indicateur que la moyenne arithmétique...

(c) Elle est très sensible au choix du nombre de classes donc médiocre à ce niveau-là.

Il existe de nombreuses autres règles empiriques de discrétisation des variables aléatoires. Le logiciel XLStat en propose par exemple pas moins de 10 (amplitude constante, algorithme de Fisher, K-means, 20/80, etc.).

Plus loin, nous verrons deux propriétés extrêmement importantes de la moyenne arithmétique et de l'espérance mathématique qu'il vous faudra absolument comprendre (moyenne pondérée des écarts à la moyenne et la moyenne des écarts à la moyenne).

Remarque

Le "mode", noté *Mod* ou simplement M_0,, est par définition la valeur qui apparaît le plus grand nombre de fois dans une série de valeurs. Dans Microsoft Excel 11.8346 (version française), soulignons que la fonction `MODE( )` renvoie la première valeur dans l'ordre des valeurs ayant le plus grand nombre d'occurrences en supposant donc une distribution unimodale. Attention ! La valeur modale peut être suivant les cas plus grande ou plus petite que la moyenne. Il n'y a donc pas de règle générale comme quoi elle sera toujours plus petite que la moyenne contrairement à ce qui est enseigné dans certains livres de gestion de projets.

D2. La "médiane" ou "moyenne milieu", notée M_e (ou plus simplement noté M quand aucune confusion avec autre chose n'est possible...), est la valeur qui coupe une population en deux parties égales. Dans le cas d'une distribution statistique continue $f(x)$ d'une variable aléatoire X, il s'agit de la valeur qui représente 50% de probabilités cumulées d'avoir lieu tel que (nous détaillerons le concept de distribution statistique plus loin très en détails) :

$$P(X \leq M_e) = P(X \geq M_e) = \int_{-\infty}^{M_e} f(x)\mathrm{d}x = \int_{M_e}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0.5 = F(X) \quad (5.7.11)$$

Dans le cas d'une série de valeurs ordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, la médiane est donc de par sa définition la valeur de la variable telle que l'on ait autant d'éléments qui ont une valeur qui lui est supérieure ou égale, que d'éléments qui ont une valeur qui lui est inférieure ou égale.

Remarques

R1. La médiane est principalement utilisée pour les distributions asymétriques, car elle les représente mieux que la moyenne arithmétique.

R2. La médiane n'est dans la pratique souvent pas une valeur unique (du moins dans le cas où n est pair). Effectivement, entre les valeurs correspondantes aux

En cours de traduction anglais

ranges $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}+1$ il y a une infinité de valeurs à choix qui coupent la population en deux. C'est pourquoi pour certaines personnes, la médiane n'est pas intuitive et surtout lorsqu'il y a beaucoup de valeurs dupliquées. C'est pourquoi dans le cas de doublons, utiliser dans un tableur une formule du type `=NB.SI(plage de cellules;"<=Médiane)/NB(plage de cellules)` pour calculer la proportion de cellules ayant une valeur inférieure à la médiane (ou supérieure que la médiane) et s'attendre à un résultat de 50% est évidemment faux !

Plus rigoureusement :

- Si le nombre de termes est impair, de la forme $2n+1$, la médiane de la série est le terme de rang $n+1$ (que les termes soient tous distincts ou non !).
- Si le nombre de termes est pair, de la forme $2n$, la médiane de la série est la demi-somme (moyenne arithmétique) des valeurs des termes de rang n et $n+1$ (que les termes soient tous distincts ou non !).

$$\text{médiane}(x)=\begin{cases} x_{(n+1)/2}, & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2}\left(x_{n/2}+x_{n/2+1}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \tag{5.7.12}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dans tous les cas, de par cette définition, il découle qu'il y a au moins 50% des termes de la série inférieurs ou égaux à la médiane, et au moins 50% des termes de la série supérieurs ou égaux à la médiane.

Considérons par exemple la table de salaires ci-dessous :

N°Employé	Salaire	Cumul employés	%Cumul employés
1	1,200	1	6%
2	1,220	2	12%
3	1,250	3	18%
4	1,300	4	24%
5	1,350	5	29%
6	1,450	6	35%
7	1,450	7	41%
8	1,560	8	47%
9	1,600	9	53%
10	1,800	10	59%
11	1,900	11	65%
12	2,150	12	71%
13	2,310	13	76%
14	2,610	14	82%
15	3,000	15	88%
16	3,400	16	94%
17	4,800	17	100%

TAB. 5.26 – **Identification de la médiane**

Il y a dans le tableau un nombre impair $2n+1$ de valeurs. Donc la médiane de la série est le terme de rang $n+1$. Soit $1'600$.- (résultat que vous donnera n'importe quel tableur informatique). La moyenne arithmétique quant à elle vaut $2'020$.-.

RTS Info

ONS TV • RADIO • PODCASTS • COVID • SUISSE • MONDE • ECO • PLUS

Suisse Modifié le 7 novembre 2021 à 07:58

Combien gagne le personnel infirmier en Suisse? Le débat qui agite la campagne de votation

La campagne sur l'initiative pour les soins infirmiers, jusque-là assez terne, s'est enflammée la semaine dernière à la suite d'un reportage de la RTS évoquant la question du salaire du personnel soignant en Suisse. De nombreux infirmiers et infirmières sont montés aux barricades pour dénoncer des chiffres qu'ils jugent gonflés. Qu'en est-il?

C'est un sujet qui a mis le feu aux poudres. Le 26 octobre, un mois avant la votation sur l'initiative pour les soins infirmiers, la RTS reprenait dans le 19h30 les chiffres officiels de l'administration fédérale (en pdf) quant au salaire médian des infirmières et infirmiers diplômés en Suisse: 7429 francs bruts par mois, 13e salaire compris. Les salaires du personnel soignant (5433 francs bruts mensuels) et des aides-soignants (5120 francs bruts par mois) sont plus faibles.

La réaction des milieux concernés a été vive et immédiate. Sur les réseaux sociaux et par courriel, de nombreux soignants ont mis en cause l'exactitude de ces données, les jugeant surestimées voire carrément fausses. Certains sont même allés jusqu'à nous accuser de "désinformation". Nostra culpa, une inexactitude s'était certes bel et bien glissée dans le reportage - nous avons parlé de salaires moyens plutôt que de salaires médians* -, mais ce n'est jamais ce point qui a été reproché.

*Le salaire médian signifie que 50% des professionnels gagnent plus et 50% moins.

FIG. 5.103 – Article daté de la RTS s'excusant d'avoir confondu moyenne et médiane (...)

Comme dans de nombreux cas, l'explication naive de la médiane donnée par l'école est simple, mais pas vraiment vraie. La définition d'une médiane est claire pour les vecteurs de longueur impaire, mais il existe différentes options pour les vecteurs de longueur paire. C'est pourquoi le logiciel `R` en implémente 9 et celui par défaut, appelé "médiane échantillonnale" n'est pas, au jour où nous écrivons ces lignes, conforme aux résultats donnés par SAS, SPSS pas même avec sa propre fonction `quantile()`.

En effet, la définition mathématique habituelle donnée en premier ci-dessus est basée sur l'inverse de la CDF, qui donne la "médiane gauche", l'extrémité inférieure de l'intervalle médian. Cela a également la propriété intéressante que la médiane est l'une des valeurs de données observées - dans les rares cas où vous n'êtes pas intéressé par la médiane en tant qu'estimateur, mais simplement en tant que résumé de toutes les données, elle devrait certainement être une valeur de données.

Le problème avec la médiane gauche est la symétrie. Pourquoi pas la médiane droite ? La CDF inverse vous donne la médiane gauche car les CDF sont continues à droite, mais elles auraient pu être continues à gauche ; les mathématiciens ont simplement choisi une possibilité. Ainsi, la médiane de droite est une autre possibilité. Ou, vous pourriez vouloir un compromis entre les deux, et c'est une façon d'obtenir la médiane de l'école. Mais nous avons maintenant au moins deux réponses et peut-être trois (si vous comptez la médiane de droite).

En relation directe avec la médiane il est important de définir le concept suivant afin de comprendre le mécanisme sous-jacent :

D3. Soit donnée une série statistique $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, nous appelons "dispersion des

En cours de traduction en anglais

écarts absolus" autour de x le nombre $\varepsilon'(x)$ défini par :

$$\varepsilon'(x) = \sum_i |\, x_i - x \,| \tag{5.7.13}$$

$\varepsilon'(x)$ est minimum pour une valeur de x la plus proche d'une valeur x_i donnée au sens de l'écart absolu. La médiane est la valeur qui réalise ce minimum (extrémum) ! L'idée va alors consister à étudier les variations de la fonction pour trouver le rang de cet extrémum.

En effet, nous pouvons écrire :

$$\forall x \in [x_r, x_{r+1}]\,, r \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\} \quad \varepsilon'(x) = \sum_{i=1}^{r} |\, x_i - x \,| + \sum_{i=r+1}^{n} |\, x_i - x \,| \tag{5.7.14}$$

Donc par définition de la valeur x :

$$\begin{aligned}\varepsilon'(x) &= \sum_{i=1}^{r} |\, x_i - x \,| + \sum_{i=r+1}^{n} |\, x_i - x \,| \\ &= [rx - (x_1 + x_2 + \ldots + x_r) - [(x_{r+1} + \ldots + x_n - (n-r)x]] \\ &= (2r - n)x + (x_{r+1} + \ldots + x_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_r)\end{aligned} \tag{5.7.15}$$

Ce qui nous permet donc de faire sauter les valeurs absolues est simplement le choix de l'indice r qui est pris de telle manière que la série de valeurs peut en pratique toujours être coupée en deux parties : tout ce qui est inférieur à un élément de la série indexé par r et tout ce qui lui est supérieur (la médiane donc par anticipation...).

$\varepsilon'(x)$ est donc une fonction affine (assimilable à l'équation d'une droite pour r et n fixés) par morceaux (discrète) où l'on peut assimiler le facteur :

$$2r - n \tag{5.7.16}$$

à la pente et :

$$(x_{r+1} + \ldots + x_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_r) \tag{5.7.17}$$

à l'ordonnée à l'origine.

La fonction est donc décroissante (pente négative) tant que r est inférieur à $n/2$ et croissante quand r est supérieur à $n/2$ (elle passe donc par un extremum !). Plus précisément, nous distinguons deux cas qui nous intéressent particulièrement puisque n est un entier :

- Si n est pair, nous pouvons poser $n = 2n'$, alors la pente peut s'écrire $2(r - n')$ et elle est nulle si $r = n$ et dès lors puisque ce résultat n'est valable par construction que pour $\forall x \in [x_r, x_{r+1}]$ alors $\varepsilon'(x)$ est constante sur $[x_{n'}, x_{n'+1}]$ et nous avons un extrémum obligatoirement au milieu de cet intervalle (moyenne arithmétique des deux termes).
- Si n est impair, nous pouvons poser $n = 2n' + 1$ (nous coupons la série en deux parties égales), alors la pente peut s'écrire $(2r - 2n' - 1)$ et elle est donc nulle si $r = n' + \dfrac{1}{2}$ et dès lors puisque ce résultat n'est valable que pour $\forall x \in [x_r, x_{r+1}]$ alors il est immédiat que la valeur du milieu sera la médiane $x_{n'+1}$.

En cours de traduction de l'anglais

Nous retrouvons donc bien la médiane dans les deux cas. Nous verrons aussi plus loin comment la médiane est définie pour une variable aléatoire continue (l'idée sous-jacent étant exactement la même).

Il existe un autre cas pratique où le statisticien n'a à sa disposition que des valeurs regroupées sous forme d'intervalles de classes statistiques. La procédure pour déterminer la médiane est alors différente :

Lorsque nous avons à notre disposition uniquement une variable classée, l'abscisse du point de la médiane se situe en général à l'intérieur d'une classe. Pour obtenir alors une valeur plus précise de la médiane, nous procédons à une interpolation linéaire. C'est ce que nous appelons la "méthode d'interpolation linéaire de la médiane".

La valeur de la médiane peut être lue sur un graphique ou calculée analytiquement. Effectivement, considérons le graphique représentant la probabilité cumulée $F(x)$ en intervalles de classe comme ci-dessous où les bornes des intervalles ont été reliées par des droites :

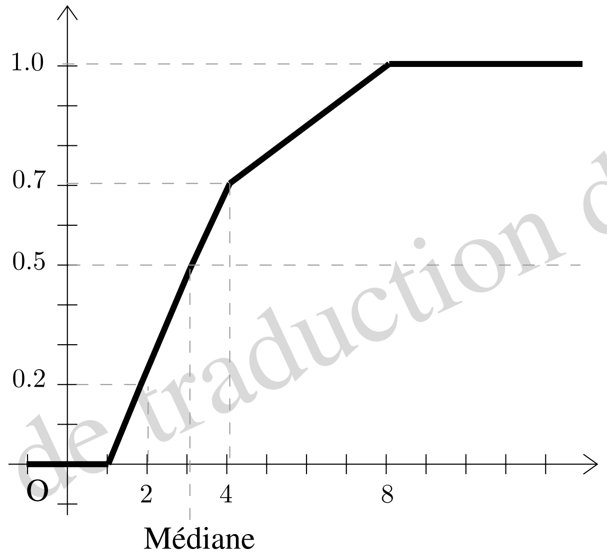


FIG. 5.104 – **Représentation graphique de l'estimation par interpolation linéaire de la médiane**

En cours de traduction de l'anglais

La valeur de la médiane M_e se trouve évidemment au croisement entre la probabilité cumulée de 50% (0.5) et l'abscisse. Ainsi, en appliquant les notions élémentaires d'analyse fonctionnelle, il vient (en observant bien évidemment que la pente dans l'intervalle contenant la médiane est égale dans les demi-intervalle de gauche et de celui à droite adjacents à la médiane) :

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{M_e-2}{0.5-0.2}=\frac{4-2}{0.7-0.2} \tag{5.7.18}$$

Ce que nous écrivons fréquemment :

$$\frac{M_e-a}{0.5-F(a)}=\frac{b-a}{F(b)-F(a)} \tag{5.7.19}$$

D'où la valeur de la médiane :

$$M_e=a+(b-a)\frac{0.5-F(a)}{F(b)-F(a)} \tag{5.7.20}$$

Prenons le tableau suivant que nous retrouverons bien plus tard dans le présent chapitre :

Montant des tickets	Nombre de tickets	Nombre cumulé de tickets	Fréquence relative de tickets
[0,50[	668	668	0.068
[50,100[	919	1,587	0.1587
[100,150[	1,498	3,085	0.3085
[150,200[	1,915	5,000	0.5000
[200,250[	1,915	6,915	0.6915
[250,300[	1,498	8,413	0.8413
[300,350[	919	9,332	0.9332
[350,400[	440	9,772	0.9772
[400 et +	228	10,000	1

TAB. 5.27 – **Identification de la classe médiane et du mode**

Nous voyons que la "classe médiane" est dans l'intervalle $[150, 200]$ car la valeur cumulée de 0.5 s'y trouve (colonne toute à droite du tableau) mais la médiane a elle, en utilisant la relation établie précédemment, précisément une valeur de (c'est trivial dans l'exemple particulier du tableau ci-dessus mais faisons quand même le calcul...) :

$$M_e = 150 + (200 - 150)\frac{0.5 - 0.3805}{0.5 - 0.3805} = 200 \qquad (5.7.21)$$

et nous pouvons faire de même avec n'importe quel autre centile bien évidemment !

Définition (#5.7.121) : Nous pouvons aussi donner chemin faisant, une définition pour déterminer la "valeur modale" :

$$M_0 = \text{mode}(X) = \arg\max_x f_X(x) \qquad (5.7.22)$$

(la valeur qui survient le plus fréquemment) si nous seulement en possession des fréquences d'intervalles de classe. Pour voir cela, nous commençons avec le diagramme ci-dessous nommé "distribution groupée " en barres de fréquences :

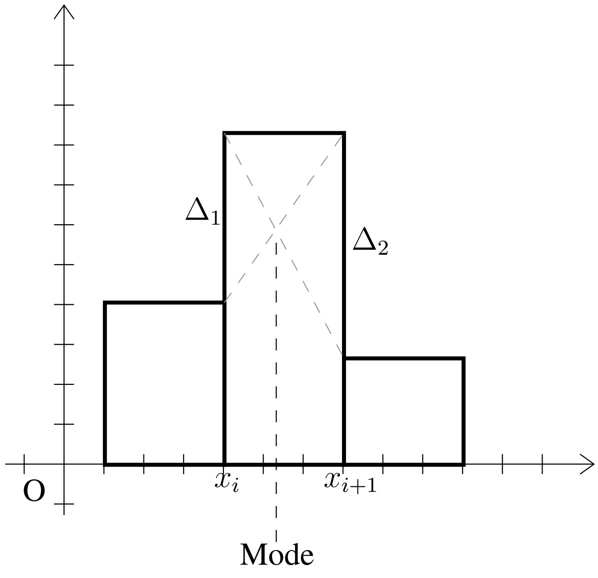


FIG. 5.105 – **Représentation graphique de l'estimation par classes d'intervalles de la valeur modale**

En cours de traduction de l'anglais

En utilisant les relations de Thalès (voir section de de Géométrie Euclidienne page 2591), nous avons immédiatement, en notant M_0 la valeur modale :

$$\frac{M_0 - x_i}{\Delta_1} = \frac{x_{i+1} - M_0}{\Delta_2} \tag{5.7.23}$$

Comme dans une proportion, nous ne changeons pas la valeur du rapport en additionnant les numérateurs et en additionnant les dénominateurs, il vient :

$$\frac{M_0 - x_i}{\Delta_1} = \frac{x_{i+1} - M_0}{\Delta_2} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta_1 + \Delta_2} \tag{5.7.24}$$

Nous avons alors :

$$M_0 = x_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}(x_{i+1} - x_i) \tag{5.7.25}$$

Avec l'exemple précédent cela donne alors :

$$\begin{aligned} M_0 &= 150 + \frac{(1,915 - 1,498)}{(1,915 - 1,498) + (1,915 - 1,498)}(250 - 150) \\ &= 150 + \frac{1}{2}(250 - 150) = 150 + \frac{1}{2}100 = 200 \end{aligned} \tag{5.7.26}$$

La question qui se pose ensuite est celle de la pertinence du choix de la moyenne, du mode ou de la médiane en termes de communication...

Un bon exemple reste celui du marché du travail où de façon générale, alors que le salaire moyen et le salaire médian sont relativement différents, les institutions de statistiques étatiques calculent la médiane que beaucoup de médias traditionnels assimilent alors explicitement au concept de "moyenne arithmétique" dans leurs communiqués...

Remarque

Pour éviter d'obtenir une moyenne arithmétique ayant peu de sens, nous calculons souvent une "moyenne élaguée", c'est à dire une moyenne arithmétique calculée après avoir enlevé des valeurs aberrantes à la série.

Les "quantiles" généralisent la notion de médiane en coupant la distribution en des ensembles donnés de parties égales (de même cardinal pourrions-nous dire...) ou autrement dit en intervalles réguliers. Nous définissons ainsi les "quartiles", les "déciles" et les "centiles" (ou "percentiles" en franglais...) sur la population, ordonnée dans l'ordre croissant, que nous divisons en 4, 10 ou 100 parties de même effectif. Nous parlerons ainsi du centile 90 pour indiquer la valeur séparant les premiers 90% de la population des 10% restants.

Soit $F(x)$ la fonction de distribution de probabilité cumulative, le quantile est défini formellement comme :

$$Q(x) = F^{-1}(x) = \inf\{y : F(y) \geq x\} \tag{5.7.27}$$

et aussi parfois noté :

$$Q_X(p) = \min\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = p\} \tag{5.7.28}$$

En cours de traduction de l' anglais

Définition (#5.7.122) : Le "P-ème centile" ($0 < P \leq 100$) de la liste des N valeurs ordonnées (triées du plus petit au plus grand) est la plus petite valeur de la liste telle que pas plus de P pourcent des données soit strictement inférieur à la valeur et au moins P pourcent des données est inférieur ou égal à cette valeur. Ceci est obtenu en calculant d'abord le rang ordinal, puis en prenant la valeur de la liste ordonnée qui correspond à ce rang. Le rang ordinal n est calculé à l'aide de la relation (en utilisant la notation arrondie à l'entier inférieur le plus proche) :

$$n = \left\lfloor \frac{P}{100} \cdot N \right\rfloor \tag{5.7.29}$$

Précisons que dans la version francophone de Microsoft Excel 11.8346 les fonctions `QUARTILE( )` , `CENTILE( )`, `MEDIANE( )`, `RANG.POURCENTAGE( )` sont disponibles et spécifions qu'il existe plusieurs variantes de calcul de ces centiles d'où une variation possible entre les résultats sur différents logiciels[28] (au moins neuf méthodes différentes détaillées dans l'excellent article [216] !).

Remarque

À propos de Microsoft Excel ... et de son outil de mise en forme conditionnelle ... l'utilisateur du tableur ne doit pas confondre l'option "centile" basée sur les numéros de ligne des valeurs triées d'intérêt de celle de "pourcentage" définie pour un vecteur $\vec{X}$ de valeurs par :

$$\text{Centile}(x_i) = \frac{x_i - \min \vec{X}}{R_{\vec{X}}} = \frac{x_i - \min \vec{X}}{\max \vec{X} - \min \vec{X}} \tag{5.7.30}$$

Ce concept est très important dans le cadre des intervalles de confiance que nous verrons beaucoup plus loin dans ce chapitre et très utile dans le domaine de la qualité avec l'utilisation des boîtes à moustaches (traduction de "Box & Whiskers plots" ou "box plots") permettant de comparer ("discriminer" comme disent les spécialistes) rapidement deux populations de données ou plus et surtout d'éliminer les valeurs aberrantes (prendre comme référence la médiane sera justement plus judicieux !) :

En cours de traduction... Anglais

[28] Le logiciel statistique R Statistical, par exemple, inclut les neuf méthodes à travers un paramètre de sa fonction `quantile()`.

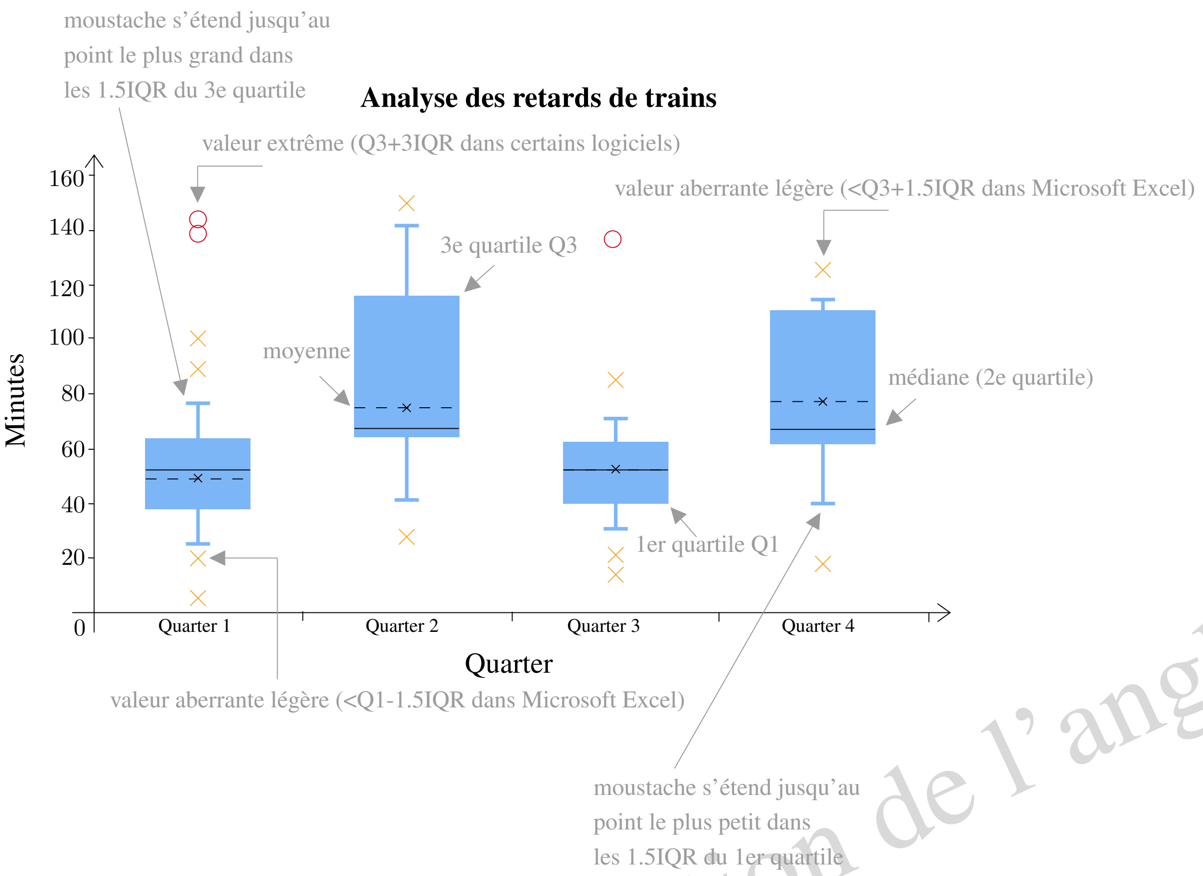
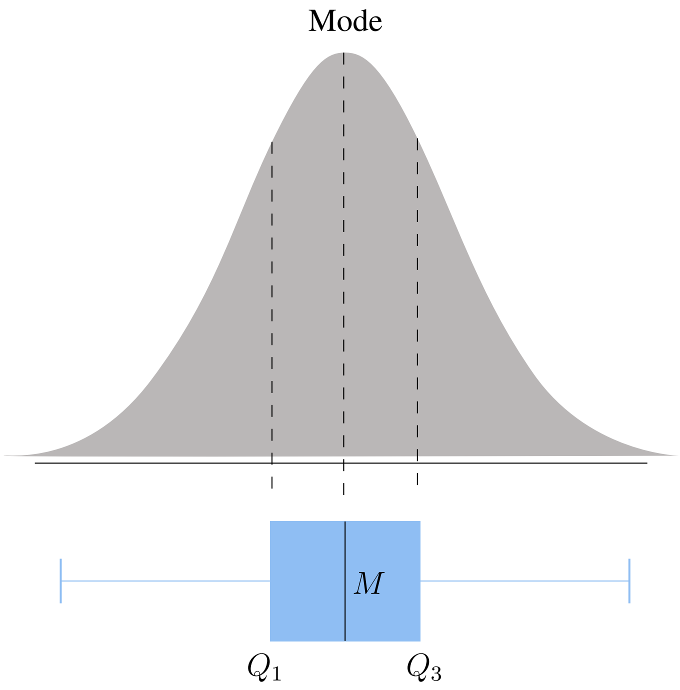


FIG. 5.106 – **Graphique idéal de Box & Whiskers**

En cours de traduction de l'anglais

Une autre représentation mentale très importante des boîtes à moustache est la suivante (elle permet donc de se donner une idée de l'asymétrie de la distribution comme le permet de faire le logiciel R) :



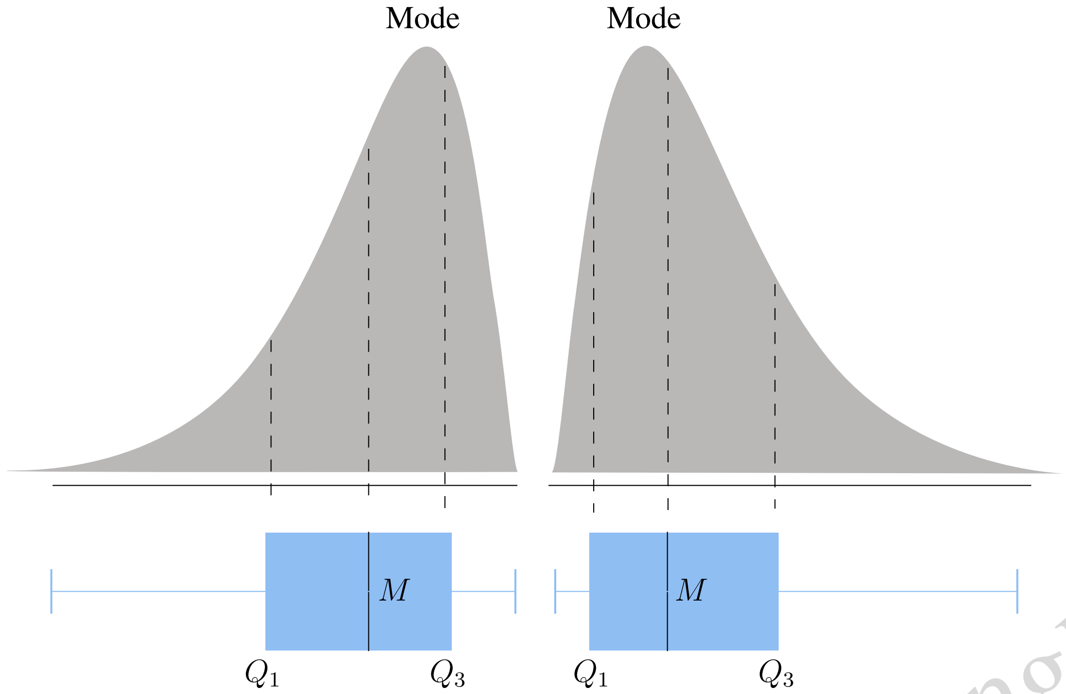
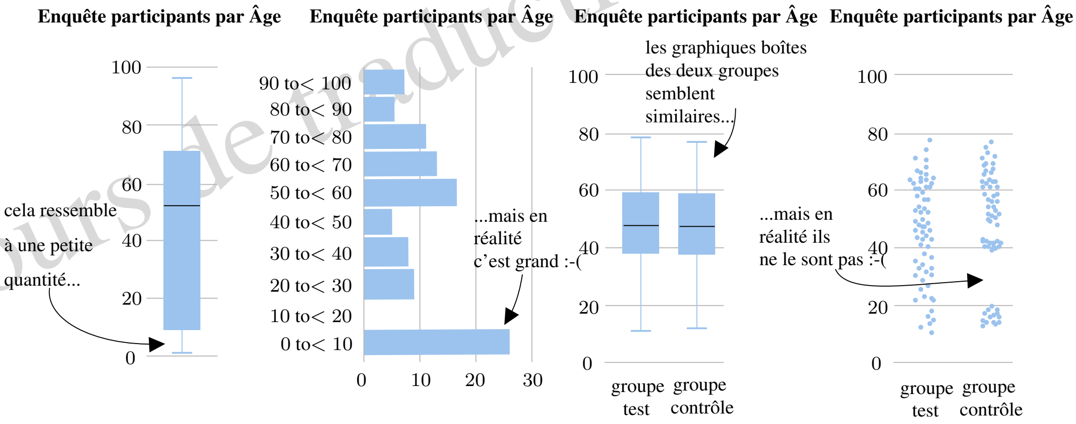


FIG. 5.107 – Représentation graphique du mode, de la médiane et des quartiles par rapport à une distribution

En cours de traduction de l'anglais

Notez cependant que les graphiques de Box & Whiskers présentent des problèmes importants, comme illustré ci-dessous :

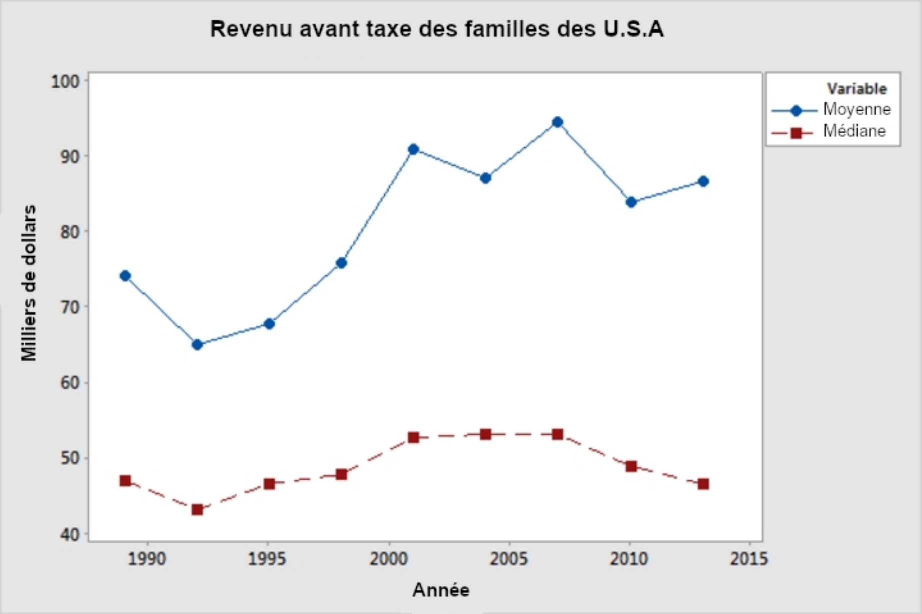


Les notions de médiane, valeurs abérrantes et intervalles de confiance que nous venons de démontrer et/ou de citer sont à ce point importantes qu'il existe des normes internationales pour les utiliser correctement. Citons d'abord la norme ISO 16269-7 :2001 *Médiane - Estimation et intervalles de confiance* et aussi la norme ISO 16269-4 :2010 *Détection et traitement des valeurs aberrantes*.

Une belle démonstration sur la manière dont les gouvernements (au fait c'est les politiques !) peuvent faire mentir les statistiques (espérons que la plupart d'entre eux fournissent maintenant gratuitement les données à la population) est par exemple la Réserve Fédérale Américaine (FED) qui a souligné le fait que le revenu moyen avait augmenté depuis 2010. Mais quand vous avez accès aux données brutes :

https://www.federalreserve.gov/econres/scfindex.htm

et que vous tracez la médiane par rapport à la moyenne avec, par exemple, Minitab 17, vous obtenez :



et après une analyse, vous pouvez constater que l'augmentation de la moyenne est due en grande partie à l'augmentation des revenus les plus élevés (10%). La baisse de la médiane au même moment suggère que les Américains typiques ne se portent pas aussi bien en réalité depuis 2010 ... Q.E.D !

Remarque

Soyez prudent avec les conclusions évidentes lors de l'analyse des tendances ! Comme nous le verrons au cours de notre étude du paradoxe de Simpson (voir plus loin, page 947), lorsqu'un ensemble de données affiche une tendance, une fois qu'il est divisé (ie stratifié) en sous-groupes, la tendance opposée peut être visible pour chaque de ces sous-groupes !

D4. Par analogie avec la médiane, nous définissons la "médiale" comme étant la valeur (dans l'ordre croissant des valeurs) qui partage la somme (cumuls) des valeurs en deux masses égales (donc la somme totale divisée par deux).

Dans le cas de salaires, alors que le médiane donne le 50% des salaires se trouvant en-dessous et en-dessus, la médiale donne combien de salariés se partagent (et donc le salaire partageant) la première moitié et combien de salariés se partagent la seconde moitié de l'ensemble des coûts salariaux.

Par exemple pour revenir à notre tableau sur les salaires :

En ... duction de l'anglais

N°Employé	Salaire	Cumul salaire	%Cumul salaire
1	1,200	1,200	3.5%
2	1,220	2,420	7%
3	1,250	3,670	10.7%
4	1,300	4,970	14.5%
5	1,350	6,320	18.4%
6	1,450	7,770	22.6%
7	1,450	9,220	26.8%
8	1,560	10,780	31.4%
9	1,600	12,380	36.1%
10	1,800	14,180	41.3%
11	1,900	16,080	46.8%
12	2,150	18,230	53.1%
13	2,310	20,540	59.8%
14	2,610	23,140	67.4%
15	3,000	26,140	76.1%
16	3,400	29,540	86%
17	4,800	34,340	100%

TAB. 5.28 – **Identification de la médiale**

En cours de traduction de l'anglais

La somme de tous les salaires fait donc $34'340$ et la médiale est alors $17'170$ (entre l'employé numéro 11 et 12) alors que la médiane était de $1'600$. Nous voyons alors que la médiale correspond au 50% du cumul. Ce qui est un indicateur très utile dans le cadre des analyses de Pareto ou de Lorenz par exemple (voir section de Gestion Quantitative page ??).

D5. Comme la médiane, la "pseudomédiane" est une mesure de centralité pour un ensemble de données. La pseudomédiane est calculée en prenant la médiane de l'ensemble des moyennes de paires de points de données, où le premier est inférieur ou égal au second.

Ainsi, si les données étaient $\{1, 3, 7\}$, la pseudomédiane serait la médiane de $\{$ moyenne$(1, 1)$, moyenne$(1, 3)$, moyenne$(1, 7)$, moyenne$(3, 3)$, moyenne$(3, 7)$, moyenne$(7, 7)\}$, soit $3, 5$. Plus techniquement, si les données sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors leur pseudomédiane est donnée en prenant la médiane de la collection de $\frac{n}{2}(n + 1)$ valeurs de la forme $w = \frac{x_i+x_j}{2}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$.

D6. La "moyenne quadratique" parfois simplement notée Q qui est définie par :

$$\mu_q = \sqrt[m]{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^m}{n}} \tag{5.7.31}$$

avec $m = 2$.

Remarque

C'est une des moyennes les plus connues en statistiques car l'écart-type est une moyenne quadratique (voir plus loin) !

Exemple :

Considérez un carré de côté a et un autre carré de côté b. La surface moyenne de deux carrés est égale à un carré de côté :

$$\mu_q^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow \mu_q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{5.7.32}$$

Dans Microsoft Excel 11.8346, vous pouvez combiner les fonctions `SOMMECARRES( )` et `NB( )` et calculer rapidement la moyenne quadratique comme suit :

```
=(SOMMECARRES(...)/NB(...))^(1/NB(...))
```

D7. La "moyenne harmonique" parfois simplement notée H est définie par :

$$\boxed{\frac{1}{\mu_h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n}} \tag{5.7.33}$$

Elle est peu connue en dehors de la finance mais découle souvent de raisonnements simples et pertinents (typiquement la résistance équivalente d'un circuit électrique ayant plusieurs résistances en parallèles). Il existe une fonction `HARMEAN( )` dans Microsoft Excel 11.8346 (version française) pour la calculer.

tion de l'anglais

Exemple :

Pour introduire cette moyenne considérons le cas scolaire d'une distance d parcourue dans un sens à la vitesse v_1 et dans l'autre (ou pas) à la vitesse v_2. La vitesse moyenne arithmétique s'obtiendra en divisant la distance totale $2d$ par le temps mis à la parcourir :

En c

$$v = \frac{2d}{t} \tag{5.7.34}$$

Si nous calculons le temps mis lorsqu'on parcourt d avec une vitesse v_i c'est tout simplement le quotient :

$$t_i = \frac{d}{v_i} \tag{5.7.35}$$

Le temps total vaut donc :

$$t = \frac{2d}{v} = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2} \tag{5.7.36}$$

Si la distance n'est pas la même pour les deux vitesses, chaque vitesse reste de toute façon la même, c'est pourquoi d disparaît !

En d'autres termes : nous utilisons la moyenne harmonique quand nous sont donnés des ratios ! Voyons d'autres exemples importants pour illustrer cela :

✍**Exemples :**

E1. Trois investissements ont un ratio Prix/Retour de respectivement 104%, 106% et 109% (donc nous avons perdu de l'argent dans tous les trois investissements dans ce cas particulier !). Sachant que le prix des trois investissements était initialement le même, nous utilisons la moyenne harmonique :

$$\mu_{\text{h}} = \frac{3}{\frac{1}{104}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}} \cong 106.29\% \tag{5.7.37}$$

Alors qu'une moyenne arithmétique donnerait environ 106.33%. Ce qui fait une différence importante quand nous gérons des millions en numéraires !

Remarquons au passage l'écriture suivante qui montre que la moyenne harmonique est un cas particulier de la "moyenne arithmétique pondérée" :

$$\begin{aligned}\mu_{a,y} &= \sum_i w_i x_i = \frac{\frac{1}{104}}{\frac{1}{104}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}}104 + \frac{\frac{1}{106}}{\frac{1}{104}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}}106 + \frac{\frac{1}{109}}{\frac{1}{104}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{104}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}} + \frac{1}{\frac{1}{104}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}+\frac{1}{109}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}} = \frac{3}{\frac{1}{104}+\frac{1}{106}+\frac{1}{109}}\end{aligned} \tag{5.7.38}$$

Si tous les poids sont tels sont équipondérés alors nous retrouvons la moyenne arithmétique standard !

E2. Considérons qu'un investisseur nous mette chaque mois à disposition 300.- pour acheter un actif donné. Le premier mois cet actif vaut 9.- donc nous pouvons en acheter 33.333 unités, le deuxième mois l'actif vaut 11.- donc nous pouvons en acheter 27.27227 unités, enfin le dernier et le troisième mois l'actif vaut 4.- nous pouvons donc en acheter 75 unités. La question est alors de savoir quel est le prix moyen de cet actif dans notre portefeuille. Nous avons alors :

$$\mu_{\text{k}} = \frac{900}{33.333+27.2727+75} = \frac{900}{\frac{300}{9}+\frac{300}{11}+\frac{300}{4}} = \frac{3}{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{4}} \cong 6.6369.- \tag{5.7.39}$$

D8. La "moyenne géométrique" parfois notée simplement G est définie par :

$$\mu_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \tag{5.7.40}$$

Cette moyenne est souvent oubliée mais néanmoins très connue dans le domaine de l'économétrie (surtout quand nous étudierons le rendement géométrique moyen) et de la finance d'entreprise (voir section de Techniques de Gestion page ??) raison pour laquelle il existe une fonction `MOYENNE.GEOMETRIQUE( )` dans Microsoft Excel 11.8346 (version française) pour la calculer.

Une moyenne géométrique est souvent utilisée lors de la comparaison de différents éléments - trouver un seul "indicateur" pour ces éléments - lorsque chaque élément possède

En co is

plusieurs propriétés ayant des plages numériques différentes. Par exemple, la moyenne géométrique peut donner une "moyenne" significative pour comparer deux entreprises évaluées chacune entre 0 et 5 pour leur durabilité environnementale et entre 0 et 100 pour leur viabilité financière. Si une moyenne arithmétique était utilisée à la place d'une moyenne géométrique, la viabilité financière aurait plus de poids car son intervalle numérique est plus large, de sorte qu'un petit pourcentage de variation de la notation financière (allant de 80 à 90) crée une différence beaucoup plus grande dans la moyenne arithmétique que la variation d'un grand pourcentage dans leur durabilité de l'environnement (passant par exemple de 2 à 5). L'utilisation d'une moyenne géométrique "normalise" les plages dont la moyenne est calculée, de sorte qu'aucune plage ne domine la pondération, et qu'un pourcentage donné de variation de l'une des propriétés a le même effet sur la moyenne géométrique. Ainsi, un changement de 20% dans la durabilité environnementale de 4 à 4.8 a le même effet sur la moyenne géométrique qu'un changement de 20% de 60 à 72 dans viabilité financière.

Remarque

En 2010, la moyenne géométrique a été introduite pour calculer l'Indice de Développement Humain par le Programme des Nations Unies pour le développement. Les mauvaises performances dans toutes les facteurs sont directement reflétés dans la moyenne géométrique. C'est-à-dire qu'une faible réalisation dans une dimension n'est plus compensée linéairement par une performance élevée dans une autre dimension. La moyenne géométrique réduit le niveau de substituabilité entre les dimensions tout en garantissant qu'une baisse de 1% de l'indice d'espérance de vie, par exemple, a le même impact sur l'IDH qu'une baisse de 1% de l'éducation ou de l'indice de revenu. Ainsi, comme base de comparaison des réalisations, cette méthode est également plus respectueuse des différences intrinsèques entre les facteurs qu'une simple moyenne arithmétique.

En cours d'anglais

Comme pour avec les valeurs nulles il est impossible de calculer la moyenne géométrique de nombres négatifs ! Cependant, il existe plusieurs solutions de contournement pour ce problème, qui exigent toutes que les valeurs négatives soient converties ou transformées en une valeur équivalente positive. Le plus souvent, ce problème se pose lorsque l'on désire calculer la moyenne géométrique d'un changement en pourcents dans une population ou un retour financier, qui peut comprendre bien évidemment des nombres négatifs.

Par exemple, pour calculer la moyenne géométrique des valeurs de $+12\%, -8\%, 0\%$ et 2%, nous calculerons la moyenne géométrique de leurs multiplicateurs équivalents décimaux qui sont $1.12, 0.92, 1$ et 1.02 pour obtenir une moyenne géométrique de 1.0125. Soustrayant 1 de cette valeur donne la moyenne géométrique de 1.25% (ou dans les milieux financiers on parlera de "taux de croissance annuel composé TCAC").

✍**Exemple :**

Supposons qu'une banque offre une possibilité de placement et prévoit pour la première année un intérêt (c'est absurde mais c'est un exemple) avec un taux $(X-Y)\%$, mais pour la deuxième année un intérêt avec un taux $(X+Y)\%$. Au même moment une autre banque offre un intérêt à taux constant pour deux ans :

$X\%$. C'est pareil, dirons-nous un peu rapidement. En fait les deux placements n'ont pas la même rentabilité.

Dans la première banque, un capital C_0 donnera au bout de la première année un intérêt :

$$(X-Y)\%\cdot C_0 \tag{5.7.41}$$

et la seconde année :

$$(X+Y)\%\left[(X-Y)\%\cdot C_0\right] \tag{5.7.42}$$

Dans l'autre banque nous aurons au bout d'un an :

$$X\%\cdot C_0 \tag{5.7.43}$$

Dans l'autre banque nous aurons au bout d'un an :

$$X\%(X\%\cdot C_0) \tag{5.7.44}$$

et ainsi de suite...

Comme vous pouvez le voir le placement ne sera pas identique si $Y\neq 0$! $X\%$ n'est donc pas la moyenne arithmétique de $(X-Y)\%$ et $(X+Y)\%$.
Posons maintenant :

$$r_1=(X+Y)\% \quad \text{et} \quad r_2=(X-Y)\% \tag{5.7.45}$$

Quelle est en fait la valeur moyenne r ?

Au bout de deux ans le capital est multiplié par $r_1\cdot r_2$. Si la moyenne vaut r il sera alors multiplié par r^2. Nous avons donc la relation :

$$r^2=r_1r_2 \Leftrightarrow r=\sqrt{r_1r_2} \tag{5.7.46}$$

C'est un exemple d'application où nous retrouvons donc la moyenne géométrique. L'oubli de l'utilisation de la moyenne géométrique est une erreur fréquente dans les entreprises lorsque certains employés calculent le taux moyen d'augmentation d'une valeur de référence.

D9. La "moyenne mobile", appelée aussi "moyenne glissante" d'ordre k est définie sur une séquence $x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n$ de réalisations par :

$$\forall i\in[1\ldots n-k]:\ \text{MM}_{i+k}=\frac{\displaystyle\sum_{j=i}^{i+k-1}x_j}{k} \tag{5.7.47}$$

La moyenne mobile est particulièrement utilisée en économie, où elle permet de représenter une courbe de tendance d'une série de valeurs, dont le nombre de points est égal

au nombre total de points de la série de valeurs moins le nombre que vous spécifiez pour la période (pour un exemple détaillé voir la section d'économie page page **??**).

Remarque

Sur certaines pages Internet et certains logiciels statistiques, la "moyenne glissante" d'ordre k (devant être un nombre positif impair supérieur à 2 !) Est défini pour une séquence $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ (avec $n \geq k$) par :

$$\forall i \in [(k+1)/2 \ldots n-(k+1)/2] : \; \text{MG}_i = \frac{\displaystyle\sum_{j=i+(k+1)/2-1}^{i+(k+1)/2-1} x_j}{k} \tag{5.7.48}$$

Une moyenne mobile en finance est calculée à partir des moyennes des cours d'une valeur, sur une période donnée : chaque point d'une moyenne mobile sur 100 séances est la moyenne des 100 derniers cours de la valeur considérée. Cette courbe, affichée simultanément avec la courbe d'évolution des cours de la valeur, permet de lisser les variations journalières de la valeur, et de dégager des tendances.

Les moyennes mobiles peuvent être calculées sur différentes périodes, ce qui permet de dégager des tendances à court terme MMC (20 séances selon les habitudes de la branche), moyen terme (50-100 séances) ou long terme MML (plus de 100 séances).

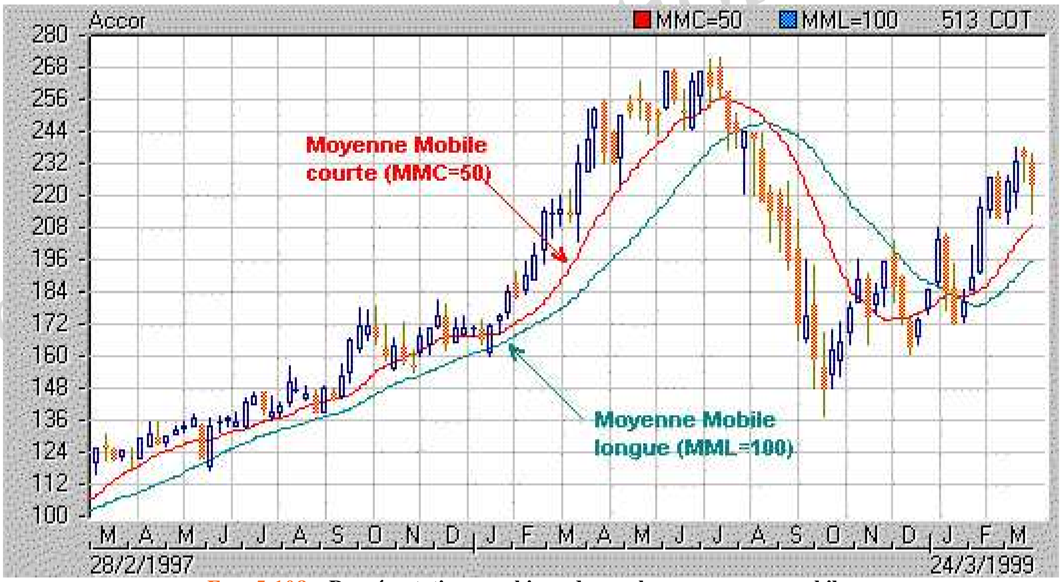


Fig. 5.108 – Représentation graphique des quelques moyennes mobiles

Les croisements des moyennes mobiles par la courbe des cours (découpée avec une certaine granularité) de la valeur génèrent des signaux d'achat ou de vente (selon les professionnels) suivant le cas :

- Signal d'achat : lorsque la courbe des cours franchit la MM vers le haut.
- Signal de vente : lorsque la courbe des cours franchit la MM vers le bas.

Outre la moyenne mobile, précisons qu'il existe une quantité d'autres indicateurs artificiels souvent utilisés en finance comme par exemple le "upside/downside ratio".

L'idée est la suivante : Si vous avez un produit financier (voir section d' économie page ??) actuellement de prix P_c (prix courant) pour lequel vous avez un objectif de gain haut à un prix haut correspondant que nous noterons P_h (high price) et inversement le potentiel de perte que vous estimez à un prix P_l (low price).

Alors le ratio :

$$\frac{P_h - P_c}{P_c - P_l} = \text{UD}_R \tag{5.7.49}$$

donne le Upside/Downside Ratio.

✍**Exemples :**

E1. Par exemple, un produit financier de 10.- avec un prix bas de 5.- et un prix haut de 15.- a donc un ratio $\text{UD}_R = 1$ et donc un facteur spéculatif identique pour permettre le gain ou une perte de 5.-.

E2. Un produit financier de 10.- avec un prix bas de 5.- et un prix haut de 20.- a donc un $\text{UD}_R = 2$ donc deux fois le potentiel spéculatif de gain par rapport à celui de perte.

Remarque

Certaines associations boursières recommandent de refuser les UD_R inférieurs à 3. Les investisseurs ont tendance à rejeter les UD_R trop élevés pouvant être un signe de gonflage artificiel.

D10. La "moyenne pondérée" (dont nous avons déjà fait mention plus haut d'un cas particulier[29]) est définie par :

$$\boxed{\mu_p = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}} \tag{5.7.50}$$

et est utilisée par exemple en géométrie pour localiser le barycentre d'un polygone, en physique pour déterminer le centre de gravité ou en statistiques pour calculer une espérance (le dénominateur étant toujours égal à l'unité en probabilités) et en gestion de projets pour estimer les durées des tâches.

Dans le cas général le poids w_i représente l'influence pondérée ou arbitraire/empirique de l'élément x_i par rapport aux autres.

D11. La "moyenne fonctionnelle" ou "moyenne intégrale" est définie par :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{5.7.51}$$

[29]La moyenne arithmétique et la moyenne mobile sont juste un cas particulier de la moyenne pondérée où $w_i = 1$

En cours de finalisation

où μ_f dépend d'une fonction f d'une variable réelle intégrable (voir section de Calcul Intégral et Différentiel page 1480) sur un intervalle $[a,b]$. Elle est très souvent utilisée en théorie du signal (électronique, électrotechnique).

En cours de traduction de l' anglais

5.7.2.1 Lissage de Laplace

Pour en revenir à nos fréquences de classes vues bien plus haut et avant de continuer avec l'étude de quelques propriétés mathématiques des moyennes... il faut savoir que lorsque nous travaillons avec des lois discrètes de probabilités il arrive très (très) fréquemment que nous rencontrions un problème typique dont la source est la taille de la population.

Considérons comme exemple le cas où nous avons 12 documents et que nous souhaiterions estimer la probabilité d'occurrence du mot "Viagra". Nous avons sur un échantillon les valeurs suivantes :

ID Document	Occurrences du mot
1	1
2	0
3	2
4	0
5	4
6	6
7	3
8	0
9	6
10	2
11	0
12	1

TAB. 5.29 – Fréquences de classe du mot

En cours de traduction de l' anglais

Tableau que nous pouvons représenter d'une autre manière :

Occurrences du mot	Documents	Probabilité
0	4	0.33
1	2	0.17
2	2	0.17
3	1	0.083
4	1	0.083
5	0	0
6	2	0.17

TAB. 5.30 – Fréquences de classe respective des documents

Et ici nous avons un phénomène courant. Il n'y a aucun document avec 5 occurrences du mot qui nous intéresse. L'idée (très courante dans le domaine du Data Mining) est alors d'ajouter artificiellement et empiriquement un comptage en utilisant une technique appelée "lissage de Laplace" qui consiste à additionner k unités à chaque occurrence. Dès lors le tableau devient :

Occurrences du mot	Documents	Probabilité
0	5	0.26
1	3	0.16
2	3	0.16
3	2	0.11
4	2	0.11
5	1	0.05
6	3	0.16

TAB. 5.31 – **Fréquences de classes des documents avec lissage**

évidemment ce type de technique est sujet à débat et sort du cadre scientifique... Nous avons même hésité à présenter cette technique dans le chapitre de Méthodes Numériques (avec le reste de toutes les techniques numériques empiriques)...

En cours de traduction de l'anglais

5.7.2.2 Propriétés des moyennes

Voyons maintenant quelques propriétés pertinentes qui relient quelques-unes de ces moyennes ou qui sont propres à une moyenne donnée.

Les premières propriétés sont importantes donc prenez garde à bien les comprendre :

P1. Le calcul des moyennes arithmétique, quadratique et harmonique peut être généralisé à l'aide de la relation suivante :

$$\mu = \sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m} \tag{5.7.52}$$

où nous retrouvons :

(a) Pour $m = 1$, la moyenne arithmétique

(b) Pour $m = 2$, la moyenne quadratique

(c) Pour $m = -1$, la moyenne harmonique

P2. La moyenne arithmétique a une propriété de linéarité, c'est-à-dire que (sans démonstration car simple à vérifier) :

$$\overline{\lambda x + \mu} = \lambda \bar{x} + \mu \tag{5.7.53}$$

C'est la version statistique de la propriété de l'espérance en probabilité que nous verrons plus loin (l'espérance est linéaire que les variables aéatoires soient dépendantes ou non !).

P3. La somme pondérée des écarts à la moyenne arithmétique est nulle.

Démonstration 5.38.2. D'abord, par définition, nous savons que :

$$n = \sum_{i=1}^{r} n_i \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i \tag{5.7.54}$$

Nous avons alors :

$$\sum_{i=1}^{r} n_i(x_i-\mu)=\sum_{i=1}^{r} n_i x_i-\mu\sum_{i=1}^{r} n_i=\sum_{i=1}^{r} n_i x_i-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i\right)n=\sum_{i=1}^{r} n_i x_i-\sum_{i=1}^{r} n_i x_i=0 \quad (5.7.55)$$

Ainsi, cet outil ne peut être utilisé comme mesure de dispersion !

Par extension la moyenne arithmétique des écarts pondérés à la moyenne par les effectifs est nulle aussi :

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i(x_i-\mu)}{n}=0 \quad (5.7.56)$$

■ Q.E.D.

Ce résultat est relativement important car il permettra plus loin de mieux saisir le concept d'écart-type et de variance.

P4. Soit à démontrer :

$$\mu_h < \mu_g < \mu_a < \mu_q \quad (5.7.57)$$

Remarque

Les comparaisons entre les moyennes ci-dessus et la médiane ou les moyennes pondérées ou mobiles n'ont pas de sens, c'est pourquoi nous ne les comparerons pas !

Démonstration 5.38.3. Tout d'abord, nous prenons deux nombres réels non nuls x_1 et x_2 tels que $x_2 > x_1 > 0$ et nous écrivons :

(a) La moyenne arithmétique :

$$\mu_a = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (5.7.58)$$

(b) La moyenne géométrique :

$$\mu_g = \sqrt{x_1 x_2} \quad (5.7.59)$$

(c) La moyenne harmonique :

$$\frac{1}{\mu_h} = \frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}}{2} = \frac{\dfrac{x_2}{x_1 x_2} + \dfrac{x_1}{x_2 x_1}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 x_2} \Leftrightarrow \mu_h = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \quad (5.7.60)$$

(d) La moyenne quadratique :

$$\mu_q^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \quad (5.7.61)$$

En cours de traduction de l'anglais

Prouvons déjà que $\mu_g > \mu_h$ par l'absurde en posant $\mu_g - \mu_h < 0$:

$$\begin{aligned}\mu_g - \mu_h = \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} &= \frac{\sqrt{x_1x_2}x_1 + \sqrt{x_1x_2}x_2 - 2x_1x_2}{x_1+x_2} < 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1x_2}x_1 + \sqrt{x_1x_2}x_2 - 2x_1x_2 < 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1x_2}x_1 + \sqrt{x_1x_2}x_2 < 2x_1x_2 \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{x_1x_2}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_1x_2}}{x_1} < 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} < 2\end{aligned} \tag{5.7.62}$$

Par commodité posons :

$$y = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \tag{5.7.63}$$

Et nous savons que $y > 1$. Or :

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{1}{y} + y \tag{5.7.64}$$

Et nous cherchons alors à montrer que :

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} < 2 \tag{5.7.65}$$

n'est pas possible. Mais ceci découle des équivalences suivantes :

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{1}{y} + y = \frac{y^2+1}{y} < 2 \Leftrightarrow y^2 + 1 - 2y < 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 < 0 \tag{5.7.66}$$

Il y a donc contradiction ce qui vérifie notre hypothèse initiale :

$$\mu_g - \mu_h > 0 \Leftrightarrow \mu_g > \mu_h \tag{5.7.67}$$

Regardons maintenant si $\mu_g > \mu_a$.

Sous l'hypothèse $x_2 > x_1 > 0$. Nous cherchons donc maintenant à montrer que :

$$\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2} \tag{5.7.68}$$

Or nous avons les équivalences suivantes :

$$\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 > 4x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 > 0 \tag{5.7.69}$$

et la dernière expression est évidemment correcte.

Or le carré d'un nombre (réel) est toujours positif ce qui vérifie notre hypothèse initiale :

$$\mu_a - \mu_g > 0 \Leftrightarrow \mu_a > \mu_g \tag{5.7.70}$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous allons démontrer maintenant $\mu_q > \mu_a$ par l'absurde en posant $\mu_q - \mu_a < 0$:

$$\begin{aligned}\mu_q - \mu_a &= \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} - \frac{x_1+x_2}{2}\\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} - \frac{x_1+x_2}{2} < 0\\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} < \frac{x_1+x_2}{2}\\ &\Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{2} < \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}\\ &\Rightarrow x_1^2+x_2^2 < \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{2}\\ &\Rightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 < 0\\ &\Rightarrow (x_1-x_2)^2 < 0\end{aligned} \tag{5.7.71}$$

Or le carré d'un nombre (réel) est toujours positif ce qui vérifie notre hypothèse initiale :

$$\mu_q - \mu_a > 0 \Leftrightarrow \mu_q > \mu_a \tag{5.7.72}$$

Nous avons donc bien :

$$\boxed{\mu_h < \mu_g < \mu_a < \mu_q} \tag{5.7.73}$$

■ Q.E.D.

Il est important de remarquer ici (car c'est une erreur fréquente dans les entreprise et administrations) que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique. Ce qui suivant les cas pratiques peut être une erreur de confusion favorable ou défavorable à la personne qui utilise la moyenne arithmétique en lieu et place de la moyenne géométrique.

Ces inégalités démontrées, nous pouvons alors passer à une figure que nous attribuons à Archimède pour placer trois de ces moyennes. L'intérêt de cet exemple est de montrer qu'il existe des relations remarquables parfois entre la statistique et la géométrie (fruit du hasard ? ? ?).

En cours de traduction de l'anglais

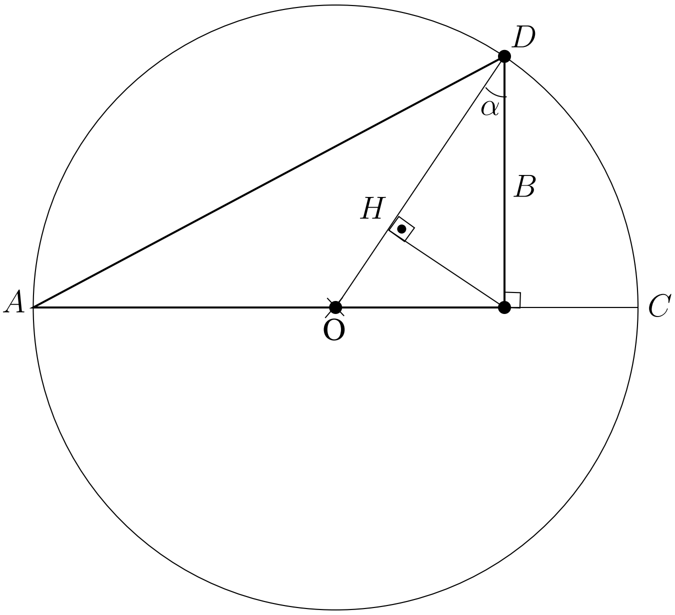


FIG. 5.109 – **Point de départ pour la représentation géométrique desd différentes moyennes**

Nous allons d'abord poser $a=\overline{AB}, b=\overline{BC}$ et O est le milieu de $\overline{AC}$. Ainsi, le cercle dessiné Ω est de centre O et de rayon $\overline{\mathrm{O}A}$. D est l'intersection de la perpendiculaire à $\overline{AC}$ passant par B et du cercle Ω (nous choisissons l'intersection que nous voulons). H est quant à lui le projeté orthogonal de B sur $\overline{OD}$.

Archimède affirme que $\overline{\mathrm{O}A}$ est la moyenne arithmétique de a et b et que $\overline{BD}$ est la moyenne géométrique de a et b, et $\overline{DH}$ est la moyenne harmonique de a et b.

Nous démontrons donc que (trivial) :

$$\overline{\mathrm{O}A}=\frac{\overline{AC}}{2}=\frac{a+b}{2} \tag{5.7.74}$$

Donc $\overline{\mathrm{O}A}$ est bien la moyenne arithmétique μ_a de a et b.

Ensuite nous avons dans le triangle rectangle ADB :

$$\overline{AD}^2=\overline{DB}^2+\overline{BA}^2 \tag{5.7.75}$$

Puis dans le triangle rectangle BDC nous avons :

$$\overline{DC}^2=\overline{BC}^2+\overline{DB}^2 \tag{5.7.76}$$

Nous additionnons alors ces deux égalités, et nous trouvons :

$$2\overline{DB}^2+\overline{BA}^2+\overline{BC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2 \tag{5.7.77}$$

Nous savons que D est sur un cercle de diamètre $\overline{AC}$, donc ADC est rectangle en D. Alors :

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2 \tag{5.7.78}$$

Puis nous remplaçons $\overline{BA}$ et $\overline{BC}$ par a et b :

$$2\overline{DB}^2+a^2+b^2=\overline{AC}^2=(a+b)^2 \Leftrightarrow 2\overline{DB}^2=2ab \tag{5.7.79}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc finalement :

$$DB = \sqrt{ab} \quad (5.7.80)$$

Et donc, $\overline{DB}$ est bien la moyenne géométrique μ_g de a et b.

Nous reste à prouver alors que $\overline{DH}$ est la moyenne harmonique de a et b. Nous avons dans un premier temps en utilisant la projection orthogonale (voir section de Calcul Vectoriel page ??) :

$$\overrightarrow{DO} \circ \overrightarrow{DB} = \|\overrightarrow{DO}\|\|\overrightarrow{DB}\|\cos(\alpha) = \overline{DO} \cdot \overline{DH} = \frac{a+b}{2}\overline{DH} \quad (5.7.81)$$

Puis nous avons également (projection orthogonale aussi) :

$$\overrightarrow{DO} \circ \overrightarrow{DB} = \left(\|\overrightarrow{DO}\|\cos(\alpha)\right)\|\overrightarrow{DB}\| = \overline{DB} \cdot \overline{DB} = \overline{DB}^2 \quad (5.7.82)$$

Nous avons donc :

$$\overline{DB}^2 = \frac{a+b}{2}\overline{DH} \quad (5.7.83)$$

et comme $DB = \sqrt{ab}$, nous avons donc :

$$\overline{DH} = \frac{2ab}{a+b} \quad (5.7.84)$$

$\overline{DH}$ est donc bien la moyenne harmonique de a et b. Archimède ne s'était pas trompé !

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#5.7.123) : Dans un tableau de contingence (un tableau montrant la répartition d'une variable en lignes et d'une autre en colonnes comme celui visible ci-dessous), les "moyennes marginales" d'une variable sont les moyennes de cette variable moyennées à chaque niveau de l'autre variable.

Comme leur nom l'indique, ces moyens apparaissent en marge du tableau de contingence comme celui ci-dessous :

	Technique 1	**Technique 2**	**Technique 3**	*Moyenne Marginale*
Male	79.5	88.7	89.2	$(79.5+88.7+89.2)/3 = 85.8$
Femelle	88.3	87.7	90.6	$(88.3+87.7+90.6)/3 = 88.87$
Moyenne Marginale	$(79.5+88.3)/2 = 83.9$	$(88.7+87.7)/2 = 88.2$	$(89.2+90.6)/2 = 89.9$	

TAB. 5.32 – **Exemple de Moyennes Marginales**

Les moyennes marginales sont utiles car elles nous indiquent la valeur moyenne globale pour un niveau spécifique d'une variable. Essentiellement, les moyennes marginales nous offrent un moyen simple de comprendre les moyennes pour des niveaux spécifiques de variables.

Les moyennes marginales décrites ci-dessus sont dites "totalement libres", alors que les "moyennes marginales estimées" sont basées sur un modèle (comme ANOVA, ANCOVA, etc.), et les les hypothèses du modèle leur imposent des contraintes. c'est pourquoi elles sont appelées moyennes marginales *estimées*, car elles sont estimées à partir d'un modèle !

Attention ! Les moyennes marginales estimées sont populaires pour résumer des modèles linéaires qui incluent des facteurs. Pour les plans expérimentaux équilibrés (voir page ??), ils sont juste égaux aux moyennes marginales. Pour les plans déséquilibrés, ils estiment essentiellement les moyennes marginales que vous auriez observées pour les données issues d'une expérience équilibrée ! Les développements concernant les moyennes marginales estimées ont été développés historiquement dans un contexte des moindres carrés et sont parfois appelés "moyennes des moindres carrés". Depuis ses débuts, le concept s'est étendu bien au-delà des paramètres des moindres carrés !

5.7.2.2.1 Inégalité de Jensen

"L'inégalité de Jensen" est une relation (ou propriété) particulièrement importante dans le secteur de la finance et de l'assurance, car elle montre pourquoi le vendeur d'options cacule l'espérance du pay-off plutôt que le pay-off de l'espérance ou pourquoi, au bout du compte, l'assuré paiera toujours un montant supérieur ou égal au différentiel de l'espérance des coûts d'accidents, ainsi que dans l'analyse chronologique pourquoi les processus GARCH sont naturellement leptokurtic et aussi dans la preuve de la divergence de Kullback-Leibler pourquoi cette dernière est strictement positive ou nulle (voir section Mécanique Statistiques page ??).

Théorème 5.39. L'inégalité de Jensen nous permettra de prouver que pour une fonction convexe (voir section Analyse Fonctionelle page 2255) :

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i) \tag{5.7.85}$$

avec $p_i > 0, \sum_i p_i = 1$. Soit en utilisant des notations spécifiques au domaine de la statistique :

$$f(\mathrm{E}(X)) \leq \mathrm{E}(f(X)) \tag{5.7.86}$$

et à la valorisation des options (voir section d'économie page ??) :

$$P(\mathrm{E}(S_T)) \leq \mathrm{E}(P(S_T)) \tag{5.7.87}$$

Avant de poursuivre, rappelons qu'une fonction f est concave si $-f$ est convexe et inversement. C'est alors immédiat que :

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i) \tag{5.7.88}$$

Soit en utilisant des notations spécifiques au domaine de la statistique :

$$f(\mathrm{E}(X)) \geq \mathrm{E}(f(X)) \tag{5.7.89}$$

Passons à maintenant à la démonstration, puis ensuite nous ferons un petit exemple pratique simplifié avec des dérivés en finance !

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 5.39.1. Voyons si :

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i f(x_i) \tag{5.7.90}$$

est vrai en procédant par induction. D'abord pour $m = 2$, nous retombons sur la définition classique d'une fonction convexe :

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) \tag{5.7.91}$$

Ou autrement écrit puisque $p_1 + p_2 = 1$:

$$f(p_1x_1 + (1-p_1)x_2) \leq p_1 f(x_1) + (1-p_1) f(x_2) \tag{5.7.92}$$

Maintenant, supposons la relation précédente vraie pour $m = n$, et montrons que c'est également vrai pour $m = n+1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = f\left(p_{n+1}x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = f\left(p_{n+1}x_{n+1} + (1-p_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_{n+1}} x_i\right) \tag{5.7.93}$$

Puisque f est convexe, on peut écrire :

$$f\left(p_{n+1}x_{n+1} + (1-p_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_{n+1}} x_i\right) \leq p_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-p_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_{n+1}} x_i\right) \tag{5.7.94}$$

Maintenant posons :

$$q_i = \frac{p_i}{1-p_{n+1}} \tag{5.7.95}$$

pour $i = 1 \ldots n$. Nous avons $q_i > 0$ pour tout $i = 1 \ldots n$ et :

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_{n+1}} = \frac{1}{1-p_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1-p_{n+1}}{1-p_{n+1}} = 1 \tag{5.7.96}$$

parce que pour rappel :

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1 \tag{5.7.97}$$

et par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 - p_{n+1} \tag{5.7.98}$$

Par hypothèse de récurrence nous avons alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \tag{5.7.99}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et donc :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \leq p_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-p_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_{n+1}} f(x_i) \tag{5.7.100}$$

en simplifiant l'expression à droite on obtient bien :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) \tag{5.7.101}$$

■ Q.E.D.

✍**Exemple :**

Nous savons que les pay-off d'un Call (option d'achat) et d'un Put (option de vente) sont respectivement à l'échéance (du point de vue de l'acheteur et donc par symétrie du point de vue du vendeur également en valeur absolue) :

$$\begin{gathered}\max(S_T - K, 0)\\ \max(K - S_T, 0)\end{gathered} \tag{5.7.102}$$

Considérons un prix à l'échéance de 102.- et que les strikes possibles à l'échéance sont de $\{100, 110, 150\}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(P(S_T)) &= \frac{\max(x_{T,1} - K, 0) + \max(x_{T,2} - K, 0) + \max(x_{T,3} - K, 0)}{3}\\ &= \frac{\max(100-102, 0) + \max(110-102, 0) + \max(150-102, 0)}{3} = 18.\bar{6}.\text{-}\end{aligned} \tag{5.7.103}$$

et :

$$\begin{aligned}P(\mathrm{E}(S_T)) &= \max\left(\frac{x_{T,1} - K + x_{T,2} - K + x_{T,3} - K}{3}, 0\right) = \max\left(\frac{x_{T,1} + x_{T,2} + x_{T,3} - 3K}{3}, 0\right)\\ &= \max\left(\frac{100+110+150-3\cdot 102}{3}\right) = \max(18, 0) = 18.\text{-}\end{aligned} \tag{5.7.104}$$

et nous avons donc bien pour un Call du point de vue d'un acheteur ou d'un vendeur en valeurs absolues :

$$P(\mathrm{E}(S_T)) \leq \mathrm{E}(P(S_T)) \tag{5.7.105}$$

Tout ce que nous avons vu jusqu'ici (et que nous verrons plus loin !) est lié à des valeurs aléatoires localisées sur une ligne droite. Pour les statistiques sur un cercle ou une sphère, nommées "statistiques directionnelles", nous recommandons vivement au lecteur de consulter [302].

5.7.3 Types de Variables

Lorsque nous avons parlé des échantillons au début de ce chapitre, nous avons fait mention de deux types d'informations : les variables quantitatives et qualitatives. Nous n'avons cependant pas précisé qu'il existait trois types de variables quantitatives très importantes qu'il convient absolument de différencier :.

Définitions (#5.7.124) :

D1. Les "variables discrètes" (de comptage) appartenant à $\mathbb{Z}$: Elles sont analysées avec des lois statistiques basées le plus souvent sur un domaine de définition dénombrable strictement positif (distribution de Poisson ou Hypergéométrique) sont un cas typique dans l'industrie). Elles sont presque toujours représentés graphiquement par des histogrammes.

D2. Les "variables continues" (par mesure) appartenant à $\mathbb{R}$: Elles sont analysés avec des lois statistiques basées sur un domaine de définition non-dénombrable strictement positif ou peuvent prendre toute valeur négative ou positive (généralement comme la distribution Normale dans l'industrie). Elles sont presque toujours représentés graphiquement par des histogrammes avec des intervalles de classe.

D3. Les "variables d'attribut" (par classification) : ce ne sont pas des données numériques en tant que telles (uniquement lorsqu'elles sont codées à l'aide de chiffres !), Mais un type de données qualitatif {Oui, Non}, {Transmis, échec} , {À l'heure, en retard}, {rouge, vert bleu, noir}, etc. L'attribut de type de données binaire suivent typiquement une distribution de Bernoulli ou Binomiale tandis que les variables qualitatives d'ordre supérieur n'ont pas de moyenne ou d'écart type (en fait, essayez de calculer la moyenne et la norme écart entre les variables qualitatives Rouge, Vert et Rose ...).

Dans la famille des variables d'attributs, nous distinguons principalement deux sous-types de variables :

(a) Une "variable catégorielle" (parfois appelée "variable nominale") est une variable qui comporte deux catégories ou plus, mais où il n'y a pas d'ordre intrinsèque pour les catégories. Par exemple, le genre est une variable catéroielle ayant deux catégories (homme et femme) et il n'existe aucun ordre intrinsèque pour les catégories. La couleur des cheveux est également une variable catégorielle comportant un certain nombre de catégories (blonde, brune, brune, rouge, etc.) et là encore, il n'existe aucun moyen convenu de les classer du plus haut au plus bas. Une variable purement catégorielle est une variable qui vous permet simplement d'affecter des catégories mais vous ne pouvez pas clairement les classer. Si la variable a un ordre clair, alors cette variable serait une variable ordinale, comme décrit ci-dessous.

(b) Une "variable ordinale" est similaire à une variable catégorielle. La différence entre les deux est qu'il existe un ordre clair des variables. Par exemple, supposons que vous ayez une variable, nommée *statut économique*, avec trois catégories : {bas, haut, moyen}. En plus de pouvoir classer les personnes dans ces trois catégories, nous pouvez les classer comme suit : bas (1) $<$ moyen (2) $<$ haut (3). Considérons maintenant une variable telle que *niveau d'éducation* (avec des valeurs telles que : {diplômé universitaire, diplômé du secondaire, diplômé du primaire, un peu d'université}). Ceux-ci peuvent également être commandés comme : diplômé du primaire

En cours de traduction de l'anglais

(1) $<$ diplômé du secondaire (2) $<$ un peu d'université (3) $<$ diplômé universitaire (4).

Un résumé illustré et plus complet des types de variables dans le domaine des statistiques est donné dans la figure ci-dessous :

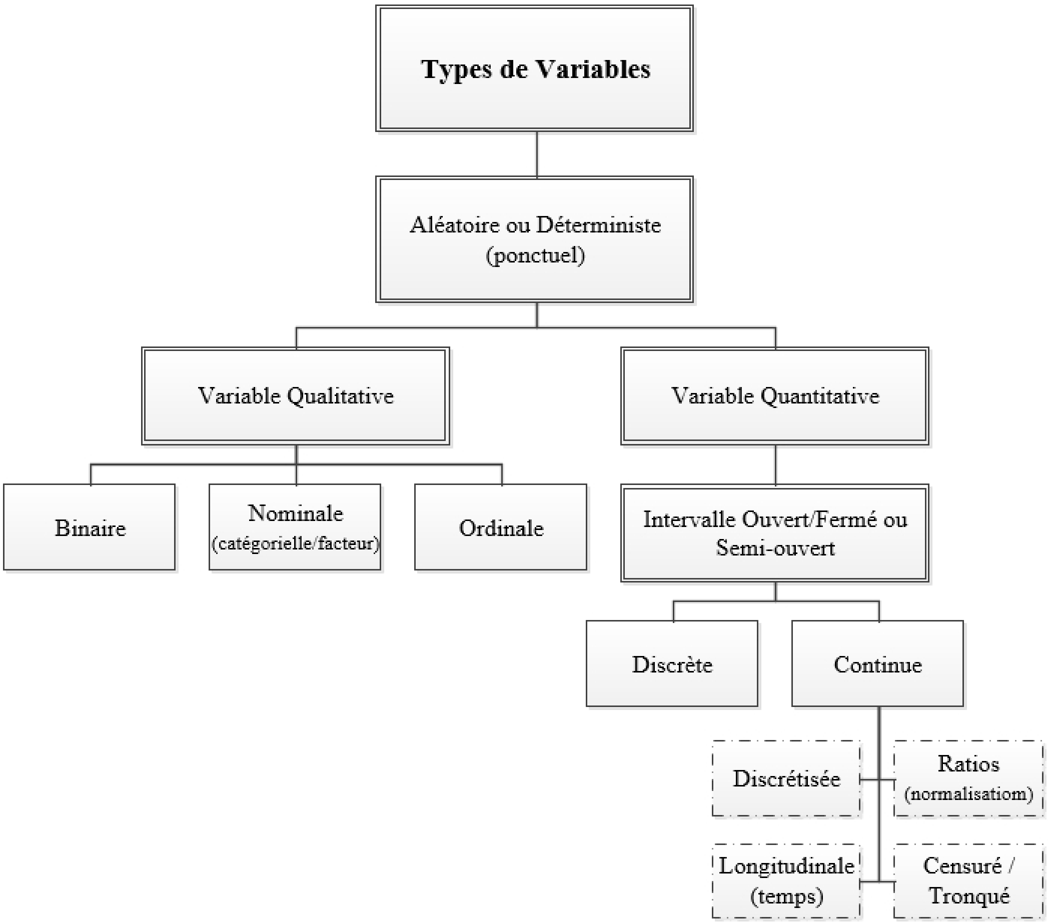


FIG. 5.110 – **Types de variables en statistiques**

Remarque

En principe, toute variable continue ou toute variable d'intervalle ou de ratio avec plus de deux valeurs observées est une variable polytomique, mais le terme est généralement réservé aux variables nominales et ordinales, nommées "variables polytomiques non ordonnées et ordonnées".

Comprendre les différents types de données est une discipline importante pour les ingénieurs car cela a des implications importantes pour le type d'outils et de techniques d'analyse qui seront utilisés.

Une question commune concernant la collecte de données est la suivante : quelle est la quantité à collecter ? En fait, cela dépend du niveau de précision souhaité. Nous verrons beaucoup plus loin dans cette section (avec démonstration mathématique à l'appui !) comment déterminer mathématiquement la quantité de données à collecter.

Maintenant que nous connaissons relativement bien le concept de moyenne et de variable, nous pouvons discuter de calculs plus formels qui feront sens !

5.7.3.1 Variables discrètes et Moments

Soit X une variable indépendante (un individu d'un échantillon dont la propriété est indépendante des autres individus) qui peut prendre les valeurs aléatoires discrètes (réalisations du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$) avec les probabilités respectives $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ où, de par l'axiomatique des probabilités (voir section Probabilités page 475) :

$$p_i \in [0,1] \qquad \sum_i p_i = 1 \tag{5.7.106}$$

Soit X une variable aléatoire numérique (quantitative) (v.a.). Dans la pratique, la plupart du temps, elle sera entièrement décrite par la valeur de sa probabilité associée (pour les variables discrètes) pour sa réalisation ou par :

Définitions (#5.7.125) :

D1. La probabilité correspondante à sa valeur, nommée "fonction de densité de probabilité[30]" (PMF) et noté par :

$$P(X) = f(X) \tag{5.7.107}$$

aussi parfois (et plus correctement) noté :

$$P(X = x) = f_X(x) \tag{5.7.108}$$

en gardant à l'esprit que $\sum f_X(x)$ doit être égal à 1.

D2. La probabilité cumulative (pour les variables discrètes ET continues) d'être généralement inférieure ou égale à X pour toutes les réalisations x. Cette "fonction de distribution cumulative" (F.D.C.), aussi souvent appelée "fonction de répartition", est notée par :

$$F(x) = P(x \leq X) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5.7.109}$$

aussi parfois (et plus correctement) noté (pour rappel D est le domaine de définition tel que défini à la page 2185 dans la section d'Analyse Fonctionnelle) :

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P(X \in]\min(D), t]) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.7.110}$$

avec :

$$0 \leq P(X) \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq F(X) \leq 1 \tag{5.7.111}$$

où $F(x)$ s'appelle la "fonction de répartition" de la variable X. C'est la proportion théorique de la population considérée dont la valeur est inférieure ou égale à x. Il s'ensuit :

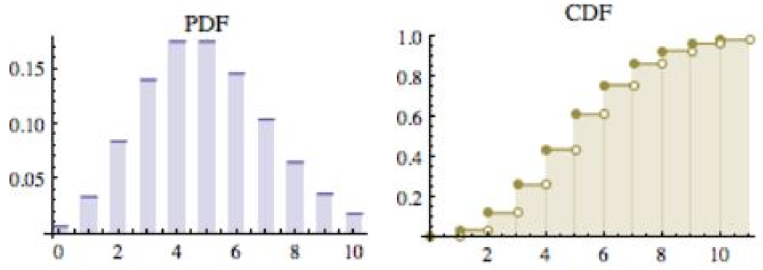
$$P(X > x) = 1 - F(x) \Leftrightarrow P(X \leq x) + P(X > x) = 1 \tag{5.7.112}$$

[30] Pour les variables discrètes certains utilisents à la place la terminologie suivante :" fonction de masse de probabilité "

En cours de traduction de l'anglais

Plus généralement, pour toute paire de nombres a et b avec $a < b$, nous avons :

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) \tag{5.7.113}$$



Cette définition s'applique bien évidemment aussi aux variables continues.

D3. La "fonction de répartition empirique" (F.R.E.) est quant à elle définie naturellement par (nous avons indiqué les différentes notations courantes dans la littérature) :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{x_i \leq x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i \leq x} = \frac{\#(i : x_i \leq x)}{n} \tag{5.7.114}$$

avec $\hat{F}_n(x) \in [0,1]$ associé à l'échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (ce que l'on nomme aussi un "vecteur aléatoire" noté $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

Il s'agit simplement du cumul normalisé à l'unité des fréquences d'apparition en-dessous d'un certaine valeur fixée (démarche que la majorité des êtres humains font naturellement en cherchant la fonction de répartition).

Donc si nous reprenons l'exemple de salaires, vu plus haut, nous avons alors par exemple pour x fixé à $1'800$:

Salaires ordonnés $x_i \leq x$	**Fréquences** $1_{x_i \leq x}$
$1'200$	1
$1'220$	1
$1'250$	1
$1'300$	1
$1'350$	1
$1'450$	1
$1'450$	1
$1'560$	1
$1'600$	1
$1'800$	1
$1'900$	0
$2'150$	0
$2'310$	0
$2'600$	0
$3'000$	0
$3'400$	0
$4'800$	0

TAB. 5.33 – **Exemple de la fonction de répartition empirique**

En cours de traduction de l'anglais

et donc :

$$\hat{F}_{17}(x \leq 1'800) = \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17} 1_{x_i \leq x} = \frac{1}{17} \cdot 10 \cong 59\% \tag{5.7.115}$$

La fonction de répartition est clairement une fonction monotone croissante (ou plus précisément "non décroissante") dont les valeurs vont de 0 à 1.

Voyons une propriété que nous utiliserons plusieurs fois et qui est importante dans la pratique (propriétété valable aussi bien pour les variables aléatoires discrètes que continues) :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X et de fonction de densité f_X (rappel : $f_X = F'_X$) et $c^{te} \in \mathbb{R}^*$ une constante tel que $y = c^{te}X$. Nous voulons déterminer la fonction de répartition et la fonction de densité de la va. Y à partir de F_X et f_X respectivement.

Par définition pour $y \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(c^{te}X \leq y\right) = P\left(X \leq \frac{y}{c^{te}}\right) = F_X\left(\frac{y}{c^{te}}\right) \tag{5.7.116}$$

Ainsi :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{c}\right) \tag{5.7.117}$$

En ce qui concerne la fonction de densité nous avons :

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_X\left(\frac{y}{c^{te}}\right) = \frac{1}{c^{te}}F'_X\left(\frac{y}{c^{te}}\right) = \frac{1}{c^{te}}f_X\left(\frac{y}{c^{te}}\right) \tag{5.7.118}$$

Ainsi :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f_Y(y) = \frac{1}{c^{te}}f_X\left(\frac{y}{c^{te}}\right) \tag{5.7.119}$$

En cours de traduction de l' anglais

5.7.3.1.1 Espérance et Variance de variables aléatoires discrètes

Définition (#5.7.126) : Nous définissons "l'espérance mathématique", appelée aussi "moment d'ordre 1", de la variable aléatoire X par la relation (avec différentes notations courantes) :

$$\boxed{\mu_X = \mathbb{E}(X) = \mathrm{E}(X) = \sum_i P(X = x_i)x_i = \sum_i p_i x_i} \tag{5.7.120}$$

appelée aussi parfois "règle des parties".

En d'autres termes, nous savons qu'à chaque événement de l'espace des échantillons est associé une probabilité à laquelle nous associons également une valeur (donnée par la variable aléatoire). La question étant alors de savoir quelle valeur, à long terme, nous pouvons obtenir ? La valeur espérée, (l'espérance mathématique donc...) est alors la moyenne pondérée, par la probabilité, de toutes les valeurs des événements de l'espace des échantillons.

Si la probabilité est donnée par une fonction de distribution discrète $f(x_i)$ (voir les définitions des fonctions de distribution plus bas) de la variable aléatoire, nous avons :

$$p_i = f(x_i) \Rightarrow \mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_i x_i f(x_i) \tag{5.7.121}$$

Remarques

R1. L'espérance μ_X peut être notée μ s'il n'y pas de confusion possible.

R2. Si nous considérons chaque réalisation de la variables aléatoire $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ comme les composantes d'un vecteur $\vec{X}$ et chaque probabilité (ou pondération) $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ comme les composantes d'un vecteur $\vec{p}$ alors nous pouvons écrire l'espérance de manière technique sous la forme d'un produit scalaire souvent noté :

$$\vec{p} \circ \vec{x} = \langle \vec{p}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathrm{E}(X) \tag{5.7.122}$$

Voici les propriétés mathématiques les plus importantes de l'espérance pour toute variable aléatoire (quelle que soit sa loi de distribution !) ou pour toute série de variables aléatoires et que nous utiliserons souvent tout au long de cette section (et de nombreuses autres sections faisant usage des statistiques) :

P1. Multiplication par une constante :

$$\mathrm{E}(\alpha X) = \sum_i \alpha x_i P(X = x_i) = \alpha \sum_i x_i P(X = x_i) = \alpha \mathrm{E}(\alpha X) \tag{5.7.123}$$

P2. Somme de deux variables aléatoires (indépendantes ou non !) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X+Y) &= \sum_{i,j} \left[(x_i + y_j) P\left((X = x_i) \cap (Y = y_i)\right)\right] \\
&= \sum_{i,j} \left[x_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)\right] + \sum_{i,j} \left[y_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)\right] \\
&= \sum_i x_i \left[\sum_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_i)\right)\right] + \sum_j y_j \left[\sum_i P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)\right] \\
&= \sum_i x_i P\left[(X = x_i) \cap \bigcup_j (Y = y_i)\right] + \sum_j y_j P\left[(Y = y_j) \cap \bigcup_i (X = x_i)\right] \\
&= \sum_i x_i P(X = x_i) + \sum_j y_j P(Y = y_j) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)
\end{aligned} \tag{5.7.124}$$

où nous avons utilisé dans la 4ème ligne, la propriété vue dans le chapitre de Probabilités (page 476) :

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i) \tag{5.7.125}$$

Nous en déduisons que pour n variables aléatoires equation, non nécessairement définies sur une même loi de distribution :

$$\mathrm{E}\left(X_i\right) = \sum_i \mathrm{E}(X_i) \tag{5.7.126}$$

En cours de traduction de l' anglais

P3. L'espérance d'une constant a est égale à la constante elle-même :

$$\mathrm{E}(a) = \sum_i a p_i = a \sum_i p_i = a \cdot 1 = a \tag{5.7.127}$$

P4. Espérance du produit de deux variables aléatoires :

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i y_i P(X = x_i, Y = y_j) \tag{5.7.128}$$

Et si les deux variables aléatoires sont indépendantes, alors la probabilité conjointe est égale au produite des probabilités (voir section de Probabilités page 479). Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(x_i) P(y_j) &= \sum_{i,j} x_i P(x_i) y_i P(y_i) \\ = \sum_{i,j} x_i P(x_i) \sum_{i,j} y_i P(y_i) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\end{aligned} \tag{5.7.129}$$

✍**Exemple :**

Pour un dé unique, l'espérance est :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3.5$$

En utilisant la propriété de linéarité de l'espérance, nous avons alors pour la somme de n dés :

$$\mathrm{E}_n(X) = n\mathrm{E}(X) = n \cdot 3.5$$

Pour le cas particulier de deux dés, la somme la plus probable est donc :

$$\mathrm{E}_2(X) = 2\mathrm{E}(X) = 2 \cdot 3.5 = 7$$

Donc l'espérance du produit de variables aléatoires indépendantes est toujours égal au produit des espérances.

évidemment, nous supposerons comme évident que ces quatre propriétés s'étendent au cas continu !

Définition (#5.7.127) : Après avoir traduit la tendance par l'espérance il est intéressant de traduire la dispersion ou "déviation standard" autour de l'espérance par une valeur appelée "variance de X" ou encore "moment centré du deuxième ordre", notée $\mathrm{V}(X)$ ou σ_X^2 (lire "sigma-deux") et donnée sous sa forme discrète par :

$$\sigma_X^2 = \mathrm{V}(X) = \mathrm{MCE} = \mathrm{E}\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f(x_i) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_i \tag{5.7.130}$$

La variance n'est cependant pas comparable directement à la moyenne, car l'unité de la variance est le carré de l'unité de la variable aléatoire, ce qui découle directement de sa définition.

En cours ... anglais

Pour que l'indicateur de dispersion puisse être comparé aux paramètres de tendance centrale (moyenne, médiane et... mode), il suffit alors de prendre la racine carrée de la variance.

Par commodité, nous définissons ainsi "l'écart-type" de X par

$$\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} \tag{5.7.131}$$

L'écart-type est donc la moyenne quadratique des écarts (ou "écart moyen quadratique") entre les observations et leur moyenne.

Remarques

R1. L'écart-type σ_X de la variable aléatoire X peut être noté σ s'il n'y pas de confusion possible.

R2. L'écart-type et la variance sont, dans la littérature, souvent appelés "paramètres de dispersion" à l'opposé de la moyenne, mode et médiane qui sont appelés des "paramètres de position".

Notez que lorsque deux types différents de méthodes de mesure donnent des distributions statistiques différentes de la variable d'intérêt, alors en physique et en statistique, la distance entre les deux pics de certaines distributions unimodales est nommée "tension". Par exemple en 2021, la tension entre la méthode de mesure du rayonnement fossile cosmologique et la méthode de mesure directe de la constante de Hubble a une tension de 5σ comme illustré ci-dessous :

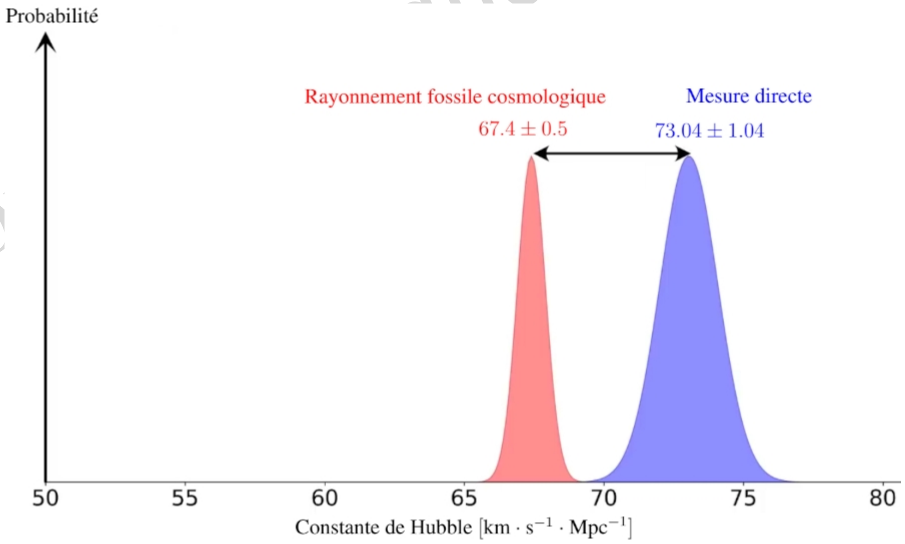


FIG. 5.111 – **Illustration de la "tension" en statistique**

Définition (#5.7.128) : Le ratio (exprimé en %) :

$$\mathrm{CV} = \frac{\sigma}{\mu} \tag{5.7.132}$$

souvent utilisé dans les entreprises comme comparaison de la moyenne et de l'écart-type est appelé le "coefficient de variation" (C.V.) car il n'a pas d'unités (ce qui est son avantage !) et parce

que plusieurs méthodes industrielles statistiques considèrent qu'un bon C.V. doit idéalement être juste de l'ordre de quelques % seulement !

Plus généralement, pour tout estimateur statistique $\hat{\theta}$ (somme, moyenne, médiane, etc.), nous pouvons construire un coefficient de variation tel que :

$$\text{CV} = \frac{\sigma_{\hat{\theta}}}{\hat{\theta}} \tag{5.7.133}$$

Ainsi, dans la pratique nous considérons que :

Coefficient de variation	Qualité
20%	Pauvre
10%	Acceptable
5%	Contrôlée
2.5%	Excellente
1.25%	Classe mondiale
0.0625%	Rarement atteinte

TAB. 5.34 – **Jugements qualitatifs du C.V. communément acceptés**

En cours de traduction de l' anglais

Pourquoi trouvons-nous un carré (réciproquement une racine) dans la définition de la variance ? La raison intuitive est simple (la rigoureuse l'est nettement moins...). Souvenez-vous que nous avons démontré plus haut que la somme des écarts à la moyenne pondérés par les effectifs, est toujours nulle :

$$\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \mu) = 0 \tag{5.7.134}$$

Or, si nous assimilons les effectifs par la probabilité en normalisant ceux-ci par rapport à n, nous tombons sur une relation qui est la même que la variance à la différence que le terme entre parenthèse n'est pas au carré. Et nous voyons alors immédiatement le problème... la mesure de dispersion serait toujours nulle d'où la nécessité de porter cela au carré.

Nous pourrions imaginer cependant d'utiliser la valeur absolue des écarts à la moyenne, mais pour un certain nombre de raisons que nous verrons plus loin lors de notre étude des estimateurs, le choix de porter au carré s'impose assez naturellement.

Signalons cependant quand même l'utilisation courante dans l'industrie deux autres indicateurs fréquents de la dispersion :

1. "L'écart absolu moyen" (moyenne des valeurs absolues des écarts à la moyenne) :

$$\text{AVEDEV} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - \mu \mid}{n} \tag{5.7.135}$$

qui est un indicateur élémentaire très utilisé lorsque nous ne souhaitons pas faire de l'inférence statistique sur une série de mesures. Cet écart peut être facilement calculé dans la version française Microsoft Excel 11.8346 à l'aide de la fonction `ECART.MOYEN( )`.

2. La "déviation absolue de la médiane" notée MAD (médiane des valeurs absolues des écarts à la médiane) :

$$\text{MAD} = M_e\left(\mid X - M_e(X) \mid\right) \tag{5.7.136}$$

qui est considérée comme un indicateur plus robuste de la dispersion que ceux donnés par l'écart absolu moyen ou l'écart-type (malheureusement cet indicateur n'est pas intégré à ma connaissances nativement dans les tableurs). Ce dernier ne doit pas être confondu avec "moyenne absolue des déviations à la médiane" défini par :

$$\text{MMAD} = \frac{\overline{\mid X - M_e(X) \mid}}{n} \tag{5.7.137}$$

Remarque

Afin d'utiliser le MAD comme estimateur consistent de l'écart-type σ (voir plus bas pour la définition de l'écart-type) comme nous en aurons besoin lors de notre étude des Cartes de Contrôle (voir section du même nom page ??), nous prenons en général :

$$\hat{\sigma} = k \cdot \text{MAD} \tag{5.7.138}$$

où k est une constante de facture d'échelle, qui dépend de la distrubution.

Pour des données distribuées selon un loi Normale, comme nous le démontrerons pendant notre étude de la loi demi-Normale (voir page 783), nous prenons :

$$\text{MAD} \cong 2\sqrt{2}\text{erf}^{-1}(0.50) \cong 0.67499\sigma \tag{5.7.139}$$

Dès lors :

$$\sigma \cong 1.4826\text{MAD} \tag{5.7.140}$$

En cours ... anglais

✍**Exemple :**

Considérons les mesures d'une variable aléatoire X :

$$(1, 1, 2, 2, 4, 6, 9) \quad (5.7.141)$$

dont la médiane vaut :

$$M_e(X) = M_e(1, 1, 2, 2, 4, 6, 9) = 2 \quad (5.7.142)$$

Les déviations absolues par rapport à la médiane sont alors :

$$| X - M_e(x) |= (1, 1, 0, 0, 2, 4, 7) \quad (5.7.143)$$

Mis dans l'ordre croissant, nous avons alors :

$$(0, 0, 1, 1, 2, 4, 7) \quad (5.7.144)$$

où nous identifions facilement la déviation absolue de la médiane qui vaut :

$$\text{MAD} = M_e(0, 0, 1, 1, 2, 4, 7) = 1 \quad (5.7.145)$$

Dans le cas où nous avons à disposition une série de mesures, nous pouvons estimer la valeur expérimentale de la moyenne (l'espérance) et de la variance par les estimateurs suivants (il s'agit simplement au fait de l'espérance et l'écart-type d'un échantillon dont les événements sont tous équiprobables) dont la notation est particulière :

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 \quad (5.7.146)$$

Démonstration 5.39.2. D'abord pour l'espérance :

$$\mu = \text{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_i} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{\mu} \quad (5.7.147)$$

Et pour la variance :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \text{E}((X - \text{E}(X))^2) = \text{E}((X - \hat{\mu})^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n_i}(x_i - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2\end{aligned} \quad (5.7.148)$$

■ Q.E.D.

Théorème 5.40. Et démontrons un petite propriété bien sympathique comme quoi la moyenne arithmétique est un optimum de la somme des carrés des écarts. Effectivement, nous avons :

Démonstration 5.40.1.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i + n\alpha^2 \quad (5.7.149)$$

En cours de traduction de ... is

et si nous cherchons α tel que la dérivée de l'expression ci-dessus est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i + n\alpha^2\right) = 0 \tag{5.7.150}$$

alors α est un optimum. Nous avons alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i + n\alpha^2\right) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\alpha = 0 \tag{5.7.151}$$

soit après réarrangement et simplification élémentaire :

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5.7.152}$$

■ Q.E.D.

Il s'agit donc bien de la moyenne arithmétique. Maintenant pour savoir s'il s'agit d'un extrema de type maximum ou minimum il suffit de faire la dérivée seconde (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1437) et de voir que cela donne une constante positive (donc la dérivée première augmente quand α augmente). Il s'agit alors d'un bien d'un extrema de type minimum ! ! !

Remarque

Le terme de la somme se trouvant dans l'expression de la variance (écart-type) est appelée "somme des carrés des écarts à la moyenne" ou "somme des carrés des erreurs à la moyenne". Nous l'appelons aussi la "somme des carrés totale", ou encore la "variation totale" dans le cadre de l'étude de l'ANOVA (voir plus loin).

Avant de poursuivre, rappelons le concept de moyenne géométrique vu plus haut (très utilisée pour les rendements en finance ou les analyses de croissances en % de chiffres d'affaires ou ventes) :

$$\mu_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\dfrac{1}{n}} \tag{5.7.153}$$

C'est bien joli mais les financiers ont besoin de calculer aussi l'écart-type d'une telle moyenne. L'idée est alors d'en prendre le logarithme pour la ramener à une simple moyenne arithmétique (il s'agit toujours bien évidemment d'estimateurs !) :

$$\ln(\mu_g) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\dfrac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{5.7.154}$$

En cours de relecture / correction de l'anglais

Dès lors, puisqu'en prenant le logarithme des valeurs nous nous ramenons à la moyenne arithmétique du logarithme des valeurs, alors le logarithme de l'écart-type géométrique (avec un raisonnement à la physicienne...) sera :

$$\ln(\hat{\sigma}_g)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i)-\ln(\mu_g))}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{\mu_g}\right)} \tag{5.7.155}$$

Il suffit alors de prendre l'exponentielle de l'écart-type des logarithmes des valeurs pour avoir "l'écart-type géométrique" :

$$\hat{\sigma}_g=e^{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{\mu_g}\right)}} \tag{5.7.156}$$

La variance peut également s'écrire sous la forme très importante de la "relation de Huyghens" appelée également "théorème de König-Huyghens" ou "théorème de translation de Steiner" que nous réutiliserons plusieurs fois par la suite. Voyons de quoi il s'agit :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]&=\sum_i(x_i-\mu_X)^2f(x_i)=\sum_i\left(x_i^2-2\mu_Xx_i+\mu_X^2\right)f(x_i)\\&=\sum_i x_i^2f(x_i)-2\mu_X\sum_i x_if(x_i)+\mu_X^2\sum_i f(x_i)=\sum_i x_i^2f(x_i)-2\mu_X^2+\mu_X^2\\&=\sum_i x_i^2f(x_i)-\mu_X^2=\mathrm{E}(X^2)-\mu_X^2=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2\end{aligned} \tag{5.7.157}$$

Remarque

Le lecteur trouvera peut-être intéressant de savoir que dans de nombreuses applications commerciales de statistiques ("apprentissage automatique"), les statistiques doivent être mises à jour "à la volée" (domaine nommé "statistiques de flux de données") chaque fois que de nouvelles données apparaissent. Il faut donc trouver un algorithme efficace pour mettre à jour les calculs sans tout recalculer à partir de zéro ! L'exemple typique le plus simple est la variance ! Mettre à jour le calcul de la variance de l'échantillon semble évidemment très fastidieux si nous ajoutons simplement de nouvelles données selon :

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\sum_i\frac{1}{n}(x_i-\hat{\mu})^2} \tag{5.7.158}$$

Mais en utilisant la relation de Huygens, nous constatons que cette variance d'échantillon devient beaucoup moins fastidieuse à calculer car il ne s'agit que d'un problème de mise à jour de deux sommes :

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2}=\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}-\frac{\left(\sum_i x_i\right)^2}{n}} \tag{5.7.159}$$

Faisons maintenant un petit crochet relativement à un scénario fréquent générateur d'erreurs dans les entreprises lorsque plusieurs séries statistiques sont manipulées (cas très fréquent dans l'industrie ainsi que dans les assurances ou la finance).

Considérons deux séries statistiques portant sur le même caractère :

En cours de rédaction de l'anglais

- $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_p, n_p)$ échantillon d'effectif total n, moyenne arithmétique $\bar{x}$, écart-type σ_x.
- $(y_1, m_1), (y_2, m_2), \ldots, (y_p, m_q)$ échantillon d'effectif total m, moyenne arithmétique $\bar{y}$, écart-type σ_y.

Nous avons alors :

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=1}^{q} y_i}{n+m} = \frac{n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} x_i + m\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{q} y_i}{n+m} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m} \tag{5.7.160}$$

avec $n + m = N$.

Donc la moyenne des moyennes n'est pas égale à la moyenne globale (première erreur fréquente dans les entreprises) exceptée si les deux séries statistiques ont le même nombre d'effectifs ($n = m = {}^1\!/_2 N$) ! ! !

Concernant l'écart-type, rappelons d'abord que nous avons :

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sum_{i=1}^{p} p_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} n_i}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 \\ \sigma_y^2 &= \sum_{i=1}^{q} p_i(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{q} m_i(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{q} m_i}\sum_{i=1}^{q} m_i(y_i - \bar{y})^2\end{aligned} \tag{5.7.161}$$

Pour la suite, rappelons que nous avons démontré précédemment la relation de Huygens :

$$\mathrm{V}(Z) = \sigma_z = \mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(Z)^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} k_i z_i^2 - \bar{z}^2 \tag{5.7.162}$$

En cours de traduction de l' anglais

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^2 &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} k_i z_i^2 - \bar{z}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} k_i z_i^2 - \left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{q} m_i y_i^2\right) - \left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2 \\
&= \frac{n\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 + m\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{q} m_i y_i^2}{n+m} - \left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2 \\
&= \frac{n\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - n\bar{x}^2 + m\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{q} m_i y_i^2 - m\bar{y}^2}{n+m} + \frac{n\bar{x}+m\bar{y}^2}{n+m} - \left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2 \\
&= \frac{n\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2\right) + m\left(\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{q} m_i y_i^2 - \bar{y}^2\right)}{n+m} + \frac{n\bar{x}+m\bar{y}^2}{n+m} - \left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2 \\
&= \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m} + \frac{n\bar{x}+m\bar{y}^2}{n+m} - \left(\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}\right)^2 \\
&= \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m} + \frac{(n\bar{x}^2+m\bar{y}^2)(n+m) - (n\bar{x}+m\bar{y}^2)}{(n+m)^2} \\
&= \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m} + \frac{(n^2\bar{x}^2+mn\bar{y}^2+mn\bar{x}^2+m^2\bar{y}^2) - (n^2\bar{x}^2+2n\bar{x}m\bar{y}+m^2\bar{y}^2)}{(n+m)^2} \\
&= \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m} + \frac{mn\bar{y}^2+mn\bar{x}^2-2n\bar{x}m\bar{y}}{(n+m)^2} = \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m} + nm\frac{\bar{y}^2+\bar{x}^2-2\bar{x}\bar{y}}{(n+m)^2} \\
&= \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m} + nm\frac{(\bar{y}-\bar{x})^2}{(n+m)^2}
\end{aligned}
\quad (5.7.163)
$$

En cours de traduction de l'anglais

Si nous faisons les mêmes calculs avec l'estimateur de la variance nous obtenons en en refaisant exactement les mêmes développements :

$$\sigma_z^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_x^2 + (m-1)\hat{\sigma}_y^2}{n+m-1} + nm\frac{(\bar{y}-\bar{x})^2}{(n+m)(n+m-1)} \quad (5.7.164)$$

Donc nous voyons que l'écart-type global n'est pas égal à la somme des écarts-types (deuxième erreur courante dans les entreprises) !

Considérons maintenant X une variable aléatoire d'espérance μ (valeur constante et déterminée) et de variance σ^2 (valeur constante et déterminée), nous définissons la "variable centrée réduite" par la relation :

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad (5.7.165)$$

Remarque

Lorsque la moyenne réelle est inconnue et identique pour la variance, nous notons la relation ci-dessus comme suit (différentes notations sont représentées) :

$$Y=\frac{X-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}=\frac{X-\bar{X}}{S} \tag{5.7.166}$$

et cela s'appelle une "variable studentisée".

Théorème 5.41. Nous démontrons de façon très simple en utilisant la propriété de linéarité de l'espérance et la propriété de multiplication par un scalaire de la variance (voir de suite après) que :

$$\text{E}(Y)=0,\text{V}(Y)=1 \tag{5.7.167}$$

Démonstration 5.41.1. Pour la preuve, nous utilisons simplement les définitions de l'espérance et de la variance attendues (en utilisant le théorème de Huygens pour cette dernière). Commençons donc par l'espérance :

$$\text{E}(Y)=\text{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\text{E}\left(X-\mu\right)=\frac{1}{\sigma}(\text{E}(X)-\text{E}(\mu))=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0=\mu_Y \tag{5.7.168}$$

Et maintenant, avec la variance utilisant le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned}\text{V}(Y)&=\text{E}(Y^2)-\text{E}(Y)^2=\text{E}(Y^2)-\mu_Y^2=\text{E}(Y^2)-0^2=\text{E}(Y^2)\\&=\text{E}\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right)=\text{E}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(X^2-2X\mu+\mu^2\right)\right)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\text{E}(X^2)-2\mu\text{E}(X)+\mu^2\right)\\&=\frac{1}{\sigma^2}\left(\text{E}(X^2)-2\mu\mu+\mu^2\right)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\text{E}(X^2)-\mu^2\right)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\left(\text{V}(X)+\text{E}(X)^2\right)-\mu^2\right)\\&=\frac{1}{\sigma^2}\left(\text{V}(X)+\mu^2-\mu^2\right)=\frac{1}{\sigma^2}\text{V}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1\end{aligned} \tag{5.7.169}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, toute répartition statistique définie par une moyenne et un écart-type peut être transformée en une autre distribution statistique souvent plus simple à analyser. Ainsi en faisant cette transformation, nous obtenons une variable aléatoire dont les paramètres de la loi de distribution ne sont plus utiles à connaître. Quand nous faisons cela avec d'autres lois, et dans le cas général, nous parlons alors de "variables pivotables".

Voici quelques propriétés importantes de la variance :

P1. Multiplication par une constante :

$$\text{V}(\alpha X)=\sum_i f(x_i)(\alpha x_i-\alpha\mu)^2=\alpha^2\sum_i f(x_i)(x_i-\mu)^2=\alpha^2\text{V}(X) \tag{5.7.170}$$

P2. Somme de deux variables aléatoires (combinaison linéaire) :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X+Y) &= \sum_i \sum_j \left((x_i+y_i)-(\mu_X+\mu_Y)\right)^2 f(x_i,y_i)\\ &= \sum_i \sum_j \left((x_i-\mu_X)+(y_i-\mu_Y)\right)^2 f(x_i,y_i)\\ &= \sum_i \sum_j \left((x_i-\mu_X)^2+2(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)+(y_i-\mu_Y)^2\right)^2 f(x_i,y_i)\\ &= \sum_{i,j}(x_i-\mu_X)^2 f(x_i,y_i)+2\sum_{i,j}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)f(x_i,y_i)\\ &+\sum_{i,j}(y_i-\mu_Y)^2 f(x_i,y_i)\\ &= \mathrm{V}(X)+2\sum_{i,j}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)f(x_i,y_i)+\mathrm{V}(Y)\\ &= \mathrm{V}(X)+2\mathrm{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]+\mathrm{V}(Y)\\ &:= \mathrm{V}(X)+2\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{V}(Y)\end{aligned} \tag{5.7.171}$$

Où nous rencontrons pour la première fois le concept de "covariance" noté par cov(. Nous verrons plus loin à la page 590 le cas général à n variables aléatoires !

P3. Transformation affine :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\alpha+\beta X) &= \mathrm{E}\left[(\alpha+\beta X-\mathrm{E}(\alpha+\beta X))^2\right]\\ &= \mathrm{E}\left[(\alpha+\beta X-\alpha+\beta\mathrm{E}(X))^2\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\beta^2(X-\mathrm{E}(X))^2\right]\\ &= \beta^2\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}(X))^2\right]\\ &= \beta^2\mathrm{V}(X)\end{aligned} \tag{5.7.172}$$

sans trop de surprises ...

P4. Produit de deux variables aléatoires (en utilisant la relation de Huyghens) :

$$\mathrm{V}(X\cdot Y)=\mathrm{E}\left((XY)^2\right)-\mathrm{E}(XY)^2=\mathrm{E}(X^2Y^2)-\mathrm{E}(XY)^2 \tag{5.7.173}$$

Et si les deux variables aléatoires sont indépendantes, il vient :

$$\mathrm{V}(X\cdot Y)=\mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)-\mathrm{E}\left(X\right)^2\mathrm{E}\left(Y\right)^2 \tag{5.7.174}$$

Ce que l'on peut réécrire en utilisant encore une fois la relation de Huyghens :

$$\mathrm{V}(X\cdot Y)=(\mathrm{V}(X)-\mathrm{E}(X)^2)(\mathrm{V}(Y)-\mathrm{E}(Y)^2)-\mathrm{E}\left(X\right)^2\mathrm{E}\left(Y\right)^2 \tag{5.7.175}$$

évidemment, nous supposerons comme évident que ces quatre propriétés s'étendent au cas continu !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.3.1.1.1 Semivariance

La "semi-variance" est un indicateur de dispersion qui aurait été proposé par Harry Markowitz au lieu de la variance pour l'optimisation de portefeuilles notamment.

Les analyses en laboratoire ont a posteriori montré que les portefeuilles optimisés pour la minimisation de la semi-variance (voir section économie ??) ont de meilleures performances que ceux basés sur la variance. En effet, la variance considère les extrêmes de rendements positifs et négatifs comme ayant une égale non-désirabilité, alors que, comme nous allons de suite le voir, la semi-variance ne considère que la partie négative. En revanche, si la distribution des rendements tend à une symétrie parfaite, les deux méthodes tendent (évidemment) à donner exactement le même résultat.

Définition (#5.7.129) : La "semi-variance", aussi appelée "déviation standard partielle inférieure" (LSPD), est une mesure de la dispersion uniquement des réalisations d'une variable aléatoire X qui sont inférieures à la moyenne attendue de cette même variable aléatoire selon :

$$\boxed{\mathrm{V}_{\text{semi}} = \hat{\sigma}^2_{\text{semi}} = \mathrm{E}\left(\min(X - \mathrm{E}(X), 0)^2\right)} \qquad (5.7.176)$$

ou noté dans le cas commun biaisé et discret, comme l'écart-type :

$$\sigma_{\text{semi}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\min(x_i - \hat{\mu}_X, 0)^2)} \qquad (5.7.177)$$

Remarque

À propos, le piège (de notation) suivant doit être évité :

$$\mathrm{E}\left(\min(X - \mathrm{E}(X), 0)^2\right) \neq \mathrm{V}\left(\min(X - \mathrm{E}(X), 0)^2\right) \qquad (5.7.178)$$

À travers cette définition, nous voyons que la semi-variance est similaire à la variance. Cependant, elle ne considère que les observations en dessous de la moyenne. Outil utile pour l'analyse de portefeuille ou d'actif, la méthode de la semivariance permet de mesurer le "risque de perte à la baisse". Alors que l'écart-type et la variance fournissent des mesures de la volatilité, la semi-variance ne prend en compte que les fluctuations négatives d'un actif. En neutralisant toutes les valeurs supérieures à la moyenne, ou le rendement cible de l'investisseur, la semivariance estime la perte moyenne qu'un portefeuille pourrait subir !

Pour les investisseurs peu enclins à prendre des risques, résoudre le problème d'une répartition optimale du portefeuille en minimisant la semi-variance limiterait la probabilité d'une perte importante.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons le petit tableau suivant :

Date	**Prix**	**Rendement (X)**	$(\min(X-\mathbb{E}(X),0))^2$
Mars	20		
Avril	19	-5%	$(-4.6\%)^2$
Mai	17.10	-10%	$(-9.6\%)^2$
Juin	18.81	$+10\%$	0^2
Juillet	19.25	$+5\%$	0^2
Ao'ut	19.36	-1.99%	$(-1.59\%)^2$
Moyenne arithmétique :		$\mathrm{E}(X)\cong 0.4\%$	

La semi-variance est alors égale à :

$$V_{\text{semi}}=\mathrm{E}\left(\min(X-\mathrm{E}(X),0)^2\right)=\frac{1}{5}\left[(-4.6\%)^2+(-9.6\%)^2+(-1.59\%)^2\right]\cong 0.232\% \tag{5.7.179}$$

5.7.3.1.2 Covariance Discrète

Nous venons de voir dans l'une des dernières relations plus haut le concept de "covariance" dont nous déterminerons une expression plus commode un peu plus bas mais donc définie par :

$$\boxed{\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{c}_{X,Y}=\mathrm{E}\left[(X_i-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]} \tag{5.7.180}$$

La notion de covariance peut être appréhendée géométriquement comme illustré ci-dessous (nous définirons plus bas la notion de corrélation abrégée Corr sur la figure) :

- Le rectangle est vert lorsque :
  - x et y sont tous deux supérieurs à leurs moyennes respectives
  - x et y sont tous deux inférieurs à leurs moyennes respectives
- Le rectangle est rouge lorsque :
  - x est supérieur à μ_X mais y est inférieur à μ_Y
  - x est inférieur à μ_X mais y est supérieur à μ_Y

En cours de traduction de l'anglais

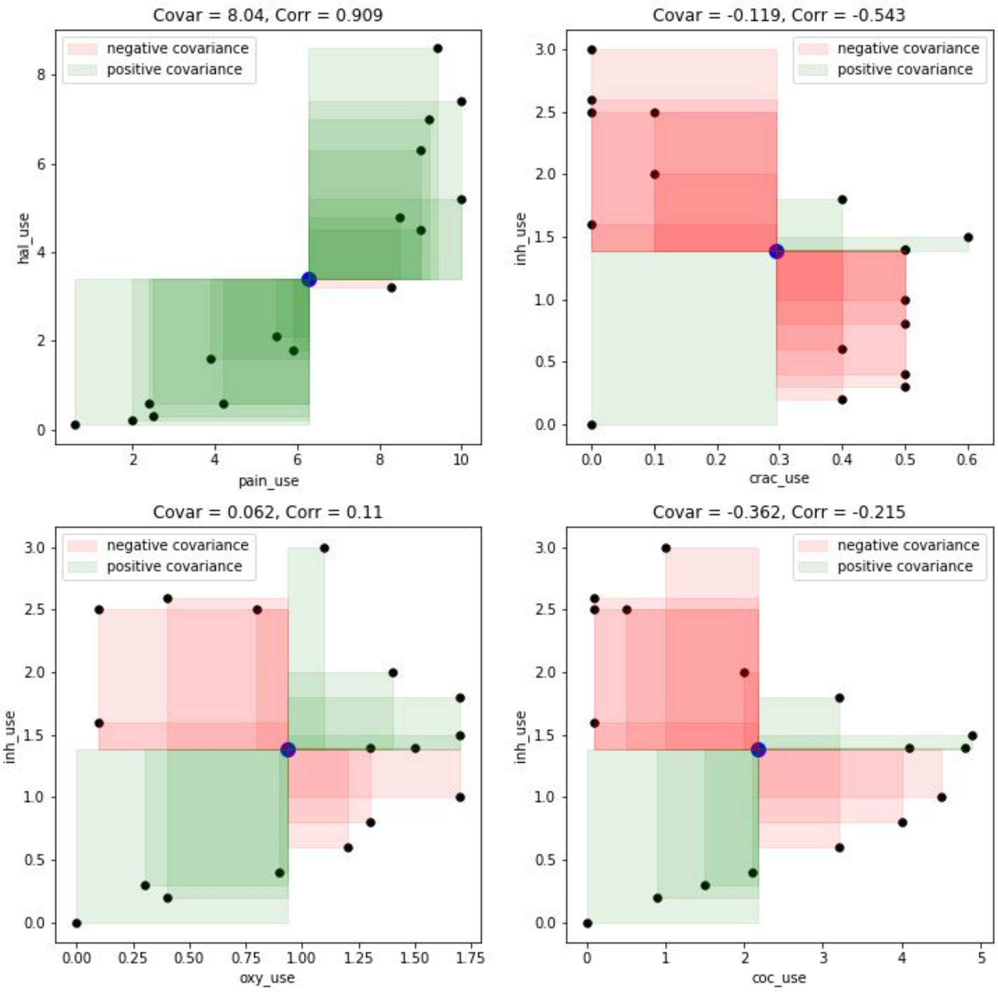


FIG. 5.112 – Interprétation géométrique de la covariance

Introduisons maintenant une forme plus générale et extrêmement importante de la covariance dans de nombreux domaines :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X+Y+Z) &= \sum_i\sum_j\sum_k((x_i+y_j+z_k)-(\mu_X+\mu_Y+\mu_Z))^2 f(x_i,y_j,z_k)\\
&= \sum_i\sum_j\sum_k((x_i-\mu_X)+(y_j-\mu_Y)+(z_k-\mu_Z))^2 f(x_i,y_j,z_k)\\
&= \sum_i\sum_j\sum_k(A+B+C)^2 f(x_i,y_j,z_k)\\
&= \sum_i\sum_j\sum_k(A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2AC) f(x_i,y_j,z_k)\\
&= \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+\mathrm{V}(Z)+2\sum_i\sum_j\sum_k(AB+BC+AC) f(x_i,y_j,z_k)\\
&= \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+\mathrm{V}(Z)+2\mathrm{cov}(X,Y)+2\mathrm{cov}(Y,Z)+2\mathrm{cov}(X,Z)
\end{aligned} \tag{5.7.181}$$

Remarque

Certains lecteurs ont peut-être remarqué qu'avec 1 variable, nous avons 0 termes de covariance, avec 2 variables, nous avons 1 terme de covariance, avec 3 variables nous $2+2+2=6$ termes de covariance, et en continuant ainsi nous voyons que nous avons dans le cas général $n(n-1)$ termes de covariance pour n variables.

Maintenant, nous changeons la notation pour simplifier encore plus :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X_1+X_2+X_3) &= \mathrm{V}(X_1)+\mathrm{V}(X_2)+\mathrm{V}(X_3)+2\mathrm{cov}(X_1,X_2)+2\mathrm{cov}(X_2,X_3)+2\mathrm{cov}(X_1,X_3)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\mathrm{V}(X_i)+2\sum_{i<j}^{3}\mathrm{cov}(X_i,X_j)\end{aligned} \tag{5.7.182}$$

Donc dans le cas général :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i)+2\sum_{i<j}^{n}\mathrm{cov}(X_i,X_j) \tag{5.7.183}$$

Ou en utilisant l'écart type :

$$\sigma_{\sum_{i=1}^{n}X_i}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{X_i}^2+2\sum_{i<j}^{n}\mathrm{cov}(X_i,X_j)} \tag{5.7.184}$$

En utilisant les propriétés de l'espérance (particulièrement $\mathrm{E}(X)=c^{te}$ et $\mathrm{E}(c^{te})=c^{te}$) nous pouvons écrire la covariance d'une manière beaucoup plus simple à des fins de calculs :

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))\right]=\mathrm{E}\left[XY-\mathrm{E}(X)Y-X\mathrm{E}(Y)+\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\right]\\ &= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(\mathrm{E}(X)Y)-\mathrm{E}(X\mathrm{E}(Y))+\mathrm{E}(\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y))\\ &= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)+\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\\ &= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\end{aligned} \tag{5.7.185}$$

et donc nous obtenons la relation très utilisée en statistiques et finance dans la pratique appelée "formule de la covariance"... :

$$\mathrm{c}_{X,Y}=\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \tag{5.7.186}$$

qui est plus connu quand écrit sous la forme suivante :

$$\mathrm{c}_{X,Y}=\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_i x_iy_i-\bar{x}\bar{y} \tag{5.7.187}$$

Indiquons également que si $X=Y$, ce qui équivaut donc à une covariance univariée, nous retrouvons la relation de Huyghens :

$$\mathrm{c}_{X,X}=\mathrm{cov}(X,X)=\mathrm{E}(XX)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2 \tag{5.7.188}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Les statistiques peuvent être découpées selon le nombre de variables aléatoires que nous étudions. Ainsi, lorsqu'une seule variable aléatoire est étudiée, nous parlons de "statistique univariée", pour deux variables aléatoires de "statistique bivariée" et en général, de "statistique multivariée".

Si et seulement si les variables sont équiprobables, nous retrouvons la covariance dans la littérature sous la forme suivante, appelée parfois "covariance de Pearson", qui découle de calculs que nous avons déjà fait antérieurement avec l'espérance :

$$\mathrm{c}_{X,Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)(x_i-\mu_X) \tag{5.7.189}$$

La covariance est un indicateur de la variation simultanée de X et Y. En effet, si en général X et Y croissent simultanément, les produits $(y_i-\mu_Y)(x_i-\mu_X)$ seront positifs (corrélés positivement), tandis que si Y décroît lorsque X croît, ces même produits seront négatifs (corrélés négativement).

Signalons que si nous distribuons les termes de la dernière relation, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{c}_{X,Y}=\operatorname{cov}(X,Y)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)(x_i-\mu_X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\bar{y})-\bar{x}(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\bar{y})-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{Y})\right)\end{aligned} \tag{5.7.190}$$

et nous avons déjà démontré que la somme des écarts à la moyenne est nulle. Dès lors nous obtenons une autre forme courante de la covariance (très utile dans les tableurs !) :

$$\mathrm{c}_{X,Y}=\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\bar{y}) \tag{5.7.191}$$

et par symétrie :

$$\mathrm{c}_{X,Y}=\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i-\bar{x}) \tag{5.7.192}$$

Donc au final, dans le cas équiprobable, nous avons finalement les trois relations équivalentes importantes utilisées dans différents chapitres du présent site :

$$\begin{aligned}\mathrm{c}_{X,Y}&=\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})\\\mathrm{c}_{X,Y}&=\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}\\\mathrm{c}_{X,Y}&=\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i-\bar{x})\end{aligned} \tag{5.7.193}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dans la section de Méthodes Numériques pour notre étude de la régression linéaire (page **??**) et de l'analyse factorielle nous aurons besoin de l'expression explicite de la propriété de bilinéarité de la variance. Pour voir en quoi cela consiste exactement, considérons trois variables aléatoires X, Y et Z et a et b deux constantes. Alors en utilisant la troisième relation donnée précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned}\text{cov}\,(Y,aX+bZ)&=\frac{1}{n}\sum_i(y_i-\bar{y})(ax_i+bz_i)=\frac{1}{n}\sum_i\left[(y_i-\bar{y})ax_i+(y_i-\bar{y})bz_i\right]\\&=\frac{1}{n}\left[\sum_i(y_i-\bar{y})ax_i+\sum_i(y_i-\bar{y})bz_i\right]\\&=a\frac{1}{n}\sum_i(y_i-\bar{y})x_i+b\frac{1}{n}\sum_i(y_i-\bar{y})z_i\\&=a\text{cov}(X,Y)+b\text{cov}(Y,Z)\end{aligned} \quad (5.7.194)$$

Cette dernière relation est elle aussi importante et sera utilisée dans plusieurs chapitres du présent livre (économie page **??**, Méthodes Numériques page **??**). Elle nous permet aussi d'obtenir directement des covariances entre des sommes de variables aléatoires.

En ... anglais

✍**Exemple :**

Si X, Y, Z, T sont quatre variables aléatoires définies sur la même population, nous voulons calculer la covariance suivante :

$$\text{cov}(3X+5Y,4Z-2T) \quad (5.7.195)$$

Nous allons donc développer en deux fois (raison pour laquelle nous appelons cela la "bilinéarité"). D'abord par rapport au second argument (arbitrairement !) :

$$\text{cov}(3X+5Y,4Z-2T)=4\text{cov}(3X+5Y,Z)-2\text{cov}(3X+5Y,T) \quad (5.7.196)$$

et ensuite par rapport au premier :

$$\text{cov}(3X+5Y,4Z-2T)=4\left[3\text{cov}(X,Z)+5\text{cov}(Y,Z)\right]-2\left[3\text{cov}(X,T)+5\text{cov}(Y,T)\right] \quad (5.7.197)$$

Donc au final :

$$\text{cov}(3X+5Y,4Z-2T)=12\text{cov}(X,Z)+20\text{cov}(Y,Z)-6\text{cov}(X,T)-10\text{cov}(Y,T) \quad (5.7.198)$$

Il existe une méthode simple et élégante pour vous rappeler comment calculer la covariance de deux variables aléatoires. En effet, rappelons-nous que nous avons prouvé un peu plus tôt que :

$$\begin{aligned}\text{V}(X+Y)&=\text{V}(X)+\text{V}(Y)+2\text{cov}(X,Y)\\\text{V}(X-Y)&=\text{V}(X)+\text{V}(Y)-2\text{cov}(X,Y)\end{aligned} \quad (5.7.199)$$

Il vient en soustrayant ces deux relations et en simplifiant / réordonnant :

$$\boxed{\text{cov}(X,Y)=\frac{\text{V}(X+Y)-\text{V}(X-Y)}{4}} \quad (5.7.200)$$

et c'est tout ! Un moyen simple de se rappeler le calcul de la covariance.

Considérons maintenant un ensemble de vecteurs aléatoires $\vec{X}_i := X_i$ de composants $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_i$. Le calcul de la covariance des composants par paires donne ce qu'on appelle la "matrice de covariance" (un outil largement utilisé dans les méthodes financières, de management et méthodes statistiques numériques !).

En effet, nous définissons la composante (m, n) de la matrice de covariance par :

$$\text{cov}_{X_m,X_n} = \text{E}\left[(X_m - \mu_{X_m})(X_n - \mu_{X_n})\right] := \text{c}_{m,n} \quad (5.7.201)$$

On peut donc écrire une matrice symétrique (généralement ce doit être une matrice carrée ...) sous la forme :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.7.202)$$

où Σ est la lettre habituelle désignant la "matrice de covariance"

Par symétrie et parce que c'est une matrice carrée de n par n matrice, seul le nombre $\dfrac{n(n+1)}{2}$ de composants est utile pour déterminer toute la matrice (informations triviales mais importantes pour quand nous étudierons la modélisation d'équations structurelles dans la section de Méthodes Numériques).

Cette matrice a la propriété remarquable que si nous prenons l'ensemble des vecteurs aléatoires et calculons la matrice de covariance, la diagonale nous donnera évidemment les variances de chaque paire de vecteurs (voir des exemples dans les chapitres d'économie, Méthodes numériques ou Génie industriel) parce que nous avons pour rappel :

$$\text{cov}_{X_m,X_m} = \text{E}\left[(X_m - \mu_{X_m})(X_n - \mu_{X_m})\right] = \text{E}\left[(X_m - \mu_{X_m})^2\right] = \text{V}(X_m) = \sigma^2_{X_m} \quad (5.7.203)$$

D'où le nom de "matrice de variances-covariances" :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{V}_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \text{V}_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \text{V}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \sigma^2_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \sigma^2_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.7.204)$$

Et ceci est un peu abusivement parfois écrit de la manière suivante :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma^2_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma^2_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.7.205)$$

Cette matrice a l'avantage de montrer rapidement quelles paires de variables aléatoires ont une covariance négative et... pour quelle variable aléatoire la variance de la somme est inférieure à la somme des variances !

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Comme nous l'avons déjà mentionné, cette matrice est très importante et nous la reverrons souvent dans la section d'économie lors de notre étude de la théorie moderne des portefeuilles (page **??**), ainsi que pour les techniques d'exploration de données dans la section de Méthodes Numériques (page **??**) et également pour l'analyse en composants principaux (page 1194) et également dans la section de Génie Industriel lors de notre étude des cartes de contrôle bivariées (page **??**).

Rappelons maintenant que nous avons un axiome de probabilité (voir section de Probabilités page 475) qui nous amène au fait que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{5.7.206}$$

De même, par extension, on définit l'indépendance des variables aléatoires discrètes.

Définition (#5.7.130) : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Nous disons que X et Y sont indépendants si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \tag{5.7.207}$$

Plus généralement, les variables discrètes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes (en bloc) si :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_3 = x_3) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \tag{5.7.208}$$

Théorème 5.42. L'indépendance de deux variables aléatoires implique que leur covariance est égale à zéro (l'inverse est faux !).

Démonstration 5.42.1. Nous allons le prouver dans le cas où les variables aléatoires ne prennent qu'un nombre fini de valeurs $\{x_i\}_I$ et $\{y_j\}_J$, respectivement, avec I et J étant des ensembles finis.

Pour le prouver, rappelons-nous que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= \sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) x_i y_j = \sum_{i,j} P(X = x_i)P(Y = y_j) x_i y_j \\ &= \sum_i P(X = x_i) x_i \sum_j P(Y = y_j) y_j = \mathrm{E}(X)E(Y) \end{aligned} \tag{5.7.209}$$

et donc :

$$\mathrm{c}_{X,Y} = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0 \tag{5.7.210}$$

Remarque

Dès lors, plus La covariance est si petite (proche de zéro) plus les séries sont indépendantes. Inversement, plus la covariance est grande (en valeur absolue), plus les séries sont dépendantes.

En cours de traduction de l' anglais

étant donné que :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2c_{X,Y} \quad (5.7.211)$$

et le fait que si X et Y sont indépendants, nous avons $c_{X,Y} = 0$. Alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \quad (5.7.212)$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants (en bloc), alors pour toute loi de distribution statistique discrète ou continue (!) nous avons en utilisant les deux notations les plus courantes :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \quad (5.7.213)$$

Ou en utilisant l'écart type :

$$\sigma_{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2} \quad (5.7.214)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Nous aurons besoin d'une autre relation importante pour notre étude du Data Mining (fouille de données) / Machine Learning (apprentissage machine) et en particulier pour comparer différents modèles impliquant la matrice de covariance.

Soit $X = (X_i)$ un vecteur aléatoire $n \times 1$ et soit A une matrice symétrique $n \times n$. Si $E(X) = \mu$ et $V(X) = \Sigma = \sigma_{ij}$ alors $E[X^T AX] = \text{tr}(A\sigma) + \mu^T A\mu$ (en gardant à l'esprit que $X^T AX$ est une matrice 1×1, ou en d'autres termes : un scalaire !).

Pour prouver cela, notons premièrement que nous avons :

$$X^T AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j. \quad (5.7.215)$$

Alors, quelle est son espérance ? Clairement, nous avons d'abord en utilisant la linéarité proprement dite de l'espérance :

$$E[X^T AX] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} E[X_i X_j] \quad (5.7.216)$$

En appliquant la relation de covariance prouvée un peu plus haut :

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \Leftrightarrow E(XY) = \text{cov}(X,Y) + E(X)E(Y) \quad (5.7.217)$$

nous obtenons alors :

$$E[X^T AX] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} E[X_i X_j] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sigma_{ij} + \mu_i\mu_j) \quad (5.7.218)$$

Comme Σ est symétrique :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X^TAX] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sigma_{ij}+\mu_i\mu_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sigma_{ji} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu_i\mu_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}[A\Sigma]_{ii} + \mu^TA\mu = \mathrm{tr}(A\Sigma)+\mu^TA\mu\end{aligned} \quad (5.7.219)$$

La relation suivante sera importante pour nous lors de notre étude du critère d'information d'Akaike (AIC) :

$$\boxed{\mathrm{E}[X^TAX] = \mathrm{tr}(A\Sigma)+\mu^TA\mu} \quad (5.7.220)$$

Notez que la notation ci-dessus est courante dans le domaine de la statistique mais que nous devrions écrire plus rigoureusement :

$$\boxed{\mathrm{E}[\vec{x}^TA\vec{x}] = \mathrm{tr}(A\Sigma)+\vec{\mu}^TA\vec{\mu}} \quad (5.7.221)$$

Nous avons également besoin d'une autre propriété de la matrice de covariance pour notre étude du critère d'information d'Akaike. Considérons $\vec{x}\in\mathbb{R}^p$ un vecteur (colonne) aléatoire avec la matrice de covariance $\sigma\in\mathbb{R}^{p\times p}$. Soit $A\in\mathbb{R}^{p\times p}$ une matrice non aléatoire. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(A\vec{x}) &= \mathrm{E}[(A\vec{x}-\mathrm{E}(A\vec{x}))(A\vec{x}-\mathrm{E}(A\vec{x}))^T] \\ &= \mathrm{E}[(A\vec{x}-A\mathrm{E}(\vec{x}))(A\vec{x}-A\mathrm{E}(\vec{x}))^T] \\ &= \mathrm{E}[(A\vec{x}-A\mathrm{E}(\vec{x}))(\vec{x}^TA^T-\mathrm{E}(\vec{x})^TA^T)] \\ &= \mathrm{E}[A(\vec{x}-\mathrm{E}(\vec{x}))(\vec{x}-\mathrm{E}(\vec{x}))^TA^T] \\ &= A\underbrace{\mathrm{E}[(\vec{x}-\mathrm{E}(\vec{x}))(\vec{x}-\mathrm{E}(\vec{x}))^T]}_{=\Sigma}A^T \\ &= A\Sigma A^T\end{aligned} \quad (5.7.222)$$

Nous obtenons le même résultat si nous remplaçons le vecteur $\vec{x}$ par une matrice X telle que :

$$\mathrm{V}(AX) = A\Sigma A^T \quad (5.7.223)$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.3.1.2.1 Matrice de quasi-corrélation

Dans la pratique, certains analystes financiers estiment qualitativement (a priori !) la matrice de corrélations en fonction de leur expérience, nous parlons alors de "matrice de quasi-corrélation", et rappelons que la matrice de variance-covariance et la matrice de corrélations est la même chose mais avec deux perspectives différentes, cependant il n'est pas possible de faire une estimation de cette dernière complétement n'importe comment (sans règles) !

En effet, considérons n variables aléatoires réelles $X_1,\ldots,X_n$ de moyennes respectives $\mu_1,\ldots,\mu_n$. Notons exceptionnellement Σ la matrice symétrique de variances-covariances définie par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{V}(X_1) & \mathrm{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2,X_1) & \mathrm{V}(X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n,X_1) & \mathrm{cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{V}(X_n)\end{bmatrix} \quad (5.7.224)$$

Montrons que Σ est positive semi-définie (voir section d'Algèbre Linéaire page 1930) :

Démonstration 5.42.2. étant donné $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T$ un vecteur $\mathbb{R}^n$. Nous avons :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)=\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(X_i-\mu_i)\right)^2\right)=\mathrm{E}\left(\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right)$$
$$=\sum_{,j}\alpha_i\alpha_j\mathrm{E}\left((X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\right)=\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\mathrm{cov}(X_i,X_j)=\vec{\alpha}^T\Sigma\vec{\alpha} \quad (5.7.225)$$

Dès lors :

$$\vec{\alpha}^T\Sigma\vec{\alpha}\geq 0 \quad (5.7.226)$$

étant donné que la variance est par construction positive. Ce qui signifie que Σ est semi-positive. C'est une propriété très importante pour de nombreuses applications statistiques (distance de Mahalonobis, décomposition de Cholesky, etc.).

■ Q.E.D.

Maintenant, par la généralité de $\vec{\alpha}$, admettons(rien ne nous empêche de le faire !) que ce dernier est un vecteur propre (voir section d'Algèbre Linéaire page 1969). Dès lors, puisque :

$$\vec{\alpha}^T\Sigma\vec{\alpha}\geq 0 \quad (5.7.227)$$

et par définition de leurs valeurs propres et vecteurs propres :

$$\Sigma\vec{\alpha}=\lambda_i\vec{\alpha} \quad (5.7.228)$$

Dès lors nous avons :

$$\vec{\alpha}^T\Sigma\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^T\lambda_i\vec{\alpha}\geq 0 \quad (5.7.229)$$

Et concentrons-nous sur le terme de droite :

$$\vec{\alpha}^T\lambda_i\vec{\alpha}\geq 0 \quad (5.7.230)$$

Comme la valeur propre est un scalaire, nous pouvons réorganiser cela par exemple sous la forme suivante (commutativité) :

$$\left(\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}\right)\geq 0 \quad (5.7.231)$$

et comme $\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$ est nécessairement positif alors les λ_i ne peuvent être que positifs ou nuls.

Nous avons donc pu vérifier que notre matrice de variances-covariances (ou corrélation) est bien ce qu'elle est supposée être ! ! !

De plus, comme nous l'avons démontré dans notre étude du théorème spectral dans la section Algèbre linéaire page 1976, nous avons pour une matrice telle que Σ (symétrique, réelle, définie semi-positive) :

$$\det(\Sigma)=\prod\lambda_i \quad (5.7.232)$$

Une autre manière de contrôler que Σ est positive semi-définie, c'est que le déterminant de la matrice de variance-covariance est positif ou nul. Et gardez à l'esprit que si le déterminant est zéro, la matrice n'est pas inversible ! La matrice de variance-covariance n'est donc pas toujours inversible !

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Cependant, la réciproque est fausse (évidemment !), nous pouvons avoir un déterminant positif sans que la matrice soit positive. Tandis que pour les valeurs propres, il y a équivalence : la matrice positive est équivalente à ce que toutes les valeurs propres sont positives.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.3.1.2.2 Quartet d'Anscombe

Le quartet d'Anscombe comprend quatre jeux de données qui possèdent des propriétés statistiques élémentaires presque identiques, mais qui paraissent très différentes lorsqu'ils sont représentés par un graphique ou analysés à l'aide de statistiques de niveau premier cycle universitaire plutôt que de statistiques du niveau du secondaire. Chaque jeu de données comprend onze couples de point (x, y). Ils ont été construits en 1973 par le statisticien Francis Anscombe pour démontrer à la fois l'importance de la représentation graphique des données avant de les analyser et l'effet des valeurs aberrantes sur les propriétés statistiques. Ce quartet est également utilisé pour tester si un outil analytique peut être accepté comme "conforme aux statistiques" (car les six statistiques utilisées correspondantes devraient être le minimum fourni par tout outil analytique de niveau secondaire !).

Les jeux de données sont les suivants. Les valeurs de x sont les mêmes pour les trois premiers ensembles de données :

I		II		III		IV	
x	y	x	y	x	y	x	y
10.0	8.04	10.0	9.14	10.0	7.46	8.0	6.58
8.0	6.95	8.0	8.14	8.0	6.77	8.0	5.76
13.0	7.58	13.0	8.74	13.0	12.74	8.0	7.71
9.0	8.81	9.0	8.77	9.0	7.11	8.0	8.84
11.0	8.33	11.0	9.26	11.0	7.81	8.0	8.47
14.0	9.96	14.0	8.10	14.0	8.84	8.0	7.04
6.0	7.24	6.0	6.13	6.0	6.08	8.0	5.25
4.0	4.26	4.0	3.10	4.0	5.39	19.0	12.50
12.0	10.84	12.0	9.13	12.0	8.15	8.0	5.56
7.0	4.82	7.0	7.26	7.0	6.42	8.0	7.91
5.0	5.68	5.0	4.74	5.0	5.73	8.0	6.89

TAB. 5.35 – Quartet d'Anscombe

En cours de traduction de l' anglais

Le quartet est encore souvent utilisé pour illustrer l'importance de regarder graphiquement un ensemble de données avant de commencer à les analyser selon un type particulier de relation et l'insuffisance des propriétés statistiques de base pour décrire des ensembles de données réelles.

Avec Microsoft Excel 14.0.7166 nous obtenons :

	I		II		III		IV	
	x	y	x	y	x	y	x	y
	10.00	8.04	10.00	9.14	10.00	7.46	8.00	6.58
	8.00	6.95	8.00	8.14	8.00	6.77	8.00	5.76
	13.00	7.58	13.00	8.74	13.00	12.74	8.00	7.71
	9.00	8.81	9.00	8.77	9.00	7.11	8.00	8.84
	11.00	8.33	11.00	9.26	11.00	7.81	8.00	8.47
	14.00	9.96	14.00	8.10	14.00	8.84	8.00	7.04
	6.00	7.24	6.00	6.13	6.00	6.08	8.00	5.25
	4.00	4.26	4.00	3.10	4.00	5.39	19.00	12.50
	12.00	10.24	12.00	9.13	12.00	8.15	8.00	5.56
	7.00	4.82	7.00	7.26	7.00	6.42	8.00	7.91
	5.00	5.68	5.00	4.74	5.00	5.73	8.00	6.89
Moyenne	9.0000	7.5009	9.0000	7.5009	9.0000	7.5000	9.0000	7.5009
Médiane	9.0000	7.5800	9.0000	8.1400	9.0000	7.1100	8.0000	7.0400
Variance	10.0000	3.7521	10.0000	3.7524	10.0000	3.7478	10.0000	3.7484
Skewness	0.0000	−0.0650	0.0000	−1.3158	0.0000	1.8555	3.3166	1.5068
Kurtosis	1.2000	−0.5349	−1.2000	0.8461	1.2000	4.3841	11.0000	3.1513
Corrélation	0.8164		0.8162		0.8164		0.8165	

TAB. 5.36 – **Résumé du quartet statistique de Anscombe**

Comme nous pouvons le constater avec les indicateurs statistiques élémentaires, il est presque impossible de deviner une différence entre les quatre ensembles de données. Mais si nous utilisons le coefficient d'asymétrie (skewness) ou le coefficient d'asymétrie (voir page624), cela change tout !

En regardant les graphiques correspondants, nous arrivons à la même conclusion :

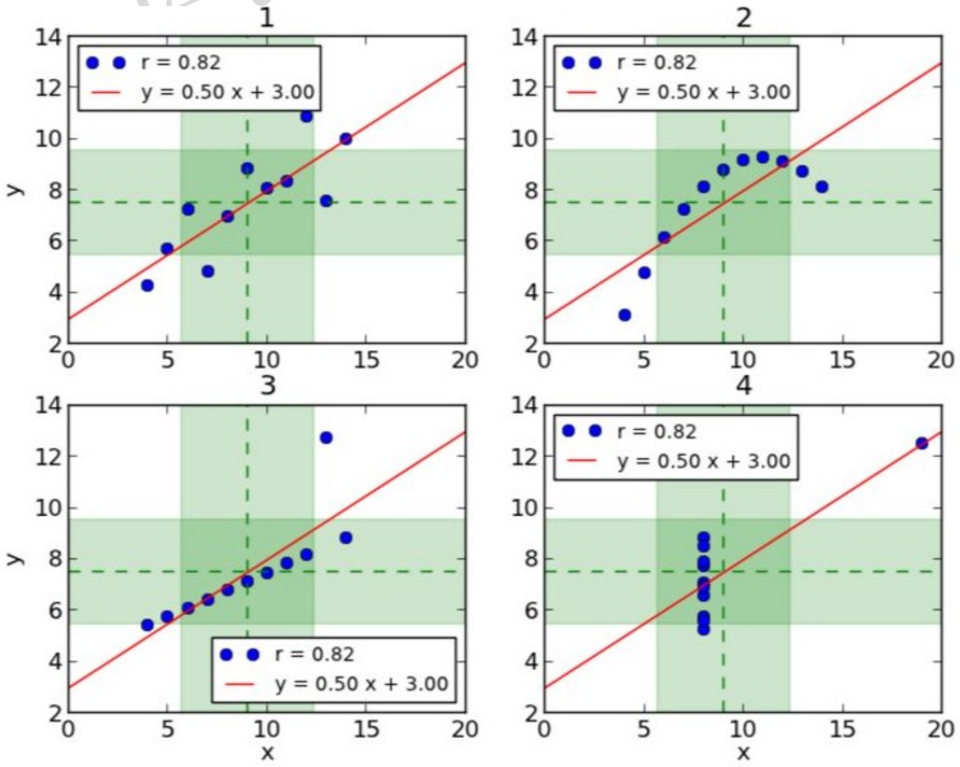


FIG. 5.113 – **Résumé graphique du quarter d'Anscome**

En cours de traduction de l'anglais

5.7.3.1.3 Espérance et variance de la moyenne (erreur standard)

Souvent en statistique, il est utile de déterminer l'écart-type de la moyenne de l'échantillon et d'obtenir des résultats analytiques importants dans les domaines de la gestion de projets et de production industrielle. Voyons de quoi il s'agit !

Soit la moyenne d'une série de termes déterminés chacun par la mesure de plusieurs valeurs (il s'agit au fait de son estimateur dans un cas particulier comme nous le verrons beaucoup plus loin) :

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right) \tag{5.7.233}$$

alors en utilisant les propriétés de l'espérance :

$$\mathrm{E}\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}\left(\mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2)+\ldots+\mathrm{E}(X_n)\right) \tag{5.7.234}$$

et si toutes les variables aléatoires sont identiquement distribuées et indépendantes nous avons alors :

$$\mathrm{E}\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}\left(\mu+\mu+\ldots+\mu\right)=\frac{1}{n}n\mu=\mu \tag{5.7.235}$$

Remarque

Nous démontrerons bien plus loin que si toutes les variables aléatoires sont identiquement distribuées et indépendantes et de variance finie, alors l'espérance suit asymptotiquement ce que nous appelerons une "loi Normale".

Pour la variance, le même raisonnement s'applique :

$$\mathrm{V}(\bar{X})=\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{1}{n^2}\left(\mathrm{V}(X_1)+\mathrm{V}(X_2)+\ldots+\mathrm{V}(X_n)\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_2^n\right) \tag{5.7.236}$$

et si les variables aléatoires sont toutes identiquement distribuées et indépendantes (nous étudierons plus loin le cas très important et courant dans la pratique où cette dernière condition n'est pas satisfaite) :

$$\boxed{\mathrm{V}(\bar{X})=\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}} \tag{5.7.237}$$

d'où l'écart-type de la moyenne appelé aussi "erreur-type", "erreur-standard" ou encore "variation non systématique" :

$$\boxed{\mathrm{SE}=\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{5.7.238}$$

et il s'agit rigoureusement de l'écart-type de l'estimateur de la moyenne (c'est peut-être plus clair ainsi) !

La forme la plus intuitive permettant d'exprimer l'erreur type en termes de pourcentage pour les personnes en emploi et non-expertes en analyse, gestionnaires de projets et directeurs généraux est nommée "Erreur Type Relative" (ETR), qui est l'expression de l'erreur standard en

En cours de traduction de l'anglais

pourcentage, c'est-à-dire :

$$\text{ETR} = \frac{\sigma_{\overline{X}}}{\overline{X}} \tag{5.7.239}$$

Ce dernier indicateur est très utile lorsque nous devons traiter de nombreuses variables avec des unités différentes !

La relation de $\sigma_{\bar{X}}$ se trouve dans de nombreux logiciels dont les graphiques Microsoft Excel (mais il n'y a pas de fonction intégrée dans Excel), écrite soit avec l'écart-type (comme ci-dessus), soit avec la notation de la variance (suffit de mettre au carré...).

Signalons que la dernière relation peut être utilisée même si la moyenne des n variables aléatoires n'est pas identique ! La condition principale étant juste que les écarts-types soient tous égaux et c'est le cas dans la pratique de l'industrie (production).

Nous avons donc :

$$\begin{array}{ll} \text{E}(S_n) = n\mu & \text{E}(M_n) = \mu \\ \text{V}(S_n) = \sigma_{S_n}^2 = n\sigma^2 & \text{V}(M_n) = \sigma_{M_n}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{array} \tag{5.7.240}$$

où S_n désigne la somme des n variables aléatoires et M_n leur moyenne estimée.

La variable centrée réduite que nous avions introduite plus haut :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{5.7.241}$$

peut alors s'écrire de plusieurs manières très utiles :

$$Y = \frac{S_n - n\mu}{\sigma_{S_n}\sqrt{n}} = \frac{M_n - \mu}{\sigma_{M_n}/\sqrt{n}} \tag{5.7.242}$$

Par ailleurs, en supposant que le lecteur sache déjà ce qu'est une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, nous démontrerons plus loin en détails car c'est extrêmement important (!) que la loi de probabilité de la variable aléatoire $\bar{X}$, moyenne de n variables aléatoires identiquement distribuées et linéairement indépendantes, est alors la loi :

$$\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.7.243}$$

En cours de traduction de l' anglais

5.7.3.1.4 Coefficient of Correlation

Maintenant, considérons X et Y deux variables aléatoires ayant pour covariance :

$$c_{X,Y} = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \tag{5.7.244}$$

Théorème 5.43. Alors nous avons :

$$(c_{X,Y})^2 \leq \mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y) \tag{5.7.245}$$

Nous allons démontrer cette relation immédiatement car l'utilisation de la covariance seule pour l'analyse des données n'est pas géniale car elle n'est pas à proprement parler bornée et simple d'usage (au niveau de l'interprétation). Nous allons donc construire un indicateur plus facile d'usage en entreprise.

Démonstration 5.43.1. Choisissons une constante a quelconque et calculons la variance de :

$$aX + Y \tag{5.7.246}$$

Nous pouvons alors immédiatement écrire à l'aide des propriétés de la variance et de l'espérance :

$$\mathrm{V}(aX+Y) = a^2\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2ac_{X,Y} \tag{5.7.247}$$

La quantité de droite est positive ou nulle en tout a par construction de la variance (de gauche). Donc le discriminant de l'expression, vue comme un trinôme en a est du type :

$$\begin{gathered}P(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\ \Rightarrow\\ P(a) = \mathrm{V}(X)a^2 + 2c_{X,Y}a + \mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(X)\left[\left(a+\frac{2c_{X,Y}}{2\mathrm{V}(X)}\right)^2 - \frac{(2c_{X,Y})^2 - 4\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}{4\mathrm{V}(X)^2}\right]\end{gathered} \tag{5.7.248}$$

Donc pour que $P(a)$ soit positif pour tout a nous avons comme seule possibilité que :

$$(2c_{X,Y})^2 - 4\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y) \leq 0 \tag{5.7.249}$$

Soit après simplification :

$$(c_{X,Y})^2 \leq \mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y) \tag{5.7.250}$$

■ Q.E.D.

Ce qui nous donne aussi :

$$\frac{(c_{X,Y})^2}{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|c_{X,Y}|}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}} \leq 1 \tag{5.7.251}$$

En cours de traduction de l'anglais

Finalement nous obtenons une forme d'inégalité statistique (c'est une forme particulière de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que nous verrons plus tard dans la section de Calcul Vectoriel page 1803) :

$$-1 \leq \frac{c_{X,Y}}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}} \leq 1 \tag{5.7.252}$$

Si les variances de X et Y sont non nulles, la corrélation entre X et Y est définie par le coefficient de corrélation linéaire" (il s'agit donc de la covariance standardisée afin que son amplitude ne soit pas dépendante de l'unité de mesure choisie) et noté :

$$R_{X,Y} = \frac{c_{X,Y}}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}} \tag{5.7.253}$$

Ce qui peut aussi s'écrire sous forme développée (en utilisant la relation de Huyghens) :

$$R_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}} = \frac{\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{(\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2)\left(\mathrm{E}(Y^2)-\mathrm{E}(Y)^2\right)}} \tag{5.7.254}$$

ou encore plus condensée :

$$\boxed{R_{X,Y} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}} \tag{5.7.255}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Signalons que normalement, la lettre R est réservée pour dire qu'il s'agit d'un estimateur du coefficient de corrélation alors que la définition ci-dessus n'est pas un estimateur et qu'en toute rigueur, nous devrions alors noter $\rho_{X,Y}$ selon les traditions d'usage.

Quels que soient l'unité et les ordres de grandeur, le coefficient de corrélation est donc un nombre sans unités (donc sa valeur ne dépend pas de l'unité de mesure choisie, ce qui n'est de loin pas le cas de tous les indicateurs statistiques !), compris entre -1 et $+1$. Il traduit la plus ou moins grande dépendance linéaire de X et Y et ou, géométriquement, le plus ou moins grand aplatissement. Nous pouvons donc dire qu'un coefficient de corrélation nul ou proche de0 signifie qu'il n'y a pas de relation linéaire entre les caractères. Mais il n'entraîne aucune notion d'indépendance plus générale !

Dès lors, quand la corrélation est nulle :

$$\rho_{X,Y} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y} = 0 \tag{5.7.256}$$

Alors :

$$c_{X,Y} = \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0 \tag{5.7.257}$$

Donc :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \tag{5.7.258}$$

Et nous savons que cette relation est valable lorsque les variables aléatoires sont indépendantes. Mais penser que dans le cas général, "*non corrélé*" signifie "*indépendance*" est totalement ! Seule l'indépendance implique la non-corrélation ! Le contraire n'est

✍**Exemple :**

Prenons comme exemple de variables non corrélées qui ne sont pas indépendantes, l'exemple suivant (exemple utile en finance !) donné par :

$$X = \mathcal{N}(0,1) \qquad Y = X^2 \tag{5.7.259}$$

Y dépend clairement de X. Comme nous le démontrerons plus tard, lors de notre étude de la distribution Normale centrée réduite, nous avons :

$$\text{E}(X) = 0 \qquad \text{E}(X^3) = 0 \tag{5.7.260}$$

Et comme :

$$c_{X,Y} = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y) = \text{E}(X \cdot X^2) - \text{E}(X)\text{E}(X) = 0 \tag{5.7.261}$$

Nous avons alors bien des variables dépendantes qui ne sont pas corrélées !

Le seul cas général où l'absence de corrélation implique l'indépendance est le cas lorsque la distribution conjointe de X et Y est gaussienne !

La figure ci-dessous illustre quelques cas courants et la dernière rangée met en évidence des situations avec des variables dépendantes mais non corrélées :

tion de l'anglais

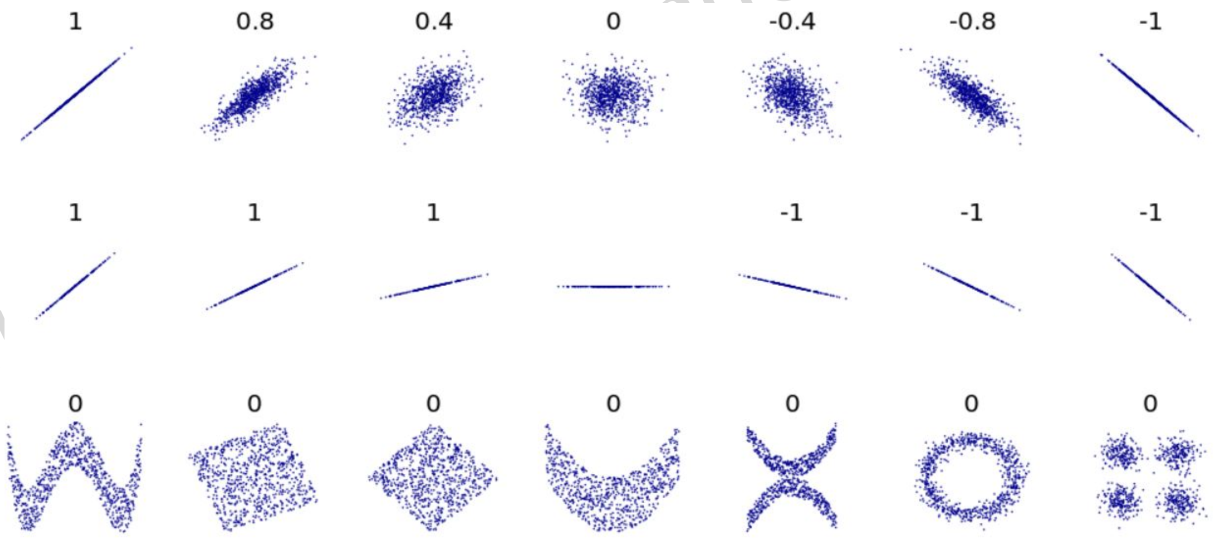


FIG. 5.114 – Plusieurs ensembles de points (x, y), avec la corrélation de Pearson correspondante (source : Wikipédia, auteur : Denis Boigelot)

Quand le coefficient de corrélation est proche de $+1$ ou -1, les caractères sont dits fortement corrélés. Il faut prendre garde à la confusion fréquente entre corrélation et causalité. Ainsi, que deux phénomènes soient corrélés n'implique en aucune façon que l'un soit cause de l'autre (cette erreur est également connue sous le nom de "corrélation parasite" ou "cum hoc ergo propter hoc", expression latine pour "avec ceci, donc à cause de ceci" et "fausse cause") ! ! ! !

En effet, pour deux événements corrélés, A et B, les différentes relations possibles sont les

suivantes :

- A cause B (causalité directe) ;
- B cause A (causalité inverse) ;
- A et B sont les conséquences d'une cause commune, mais n'ont pas de causlité directe ;
- A cause B et B cause A (causalité directe et bidirectionnelle) ;
- A cause C qui cause B (causalité indirecte) ;
- Il n'y pas de causalité entre A et B ;
- La corrélation est une coincidence.

Remarque

Une situation dans laquelle une mesure d'association ou de relation entre l'exposition et le résultat est faussée par la présence d'une autre variable est appelée "confusion". Une variable étrangère qui est la cause totale ou partielle de l'effet observé est appelée "variable de confusion".

Nous savons donc que la corrélation n'implique pas nécessairement une causalité et que, dans la pratique, nous ne pouvons pas toujours avoir des évidences scientifiques (c.-à-d. statistiques) que la corrélation implique une causalité ! Cependant, il existe un consensus dans le domaine scientifique selon lequel une corrélation implique une causalité lorsque les conditions suivants, nommées "critères de Braford Hill", sont satisfaits :

En cours de traduction ... is

Critère	Signification
Force de l'association	Une association forte est plus susceptible d'avoir une composante causale qu'une association modeste. La force de l'association est déterminée par les types d'études existantes. Les études au plus haut niveau de la pyramide des preuves représenteraient les associations les plus fortes (à savoir, les revues systématiques avec méta-analyses et ECR). Les résultats de ces études doivent démontrer un rapport de cotes (OR) ou un risque relatif (RR) d'au moins 2 ou plus pour être significatifs. Tout ce qui se situe entre 1 et 2 est faible, ce qui se situe au-delà de 2 est modéré et au-delà de 4 considéré comme fort.
Consistence	Une relation est observée à plusieurs reprises dans toutes les études disponibles.
Spécificité	Un facteur influence spécifiquement un résultat ou une population particulière. Plus l'association entre un facteur et un effet est spécifique, plus la probabilité qu'il soit causal est grande.
Temporalité	La cause doit précéder le résultat supposé (par exemple, le tabagisme avant l'apparition du cancer du poumon) lorsque le résultat est mesuré dans le temps (étude longitudinale).
Gradient Biologique (réponse à la dose)	Le résultat augmente de manière monotone avec l'augmentation de la dose d'exposition ou selon une fonction prédite par une théorie de substantive (c'est-à-dire que plus on fume de cigarettes, plus le cancer est probable).
Plausibilité	L'association observée peut être expliquée de manière plausible par une question de fond, c'est-à-dire biologiquement possible.
Cohérence	Une conclusion de causalité ne doit pas fondamentalement contredire les connaissances de fond actuelles (les études ne doivent pas se contredire).
Expérimentation	La causalité est plus probable si les preuves sont basées sur des expériences randomisées ou sur une revue systématique avec une méta-analyse d'expériences randomisées. Cependant, si les ECR ne sont pas éthiquement possibles, les études de cohorte prospectives peuvent fournir le niveau de preuve le plus élevé.
Analogie	Pour des expositions et des résultats analogues, un effet a déjà été démontré, par exemple des effets démontrés pour la première fois sur des animaux ou un effet survenant précédemment sur des êtres humains, tels que les effets de la thalidomide sur le foetus pendant la grossesse.

TAB. 5.37 – **Critères de corrélation-cause de Bradford Hill**

En cours de traduction de l'anglais

Revenons à l'aspect mathématique de la corrélation :

- Si $R_{X,Y} = -1$ nous avons affaire à une "corrélation négative pure" (dans le cas d'une

relation linéaire, tous les points de mesure sont situés sur une ligne droite avec une pente négative).

- Si $-1 < R_{X,Y} < +1$ nous avons affaire à une corrélation positive ou négative nommée "corrélation imparfaite" (dans le cas d'une relation linéaire, tous les points de mesure sont situés sur une droite de pente négative ou respectivement positive).

- Si $R_{X,Y} = 0$, la corrélation est égale à zéro ... (dans le cas d'une relation linéaire, tous les points de mesure sont situés sur une droite dont la pente est nulle).

- Si $R_{X,Y} = +1$ nous avons affaire à une "corrélation positive pure" (dans le cas d'une relation linéaire, tous les points de mesure sont situés sur une ligne droite avec une pente positive).

L'analyse du coefficient de corrélation poursuit donc l'objectif de déterminer le degré d'association entre les différentes variables : celui-ci est souvent exprimé par le coefficient de détermination, qui est le carré du coefficient de corrélation. Le coefficient de détermination mesure donc la contribution d'une des variables à l'explication de la seconde. Cependant, demander *quelle magnitude doit avoir R (ou R^2) ?* n'a pas de sens. Un faible R n'annule pas un prédicteur important ni ne modifie la signification de son coefficient. Le R est simplement ce qu'il est, quelle que soit sa valeur, et il n'est pas nécessaire que ce soit une valeur particulière pour permettre une interprétation valide.

En utilisant les expressions de la moyenne et de l'écart-type de variables équiprobables telles que démontrées plus haut (donc cela restreint l'application de ce coefficient à des variables aléatoires dont la distribution jointe est Normale ! !), nous passons de :

$$R_{X,Y} = \frac{\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\left(\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2\right)\left(\mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2\right)}} \tag{5.7.262}$$

à l'estimateur du coefficient de corrélation :

$$R_{X,Y} = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \dfrac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} \tag{5.7.263}$$

où nous voyons que la covariance devient alors la moyenne des produits moins le produit des moyennes.

Soit après simplification :

$$R_{X,Y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} \tag{5.7.264}$$

En cours de traduction de l'anglais

Le coefficient de corrélation peut être calculé dans la version française de Microsoft Excel 11.8346 avec entre autres la fonction intégrée `COEFFICIENT.CORRELATION( )`.

Nous verrons dans la section Méthodes Numériques une expression plus générale du coefficient de corrélation (page **??**) et dans la section Mécanique Statistique un indicateur alternatif (page **??**).

Remarques

R1. Dans la littérature le coefficient de corrélation est souvent appelé "coefficient d'échantillonnage de Pearson" (dans le cas équiprobable) et lorsque nous le portons au carré, nous parlons alors de "coefficient de détermination".

R2. Souvent le carré de ce coefficient est un peu abusivement interprété comme le % de variation expliqué de la variable étudiée Y par la variable explicative X.

Enfin, à noter que nous avons donc la relation suivante qui est énormément utilisée dans la pratique (voir la section d'économie page **??** pour des exemples fameux !) :

$$\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+2c_{X,Y}=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+2R_{X,Y}\sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)} \quad (5.7.265)$$

ou sa version avec l'écart-type qui est encore plus fameux :

$$\sigma_{X+Y}=\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2R_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y} \quad (5.7.266)$$

Il s'agit d'une relation que l'on retrouve souvent en finance dans le cadre du calcul de la VaR (Value at Riks) selon la méthodologie RiskMetrics proposée par J.P. Morgan (voir la section d'économie page **??**).

Voyons un petit exemple d'application de la corrélation mais cela n'a rien à voir avec la VaR (du moins pour le moment ...).

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Une compagnie aérienne a à sa disposition 120 sièges qu'elle réserve pour des passagers en correspondance venant de deux autres vols arrivés un peu plus tôt dans la journée et en partance pour Francfort. Le premier vol arrive de Manille et le nombre de passagers à son bord suit une loi Normale de moyenne 50 et de variance 169. Le second vol arrive de Taipei et le nombre de passagers à son bord suit une loi Normale de moyenne 45 et de variance 196.

Le coefficient de corrélation linéaire entre le nombre de passagers des deux vols est mesuré comme étant :

$$R_{X,Y}=0.5 \quad (5.7.267)$$

La loi que suit le nombre de passagers pour Francfort si nous supposons que la loi du couple suit elle aussi une loi Normale (selon énoncé !) est :

$$X+Y=\mathcal{N}(\mu_Y+\mu_X,\sigma_{X+Y}) \quad (5.7.268)$$

avec :

$$\mu_Y + \mu_X = 50 + 45 = 95$$
$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2R_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y} = \sqrt{169 + 196 + 2 \cdot 0.5\sqrt{169 \cdot 196}} \cong 23.38 \quad (5.7.269)$$

C'est donc mal parti au niveau satisfaction de la clientèle au long terme...

Nous avons prouvé précédemment que pour une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, l'écart-type de leur moyenne était donnée par l'erreur-type :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.7.270)$$

Et que se passe-t-il si elles ne sont pas indépendantes mais toujours identiquement distribuées de la variance σ^2 (cas important dans le Machine Learning mais pas seulement !) ? Pour répondre, rappelons tout d'abord que :

$$\text{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{V}(X_i) + 2\sum_{i<j}^{n} \text{cov}(X_i, X_j) \quad (5.7.271)$$

Dès lors :

$$\text{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \text{V}(\bar{X}) = \frac{n\sigma^2}{n^2} + \frac{2\sum\limits_{i<j}^{n} \text{cov}(X_i, X_j)}{n^2} \quad (5.7.272)$$

En utilisant la définition de la corrélation vue précédemment :

$$R_{X_i,Y_i} = \frac{\text{cov}_{X_i,Y_i}}{\sigma_{X_i}\sigma_{Y_i}} \quad (5.7.273)$$

Nous obtenons (en gardant à l'esprit que tous les variances sont supposées être les mêmes, de sorte que $\sigma_{X_i}\sigma_{Y_i} = \sigma$) :

$$\text{V}(\bar{X}) = \frac{n\sigma^2}{n^2} + \frac{2\sum\limits_{i<j}^{n} R_{X_i,Y_i}\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2\sigma^2\sum_{i<j}^{n} R_{X_i,Y_i}}{n^2} \quad (5.7.274)$$

Supposons maintenant que toutes les corrélations par paires sont égales (telles que $R_{X_i,Y_i} = R$), alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}\text{V}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2\sigma^2\sum\limits_{i<j}^{n} R}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 n(n-1)R}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2(n-1)R}{n} \\ &= R\sigma^2 + \frac{1-R}{n}\sigma^2\end{aligned} \quad (5.7.275)$$

Cette dernière relation est souvent désignée par les scientifiques des données (data scientists) comme suit :

$$\text{V}(\bar{X}) = \rho\sigma^2 + \frac{1-\rho}{B}\sigma^2 \quad (5.7.276)$$

En cours de traduction de l'anglais

Enfin, rappelons que la matrice de variance-covariance est donnée par :

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\mathrm{V}_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & \mathrm{V}_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \mathrm{V}_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2\end{bmatrix} \quad (5.7.277)$$

En divisant chaque terme par les termes correspondants $\sqrt{\mathrm{V}_i}\sqrt{\mathrm{V}_j}$, nous donne la "matrice de corrélation" :

$$R=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{V}_{11}}{\sqrt{\mathrm{V}_1}\sqrt{\mathrm{V}_1}} & \dfrac{c_{12}}{\sqrt{\mathrm{V}_1}\sqrt{\mathrm{V}_2}} & \cdots & \dfrac{c_{1n}}{\sqrt{\mathrm{V}_1}\sqrt{\mathrm{V}_n}}\\ \dfrac{c_{21}}{\sqrt{\mathrm{V}_2}\sqrt{\mathrm{V}_1}} & \dfrac{\mathrm{V}_{22}}{\sqrt{\mathrm{V}_2}\sqrt{\mathrm{V}_2}} & \cdots & \dfrac{c_{2n}}{\sqrt{\mathrm{V}_2}\sqrt{\mathrm{V}_n}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{c_{n1}}{\sqrt{\mathrm{V}_n}\sqrt{\mathrm{V}_1}} & \dfrac{c_{n2}}{\sqrt{\mathrm{V}_n}\sqrt{\mathrm{V}_2}} & \cdots & \dfrac{\mathrm{V}_{nn}}{\sqrt{\mathrm{V}_n}\sqrt{\mathrm{V}_n}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & R_{12} & \cdots & R_{1n}\\ R_{21} & 1 & \cdots & R_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix} \quad (5.7.278)$$

Notez que si les variances sont toutes égales à l'unité ($\mathrm{V}_i = 1$), la matrice de covariance est égale à la matrice de corrélation, c'est-à-dire $R = \Sigma$ (il s'agit d'une propriété utile dont nous aurons usage beaucoup plus tard au cours de notre étude du facteur d'inflation de la variance pour la détection multicolinéarité) !

Voyons ce que nous venons de dire d'une autre manière ! Comme nous le savons, l'équation de normalisation d'une variable s'écrit :

$$z=\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_x} \quad (5.7.279)$$

Nous savons également que la matrice originale de covariance est définie comme suit (à l'aide d'un estimateur sans biais) :

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_i^n(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \quad (5.7.280)$$

Et après normalisation des deux variables :

$$x'=\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} \qquad \text{et} \qquad y'=\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} \quad (5.7.281)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma'_{xy}&=\frac{1}{n-1}\sum_i^n(x'_i-0)(y'_i-0)=\frac{1}{n-1}\sum_i^n\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}\right)\\ &=\frac{1}{(n-1)\cdot\sigma_x\sigma_y}\sum_i^n(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\end{aligned} \quad (5.7.282)$$

Alors finalement :

$$\sigma'_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \quad (5.7.283)$$

La matrice de variance-covariance devient donc bien la matrice de corrélation avec des variables standardisées !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.3.1.4.1 Interprétation géométrique

Une mesure de la relation entre deux variables aléatoires est la covariance telle que nous la connaissons, donnée par :

$$c_{X,Y} = \mathrm{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \quad (5.7.284)$$

La covariance normalisée à l'unité est le coefficient de corrélation comme nous venons de le voir :

$$\rho_{X,Y} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}{\sqrt{\mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]}\sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mu_Y)^2]}} \quad (5.7.285)$$

Dès lors :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{x})(Y_i-\bar{y})]}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2}\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{x})(Y_i-\bar{y})]}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{y})^2}} \quad (5.7.286)$$

L'expression résultante :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{x})(Y_i-\bar{y})]}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{y})^2}} \quad (5.7.287)$$

est le rapport de deux éléments. Le numérateur est le produit scalaire de deux vecteurs, tandis que le dénominateur est le produit de leurs longueurs :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\bar{x})(Y_i-\bar{y})]}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\vec{x}\circ\vec{y}}{||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||} = \cos(\vec{x},\vec{y})) \quad (5.7.288)$$

Cette expression montre l'identité formelle entre le coefficient de corrélation et le cosinus de l'angle entre deux vecteurs aléatoires !

5.7.3.1.4.2 Corrélation partielle

La corrélation partielle mesure le degré d'association entre deux variables aléatoires, en supprimant l'effet d'un ensemble de variables aléatoires de contrôle. Si nous voulons savoir s'il existe ou non une relation numérique entre deux variables d'intérêt, utiliser leur coefficient de corrélation donnera des résultats erronés s'il existe une autre variable, "variable deconfusion", qui est numériquement liée aux deux variables d'intérêt. Cette information trompeuse peut être évitée en contrôlant (c'est-à-dire en annulant) la variable de confusion, en calculant le coefficient de corrélation partiel.

En cours de traduction de l'anglais

Lorsque dans le cas de trois variables nous voulons contrôler (annuler) une des variables et que celle-ci est l'unique qualitative, la stratégie est alors simple car elle consiste à calculer la corrélation entre les deux variables restantes pour chaque niveau de la variable qualitative. Mais les choses commencent à être plus compliquées lorsque la variable à contrôler (annuler) est continue. C'est pourquoi nous devons construire une approche un peu plus sophistiquée !

Le "coefficient de corrélation partiel", noté $R_{AB.C}$, permet de connaître la valeur de la corrélation entre deux variables A et B, si la variable C était restée constante pour la série d'observations considérée.

En d'autres termes, le coefficient de corrélation partiel $R_{AB.C}$ est le coefficient de corrélation total entre les variables A et B lorsque leur meilleure explication linéaire a été supprimée en termes de C. Il est donné par la relation (dans le cas particulier évident de trois variables !) :

$$R_{AB.C} = \frac{R_{AB} - R_{AC}R_{BC}}{\sqrt{1-R_{AC}^2}\sqrt{1-R_{BC}^2}} \qquad (5.7.289)$$

La preuve la plus rapide de cette relation est de s'appuyer sur l'interprétation géométrique de la corrélation (cosinus).

Mais notez auparavant que, tout comme le coefficient de corrélation, le coefficient de corrélation partiel prend une valeur comprise entre -1 et $+1$. La valeur -1 traduit une corrélation négative parfaite en contrôlant certaines variables (c'est-à-dire une relation linéaire exacte dans laquelle les valeurs les plus élevées d'une variable sont associées à des valeurs plus faibles de l'autre) ; la valeur $+1$ traduit une relation linéaire positive parfaite, tandis que la valeur 0 indique qu'il n'y a pas de relation linéaire.

Notez également que si R_{AC} et R_{BC} sont tous deux égaux à zéro (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de variable de confusion), alors nous avons l'égalité :

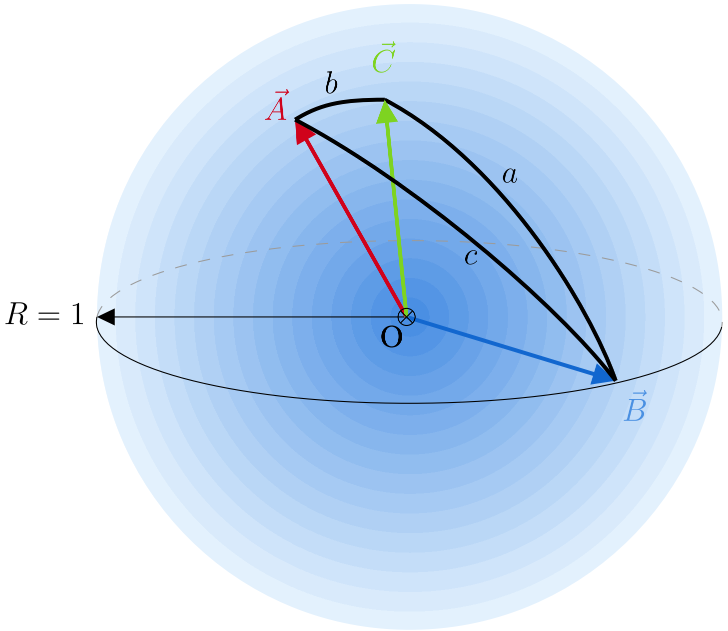
$$R_{AB.C} = \frac{R_{AB} - 0 \cdot 0}{\sqrt{1-0}\sqrt{1-0}} = R_{AB} \qquad (5.7.290)$$

Il est donc facile de comprendre qu'en général, lorsqu'il existe quelque part une corrélation entre certaines variables, alors $R_{AB.C} > R_{AB}$. Pour les autres valeurs de configuration, le lecteur doit être très prudent sur l'interprétation car le résultat dépend évidemment de la valeur de R_{AB} !

Ok maintenant passons à la preuve dans le cas particulier de trois variables !

La série d'observations A, B et C, une fois centrée réduite (donc de rayon 1), sont des vecteurs centrés $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ de longueur d'unité sur la même sphère :

En cours de traduction de l'anglais



Leurs extrémités (sommets) déterminent un triangle sphérique ABC, dont les côtés a, b et c sont les arcs de grands cercles $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{AB}$. Les coefficients de corrélation entre ces vecteurs sont (rappelons-nous que pour un cercle / sphère unitaire, nous avons $\cos(\alpha) = \cos(a)$ comme indiqué dans la section de Trigonométrie) :

$$R_{BC} = \cos(a) \qquad R_{AC} = \cos(b) \qquad R_{AB} = \cos(c) \tag{5.7.291}$$

Nous avons ensuite par la formule cosinus des triangles sphériques (voir la section Trigonométrie page 2526) la valeur suivante pour l'angle d'ouverture de C :

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sqrt{1-\cos^2(a)}\sqrt{1-\cos^2(b)}} \tag{5.7.292}$$

Tout comme c est l'angle entre les points A et B (et sur une sphère unitaire, la longueur arclength $\overset{\frown}{AB}$ également), vue du centre de la sphère, $\hat{C}$ est l'angle sphérique entre les points A et B, vus du point C à la surface de la sphère, et :

$$R_{AB.C} = \cos(\hat{C}) \tag{5.7.293}$$

est la "corrélation partielle" entre A et B lorsque C est fixe.

Remarques

R1. Si nous séparons une variable d'une corrélation, cette corrélation partielle est appelée "corrélation partielle de premier ordre". Si nous séparons partiellement les 2 variables à partir de cette corrélation (par exemple, $R_{12.34}$), nous obtenons une "corrélation partielle de second ordre", etc. Il est habituel de faire référence aux "corrélations non séparées" en tant que "corrélations d'ordre zéro".

R2. N'oubliez pas qu'en ce qui concerne la corrélation, la corrélation partielle lorsqu'elle est élevée n'implique pas nécessairement une causalité !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.3.1.4.3 Coefficient de corrélation intraclasse

Le "coefficient de corrélation intraclasse", noté ICC, est une métrique qui peut être utilisée lorsque des mesures quantitatives sont effectuées sur des mesures organisées en groupes. Il décrit en quoi les mesures du même groupe sont similaires (c'est donc toujours l'un des nombreux indicateurs de la famille des études de répétabilité et de reproductibilité comme le kappa d'approbation de Cohen que nous présenterons plus tard). Cette statistique est considérée comme un type de corrélation et, contrairement à la plupart des autres mesures de corrélation, elle fonctionne donc sur des données structurées en groupes.

Une application importante est l'évaluation de la cohérence ou de la reproductibilité de mesures quantitatives effectuées par différents observateurs mesurant la même quantité (études R&R). Par exemple, si on demande à plusieurs médecins de noter les résultats d'une analyse pour détecter des signes de progression du cancer, on peut se demander en quoi les scores sont cohérents d'un médecin à l'autre (c'est-à-dire une ANOVA avec facteurs aléatoires).

Un aspect important de cette statistique (et aussi d'une faiblesse) est qu'elle quantifie à la fois la variabilité inter-observateur et la variabilité intra-observateur. La variabilité inter-observateur fait référence aux différences systématiques observées entre observateurs - par exemple, un médecin peut toujours marquer les patients avec un niveau de risque supérieur à celui des autres médecins. La variabilité intra-observateur fait référence aux écarts de mesure d'un observateur unique.

Remarque

étant donné que le coefficient de corrélation intraclasse donne une composition de la variabilité inter et intra-observateur, ses résultats sont parfois jugés difficiles à interpréter lorsque les observateurs ne sont pas échangeables (aléatoires). Des mesures alternatives telles que la statistique kappa d'approbation de Cohen (voir plus bas), le kappa de Fleiss et le coefficient de concordance de corrélation ont été proposées en tant que mesures d'accord plus appropriées entre les observateurs non échangeables.

Il existe plusieurs types de corrélations intra-classe. Ils concernent différentes façons de conceptualiser les variables, souvent désignées de manière générique comme "sujets" et "juges". Chacune de ces variables peut être une variable aléatoire (leurs niveaux ont été choisis au hasard parmi une population de niveaux possibles) ou une variable fixe, dont les différents niveaux ont été spécifiquement sélectionnés pour ce type de plan expérimental, et les mêmes niveaux seraient sélectionnés à nouveau dans une configuration ultérieure pour réplication. De plus, nous pourrions utiliser des notations individuelles, ou nous pourrions prendre la moyenne d'un ensemble de notations attribuées par différents noteurs. Cela modifierait le coefficient de corrélation intraclasse en fournissant une mesure plus fiable.

Voici un exemple figuratif d'un ICC (pour une application numérique, voir les livres compagnons sur Minitab ou R) :

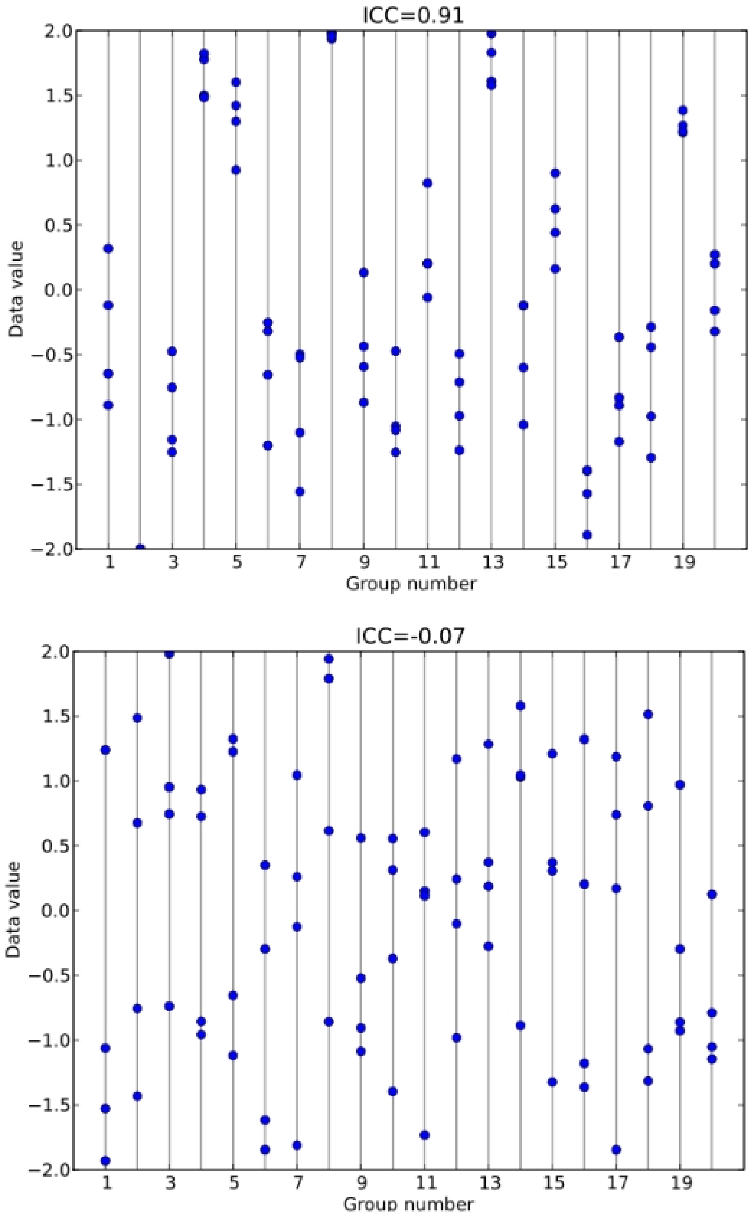


FIG. 5.115 – Illustration du coefficient de corrélation intra-classe (source : Wikipédia)

En cours anglais

Le coefficient de corrélation intra-classe qui va nous intéresser ici, noté ICC1, le plus souvent utilisé dans la pratique est de considérer un facteur fixe (non aléatoire) et l'autre aléatoire (il existe donc d'autres variantes qui doivent être appliquées avec prudence !).

En effet, imaginons une étude concernant la productivité des employés d'une grande entreprise. Le comité de direction veut avoir une idée de la production journalière et de la façon dont cela dépend des machines de production utilisées par les employés. Si nous prenons pour l'étude un échantillon aléatoire de n employés parmi N, avec toutes les machines en quantité k alors nous avons un modèle avec un facteur fixe (machines) et l'autre qui est aléatoire (les employés).

L'idée empirique est alors d'écrire le modèle sous la forme très spécifique suivante (pour les autres modèles plus généraux, il faudra attendre que nous écrivions les développements !) :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \tag{5.7.294}$$

où i est la mesure du facteur fixe (souvent sous forme de lignes dans les tables d'analyse ICC) et j est le facteur aléatoire représenté par les juges (souvent sous forme de colonnes dans les tables d'analyse ICC) et donc ε_{ij} décrit la variabilité de la mesure des éléments dans un niveau donné de facteur aléatoire et l'erreur des juges est indissociable de l'élément mesuré. La relation précédente est aussi parfois notée :

$$y_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij} \tag{5.7.295}$$

où évidemment $\mu_j=\mu+\tau_j$.

Comme d'habitude (...) on suppose que :

$$\begin{aligned}\alpha_j&=\mathcal{N}(0,\sigma_\alpha^2)\\ \varepsilon_{ij}&=\mathcal{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{5.7.296}$$

On suppose donc que les variances des α_j sont identiques (ce qui est néanmoins une hypothèse assez forte en pratique !).

Nous avons donc de par la linéarité de la moyenne :

$$\mathrm{E}(y_{ij})=\mathrm{E}(\mu+\alpha_j+\varepsilon_{ij})=\mu \tag{5.7.297}$$

La décomposition de la variance est immédiate si les erreurs sont indépendantes des facteurs aléatoires :

$$\mathrm{V}(y_{ij})=\mathrm{V}(\mu+\alpha_j+\varepsilon_{ij})=\mathrm{V}(\alpha_j)+\mathrm{V}(\varepsilon_{ij})=\sigma_\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2 \tag{5.7.298}$$

Nous avons donc :

$$y_{ij}=\mathcal{N}(\mu,\sigma_\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2) \tag{5.7.299}$$

Pour deux éléments (observations) pris sous le même niveau de facteur i, nous avons :

$$\begin{aligned}\text{cov}(y_{ij},y_{ik})&=\text{cov}(\mu+\alpha_j+\varepsilon ij,\mu+\alpha_k+\varepsilon_{ik})\\ &=\text{cov}(\alpha_j+\varepsilon_{ij},\alpha_k+\varepsilon_{ik})=\text{cov}(\alpha_j+\varepsilon_{ij},\alpha_k)+\text{cov}(\alpha_j+\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ik})\\ &=\text{cov}(\alpha_j,\alpha_k)+\text{cov}(\varepsilon_{ij},\alpha_k)+\text{cov}(\alpha_j,\varepsilon_{ik})+\text{cov}(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ik})\end{aligned} \tag{5.7.300}$$

Mais comme les variances de tous les α_j sont supposées être identiques et que les erreurs sont indépendantes des effets fixes, ces derniers se réduisent à :

$$\text{cov}(y_{ij},y_{ik})=\text{cov}(\alpha_j,\alpha_k)=\text{cov}(\alpha_j,\alpha_j)=\mathrm{V}(\alpha_j)=\sigma_\alpha^2 \tag{5.7.301}$$

Et leur corrélation est alors :

$$\boxed{\rho(y_{ij},y_{ik})=\frac{\text{cov}(y_{ij},y_{ik})}{\mathrm{V}(y_{ij})\mathrm{V}(y_{ik})}=\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2}} \tag{5.7.302}$$

Ceci est souvent noté dans les manuels de référence comme :

$$\text{ICC}=\frac{S_b^2}{S_b^2+S_w^2} \tag{5.7.303}$$

En cours de traduction de l' anglais

Où S_w^2 est la variance groupée (voir page **??**) au sein des sujets, et S_b^2 est la variance des mesures entre les sujets. $S_b^2 + S_w^2$ est la variance totale.

C'est donc le rapport entre la variance des facteurs aléatoires et la variance totale (le dénominateur incluant la variance de l'erreur) qui est souvent désigné ICC1 ou ICC(1,1) pour indiquer qu'il s'agit du coefficient de corrélation Intraclass pour 1 facteur aléatoire et 1 facteur fixe.

Donc, si $\sigma_\varepsilon \to 0$, la corrélation intraclasse est unitaire et c'est alors un indicateur de bonne reproductibilité !

Rappelons maintenant que de notre étude des ANOVA à un facteur fixe (page 981) que nous avons démontré la décomposition suivante en somme des carrés :

$$\begin{array}{ccccc} Q_T & = & Q_A & + & Q_R \\ \sum_{ij}(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2 & = & \sum_i n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2 & + & \sum_{ij}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 \end{array} \tag{5.7.304}$$

Si $n_i = n$ (expérience équilibrée), alors nous avons évidemment :

$$\begin{array}{ccccc} Q_T & = & Q_A & + & Q_R \\ \sum_{ij}(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2 & = & n\sum_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2 & + & \sum_{ij}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 \end{array} \tag{5.7.305}$$

Ceci est souvent noté dans le contexte de l'utilisation du coefficient de corrélation intra-classe :

$$\frac{\sum_{ij}(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2}{N-1} = n\frac{\sum_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2}{k-1} + \frac{\sum_{ij}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}{k(n-1)} = n\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{5.7.306}$$

où pour rappel $N = kn$. Nous supposons donc ici que les juges sont indexés par i, les observations par j et que nous avons n juges et k observations !

Et nous avons aussi régulièrement les notations suivantes dans certains manuels de référence :

$$\text{MS}_{\text{w/intra}} = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{et} \qquad \text{MS}_{\text{b/inter}} = n\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{5.7.307}$$

ou :

$$\text{SSW} = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{et} \qquad \text{SSB} = n\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{5.7.308}$$

où SSW signifie "Sum of Squares Within" ("somme des carrés dans" en français) et SSB "Sum of Squares Between" ("somme des carrés entre" en français) ou (...)

$$\text{MCE} = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{et} \qquad \text{MCk} = n\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{5.7.309}$$

où MSE signifie "Mean Square for Error" ("moyenne des carrés des des erreurs" en français) et MSk pour "Mean Square for traitements" ("moyenne des carrées pour les traitements en français). Donc :

$$n\sigma_\alpha^2 = \text{MS}_{\text{b/inter}} - \sigma_\varepsilon^2 = \text{MS}_{\text{b/inter}} - \text{MS}_{\text{w/intra}} \tag{5.7.310}$$

Dès lors :

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\text{MS}_{\text{b/inter}} - \text{MS}_{\text{w/intra}}}{n} \tag{5.7.311}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Comme le lecteur l'aura peut-être remarqué, le numérateur peut être négatif et donc aussi σ_α^2... ... Si nous obtenons des composantes de variance négatives, voici des moyens possibles de traiter ce genre de situation :

- Accepter l'estimation comme évidence vraie d'une valeur nulle et utiliser zéro comme estimation, en sachant que l'estimateur ne sera plus non-biaisé !
- Conserver l'estimation négative en sachant que les calculs ultérieurs utilisant ce résultat risquent de ne pas avoir beaucoup de sens...
- Interpréter que l'estimation de la composante négative indique un modèle statistique incorrect.
- Recueillir plus de données et les analyser séparément ou en conjonction avec les données existantes, en espérant que davantage d'informations généreront des estimations positives.

Par exemple, lorsqu'une estimation de composante de variance est inférieure à zéro, le logiciel Minitab affiche l'estimation négative, mais met l'estimation à zéro afin de calculer le pourcentage de la variabilité totale.

C'est la raison pour laquelle nous trouvons souvent le coefficient de corrélation intraclasse sous la forme commune suivante dans les manuels de référence car il permet une approche parfois plus intuitive du concept :

$$\text{ICC}=\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2}=\frac{\dfrac{\text{MS}_{\text{b/inter}}-\text{MS}_{\text{w/intra}}}{n}}{\dfrac{\text{MS}_{\text{b/inter}}-\text{MS}_{\text{w/intra}}}{n}-\text{MS}_{\text{w/intra}}}=\frac{\text{MS}_{\text{b/inter}}-\text{MS}_{\text{w/intra}}}{\text{MS}_{\text{b/inter}}-\text{MS}_{\text{w/intra}}+n\text{MS}_{\text{w/intra}}}$$
$$=\frac{\text{MS}_{\text{b/inter}}-\text{MS}_{\text{w/intra}}}{\text{MS}_{\text{b/inter}}-(n-1)\text{MS}_{\text{w/intra}}} \quad (5.7.312)$$

Cela est également souvent noté dans certains manuels de référence sous la forme :

$$\text{ICC}=\frac{\text{MS}_{\text{bet S}}-\text{MS}_{\text{residual}}}{\text{MS}_{\text{bet S}}+(n-1)\text{MS}_{\text{residual}}} \quad (5.7.313)$$

Domenic V. Cicchetti (1994) propose les directives suivantes souvent citées pour l'interprétation des mesures d'accord inter-évaluateur kappa ou ICC :

Valeur ICC	Critère
$0.4 <$	Pauvre
$[0.4, 0.59]$	Acceptable
$[0.60, 0.74]$	Bon
> 0.75	Excellent

TAB. 5.38 – **Interprétation pour accord inter-évaluateur kappa ou ICC**

En cours de traduction de l'anglais

5.7.3.2 Variables continues et Moments

Définitions (#5.7.131) :

D1. Nous disons que X est une variable continue si sa "fonction de répartition" est continue (déjà défini plus haut). La fonction de répartition de X étant pour $x \in \mathbb{R}$ ou un sous-ensemble tronqué de $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=P(X \leq x) \tag{5.7.314}$$

soit la probabilité cumulée que la variable aléatoire X soit plus petite ou égale à la valeur x fixée. Nous avons aussi bien évidemment :

$$F_X(t)=P(X \leq t)=P(X \in]\min(D), t]) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.7.315}$$

avec :

$$0 \leq P(X) \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq F(X) \leq 1 \tag{5.7.316}$$

D2. Nous notons par :

$$G(x)=1-F(x)=P(X>x) \tag{5.7.317}$$

la "fonction de survie" ("survival function" en anglais) ou "fonction de queue" ("tail distribution function" en anglais).

D3. Si de plus la fonction de répartition F de X est continûment dérivable de dérivée f (ou parfois ρ) appelée "fonction de densité de probabilité[31]" ou encore simplement "fonction de distribution" alors nous disons que X est absolument continue et dans ce cas nous avons :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x=F(x_2)-F(x_1) \tag{5.7.318}$$

avec la condition de normalisation :

$$P(X<-\infty)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}F(x)=1 \tag{5.7.319}$$

Toute fonction de distribution de probabilité doit satisfaire l'intégrale de normalisation dans son domaine de définition !

En cours de traduction de l' anglais

Considérons une transformation type de variables aléatoires assez courante pour généraliser certains cas particuliers à des cas plus généraux (typiquement de la loi Normale centrée réduit à la loi Normale générale ou de la loi de Cauchy standard à la loi de Cauchy généralisée) ! Considérons pour cela X une variable aléatoire continue et la transformation $Y=a+bX$ où

[31]Gardez à l'esprit que l'expression "fonction de masse de de probabilité" est réservée aux variables discrètes.

a est nommé le "paramètre de localisation" et avec $b>0$ nommé le "paramètre d'échelle" et notons F la fonction de distribution de X et G la fonction de distribution de Y. Alors :

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(a+bX\leq y)=P\left(X\leq\frac{y-a}{b}\right)=F\left(\frac{y-a}{b}\right)\tag{5.7.320}$$

Maintenant, nous différencions et nous obtenons le résultat important et trivial :

$$g(y)=f\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b}\tag{5.7.321}$$

où g est la fonction de densité pour Y et f est la fonction de densité pour X.

On peut aussi considérer le cas où $b<0$. Dès lors :

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(a-bX\leq y)=P\left(X\geq\frac{y-a}{b}\right)=1-F\left(\frac{y-a}{b}\right)\tag{5.7.322}$$

En différenciant :

$$g(y)=-f\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b}=f\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{|b|}\tag{5.7.323}$$

Le lecteur doit essayer si possible de garder à l'esprit ces relations.

Remarque

Il est intéressant de remarquer que la définition amène à ce que la probabilité qu'une variable aléatoire totalement continue prenne une valeur donnée est nulle ! Donc ce n'est pas parce qu'un événement a une probabilité nulle qu'il ne peut arriver ! ! !

La moyenne ayant été définie par la somme pondérée par les probabilités pour une variable discrète, elle devient une intégrale pour une variable continue :

$$\boxed{\mathrm{E}(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x}\tag{5.7.324}$$

et donc la variance est écrite comme :

$$\boxed{\mathrm{V}(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x-\mathrm{E}(X)\right]^2f(x)\mathrm{d}x}\tag{5.7.325}$$

Ensuite, nous avons également la médiane qui est logiquement redéfinie dans le cas d'une variable aléatoire continue par :

$$\boxed{P(X\leq M_e)=P(X\geq M_e)=\int\limits_{-\infty}^{M_e}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{M_e}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}}\tag{5.7.326}$$

et qui coïncide rarement avec la moyenne !

En cours de ... de l' anglais

Et la valeur modale est donnée par la valeur de x où :

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{5.7.327}$$

Les statisticiens utilisent souvent les notations suivantes pour l'espéreance d'une variable continue :

$$\mathrm{E}(X), M(X), \mu_X, \mu \tag{5.7.328}$$

et pour la variance :

$$\mathrm{V}(X), S(X), \sigma_X^2, \sigma^2 \tag{5.7.329}$$

C'est la même notation que pour les moments de variables discrètes.

Par la suite, nous allons calculer ces différents indicateurs de moments avec des preuves détaillées uniquement pour les cas les plus utilisés.

Mais avant ... parlons de quelques autres moments bien connus et très discutés/débattus ... !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.3.2.1 Coefficients d'asymétrie et d'aplattissement

Attention ! ! ! J'ai hésité pendant de nombreuses années (plus de 10 ans !) à écrire ce texte à propos du coefficient d'asymétrie et du coefficient d'aplattissement dans ce livre, car ils sont la plupart du temps des concepts trompeurs et qu'il est difficile (voire impossible ...) de les introduire avec toute la rigueur mathématique nécessaire. J'ai changé d'avis quand j'ai vu que mes étudiants s'attendaient à quelque chose de plus complet et de plus robuste que le contenu Wikipédia. Le lecteur doit bien garder à l'esprit que ces deux indicateurs doivent être utilisés avec prudence et constituent de bons outils si nous savons que nous travaillons avec des données Normalement distribuées.

Comme déjà mentionné dans l'avertissement précédent, le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplattissement sont des notions quelque peu vagues. Le lecteur ne devrait donc pas s'attendre ici un preuve de leur origine ... De plus, le concept de "symétrie" est mathématiquement précis, mais l'asymétrie au contraire est un concept étonnamment flou... et l'aplatissement l'est peut-être encore plus !

En cours de traduction de l'anglais

Les définitions correspondantes aux idées sous-jacentes sont les suivantes (les définitions sont données pour une variable discrète mais peuvent facilement être étendues à une variable continue en convertissant les sommes en intégrales !) :

Définitions (#5.7.132) :

D1. Si le "coefficient d'asymétrie" ("skewness" en anglais), noté γ en général, et associé la plupart du temps au moment d'ordre 3, et également appelé "coefficient d'asymétrie de Fisher-Pearson" :

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^3} \tag{5.7.330}$$

est nul, la distribution est symétrique (cela ne signifie pas que la symétrie a lieu sur un pic de la distribution car dans le cas bimodal, l'axe de symétrie peut se situer entre les deux valeurs modales symétriques). Si l'asymétrie est positive (modale droite), la distribution (valeur modale / médiane) est maigre à droite (ou il existe des valeurs extrêmes à droite). Si l'asymétrie est négative (modale gauche), la distribution (la valeur modale / médiane) est inclinée à gauche (ou des valeurs extrêmes se trouvent à gauche).

Remarque

Une question commune est de savoir pourquoi l'asymétrie est définie comme le troisième moment central et non comme le cinquième ou un autre nombre ? Quelle est la logique derrière tout ça ? En fait rien de spécial ! Nous pourrions choisir n'importe quelle puissance étrange, mais le fait est que le moment d'ordre 1 est

l'espérance (déjà prise ...) et que le moment d'ordre qui suite le plus facile à gérer pour des calculs ultérieurs est la puissance de 3 (nous laissons le soin au lecteur d'imaginer l'intégration de la fonction de distribution avec des variables d'ordre telles que 5 ou plus ...).

Il est possible qu'une distribution soit symétrique sans avoir un troisième moment qui soit égal à zéro nul. Un contre-exemple simple est toute distribution de student T avec 3 ou moins de degrés de liberté (voir la preuve lors de notre étude de la distribution correspondante). Dans les échantillons, cependant, la symétrie implique un troisième moment nul - mais les échantillons ne sont presque jamais parfaitement symétriques et ne sont donc pas d'une grande utilité. Il est également possible de construire des distributions asymétriques qui ont un troisième moment non nul (voir notre livre compagnon R !) ! ! ! Donc, la symétrie n'implique pas nécessairement un troisième moment égal à zéro et un troisième moment égal à zéro n'implique pas nécessairement une symétrie !

D2. Le "coefficient d'asymétrie" (ou "kurtosis" en anglais), noté κ en général (voir les maths juste après les définitions), est associé le plus souvent au moment d'ordre 4 (donc toujours positif ou égal à zéro) suivant :

$$\kappa_1 = \frac{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^4} \tag{5.7.331}$$

Si nous le normalisons pour avoir "l'excès du coefficient d'asymétrie" défini par $\kappa_1 - 3$, alors il y a trois scénarios à considérer :

- L'excès du coefficient d'asymétrie est nul, c'est-à-dire "mesokurtique", l'aplatissement est alors similaire à celui d'une distribution Normale [32].
- L'excès du coefficient d'asymétrie en excès est supérieure à zéro, c'est-à-dire "leptokurtique", la distribution que l'on étudie est alors supérieure à celle d'une distribution Normale avec une moyenne égale.
- L'excès du coefficient d'asymétrie en excès est inférieur à zéro, c'est-à-dire "platikurtique", la distribution que l'on étudie est donc inférieure à celle d'une distribution Normale avec une moyenne égale.

Rigoureusement, le coefficient d'asymétrie mesure à quel point la distribution sous-jacente est symétrique et bimodale (algébriquement, une distribution parfaitement symétrique et bimodale aura un kurtosis de 1, ce qui est la plus petite valeur possible d'un kurtosis). La plupart des textes élémentaires décrivent le le coefficient d'asymétrie comme une mesure du "pic" d'une distribution. Ce terme est trompeur, et un terme bien meilleur pour décrire le kurtosis est la mesure "bimodalité", où plus le coefficient d'asymétrie est bas, plus la bimodalité est grande.

En cours de traduction de l'anglais

[32] Une distribution Normale a rigoureusement un coefficient d'asymétrie nul. Mais le contraire n'est pas vrai ! Les distributions qui ne semblent pas du tout Normales peuvent avoir un coefficient d'asymétrie égal à zéro !

En voici une illustration :

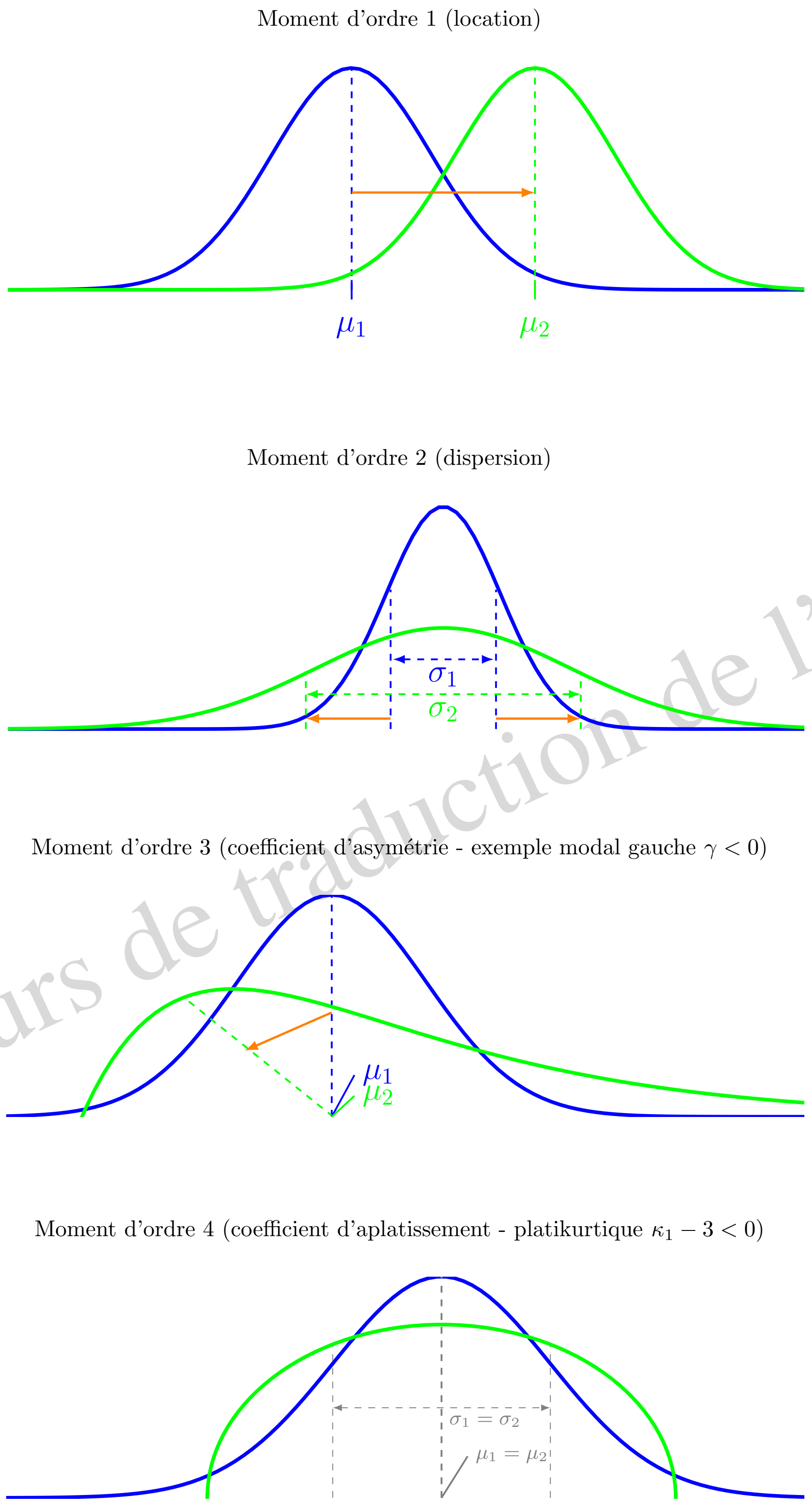


FIG. 5.116 – Représentation de plages de valeurs du Kurtosis et Skewness de quelques distributions (auteur : Simon H. Hess)

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Si vous effectuez une recherche d'image pour le "kurtosis" sur Google, plusieurs images montrent que le kurtosis (coefficient d'asymétrie) n'est qu'une distribution gaussienne avec un moment de second ordre plus grand ou plus petit (c'est-à-dire que la gaussienne est juste plus grande ou plus petite). De telles images sont des représentations trompeuses des représentations du kurtosis.

Il y a eu un assez grand nombre de tentatives visant à donner des mesures adéquates à ces notions d'asymétrie et d'aplatissement, mais ces mesures souvent utiles peuvent parfois être étonnamment contre-intuitives. Par exemple, l'asymétrie basée sur le moment peut être nulle lorsque la distribution est asymétrique (contredisant une affirmation que l'on peut trouver étonnamment souvent lors de la lecture de textes élémentaires traitant de l'asymétrie...).

Dans les faits, les moments d'une distribution continue, et leurs fonctions comme le kurtosis, nous en disent parfois très peu sur le graphique de sa fonction de densité ! ! ! ! Il devrait être parfaitement clair que le kurtosis et l'asymétrie ne constituent pas une mesure facilement interprétable ou intuitive celui de la symétrie, de l'unimodalité, de la bimodalité, de la convexité ou de toute autre caractérisation géométrique familière d'une courbe. Par conséquent, les fonctions des moments (et du kurtosis en tant que cas particulier) ne décrivent pas les propriétés géométriques du graphe de la fonction de densité de probabilité. Cela a un sens intuitif : comme une function de densité de probabilité représente une probabilité au moyen d'une surface, nous pouvons presque librement déplacer la densité de probabilité d'un endroit à un autre, en modifiant radicalement l'apparence de la fonction de densité de probabilité, tout en fixant un nombre fini de moments prédéfinis !

Voici les coefficients d'asymétrie utilisés par les logiciels R (ce dernier dispose de γ_1, γ_2, γ_3), MATLAB™ (ce dernier dispose par défaut de γ_1, γ_2), Mathematica (ce dernier dispose par défaut de γ_1), et MINITAB/IBM SPSS ainsi que Microsoft Excel (ces derniers disposent par défaut de γ_3) :

En cours de traduction de l'anglais

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\\
\gamma_2 &= \gamma_1\frac{n}{(n-1)(n-2)}\\
\gamma_3 &= \gamma_1\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3/2}\\
\gamma_{\text{Mode de Pearson}} &= \frac{\mu-M_0}{\sigma}\\
\gamma_{\text{Médiane de Pearson}} &= \frac{3(\mu-M_e)}{\sigma}\\
\gamma_{\text{Bowley}} &= B_1 = \frac{Q_3+Q_1-2Q_2}{Q_3-Q_1} = \frac{\dfrac{Q_3+Q_1}{2}-Q_2}{\dfrac{Q_3-Q_1}{2}}\\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{5.7.332}
$$

et les coefficients de Kurtosis utilisés par les logiciels (ce dernier dispose de κ_3, κ_4, κ_5), MATLAB™ (ce dernier dispose de κ_1, κ_2), Mathematica (ce dernier dispose de κ_1), et MINITAB/IBM SPSS ainis que Microsoft Excel (ces derniers disposent par défaut de κ_3) :

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}\\
\kappa_2 &= \frac{(N-1)((N+1)\kappa_1-3(N+1))}{(N-2)(N-3)}+3\\
\kappa_3 &= \frac{N(N+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\kappa_1-\frac{3(N-1)^2}{(N-2)(N-3)}\\
\kappa_4 &= \kappa_1-3\\
\kappa_5 &= (\kappa_4+3)\left(1-\frac{1}{N}\right)^2-3\\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{5.7.333}
$$

Parmi les relations ci-dessus, seuls γ_1, γ_2, κ_1 et κ_3 sont réellement conformes à la norme ISO 3534-1.

Remarque

Il existe au moins 11 méthodes pour calculer le coefficient d'asymétrie. Pour plus de détails, voir l'étude de Tabor, J. (2010), *Investigating the Investiga-*

En cours de traduction de l' anglais

tive Task : Testing for Skewness - An Investigation of Different Test Statistics and their Power to Detect Skewness, Journal of Statistics Education, 18, 1-13. www.amstat.org/publications/jse/v18n2/tabor.pdf

Le coefficient d'asymétrie (skewness) γ_1 peut être exprimé en termes du moment non central $\text{E}[X^3]$ en développant sa définition générale (cette forme est très utile en pratique pour calculer l'asymétrie explicite d'une distribution donnée !) :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \text{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] \\ &= \frac{\text{E}[X^3]-3\mu\text{E}[X^2]+3\mu^2\text{E}[X]-\mu^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{\text{E}[X^3]-3\mu(\text{E}[X^2]-\mu\text{E}[X])-\mu^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{\text{E}[X^3]-3\mu\sigma^2-\mu^3}{\sigma^3}\end{aligned} \tag{5.7.334}$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour un échantillon de n valeurs, un estimateur naturel de l'asymétrie de population γ_1 par la méthode des moments est évidemment tel que déjà défini ci-dessus :

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}\right)^3} \tag{5.7.335}$$

Pareil pour le coefficient d'aplatissement (Kurtosis) :

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \text{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] \\ &= \frac{\text{E}[X^4]-4\mu\text{E}[X^3]+6\mu^2\text{E}[X^2]-4\mu^3\text{E}[X]-\mu^4}{\sigma^4}\end{aligned} \tag{5.7.336}$$

Voici une figure donnant une idée de la plage de valeurs du coefficient d'asymétrie au carré et de kurtosis pour certaines distributions :

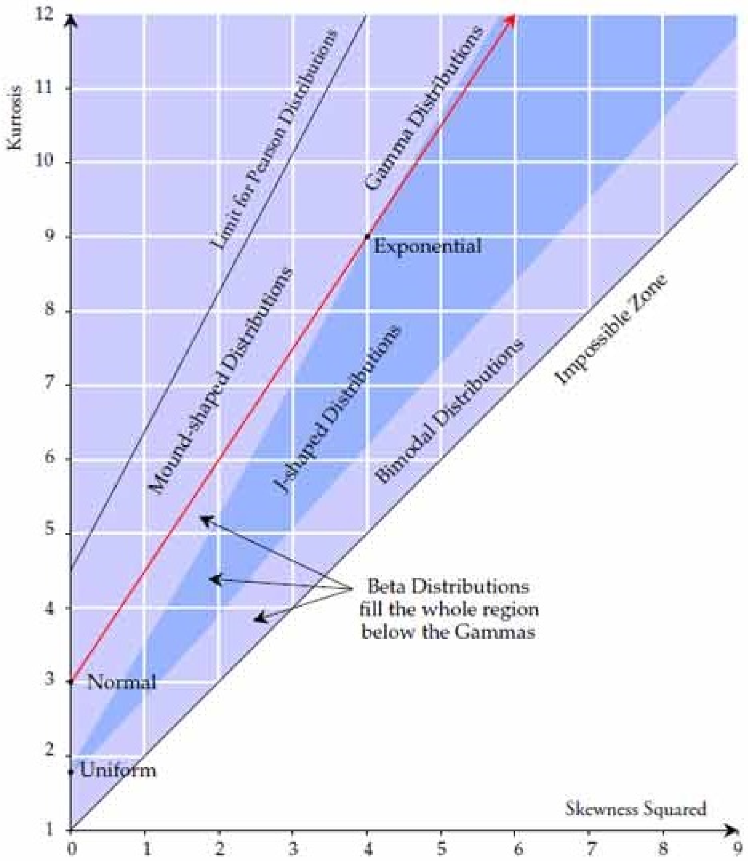


FIG. 5.117 – **Familles bêta et gamma de distributions sur le plan de caractérisation de forme (source : ?)**

Plus loin, au cours de l'étude de certaines distributions de probabilités importantes, nous allons démontrer en détail les valeurs du coefficient d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis) pour : la distribution uniforme, triangulaire, Normale, de Student et bêta.

Mais avant cela, prouvons un théorème intéressant !

Théorème 5.44. étant donné une variable aléatoire X avec une fonction de densité de probabilité symétrique $f(x)$, nous avons $\text{E}(X) = a\text{E}(X) = a$ où a est le point de symétrie en supposant que $\text{E}(X)$ existe.

Démonstration 5.44.1. Premièrement, il est évident que la symétrie autour de a signifie selon les hypothèses de l'énoncé du théorème que :

$$f(a+z) = f(a-z) \tag{5.7.337}$$

pour tout z.

Supposons que l'espérance $\text{E}(X)$ existe. Alors nous savons que :

$$\text{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\text{d}x \tag{5.7.338}$$

Réécrivons ceci comme :

$$\text{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a+(x-a))f(x)\text{d}x \tag{5.7.339}$$

En cours de traduction de l'anglais

qui est égal à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} af(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)f(x)\mathrm{d}x \tag{5.7.340}$$

La première intégrale est évidemment égale à a car $f(x)$ est une fonction de densité.

Dans la deuxième intégrale, nous faisons le changement de variable $y = x - a$. Alors cette seconde intégrale devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yf(a+y)\mathrm{d}y \tag{5.7.341}$$

En cassant à $y = 0$. Nous avons :

$$\int_{-\infty}^{0} yf(a+y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} yf(a+y)\mathrm{d}y \tag{5.7.342}$$

Pour la première intégrale, effectuons le changement de variable $z = -y$. On a :

$$\int_{+\infty}^{0} (-1)(-z)f(a-z)\mathrm{d}z \tag{5.7.343}$$

En utilisant $f(a-z) = f(a+z)$ et quelques inversions avec les signes moins, nous aboutissons à :

$$-\int_{0}^{+\infty} zf(a+z)\mathrm{d}z \tag{5.7.344}$$

Dès lors :

$$\int_{-\infty}^{0} yf(a+y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty} yf(a+y)\mathrm{d}y \tag{5.7.345}$$

devient :

$$-\int_{0}^{+\infty} zf(a+z)\mathrm{d}z + \int_{0}^{+\infty} yf(a+y)\mathrm{d}y \tag{5.7.346}$$

Et ceci est égal à zéro ! Ensuite nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} af(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)f(x)\mathrm{d}x = a + \left(-\int_{0}^{+\infty} zf(a+z)\mathrm{d}z + \int_{0}^{+\infty} yf(a+y)\mathrm{d}y\right) = a + 0 = a \tag{5.7.347}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

> **Remarque**
>
> L'asymétrie et le kurtosis sont les moments fondamentaux pour développer le fameux test de normalité de Jarque-Bera ou également la Value at Risk de Cornish-Fisher (nous verrons tout cela en détails plus loin).

5.7.4 Postulat fondamental de la statistique

Un des buts ultime de la statistique est de remonter de l'échantillon à la fonction de répartition analytique qui lui aurait donné naissance. Ce but sera présenté dans le cadre de ce livre comme un postulat (bien que ce postulat soit relativement difficile à appliquer dans la pratique).

Postulat : À toute fonction de répartition empirique $\hat{F}_n(x)$ de n-réalisation d'une variable aléatoire x nous pouvons associer une fonction de répartition théorique $F(x)$ vers laquelle elle converge quand la taille de l'échantillon est suffisamment grande.

Si :

$$X_n = \sup |\hat{F}_n(x) - F(x)| \tag{5.7.348}$$

est la variable aléatoire définie comme la plus grande différence (en valeur absolue) entre $\hat{F}_n(x)$ et $F(x)$ (observée pour toutes les valeurs de x pour un échantillon donné), alors X_n converge vers 0 presque sûrement.

> **Remarque**
>
> Les mathématiciens de la statistique démontrent ce postulat de manière rigoureuse sous la forme d'un théorème appelé le "théorème fondamental de la statistique" ou "théorème de Glivenko-Cantelli" en ce qui concerne les fonctions continues. Personnellement, quitte à choquer les connaisseurs, je considère que cette démonstration n'en est pas une car elle est très éloignée de ce que montre l'expérience (oui c'est mon côté physicien qui ressort...) et ce résultat théorique amène un grand nombre de praticiens à faire souvent tout leur possible (exclusion de données, transformations et autres abominations) pour trouver une loi connue à laquelle ils peuvent ajuster leurs données mesurées.

Er... uction de l' anglais

5.7.5 Indice de diversité

Il arrive dans le domaine de la biologie ou de l'entreprise que l'on demande à un statisticien ou analyste de mesurer la diversité d'un certain nombre d'éléments prédéfinis. Par exemple, imaginons une multinationale ayant une gamme de produits bien définie et dont certains magasins (clients) dans le monde peuvent choisir un sous-ensemble de cette gamme pour leur commerce. La question étant alors de faire un ranking des magasins qui vendent la plus grande diversité de produits de la marque et ce en prenant en compte aussi les quantités.

Par exemple, nous avons une liste de 4 produits au total dans notre catalogue. Le hasard faisant, trois de nos clients vendent nos 4 produits mais nous souhaiterions savoir lequel en vend la plus grande diversité et ce en prenant en compte les quantités.

Nous avons les données de ventes par produit suivantes pour le client 1 :

Client 1	
Produit 1	5
Produit 2	5
Produit 3	5
Produit 4	5

Et pour le client 2 :

Client 2	
Produit 1	1
Produit 2	1
Produit 3	1
Produit 4	17

Et pour le client 3 :

Client 3	
Product 1	2
Product 2	2
Product 3	2
Product 4	34

En cours de traduction de l'anglais

Une mesure de l'information (diversité des états) qui peut être bien adaptée à cet objectif est la formule de Shannon introduite dans le chapitre de Mécanique Statistique dont l'espérance est :

$$S(x)=\mathrm{E}(h(x))=-\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i\log(p_i) \tag{5.7.349}$$

Arbitrairement, nous prendrons $\lambda=1$ et la base 10 pour le logarithme (ainsi, si nous avons 10 variables équiprobables, l'entropie sera unitaire par exemple...).

Dès lors il vient :

$$S(x)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_{10}(p_i) \tag{5.7.350}$$

Nous allons récrire cela de manière plus adéquate pour l'application en entreprise. Ainsi, si n est le nombre de produits et equation est la proportion (ou "fréquence relative") de ventes du produit i parmi la totalité des ventes N nous avons alors :

$$p_i=\frac{f_i}{N} \tag{5.7.351}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}S(x) &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{N}\log_{10}(\frac{f_i}{N}) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,[\log_{10}(f_i)-\log_{10}(N)]\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\,[\log_{10}(N)-\log_{10}(f_i)]}{N} = \frac{\log_{10}(N)\sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=1}^{n} f_i\log_{10}(f_i)}{N}\\ &= \frac{N\log_{10}(N)-\sum_{i=1}^{n} f_i\log_{10}(f_i)}{N}\end{aligned} \tag{5.7.352}$$

Nous avons alors pour le client 1 (nous restons en base 10 pour le logarithme) :

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{N\log(N)-\sum_{i=1}^{n} f_i\log(f_i)}{N}\\ &= \frac{20\log(20)-(5\log(5)+5\log(5)+5\log(5)+5\log(5))}{20}\\ &= \frac{20\log(20)-20\log(5)}{20} = \log(20)-\log(5)=\log(4)=0.602\end{aligned} \tag{5.7.353}$$

qui est la valeur maximale possible (chaque état est équiprobable). Et pour le client 2 nous avons :

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{N\log(N)-\sum_{i=1}^{n} f_i\log(f_i)}{N}\\ &= \frac{20\log(20)-(1\log(1)+1\log(1)+1\log(1)+17\log(17))}{20}=0.255\end{aligned} \tag{5.7.354}$$

et pour le client 3 :

$$\begin{aligned}S_3 &= \frac{N\log(N)-\sum_{i=1}^{n} f_i\log(f_i)}{N}\\ &= \frac{40\log(40)-(2\log(2)+2\log(2)+2\log(2)+34\log(34))}{40}=0.255\end{aligned} \tag{5.7.355}$$

Ainsi, le client ayant la plus grande diversité est le premier. Nous voyons aussi une propriété intéressante de la formule de Shannon à l'aide des clients 2 et 3 c'est que la quantité n'influe pas sur la diversité (puisque la seule différence entre les deux clients est la quantité qui est multipliée d'un facteur 2 et non la diversité) !

Notez que si nous mettons tous les produits dans un seul client (ensemble), nous obtenons :

$$\begin{aligned}S_{\text{tot}} &= \frac{N\log(N)-\sum_{i=1}^{n} f_i\log(f_i)}{N}\\ &= \frac{80\log(80)-(8\log(8)+8\log(8)+8\log(8)+56\log(56))}{80}=0.408\end{aligned} \tag{5.7.356}$$

En cours de traduction de l' anglais

Donc on devine que (sans démonstration mathématique générale) :

$$S_{\text{tot}} \leq \sum_i S_i \tag{5.7.357}$$

D'où le fait qu'il vaut mieux avoir plusieurs produits au même endroit que à plusieurs endroit (résultat utilisé par exemple dans le domaine de la gestion de documents où le but est d'éviter que le même type de documents soit enregistré dans différents lecteurs partagés ou bibliothèques).

En cours de traduction de l' anglais

5.7.6 Fonctions de distributions (lois de probabilités)

Lorsque nous observons des phénomènes probabilistes, et que nous prenons note des valeurs prises par ces derniers et que nous les reportons graphiquement, nous observons toujours que les différentes mesures obtenues suivent une caractéristique courbe typique qui est parfois ajustable théoriquement avec un bon niveau de qualité.

Dans le domaine des probabilités et statistiques, nous appelons ces caractéristiques des "fonctions de distribution" car elles indiquent la fréquence avec laquelle la variable aléatoire apparaît avec certaines valeurs.

Remarque

Nous utilisons aussi simplement le terme "fonction" ou encore "loi" pour désigner ces caractéristiques.

Ces fonctions sont en pratique bornées par ce que nous appelons "l'étendue de la distribution", ou "dispersion de la distribution", qui correspond à la différence entre la donnée maximale (à droite) et la donnée minimale (à gauche) des valeurs observées :

$$R = \max - \min \tag{5.7.358}$$

notée souvent aussi R (pour "range" en anglais) dans l'ingénierie de la qualité (voir section d'Ingénierie Industrielle page ??). Dans la théorie elles sont non nécessairement bornées et nous parlons alors (voir section d'Analyse Fonctionnelle page 2181) de "domaine de définition" ou plus simplement du "support" de la fonction.

Si les valeurs observées se distribuent d'une certaine manière c'est qu'elles ont alors une probabilité (ou probabilité cumulée dans le cadres des fonctions continues) d'avoir une certaine valeur de la fonction de distribution.

Dans la pratique industrielle (voir section d'Ingénierie Industrielle page ??), l'étendue des valeurs statistiques est importante (de même que l'écart-type) parce qu'elle donne une indication sur la variation d'un processus (variabilité).

Si L dénote toute fonction de distribution univariée possible, la plage de la fonction est simplement notée L si son domaine de définition est $\mathbb{R}$, sinon, si elle est bornée, vous verrez généralement quelque chose comme $L_{]a,b]}$.

Définitions (#5.7.133) :

D1. La relation mathématique qui donne la probabilité qu'a une variable aléatoire d'avoir une valeur précise de la fonction de distribution est appelée "fonction de densité" (or "fonction de densité de probabilité"), "fonction de masse" or "fonction marginale".

D2. La relation mathématique qui donne la probabilité cumulée qu'a une variable aléatoire d'être inférieure ou égale à une certaine valeur est nommée la "fonction de répartition" ou "fonction cumulée".

D3. Des variables aléatoires sont dites "indépendantes et identiquement distribuées" (i.i.d.) si elles suivent toutes la même fonction de distribution et qu'elles sont indépendantes.

En cours de traduction de l' anglais

De telles fonctions étant très nombreuses dans la nature, nous proposons au lecteur ci-après une étude détaillée des plus connues seulement.

Indiquons avant d'aller plus loin que si nous notons X une variable aléatoire continue ou discrète, il y a plusieurs usages de notation dans la littérature scientifique pour indiquer qu'elle suit une loi de probabilité donnée L. Voici les plus courantes :

$$\begin{aligned} X &\sim L \\ X &\overset{\mathcal{L}}{=} L \\ X &\mapsto L \\ X &= L \end{aligned} \tag{5.7.359}$$

Dans la présente section et tout le reste du livre en général, nous utiliserons la dernière notation.

Voici la liste des fonctions de distribution que nous allons voir ici ainsi que les fonctions de distributions utilisées couramment dans l'industrie et se trouvant dans d'autres chapitres et celles qui dont la démonstration doit encore être rédigé :

- Distribution Uniforme Discrète $\mathcal{U}(a, b)$ (voir plus bas)
- Distribution de Bernoulli $\mathrm{B}(1, p)$ (voir plus bas)
- Distribution Géométrique $\mathcal{G}(N)$ (voir plus bas)
- Distribution Binomiale $\mathcal{B}(N, k)$ (voir plus bas)
- Distribution Binomiale Négative $\mathrm{NB}(N, k, p)$ (voir plus bas)
- Distribution Hypergéométrique$\mathcal{H}(n, p, m, k)$ (voir plus bas)
- Distribution Multinomiale $\mathcal{H}(\vec{k}, \vec{p}, m)$ (voir plus bas)
- Distribution de Poisson $\mathcal{P}(\mu, k)$ (voir plus bas)
- Distribution de Gauss-Laplace/Loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (voir plus bas)
- Distribution Normale repliée (voir plus bas)
- Distribution demi-Normale (voir plus bas)
- Distribution Log-Normale $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$ (voir plus bas)
- Distribution Uniforme continue (voir plus bas)
- Distribution Triangulaire (voir plus bas)
- Distribution de Pareto (voir plus bas)
- Distribution Exponentielle (voir plus bas)
- Distribution de Weibull (voir section de Génie Industriel page **??**)
- Distribution Exponentielle Généralisée (à rédiger...)
- Distributions d'Erlang/Erlang-B/Erlang-C (voir section de Gestion Quantitative page **??**)
- Distribution de Cauchy (voir plus bas)
- Distribution Bêta (voir plus bas et de Gestion Quantitative **??**)
- Distribution Gamma (voir plus bas)
- Distribution du Chi-2 (voir plus bas)
- Distribution de Student (voir plus bas)
- Distribution de Fisher-Snedeco (voir plus bas)
- Distribution de Benford (voir plus bas)
- Distribution Logistique (voir section Méthodes numériques page **??**)
- Distribution de Laplace $\mathcal{L}(\mu, b)$ (voir plus bas)
- Distribution Normale carrée (voir plus bas)
- Generalized extreme value distribution (à rédiger)

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le lecteur trouvera les développements mathématiques de la fonction de distribution de Weibull dans la section Génie industriel (page **??**), et la fonction de distribution logistique dans la section Méthodes numériques (page **??**).

5.7.6.1 Distribution Uniforme Discrète

Si nous admettons qu'il est possible d'associer une probabilité à un événement, nous pouvons concevoir des situations où nous pouvons supposer a priori que tous les événements élémentaires sont équiprobables (c'est-à-dire qu'ils ont même probabilité). Nous utilisons alors le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles pour calculer la probabilité de tous les événements de l'Univers des événements U. Plus généralement si U est un ensemble fini d'événements équiprobables et A une partie de U nous avons sous forme ensembliste (voir section Théorie des Ensembles page 386) :

$$P(A)=\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(U)}=\frac{\#A}{\#U} \quad (5.7.360)$$

Plus communément, soit e un événement pouvant avoir N issues équiprobables possibles. Alors la probabilité d'observer l'issue donnée de l'événement suit une "distribution uniforme discrète" (ou "loi uniforme discrète") donnée par la relation :

$$\boxed{P_e=\frac{1}{N}} \quad (5.7.361)$$

Ayant pour espérance (ou moyenne) :

$$\text{E}(X)=\sum_i p_i x_i=\sum_i P_e x_i=P_e\sum_i x_i=\frac{1}{N}\sum_i x_i \quad (5.7.362)$$

Si nous nous mettons dans le cas particulier où $x_i=1$ avec $i=1\ldots N$. Nous avons alors (voir section Séquences et Séries page 1645) :

$$\text{E}(X)=\frac{1}{N}\sum_i x_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i=\frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N+1}{2} \quad (5.7.363)$$

Si la variable aléatoire e prend toutes les valeurs comprises entre $[a,b]$ (un autre cas spécial) telle que la distribution sera maintenant notée $\mathcal{U}(a,b)$ et la fonction de densité de masse de e est :

$$f_e(x)=\frac{1}{b-a+1} \quad \text{où} \quad x\in\{a,a+1,\ldots,b-1,b\} \quad (5.7.364)$$

comme le nombre d'entiers compris entre a et b est $n=b-a+1$. Il est immédiat que la fonction de distribution cumulative est donnée par :

$$F_e(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<a \\ \dfrac{\lfloor x\rfloor-a+1}{b-a+1} \text{ si } a\leq x\leq b \\ 1 \text{ si } x>b \end{cases} \quad (5.7.365)$$

En cours de traduction de l'anglais

et alors il devrait être évident que nous avons pour l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{i=a}^{b}P_e i=P_e\sum_{i=a}^{b}i=\frac{1}{b-a+1}\sum_{i=a}^{b}i=\frac{1}{b-a+1}\left(\sum_{i=1}^{b}i-\sum_{i=1}^{a-1}i\right)\\&=\frac{1}{b-a+1}\left(\frac{b(b+1)}{2}+\frac{(a-1)((a-1)+1)}{2}\right)=\frac{1}{b-a+1}\frac{b(b+1)-a(a-1)}{2}\\&=\frac{1}{b-a+1}\frac{(b-a+1)(b+a)}{2}=\frac{a+b}{2}\end{aligned}\tag{5.7.366}$$

Et pour la variance, nous avons (toujours en utilisant les résultats de la section de Séquences et Séries page 1646) :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{N}p_i(i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{N}P_e(i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}(i-\mu)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(i-\mu)^2\\&=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}i^2-2\mu\sum_{i=1}^{N}i+\sum_{i=1}^{N}\mu^2\right)=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}i^2-2\mu\sum_{i=1}^{N}i+N\mu^2\right)\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}i^2-\frac{2}{N}\mu\sum_{i=1}^{N}i+\mu^2=\frac{1}{N}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{2}{N}\frac{N+1}{2}\sum_{i=1}^{N}i+\left(\frac{N+1}{2}\right)^2\\&=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N+1}{N}\sum_{i=1}^{N}i+\frac{(N+1)^2}{4}\\&=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N+1}{N}\frac{N(N+1)}{2}+\frac{(N+1)^2}{4}\\&=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{(N+1)^2}{2}+\frac{(N+1)^2}{4}=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{(N+1)^2}{4}\\&=\frac{2(N+1)(2N+1)-3(N+1)^2}{12}=\frac{2(2N^2+N+2N+1)-3N^2-6N-3}{12}\\&=\frac{4N^2+6N+2-3N^2-6N-3}{12}=\frac{N^2-1}{12}\end{aligned}\tag{5.7.367}$$

En cours de traduction de l'anglais

Si la variable aléatoire e prend toutes les valeurs comprises entre $[a,b]$ (un autre cas spécial) telle que la distribution sera maintenant notée $\mathcal{U}(a,b)$, alors il devrait être évident que nous avons pour la variance :

$$\mathrm{V}(X)=\frac{N^2-1}{12}=\frac{(b-a+1)^2+1}{12}\tag{5.7.368}$$

Par symétrie de la distribution, si toutes les valeurs du domaine de la définition $[a,b]$ sont prises par la variable aléatoire alors nous avons pour la médiane :

$$M_e=\mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2}\tag{5.7.369}$$

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution de masse et de la fonction de distribution cumulative, respectivement, pour la loi uniforme discrète avec paramètres $\{1,5,8,11,12\}$ (nous voyons que chaque valeur a la même probabilité) :

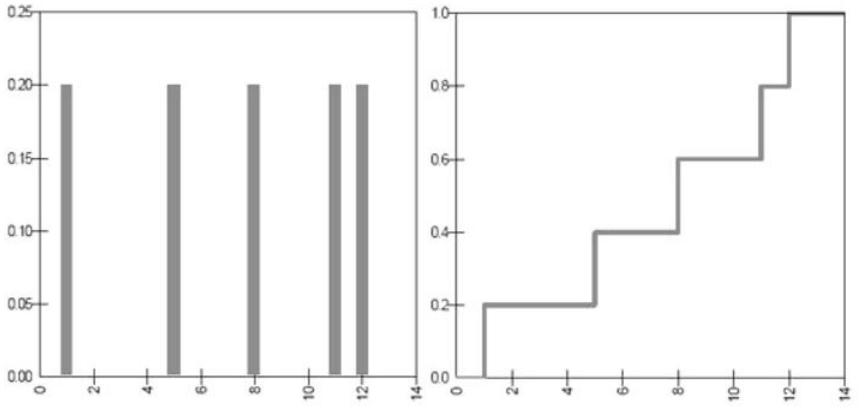


FIG. 5.118 – Loi Uniforme $\mathcal{U}$ (fonction de densité et de distribution cumulative)

Comme on peut le voir dans le diagramme ci-dessus, la fonction de distribution cumulative peut être écrite :

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\#(i : x_i \leq x)}{N} \quad (5.7.370)$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Bien évidemment, la distribution uniforme discrète n'a pas de valeur modale spécifique M_0 !

Soit e une variable aléatoire suivant une distribution uniforme discrète $e \sim \mathcal{U}(a, b)$. Alors, la fonction quantile de e est :

$$Q_e(p) = a(1-p) + (b+1)p - 1 \quad \text{when } p \in \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{b-a}{n}, 1\right\} \quad (5.7.371)$$

avec $n = b - a + 1$. Rappelons que la fonction quantile $Q_X(p)$ est en général définie comme le plus petit x, tel que $F_X(x) = p$:

$$Q_X(p) = \min\left\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = p\right\} \quad (5.7.372)$$

Étant donné que la fonction de distribution cumulative ne renvoie que des multiples de $1/n$ avec $n = b - a + 1$, la fonction quantile n'est définie que pour de telles valeurs. Premièrement, nous avons $Q_X(p) = -\infty$, si $p = 0$ (c'est une convention !). Deuxièmement, puisque la probabilité cumulée augmente par pas de $1/n$ pour chaque nombre entier compris entre et incluant a et b, le minimum x auquel :

$$F_e(x) = \frac{c}{n} \quad \text{où} \quad c \in \{1, \ldots, n\} \quad (5.7.373)$$

est donné par :

$$Q_e\left(\frac{c}{n}\right) = a + \frac{c}{n} \cdot n - 1 = a + c - 1 \quad (5.7.374)$$

En remplaçant $p = c/n$ et $n = b - a + 1$, nous avons enfin :

$$\begin{aligned} Q_e(p) &= a + p \cdot (b - a + 1) - 1 \\ &= a + pb - pa + p - 1 \\ &= a(1 - p) + (b + 1)p - 1 \end{aligned} \qquad (5.7.375)$$

Nous démontrerons dans la section de Mécanique Statistique (voir page **??**) que la distribution uniforme discrète maximise l'entropie (Shannon) pour une variable aléatoire à support fini.

5.7.6.2 Distribution de Bernoulli

Si nous avons affaire à une observation binaire alors la probabilité d'un événement reste constante d'une observation à l'autre s'il n'y a pas d'effet mémoire (autrement dit : une somme de variables de Bernoulli, deux à deux indépendantes).

Nous appelons ce genre d'observations où la variable aléatoire a valeurs 0 (faux) ou 1 (vrai), avec probabilité equation respectivement p, des essais de Bernoulli" avec "événements contraires à probabilités contraires".

Ainsi, une variable aléatoire X suit une "distribution de Bernoulli" (ou "loi de Bernoulli") si elle ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, associées aux probabilités p et q de sorte que $q + p = 1$ et :

$$\boxed{P(X = 0) = q \qquad P(X = 1) = p = 1 - q} \qquad (5.7.376)$$

L'exemple classique d'un tel processus est le jeu de pile de face ou de tirage avec remise ou pouvant être considéré tel quel (ce dernier cas étant très important dans la pratique industrielle). Il est certainement inutile pour le lecteur de vérifier formellement que la probabilité cumulée est unitaire...

Remarque

L'introduction ci-dessus n'est peut-être pas pertinente pour le monde des affaires (le business), mais nous verrons dans la section Techniques de Gestion (page **??**) que la fonction de Bernoulli apparaît naturellement au début de notre étude de la théorie des files d'attente.

Remarquons que par extension, si nous considérons N événements où nous obtenons dans un ordre particulier k fois une des issues possible (réussite) et $N - k$ l'autre (échec), alors la probabilité d'obtenir une telle série (de k réussites et $N - k$ échecs ordonnés dans un ordre particulier) sera donnée par :

$$P(N, k) = p^k (1 - p)^{N-k} = p^k q^{N-k} \qquad (5.7.377)$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$ conformément à ce que nous avions obtenu en combinatoire dans le chapitre de Probabilités !

Voici un exemple de tracé de la fonction de répartition pour $q = 0.3$:

En cours de traduction de l'anglais

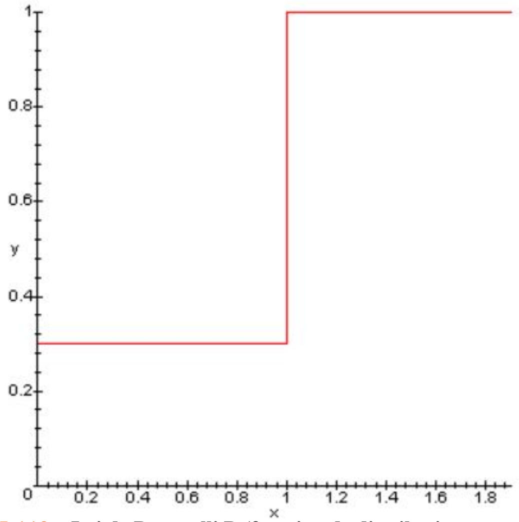


FIG. 5.119 – Loi de Bernoulli B (fonction de distribution cumulative)

La distribution de Bernoulli a donc pour espérance (moyenne) en choisissant p comme probabilité de l'événement d'intérêt :

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_i p_i x_i = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \quad (5.7.378)$$

et pour variance (nous utilisons la relation de Huygens démontrée plus haut) :

$$\mathrm{V}(X) = \sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq \quad (5.7.379)$$

La valeur modale M_0 de la loi de Bernoulli dépend des valeurs de p ou q. Donc nous avons (cela pourrait être évident pour le lecteur) :

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \Leftrightarrow p < q \\ M_0 &= \{0, 1\} \Leftrightarrow p = q \\ M_0 &= 1 \Leftrightarrow q > 0 \end{aligned} \quad (5.7.380)$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Bien sûr, la distribution de Bernoulli n'a pas de valeur médiane spécifique M_e !

5.7.6.3 Distribution Géométrique

La loi géométrique $\mathcal{G}(N)$ ou "loi de Pascal" consiste dans une épreuve de type Bernoulli, dont la probabilité de succès est p et celle d'échec $q = 1 - p$ sont constantes, que nous renouvelons de manière indépendante jusqu'au premier succès.

Rappelez-vous que lors de notre présentation de la loi Bernoulli, nous avons déduit une extension à N telle que :

$$P(N, k) = p^k (1-p)^{N-k} = p^k q^{N-k} \quad (5.7.381)$$

Par conséquent, la probabilité d'obtenir le premier succès $k = 1$ après N essais, est donnée par :

$$\mathcal{G}(N) = p(1-p)^{N-1} = pq^{N-1} \quad (5.7.382)$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Comme le lecture peut le constater, plus N est grand, plus petite est la probabilité $\mathcal{G}(N)$. Cela peut sembler non logique mais en fait cela l'est ! En effet, dans la phrase "*la probabilité d'obtenir le premier succès après N essais*", il ne faut pas oublier qu'il y est écrite après et non pas pendant !

Donc bien sûr ... la probabilité d'avoir $N-1$ échecs suivis de 1 succès sera toujours plus petite lorsque N augmentera (regardez la figure un peu plus bas pour pour $p = 0.5$, cela peut aider comprendre).

Cette loi a pour espérance :

$$\mu = \text{E}(X) = \sum_i p_i x_i = \sum_{N=1}^{+\infty} pq^{N-1}N = \sum_{N=1}^{+\infty} p(1-p)^{N-1}N = p\sum_{N=1}^{+\infty}(1-p)^{N-1}N \quad (5.7.383)$$

Cependant, la dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\sum_{N=1}^{+\infty} Nq^{N-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad (5.7.384)$$

En effet, nous avons prouvé dans la section Séquences et Séries (page 1659) lors de notre étude des séries géométriques que :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (5.7.385)$$

Quand $n \to +\infty$ nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (5.7.386)$$

car $0 \leq q < 1$.

Ensuite, il suffit de dériver les deux membres de l'égalité par rapport à q et nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad (5.7.387)$$

Ceci fait, continuons ...

Nous avons donc le nombre moyen d'essais X qu'il faut faire pour arriver au premier succès (ou autrement dit : le rang espéré (nombre d'essais espéré) pour voir le premier succès) :

$$\text{E}(X) = \sum_{N=0}^{+\infty} NP(X=N) = \sum_{N=0}^{+\infty} Npq^{N-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \quad (5.7.388)$$

En cours de traduction de l'anglais

Calculons maintenant la variance en rappelant comme à chaque fois que (relation de Huyghens) :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2 \tag{5.7.389}$$

Commençons donc par calculer $\mathrm{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\sum_{N=0}^{+\infty}N^2P(X=N)=p\sum_{N=0}^{+\infty}N^2q^{N-1}=p\sum_{N=0}^{+\infty}N(N-1+1)q^{N-1}\\&=p\sum_{N=1}^{+\infty}N(N-1)q^{N-1}+p\sum_{N=0}^{+\infty}Nq^{N-1}\end{aligned} \tag{5.7.390}$$

Le dernier terme de cette expression est l'équivalent de l'espérance calculée précédemment. Soit :

$$p\sum_{N=0}^{+\infty}Nq^{N-1}=\frac{1}{p} \tag{5.7.391}$$

Il reste à calculer :

$$p\sum_{N=1}^{+\infty}N(N-1)q^{N-1} \tag{5.7.392}$$

Nous avons :

$$p\sum_{N=1}^{+\infty}N(N-1)q^{N-1}=pq\sum_{N=2}^{+\infty}N(N-1)q^{N-2} \tag{5.7.393}$$

Or en dérivant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2} \tag{5.7.394}$$

Nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}=\frac{2}{(1-q)^3} \tag{5.7.395}$$

Dès lors :

$$pq\sum_{N=2}^{+\infty}N(N-1)q^{N-2}=pq\frac{2}{(1-q)^3}=pq\frac{2}{p^3}=\frac{2q}{p^2} \tag{5.7.396}$$

Donc :

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p^2} \tag{5.7.397}$$

Enfin, s'agissant de classer la variance attendue du premier succès (c'est-à-dire la valeur attendue de la variance avant les premiers essais réussis) :

$$\mathrm{V}(X)=\sigma^2=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2} \tag{5.7.398}$$

En cours de traduction de l'anglais

La valeur modale est facile à obtenir car nous devons trouver la valeur de N qui maximise la définition de la loi géométrique :

$$pq^{N-1} \tag{5.7.399}$$

et nous espérons qu'il est immédiat pour le lecteur que ceci est satisfait lorsque $N = 1$:

$$M_0 = pq^{1-1} = pq^0 = p \tag{5.7.400}$$

Déterminons maintenant la médiane M_e. Pour cela, nous savons par définition que nous devons avoir :

$$\sum_{N=1}^{M_e} pq^{N-1} = \sum_{N=M_e}^{+\infty} pq^{N-1} = 0.5 \tag{5.7.401}$$

Mais on peut réécrire :

$$\sum_{N=1}^{M_e} pq^{N-1} = \sum_{N=M_e}^{+\infty} pq^{N-1} = pq^{M_e-1}\sum_{N=0}^{+\infty} q^N = pq^{M_e-1}\frac{1}{1-q} = pq^{M_e-1}\frac{1}{p} = q^{M_e-1} = 0.5 \tag{5.7.402}$$

Dès lors (en base 10) :

$$\log\left(q^{M_e-1}\right) = (M_e-1)\log(q) = \log(0.5) \tag{5.7.403}$$

Enfin, en nous basant sur notre définition de la médiane, nous obtenons :

$$M_e = \frac{\log(0.5)}{\log(q)} + 1 \tag{5.7.404}$$

Maintenant, déterminons la fonction cumulative de la loi géométrique. Nous partons de :

$$\mathcal{G}(N) = pq^{N-1} \tag{5.7.405}$$

Ensuite, nous avons par définition de la probabilité cumulative, la probabilité de N réussites lors des premiers essais donnée par :

$$P(X \leq N) = 1 - \sum_{j=N+1}^{+\infty} pq^{j-1} = 1 - p\sum_{j=N+1}^{+\infty} q^{j-1} \tag{5.7.406}$$

avec N étant évidemment un entier de valeurs $0, 1, 2, \ldots$

Nous écrivons

$$j - 1 = n + k \Rightarrow k = n - j + 1 \tag{5.7.407}$$

Nous avons alors pour le function de probabilité cumulée :

$$\begin{aligned} P(X \leq N) &= 1 - p\sum_{k=0}^{+\infty} q^{N+k} = 1 - p\sum_{k=0}^{+\infty} q^N q^k = 1 - pq^N\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 - pq^N\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= 1 - pq^N\frac{1}{1-q} = 1 - (1-q)q^N\frac{1}{1-q} = 1 - q^N \end{aligned} \tag{5.7.408}$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Vous essayez, tard dans la nuit et dans le noir, d'ouvrir une serrure avec un trousseau comportant cinq clés, sans faire attention, car vous êtes un peu fatigué (ou un peu éméché ...), vous allez essayer chaque clé. Sachant qu'une seule clé fonctionnera, quelle est la probabilité d'utiliser la bonne clé au N-essai ?

La solution est :

$$\mathcal{G}(N) = pq^{N-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{N-1} \tag{5.7.409}$$

Tracé de la fonction de densité et de la fonction de distribution cumulative pour la loi géométrique avec paramètre $p = 0.5$:

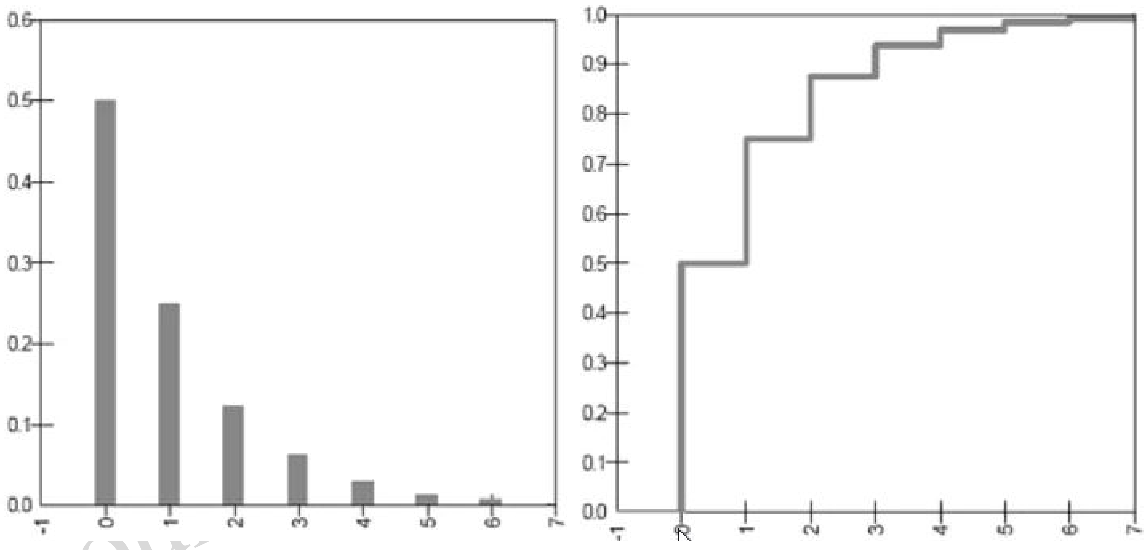


FIG. 5.120 – **Loi géométrique $\mathcal{G}$ (fonction de densité et de distribution cumulative)**

5.7.6.4 Distribution Binomiale

Revenons maintenant à notre épreuve de Bernoulli. Plus généralement, tout N-uplet particulier formé de k succès et de $N-k$ échecs aura pour probabilité (dans le cadre d'un tirage avec remise ou sans remise si la population est grande en première approximation...) :

$$P(N,k) = p^k(1-p)^{N-k} = p^k q^{N-k} \tag{5.7.410}$$

d'être tiré (ou d'apparaître) quel que soit l'ordre d'apparition des échecs et réussites (le lecteur aura peut-être remarqué qu'il s'agit d'une généralisation de la loi géométrique, il suffit de poser $k=1$ pour retrouver la loi géométrique).

Mais, nous savons que la combinatoire permet de déterminer le nombre de N-uplets de ce type (le nombre de manières d'ordonner les apparitions d'échecs et de réussites). Le nombre d'arrangements possibles étant, nous l'avons démontré (voir section de Probabilités page 521),

donné par le coefficient binomial (notation - pour rappel - non conforme dans ce livre à la norme ISO 31-11) :

$$C_k^N = \frac{N!}{k!(N-k)!} \quad (5.7.411)$$

Donc comme la probabilité d'obtenir une série de k succès et $N-k$ échecs particuliers est toujours identique (quel que soit l'ordre) alors il suffit de multiplier la probabilité d'une série particulière par la combinatoire (ceci étant équivalent à faire une somme) :

$$P(N,k) = C_k^N P = \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} \quad (5.7.412)$$

pour avoir la probabilité totale d'obtenir une quelconque de ces séries possibles (puisque chacune est possible).

Remarque

Cela équivaut à l'étude d'un tirage avec remise (voir section de Probabilités page 521) simple avec contrainte sur l'ordre ou à l'étude d'une série de succès ou d'échecs. Nous utiliserons cette relation dans le cadre de la théorie des files d'attentes ou en fiabilité (voir section de Génie Industriel page ??). Il faut noter que dans le cas de grandes populations, même si le tirage n'est pas avec remise il peut être considéré comme tel...

écrite autrement ceci donne la "distribution Binomiale" (ou "loi Binomiale") connue aussi sous la forme de la fonction de distribution suivante :

$$\mathcal{B}(N,k) = C_k^N p^k(1-p)^{N-k} = C_k^N p^k q^{N-k} = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (5.7.413)$$

et parfois notée par $\beta(n,p)$ avec n minuscule ou N majuscule (ce n'est pas vraiment imporant) et peut être calculée dans la version française de Microsoft Excel 11.8346 à l'aide de la fonction `LOI.BINOMIALE( )`.

Nous disons parfois que la loi Binomiale est non exhaustive car la taille de la population initiale n'est pas apparente dans l'expression de la loi.

Remarque

La distribution binomiale est nommée "distribution binomiale symétrique" lorsque $p = 0.5$.

En cours de traduction

✍**Exemples :**

E1. Nous souhaitons tester l'alternateur d'un groupe électrogène. La probabilité de défaillance à la sollicitation de ce matériel est estimée à 1 défaillance pour $1,000$ démarrages.

Nous décidons d'effectuer un test de 100 démarrages. La probabilité d'observer 1 panne au cours de ce test est de :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(N=100,k=1)=C_k^N p^k(1-p)^{N-k}&=\frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}\\&=\frac{100!}{1!(100-1)!}\left(\frac{1}{1000}\right)^1\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{99}\cong 9\%\end{aligned}\tag{5.7.414}$$

E2. Peut-être vous souvenez-vous de l'erreur du procureur que nous avons introduite à la page 476. Revenons à l'exemple lié à l'échantillon d'ADN sur le lieu du crime. Maintenant que nous avons introduit la distribution binomiale, nous pouvons calculer la probabilité d'obtenir au moins une correspondance parmi les enregistrements :

$$\mathcal{B}(N=20000,k=1)=C_k^N p^k(1-p)^{N-k}=\frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}\cong\cong 27.07\%\tag{5.7.415}$$

Cette preuve est donc à elle seule un résultat de hackage de données peu convaincant. Si le coupable se trouvait dans la base de données, lui et d'autres individus seraient aussi détectés comme coupables probables ; dans un cas comme dans l'autre, il serait fallacieux d'ignorer le nombre d'enregistrements recherchés lors de l'évaluation des preuves. Les "correspondances à froid" comme celui-ci sur les banques de données ADN doivent maintenant être présentées avec soin comme preuves dans les procès.

Nous avons bien évidemment pour la fonction de répartition (très utile dans la pratique comme le contrôle de lots de fournisseurs ou la fiabilité comme nous le verrons dans la section de Génie Industriel page **??** !) :

$$\sum_{k=0}^{N} C_k^N p^k(1-p)^{N-k}=1\tag{5.7.416}$$

Effectivement, nous avons démontré dans la section de Calcul Algébrique (page 1347) le "théorème binomial" :

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k}=1\tag{5.7.417}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{N} C_k^N p^k(1-p)^{N-k}=(p+(1-p))^N=1^N=1\tag{5.7.418}$$

Il vaut mieux utiliser Microsoft Excel 11.8346 (ou tout autre logiciel largement répandu) pour ne pas s'embêter à calculer ce genre de relations en utilisant la fonction `CRITERE.LOI.BINOMIALE()` dans la version française.

En cours ... anglais

L'espérance de $\mathcal{B}(N,k)$ est alors donnée par :

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{N}p_ik=\sum_{k=0}^{N}P(X=k)k=\sum_{k=0}^{N}C_k^Np^k(1-p)^{N-k}k=\sum_{k=1}^{N}C_k^Np^k(1-p)^{N-k}k \tag{5.7.419}$$

Mais comme nous avons :

$$C_k^N=\frac{N}{k}C_{k-1}^{N-1}\Leftrightarrow kC_k^N=NC_{k-1}^{N-1} \tag{5.7.420}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{N}C_k^Np^k(1-p)^{N-k}=N\sum_{k=1}^{N}C_{k-1}^{N-1}p^k(1-p)^{N-k}\\&=Np\sum_{k=1}^{N}C_{k-1}^{N-1}p^{k-1}(1-p)^{(N-1)-(k-1)}=Np\sum_{k=0}^{N-1}C_k^{N-1}p^k(1-p)^{(N-1)-k}\\&=Np(p+(1-p))^{N-1}=Np\end{aligned} \tag{5.7.421}$$

donne le nombre moyen de fois que l'on obtiendra l'issue souhaitée de probabilité p après N essais.

L'espérance de la loi binomiale est aussi parfois notée dans la littérature spécialisée sous la forme suivante si r est le nombre potentiel d'issues attendues possibles dans une population de taille n :

$$\mathrm{E}(X)=Np=N\frac{r}{n} \tag{5.7.422}$$

Avant de calculer la variance, introduisons la relation suivante :

$$\sum_{s=0}^{N-1}s\frac{(N-1)!}{s!(N-1-s)!}p^sq^{N-1-s}=(N-1)p \tag{5.7.423}$$

En effet, en utilisant les développements précédents :

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{N-1}s\frac{(N-1)!}{s!(N-1-s)!}p^sq^{N-1-s}=\sum_{s=0}^{N-1}s\frac{(N-1)!}{s(s-1)!(N-1-s)!}p^sq^{N-1-s}\\&=\sum_{s=1}^{N-1}\frac{(N-1)!}{(s-1)!(N-1-s)!}p^sq^{N-1-s}=(N-1)\sum_{s=1}^{N-1}\frac{(N-2)!}{(s-1)!(N-1-s)!}p^sq^{N-1-s}\\&=(N-1)\sum_{j=0}^{N-2}\frac{(N-2)!}{j!(N-2-j)!}p^{j+1}q^{N-2-j}=(N-1)p\sum_{j=0}^{N-2}C_j^{N-2}p^jq^{N-2-j}\\&=(N-1)p\sum_{j=0}^{N-2}C_j^{N-2}p^jq^{N-2-j}\end{aligned} \tag{5.7.424}$$

On reconnaît dans la dernière égalité la fonction de distribution cumulative égale à 1. Par conséquent :

$$(N-1)p\sum_{j=0}^{N-2}C_j^{N-2}p^jq^{N-2-j}=(N-1)p\cdot 1=(N-1)p \tag{5.7.425}$$

En cours de traduction de l'anglais

Commençons maintenant le (long) calcul de la variance de la loi binomiale dans lequel nous allons utiliser les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\text{V}(k) &= \sum_{k=0}^{N} p_i(k-\mu)^2 = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k}(k-Np)^2 = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k}(k-\mu)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \mu^2 \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} - \sum_{k=0}^{N} 2k\mu \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} + \mu^2 \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} - 2\mu \sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} + \mu^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{N} C_k^N p^k q^{N-k}}_{=1} - 2\mu \underbrace{\sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k}}_{=\mu=Np} \\
&= \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} + \mu^2 - 2\mu^2 = \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k q^{N-k} - \mu^2 \\
&\underset{s=k-1}{=} -\mu^2 + N\sum_{s=0}^{N-1}(s+1)\frac{(N-1)!}{s!(N-1-s)!}p^s q^{N-(s+1)} \\
&= -\mu^2 + Np\sum_{s=0}^{N-1}(s+1)\frac{(N-1)!}{s!(N-1-s)!}p^s q^{N-s-1} \\
&= -\mu^2 + Np\sum_{s=0}^{N-1} s\frac{(N-1)!}{s!(N-1-s)!}p^s q^{(N-1)-s} + Np\sum_{s=0}^{N-1} s\frac{(N-1)!}{s!((N-1-s)!}p^s q^{(N-1)-s} \\
&= -\mu^2 + Np\sum_{s=0}^{N-1} sC_s^{N-1}p^s q^{(N-1)-s} + Np\sum_{s=0}^{N-1} sC_s^{N-1}p^s q^{(N-1)-s} \\
&= -\mu^2 + Np(N-1)p + Np\sum_{s=0}^{N-1} sC_s^{N-1}p^s q^{(N-1)-s} \\
&= -\mu^2 + Np^2(N-1) + Np\cdot 1 = -\mu^2 + Np^2(N-1) + Np \\
&= -\mu^2 + N^2p^2 - Np^2 + Np = -\mu^2 + \mu^2 - Np^2 + Np = Np(1-p) \\
&= Npq
\end{aligned} \tag{5.7.426}$$

Finalement :

$$\text{V}(k) = \sigma^2 = Np(1-p) = Npq \tag{5.7.427}$$

L'écart type de la distribution binomiale est parfois noté dans la littérature spécialisée de la manière suivante si r est le nombre potentiel de résultats attendus dans une population de taille n et que s est le nombre non attendu :

$$\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{N\frac{r}{n}\frac{s}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt{Nrs} \tag{5.7.428}$$

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et respectivement de répartition de la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$:

En cours de traduction de l'anglais

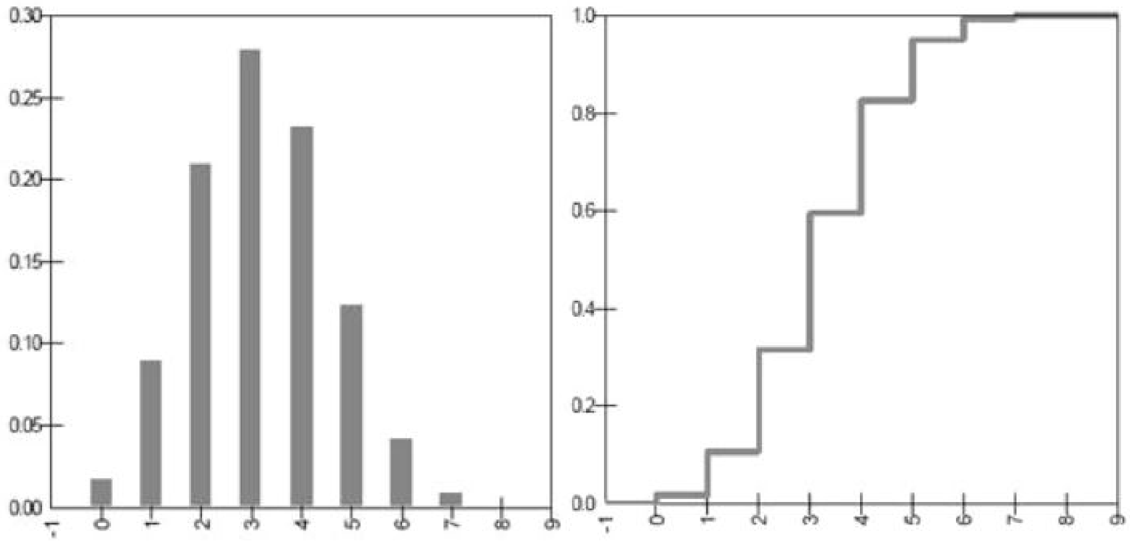


FIG. 5.121 – Loi binomiale $\mathcal{B}$ (fonction de densité et de distribution cumulative)

Il pourrait être utile de noter que certains employés dans les entreprises (en particulier les médecins spécialisés dans l'analyse de la survie - les études cliniques - comme nous le verrons plus tard) normalisent le calcul de la moyenne et de l'écart type par rapport à l'unité de N. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\frac{k}{N}\right) &= \frac{Np}{N} = p \\ \mathrm{V}\left(\frac{k}{N}\right) &= \frac{1}{N^2}\mathrm{V}(X) = \frac{1}{N^2}Npq = \frac{1}{N}p(1-p) \Leftrightarrow \sigma_{k/N} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \end{aligned} \tag{5.7.429}$$

En c… de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Sur un échantillon de 100 travailleurs, 25% sont en retard au moins une fois par semaine. L'espérance du nombre de retard est alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(k) &= Np = 100 \cdot 0.25 = 25 \\ \sigma_k &= \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.25(1-0.25)} \cong 4.33 \end{aligned} \tag{5.7.430}$$

Rapporté à l'unité de N, cela nous donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\frac{k}{N}\right) &= p = 0.25 \\ \sigma_{k/N} &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = 0.0433 \end{aligned} \tag{5.7.431}$$

Calculons maintenant la valeur modale. Parce que la fonction est discrète, nous ne pouvons pas utiliser la dérivée bien évidemment. Donc, nous allons utiliser une astuce. Nous calculons le ratio :

$$\frac{\mathcal{B}(N,k)}{\mathcal{B}(N,k+1)} \tag{5.7.432}$$

et nous vérifions que ce rapport est > 1 pour chaque $k < k^*$ et ≤ 1 pour chaque $k \geq k^*$, pour un entier entier k^* c'est la valeur de k correspondant à la valeur modale.

Soit $a_k = P(X = k)$. Nous avons :

$$a_k = C_k^N p^k q^{N-k} \qquad a_{k+1} = C_{k+1}^N p^{k+1} q^{N-k-1} \tag{5.7.433}$$

Nous calculons le ratio $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$. Notez que :

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{k+1}^N p^{k+1} q^{N-k-1}}{C_k^N p^k q^{N-k}} = \frac{\dfrac{N!}{(k+1)!(N-(k+1))!}}{\dfrac{N!}{k!(N-k)!}} \frac{p^{k+1} q^{N-k-1}}{p^k q^{N-k}} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p} \tag{5.7.434}$$

L'important maintenant est d'analyser :

$$\frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p} = \frac{np-kp}{k-kp+1-p} \tag{5.7.435}$$

en fonction de la valeur de k. Tout d'abord, nous pouvons voir que ce rapport est égal à 1 et nous devons donc deux valeurs modales si :

$$\frac{np-kp}{k-kp+1-p} = 1 \Leftrightarrow np-kp = k-kp+1-p \tag{5.7.436}$$

C'est-à-dire si $k = np+p-1 = p(n+1)-1$. Cela peut être considéré comme le point d'intérêt limite. Mais n'oubliez pas que nous recherchons le k tel que le rapport soit inférieur à 1. Nous essayons donc deux valeurs :

$$\begin{aligned} k &= [p(n+1)-1]+1 \\ k &= [p(n+1)-1]-1 \end{aligned} \tag{5.7.437}$$

En injectant cela dans notre ratio, nous voyons que :

$$k = [p(n+1)-1]+1 = k^* = M_0 \tag{5.7.438}$$

Est la valeur que nous recherchions ! Enfin, il existe deux situations possibles pour les modes. Une valeur modale unique et une double valeur modale.

Comme nous le savons, la valeur médiane est la valeur de X telle que nous avons :

$$\sum_{k=0}^{X} C_k^N p^k (1-p)^{N-k} = 0.5 \tag{5.7.439}$$

Mais nous n'avons pas encore trouvé de preuve facile pour déterminer M_e dans le cas général de la loi binomiale.

Pour clore concernant avec la loi binomiale, nous allons développer un résultat qui nous sera indispensable pour construire le test de données appariées de McNemar d'un tableau (carré) de contingence (et comme il est carré il est in extenso dichotomique) que nous étudierons dans le section de Méthodes Numériques (page 1244).

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons besoin pour ce test de calculer la covariance de deux variables aléatoires binomiales appariées (raison pour laquelle la covariance est non nulle) :

$$\text{cov}(n_i, n_j) = \text{E}(n_i n_j) - \text{E}(n_i)(n_j) \tag{5.7.440}$$

Comme elles sont appariées, cela signifie que :

$$\begin{aligned} n_i + n_j &= n \\ p_i &= 1 - p_j \\ 1 - p_i &= p_j \end{aligned} \tag{5.7.441}$$

et donc :

$$\text{cov}(n_i, n_j) = \text{E}(n_i n_j) - \text{E}(n_i)(n_j) = \text{E}(n_i n_j) - (np_i)(np_j) = \text{E}(n_i n_j) - n^2 p_j(1 - p_j) \tag{5.7.442}$$

Maintenant, vient la difficulté qui est de calculer $\text{E}(n_i n_j)$. Pour calculer ce terme il n'existe pas à notre connaissance d'autres méthodes que de chercher la loi du couple (parfois on peut contourner cela). Dans le cas présent il s'agit d'une loi multinomiale (plus précisément : trinomiale) qu'il est d'usage d'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}(n_i, n_j, p_i, p_j, 1 - p_i - p_j) = \frac{n!}{n_i! n_j! (n - n_i - n_j)!} p_i^{n_i} p_j^{n_j} (1 - p_i - p_j)^{n - n_i - n_j} \tag{5.7.443}$$

que nous noterons temporairement pour la suite sous la forme suivante afin de condenser l'écriture :

$$\mathcal{M}(n, k, l, p, q, r) = \frac{n!}{k! l! (n - k - l)!} p^k q^l r^{n-k-l} = \frac{n!}{k! l! (n - k - l)!} p^k q^l (1 - p - q)^{n-k-l} \tag{5.7.444}$$

Nous avons donc une loi trinomiale car nous cherchons le nombre de fois d'avoir l'événement k, l'événement l et ni l'un ni l'autre (donc le reste du temps).

En cours de traduction de l'anglais

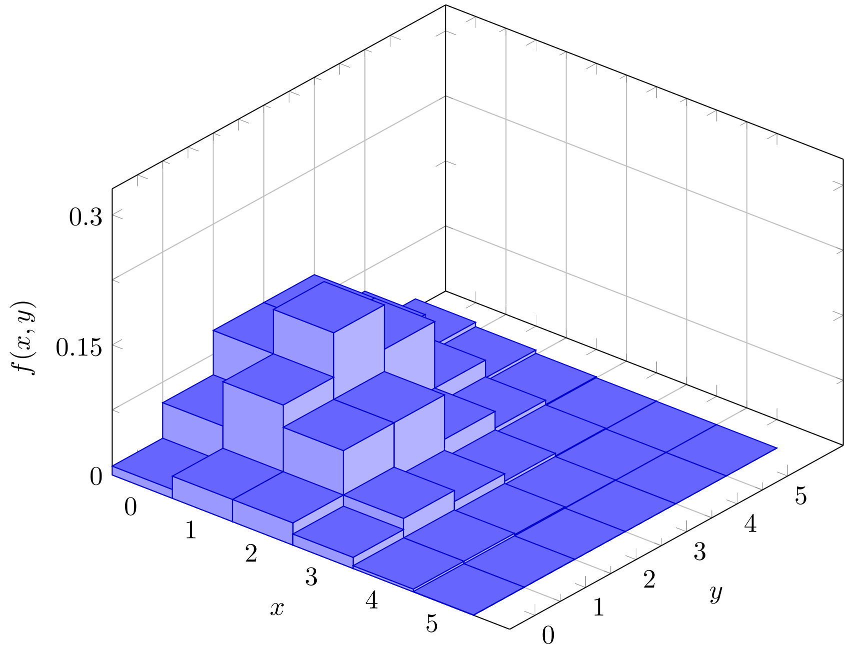


FIG. 5.122 – **Distribution trinomoiale avec $p = 1/5, q = 2/5$ et $n = 5$**

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(kl) &= \sum_{k,l} klP(kl) = \sum_{k,l} \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}p^k q^l r^{n-k-l} \\ &= \underbrace{0}_{k=0,l\neq 0} + \underbrace{0}_{l=0,k\neq 0} + \underbrace{0}_{k=0,l=0} + \sum_{k\geq 1,l\geq 1} kl\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}p^k q^l r^{n-k-l}\end{aligned} \quad (5.7.445)$$

Si $k \geq 1$ et $l \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} kl\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!} &= \frac{n!}{k(k-1)!l(l-1)!(n-k-l)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-1)!(l-1)!(n-k-l)!} \\ &= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-1)!(l-1)!(n-k-l)!}\end{aligned} \quad (5.7.446)$$

Maintenant utilisons cette relation dans l'espérance conjointe :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(kl) &= \sum_{k\geq 1,l\geq 1} kl\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}p^k q^l r^{n-k-l} \\ &= n(n-1)\sum_{1\leq k\leq n,1\leq l\leq n} kl\frac{(n-2)!}{k(k-1)!l(l-1)!(n-k-l)!}p^k q^l r^{n-k-l} \\ &= n(n-1)pq\sum_{1\leq k\leq n,1\leq l\leq n} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(l-1)!(n-k-l)!}p^{k-1} q^{l-1} r^{n-k-l}\end{aligned} \quad (5.7.447)$$

Considérons le cas où n vaut 2. Nous avons :

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leq k\leq n,1\leq l\leq n} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(l-1)!(n-k-l)!}p^{k-1} q^{l-1} r^{n-k-l} \\ &= \sum_{1\leq k\leq 2,1\leq l\leq 2} \frac{0!}{(k-1)!(l-1)!(2-k-l)!}p^{k-1} q^{l-1} r^{2-k-l} \\ &= \frac{0!}{(1-1)!(1-1)!(2-1-1)!}p^{1-1} q^{1-1} r^{2-1-1} = 1\end{aligned} \quad (5.7.448)$$

où la somme est réduite à un seul terme car si nous prenons par exemple $k = 2, l = 1$, nous obtenons une factorielle négative au dénominateur.

et pour n valant 3, le résultat sera aussi 1, et ainsi de suite (nous supposerons afin de simplifier... que quelques exemples numériques suffiront au lecteur pour le convaincre de la généralité de cette propriété parce que c'est vraiment très laborieux à écrire en LaTeX).

Nous avons alors :

$$\mathrm{E}(kl) = n(n-1)pq\underbrace{\sum_{1\leq k\leq n,1\leq l\leq n} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(l-1)!(n-k-l)!}p^{k-1} q^{l-1} r^{n-k-l}}_{=1} = n(n-1)pq \quad (5.7.449)$$

Donc au final :

$$\mathrm{cov}(n_i,n_j) = \mathrm{E}(n_i n_j) - n^2 p_j(1-p_j) = n(n-1)p_i p_j - n^2 p_i p_j = -np_i p_j \quad (5.7.450)$$

En cours de traduction de l' anglais

Et c'est le principal résultat dont nous aurons besoin pour l'étude du test de McNemar.

Soit X et Y des variables aléatoires binomiales indépendantes avec les paramètres (n, p) et (m, p), respectivement. Soit $Z = X + Y$. Alors la distribution de Z est donnée par :

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} (1-p)^{m-k+i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{n+m-k} \binom{m}{k-i} \\ &= p^k(1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k} \end{aligned} \quad (5.7.451)$$

La distribution binomiale est donc bien stable par addition :

$$\mathcal{B}(n,p) + \mathcal{B}(m,p) = \mathcal{B}(n+m,p) \quad (5.7.452)$$

En faisant le même développement avec des probabilités différentes et sans oublier que $p_i + p_j = 1$, nous obtenons :

$$\mathcal{B}(n,p_i) + \mathcal{B}(m,p_j) = \mathcal{B}(n+m,p_i+p_J) \quad (5.7.453)$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.5 Distribution Négative Binomiale

La loi binomiale négative s'applique dans la même situation que la loi binomiale mais elle donne la probabilité d'avoir E échecs avant la R-ème réussite quand la probabilité de succès est p (ou inversement la probabilité d'avoir R réussites avant le E-ème échec quand la probabilité d'échec est p).

Introduisons cette distribution par l'exemple. Considérons pour cela les probabilités suivantes :

$$P(\text{succès}) = 0.2 = p \qquad P(\text{échec}) = 0.8 = 1 - p = q \quad (5.7.454)$$

Imaginons que nous ayons fait 10 essais et que nous voulions nous arrêter à la troisième réussite et que le 10-ème essai est la troisième réussite ! Nous allons noter cela :

$$[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9]\ 10 \quad (5.7.455)$$

Mettons en évidence les réussites (R) et échecs (E) :

$$\begin{matrix} [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9] & 10 \\ [\mathtt{E} & \mathtt{E} & \mathtt{R} & \mathtt{E} & \mathtt{E} & \mathtt{E} & \mathtt{R} & \mathtt{E} & \mathtt{E}] & \mathtt{R} \end{matrix} \quad (5.7.456)$$

Nous avons donc 7 échecs et 3 réussites. Dans le cadre d'une expérience où les tirages sont indépendants (ou pouvant être considérés comme tel...), la probabilité que nous avions d'obtenir ce résultat particulier est alors :

$$(0.8)^7(0.2)^3 \tag{5.7.457}$$

Mais l'ordre des succès et échecs dans la partie entre crochets n'a aucune importance. Donc comme nous avons 2 succès parmi 9 dans les crochets il vient que la probabilité d'obtenir le même résultat indépendamment de l'ordre est alors en utilisant la combinatoire :

$$C_2^9(0.8)^7(0.2)^3 = \binom{9}{2}(0.8)^7(0.2)^3 \cong 0.0603 \tag{5.7.458}$$

Ce qui correspond donc à la probabilité d'avoir 7 échecs avant la 3ème réussite (ou autrement vu : 3 réussites après 10 essais). Ce qui s'écrit avec Microsoft Excel 14.0.6123 ou ultérieur en français ($7 + 3 = 10$ essais, 7 échecs dont 3 réussites) :

```
=LOI.BINOMIALE.NEG.N(7,3,0.2,0)=0.0604
```

Généralisons l'écriture antéprécédente notant k le nombre d'échecs, N le nombre total d'essais et p la probabilité d'une réussite :

$$\text{NB}(N,k,p) = C_{N-k-1}^{N-1}q^k p^{N-k} = \binom{N-k-1}{N-1} q^k p^{N-k} \tag{5.7.459}$$

Il y a cependant plusieurs écritures possibles car la relation précédente n'est pas très intuitive à mettre en pratique comme l'aura peut-être remarqué le lecteur. Ainsi, si nous notons k comme étant le nombre de succès et non le nombre d'échecs, nous avons alors (écriture la plus courante selon moi parmi d'autres équivalentes) la probabilité suivante d'avoir un $N-k$ réussites avant d'avoir un nombre k d'échecs avec un probabilité d'échec p (ou d'échecs avant d'avoir k réussites... c'est symétrique !) :

$$\text{NB}(N,k,p) = C_{N-1}^{k-1}q^{N-k}p^k = \binom{N-1}{k-1} p^k q^{N-k} \tag{5.7.460}$$

donc la comparaison avec la formulation de la loi binomiale démontrée plus haut est alors peut-être plus évidente !

Il est cependant plus courant de noter la relation précédente en faisant disparaître N car pour l'instant l'écriture n'est toujours pas très claire. Pour cela, nous notons R le nombre de réussites, E le nombre d'échecs, p la probabilité d'une réussite et il vient alors la probabilité d'avoir R réussites après E échecs (c'est beaucoup plus clair...) :

$$\text{NB}(R,E,p) = C_{E+R-1}^{E-1}q^{(E+R)-E}p^E = \binom{E+R-1}{E-1} p^E q^R \tag{5.7.461}$$

Nous trouvons aussi parfois cette dernière relations sous la forme suivante en utilisant explicitement le coefficient binomial :

$$\begin{aligned}\text{NB}(R,E,p) &= \binom{E+R-1}{E-1} q^R p^E = \frac{(E+R-1)!}{(E-1)!R!}q^R p^E = \frac{(E+R-1)!}{R!(E-1)!}q^R p^E \\ &= \binom{E+R-1}{R} q^R p^E\end{aligned} \tag{5.7.462}$$

En cours de traduction de l'anglais

La probabilité cumulée que nous ayons au moins R réussites avant le E-ème échec vient immédiatement :

$$\sum_{R=0}^{N} \binom{E+R-1}{E-1} q^R p^E \tag{5.7.463}$$

Remarque

Le nom de cette loi provient du fait que certains statisticiens utilisent une définition d'un coefficient combinatoire avec valeur négative pour l'expression de la fonction. Comme c'est une forme plutôt rare, nous ne souhaitons pas la démontrer. Il faut savoir aussi que cette loi est aussi connue sous le nom de "loi de Pascal" (au même titre que la loi géométrique...) en l'honneur de Blaise Pascal et de "loi de Pólya", en l'honneur de George Pólya.

✍**Exemples :**

E1. Un contrôle de qualité long terme nous a permis de calculer l'estimateur de proportion p des pièces non-conformes comme valant 2% à la sortie d'une ligne de production. Nous souhaiterions savoir la probabilité cumulée d'avoir 200 pièces bonnes avant que la 3ème pièce défectueuse apparaisse. Avec Microsoft Excel 14.0.6123 ou ultérieur en français il vient en utilisant la loi binomiale négative :

```
=LOI.BINOMIALE.NEG.N(200,3,0.02,1)=77.35%
```

E2. Pour comparer avec la loi binomiale, demandons-nous quelle est la probabilité cumulée de tirer 198 pièces non-défectueuses parmi 201 avec Microsoft Excel 14.0.6123 ou ultérieur en français :

```
=LOI.BINOMIALE.N(198,201,0.98,1)=76.77%
```

Nous voyons donc que la différence est faible. Au fait la différence entre les deux lois est dans la pratique quasiment toujours tellement faible que nous n'utilisons alors que la loi binomiale (mais il faut quand même être prudent !).

Comme à l'habitude, déterminons maintenant la variance et l'espérance de cette loi. Commençons par l'espérance d'avoir R réussites lors de l'apparition du E-ème échec sachant que la probabilité d'avoir un échec est p. Pour cela nous allons utiliser une astuce très simple et géniale (tout l'art était d'y penser...). Si nous reprenons notre exemple de départ :

$$\begin{matrix} [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9] & 10 \\ [\mathtt{R} & \mathtt{R} & \mathtt{E} & \mathtt{R} & \mathtt{R} & \mathtt{R} & \mathtt{E} & \mathtt{R} & \mathtt{R}] & \mathtt{E} \end{matrix} \tag{5.7.464}$$

et que nous le réécrivons sous la forme suivante :

$$\begin{matrix} [1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10] \\ [\underbrace{\mathtt{R} \quad \mathtt{R} \quad \mathtt{E}}_{=X_1} & & & \underbrace{\mathtt{R} \quad \mathtt{R} \quad \mathtt{R} \quad \mathtt{E}}_{=X_2} & & & & \underbrace{\mathtt{R} \quad \mathtt{R} \quad \mathtt{E}}_{=X_3}] \end{matrix} \tag{5.7.465}$$

Nous remarquons alors que la troisième réussite R de la première écriture peut être décomposée en la somme de trois variables aléatoires géométriques telle que :

$$R = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad (5.7.466)$$

Avec dans le cas du présent exemple particulier $n = 3$ correspondant au fait à $E = 3$. Donc en toute généralité la somme de n variables aléatoires géométriques donne toujours une loi binomiale négative si la probabilité p est égale pour chaque variable géométrique ! Bref... comme nous avons démontré l'expression de l'espérance et la variance de la loi Géométrique comme étant (donnant donc l'espérance du rang du premier échec) :

$$\text{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} \qquad (5.7.467)$$

puisque les variables aléatoires sont de même paramètres et indépendantes il vient alors pour la loi binomiale négative l'esprance du rang d'avoir le E-ième échec :

$$\text{E}(X) = \text{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \text{E}(X_1) + \text{E}(X_2) + \ldots \text{E}(X_n) = n\text{E}(X) = n\frac{1}{p} = E\frac{1}{p} \qquad (5.7.468)$$

Et alors pour la variance de la loi binomiale négative :

$$\text{V}(X) = \text{V}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \text{V}(X_1) + \text{V}(X_2) + \ldots \text{V}(X_n) = n\text{V}(X) = n\frac{1-p}{p^2} = E\frac{q}{p^2} \qquad (5.7.469)$$

Donc l'espérance et la variance du rang (correspondant donc bien évidemment au nombre d'essais N ou autrement vu : à l'espérance du nombre de réussites en faisant la simple soustraction $X - E$) d'avoir le E-ième échec est donc pour résumer :

$$\begin{aligned} \text{E}(X) &= \frac{E}{p} \\ \text{V}(X) &= E\frac{1-p}{p^2} \end{aligned} \qquad (5.7.470)$$

Ainsi, en posant $E = 1$, nous retombons sur l'espérance et la variance de la loi géométrique.

Maintenant, notons Y la variable aléatoire représentant le nombre d'essais avant d'avoir la R-ième réussite. Nous avons alors les expressions suivantes de la variance et de l'espérance qui sont très courantes dans la littérature (il s'agit des expressions de l'espérance et de la variance telles que nous pouvons les trouver pour la loi binomiale négative sur Wikipédia par exemple)

$$\begin{aligned} \text{E}(Y) &= \text{E}(X-1) = \text{E}(X) - \text{E}(1) = \text{E}(X) - 1 = \frac{E}{p} - 1 = \frac{E-p}{p} = \frac{E(1-p)}{p} \\ \text{V}(Y) &= \text{V}(X-1) = \text{V}(X) + \text{V}(1) = \text{V}(X) = \frac{E(1-p)}{p^2} \end{aligned} \qquad (5.7.471)$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Quel est le nombre de tirages espérés auquel nous pouvons nous attendre lorsque nous tomberons sur la troisième pièce non-conforme, sachant que la probabilité d'une pièce non-conforme est de 2% ?

$$\text{E}(X)=\frac{E}{p}=\frac{3}{2\%}=150 \qquad (5.7.472)$$

et pour la variance :

$$\sigma=\sqrt{E\frac{q}{p^2}}=\sqrt{3\frac{(1-2\%)}{(2\%)^2}}=85.732 \qquad (5.7.473)$$

Ci-dessous le lecteur trouvera comme à l'habitude un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la fonction binomiale négative de paramètres $\text{NB}(N,k,p)=P(N,3,0.6)$ basé sur l'exemple du début mais avec comme seule différence d'avoir pris comme probabilité de réussite de 60% au lieu de 20%.

Ainsi, il y a 21.6% de probabilité d'avoir la 3ème réussite au 3ème essai successif (donc 0 essai de plus que le nombre de réussites), 25.92% de probabilité d'avoir la 3ème réussite au 4ème essai successif (donc 1 essai de plus que le nombre de réussites), 20.7% de probabilité d'avoir la 3ème réussite au 5ème essai successif (donc 2 essais de plus que le nombre de réussites) et ainsi de suite... :

En cours de traduction de l'anglais

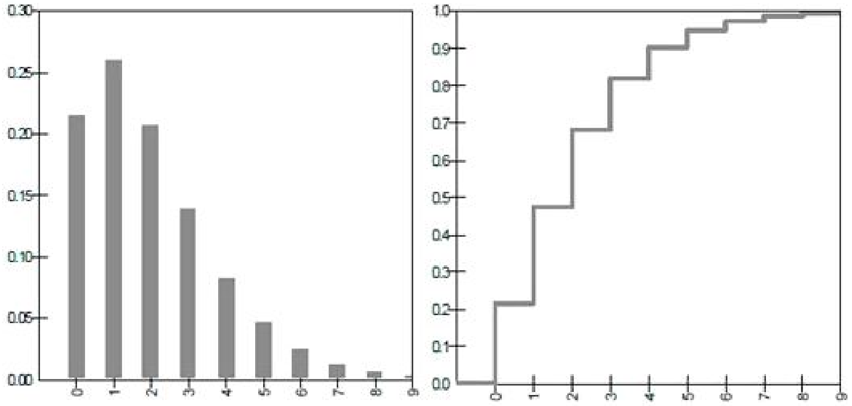


FIG. 5.123 – Loi binomiale négative NB (fonction de densité et de distribution cumulative)

Les distributions ci-dessus sont tronquées à 9 (correspondant donc à 12 essais) mais continue théoriquement à l'infini. Ce qui différencie particulièrement les lois binomiale et géométrique de la loi binomiale négative sont les queues de la distribution.

La distribution binomiale négative a une place importante dans une technique de régression spéciale que nous verrons dans la section de Méthodes Numériques **??**.

5.7.6.6 Distribution Hypergéométrique

Nous considérons pour approcher cette fonction un exemple simple (mais guère intéressant dans la pratique) qui est celui d'une urne contenant n boules dont m sont noires et les autres m' blanches (pour plusieurs exemples concrets utilisés dans l'industrie se reporter à la section de Génie Industriel page **??**). Nous tirons successivement, et sans les remettre dans l'urne, p boules. La question est de trouver la probabilité que parmi ces p boules, il y en ait k qui soient noires (dans cet énoncé l'ordre du tirage ne nous intéresse donc pas !).

Nous parlons souvent de "tirage exhaustif" avec la loi hypergéométrique car contrairement à la loi binomiale, la taille du lot qui sert de base au tirage va apparaître dans la loi.

Remarque

Cela équivaut donc à l'étude non ordonnée d'un tirage sans remise (voir section de Probabilités page 521) avec contrainte sur les occurrences appelé parfois "tirage simultané". Nous utiliserons souvent la distribution hypergéométrique dans le domaine de la qualité ou de la fiabilité où les boules noires sont associées à des éléments avec défauts et les blanches à des éléments sans défauts.

Les p boules peuvent être choisies parmi les n boules de C_p^n façons (représentant donc le nombre de tirages différents possibles) avec pour rappel (voir section de Probabilités page 521) :

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (5.7.474)$$

Les k boules noires peuvent être choisies parmi les m noires de C_k^m façons. Les $p-k$ boules blanches peuvent être elles choisies de C_{p-k}^{n-m} façons. Il y a donc $C_k^m C_{p-k}^{n-m}$ tirages qui donnent k boules noires et $p-k$ boules blanches.

La probabilité recherchée vaut donc (nous en verrons une autre formulation possible dans la section de Génie Industriel page **??**) :

$$\mathcal{H}(n,p,m,k) = \frac{C_k^m C_{p-k}^{n-m}}{C_p^n} = \frac{\dfrac{m!}{k!(m-k)!}\dfrac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}} \quad (5.7.475)$$

?? et est dite suivre une "distribution Hypergéométrique" (ou "loi Hypergéométrique") et peut être obtenue heureusement de manière directe dans Microsoft Excel 11.8346 avec la fonction `LOI.HYPERGEOMETRIQUE()`.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Nous souhaitons mettre en production un petit développement informatique de $10'000$ lignes de code (n). Le retour d'expérience montre que la probabilité de défaillance est de 1 bug pour $1'000$ lignes de code (soit 0.1% de $10'000$ lignes) ce qui correspond à valeur de m.

Nous testons environ 50% des fonctionnalités du logiciel au hasard avant l'envoi au client (soit l'équivalent de $5'000$ lignes de code correspondant à p). La probabilité d'observer 5 bugs (k) est avec Microsoft Excel 11.8346 :

```
LOI.HYPERGEOMETRIQUE(k,p,m,n)=
LOI.HYPERGEOMETRIQUE(5,5000,1%*10000,10000)=24.62%
```

E2. Dans une petite production unique d'un lot de $1'000$ pièces nous savons que 30% en moyenne sont mauvaises à cause de la complexité des pièces par retour d'expérience d'une fabrication précédente similaire. Nous savons qu'un client va tirer 20 pièces au hasard pour décider d'accepter ou de rejeter le lot. Il ne rejettera pas le lot s'il trouve zéro pièce défectueuse parmi ces 20. Quelle est la probabilité d'en avoir exactement 0 de défectueuse ?

```
=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(0,20,300,1000)=0.073%
```

et comme on exige un tirage nul, le calcul de la loi hypergéométrique se simplifie en :

$$\frac{700}{1000}\frac{699}{999}\frac{698}{998}\frac{697}{997}\cdots\frac{681}{981}=0.073\% \qquad (5.7.476)$$

Il n'est pas interdit de faire le calcul direct de l'espérance et de la variance de la distribution hypergéométrique mais le lecteur pourra sans trop de peine imaginer que ce calcul va être... relativement indigeste. Alors nous pouvons utiliser une méthode indirecte qui de plus est intéressante !

D'abord le lecteur aura peut-être, même certainement, remarqué qu'au fait l'expérience de la loi hypergéométrique est une série d'essais de Bernoulli (sans remise bien entendu !).

Alors, nous allons tricher en utilisant dans un premier temps la propriété de linéarité de l'espérance. Définissons pour cela une nouvelle variable correspondant implicitement au fait à l'expérience de la distribution hypergéométrique (k essais de Bernoulli à la suite !) :

$$X=\sum_{i=1}^{k}X_i \qquad (5.7.477)$$

où X_i représente la réussite d'obtenir au i-ème tirage une boule noire (soit 0 ou 1). Or, nous savons que pour tout i la variable aléatoire X_i suit une distribution de Bernoulli pour laquelle nous avons démontré lors de notre étude de la loi de Bernoulli que $\mathrm{E}(X_i)=p$.

Dès lors, de par la propriété de linéarité de l'espérance nous avons (attention ici p n'est plus le

En cours de rédaction

nombre de boules mais la probabilité associée à une issue attendue !) :

$$\text{E}(X)=\text{E}\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=kp \tag{5.7.478}$$

Dans l'essai de Bernoulli, p est donc la probabilité d'obtenir l'élément recherché (pour rappel...). Dans la loi hypergéométrique ce qui nous intéresse est la probabilité d'avoir une boule noire (qui sont en quantité m, avec donc m' boules blanches) par rapport à la quantité totale de boules n. Et le rapport nous donne évidemment cette probabilité. Ainsi, nous avons :

$$\mu=\text{E}(X)=kp=k\frac{m}{m+m'}=k\frac{m}{n} \tag{5.7.479}$$

où k est le nombre de tirages (attention à ne pas confondre avec la notation de l'énoncé initial où il était noté par la variable p !). Cette espérance donne donc le nombre moyen de boules noires lors d'un tirage de k boules parmi n, dont m sont connues comme étant noires. Le lecteur aura remarqué que l'espérance de la loi hypergéométrique est donc la même que la loi binomiale !

Pour déterminer la variance, nous allons utiliser la variance de la loi de Bernoulli et la relation suivante démontrée lors de l'introduction de l'espérance et de la covariance au début de ce chapitre :

$$\text{V}(X+Y)=\text{V}(X)+\text{V}(Y)+2\text{cov}(X,Y)+\text{V}(X)+\text{V}(Y)+2(\text{E}(XY)-\text{E}(X)\text{E}(Y)) \tag{5.7.480}$$

Dons en rappelant que nous avons $X=\sum_{i=1}^{k}X_i$, il vient :

$$\text{V}(X)=\text{V}\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\text{V}(X_i)+2\sum_{i=1\leq 1<j\leq n}^{k}(\text{E}(X_iX_j)-\text{E}(X_i)\text{E}(X_j)) \tag{5.7.481}$$

Or, pour la loi de Bernoulli, nous avons :

$$\text{V}(X)=pq=\frac{m}{m+m'}\frac{m'}{m+m'}=\frac{mm'}{(m+m')^2}=\frac{mm'}{n^2} \tag{5.7.482}$$

Alors nous avons déjà :

$$\text{V}\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right)=k\frac{mm'}{(m+m')^2}=k\frac{mm'}{n^2} \tag{5.7.483}$$

Ensuite, nous avons facilement :

$$\text{E}(X_i)\text{E}(X_j)=\frac{m}{m'+m}\frac{m}{m'+m}=\left(\frac{m}{m'+m}\right)^2 \tag{5.7.484}$$

Le calcul de $\text{E}(X_iX_j)$ nécessite lui une bonne compréhension des probabilités (ce sera un bon rappel !).

L'espérance $\text{E}(X_iX_j)$ est donnée (implicitement) par la somme pondérée des probabilités que deux événements aient lieu en même temps comme nous le savons. Or, nos événements sont

En cours de traduction de l'anglais

binaires : soit c'est une boule noire (1) soit c'est une boule blanche (0). Donc tous les termes de la somme n'ayant pas deux boules noires consécutivement seront nuls !

Le problème est alors de calculer la probabilité d'avoir deux boules noires consécutives et celle-ci s'écrit donc :

$$\begin{aligned}P(X_iX_j=1)&=P((X_i=1)\cap(X_j=1))=P(X_i=1)P_{X_i=1}P(X_j=1)\\&=\frac{m}{m'+m}\frac{m-1}{(m'+m)-1}\end{aligned} \quad (5.7.485)$$

Donc nous avons finalement :

$$\mathrm{E}(X_iX_j)=\frac{m}{m'+m}\frac{m-1}{(m'+m)-1} \quad (5.7.486)$$

Soit :

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_i,X_j)=\mathrm{E}(X_iX_j)-\mathrm{E}(X_i)(X_j)&=\frac{m}{m'+m}\frac{m-1}{(m'+m)-1}-\left(\frac{m}{m'+m}\right)^2\\&=\frac{-mm'}{(m'+m)^2(m'+m-1)}\end{aligned} \quad (5.7.487)$$

En cours de traduction de l'anglais

Finalement (en utilisant le résultat de la série de Gauss vu dans la section des Séquences et Séries page 1645) :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{V}(X_i)+2\sum_{i=1\leq 1<j\leq n}^{k}(\mathrm{E}(X_iX_j)-\mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j))\\&=k\frac{mm'}{(m'+m)^2}+2\frac{-mm'}{(m'+m)^2(m'+m-1)}\sum_{i=1\leq 1<j\leq n}^{k}1\\&=k\frac{mm'}{(m'+m)^2}+2\frac{-mm'}{(m'+m)^2(m'+m-1)}\frac{(k-1)k}{2}\\&=\frac{kmm'(m'+m-1)-mm'k(k-1)}{(m'+m)^2(m'+m-1)}=\frac{kmm'(m'+m-1-k+1)}{(m'+m)^2(m'+m-1)}\\&=\frac{kmm'(m'+m-k)}{(m'+m)^2(m'+m-1)}=k\frac{m}{m'+m}\frac{m'}{m'+m}\frac{m'+m-k}{m'+m-1}\\&=kpq\frac{m'+m-k}{m'+m-1}=kpq\frac{n-k}{n-1}\end{aligned} \quad (5.7.488)$$

où nous avons utilisé le fait que :

$$\sum_{i<j}\mathrm{cov}(X_i,X_j) \quad (5.7.489)$$

est composé de :

$$C_2^k=\binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2} \quad (5.7.490)$$

termes puisqu'il correspond au nombre de façons qu'il y a de choisir le couple (i,j) avec $i<j$.

Donc finalement :

$$\mathrm{V}(X) = kpq\frac{n-k}{n-1} \tag{5.7.491}$$

Nous pouvons écrire :

$$\sigma = \sqrt{kpq}\sqrt{\frac{n-k}{n-1}} \tag{5.7.492}$$

Dans la littérature spécialisée, nous retrouvons souvent la variance écrite sous la forme suivante en notant comme pour lors de notre étude de la loi Normale l'événement attendu r et l'événement non-attendu s :

$$\mathrm{V}(X) = kpq\frac{n-k}{n-1} = k\frac{r}{n}\frac{s}{n}\frac{n-k}{n-1} = \frac{krs(n-k)}{n^2(n-1)} = \frac{klrs}{n^2(n-1)} \tag{5.7.493}$$

avec donc $l = n - k$. Cette dernière forme d'écriture nous sera très utile dans la section de Méthodes Numériques lors de notre étude du test de Haenzel-Mantel (page 1263).

De plus nous voyons que dans :

$$\sigma = \sqrt{kpq}\sqrt{\frac{n-k}{n-1}} \tag{5.7.494}$$

il y a l'écart-type de la distribution binomiale, à la différence d'un facteur qui est noté :

$$\text{fpc} = \sqrt{\frac{n-k}{n-1}} \tag{5.7.495}$$

que l'on retrouve assez souvent en statistiques et qui est appelé "facteur de correction de population". Certains praticiens on tendance à faire l'approximation suivante quand n est assez grand :

$$\text{fpc} = \sqrt{\frac{n-k}{n-1}} \cong \sqrt{\frac{n-k}{n}} = \sqrt{1-\frac{k}{n}} \tag{5.7.496}$$

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la distribution Hypergéométrique de paramètres $(n, p, m, k) = (10, 6, 5, k)$:

En cours de traduction de l' anglais

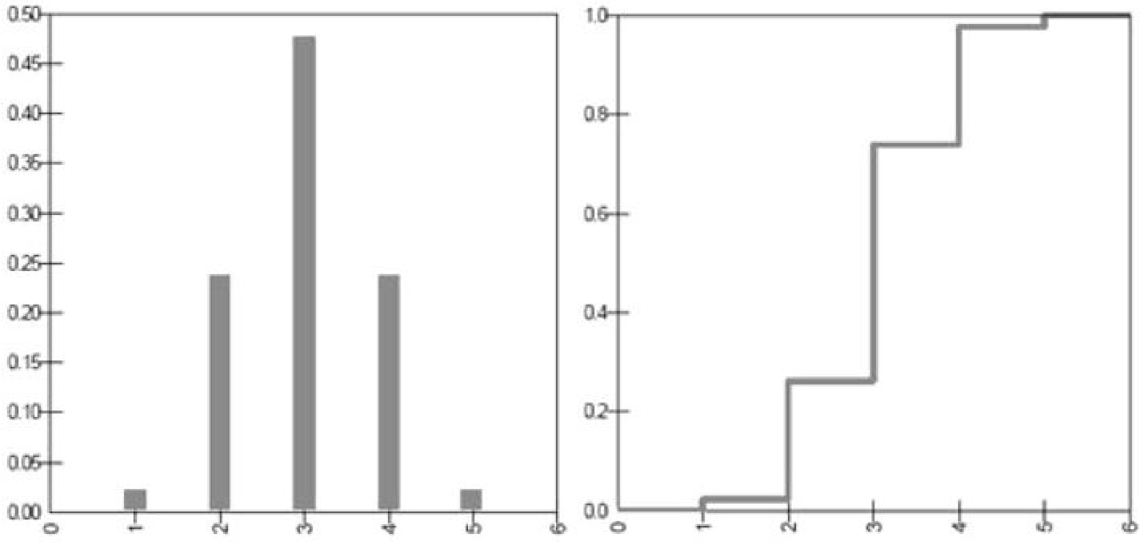


FIG. 5.124 – **Loi hypergéométrique $\mathcal{H}$ (fonction de densité et de distribution cumulative)**

Démontrons que la loi Hypergéométrique tend vers une loi binomiale puisqu'il en est fait usage de nombreuses fois dans différents chapitres du présent livre (et particulièrement la section de Génie Industriel **??**).

Pour cela, décomposons :

$$\mathcal{H}(n,p,m,k)=\frac{C_k^m C_{p-k}^{n-m}}{C_p^n} \tag{5.7.497}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{C_k^m C_{p-k}^{n-m}}{C_p^n}&=\frac{\dfrac{m!}{k!(m-k)!}\dfrac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}}\\&=\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}\frac{p!(n-p)!}{n!}\\&=\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{m}{(m-k)!}\frac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}\frac{(n-p)!}{n!}\\&=C_p^k\frac{m}{(m-k)!}\frac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}\frac{(n-p)!}{n!}\end{aligned} \tag{5.7.498}$$

Pour le deuxième terme :

$$\frac{m}{(m-k)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-k)}=m(m-1)\ldots(m-k+1) \tag{5.7.499}$$

Pour $m\rightarrow+\infty$ (...) tous les termes sont alors de l'ordre de m. Nous avons alors :

$$m(m-1)\ldots(m-k+1)\cong m^k \tag{5.7.500}$$

Pour le troisième terme un développement identique en tous points au précédent permet d'obtenir (bien évidemment nous avons aussi besoin que $n\rightarrow+\infty$ (...)) :

$$\frac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}\cong(n-m)^{p-k} \tag{5.7.501}$$

Et bien sûr ... on peut donc débattre de $n-m$ quand les deux termes tendent vers l'infini...

Idem pour le quatrième terme :

$$\frac{(n-p)!}{n!}\cong n^{-p} \tag{5.7.502}$$

En conclusions nous avons :

$$\frac{C_k^m C_{p-k}^{n-m}}{C_p^n}\underset{n,m\rightarrow+\infty}{=}C_p^k\frac{m^k(n-m)^{p-k}}{n^p} \tag{5.7.503}$$

Changeons d'écriture en posant p (le nombre d'individus tirés) comme étant N. Il vient alors :

$$\frac{C_k^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}\underset{n,m\rightarrow+\infty}{=}C_k^N\frac{m^k(n-m)^{N-k}}{n^N} \tag{5.7.504}$$

En cours de traduction de l'anglais

Faisons un autre changement d'écriture en notant b les boules noires (black) et w les boules blanches (white). Il vient alors :

$$\frac{C_k^b C_{N-k}^{n-b}}{C_N^n} \underset{n,b\to+\infty}{=} C_k^N \frac{b^k(n-b)^{N-k}}{n^N} = C_k^N \frac{b^k w^{N-k}}{n^N} \tag{5.7.505}$$

Enfin, notons p la proportion de boules noires et q celle de boules blanches dans le lot n. Il vient alors :

$$\frac{C_k^{np} C_{N-k}^{n-np}}{C_N^n} \underset{np\to+\infty}{=} C_k^N \frac{(np)^k(nq)^{N-k}}{n^N} = C_k^N (np)^k(nq)^{N-k}n^{-N} = C_k^N p^k q^{N-k} \tag{5.7.506}$$

Nous retrouvons donc bien la loi binomiale ! ! En pratique, il est courant d'approximer la loi hypergéométrique par une loi binomiale dès que le rapport nombre d'individus tirés sur le nombre total d'individus est inférieur à 10% (c'est-à-dire lorsque l'échantillon est 10 fois plus petit que la population). Il s'ensuit que la loi hypergéométrique tend aussi (comme nous le démontrerons plus loin) vers une loi Normale lorsque la population tend vers l'infini et que l'échantillon est petit.

Dans la pratique, des simulations de Monte-Carlo avec des tests d'ajustements (voir plus loin dans ce chapitre), ont montré qu'une loi hypergéométrique pouvait être approximée par une loi Normale (cas très important dans les tests statistiques de contingence que nous étudierons dans le chapitre de Méthodes Numériques) si les trois conditions suivantes étaient remplies en même temps :

$$k > 9\frac{n-m}{m} \qquad k > 9\frac{m}{n-m} \qquad k < \frac{n}{10} \tag{5.7.507}$$

Soit sous forme graphique très approximative... :

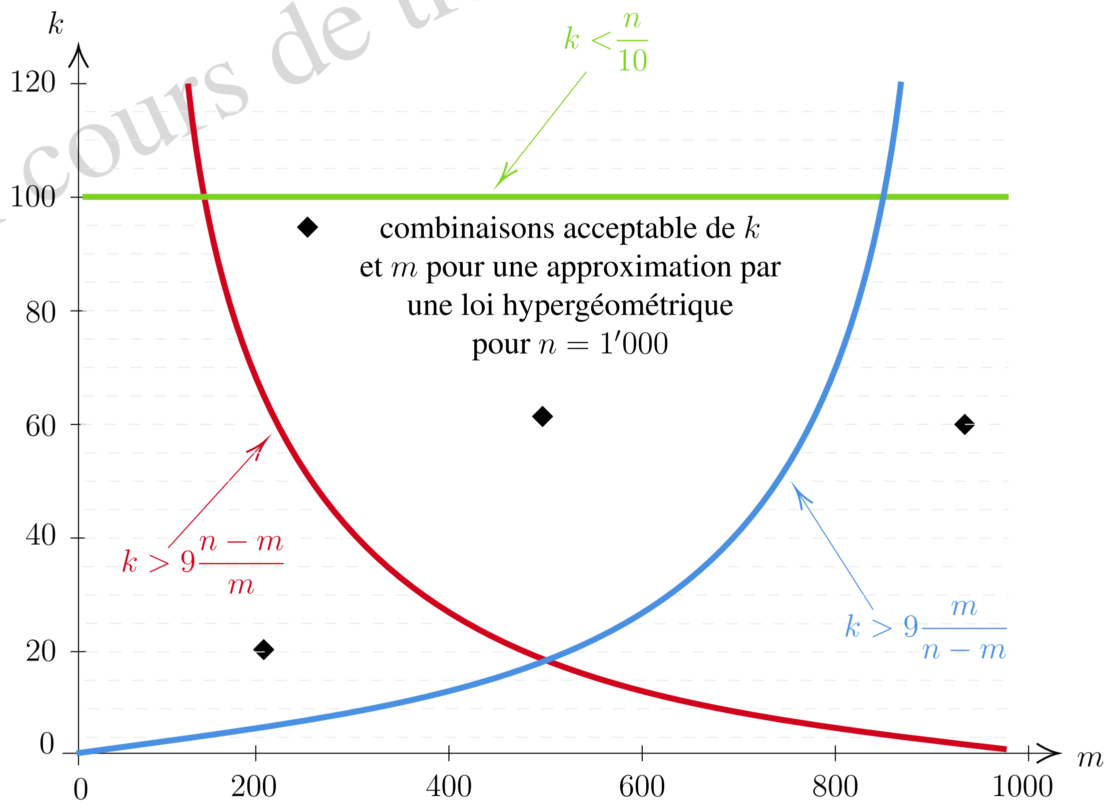


FIG. 5.125 – **Conditions d'application de l'approximation par une loi Normale**

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\mathcal{H}(k,m,n) \cong \mathcal{N}(\mu,\sigma) = \mathcal{N}\left(k\frac{m}{n}, \sqrt{\frac{krs(n-k)}{n^2(n-1)}}\right) = \mathcal{N}\left(k\frac{m}{n}, \sqrt{\frac{kmm'(n-k)}{n^2(n-1)}}\right) \quad (5.7.508)$$

5.7.6.7 Distribution Multinomiale

La loi multinomiale (appelée ainsi car elle fait intervenir plusieurs fois le coefficient binomial) est une loi applicable à n événements distinguables, chacun ayant une probabilité donnée, qui surviennent une ou plusieurs fois et ce de façon non nécessairement ordonné. Il s'agit d'un cas fréquent dans les études marketing et qui nous sera utile pour construire le test statistique de McNemar beaucoup plus loin (voir plus bas page 1244). Nous retrouvons également cette loi en finance quantitative (voir section Méthodes Numériques page ??).

La loi multinomiale est une généralisation de la loi binomiale applicable par exemple aux n essais d'un dé à six faces mais à la différence que les probabilités ne sont pas égales !

Plus techniquement, considérons l'espace des événements $\Omega = \{1,2,\ldots,m\}$ muni d'une probabilité $P(\{i\}) = p_i, i = 1,2,\ldots,n$. Nous tirons n fois de suite avec remise un élément de Ω avec la probabilité $p_i, i = 1,2,\ldots,n$. Nous allons chercher quelle est la probabilité d'obtenir de manière non nécessairement ordonnée l'événement 1, k_1 fois, l'événement 2, k_2 fois et ce sur une suite d'un tirage de n éléments.

Remarque

Cela équivaut à l'étude d'un tirage avec remise ET contraintes sur les occurrences. Donc sans contraintes nous verrons par l'exemple que nous retombons sur un tirage avec remise simple.

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons vu dans la section de Probabilités (voir page 521), que si nous prenons un ensemble d'événements ayant plusieurs issues, alors les différentes combinaisons de suites que nous pouvons obtenir en prenant p éléments choisis parmi n est :

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (5.7.509)$$

Il y a donc :

$$C_{k_1}^n = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \quad (5.7.510)$$

façons différentes d'obtenir k_1 fois un certain événement. Soit une probabilité associée de :

$$P(n,k_1) = C_{k_1}^n p_1^{k_1} q_1^{n-k_1} = C_{k_1}^n p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1} \quad (5.7.511)$$

Maintenant, intervient la particularité de la loi multinomiale ! : il n'y a pas d'échecs contrairement à la loi binomiale. Chaque "pseudo-échec" peut être considéré comme un sous tirage de k_2 éléments parmi les $n-k_1$ éléments restants.

Ainsi le terme :

$$C_{k_1}^{n} p_1^{k_1} q_1^{n-k_1} \tag{5.7.512}$$

s'écrira sur l'ensemble de l'expérience si nous considérons un cas particulier limité à deux types d'événements :

$$C_{k_1}^{n} p_1^{k_1} q_1^{n-k_1} := C_{k_1}^{n} p_1^{k_1} (C_{k_2}^{n-k_1} p_2^{k_2}) \tag{5.7.513}$$

avec donc :

$$C_{k_2}^{n-k_1} = \frac{(n-k_1)!}{k_2!((n-k_1)-k_2)!} \tag{5.7.514}$$

qui donne le nombre de façons différentes d'obtenir k_2 fois un second événement puisque dans l'ensemble de la suite de n éléments déjà k_1 ont été tirés ce qui fait qu'il n'en reste plus que $n-k_1$ sur lesquels nous pouvons obtenir les k_2 voulus.

Ces relations nous montrent donc qu'il s'agit d'une situation où chaque probabilité d'événement est considérée comme une sous loi binomiale (d'où son nom aussi...).

Alors nous avons dans le cas particulier de deux séries d'uplets :

$$\begin{aligned} C_{k_1}^{n} p_1^{k_1} C_{k_2}^{n-k_1} p_2^{k_2} = C_{k_1}^{n} C_{k_2}^{n-k_1} p_1^{k_1} p_2^{k_2} &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \frac{(n-k_1)!}{k_2!((n-k_1)-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!} \frac{1}{n-k_1-k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \end{aligned} \tag{5.7.515}$$

et comme :

$$-k_1 - k_2 = -n \tag{5.7.516}$$

il vient :

$$P = \frac{n!}{k_1!k_2!} \frac{1}{0!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} = \frac{n!}{k_1!k_2!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \tag{5.7.517}$$

et nous voyons que la construction de cette loi impose donc que :

$$\sum_i p_i = 1 \quad \sum_i k_i = n \tag{5.7.518}$$

Ainsi, par récurrence nous avons la probabilité $\mathcal{M}$ recherchée appelée "distribution Multinomiale" (ou ""loi Multinomiale") et donnée par :

$$\boxed{\mathcal{M}(\vec{k},\vec{p},m) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} k_i!} \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)!}{\prod_{i=1}^{m} k_i!} \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}} \tag{5.7.519}$$

En d'autres termes, s'il y a m variables aléatoires, i.e. $X_i, i \in [1,n]$, où X_i représente le nombre d'occurrences de l'élément i dans un choix de n éléments, avec l'entrée i dans le vecteur de probabilités $\vec{p}$, p_i donnant la probabilité de tirer l'élément d'intérêt i. La probabilité d'obtenir le résultat global attendu m fois en sélectionnant k_i fois des éléments de $k_1 \ldots k_m$ est alors donné par la relation $\mathcal{M}(\vec{k},\vec{p},m)$ donnée plus haut (voir l'exemple plus bas si cette explication n'est pas claire !).

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Notez que si $m = 2$ alors la relation précédente devient :

$$\mathcal{M} = \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1!k_2!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \tag{5.7.520}$$

Mais comme $k_1 + k_2 = n$, alors :

$$\mathcal{M} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} p_1^{k_1} p_2^{n-k_1} \tag{5.7.521}$$

Et comme $p_1 + p_2 = 1$ nous avons finalement :

$$\mathcal{M} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} p_1^{k_1} (1-p_1)^{n-k_1} \tag{5.7.522}$$

On reconnaît ici la distribution binomiale !

Dans un tableur Microsoft Excel 11.8346, le terme :

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\right)!}{\prod\limits_{i=1}^{m} k_i!} \tag{5.7.523}$$

est appelé le "coefficient multinomial" est disponible sous le nom de la fonction `MULTINOMIALE( )` dans la version française. Dans la littérature nous trouvons également ce terme parfois sous les formes respectives suivantes :

$$\binom{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \qquad \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \tag{5.7.524}$$

Ce qui donne alors pour l'expression de la distribution multinomiale :

$$\mathcal{M}(\vec{k}, \vec{p}, m) = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} \tag{5.7.525}$$

Théorème 5.45. Démontrons que la loi multinomiale est bien une loi de probabilité (car nous pourrions en douter...). Si c'est bien le cas, la somme des probabilités doit être comme nous le savons, égale à l'unité.

Démonstration 5.45.1. Rappelons que dans la section de Calcul Algébrique nous avons démontré que le théorème binomial (voir section de Calcul Algébrique page 1347) :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k} \tag{5.7.526}$$

Faisons maintenant un petit peu de notation :

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k_1=0}^{n} C_k^n x_1^{k_1} x_2^{n-k_1} = \sum_{k_1=0}^{n} \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} x_1^{k_1} x_2^{n-k_1} \tag{5.7.527}$$

En cours de traduction de l' anglais

et cette fois-ci un changement de variables :

$$(x_1+x_2)^n=\sum_{k_1=0}^{n}C_k^n x_1^{k_1}x_2^{n-k_1}=\sum_{k_1=0}^{n}\frac{n!}{k_1!k_2!}x_1^{k_1}x_2^{k_2} \tag{5.7.528}$$

Cette dernière relation (qui est un cas à deux termes du "théorème multinomial") va nous être utile pour démontrer que la loi multinomiale est bien une loi de probabilité. Nous prenons donc le cas particulier avec deux groupes de tirage :

$$\mathcal{M}(\vec{k},\vec{k},m)=\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{m}k_i!}\prod_{i=1}^{m}p_i^{k_i}=\frac{n!}{k_1!k_2!}p_1^{k_1}p_2^{k_2} \tag{5.7.529}$$

ce qui s'écrit aussi de par la construction de la loi multinomiale :

$$\mathcal{M}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}p_1^{k_1}p_2^{n-k_1} \tag{5.7.530}$$

et donc la somme doit être égale à l'unité telle que :

$$\sum_{k_1=0}^{n}\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}p_1^{k_1}p_2^{n-k_1}=1 \tag{5.7.531}$$

Pour vérifier cela nous utilisons le théorème multinomial montré précédemment

$$(p_1+p_2)^n=\sum_{k_1=0}^{n}\frac{n!}{k_1!k_2!}p_1^{k_1}p_2^{k_2} \tag{5.7.532}$$

Or, comme par construction de la loi multinomiale la somme des probabilités est unitaire, nous avons bien :

$$(p_1+p_2)^n=(1)^n=1=\sum_{k_1=0}^{n}\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}p_1^{k_1}p_2^{n-k_1} \tag{5.7.533}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Nous lançons un dé non-pipé 12 fois. Quelle est la probabilité que les 6 faces apparaissent le même nombre de fois (mais pas nécessairement consécutivement !) soit deux fois pour chaque :

$$\mathcal{M} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} k_i!}\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} = \frac{12!}{\prod_{i=1}^{6} 2!}\prod_{i=1}^{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12!}{2^6 6^{12}} = 0.34\% \tag{5.7.534}$$

où nous voyons bien que m correspond au nombre de groupes de réussites.

E2. Nous lançons un dé non-pipé 12 fois. Quelle est la probabilité qu'une seule et unique face apparaisse 12 fois (donc que le "1" apparaisse 12 fois de suite, ou le "2", ou le "3", etc.) :

$$\mathcal{M} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} k_i!}\prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} = \frac{12!}{\prod_{i=1}^{1} 12!}\prod_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{12} = \frac{12!}{6^{12}} \tag{5.7.535}$$

Nous retrouvons donc avec ce dernier exemple un résultat connu de la binomiale.

En cours de traduction

Rappelons que nous avons prouvé un peu plus haut (nous modifions juste un peu la notation) :

$$\mathcal{M}(\vec{x},\vec{p},r) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} x_i!}\prod_{i=1}^{r} p_i^{x_i} = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_r!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r} \tag{5.7.536}$$

Et nous avons alors trivialement :

$$\sum_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=1}^{r} x_i = n}} \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_r!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r} = 1 \tag{5.7.537}$$

L'espérance de la distribution multinomiale est en fait une moyenne de vecteur. Mais comme la moyenne d'un vecteur est égale à la moyenne de ses composantes, nous voulons calculer $\text{E}(x_i)$. Pour cela, sans perte de généralité, calculons $\text{E}(x_1)$. Pour ce faire, rappelons que par définition de l'espérance :

$$\text{E}(x_1) = \sum_{x_1=0}^{n} x_1 P(X_1 = x_1) \tag{5.7.538}$$

Mais pour $x_1 = 0$, les termes correspondants sont égaux à zéro. On peut alors directement écrire :

$$\text{E}(x_1) = \sum_{x_1=1}^{n} x_1 P(X_1 = x_1) \tag{5.7.539}$$

Maintenant comme la somme agit déjà sur le terme $P(X_1 = x_1)$, pour ce dernier nous n'avons qu'à additionner sur tous les termes sauf x_1 tel que :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_1) &= \sum_{x_1=1}^{n} x_1 \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^{r} x_i = n-x_1}} \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r} \\ &= \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^{r} x_i = n-x_1}} \frac{n!}{(x_1-1)!x_2!\ldots x_r!} p_1 p_1^{x_1-1} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r}\end{aligned} \tag{5.7.540}$$

Maintenant, nous effectuons le changement de variables suivant $x_1' = x_1 - 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_1) &= \sum_{x_1'=0}^{n-1} \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^{r} x_i = n-x_1'+1}} \frac{n!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1 p_1^{x_1'} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r} \\ &= \sum_{x_1'=0}^{n-1} \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ x_1'+x_2+\ldots+x_r=n-1}} \frac{n!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1 p_1^{x_1'} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r} \\ &= np_1 \sum_{x_1'=0}^{n-1} \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ x_1'+x_2+\ldots+x_r=n-1}} \frac{(n-1)!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1'} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r}\end{aligned} \tag{5.7.541}$$

Mais la deuxième somme nous est connue ! En effet, c'est la probabilité cumulée sur tous les $n-1$ (au lieu du n classique). Et celui-là est égal à 1. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_1) &= np_1 \sum_{x_1'=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ x_1'+x_2+\ldots+x_r=n-1}} \frac{(n-1)!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1'} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r}}_{=1} \\ &= np_1 \sum_{x_1'=0}^{n-1} 1 = np_i\end{aligned} \tag{5.7.542}$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors :

$$\mathrm{E}(\vec{x}) = n\vec{p} \tag{5.7.543}$$

Voyons maintenant la variance (c'est aussi un vecteur de variance en fait !). L'idée est tout à fait la même que pour l'espérance. Nous allons d'abord utiliser la relation d'Huygens :

$$\mathrm{V}(x_i) = \mathrm{E}(x_i^2) - \mathrm{E}(x_i)^2 = \mathrm{E}(x_i^2) - (np_i)^2 \tag{5.7.544}$$

Donc, seul le premier terme $\mathrm{E}(x_i^2)$ nous est inconnu. Sans perte de généralité, et encore en prenant la définition de l'espérance, considérons :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_1^2) &= \sum_{x_1=0}^{n} x_1^2 P(X_1 = x_1) = \sum_{x_1=1}^{n} x_1^2 P(X_1 = x_1) \\ &= \sum_{x_1=1}^{n} x_1^2 \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^{r} x_i = n-x_1}} \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r} \\ &= \sum_{x_1=1}^{n} x_1 \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^{r} x_i = n-x_1}} \frac{n!}{(x_1-1)!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2}\ldots p_r^{x_r}\end{aligned} \tag{5.7.545}$$

Faisons maintenant un changement de variable :

$$x_1' = x_1 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_1' + 1 \tag{5.7.546}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(x_1^2) &= \sum_{x_1'=0}^{n-1} (x_1'+1) \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^r x_i = n-x_1'-1}} \frac{n!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1'+1} p_2^{x_2} \ldots p_r^{x_r} \\
&= \sum_{x_1'=0}^{n-1} x_1' \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^r x_i = n-x_1'-1}} \frac{n!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1'+1} p_2^{x_2} \ldots p_r^{x_r} + \sum_{x_1'=0}^{n-1} \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_r \\ \sum_{i=2}^r x_i = n-x_1'-1}} \frac{n!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1'+1} p_2^{x_2} \ldots p_r^{x_r} \\
&= np_1 \sum_{\substack{x_1',\ldots,x_r \\ x_1'+\ldots+x_r = n-1}} \frac{(n-1)!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1'} p_2^{x_2} \ldots p_r^{x_r} + np_1 \sum_{\substack{x_1',\ldots,x_r \\ x_1'+\ldots+x_r = n-1 = n-1}} \frac{(n-1)!}{x_1'!x_2!\ldots x_r!} p_1^{x_1'} p_2^{x_2} \ldots p_r^{x_r} \\
&= np_1 \begin{pmatrix} \text{espérance loi} \\ \text{multinomiale avec } n-1 \end{pmatrix} + np_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \text{probilité cumulée} \\ \text{multinomiale avec } n-1 \end{pmatrix}}_{=1} \\
&= np_1\left((n-1)p_1\right) + np_1
\end{aligned} \tag{5.7.547}$$

Avec finalement :

$$\mathrm{V}(x_i) = \mathrm{E}(x_i^2) - \mathrm{E}(x_i)^2 = [np_1\left((n-1)p_1\right) + np_1] - (np_i)^2 = np_1(1-p_1) \tag{5.7.548}$$

En cours de traduction de l' anglais

5.7.6.8 Distribution de Poisson

Pour certains événements forts rares, la probabilité p est très faible et tend vers zéro. Toutefois la valeur moyenne np tend vers une valeur fixe lorsque n tend vers l'infini.

Nous partirons donc d'une distribution binomiale de moyenne equation que nous supposerons finie lorsque n tend vers l'infini.

La probabilité de k réussites lors de n épreuves vaut (loi Binomiale) :

$$\mathcal{B}(n,k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k} = C_k^n p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{5.7.549}$$

En posant $p = \dfrac{m}{n}$ (où m est temporairement la nouvelle notation pour la moyenne selon $\mu = np$), cette expression peut s'écrire :

$$\mathcal{B}(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{n}{m}\right)^k \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} \tag{5.7.550}$$

En regroupant les termes, nous pouvons mettre la valeur de $\mathcal{B}(n,k)$ sous la forme :

$$\mathcal{B}(n,k) = \frac{m^k}{k!}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n \frac{n!}{(n-k)!n^k\left(1-\dfrac{m}{n}\right)^k} \tag{5.7.551}$$

Nous reconnaissons que, lorsque n tend vers l'infini, le deuxième facteur du produit a pour limite $e^{-\mu}$ (voir section d'Analyse Fonctionnelle page 2264). Quant au troisième facteur, puisque nous nous intéressons aux petites valeurs de k (la probabilité de réussite est très faible), sa limite pour n tendant vers l'infini vaut 1.

Cette technique de passage à la limite est parfois appelée dans ce contexte : "théorème limite de Poisson".

Nous obtenons ainsi la "distribution de Poisson" (ou "loi de Poisson"), appelée également parfois "loi des événements rares", donnée donc par :

$$\boxed{\mathcal{P}(\mu,k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}} \tag{5.7.552}$$

qui peut être obtenue dans Microsoft Excel 11.8346 avec la fonction `LOI.POISSON( )` et qui dans la pratique et la littérature spécialisée est souvent notrée par la lettre u.

Il s'agit bien d'une loi de probabilité puisqu'en utilisant les séries de Taylor (voir section de Séquences et Séries page 1683), nous montrons que la somme des probabilités cumulées est bien :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = e^{-\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}e^{\mu} = 1 \tag{5.7.553}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Nous retrouverons fréquemment cette loi dans différentes sections du livre comme par exemple lors de l'étude de la maintenance préventive dans la section de Génie Industriel page **??** ou encore dans la section des Techniques De Gestion lors de l'étude des théories des files d'attentes page **??** (le lecteur peut s'y reporter pour des exemples intéressants et pragmatiques) et enfin dans le domaine de l'assurance vie et non vie.

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la distribution de Poisson de paramètre equation : $\mu = 3$:

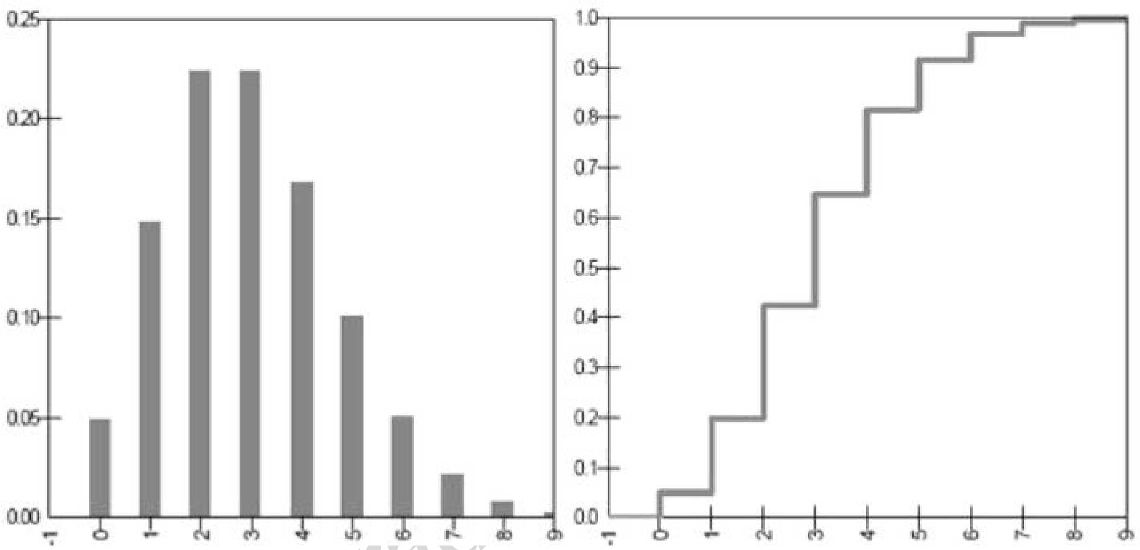


FIG. 5.126 – **Loi de Poisson $\mathcal{P}$ (fonction de densité et de distribution cumulative)**

Cette distribution est importante car elle décrit beaucoup de processus dont la probabilité est petite et constante. Elle est souvent utilisée dans la théorie des files d'attente (temps d'attente), test d'acceptabilité et fiabilité et contrôles statistiques de qualité. Entre autres, elle s'applique aux processus tels que l'émission des quanta de lumière par des atomes excités, le nombre de globules rouges observés au microscope, le nombre d'appels arrivant à une centrale téléphonique. La distribution de Poisson est valable pour de nombreuses observations faites en physique nucléaire ou corpusculaire.

L'espérance (moyenne) de la distribution de Poisson est (nous utilisons la série de Taylor de l'exponentielle) :

$$\mu = \mathrm{E}(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathcal{P}(\mu, k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = e^{-\mu}\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\mu}\mu e^{\mu} = \mu \quad (5.7.554)$$

et donne le nombre moyen de fois que l'on obtiendra l'issue souhaitée.

Ce résultat peut paraître déroutant.... la moyenne s'exprime par la moyenne ? ? ? Oui il ne faut simplement pas oublier que celle-ci est donnée au début par :

$$\mu = np \quad (5.7.555)$$

Remarque

Pour plus de détails le lecteur peut aussi se reporter à la partie concernant les "estimateurs" plus loin dans la présente section page 805.

La variance de la fonction de distribution de Poisson est quant à elle donnée par (en utilisant à nouveau les séries de Taylor) :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \mathrm{V}(k) &= \sum_{k=0}^{+\infty}[k-\mu^2]P_k = \sum_{k=0}^{+\infty}[k-\mu^2]\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} - \sum_{k=0}^{+\infty}2k\mu\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} + \sum_{k=0}^{+\infty}\mu^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} - 2\mu\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\mu^{k-1}}{k(k-1)!}e^{-\mu} + \mu^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} - 2\mu^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu} + \mu^2\cdot 1 = \sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= e^{-\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\mu^k}{k!} - \mu^2 = \mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} - \mu^2 \\
&\underset{s=k-1}{=} \mu e^{-\mu}\sum_{s=0}^{+\infty}(s+1)\frac{\mu^s}{s!} - \mu^2 = \mu e^{-\mu}\left(\sum_{s=0}^{+\infty}s\frac{\mu}{s!} + \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\mu^s}{s!}\right) - \mu^2 \\
&= \mu e^{-\mu}\left(\mu\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{\mu^{s-1}}{(s-1)!} + e^{\mu}\right) - \mu^2 = \mu e^{-\mu}(\mu e^{\mu} + e^{\mu}) - \mu^2 \\
&= \mu e^{-\mu}\mu e^{\mu} + \mu e^{-\mu}e^{\mu} - \mu^2 = \mu^2 - \mu - \mu^2 = \mu
\end{aligned} \quad (5.7.556)$$

toujours avec :

$$\mu = np \quad (5.7.557)$$

Le fait important que pour la loi de Poisson nous ayons la variance qui soit égale à l'espérance est appelé "propriété d'équidispersion de la de Poisson". Il s'agit d'une propriété souvent utilisée dans la pratique comme indicateur pour identifier si des données (à support discret) sont distribuées selon une loi de Poisson.

Les lois théoriques de distributions statistiques sont établies en supposant la réalisation d'un nombre infini de mesures. Il est évident que nous ne pouvons en effectuer qu'un nombre fini N. D'où la nécessité d'établir des correspondances entre les valeurs utiles théoriques et expérimentales. Pour ces dernières nous n'obtenons évidemment qu'une approximation dont la validité est toutefois souvent admise comme suffisante.

Maintenant démontrons une propriété importante de la loi Poisson dans le domaine de l'ingénierie que nous appelons la "stabilité par l'addition". L'idée est la suivante :

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi de Poisson de paramètre respectif λ et μ. Nous voulons vérifier que leur somme est aussi une loi de Poisson :

$$X + Y = P_{\lambda+\mu} \quad (5.7.558)$$

En cours de traduction de l'anglais

Voyons cela :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k} P\left[(X=i)\cap(Y=k-i)\right]=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \quad (5.7.559)$$

car les événements sont indépendants. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}P(X+Y=k)&=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\frac{\mu^{k-i}e^{\mu}}{(k-i)!}\\&=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}\end{aligned} \quad (5.7.560)$$

Or, en appliquant le théorème binomial (voir section de Calcul Algébrique page 1347) :

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}=\sum_{i=0}^{k} C_i^k\lambda^i\mu^{k-i}=(\lambda+\mu)^k \quad (5.7.561)$$

Donc au final :

$$P(X+Y=k)=(\lambda+\mu)^k\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \quad (5.7.562)$$

et donc la loi de Poisson est stable par l'addition. Donc toute loi de Poisson dont le paramètre est connu est in extenso indéfiniment divisable en une quantité finie ou infinie de lois de Poisson indépendante qui se somment.

En cours de traduction de l' anglais

Pour les personnes qui n'ont peut-être pas accès à un tableur ou à un logiciel statistique, voici quelques tables utiles :

FONCTION DE DISTRIBUTION CUMULATIVE DE POISSON

k/μ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

k/μ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150	0.135
1	0.699	0.663	0.627	0.592	0.558	0.525	0.493	0.463	0.434	0.406
2	0.900	0.879	0.857	0.833	0.809	0.783	0.757	0.731	0.704	0.677
3	0.974	0.966	0.957	0.946	0.934	0.921	0.907	0.891	0.875	0.857
4	0.995	0.992	0.989	0.986	0.981	0.976	0.970	0.964	0.956	0.947
5	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.990	0.987	0.983
6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.997	0.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

k/μ	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0	0.111	0.091	0.074	0.061	0.050	0.041	0.033	0.027	0.022	0.018
1	0.355	0.308	0.267	0.231	0.199	0.171	0.147	0.126	0.107	0.092
2	0.623	0.570	0.518	0.469	0.423	0.380	0.340	0.303	0.269	0.238
3	0.819	0.779	0.736	0.692	0.647	0.603	0.558	0.515	0.473	0.433
4	0.928	0.904	0.877	0.848	0.815	0.781	0.744	0.706	0.668	0.629
5	0.975	0.964	0.951	0.935	0.916	0.895	0.871	0.844	0.816	0.785
6	0.993	0.988	0.983	0.976	0.966	0.955	0.942	0.927	0.909	0.889
7	0.998	0.997	0.995	0.992	0.988	0.983	0.977	0.969	0.960	0.949
8	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.994	0.992	0.988	0.984	0.979
9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

En cours de traduction de l'anglais

k/μ	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
0	0.015	0.012	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
1	0.078	0.066	0.056	0.048	0.040	0.034	0.029	0.024	0.021	0.017
2	0.210	0.185	0.163	0.143	0.125	0.109	0.095	0.082	0.072	0.062
3	0.395	0.359	0.326	0.294	0.265	0.238	0.213	0.191	0.170	0.151
4	0.590	0.551	0.513	0.476	0.440	0.406	0.373	0.342	0.313	0.285
5	0.753	0.720	0.686	0.651	0.616	0.581	0.546	0.512	0.478	0.446
6	0.867	0.844	0.818	0.791	0.762	0.732	0.702	0.670	0.638	0.606
7	0.936	0.921	0.905	0.887	0.867	0.845	0.822	0.797	0.771	0.744
8	0.972	0.964	0.955	0.944	0.932	0.918	0.903	0.886	0.867	0.847
9	0.989	0.985	0.980	0.975	0.968	0.960	0.951	0.941	0.929	0.916
10	0.996	0.994	0.992	0.990	0.986	0.982	0.977	0.972	0.965	0.957
11	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.990	0.988	0.984	0.980
12	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.991
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

k/μ	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
0	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
3	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.007	0.005
4	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.021	0.015
5	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.050	0.038
6	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.102	0.079
7	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.179	0.143
8	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.279	0.232
9	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.397	0.341
10	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.521	0.460
11	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.639	0.579
12	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.742	0.689
13	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864	0.825	0.781
14	0.997	0.994	0.990	0.983	0.973	0.959	0.940	0.917	0.888	0.854
15	0.999	0.998	0.995	0.992	0.986	0.978	0.967	0.951	0.932	0.907
16	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.989	0.982	0.973	0.960	0.944
17	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995	0.991	0.986	0.978	0.968
18	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982
19	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.9 Distribution de Gauss-Laplace/Loi Normale

Cette caractéristique est la plus importante fonction de distribution en statistiques suite au résultat d'un théorème connu appelé "théorème central limite" qui comme nous le verrons, permet de démontrer (entre autres) que la somme de toute suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant une espérance et un écart-type fini converge vers une distribution de Gauss-Laplace (loi Normale).

Il est donc très important de focaliser particulièrement son attention sur les développements qui vont être faits ici !

Partons d'une distribution binomiale et faisons tendre le nombre n d'épreuves vers l'infini. Si p est fixé au départ, la moyenne $\mu = np$ tend également vers l'infini, de plus l'écart-type $\sigma = npq$ tend également vers l'infini

Remarque

Le cas où p varie et tend vers 0 tout en laissant fixe la moyenne equation ayant déjà été étudié lors de la présentation de la distribution de Poisson.

Si nous voulons calculer la limite de la distribution Binomiale, il s'agira donc de faire un changement d'origine qui stabilise la moyenne, en 0 par exemple, et un changement d'unité qui stabilise l'écart-type, à 1 par exemple.

Voyons tout d'abord comment varie equation en fonction de k (nombre de réussites) et calculons la différence :

Notons maintenant par $P_n(k)$ la probabilité binomiale de k succès et voyons d'abord comment $P_n(k)$ varie avec k et calculons la différence :

$$\begin{aligned}P_n(k+1)-P_n(k) &= \binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}-\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\\ &= \binom{n}{k}p^kq^{n-k}\left(\frac{(n-k)p}{(k+1)q}-1\right)=P_n(k)\frac{np-k-q}{(k+1)q}\end{aligned} \tag{5.7.563}$$

Nous en concluons que $P_n(k)$ est une fonction croissante de k, tant que $np-k-q$ est positif (pour n, p et q fixés). Pour le voir il suffit de prendre quelques valeurs (du membre de droite de l'égalité) ou d'observer la distribution graphique de la distribution Binomiale en se souvenant bien que :

$$\mu = np \tag{5.7.564}$$

Comme $q<1$ il est par conséquent évident que la valeur de k voisine de l'espérance de la loi Binomiale $\mu = np$ constitue le maxima de $P_n(k)$.

D'autre part, la différence $P_n(k+1)-P_n(k)$ est le taux d'accroissement de la fonction $P_n(k)$. Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{\Delta P_n(k)}{\Delta k}=\frac{P_n(k+1)-P_n(k)}{(k+1)-k} \tag{5.7.565}$$

En cours de traduction de l'anglais

comme étant la pente de la fonction.

Définissons maintenant une nouvelle variable aléatoire telle que sa moyenne soit nulle (variations négligeables) et son écart-type unitaire (une variable centrée-réduite en d'autres termes). Nous avons alors :

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \tag{5.7.566}$$

Nous avons alors aussi avec cette nouvelle variable aléatoire :

$$\Delta x=\frac{(k+1)-np}{\sqrt{npq}}-\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{[(k+1)-np]-(k-np)}{\sqrt{npq}} \tag{5.7.567}$$

Notons $F(x)$ l'expression de $P_n(k)$ calculée en fonction de la nouvelle variable aléatoire de moyenne nulle et d'écart-type unitaire dont nous recherchons l'expression quand n tend vers l'infini.

Reprenons :

$$\frac{\Delta P_n(k)}{\Delta k}=\frac{np-k-q}{(k+1)q}P_n(k)=\frac{-(k-np)-q}{(k+1)q}P_n(k) \tag{5.7.568}$$

Afin de simplifier l'étude de cette relation quand n tend vers l'infini et k vers l'espérance $\mu=np$, multiplions des deux côtés par $npq/\sqrt{npq}$:

$$\frac{\Delta P_n(k)}{\Delta k}\frac{npq}{\sqrt{npq}}=\frac{np-k-q}{(k+1)q}\frac{npq}{\sqrt{npq}}P_n(k)=\frac{-(k-np)-q}{(k+1)q}\frac{npq}{\sqrt{npq}}P_n(k) \tag{5.7.569}$$

Réécrivons le terme de droite de l'égalité. Il vient alors :

$$\frac{-(k-np)-q}{(k+1)}\frac{np}{\sqrt{npq}}P_n(k)=\frac{[-(k-np)-q]np}{(k+1)\sqrt{npq}}P_n(k) \tag{5.7.570}$$

Et maintenant réécrivons le terme de gauche de la relation antéprécédente. Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P_n(k)}{\Delta k}\frac{npq}{\sqrt{npq}}&=\frac{\Delta P_n(k)}{(k+1)-1}\frac{npq}{\sqrt{npq}}=\frac{\Delta P_n(k)}{[(k+1)-np]-(k-np)}\frac{npq}{\sqrt{npq}}\\&=\frac{\Delta P_n(k)}{\dfrac{[(k+1)-np]-(k-np)}{\sqrt{npq}}}\frac{npq}{\sqrt{npq}\sqrt{npq}}\\&=\frac{\Delta P_n(k)}{\dfrac{[(k+1)-np]-(k-np)}{\sqrt{npq}}}=\frac{\Delta P_n(k)}{\Delta x}\end{aligned} \tag{5.7.571}$$

Après un passage à la limite pour n tendant vers l'infini nous avons dans un premier temps pour le dénominateur du deuxième terme de la relation antéprécédente :

$$\frac{[-(k-np)-q]np}{(k+1)\sqrt{npq}}P_n(k) \tag{5.7.572}$$

la simplification suivante :

$$(k+1)\sqrt{npq}\underset{n\rightarrow+\infty}{=}k\sqrt{npq} \tag{5.7.573}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc :

$$\frac{-[(k-np)+q]np}{k\sqrt{npq}}P_n(k)=-\frac{k-np}{k\sqrt{npq}}npP_n(k)-\frac{qnp}{k\sqrt{npq}}P_n(k) \qquad (5.7.574)$$

et dans un second temps, tenant compte du fait que les valeurs de k considérées se trouvent alors au voisinage de l'espérance np, nous obtenons :

$$\frac{k-np}{k\sqrt{npq}}np=\frac{np}{k}\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\underset{n\rightarrow+\infty}{\cong}\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=x \qquad (5.7.575)$$

et :

$$\frac{qnp}{k\sqrt{npq}}\underset{n\rightarrow+\infty}{\cong}\frac{qnp}{np\sqrt{npq}}=\frac{q}{\sqrt{npq}}\underset{n\rightarrow+\infty}{\cong}0 \qquad (5.7.576)$$

Donc :

$$\frac{-[(k-np)+q]np}{k\sqrt{npq}}\underset{n\rightarrow+\infty}{\cong}-x \qquad (5.7.577)$$

et comme :

$$P_n(k)\underset{n\rightarrow+\infty}{:=}F(x) \qquad (5.7.578)$$

où $F(x)$ représentera (maladroitement) pour les quelques lignes qui vont suivre, la fonction de densité lorsque n tend vers l'infini.

Nous avons finalement :

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=-xF(x) \qquad (5.7.579)$$

Cette relation peut encore s'écrire en réarrangeant les termes :

$$\frac{1}{F(x)}\mathrm{d}F(x)=-x\mathrm{d}x \qquad (5.7.580)$$

et en intégrant les deux membres de cette égalité nous obtenons (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1480) :

$$\ln(F(x))=-\frac{x^2}{2}+c^{te} \qquad (5.7.581)$$

La fonction suivante est une des solutions de la relation précédente :

$$F(x)=\lambda e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (5.7.582)$$

Effectivement :

$$\ln\left(\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\ln(\lambda)+\ln\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=c^{te}+\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{x^2}{2}+c^{te} \qquad (5.7.583)$$

La constante est déterminée par la condition que :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x \qquad (5.7.584)$$

qui représente la somme de toutes les probabilités, qui doit valoir 1. Nous pouvons montrer pour cela que nous devons avoir :

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (5.7.585)$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 5.45.2. Nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\mathrm{d}z \tag{5.7.586}$$

Donc concentrons-nous sur le dernier terme de l'égalité appelé "intégrale de Gauss" (en fait, le cas ci-dessous est un cas particulier de cette intégrale). Ainsi :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{5.7.587}$$

puisque e^{-x^2} est une fonction paire (voir section d'Analyse Fonctionnelle page 2186). Écrivons maintenant le carré de l'intégrale de la manière suivante :

$$I^2 = 4\lim_{R\to+\infty}\left[\left(\int_0^R e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\right] = 4\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \tag{5.7.588}$$

et faisons un changement de variable en passant en coordonnées polaires, dès lors nous faisons aussi usage du Jacobien dans ces mêmes coordonnées (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1503) :

$$\begin{aligned}I^2 &= 4\lim_{R\to+\infty}\left(\int\int e^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\right) = 4\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\int_0^R e^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\right)\\ &= 4\frac{\pi}{2}\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^R e^{-r^2}r\mathrm{d}r\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}\right) = 2\pi\left(0+\frac{1}{2}\right) = \pi\end{aligned} \tag{5.7.589}$$

Dès lors :

$$I = \sqrt{\pi} \tag{5.7.590}$$

Par extension pour $e^{-\frac{x^2}{2}}$ nous avons :

$$I = \lambda^{-1} = \sqrt{2\pi} \tag{5.7.591}$$

Par conséquent, le lecteur doit garder à l'esprit pour des développements ultérieurs que :

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}} \tag{5.7.592}$$

et que :

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}} \tag{5.7.593}$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Nous obtenons donc la "loi Normale centrée réduite" notée sous forme de fonction de densité de probabilité (la notation avec le F majuscule peut malheureusement porter à confusion dans le cadre du présent développement avec le fonction de répartition... désolé...) :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}} \tag{5.7.594}$$

qui peut être calculée dans la version française Microsoft Excel 11.8346 avec la fonction `LOI.NORMALE.STANDARD( )`. Notez également que dans certains manuels de référence, cette dernière relation est désignée par la lettre $\phi(x)$.

Pour information, une variable suivant une loi Normale centrée réduite est très souvent par tradition notée Z (pour "Zentriert" en allemand) et ses réalisations par la lettre z minuscule.

En revenant aux variables non normées (ie non-standardisées) en se rappelant que :

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k - \mu}{\sigma} \tag{5.7.595}$$

nous obtenons donc la "distribution Gauss-Laplace" (ou "loi de Gauss-Laplace") ou également appelée "distribution Normale"" donnée sous forme de densité de probabilité dans ce livre par :

$$\boxed{P(k, \mu, \sigma) = \mathcal{N}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \tag{5.7.596}$$

Remarque

Donc, en général, le lecteur doit garder à l'esprit que lorsqu'une variable aléatoire x suit un loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, dès lors la normaliser en soustrayant sa moyenne (c'est-à-dire une "normalisation par la moyenne") et la diviser par son propre écart-type, fait-lui suivre une distribution Normale centrée réduité Z telle que sa réalisation soit notée :

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \tag{5.7.597}$$

et nommé "facteur Z". Utiliser ce facteur pour les distributions non-Normales peut être un peu délicat. Sans vérifier la Normalité des données sous-jacentes avec un test de Kolmogorov-Smirnov, d'Anderson-Darling, de Ryan-Joiner ou l'un des nombreux autres tests de Normalité (voir la page 1092), il faut l'éviter ! De plus, effectuer un ajustement des données comme la transformation de Johnson peut complètement changer l'interprétation des résultats et dans la plupart des cas, il faut également l'éviter. Donc, comme toujours en Science : n'utilisez aucune métrique à l'aveugle sans vérifier comment elle fonctionne réellement !

La probabilité cumulée (fonction de répartition) de valoir une certaine valeur k étant bien évidemment donnée par :

$$P(k \leq x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}k \tag{5.7.598}$$

E... duction de l' anglais

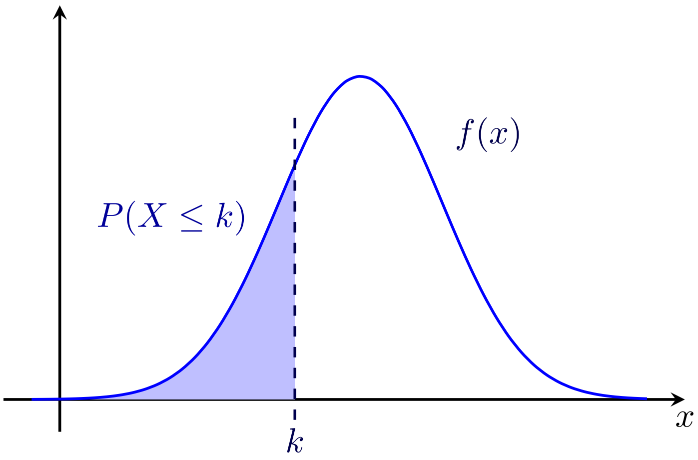


FIG. 5.127 – **Aire cumulée de distribution gaussienne (auteur : Izaak Neutelings)**

A la demande d'un lecteur, voyons comment la fonction cumulative est souvent présentée dans les manuels... Rappelons d'abord que la fonction de densité de la distribution Normale est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{5.7.599}$$

Ainsi, la fonction de distribution cumulée est :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \mathcal{N}\left(z;\mu,\sigma^2\right) \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\left(\frac{z-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{5.7.600}$$

En cours de traduction de l'anglais

Substituons $t=(z-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$, i.e. $z=\sqrt{2}\sigma t+\mu$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{(-\infty-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)}^{(x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}(\sqrt{2}\sigma t+\mu)\\&=\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{5.7.601}$$

Nous reconnaissons ici la fonction Erreur (voir section Thermodynamique page ??) définie pour rappel par :

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t\tag{5.7.602}$$

La dernière égalité peut donc être réécrite :

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]\end{aligned}\tag{5.7.603}$$

D'où la fameuse relation :

$$F_X(x)=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]\tag{5.7.604}$$

En cours de traduction de l' anglais

Attention ! Comme il n'existe pas de formule fermée pour le calcul du cumul de la loi Normale (et qu'il en va de même pour d'autres lois statistiques), il existe de nombreuses implémentations numériques différentes de cette dernière. Par exemple, dix-huit (! ! !) implémentations numériques différentes existent pour la loi Normale comme détaillé dans l'article [468] (les méthodes Zelen et Severo, Hart, Marsaglia, Cody, Dia, Shore etc.). C'est pourquoi vous obtiendrez le même résultat dans SAS et Microsoft Excel à la huitième décimale mais le résultat sera légèrement différent de Python et de la bibliothèque Scientific GNU qui n'utilise pas la même implémentation numérique. Aucune des valeurs renvoyées n'est plus exacte qu'une autre ! Ce serait un non-sens de prétendre le contraire ! C'est pourquoi les scientifiques et statisticiens professionnels communiquent et valident leurs résultats pour des statistiques très importantes et critiques en utilisant au moins trois outils/logiciels différents !

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la distribution Normale de paramètres $(\mu, \sigma) = (0, 1)$ qui est dès lors la loi Normale centrée réduite :

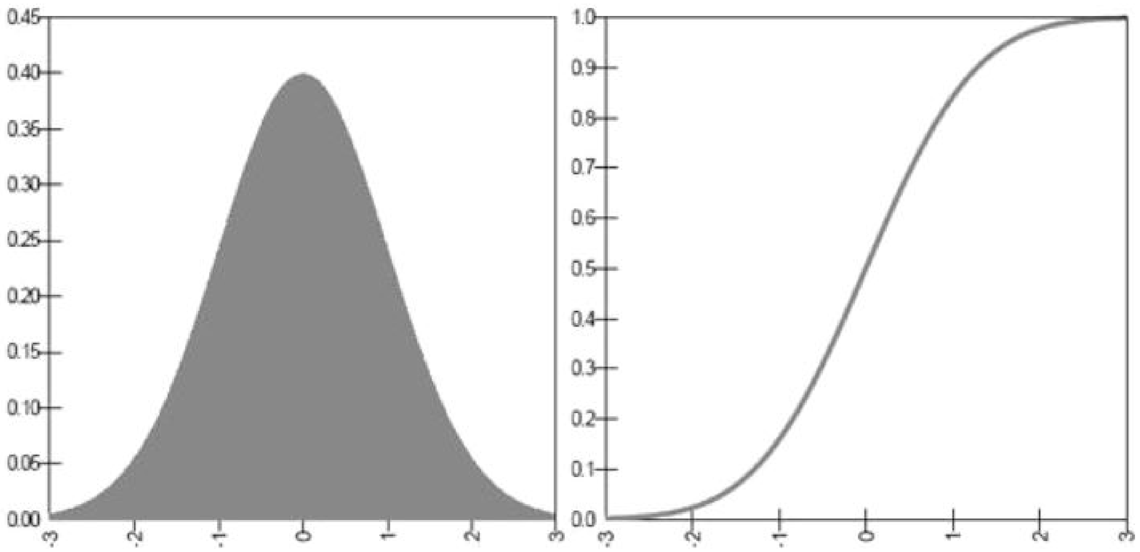


FIG. 5.128 – Loi Normale $\mathcal{N}$ (fonction de densité et de distribution cumulative)

Cette loi régit sous des conditions très générales, et souvent rencontrées, beaucoup de phénomènes aléatoires. Elle est par ailleurs symétrique par rapport à la moyenne μ (c'est important de s'en souvenir).

Montrons maintenant que μ représente bien l'espérance mathématique (ou la moyenne) de x (c'est un peu bête mais on peut quand même vérifier...) :

$$\text{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \qquad (5.7.605)$$

Posons :

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (5.7.606)$$

Nous avons dès lors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sigma u+\mu)e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma\mathrm{d}u\\&=\sigma\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma ue^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u+\sigma\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\\&=\sigma\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{5.7.607}$$

Calculons la première intégrale :

$$J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=-e^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=e^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_{+\infty}^{-\infty}=0-0=0\tag{5.7.608}$$

Donc il vient au final :

$$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu\sqrt{2\pi}=\mu\tag{5.7.609}$$

E... ion de l’ anglais

Remarques

R1. Le lecteur pourrait trouver cela déroutant dans un premier temps que le paramètre d’une distribution soit un des résultats que nous cherchons de la distribution (comme cela était le cas pour la loi de Poisson). Ce qui dérange est la mise en pratique d’une telle chose. Au fait, tout s’éclairera lorsque nous étudierons plus loin dans ce chapitre les concepts "d’estimateurs de vraisemblance".

R2. Indiquons que dans la pratique (finance, qualité, assurance, etc.) il est fréquent de devoir calculer l’espérance uniquement pour des valeurs positives de la variable aléatoire qui est définie alors naturellement comme étant "l’espérance positive" et donnée par :

$$\mathrm{E}^+(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\tag{5.7.610}$$

Nous en verrons un exemple pratique dans le chapitre d’Économie lors de notre étude du modèle théorique de la spéculation de Louis Bachelier (page **??**).

Montrons aussi (...) que σ représente bien l’écart-type de X (en d’autres termes de montrer que $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$) et pour cela rappelons que nous avions démontré que (relation de Huygens) :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2\tag{5.7.611}$$

Nous savons déjà qu’au niveau des notations :

$$\mathrm{E}(X)=\mu\Rightarrow\mathrm{E}(X)^2=\mu^2\tag{5.7.612}$$

commençons alors par calculer $\mathrm{E}(X^2)$:

$$\mathrm{E}(X^2)=\int x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x \tag{5.7.613}$$

Posons $y=(x-\mu)/\sqrt{2}\sigma$ qui conduit dès lors à :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\int x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(y\sqrt{2}\sigma+\mu)^2 e^{-y^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y+2\mu\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5.7.614}$$

Or, nous savons (déjà démontré plus haut) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2}\mathrm{d}y=0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y=\sqrt{\pi} \tag{5.7.615}$$

Il reste donc à calculer la première intégrale. Pour cela, procédons par une intégration par parties (voir section de Calcul Différentil et Intégral page 1511) :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t=f(t)g(t)|_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t \tag{5.7.616}$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} y\left(ye^{-y^2}\right)\mathrm{d}y=-y\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{2}\Bigg|_a^b+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-y^2}}{2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{5.7.617}$$

Nous obtenons alors :

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2\mu\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}0+\frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\mu^2+\sigma^2 \tag{5.7.618}$$

Et finalement :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=(\mu^2+\sigma^2)-\mu^2=\sigma^2 \tag{5.7.619}$$

Une signification supplémentaire de l'écart-type dans la loi de Gauss-Laplace est une mesure de la largeur de la distribution telle que (cela ne peut se vérifier qu'à l'aide d'intégration à l'aide de méthodes numériques) que toute moyenne et pour tout écart-type non nul nous avons (merci à John Cannin pour la figure LaTeX) :

En cours de traduction de l'anglais

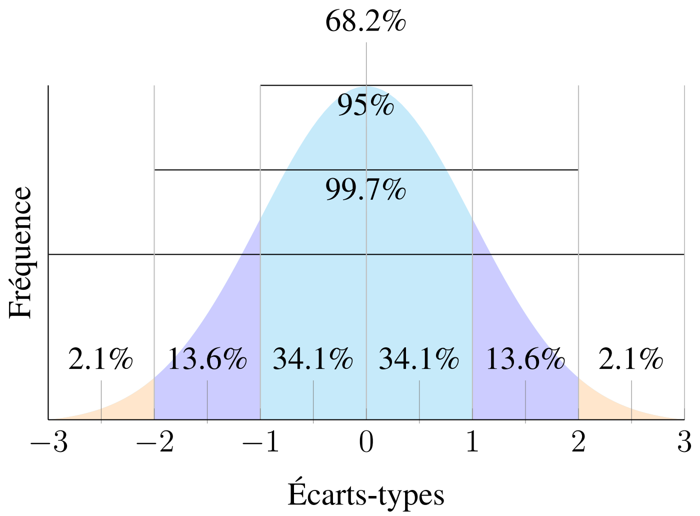


FIG. 5.129 – **Intervalles Sigma pour la distribution Normale**

La largeur de l'intervalle a une très grande importance dans l'interprétation des incertitudes d'une mesure. La présentation d'un résultat comme $\bar{N} \pm \sigma$ signifie que la valeur moyenne a environ 68.3% de chance (probabilité) de se trouver entre les limites de $\bar{N} - \sigma$ et $\bar{N} + \sigma$, ou qu'elle a environ 95.4% de se trouver entre $\bar{N} - 2\sigma$ et $\bar{N} + 2\sigma$ etc.

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution normale de moyenne μ et de variance σ^2. Ensuite, environ 68%, 95% et 99.7% des valeurs de X se situeront respectivement dans les 1, 2 et 3 écarts-types par rapport à la moyenne :

$$\begin{aligned} P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) &\cong 68\% \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &\cong 95\% \\ P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &\cong 99.7\% \end{aligned} \tag{5.7.620}$$

c'est ce qu'on appelle souvent la "règle des 68-95-99.7".

En effet, comme nous l'avons vu juste plus tôt, la fonction de distribution cumulative d'une variable aléatoire X Normalement distribuée est :

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \tag{5.7.621}$$

où $\text{erf}(x)$ est pour rappel la fonction d'erreur définie comme :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) \text{d}t \tag{5.7.622}$$

qui présente une propriété de symétrie ponctuelle :

$$\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x) \tag{5.7.623}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, la probabilité que X soit compris entre $\mu - a \cdot \sigma$ et $\mu + a \cdot \sigma$ est égale à :

$$\begin{aligned} p(a) &= P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) \\ &= F_X(\mu + a\sigma) - F_X(\mu - a\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{\mu + a\sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{\mu - a\sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\text{erf}\left(\frac{\mu + a\sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \text{erf}\left(\frac{\mu - a\sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \tag{5.7.624}$$

Avec cela, nous pouvons utiliser des implémentations numériques de la fonction d'erreur pour calculer :

$$\begin{aligned} P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) = p(1) = 68.27\% \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = p(2) = 95.45\% \\ P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = p(3) = 99.73\% \end{aligned} \tag{5.7.625}$$

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Ce concept est beaucoup utilisé en gestion de la qualité en entreprise particulièrement avec le concept industriel anglo-saxon Six Sigma (voir section de Génie Industriel page ??) qui impose une maîtrise de 6σ autour de chaque côté (!) de la moyenne des côtés des pièces fabriquées (ou tout autre sujet dont on mesure la déviation).

Niveau de Qualité Sigma	Taux de non-défection assuré en %	Taux de défection en parties par million
1σ	68.26894	317'311
2σ	95.4499	45'500
3σ	99.73002	2'700
4σ	99.99366	63.4
5σ	99.999943	0.57
6σ	99.9999998	0.002

TAB. 5.39 – **Niveau de qualité Sigma avec taux de défection/non-défection**

La deuxième colonne du tableau peut facilement être obtenue avec Maple 4.00b (ou aussi avec le tableur de Microsoft). Par exemple pour la première ligne :

```
>S:=evalf(int(1/sqrt(2*Pi)*exp(-x^2/2),x=-1..1));
```

et la première ligne de la troisième colonne par :

```
>(1-S)*1E6;
```

Si la loi Normale était décentrée, il suffirait alors d'écrire pour la deuxième colonne :

```
>S:=evalf(int(1/sqrt(2*Pi)*exp(-(x-mu)^2/2),x=-1..1));
```

et ainsi de suite pour tout écart-type et toute moyenne on retombera sur les mêmes intervalles ! ! !

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution Normale :

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{5.7.626}$$

Alors, la fonction quantile de X est :

$$Q_X(p) = \sqrt{2}\sigma \cdot \mathrm{erf}^{-1}(2p-1) + \mu \tag{5.7.627}$$

où $\mathrm{erf}^{-1}(x)$ est la fonction d'erreur inverse.

En effet, nous avons prouvé précédemment que la fonction cumulative de la distribution Normale était :

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \tag{5.7.628}$$

Parce que la fonction de distribution cumulative est strictement croissante de manière monotone, la fonction quantile est égale à l'inverse de la fonction de distribution cumulative :

$$Q_X(p) = F_X^{-1}(x) \tag{5.7.629}$$

Cela peut être déterminé en réorganisant la relation anté-précédente :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\ 2p-1 &= \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ \mathrm{erf}^{-1}(2p-1) &= \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\ x &= \sqrt{2}\sigma \cdot \mathrm{erf}^{-1}(2p-1) + \mu \end{aligned} \tag{5.7.630}$$

Cherchons maintenant la médiane de la Loi Normale (évidemment de par sa symétrie c'est relativement évident...) ! Pour cela, rappelons que la fonction de distribution cumulative de la distribution Normale est donnée par :

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \tag{5.7.631}$$

où $\mathrm{erf}(x)$ est la fonction d'erreur. Ainsi, la fonction de distribution cumulative inverse est :

$$x = \sqrt{2}\sigma \cdot \mathrm{erf}^{-1}(2p-1) + \mu \tag{5.7.632}$$

où $\mathrm{erf}^{-1}(x)$ est la fonction d'erreur inverse. En posant $p = 1/2$, nous obtenons :

$$\text{médiane}(X) = M_e(X) = \sqrt{2}\sigma \cdot \mathrm{erf}^{-1}(0) + \mu = \mu \tag{5.7.633}$$

En cours de traduction de l'anglais

Suite à une demande d'un lecteur, montrons comment obtenir la valeur modale de la loi Normale (même si elle est triviale compte tenu de sa symétrie et de sa forme...). Soit donc X une variable aléatoire suivant une distribution Normale :

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{5.7.634}$$

La fonction de densité de probabilité de la distribution Normale est pour rappel donnée par :

$$\text{mode}(X) = \arg\max_x f_X(x) \tag{5.7.635}$$

La dérivée première de cette fonction est :

$$f'_X(x) = \frac{\mathrm{d}f_X(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \cdot (-x+\mu) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{5.7.636}$$

Nous pouvons donc calculer la racine de la dérivée première pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} f'_X(x) = 0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} \cdot (-x+\mu) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ 0 &= -x+\mu \\ x &= \mu \end{aligned} \tag{5.7.637}$$

Calculons maintenant le coefficient d'asymétrie de la distribution Normale centrée réduite, qui est défini pour rappel par :

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mathrm{E}[X^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \tag{5.7.638}$$

Et donc pour la distribution Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{E}[X^3] - 3\cdot 0 \cdot 1 - 0^3}{1^3} = \mathrm{E}[X^3] \tag{5.7.639}$$

Soit maintenant $Y = X - a$ une variable aléatoire. Notez maintenant qu'en raison de la symétrie de la loi Normale, Y et $-Y$ ont la même distribution. Cela implique :

$$\mathrm{E}[Y^3] = \mathrm{E}[(-Y)^3] \tag{5.7.640}$$

Cela implique que la seule solution possible est $\mathrm{E}[Y^3] = 0$. D'où pour la loi Normale :

$$\gamma_1 = \mathrm{E}[X^3] = 0 \tag{5.7.641}$$

Dérivons maintenant les kurtosis (coefficient d'aplatissement) κ_1 et κ_4 pour la distribution Normale centrée réduite :

$$\mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \tag{5.7.642}$$

À cet effet, nous utilisons la primitive habituelle suivante (voir section de Calcul Différentiel et Intégral 1513) :

$$\int x^n e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} a^{ax} \mathrm{d}x \tag{5.7.643}$$

En cours de traduction de l'anglais

Par conséquent, en utilisant également l'intégrale de Gauss :

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} y^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{+\infty} + 3\left[-2y^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y\right]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{+\infty} + 3\left[-2y^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{+\infty} + 3\left[-2y^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{+\infty} + 2\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{y}{2}} - 6y^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} + 3 \\
&= 3
\end{aligned} \tag{5.7.644}$$

Par conséquent, le kurtosis est :

$$\kappa_1 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{3}{1^4} = 3 \tag{5.7.645}$$

D'où le kurtosis normalisé :

$$\kappa_4 = \kappa_1 - 3 = 0 \tag{5.7.646}$$

Maintenant, pour notre étude ultérieure de la diffraction, calculons le "largeur à mi-hauteur" (LMH) qui est la différence entre les deux valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la variable dépendante est égale à la moitié de sa valeur maximale. En d'autres termes, il s'agit de la largeur d'une courbe spectrale mesurée entre les points de l'axe y qui représentent la moitié de l'amplitude maximale.

En cours de traduction de l' anglais

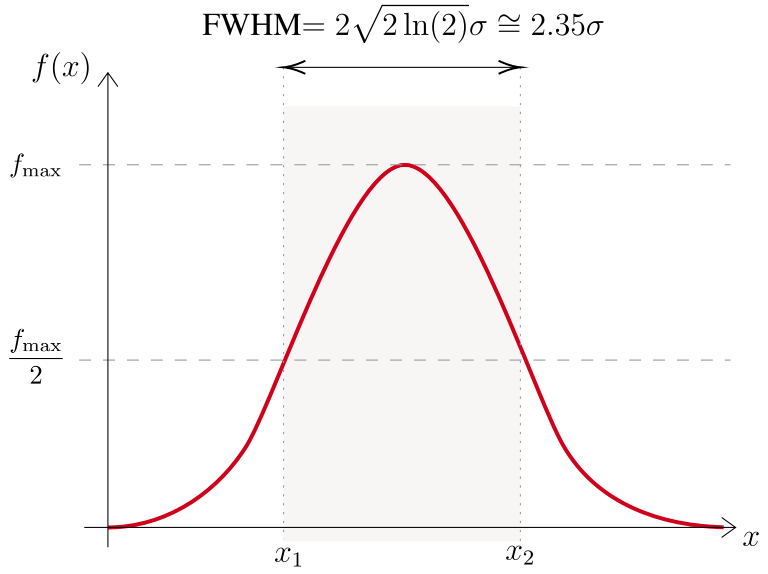


FIG. 5.130 – Largeur à mi-hauteur (LMH) illustrée

La LMH est appliqué à des phénomènes tels que la durée des formes d'onde d'impulsion et la largeur spectrale des sources utilisées pour les communications optiques et les capacités de résolution des spectromètres (pour calculer le site des cristallites). La convention de "largeur" signifiant "demi-maximum" est également largement utilisée dans le traitement du signal pour définir la bande passante comme « largeur de la plage de fréquences où moins de la moitié de la puissance du signal est atténuée », c'est-à-dire que la puissance est au moins la moitié du maximum. En termes de traitement du signal, cela représente au maximum -3 [dB] d'atténuation, appelée "point de demi-puissance" ou, plus précisément, "bande passante demi-puissance". Lorsque le point de demi-puissance est appliqué à la largeur du faisceau d'une antenne, il est appelé "largeur du faisceau de demi-puissance".

En cours de traduction de l'anglais

Soit donc X une variable aléatoire suivant une distribution Normale :

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{5.7.647}$$

Alors, la largeur à mi-hauteur (LMH) de X est :

$$\text{LMH}(X) = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma \tag{5.7.648}$$

En effet, rappelons que la fonction de densité de probabilité de la distribution Normale est telle que nous l'avons vu précédemment ci-dessus donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{5.7.649}$$

et nous avons démontré juste plus tôt que la valeur modale de la distribution Normale est :

$$\text{mode}(X) = \mu \tag{5.7.650}$$

tel que :

$$f_{\max} = f_X(\text{mode}(X)) = f_X(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{5.7.651}$$

Les limites de la LMH satisfont à l'équation :

$$f_X\left(x_{\text{LMH}}\right)=\frac{1}{2}f_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{5.7.652}$$

En utilisant cette fonction de distribution cumulative, nous pouvons développer cette équation comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{\text{LMH}}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{\text{LMH}}-\mu}{\sigma}\right)^2\right]&=\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{x_{\text{LMH}}-\mu}{\sigma}\right)^2&=\ln\frac{1}{2}\\ \left(\frac{x_{\text{LMH}}-\mu}{\sigma}\right)^2&=-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\ \frac{x_{\text{LMH}}-\mu}{\sigma}&=\pm\sqrt{2\ln(2)}\\ x_{\text{LMH}}-\mu&=\pm\sqrt{2\ln(2)}\sigma\\ x_{\text{LMH}}&=\pm\sqrt{2\ln(2)}\sigma+\mu\end{aligned} \tag{5.7.653}$$

Cela implique les deux solutions suivantes pour x_{LMH} :

$$\begin{aligned}x_1&=\mu-\sqrt{2\ln(2)}\sigma\\ x_2&=\mu+\sqrt{2\ln(2)}\sigma\end{aligned} \tag{5.7.654}$$

de telle sorte que la largeur à mi-hauteur de X soit :

$$\begin{aligned}\text{LMH}(X)&=\Delta x=x_2-x_1\\ &=(\mu+\sqrt{2\ln(2)}\sigma)-(\mu-\sqrt{2\ln(2)}\sigma)\\ &=2\sqrt{2\ln(2)}\sigma\end{aligned} \tag{5.7.655}$$

La fonction de densité de probabilité de la distribution Normale de moyenne μ et de variance σ^2 a deux points d'inflexion en $x=\mu-\sigma$ et $x=\mu+\sigma$, c'est-à-dire exactement un écart-type par rapport à la moyenne !

Pour démontrer cela, rappelons que la fonction de densité de probabilité de la distribution Normale est donnée par :

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{5.7.656}$$

La dérivée première de cette fonction est :

$$f'_X(x)=\frac{\mathrm{d}f_X(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{5.7.657}$$

En cours de traduction de l' anglais

La dérivée seconde est donc :

$$\begin{aligned} f_X''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f_X(x)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2 \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{5.7.658}$$

La dérivée seconde est donc nulle, si et seulement si :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right] \\ 0 &= \frac{x^2}{\sigma^4} - \frac{2\mu x}{\sigma^4} + \frac{\mu^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} \\ 0 &= x^2 - 2\mu x + \left(\mu^2 - \sigma^2\right) \\ x_{1,2} &= -\frac{-2\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2\mu}{2}\right)^2 - \left(\mu^2 - \sigma^2\right)} \\ x_{1,2} &= \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \mu^2 + \sigma^2} \\ x_{1,2} &= \mu \pm \sigma \end{aligned} \tag{5.7.659}$$

il y a donc des points d'inflexion à $x_{1/2} = \mu \pm \sigma$.

La loi de Gauss-Laplace n'est par ailleurs pas qu'un outil d'analyse de données mais également de génération de données. Effectivement, cette loi est une des plus importantes dans le monde des multinationales qui recourent aux outils statistiques pour la gestion du risque, la gestion de projets et la simulation lorsqu'un grand nombre de variables aléatoires sont en jeu. Les meilleurs exemples d'applications en étant les logiciels CrystalBall ou @Risk de Palisade (ce dernier étant mon préféré...).

En cours de traduction de l'anglais

Dans ce cadre d'application (gestion de projets), il est par ailleurs très souvent fait usage de la somme (durée des tâches) ou le produit de variables aléatoires (facteur d'incertitude du client) suivant des lois de Gauss-Laplace. Voyons comment cela se calcule :

5.7.6.9.1 Somme de deux variables aléatoires normales

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Supposons que X suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et que Y suit la loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Alors, la variable aléatoire $Z = X + Y$ aura une densité égale au produit de convolution de f_x et f_y (voir section d'Analyse Fonctionnelle page 2268). C'est-à-dire :

$$f_z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(y)(s-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(s-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \mathrm{d}x \tag{5.7.660}$$

ce qui équivaut à faire le produit conjoint (voir section Probabilités page 479) des probabilités d'apparition des deux variables continues (se rappeler le même genre de calcul sous forme discrète !).

Pour simplifier l'expression, faisons le changement de variable $t = x - \mu_1$ et posons :

$$a = \mu_1 + \mu_2 - s \qquad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{5.7.661}$$

Comme :

$$\left(s - y - \mu_2^2\right)^2 = -\left(-s + y + \mu_2^2\right)^2 = \left(-s + y + \mu_2^2\right)^2 = (t + a)^2 \tag{5.7.662}$$

nous obtenons après une astuce de simplification difficile à obtenir :

$$\begin{aligned} f_z(s) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{t^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\dfrac{(t+a)^2}{2\sigma_2^2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(\sigma t + \frac{a\sigma_1^2}{\sigma}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2 a^2 \sigma_2^2}{\sigma^2}}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\dfrac{a^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(\sigma t + \frac{a\sigma_1^2}{\sigma}\right)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.7.663}$$

Nous posons :

$$u = \frac{\sigma t + \dfrac{a\sigma_1^2}{\sigma}}{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2} \Rightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{2}\sigma_1\sigma_2\frac{\mathrm{d}u}{\sigma} \tag{5.7.664}$$

Alors :

$$f_z(s) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(\sigma t + \frac{a\sigma_1^2}{\sigma}\right)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u \tag{5.7.665}$$

Sachant que (déjà démontré plus haut !) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \tag{5.7.666}$$

et :

$$a^2 = (-s + \mu_1 + \mu_2)^2 = (s - \mu_1 - \mu_2)^2 \tag{5.7.667}$$

notre expression devient :

$$\boxed{f_z(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(s-\mu_1-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}} \tag{5.7.668}$$

Nous reconnaissons l'expression de la loi de Gauss-Laplace de moyenne $\mu_1 + \mu_2$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Par conséquent, $X + Y$ suit la distribution telle qu'écrite par les physiciens (les deux arguments ont les mêmes unités) :

$$\mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \tag{5.7.669}$$

En cours de traduction de l'anglais

et telle qu'écrite par la majorité des mathématiciens et statisticiens :

$$\mathcal{N}\left(\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \quad (5.7.670)$$

Le fait que la somme de deux variables aléatoires Normales donne toujours une loi Normale est ce que nous nommons en statistiques la "stabilité par la somme" de la loi de Gauss-Laplace. Nous retrouverons ce type de propriétés pour d'autres lois que nous étudierons plus loin.

Donc au même titre que des variables aléatoires de Poisson, toute variable aléatoire suivant une loi Normale dont les paramètres sont connus est in extenso indéfiniment divisable en une quantité finie ou infinie de de variables aléatoires Normalement indépendantes qui se somment telles que :

$$\mathcal{N}(\mu,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{N}\left(\frac{\mu}{n},\frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (5.7.671)$$

Remarque

Les familles de lois stables par addition constituent un domaine important d'étude en physique, finance et statistiques appelé "distributions de Lévy alpha-stables". Si le temps me le permet, je présenterai les détails de ce domaine d'étude extrêmement important dans le présent chapitre.

En cours de traduction

5.7.6.9.2 Produit de deux variables aléatoires normales

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes réelles. Nous désignerons par f_X et f_Y les densités correspondantes et nous cherchons à déterminer la densité de la variable $Z=XY$ (cas très important et particulièrement en ingénierie).

Soit F la fonction de densité du couple (X,Y). Puisque X,Y sont indépendants (voir section Probabilités page 479) :

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \quad (5.7.672)$$

La fonction de répartition de Z est :

$$F(Z)=P(Z\leq z)=P(XY\leq z)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (5.7.673)$$

où $D=\{(x,y)|xy<z\}$.

D peut se réécrire comme union disjointe (nous faisons cette opération pour anticiper lors du futur changement de variables une division par zéro) :

$$D=D_1\sqcup D_2\sqcup D_3 \quad (5.7.674)$$

avec :

$$\begin{aligned}D_1&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|xy\leq<z\wedge x>0\right\}\\D_2&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|xy\leq z\wedge x<0\right\}\\D_3&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|xy\leq z\wedge x=0\right\}\end{aligned} \quad (5.7.675)$$

Nous avons :

$$F(Z)=\iint_{D_1} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\underbrace{\iint_{D_3} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{=0} \quad (5.7.676)$$

La dernière intégrale vaut zéro car D_3 est de mesure (épaisseur) nulle pour l'intégrale selon x.

Nous effectuons ensuite le changement de variable suivant :

$$x=x \qquad t=xy \quad (5.7.677)$$

Le jacobien de la transformation (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1503) est :

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t/x^2 & 1/x \end{bmatrix}\right|=\frac{1}{|x|} \quad (5.7.678)$$

Donc :

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_X(x)f_Y(t/x)}{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_X(x)f_Y(t/x)}{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_X(x)f_Y(t/x)}{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (5.7.679)$$

Notons f_Z la densité de la variable Z. Par définition :

$$F(Z\leq z)=F(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\mathrm{d}t \quad (5.7.680)$$

D'un autre côté :

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_X(x)f_Y(t/x)}{|x|}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (5.7.681)$$

comme nous venons de le voir. Par conséquent :

$$\boxed{f_Z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_X(x)f_Y(t/x)}{|x|}\mathrm{d}x} \quad (5.7.682)$$

Ce qui est un peu triste c'est que dans le cas d'une loi de Gauss-Laplace (loi Normale), cette intégrale ne peut être calculée simplement que numériquement... il faut alors faire appel à des méthodes d'intégration du type Monte-Carlo (voir section de Méthodes Numériques page ??).

HD'après quelques recherches faites sur Internet cependant, mais sans certitude, cette intégrale pourrait être calculée et donnerait une nouvelle loi appelée "loi de Bessel".

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.9.3 Distribution normale bivariée

Si deux variables aléatoires Normalement distribuées sont indépendantes, nous savons que la probabilité jointe est égale au produit des probabilités. Nous avons alors :

$$P=P_1P_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{5.7.683}$$

Vient maintenant une approche que nous retrouverons souvent dans les développements à suivre : pour généraliser des modèles en algèbre simple, il faut penser matriciel ! Dès lors on se retrouve avec deux vecteurs faisant intervenir un produit scalaire :

$$P=P_1P_2=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\frac{x_1-\mu_1}{2\sigma_1^2}\\\frac{x_2-\mu_2}{2\sigma_12^2}\end{pmatrix}} \tag{5.7.684}$$

Mais nous pouvons faire encore mieux car pour l'instant il n'y a aucune plus valeur à cette écriture ! Effectivement l'idée subtile vient à faire intervenir le déterminant d'une matrice (voir section d'Algèbre Linéaire page 1935) et l'inverse de cette même matrice dans la relation précédente :

$$\begin{aligned}P=P_1P_2&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\frac{x_1-\mu_1}{2\sigma_1^2}\\\frac{x_2-\mu_2}{2\sigma_12^2}\end{pmatrix}}\\&=\frac{1}{2\pi(\sigma_1^2\sigma_2^2-0\cdot 0)^{1/2}}e^{-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}&0\\0&\frac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}}\\&=\frac{1}{2\pi\left|\begin{bmatrix}\sigma_1^2&0\\0&\sigma_2^2\end{bmatrix}\right|^{1/2}}e^{-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\begin{bmatrix}\sigma_1^2&0\\0&\sigma_2^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\x_2-\mu_2\end{pmatrix}}\end{aligned} \tag{5.7.685}$$

Nous retrouvons donc un cas particulier de la matrice des variances-covariances. Dans le domaine de la loi Normale bivariée est il est d'usage d'écrire cette dernière relation sous la forme suivante dans le cas bivarié :

$$\boxed{f(X_1,X_2)=\frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}}e^{-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{(x-\mu)}^T\Sigma^{-1}\overrightarrow{(x-\mu)}}} \tag{5.7.686}$$

Si nous faisons un plot de cette fonction de densité nous obtenons :

En cours de traduction de l'anglais

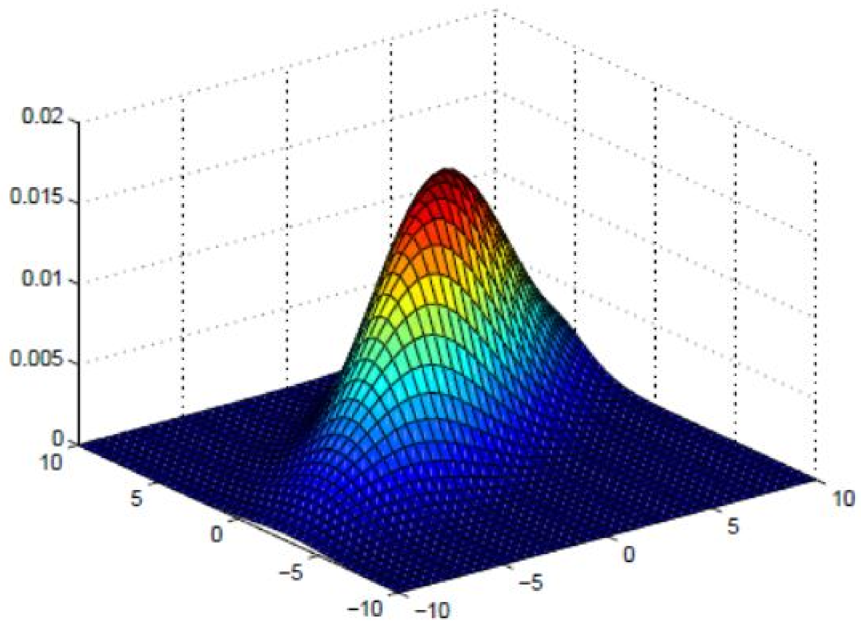
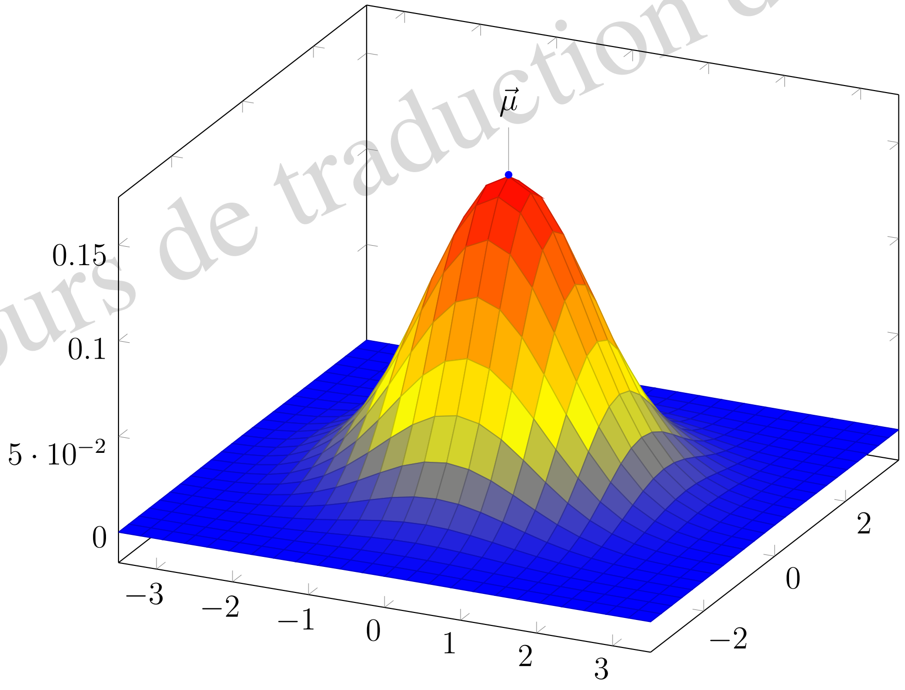


FIG. 5.131 – **Plot de la fonction de densité Normale bivariée avec MATLAB™**

ou en haute définition avec TikZ :



ou un autre (pas avec les mêmes valeurs) avec des projections planes verticales correspondantes :

En cours de traduction de l' anglais

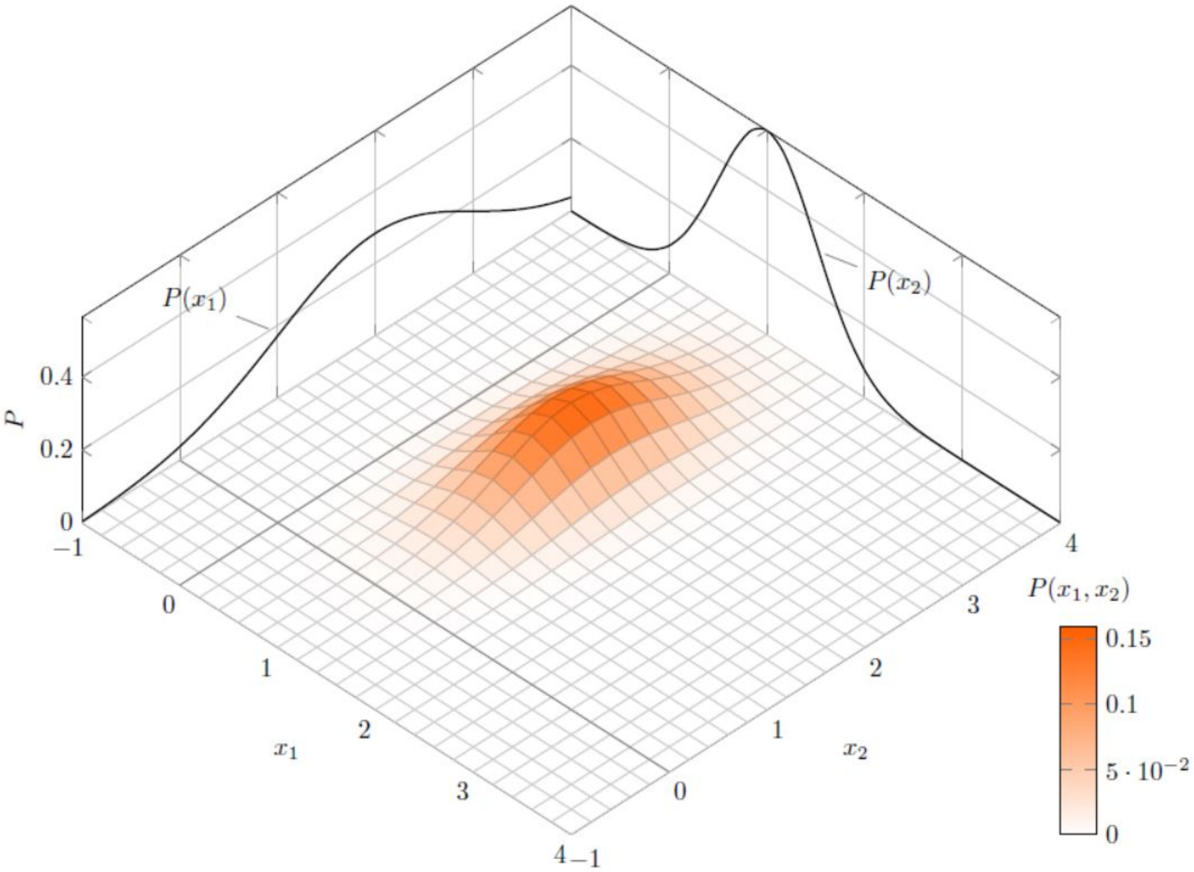


FIG. 5.132 – **Plot de la fonction de densité Normale bivariée pgfplots**

En cours de traduction

Maintenant considérons un cas important en ingénierie en revenant à l'écriture suivante :

$$P=f(X_1,X_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{5.7.687}$$

et en nous intéressant aux iso-lignes tels que pour tout couple de valeurs des deux variables aléatoires, nous ayons :

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}=c^{te} \tag{5.7.688}$$

En faisant quelques manipulations algébriques très élémentaires, nous obtenons :

$$-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}=\ln\left(2\pi\sigma_1\sigma_2c^{te}\right) \tag{5.7.689}$$

Soit :

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}=\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2c^{te}}\right) \tag{5.7.690}$$

et il vient :

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2\ln\left(\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2c^{te}}\right)}+\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2\ln\left(\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2c^{te}}\right)}=1 \tag{5.7.691}$$

Nous reconnaissons ici l'équation analytique d'une ellipse (voir section de Géométrie Analytique page 2748) ! Il est alors aisé de déterminer le petit ou grand axe de l'ellipse (ce qui est très utilisé dans le cartes de contrôle bivariées dans le domaine du Génie Industriel). Mais il ne faut pas oublier que cette équation n'est valable que dans le cas particulier ou la corrélation est nulle !

Un tracé des iso-lignes avec $\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ nous donne :

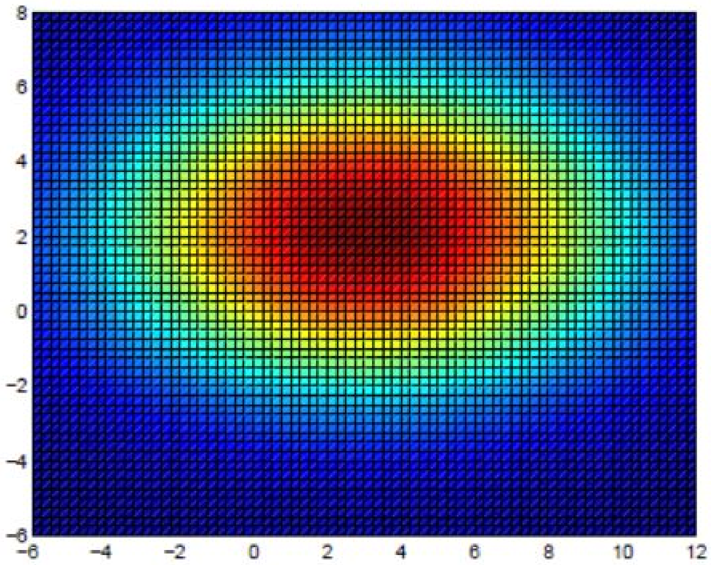


FIG. 5.133 – **Plot des iso-lignes de la fonction de densité Normale bivariée (cas non corrélé)**

Mais maintenant rappelons que lorsque nous avions obtenu :

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\overrightarrow{(x-\mu)}^T \Sigma^{-1} \overrightarrow{(x-\mu)}} \tag{5.7.692}$$

la matrice des variances-covariances était nulle partout sauf sur la diagonale, ce qui impliquait in extenso l'indépendance des deux variables aléatoires. Nous pouvons évidemment deviner que la généralisation consiste à dire que la matrice des variances-covariances n'est pas non-nulle que dans la diagonale et alors les deux variables aléatoires sont corrélées. Dès lors, les iso-lignes deviennent par exemple avec les valeurs $\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$:

En cours de traduction de l'anglais

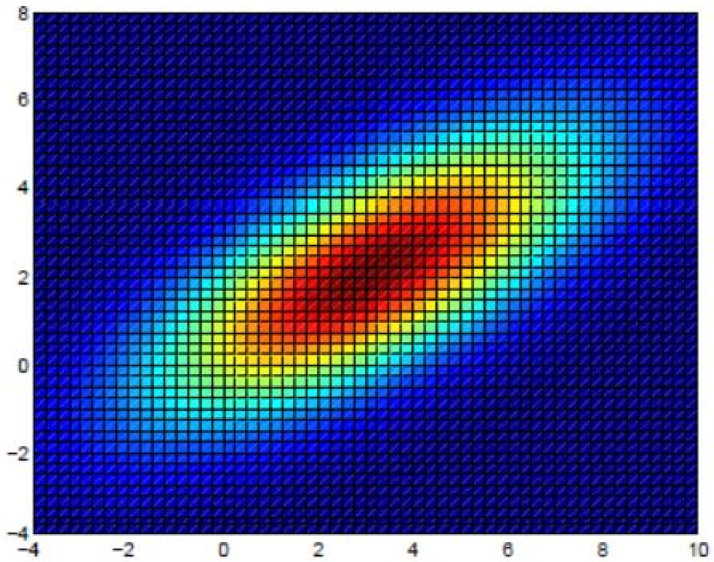


FIG. 5.134 – **Tracé des iso-lignes de la fonction normale bivariée (cas corrélé)**

En cours de traduction de l'anglais

Donc la corrélation fait pivoter l'axe des ellipses ! Remarquons que nous avons dès lors :

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}^2\end{bmatrix}\Rightarrow\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\sigma_{12}^2}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & -\sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2\end{bmatrix} \quad (5.7.693)$$

et donc in extenso :

$$|\Sigma|=\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\sigma_{12}^2 \quad (5.7.694)$$

Rappelons que nous avons vu lors de notre étude du coefficient de corrélation que (bon normalement.... la notation R pour la corrélation est prise que si les variances sont estimées mais comme c'est la notation la plus courante dans la pratique nous la garderons) :

$$\sigma_{12}=\text{cov}(X_1,X_2)=\text{c}(X_1,X_2)=R_{X_1,X_2}\sigma_{11}\sigma_{22} \quad (5.7.695)$$

Dès lors :

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\sigma_{12}^2}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & -\sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2(1-R_{12}^2)}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & -\sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2\end{bmatrix} \quad (5.7.696)$$

et l'exposant de l'exponentielle de la Normale bivariée prend alors une forme que nous retrouvons très souvent dans la littérature spécialisée :

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\left(\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2(1-R_{12}^2)}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & -\sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}^T\left(\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2(1-R_{12}^2)}\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & -R_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}\\ -R_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} & \sigma_{22}^2\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}\\ &=\frac{\sigma_{22}^2(x_1-\mu_1)^2+\sigma_{11}^2(x_2-\mu_2)^2-2R_{12}\sigma_{11}\sigma_{22}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2(1-R_{12}^2)}\\ &=\frac{1}{1-R_{12}^2}\left(\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1 1}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2 2}\right)^2-2R_{12}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1 1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2 2}\right)\right)\end{aligned} \quad (5.7.697)$$

Notez que si les variables aléatoires sont centrées réduites, alors nous avons :

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{1-R_{12}^2} \tag{5.7.698}$$

et dès lors, l'exposant de l'exponentielle de la loi Normale bivariée est alors :

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{1-R_{12}^2}\left[x_1^2+x_2^2-2R_{12}x_1x_2\right] \tag{5.7.699}$$

Ainsi, la fonction de densité de la loi Normale centrée réduite bivariée s'écrit :

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,R)&=\frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2-2R_{12}x_1x_2}{2(1-R_{12}^2)}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-R_{12}^2)}}e^{-x_1^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-R_{12}^2)}}e^{-x_2^2}e^{\frac{R_{11}x_1x_2}{1-R_{12}^2}}\\
&=\mathcal{N}(0,1-R_{12}^2)\mathcal{N}(0,1-R_{12}^2)e^{\frac{R_{11}x_1x_2}{1-R_{12}^2}}\\
&=\mathcal{N}(0,1)\mathcal{N}(0,1)\left(1-R_{12}^2\right)^2e^{\frac{R_{11}x_1x_2}{1-R_{12}^2}}
\end{aligned} \tag{5.7.700}$$

Ainsi, nous pouvons voir qu'une distribution Normale bivariée centrée réduite peut être construite par la multiplication de deux lois normales centrées réduites et par la multiplication d'un terme dépendant principalement du paramètre de corrélation. Ce dernier terme contient la nature de la dépendance des deux variables aléatoires et permet de coupler les fonctions marginales (les deux distributions de probabilités Normales centrées réduites marginales) afin d'obtenir la fonction (distribution) jointe Normale bivarieé.

Si jamais (cela peut-être très utile dans la pratique), voici le code Maple 4.00b pour tracer une fonction bivariée Normale (en reprenant le dernier exemple) même si c'est aussi relativement simple à faire avec un tableur comme Microsoft Excel :

```
>f:=(x,y,rho,mu1,mu2,sigma1,sigma2)->(1/(2*Pi*sqrt(sigma1*sigma2*(1-rho^2))))
*exp((-1/(2*(1-rho^2)))*(((x-mu1)/sqrt(sigma1))^2+((y-mu2)/sqrt(sigma2))^2
-2*rho*((x-mu1)/sqrt(sigma1))*((y-mu2)/sqrt(sigma2))));


>plot3d(f(x,y,5/sqrt(10*5),3,2,10,5),x=-4..10,y=-4..9,grid=[40,40]);
```

et pour le tracé avec les iso-lignes :

```
>with(plots):
>contourplot(f(x,y,5/sqrt(10*5),3,2,10,5),x=-4..10,y=-4..9,grid=[40,40]);
```

et nous pouvons contrôler qu'il s'agit bien d'une fonction de densité de probabilité en écrivant :

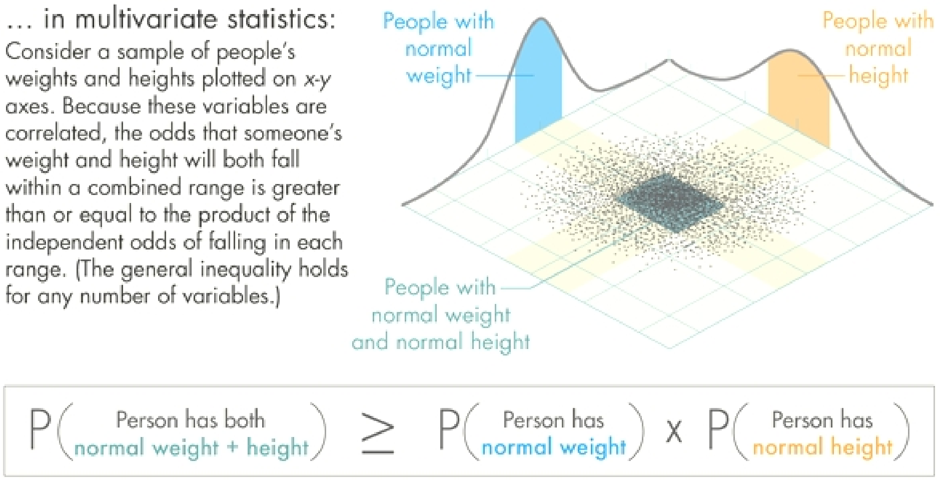
```
>int(int(f(x,y,5/sqrt(10*5),3,2,10,5),x=-infinity...+infinity)
,y=-infinity...+infinity);
```

ou calculer la probabilité cumulée entre deux intervalles :

```
>evalf(int(int(f(x,y,5/sqrt(10*5),3,2,10,5),x=-3...+4),y=-5...+2));
```

En cours de traduction de l'anglais

Notez que ce n'est qu'en 2014 que la "conjecture de corrélation gaussienne" (également nommée "inégalité de corrélation gaussienne") a été prouvée par Thomas Royen, professeur de statistique allemand à la retraite. Cette conjecture peut être résumée par la figure suivante :



Nous ne fournirons pas la preuve ici car je n'en ai jamais eu besoin pour mon entreprise ou aussi celle de mes clients mais c'est assez drôle que de savoir qu'une inégalité qui semble aussi évidente ait eu besoin de tant d'années avant que quelqu'un en trouve la démonstration.

Remarque

Le 17 juillet 12014 (selon calendrier holocène), quelques années après sa retraite, Thomas Royen a eu un éclair de de lucidité : comment utiliser la transformée de Laplace de la distribution gamma multivariée pour obtenir une preuve relativement simple de l'inégalité de corrélation gaussienne, une conjecture à l'intersection de la géométrie, de la théorie des probabilités et des statistiques, formulé après les travaux de Dunnett et Sobel (1955) et du statisticien américain Olive Jean Dunn (1958) qui n'avaient pas été résolue depuis lors. Il a envoyé une copie de sa preuve à Donald Richards, un mathématicien américain connu, qui a travaillé sur une preuve de cette conjecture pendant 30 ans. Richards a immédiatement vu la validité de la preuve de Royen et l'a aidé par la suite à transformer les relation mathématiques en LaTeX (d'où l'importance de s'appuyer sur LaTeX lorsque nous sommes ingénieurs ou scientifiques !). Lorsque Royen a contacté d'autres mathématiciens réputés, ces derniers n'ont pas pris la peine d'analyser sa démonstration, car Royen était relativement inconnu, et ces mathématiciens ont donc estimé que la probabilité que la démonstration que Royen soit fausse était très élevée (en particulier en envoyant un fichier Microsoft Word pour lecture vos chances d'être lu sont assez faibles...).

5.7.6.9.4 Distribution Normale multivariée

La distribution Normale bivariée est évidemment un cas particulier de la distribution multivariée. Nous verrons maintenant quelques propriétés importantes de la distribution normale multivariée dont nous aurons besoin plus tard pour divers tests et méthodes statistiques.

Considérons la distribution Normale multivariée suivante $P(\vec{X}) = \mathcal{N}(\vec{\mu}_X, \Sigma_X)$. Nous voulons prouver la transformation affine multivariée suivante qui nous sera utile pour l'étude de l'Analyse Factorielle plus tard :

$$P(\vec{Y}) = P(A\vec{X} + \vec{b}) = \mathcal{N}(\vec{\mu}_Y, \Sigma_Y) \tag{5.7.701}$$

où :

$$\vec{\mu}_Y = A\vec{\mu}_X + \vec{b} \qquad \Sigma_y = A\Sigma_Y A^T \tag{5.7.702}$$

Démonstration 5.45.3. Voyons d'abord pour la moyenne :

$$\vec{\mu}_X = \mathrm{E}(A\vec{X} + \vec{b}) = A\mathrm{E}(\vec{X}) + \vec{b} = A\vec{\mu}_X + \vec{b} \tag{5.7.703}$$

et maintenant pour la matrice de variance-covariance :

$$\begin{aligned}
\Sigma_Y &= \mathrm{E}\left[(\vec{Y} - \vec{\mu}_Y)(\vec{Y} - \vec{\mu}_Y)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[(A\vec{X} + \vec{b}) - (A\vec{\mu}_X + \vec{b})\right]\left[(A\vec{X} + \vec{b}) - (A\vec{\mu}_X + \vec{b})\right]^T\right\} \\
&= \mathrm{E}\left[(A\vec{X} - A\vec{\mu}_X)(A\vec{X} - A\vec{\mu}_X)^T\right] \\
&= A\mathrm{E}\left[(\vec{X} - \vec{\mu}_X)(\vec{X} - \vec{\mu}_X)^T\right] \\
&= A\Sigma_X A^T
\end{aligned} \tag{5.7.704}$$

■ Q.E.D.

Remarqueons quelques cas particuliers :

- Si $A = \mathbb{1}$, alors :

$$P(\vec{X} + \vec{b}) = \mathcal{N}(\vec{\mu}_X + \vec{b}, \Sigma_X) \tag{5.7.705}$$

- Si $\vec{b} = \vec{0}$, alors :

$$P(A\vec{X}) = \mathcal{N}(\vec{\mu}_X, A\Sigma_X A^T) \tag{5.7.706}$$

- Si $P(\vec{X}) = \mathcal{N}\left([\mu_1, \ldots, \mu_n]^T, \mathrm{diag}[\sigma_1^2, \ldots, \sigma_2^2]\right)$, alors :

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \mathcal{N}\left(\sum_{i}^{n} \mu_i, \sum_{i}^{n} \sigma_i^2\right) \tag{5.7.707}$$

En cours de traduction de l'anglais

Passons maintenant à une autre propriété de la distribution Normale multivariée.

Pour cela, rappelons tout d'abord que le produit de deux fonctions de densité de probabilité gaussiennes univariées est donné par :

$$\begin{aligned} P(x)P(y) &= \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2}\right)} \end{aligned} \quad (5.7.708)$$

Remarque

Ne confondez pas le produit des variables distribuées Normales et le produit de leurs fonctions de densité de probabilité respectives ! ! ! !

En effet, le produit des fonctions de densité de probabilité de deux variables aléatoires X et Y donnera la distribution jointe de la variable aléatoire vectorielle (X, Y) dans le cas où X et Y sont indépendants. Par conséquent, si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes Normalement distribuées, le produit de leurs fonction de densité de probabilité est Normal bivarié avec une corrélation nulle (mais le résultat n'est pas techniquement parlant une fonction de densité de probabilité !).

Par contre, même dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement Normales, leur produit n'est pas lui-même Normal (c'est facile à vérifier dans le cas où on pose $Y = X$ comme X^2 ne peut pas être négatif, il n'est donc pas normalement distribué !).

En cours de finalisation

Considérons maintenant pour des besoins ultérieurs la notation de variable gaussienne multivariée suivante :

$$\begin{aligned} P_i(\vec{x}) &= \mathcal{N}(\vec{x}, \vec{\mu}_i, \Sigma_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu}_i)^T \Sigma_i^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}_i)\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma_i|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\vec{x}^T\Sigma_i^{-1}\vec{x} - 2\vec{x}^T\Sigma_i^{-1}\vec{\mu}_i + \vec{\mu}_i\Sigma_i^{-1}\vec{\mu}_i\right)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left[n\ln(2\pi) + \ln|\Sigma_i| + \vec{\mu}_i\Sigma_i^{-1}\vec{\mu}_i\right]\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\vec{x}^T\Sigma_i^{-1}\vec{x} - 2\vec{x}^T\Sigma_i^{-1}\vec{\mu}_i\right)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\vec{x}^T\Sigma_i^{-1}\vec{x} - 2\vec{x}^T\Sigma_i^{-1}\vec{\mu}_i + c_i\right]\right] \end{aligned} \quad (5.7.709)$$

où :

$$c_i = n\ln(2\pi) + \ln|\Sigma_i| + \vec{\mu}_i\Sigma_i^{-1}\vec{\mu}_i \quad (5.7.710)$$

Maintenant, pour les besoins de notre étude de l'Analyse Factorielle, considérons une même variable aléatoire $\vec{x}$ injectée dans deux distributions normales multivariées avec une moyenne et

une matrice de variance-covariance différentes :

$$
\begin{aligned}
P_1(\vec{x})P_2(\vec{x}) &= \mathcal{N}\left(\vec{x},\vec{\mu}_1,\Sigma_1\right)\mathcal{N}\left(\vec{x},\vec{\mu}_2,\Sigma_2\right)\\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\vec{x}^T\Sigma_1^{-1}\vec{x}-2\vec{x}^T\Sigma_1^{-1}\vec{\mu}_1+c_1+\vec{x}^T\Sigma_2^{-1}\vec{x}-2\vec{x}^T\Sigma_2^{-1}\vec{\mu}_2+c_2\right]\right]\\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\vec{x}^T\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)\vec{x}-2\vec{x}^T\left(\Sigma_1^{-1}\vec{\mu}_1+\Sigma_2^{-1}\vec{\mu}_2\right)+c_1+c_2\right]\right]\\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\vec{x}^T\Sigma^{-1}\vec{x}-2\vec{x}^T\Sigma^{-1}\vec{\mu}+c+(c_1+c_2-c)\right]\right]\\
&= \mathcal{N}(\vec{x},\vec{\mu},\Sigma)\exp\left(c_1+c_2-c\right)\propto\mathcal{N}(\vec{x},\vec{\mu},\Sigma)
\end{aligned}
\tag{5.7.711}
$$

Ici nous avons défini :

$$
\begin{gathered}
c = n\ln(2\pi)+|\Sigma|+\vec{\mu}^T\Sigma^{-1}\vec{\mu}\\
\Sigma=\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1}
\end{gathered}
\tag{5.7.712}
$$

et :

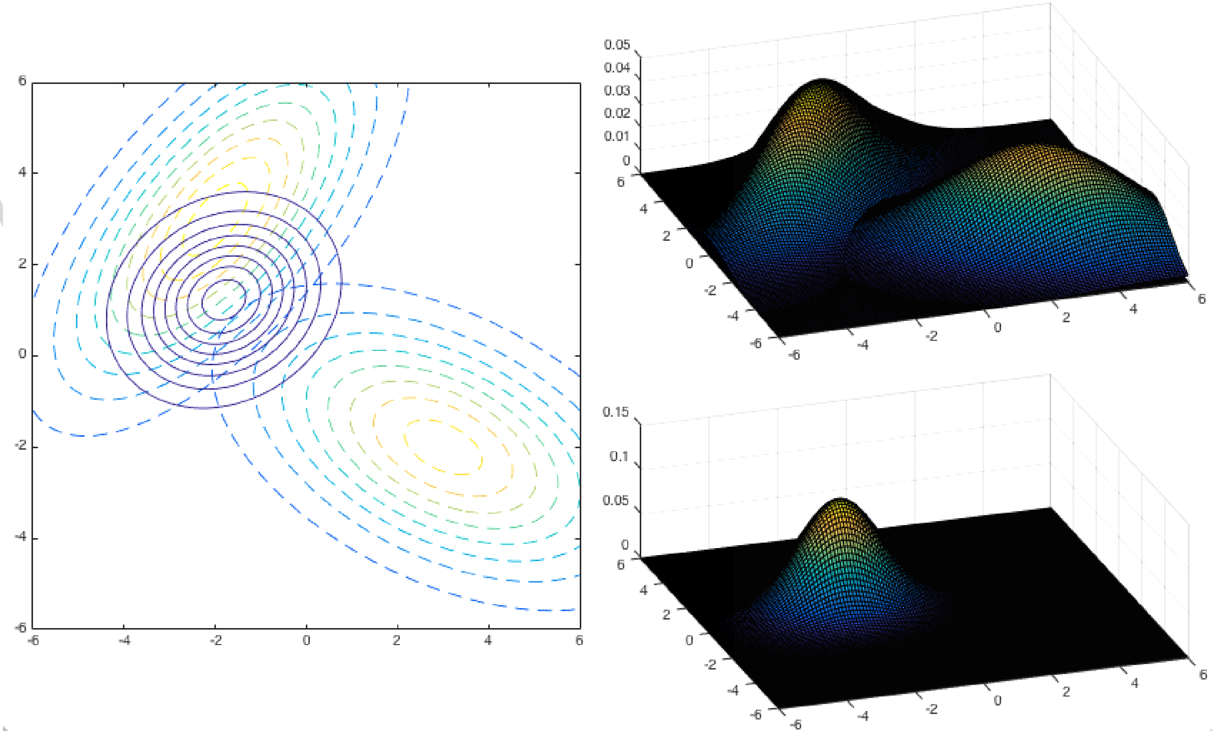
$$
\Sigma^{-1}\vec{\mu}=\Sigma_1^{-1}\vec{\mu}_1+\Sigma_2^{-1}\vec{\mu}_2 \tag{5.7.713}
$$

c'est-à-dire :

$$
\vec{\mu}=\Sigma\left(\Sigma_1^{-1}\vec{\mu}_1+\Sigma_2^{-1}\vec{\mu}_2\right)=\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1}\left(\Sigma_1^{-1}\vec{\mu}_1+\Sigma_2^{-1}\vec{\mu}_2\right) \tag{5.7.714}
$$

Nous voyons alors que le produit de deux gaussiennes multivariées avec le même vecteur aléatoire est aussi une gaussienne mise à l'échelle :

En traduction de l' anglais



5.7.6.9.4.1 Distributions marginales et conditionnelles des distributions Normales multivariées

Pour notre étude ultérieure de l'Analyse Factorielle, nous aurons aussi besoin de ce qui suit !

Un vecteur aléatoire $\vec{x} = [\vec{x}_1^T, \vec{x}_2^T]^T$ avec une distribution Normale $\mathcal{N}(\vec{x}, \vec{\mu}, \Sigma)$ peut être partitionné en deux sous-vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$:

$$P\left(\begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{bmatrix}\right) = P(\vec{x}) = \mathcal{N}(\vec{x}, \vec{\mu}, \Sigma) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{\mu}_1 \\ \vec{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right) \quad (5.7.715)$$

où :

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}^T, \Sigma_{ii} = \Sigma_{ii}^T \qquad i, j = 1, 2, i \neq j \quad (5.7.716)$$

Étant donnéd cette distribution conjointe Normale de $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$, nous pouvons trouver la distribution conditionnelle Normale de $\vec{x}_i$ étant donné $\vec{x}_j$:

$$P\left(\vec{x}_i | \vec{x}_j\right) = \mathcal{N}\left(\vec{x}_i, \vec{\mu}_{i|j}, \Sigma_{i|j}\right) \quad (5.7.717)$$

en termes de vecteur moyen et de matrice de covariance :

$$\begin{cases} \vec{\mu}_{i|j} = \vec{\mu}_i + \Sigma_{ij}\Sigma_{jj}^{-1}\left(\vec{x}_j - \vec{m}_j\right) \\ \Sigma_{i|j} = \Sigma_{ii} - \Sigma_{ij}\Sigma_{jj}^{-1}\Sigma_{ji} \end{cases} \quad (5.7.718)$$

Démonstration 5.45.4. La distribution conjointe de $\vec{x}$ est définie comme :

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) = P\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}Q\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right)\right] \end{aligned} \quad (5.7.719)$$

Ici nous avons défini :

$$\begin{aligned} Q\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) &= (\vec{x} - \vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}) \\ &= \left[\left(\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1\right)^T, \left(\vec{x} - \vec{\mu}_2\right)^T\right] \begin{bmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1 - \vec{\mu}_1 \\ \vec{x}_2 - \vec{\mu}_2 \end{bmatrix} \\ &= \left(\vec{x}_1 - \vec{\mu}_1\right)^T \Sigma^{11}\left(\vec{x}_1 - \vec{m}_1\right) + 2\left(\vec{x}_1 - \vec{m}_1\right)^T \Sigma^{12}\left(\vec{x}_2 - \vec{m}_2\right) + \left(\vec{x}_2 - \vec{m}_2\right)^T \Sigma^{22}\left(\vec{x}_2 - \vec{m}_2\right) \end{aligned} \quad (5.7.720)$$

où nous posons :

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{22} \end{bmatrix} \quad (5.7.721)$$

D'après la propriété de l'inverse d'une matrice symétrique partitionnée (voir section Algèbre linéaire page 1963), nous avons :

$$\begin{aligned} \Sigma^{11} &= \left(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)^{-1} = \Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\left(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \\ \Sigma^{22} &= \left(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1} = \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\left(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \Sigma^{12} &= -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\left(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1} = \left(\Sigma^{21}\right)^T \end{aligned} \quad (5.7.722)$$

En cours de traduction de l'anglais

En remplaçant la deuxième expression par Σ^{11}, la première expression par Σ^{22}, et Σ^{12} par $Q(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Q(\vec{x}_1,\vec{x}_2) =& (\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\left[\Sigma_{11}^{-1}+\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\right](\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\\
&-2(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\left[\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}\right](\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)\\
&+(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)^T\left[\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}\right](\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)\\
&=(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\\
&+(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\\
&-2(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)\\
&+(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)^T\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)\\
&=(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\\
&+\left[(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\right]^T\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}\left[(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\right]
\end{aligned}\tag{5.7.723}$$

Le dernier signe d'égalité est dû aux équations suivantes pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et une matrice symétrique $A=A^T$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}^TA\vec{u}-2\vec{u}^TA\vec{v}+\vec{v}^TA\vec{v}&=\vec{u}^TA\vec{u}-\vec{u}^TA\vec{v}-\vec{u}^TA\vec{v}+\vec{v}^TA\vec{v}\\
&=\vec{u}^TA(\vec{u}-\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})^TA\vec{v}=\vec{u}^TA(\vec{u}-\vec{v})-\vec{v}^TA(\vec{u}-\vec{v})\\
&=(\vec{u}-\vec{v})^TA(\vec{u}-\vec{v})=(\vec{v}-\vec{u})^TA(\vec{v}-\vec{u})
\end{aligned}\tag{5.7.724}$$

Pour simplifier les notations, posons maintenant :

$$\begin{cases}\vec{b}=\vec{\mu}_2+\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\\ A=\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\end{cases}\tag{5.7.725}$$

et aussi :

$$\begin{cases}Q_1(\vec{x}_1)=(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\\ Q_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\left[(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\right]^T\left(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right)^{-1}\left[(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\right]\\ \qquad=\left(\vec{x}_2-\vec{b}\right)^TA^{-1}\left(\vec{x}_2-\vec{b}\right)\end{cases}\tag{5.7.726}$$

Alors l'expression ci-dessus pour $Q(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ peut être écrite comme :

$$Q(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=Q_1(\vec{x}_1)+Q_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\tag{5.7.727}$$

et la distribution conjointe peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
P(\vec{x})=P(\vec{x}_1,\vec{x}_2)&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}Q(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\right]\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\Sigma_{11}\right|^{1/2}\left|\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}Q_1(\vec{x}_1)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}Q_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\right]\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}\left|\Sigma_{11}\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\right]\frac{1}{(2\pi)^{q/2}|A|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\vec{x}_2-\vec{b}\right)^TA^{-1}\left(\vec{x}_2-\vec{b}\right)\right]\\
&=\mathcal{N}(\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\Sigma_{11})\,\mathcal{N}\left(\vec{x}_2,\vec{b},A\right)
\end{aligned}\tag{5.7.728}$$

où nous avons utilisé l'expression du déterminant d'une matrice partitionnée (voir section page Algèbre linéaire 1964) :

$$|\Sigma|=|\Sigma_{11}||\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}|\tag{5.7.729}$$

En cours de traduction de l'anglais

La distribution marginale de $\vec{x}_1$ est alors :

$$\begin{aligned} P_1(\vec{x}_1) &= \int P(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\mathrm{d}x_2 = \mathcal{N}(\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\Sigma_{11})\int \mathcal{N}(\vec{x}_2,\vec{b},A)\mathrm{d}x_2 = \mathcal{N}(\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\Sigma_{11})\cdot 1 \\ &= \mathcal{N}(\vec{x}_1,\vec{\mu}_1,\Sigma_{11}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma_{11}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\right] \end{aligned} \tag{5.7.730}$$

et la distribution conditionnelle de $\vec{x}_2$ étant donné $\vec{x}_1$ est alors :

$$P_{2|1} = \frac{P(\vec{x}_1,\vec{x}_2)}{P_1(\vec{x}_1)} = \mathcal{N}(\vec{x}_2,\vec{b},A) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2}|A|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\vec{x}_2-\vec{b}\right)^T A^{-1}\left(\vec{x}_2-\vec{b}\right)\right] \tag{5.7.731}$$

avec pour rappel :

$$\begin{cases} \vec{b} = \vec{\mu}_{2|1} = \vec{\mu}_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) \\ A = \Sigma_{2|1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \end{cases} \tag{5.7.732}$$

■ Q.E.D.

Ensuite, nous pouvons déduire deux résultats célèbres pour le cas spécial bivarié (en utilisant $\sigma_{12} = \mathrm{cov}(X_1,X_2) = R_{X_1,X_2}\sigma_{11}\sigma_{22}$), c'est-à-dire (avec la notation traditionnelle dans le domaine des statistiques) :

$$\begin{cases} \mathrm{E}(Y|X) = \vec{\mu}_{2|1} = \vec{\mu}_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1) = \mu_Y + \rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X) \\ \mathrm{V}(Y|X) = \Sigma_{2|1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} = \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2\rho^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2) \end{cases} \tag{5.7.733}$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.9.5 Distribution Normale centrée réduite

La distribution de Gauss-Laplace n'est pas tabulée puisqu'il faudrait autant de tables numériques que de valeurs possibles pour la moyenne μ et l'écart-type σ (qui sont donc des paramètres de la distribution comme nous l'avons vu).

C'est pourquoi, en opérant un changement de variable, la loi Normale devient la "loi Normale centrée réduite" où :

1. "Centrée" signifie soustraire la moyenne μ (la fonction de distribution a alors pour axe de symétrie l'axe des ordonnées).

2. "Réduite" signifie, diviser par l'écart-type σ (la fonction de distribution a alors une variance unitaire).

Par ce changement de variable, la variable k est remplacée par la variable aléatoire centrée réduite :

$$k^* = \frac{k-\mu}{\sigma} \tag{5.7.734}$$

Si la variable k a pour moyenne μ et pour écart-type σ alors la variable k^* a pour moyenne 0 et pour écart-type 1 (cette dernière étant le plus souvent notée Z).

Donc la relation :

$$P(k,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.7.735}$$

s'écrit alors (trivialement) plus simplement :

$$\boxed{P(k^*,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^{*2}}{2}}} \tag{5.7.736}$$

qui n'est d'autre que l'expression de la loi Normale centrée réduite souvent notée $\mathcal{N}(0,1)$ que nous retrouverons très fréquemment dans les chapitres relatifs à la physique, la finance, la gestion et l'ingénierie !

Remarque

Calculer l'intégrale de la relation précédente entre n'importe quelles bornes n'est pas possible formellement parlant de manière exacte. Une idée possible et simple consiste alors à exprimer l'exponentielle en série de Taylor et de faire ensuite l'intégration terme par terme de la série (en s'assurant de prendre suffisamment de termes pour la convergence !).

En cours de traduction anglais

5.7.6.9.6 Droite de Henry

Souvent, dans les entreprises c'est la loi de Gauss-Laplace (Normale) qui est analysée mais des logiciels courants et facilement accessibles comme Microsoft Excel sont incapables de vérifier que les données mesurées suivent une loi Normale lorsque nous faisons de l'analyse fréquentielle (aucun outil intégré par défaut ne permet de le faire) et que nous n'avons pas les données d'origines non groupées.

L'astuce consiste alors à utiliser la variable centrée réduite qui se construit comme nous l'avons démontré plus haut avec la relation suivante :

$$k^*=\frac{k-\mu}{\sigma} \tag{5.7.737}$$

L'idée de la droite d'Henry est alors d'utiliser la relation linéaire entre k et k* donnée par l'équation de la droite :

$$k^*=f(k)=\frac{k}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma} \tag{5.7.738}$$

et qui peut être tracée pour déterminer la moyenne et l'écart-type de la loi Normale !

✍**Exemple :**

Supposons que nous ayons l'analyse fréquentielle suivante de $10'000$ tickets de

caisse dans un supermarché :

Montant des tickets	Nombre de tickets	Nombre cumulé de tickets	Fréquences relatives cumulées
[0,50[	668	668	0.068
[50,100[	919	1,587	0.1587
[100,150[	1,498	3,085	0.3085
[150,200[	1,915	5,000	0.5000
[200,250[	1,915	6,915	0.6915
[250,300[	1,498	8,413	0.8413
[300,350[	919	9,332	0.9332
[350,400[	440	9,772	0.9772
[400 et +	228	10,000	1

TAB. 5.40 – **Intervalles de classe pour la détermination de la droite de Henry**

Si nous traçons maintenant cela sous Microsoft Excel 11.8346 nous obtenons :

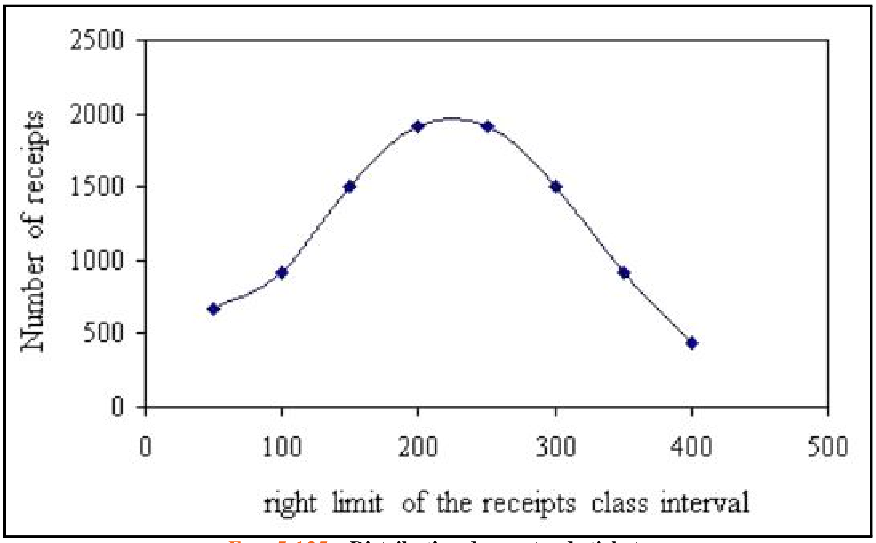


FIG. 5.135 – **Distribution des ventes de tickets**

Ce qui ressemble terriblement à une loi Normale d'où l'autorisation, sans trop de risques, d'utiliser dans cet exemple la technique de la droite d'Henry.

Mais que faire maintenant ? Eh bien connaissant les fréquences cumulées, il ne nous reste plus qu'à calculer pour chacune d'entre elles k^* à l'aide de tables numériques ou avec la fonction `NORMSINV( )` de la version anglaise de Microsoft Excel 11.8346 (car rappelons que l'intégration formelle de la distribution gaussienne n'est pas des plus faciles...).

Ceci nous donnera les valeurs de la loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ de ces mêmes fréquences respectives cumulées (fonction de répartition). Ainsi nous obtenons (nous laissons le soin au lecteur de chercher sa table numérique ou d'ouvrir son logiciel préféré...) :

Borne supérieure de l'intervalle	Fréquences relatives cumulées	Correspondance pour k^* ou $\mathcal{N}(0,1)$
50	0.068	-1.5
100	0.1587	-1
150	0.3085	-0.5
200	0.5000	0
250	0.6915	0.5
300	0.8413	1
350	0.9332	1.5
400	0.9772	2
-	1	-

TAB. 5.41 – **Fréquences relatives cumulées pour la droite de Henry**

Signalons que dans le type de tableau ci-dessus, dans Microsoft Excel, les valeurs de fréquences cumulées nulles et unitaires (extrêmes) posent des problèmes. Il faut alors jouer un petit peu...

Comme nous l'avons spécifié plus haut, nous avons sous forme discrète :

$$k^* = f(k_i) = \frac{k_i}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \quad (5.7.739)$$

Donc graphiquement sous Microsoft Excel 11.8346 nous obtenons grâce à notre tableau le graphique suivant (évidemment en toute rigueur on fera une régression linéaire dans les règles de l'art comme vu dans le chapitre de Méthodes Numériques avec intervalles de confiance, de prédiction et tout le toutim...) :

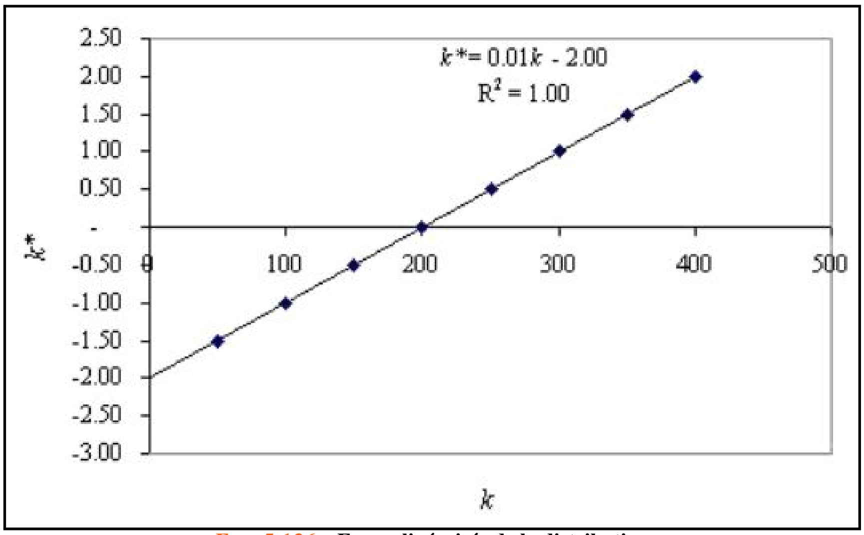


FIG. 5.136 – **Forme linéarisée de la distribution**

Donc à l'aide de la régression donnée par Microsoft Excel 11.8346 (ou calculée par vos soins selon les techniques de régressions linéaires vues dans la section de Méthodes Numériques ??). Il vient :

$$k^* = f(k) = \frac{k}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0.01k - 2 \quad (5.7.740)$$

dont nous déduisons immédiatement :

$$\sigma = 100 \quad \mu = 200 \tag{5.7.741}$$

Il s'agit donc d'une technique particulière pour une distribution particulière ! Des techniques similaires plus ou moins simples (ou compliquées suivant les cas...) existent pour d'autres distributions.

Voyons une autre manière approximative d'aborder le problème. Reprenons pour cet exemple notre tableau :

Prix des tickets	Borne droite de l'intervalle	Centre	Fréquences relatives en %
[0,50[	50	25	6.8
[50,100[	100	75	15.87
[100,150[	150	125	30.85
[150,200[	200	175	50.00
[200,250[	250	225	69.15
[250,300[	300	275	84.13
[300,350[	350	325	93.32
[350,400[	400	375	97.72
[400 et +	-	-	100

La moyenne sera maintenant calculée à l'aide de la valeur centrale des intervalles et des effectifs selon la relation vue au début de cette section (page 539) :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i x_i}{n} \tag{5.7.742}$$

Prix des tickets	Centre	Fréquences relatives cumulées	Calculs %
[0,50[	25	668	16,700
[50,100[	75	919	68,925
[100,150[	125	1,498	187,250
[150,200[	175	1,915	335,125
[200,250[	225	1,915	430,875
[250,300[	275	1,498	411,950
[300,350[	325	919	411,950
[350,400[	375	440	165,000
[400 et +	-	-	-
	Somme :	9,772	1,914,500
		Moyenne :	$\dfrac{1,914,500}{9,772} = 195.92$

La moyenne que nous venons de calculer est donc assez proche de la moyenne obtenue précédemment avec la droite de Henry. L'écart-type sera maintenant calculé à l'aide de la valeur centrale des intervalles et des effectifs selon la relation vue aussi au début de cette section :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} n_i(x_i - \hat{\mu})}{\sum_{i=1}^{N} n_i}} \tag{5.7.743}$$

Prix des tickets	Centre	Fréquences relatives cumulées	Calculs %
[0,50[	25	668	16,700
[50,100[	75	919	68,925
[100,150[	125	1,498	187,250
[150,200[	175	1,915	335,125
[200,250[	225	1,915	430,875
[250,300[	275	1,498	411,950
[300,350[	325	919	411,950
[350,400[	375	440	165,000
[400 et +	-	228	-
		Variance :	8364.16
		Écart-Type :	91.45

L'écart-type que nous venons de calculer est donc assez proche de l'écart-type obtenu avec la méthode de la droite de Henry.

5.7.6.9.7 Diagramme quantile-quantile (Q-Q plot)

Une autre manière de juger qualitativement de l'ajustement de données expérimentales avec une loi théorique (quelle qu'elle soit!!!) est l'utilisation d'un "diagramme quantile-quantile" ou également appelé "q-q plot".

L'idée est assez simple, il s'agit de comparer les données expérimentales aux données théoriques supposées suivre une loi donnée. Ainsi, dans le cas de notre exemple nous avons en prenant les valeurs de la moyenne ($\sim$ 200) et l'écart-type ($\sim$ 100) obtenus avec la droite de Henry comme paramètres théorique de la loi Normale, nous obtenons alors :

Prix des tickets	Borne de droite expérimentale (imposée)	Fréquences relatives cumulées en %	Borne de droite théorique (calculée)
[0,50[	50	6.80%	50.91
[50,100[	100	15.87%	100.02
[100,150[	150	30.85%	149.99
[150,200[	200	50.00%	200
[200,250[	250	69.15%	250.01
[250,300[	300	84.13%	299.98
[300,350[	350	93.32%	350.00
[350,400[	400	97.72%	399.90
[400 et +	-	100%	-

Représenté graphiquement, cela nous donne donc le fameux diagramme quantile-quantile :

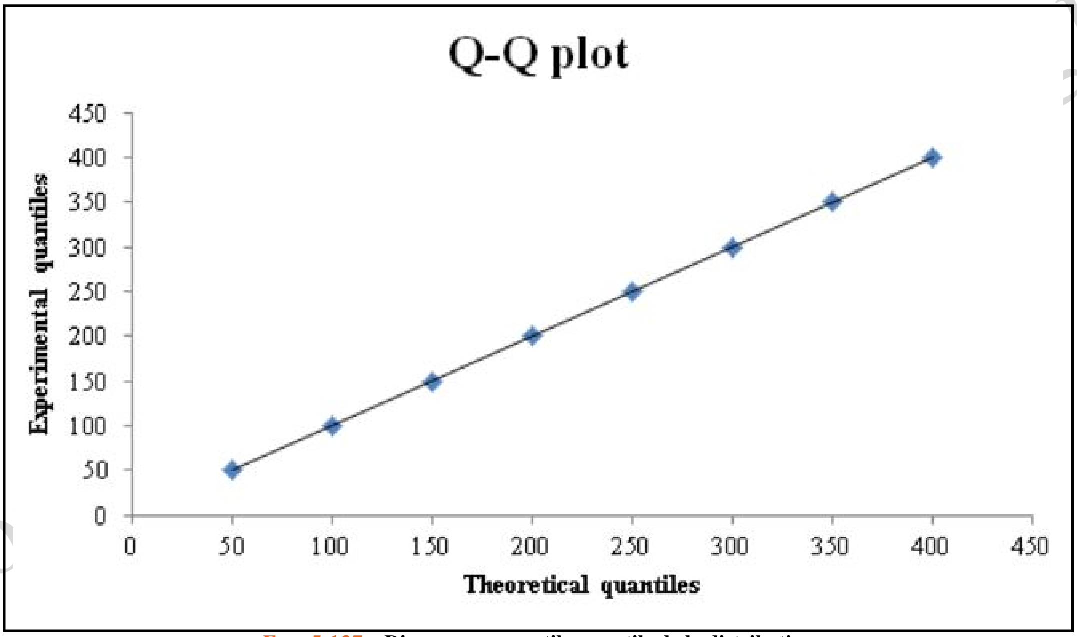


FIG. 5.137 – **Diagramme quantile-quantile de la distribution**

Et bien évidemment on peut comparer les quantiles observés à toute loi théorique supposée. Plus les points seront alignés sur la droite de pente unitaire et d'ordonnée à l'origine nulle, meilleur sera l'ajustement ! C'est très visuel, très simple et beaucoup utilisé par les non spécialistes en statistiques dans les entreprises.

Pour les personnes qui n'ont peut-être pas accès à un tableur ou à un logiciel statistique, voici un tableau qui peut être utile relativement à la loi Normale :

DISTRIBUTION CUMULATIVE DE LA LOI NORMALE

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.10 Distribution Log-Normale

Nous disons qu'une variable aléatoire positive Xsuit une "distribution log-normale" (ou "loi log-normale") si en posant :

$$y=\ln(x) \tag{5.7.744}$$

nous voyons que y suit une fonction de probabilité de type loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2 (moments de la loi Normale).

In extenso, de par les propriétés des logarithmes, une variable peut être modélisée par une loi log-normale si elle est le résultat de la multiplication d'un grand nombre de petits facteurs indépendants (propriété du produit en somme des logarithmes et de la stabilité de la loi Normale par l'addition).

La fonction de densité de X pour $x \geq 0$ est alors (cela sera justifié plus bas !) :

$$\boxed{f(x)=\mathcal{LN}(\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \tag{5.7.745}$$

qui peut être calculée dans la version française de Microsoft Excel 11.8346 avec la fonction `LOI.LOGNORMALE( )` ou pour la réciproque par `LOI.LOGNORNALE.INVERSE( )`.

Ce type de scénario se retrouve fréquemment en physique, dans les techniques de maintenance ou encore en finance des marchés dans le modèle de pricing des options (voir ces chapitres respectifs du présent livre pour des exemples concrets). Il y a par ailleurs une remarque importante relativement à la loi log-normale dans le traitement plus loin du théorème central limite !

Montrons que la fonction de probabilité cumulée correspond bien à une loi Normale si nous faisons le changement de variable mentionné précédemment :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \tag{5.7.746}$$

en posant :

$$y=\ln(x)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow \mathrm{d}x=x\mathrm{d}y \tag{5.7.747}$$

et (par définition) :

$$x=e^y \tag{5.7.748}$$

nous avons bien :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5.7.749}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous retombons donc bien sur une loi Normale ! La fonction cumulative est donc similairement donnée par :

$$F_X(x)=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \tag{5.7.750}$$

avec pour rappel :

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t \tag{5.7.751}$$

Identiquement à la distribution Normale, nous obtenons immédiatement la fonction quantile :

$$Q_X(p)=\exp\left(\mu+\sqrt{2}\sigma\cdot\operatorname{erf}^{-1}(2p-1)\right) \tag{5.7.752}$$

Et toujours similairement à la distribution Normale, nous obtenons la médiane qui est donnée par :

$$\text{médiane}(X)=M_e=e^{\mu} \tag{5.7.753}$$

La valeur modale de la distribution log-normale est une sorte de piège. Certaines personnes supposent parfois que la valeur modale est également $M_0=e^{\mu}$. Mais c'est faux ! En effet, rappelons dans un premier temps que la valeur modale est définie par :

$$\text{mode}(X)=\arg\max_x f_X(x) \tag{5.7.754}$$

Et rappelez-vous que la fonction de densité de la distribution log-normale est :

$$f_X(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{5.7.755}$$

Donc si nous calculons la racine de la dérivée première :

$$\begin{aligned}f'_X(x)=0&=-\frac{1}{x^2\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\cdot\left(1+\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma^2}\right)\\ -1&=\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma^2}\\ x&=e^{\left(\mu-\sigma^2\right)}\end{aligned} \tag{5.7.756}$$

D'où la valeur modale de la distribution log-normale donnée par :

$$M_0=e^{\mu-\sigma^2} \tag{5.7.757}$$

L'espérance (moyenne) de X est donnée alors par (le logarithme népérien n'étant pas défini pour $x<0$ nous bornons l'intégrale à partir de zéro) :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int\limits_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} x\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}+u}\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{5.7.758}$$

En cours de traduction de l'anglais

où nous avons effectué le changement de variable :

$$u=\ln(x)\Leftrightarrow x=e^{u} \qquad x\mathrm{d}u=\mathrm{d}x \tag{5.7.759}$$

L'expression :

$$\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}+u \tag{5.7.760}$$

étant par ailleurs égale à :

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(u-(\mu+\sigma^2)\right)^2-\left(\mu+\sigma^2\right)^2+\mu^2\right) \tag{5.7.761}$$

la dernière intégrale devient donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{e^{\frac{\left(\mu+\sigma^2\right)^2-\mu^2}{2\sigma\pi}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma\pi}\left(u-\left(\mu+\sigma^2\right)^2\right)}\mathrm{d}u\\&=e^{\frac{\left(\mu+\sigma^2\right)^2-\mu^2}{2\sigma\pi}}=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\end{aligned} \tag{5.7.762}$$

et où nous avons utilisé la propriété qui a émergée lors de notre étude de la loi Normale, c'est-à-dire que toute intégrale de la forme :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-c^{\text{te}})^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\sigma\sqrt{2\pi} \tag{5.7.763}$$

a donc toujours la même valeur !

Pour le calcul de la variance, rappelons que pour une variable aléatoire X, nous avons la relation de Huyghens :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2 \tag{5.7.764}$$

Calculons $\mathrm{E}(X^2)$ en procédant de manière similaire aux développements précédents :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\int\limits_{0}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{u}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}e^{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}+2u}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(u-\left(\mu+2\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}}e^{\frac{\left(\mu+2\sigma^2\right)^2-\mu^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\\&=\frac{e^{\frac{\left(\mu+2\sigma^2\right)-\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(u-\left(\mu+2\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u\\&=e^{\frac{\left(\mu+2\sigma^2\right)-\mu^2}{2\sigma^2}}=e^{\frac{4\mu\sigma^2+4\sigma^4}{2\sigma^2}}=e^{2\mu+2\sigma^2}=e^{2(\mu+\sigma^2)}\end{aligned} \tag{5.7.765}$$

En cours de traduction de l'anglais

où nous avons encore une fois le changement de variable :

$$u = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du \tag{5.7.766}$$

et où nous avons transformé l'expression :

$$-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2} + 2u \tag{5.7.767}$$

sous la forme :

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(u-(\mu+2\sigma^2)\right)^2 - \left(\mu+2\sigma^2\right)^2 + \mu^2\right) \tag{5.7.768}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 &= e^{2\mu+2\sigma^2} - \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \end{aligned} \tag{5.7.769}$$

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la fonction Log-Normale de paramètres $(\mu, \sigma) = (0, 1)$:

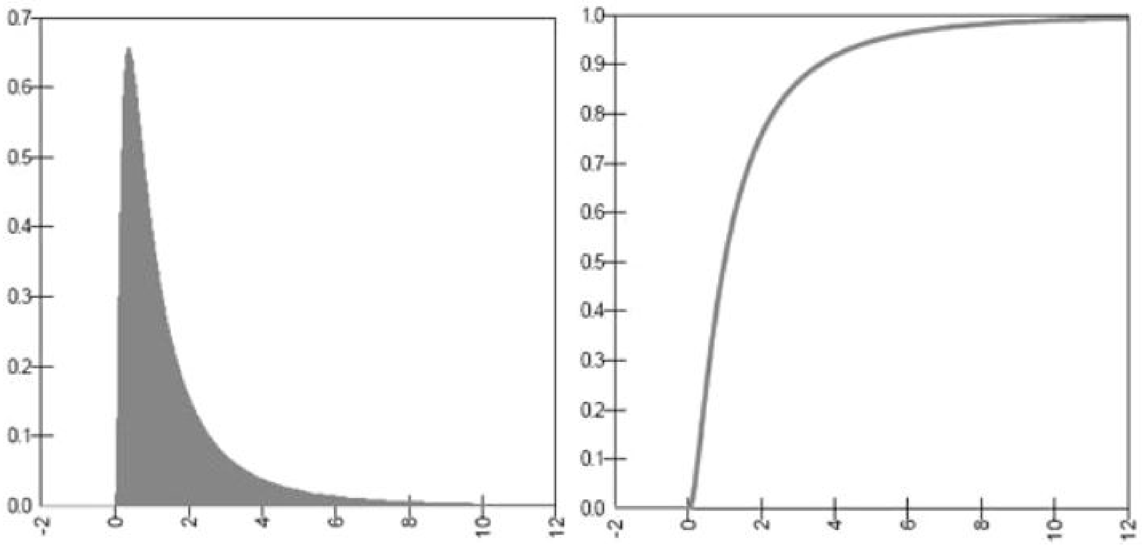


FIG. 5.138 – Loi Log-Normale NB (fonction de densité et de distribution cumulative)

5.7.6.11 Distribution Uniforme Continue

Soient $a < b$. Nous définissons la fonction de distribution de la "fonction uniforme" (ou "loi uniforme") par la relation :

$$\mathcal{U}_{a,b}(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} \tag{5.7.770}$$

où $1_{[a,b]}$ signifie qu'en dehors du domaine de définition $[a, b]$ la fonction de distribution est nulle. Nous retrouverons ce type de notation pour certaines autres fonctions de distribution plus loin. Le cas $\mathcal{U}_{0,1}(x)$ est communément appelé "fonction uniforme standard".

Nous avons donc pour fonction de répartition :

$$P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} \int_a^x \mathrm{d}x = \frac{x_{[a,b]} - a}{b-a} \tag{5.7.771}$$

Il s'agit bien d'une fonction de distribution car elle vérifie (intégrale simple) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{a,b} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} \int_a^b \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} x|_a^b = 1_{[a,b]} \frac{b-a}{b-a} = 1 \tag{5.7.772}$$

La distribution uniforme a par ailleurs pour espérance (moyenne) :

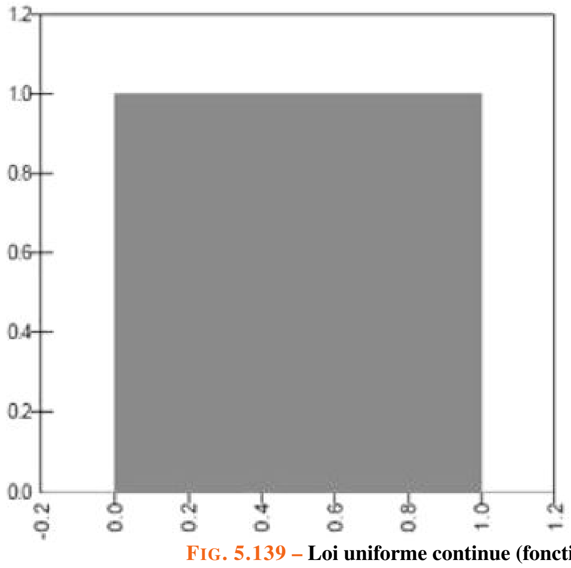
$$\begin{aligned} \mu = \mathrm{E}(X) &= \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{(b+a)(b-a)}{2} = \frac{a+b}{2} \end{aligned} \tag{5.7.773}$$

et pour variance en utilisant le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 &= \int_a^b x^2 f(x) \mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) - \frac{1}{4}(b^2 + 2ab + a^2) = \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(b^2 + 2ab + a^2)}{12} \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2)}{12} = \frac{b^2 - 2ab - a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \tag{5.7.774}$$

En cours de traduction de l'anglais

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et respectivement de répartition pour la loi Uniforme continue de paramètres $(a, b) = (0, 1)$:



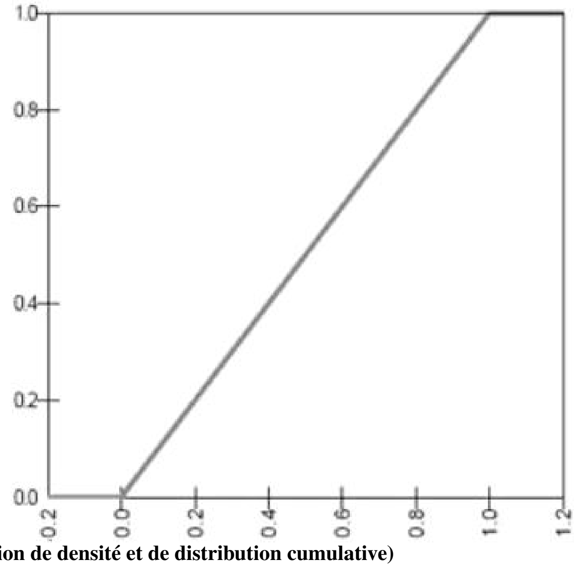


FIG. 5.139 – Loi uniforme continue (fonction de densité et de distribution cumulative)

Remarque

Cette distribution est souvent utilisée en simulation dans les entreprises pour signaler que la variable aléatoire a des probabilités égales d'avoir une valeur comprise dans un certain intervalle (typiquement dans les rendements de portefeuilles ou encore dans l'estimation des durées des projets). Le meilleur exemple d'application étant à nouveau le logiciel CrystalBall ou @Risk qui s'intègrent dans Microsoft Project.

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution uniforme continue :

$$X = \mathcal{U}_{a,b}(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]} \tag{5.7.775}$$

Alors, la fonction quantile de X est :

$$Q_X(p) = \begin{cases} -\infty \text{ si } p = 0 \\ bp + a(1-p) \text{ si } p > 0 \end{cases} \tag{5.7.776}$$

La fonction de distribution cumulative de la distribution uniforme continue est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \tag{5.7.777}$$

La fonction quantile est définie pour rappel comme le plus petit x, tel que $F_X(x) = p$:

$$Q_X(p) = \min \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = p\} \tag{5.7.778}$$

Ainsi, nous avons $Q_X(p) = -\infty$, si $p = 0$. Lorsque $p > 0$, nous avons donc que :

$$Q_X(p) = F_X^{-1}(x) \tag{5.7.779}$$

Cela peut être dérivé en réorganisant la fonction cumulative :

$$p = \frac{x-a}{b-a} \tag{5.7.780}$$

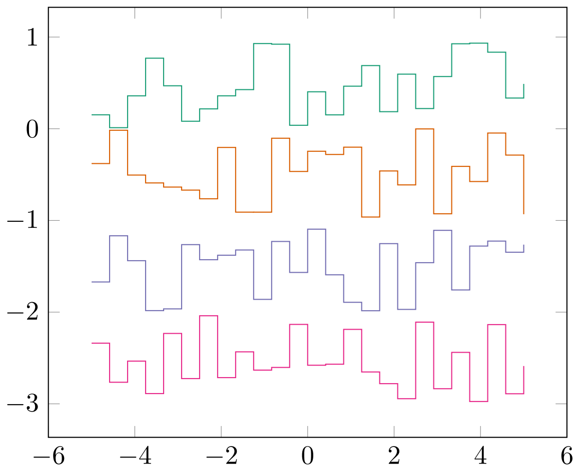
Comme :

$$x = p(b-a) + a = bp + a(1-p) \tag{5.7.781}$$

Voyons un résultat intéressant de la loi Uniforme continue (et qui s'applique à la discrète aussi en fait...).

La figure ci-dessous montre la génération (25 essais) de quatre variables uniformément distribuées avec des décalages différents :

En cours de traduction de l'anglais



Nous pouvons généralement reconnaître dans les motifs ci-dessus quelque chose qui est très similaire aux motifs observés dans les laboratoires nucléaires et des matériaux qui étudient les fluctuations du vide quantique !

Souvent j'entends des gestionnaires (qui se jugent de haut niveau) dire que comme une mesure a une probabilité égale d'avoir lieu dans un intervalle fermé donné, alors la somme de deux variables aléatoires indépendantes du même type aussi !

Or nous allons démontrer ici que ce n'est pas le cas (si quelqu'un a une démonstration plus élégante je suis preneur) !

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 5.45.5. Considérons deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui suivent une loi uniforme dans un intervalle fermé $[0, a]$. Nous cherchons donc la densité de leur somme qui sera notée :

$$Z = X + Y \tag{5.7.782}$$

Nous avons alors :

$$f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 \leq x, y \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.7.783}$$

avec la variable :

$$0 \leq z \leq 2a \tag{5.7.784}$$

Pour calculer la loi de la somme, rappelons que nous savons qu'en termes discrets cela équivaut à faire le produit conjoint des probabilités (voir section Probabilités page 479) d'apparition des deux variables continues (se rappeler le même genre de calcul sous forme discrète !).

C'est-à-dire :

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y \tag{5.7.785}$$

Comme $f_Y(y) = 1$ si $0 \leq y \leq a$ et 0 sinon alors le produit de convolution précédent se réduit à :

$$f_Z(z) = \int_0^a f_X(z-y)\mathrm{d}y \tag{5.7.786}$$

L'intégrant vaut par définition 0 sauf lorsque par construction $0 \leq z-y \leq a$ où il vaut alors 1.

Intéressons-nous alors aux bornes de l'intégrale dans ce dernier cas qui est bien évidemment le seul qui est intéressant....

Faisons d'abord un changement de variables en posant :

$$u = z - y \tag{5.7.787}$$

d'où :

$$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}y \tag{5.7.788}$$

L'intégrale s'écrit alors dans cet intervalle après ce changement de variable :

$$f_Z(z) = \int_0^a f_X(z-y)\mathrm{d}y = -\int_z^{z-a} f_X(u)\mathrm{d}u = \int_z^{z-a} \mathrm{d}u \tag{5.7.789}$$

En se rappelant comme vu au début que $0 \leq z \leq 2a$, alors nous avons immédiatement si $z < 0$ et $z > 2a$ que l'intégrale est nulle.

Nous allons considérer deux cas pour cet intervalle car la convolution de ces deux fonctions rectangulaires peut se distinguer selon la situation où dans un premier temps elles se croisent (s'emboîtent), c'est-à-dire où $0 \leq z \leq a$, et ensuite s'éloignent l'une de l'autre, c'est-à-dire $a < z \leq 2a$.

- Dans le premier cas (emboîtement) où $0 \leq z \leq a$:

$$f_Z(u) = \int_{z-a}^{z} \mathrm{d}u = \int_0^z \mathrm{d}u = u|_0^z = z \tag{5.7.790}$$

où nous avons changé la borne inférieure à 0 car de toute façon $f_X(u)$ est nulle pour toute valeur négative (et lorsque $0 \leq z \leq a$, $z-a$ est justement négatif ou nul !).

- Dans le deuxième cas (déboîtement) où $a < z \leq 2a$:

$$f_Z(u) = \int_{z-a}^{z} \mathrm{d}u = \int_{z-a}^{a} \mathrm{d}u = a-(z-a) = 2a - z \tag{5.7.791}$$

où nous avons changé la borne supérieure à a car de toute façon $f_X(u)$ est nulle pour toute valeur supérieure (et lorsque $a \leq z \leq 2a$, z est justement plus grand que a).

Donc au final, nous avons :

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ 2a - z & \text{si } a \leq z \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.7.792}$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Il s'agit d'un cas particulier, volontairement simplifié, de la loi triangulaire que nous allons voir de suite.

Ce résultat (qui peut sembler contre intuitif) se vérifie en quelques secondes avec un tableur comme Microsoft Excel 11.8346 en utilisant la fonction `ALEA.ENTRE.BORNES( )` et la fonction `FREQUENCE( )` dans la version française.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.6.12 Distribution Triangulaire

Soient $a < c < b$. Nous définissons la "distribution triangulaire" (ou "loi triangulaire") par construction basée sur les deux fonctions de distribution suivantes :

$$P_{a,c}(x)=\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}\cdot 1_{[a,c]} \quad \text{et} \quad P_{c,b}(x)=\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}\cdot 1_{]c,b]} \tag{5.7.793}$$

où a est souvent assimilée à la valeur optimiste, c la valeur attendue (le mode) et b la valeur pessimiste.

C'est aussi la seule manière d'écrire cette fonction de distribution si le lecteur garde à l'esprit que le triangle de base $c-a$ doit avoir une hauteur h valant $2/(c-a)$ telle que sa surface totale soit égale à l'unité (nous allons de suite le démontrer).

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la fonction triangulaire de paramètres $(a,c,b)=(0,3,5)$:

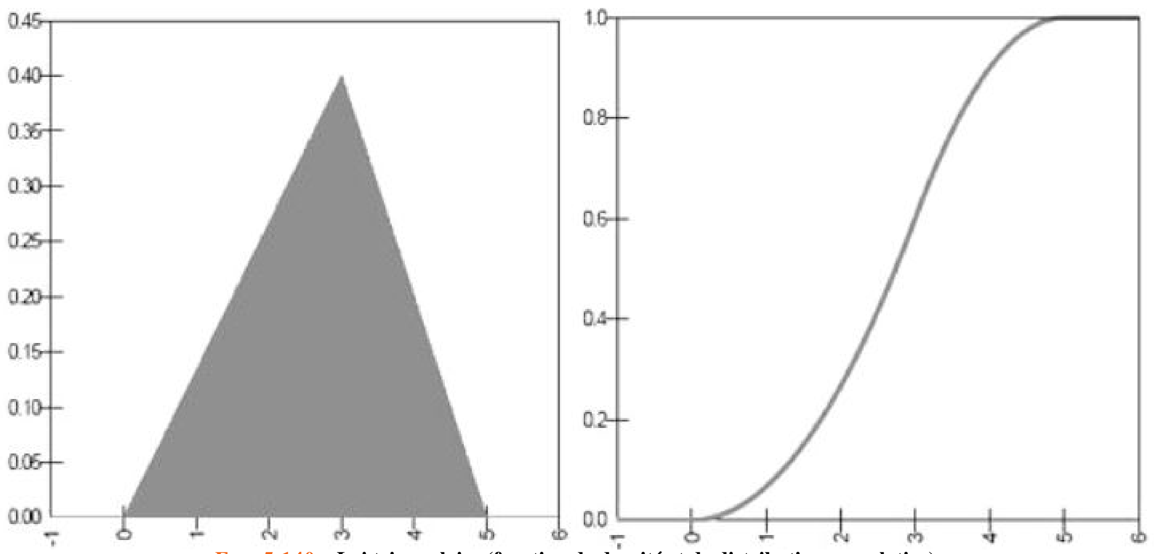


FIG. 5.140 – Loi triangulaire (fonction de densité et de distribution cumulative)

La pente de la première droite (croissante de gauche) est donc bien évidemment :

$$\frac{2a}{(b-a)(c-a)} \tag{5.7.794}$$

et la pente de la deuxième droite (décroissante à droite) :

$$\frac{-2}{(b-a)(b-c)} \tag{5.7.795}$$

Cette fonction est une fonction de distribution si elle vérifie :

$$\rho=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(P_{a,c}(x)+P_{c,b}(x))\mathrm{d}x=1 \tag{5.7.796}$$

Il s'agit dans ce cas, simplement de l'aire du triangle qui rappelons-le est simplement la base multipliée par la hauteur le tout divisé par 2 (voir section Formes Géométriques page 2865) :

$$\rho=\frac{1}{2}\left((b-a)\cdot\frac{2}{b-a}\right)=1 \tag{5.7.797}$$

Remarque

Cette distribution est beaucoup utilisée en gestion de projet dans le cadre de l'estimation des durées des tâches ou encore en simulations industrielles. La valeur a correspondant à la valeur optimiste, la valeur c à la valeur attendue (mode) et la valeur b à la valeur pessimiste. Le meilleur exemple d'application étant à nouveau les logiciels CrystalBall ou @Risk qui s'intègrent dans Microsoft Project.

La distribution triangulaire a par ailleurs une espérance (moyenne) :

$$\begin{aligned}
\mu &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{c} x\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{b} x\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right)\Big|_a^c+\frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_c^b\\
&=\frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\left(\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{2}ac^2\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)\right)\\
&-\frac{2}{(b-a)(c-a)}\left(\left(\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{3}b^3\right)-\left(\frac{1}{2}bc^2-\frac{1}{3}c^3\right)\right)\\
&=2\frac{(b-c)\left(\left(\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{2}ac^2\right)+\frac{a^3}{6}\right)+(c-a)\left(\frac{1}{6}b^3-\left(\frac{1}{2}bc^2-\frac{1}{3}c^3\right)\right)}{(b-a)(c-a)(b-c)}\\
&=2\frac{\frac{1}{3}bc^3-\frac{1}{2}\cancel{abc^2}+\frac{ba^3}{6}-\frac{1}{3}\cancel{c^4}+\frac{1}{2}ac^3-\frac{\cancel{a^3c}}{6}}{(b-a)(c-a)(b-c)}\\
&+2\frac{\frac{1}{6}cb^3-\frac{1}{2}bc^3+\frac{1}{3}\cancel{c^4}-\frac{ab^3}{6}+\frac{1}{2}\cancel{abc^2}-\frac{1}{3}ac^3}{(b-a)(c-a)(b-c)}\\
&=\frac{\frac{2}{3}bc^3+ac^3-\frac{1}{3}a^3c+\frac{1}{3}cb^3+\frac{ba^3}{3}-\frac{ab^3}{3}-bc^3-\frac{2}{3}ac^3}{(b-a)(c-a)(b-c)}\\
&=\frac{-\frac{1}{3}bc^3-\frac{1}{3}a^3c+\frac{1}{3}ba^3-\frac{1}{3}\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{3}cb^3+\frac{1}{3}ac^3}{(b-a)(c-a)(b-c)}\\
&=\frac{1}{3}\frac{-bc^3-a^3c+ba^3-ab^3+cb^3+ac^3}{(b-a)(c-a)(b-c)}=\frac{1}{3}\frac{(a+b+c)(b-a)(c-a)(b-c)}{(b-a)(c-a)(b-c)}\\
&=\frac{a+b+c}{3}
\end{aligned} \tag{5.7.798}$$

En cours de traduction de l' anglais

et pour variance :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c (x-\mu)^2 \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}\mathrm{d}x + \int_c^b (x-\mu)^2 \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{6}\frac{c\left(-3c^3+8c^3\mu+4c^2a-6c\mu^2-12c\mu a+12\mu^2 a\right)}{(b-a)(c-a)} + \frac{1}{6}\frac{a^2(a^2-4\mu a+6\mu^2)}{(b-a)(c-a)} \\ &= -\frac{1}{6}\frac{-3c^3+8c^2\mu+4c^2b-6c\mu^2-12c\mu b+12\mu^2 b}{(b-a)(c-a)} + \frac{1}{6}\frac{b^2(b^2-4\mu b+6\mu^2)}{(b-a)(c-a)} \\ &= \frac{1}{6}b^2+\frac{1}{6}ba-\frac{2}{3}\mu b+\frac{1}{6}a^2-\frac{2}{3}\mu a+\mu^2+\frac{1}{6}ca-\frac{2}{3}c\mu+\frac{1}{6}c^2\end{aligned} \tag{5.7.799}$$

Nous pouvons remplacer μ par l'expression obtenue précédemment et simplifier (c'est de l'algèbre élémentaire pénible...) :

$$\sigma^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18} \tag{5.7.800}$$

Nous pouvons montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes chacune de loi uniforme sur $[a,b]$ (donc indépendantes et identiquement distribuées) suit une loi triangulaire sur $[2a,2b]$ mais si elles n'ont pas les mêmes bornes, alors leur somme donne un truc qui n'a pas de nom à ma connaissance...

Comme déjà mentionné plus haut dans l'encadré de remarque précédent, la distribution triangulaire est beaucoup utilisée en Gestion des Risques (Risk Management) par les débutants (le niveau supérieur consistant à utiliser la distribution bêta que nous verrons plus loin). Un chiffre assez courant que vous pouvez trouver dans les manuels de gestion de projet pour débutants est la matrice impact/probabilité donnée ci-dessous ("l'impact" est modélisé en fonction de la distance entre les points optimistes et pessimistes) :

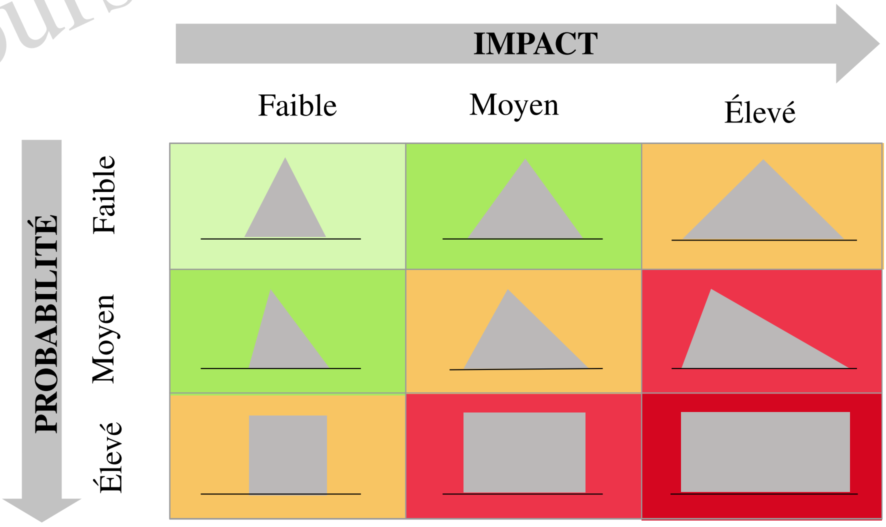


FIG. 5.141 – **Matrice de risques naïve en gestion de projet (auteur : Jose Barato)**

L'idée d'une matrice de risques a été développée pour la première fois au Centre des systèmes électroniques de l'US Air Force (voir [150]).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.13 Distribution de Pareto

La "distribution de Pareto" (ou "loi de Pareto"), appelée aussi "loi de puissance" ou encore "loi scalante" est la formalisation du principe des $80-20$. Cet outil d'aide à la décision détermine les facteurs (environ 20%) cruciaux qui influencent la plus grande partie (80%) de l'objectif.

Remarque

Cette loi est un outil fondamental et basique en gestion de la qualité (voir section de Génie Industriel page **??** et Techniques de Gestion **??**). Elle est aussi utilisée en réassurance. La théorie des files d'attente s'est intéressée à cette distribution, lorsque des recherches des années 11990 (selon calendrier holocène) ont montré que cette loi régissait aussi nombre de grandeurs observées dans le trafic Internet (et plus généralement sur tous les réseaux de données à grande vitesse).

Une variable aléatoire est dite par définition suivre une loi de Pareto si sa fonction de répartition est donnée par :

$$P(X \leqslant x)=1-\left(\frac{x_m}{x}\right)^k \quad (5.7.801)$$

avec x qui doit être supérieur ou égal à x_m.

La fonction de densité (fonction de distribution) de Pareto est alors :

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-\left(\frac{x_m}{x}\right)^k\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x_m}{x}\right)^k=-x_m^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^k}=k\frac{x_m^k}{x^{k+1}} \quad (5.7.802)$$

avec $k \in \mathbb{R}_+$ et $x \geq x_m \geq 0$ (donc $x>0$).

La distribution de Pareto est donc définie par deux paramètres, x_m et k (nommé "index de Pareto"). C'est une loi dite aussi à "invariance d'échelle" ou "loi fractale", terme définissant la propriété suivante :

$$f\left(c^{te}\cdot x\right)=kx_m^k\left(c^{te}\cdot x\right)^{-k-1}=\left(c^{te}\right)^{-k-1}kx_m^kx^{-k-1}=\left(c^{te}\right)^{-k-1}f(x)\propto f(x) \quad (5.7.803)$$

La loi de Pareto est par ailleurs bien une fonction de distribution puisque étant connue sa fonction de répartition :

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x&=\left.\left(1-\left(\frac{x_m}{x}\right)^k\right)\right|_{x_m}^{+\infty}\\&=\left(1-\left(\frac{x_m}{+\infty}\right)^k\right)-\left(1-\left(\frac{x_m}{x_m}\right)^k\right)=(1-0)-(1-1^k)=1\end{aligned} \quad (5.7.804)$$

L'espérance (moyenne) est donnée par :

$$\mu=\mathrm{E}(X)=\int\limits_{x_m}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_m}^{+\infty} xk\frac{x_m^k}{x^{k+1}}x=kx_m^k\int\limits_{x_m}^{+\infty} x\frac{1}{x^k}x=-\left.\frac{kx_m^k}{k-1}\frac{1}{x^{k-1}}\right|_{x_m}^{+\infty}=\frac{kx_m}{k-1} \quad (5.7.805)$$

En cours de traduction de l'anglais

si $k>1$. Si $k \leq 1$, l'espérance n'existe pas.

Pour calculer la variance, en utilisant la relation de Huygens :

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2 \qquad (5.7.806)$$

nous avons :

$$\mathrm{E}(X^2)=\int\limits_{x_m}^{+\infty} x^2 f(x) x = k x_m^k \int\limits_{x_m}^{+\infty} \frac{1}{x^{k-1}} x = -\frac{k x_m^k}{k-2}\frac{1}{x^{k-2}}\bigg|_{x_m}^{+\infty} = \frac{k x_m^2}{k-2} \qquad (5.7.807)$$

si $k>2$. Si $k \leq 2$, $\mathrm{E}(X^2)$ n'existe pas !

Donc si $k>2$:

$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=\frac{k x_m^2}{k-2}-\left(\frac{k x_m}{k-1}\right)^2=\frac{k x_m^2}{(k-1)^2(k-2)} \qquad (5.7.808)$$

Si $k \leq 2$, la variance n'existe pas !

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la fonction de Pareto de paramètres $(x, x_m, k)=(x,1,2)$:

En ... ion de l'anglais

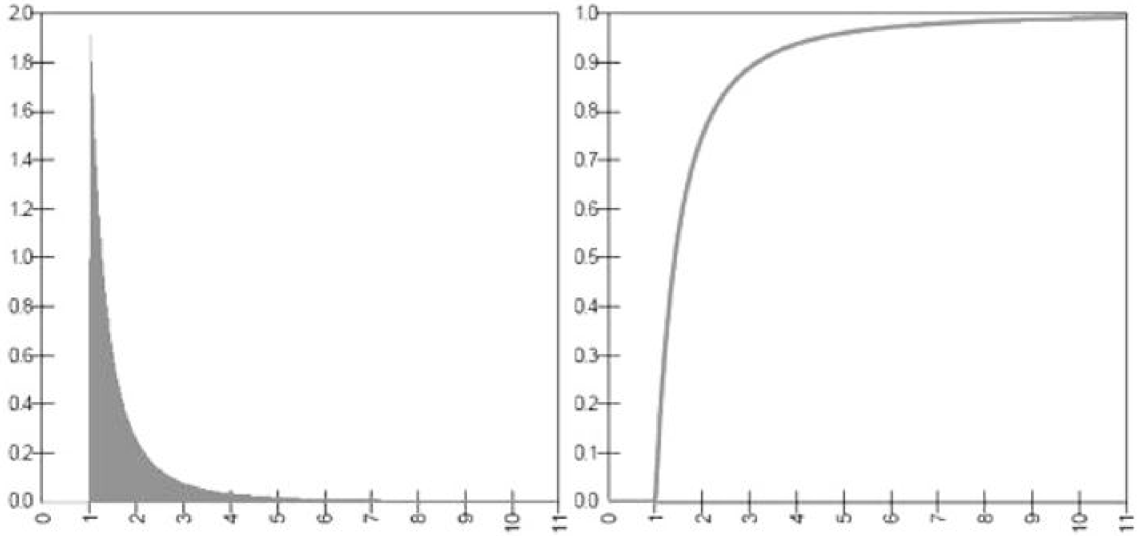


FIG. 5.142 – **Loi de Pareto (fonction de densité et de distribution cumulative)**

Remarque

Il faut noter que lorsque $k \rightarrow +\infty$ la distribution s'approche de $\delta(x-x_m)$ où δ est la fonction Delta de Dirac.

Il existe une autre manière importante de déduire la famille des lois de Pareto qui permet de comprendre bien des choses concernant d'autres lois et qui est souvent présentée de la façon suivante :

Notons x_0 le seuil au-delà duquel nous calculons l'espérance de la quantité examinée, et $\text{E}(Y)$ l'espérance au-delà de ce seuil equation tel qu'il soit proportionnel (linéairement dépendant) au seuil choisi :

$$\text{E}(Y) = ax_0 + b \tag{5.7.809}$$

Cette relation fonctionnelle exprime l'idée que la moyenne conditionnelle au-delà du seuil x_0 est un multiple de ce seuil à une constante près, c'est-à-dire une fonction linéaire de ce seuil.

Ainsi, en gestion de projets par exemple, nous pourrions dire qu'une fois une certain seuil de durée dépassé, la durée espérée est un multiple de ce même seuil à une constante près.

Si une relation linéaire de ce type existe et est bien vérifiée, nous parlons alors de distribution de probabilité sous la forme d'une loi de Pareto généralisée.

Considérons l'espérance mathématique de la fonction conditionnelle bayésienne donnée par (voir section Probabilités page 495) :

$$\text{E}(Y) = \frac{1}{P(X \geq x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} y f(y) \text{d}y \tag{5.7.810}$$

où la notation à gauche est un peu raccourcie mais le lecteur comprendra implicitement qu'il s'agit d'un espérance conditionnelle.

Si nous notons $F(y)$ la fonction de répartition de $f(y)$, nous avons alors par définition :

$$\text{d}F(y) = f(y)\text{d}y \tag{5.7.811}$$

Dès lors :

$$\text{E}(Y) = \frac{1}{P(X \geq x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} y \text{d}F(y) \tag{5.7.812}$$

et si nous définissons :

$$\bar{F}_X(x) = P(X \geq x_0) = 1 - F_X(x) \tag{5.7.813}$$

que nous pouvons assimiler à la "queue de la distribution".

Il vient :

$$\text{E}(Y) = \frac{1}{\bar{F}(x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} y \text{d}F(y) \tag{5.7.814}$$

et donc nous cherchons le cas très particulier où :

$$\text{E}(Y) = \frac{1}{\bar{F}(x_0)} \int_{x_0}^{+\infty} y \text{d}F(y) = ax + b \tag{5.7.815}$$

En cours de traduction de l' anglais

c'est-à-dire :

$$\int_{x_0}^{+\infty} y\mathrm{d}F(y) = (ax+b)\bar{F}(x_0) \quad (5.7.816)$$

En dérivant par rapport à x, nous trouvons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{+\infty} y\mathrm{d}F(y)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((ax+b)\bar{F}(x_0)\right) \quad (5.7.817)$$

La dérivée de l'intégrale définie ci-dessus sera la dérivée d'une constante (valorisation de l'intégrale en $+\infty$) moins la dérivée de l'intégrale de l'expression analytique en x_0. Nous avons donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{+\infty} y\mathrm{d}F(y)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y\right) = -xf(x) = -x\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = a\bar{F}(x) + (ax+b)\frac{\mathrm{d}\bar{F}(x)}{\mathrm{d}x} \quad (5.7.818)$$

Soit :

$$-x\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = a\bar{F}(x) + (ax+b)\frac{\mathrm{d}\bar{F}(x)}{\mathrm{d}x} \quad (5.7.819)$$

et comme :

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(1-\bar{F}) = -\mathrm{d}\bar{F} \quad (5.7.820)$$

il vient :

$$x\frac{\mathrm{d}\bar{F}}{\mathrm{d}x} = a\bar{F}(x) + (ax+b)\frac{\mathrm{d}\bar{F}}{\mathrm{d}x} \quad (5.7.821)$$

Après simplification et réarrangement nous obtenons :

$$a\bar{F}(x)\mathrm{d}x = -\left(x(a-1)+b\right)\mathrm{d}\bar{F}(x) \quad (5.7.822)$$

qui est donc une équation différentielle en $\bar{F}(x)$. Sa résolution fournit toutes les formes de lois de Pareto recherchées, selon les valeurs que prennent les paramètres a et b.

Pour résoudre cette équation différentielle, considérons le cas particulier où $a > 1, b = 0$. Nous avons alors :

$$a\bar{F}(x)\mathrm{d}x = -x(a-1)\mathrm{d}\bar{F}(x) \quad (5.7.823)$$

En posant :

$$k = \frac{a}{a-1} \quad (5.7.824)$$

Nous avons alors :

$$-\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\frac{1}{\bar{F}(x)}\mathrm{d}\bar{F}(x) \quad (5.7.825)$$

En cours de traduction de l'anglais

et donc :

$$-\ln(x)=\frac{1}{k}\ln(\bar{F}(x))+c^{te} \tag{5.7.826}$$

Il vient :

$$e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{k}\ln(\bar{x})+c^{te}}=e^{\frac{1}{k}\ln\left(\bar{F}(x)\right)}e^{c^{te}} \tag{5.7.827}$$

et dès lors :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\bar{F}(x)^{\frac{1}{k}}c^{te} \tag{5.7.828}$$

et donc :

$$\bar{F}(x)=\left(\frac{c^{te}}{x}\right)^k=\left(\frac{x_m}{x}\right)^k \tag{5.7.829}$$

Ensuite, il vient pour la fonction de distribution cumulative :

$$F(x)=1-\bar{F}(x)=1-\left(\frac{x_m}{x}\right)^k \tag{5.7.830}$$

Si nous cherchons la fonction de distribution, nous dérivons par x pour obtenir :

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=k\frac{x_m^k}{x^{k+1}} \tag{5.7.831}$$

Il s'agit de la loi de Pareto que nous avons utilisée depuis le début et nommée "distribution de Pareto de type I" (nous ne montrerons pas dans ce livre celles de type II).

Une chose intéressante à observer au passage est le cas de la résolution de l'équation différentielle :

$$a\bar{F}(x)\mathrm{d}x=-(x(a-1)+b)\mathrm{d}\bar{F}(x) \tag{5.7.832}$$

lorsque $a=1,b>0$. L'équation différentielle se réduit alors à :

$$\bar{F}(x)\mathrm{d}x=-b\mathrm{d}\bar{F}(x) \tag{5.7.833}$$

Soit :

$$-\frac{1}{b}\mathrm{d}x=\frac{1}{\bar{F}(x)}\mathrm{d}\bar{F}(x) \tag{5.7.834}$$

Après intégration :

$$-\frac{1}{b}x=\ln(\bar{F}(x)) \tag{5.7.835}$$

et donc :

$$\bar{F}(x)=e^{-\frac{1}{b}x} \tag{5.7.836}$$

En cours de traduction de l' anglais

Si nous faisons un petit changement de notation :

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \quad (5.7.837)$$

et que nous écrivons la fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \bar{F}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (5.7.838)$$

et en dérivant nous obtenons la fonction de distribution de la loi exponentielle :

$$F(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (5.7.839)$$

Donc la loi exponentielle a une espérance conditionnelle seuil qui est égale à :

$$\mathrm{E}(Y) = ax_0 + b \underset{a=1}{=} x_0 + b \underset{b=\dfrac{1}{\lambda}}{=} x_0 + \frac{1}{b} = x_0 + \sigma \quad (5.7.840)$$

Donc l'espérance conditionnelle seuil est égale à elle-même augmenté de l'écart-type de la distribution.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.6.14 Distribution exponentielle

Nous définissons la "distribution exponentielle" (ou "loi exponentielle") par la relation de fonction de distribution suivante :

$$P(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty]} \quad (5.7.841)$$

avec $\lambda > 0$ qui comme nous allons de suite le montrer n'est au fait que l'inverse de la moyenne et où x est une variable aléatoire sans mémoire. Cette loi est parfois notée $\mathcal{E}(\lambda)$.

Au fait la loi exponentielle découle naturellement de développements très simples (voir celui dans le chapitre de Physique Nucléaire par exemple) sous des hypothèses qui imposent une constance dans le vieillissement d'un phénomène. Dans le chapitre des Techniques de Gestion, nous avons aussi démontré en détails dans la partie concernant la théorie des files d'attentes (page **??**), que cette loi était sans mémoire. C'est-à-dire que la probabilité cumulée qu'un phénomène se produise entre les temps t et $t+s$, s'il ne s'est pas produit avant, est la même que la probabilité cumulée qu'il se produise entre les temps 0 et s.

En cours de traduction en anglais

Remarques

R1. Cette distribution se retrouve fréquemment en physique nucléaire (voir chapitre du même nom) ou encore en physique quantique (voir aussi chapitre du même nom) ainsi qu'en fiabilité (voir section Techniques de Gestion page **??**) ou dans la théorie des files d'attentes (voir section Techniques de Gestion page **??**).

R2. Nous pouvons obtenir cette loi dans la version française de Microsoft Excel 11.8346 avec la fonction `LOI.EXPONENTIELLE( )`.

Il s'agit par ailleurs bien d'une fonction de distribution car elle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_\lambda(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(e^{-\infty x} - e^{0x}\right) = -(0-1) = 1 \quad (5.7.842)$$

La distribution exponentielle a pour espérance (moyenne) en utilisant l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} xP_\lambda(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\ xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned} \quad (5.7.843)$$

et pour variance en utilisant à nouveau la relation de Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \quad (5.7.844)$$

il ne nous reste plus qu'à calculer :

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} x \quad (5.7.845)$$

Un changement de variable $y = \lambda$ conduit à :

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\mathrm{d}y \tag{5.7.846}$$

Une double intégration par parties donne :

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(t)g(t)|_a^b - \int\limits_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t\\ \int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\mathrm{d}y = -y^2e^{-y}|_0^{-\infty} + 2\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y}\mathrm{d}y = 2\left[-ye^{-y}|_0^{+\infty}\right] + 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y = 2\end{gathered} \tag{5.7.847}$$

D'où :

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \tag{5.7.848}$$

Il vient dès lors :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{5.7.849}$$

Donc l'écart-type (racine carrée de la variance pour rappel) et l'espérance ont exactement la même expression !

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la fonction exponentielle de paramètre $\lambda = 1$:

En ... traduction de l' anglais

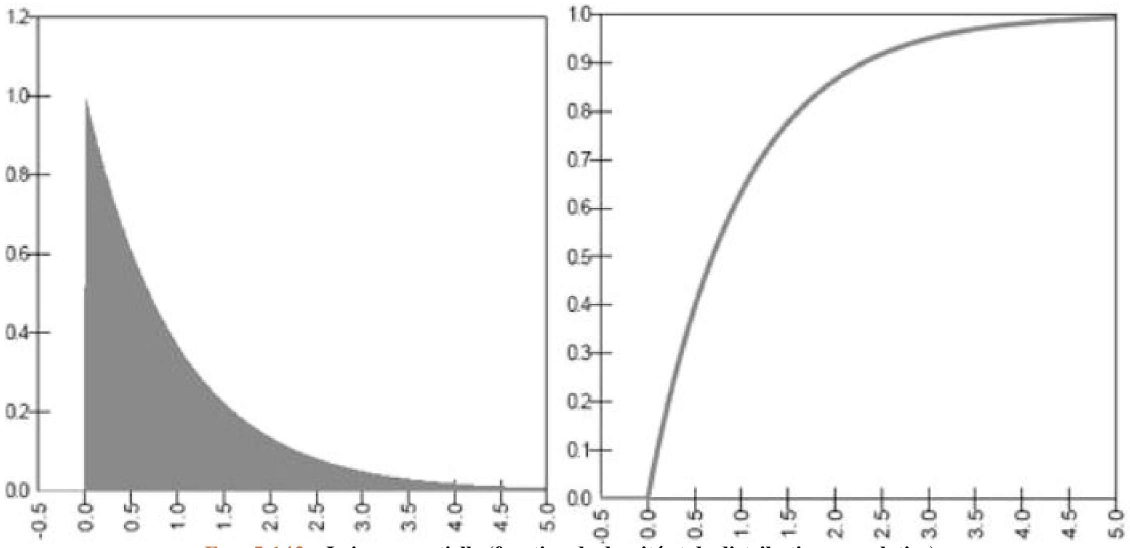


FIG. 5.143 – **Loi exponentielle (fonction de densité et de distribution cumulative)**

Déterminons maintenant la fonction de répartition de la loi exponentielle :

$$P(X \leqslant x) = \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda\int\limits_0^x e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)\Bigg|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \tag{5.7.850}$$

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution exponentielle :

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad (5.7.851)$$

Alors, la fonction quantile de X est :

$$Q_X(p) = \begin{cases} -\infty, \text{ si } p = 0 \\ -\dfrac{\ln(1-p)}{\lambda}, \text{ si } p > 0 \end{cases} \quad (5.7.852)$$

En effet, la fonction de distribution cumulée de la distribution exponentielle est telle que nous venons de le montrer :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ 1 - \exp[-\lambda x], \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.7.853)$$

Rappelons que la fonction quantile $Q_X(p)$ est définie comme le plus petit x, tel que $F_X(x) = p$:

$$Q_X(p) = \min\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = p\} \quad (5.7.854)$$

Ainsi, nous avons $Q_X(p) = -\infty$, si $p = 0$. Lorsque $p > 0$, il vient que :

$$Q_X(p) = F_X^{-1}(x) \quad (5.7.855)$$

Cela peut être dérivé en réorganisant l'équation :

$$\begin{aligned} p &= 1 - \exp[-\lambda x] \\ \exp[-\lambda x] &= 1 - p \\ -\lambda x &= \ln(1-p) \\ x &= -\frac{\ln(1-p)}{\lambda} \end{aligned} \quad (5.7.856)$$

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution exponentielle :

$$X \sim e^{\lambda} \quad (5.7.857)$$

Alors, la médiane de X est :

$$\text{médiane}(X) = M_e(X) = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad (5.7.858)$$

En effet, rappelons que la médiane est la valeur à laquelle la fonction de distribution cumulée vaut $1/2$:

$$F_X(\text{médiane}(X)) = \frac{1}{2} \quad (5.7.859)$$

La fonction de distribution cumulative de la distribution exponentielle est telle que nous venons de le montrer plus haut donnée par :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (5.7.860)$$

Ainsi, la fonction de distribution cumulative inverse est :

$$x = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda} \quad (5.7.861)$$

En cours de traduction de l'anglais

et en posant $p = 1/2$, nous obtenons :

$$\text{médiane}(X) = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \tag{5.7.862}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une distribution exponentielle :

$$X \sim e^{\lambda} \tag{5.7.863}$$

Alors, la valeur modale de X est :

$$\text{mode}(X) = M_0(X) = 0 \tag{5.7.864}$$

En effet, rappelons que la valeur modale est la valeur qui maximise la fonction de densité de probabilité :

$$\text{mode}(X) = \arg\max_x f_X(x) \tag{5.7.865}$$

La fonction de densité de probabilité de la distribution exponentielle est pour rappel :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \tag{5.7.866}$$

Étant donné que :

$$f_X(0) = \lambda \tag{5.7.867}$$

et :

$$0 < e^{-\lambda x} < 1 \quad \text{pour tout} \quad x > 0 \tag{5.7.868}$$

Il s'ensuit :

$$\text{mode}(X) = 0 \tag{5.7.869}$$

Calculons maintenant l'asymétrie de la distribution exponentielle (skewness) telle que définie par (voir page 624) :

$$\gamma_1 = \frac{\text{E}\left(X^3\right) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \tag{5.7.870}$$

où μ et σ sont respectivement la moyenne et l'écart type de X. Puisque X suit une distribution exponentielle, la moyenne de X est donnée par :

$$\mu = \text{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \tag{5.7.871}$$

et l'écart-type de X est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\text{V}(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} \tag{5.7.872}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\mathrm{E}\left(X^3\right)-3\mu\sigma^2-\mu^3}{\sigma^3}=\frac{\mathrm{E}\left(X^3\right)}{\sigma^3}-\frac{3\mu\sigma^2+\mu^3}{\sigma^3}\\ &=\frac{\mathrm{E}\left(X^3\right)}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3}-\frac{3\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3}=\lambda^3\cdot\mathrm{E}\left(X^3\right)-\frac{\frac{3}{\lambda^3}+\frac{1}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}}\\ &=\lambda^3\cdot\mathrm{E}\left(X^3\right)-4\end{aligned}\tag{5.7.873}$$

Ainsi, le travail restant consiste à calculer $\mathrm{E}\left(X^3\right)$. Pour ce faire, nous utilisons la fonction génératrice de moments de la distribution exponentielle pour calculer :

$$\mathrm{E}\left(X^3\right)=M'_X(0)\tag{5.7.874}$$

basé sur la relation entre le moment brut et la fonction génératrice de moment. Tout d'abord, nous différencions la fonction génératrice de moment de la distribution exponentielle (voir page 912 où nous avons démontré la fonction génératrice de moment de la distribution Gamma et si nous posions $\alpha=1$, nous obtenions celle de la distribution exponentielle !) :

$$M_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}=\lambda(\lambda-t)^{-1}\tag{5.7.875}$$

relativement à t. En utilisant la dérivée des fonctions composées, nous obtenons :

$$M'_X(t)=-1\cdot\lambda(\lambda-t)^{-2}\cdot(-1)=\lambda(\lambda-t)^{-2}\tag{5.7.876}$$

Nous continuons à utiliser la règle de la dérivation composée pour obtenir la dérivée seconde :

$$M''_X(t)=-2\cdot\lambda(\lambda-t)^{-3}\cdot(-1)=2\lambda(\lambda-t)^{-3}\tag{5.7.877}$$

Enfin, une autre application de la règle de dérivation des fonctions composée nous donne la dérivée troisième :

$$M'''_X(t)=-3\cdot 2\lambda(\lambda-t)^{-4}\cdot(-1)=6\lambda(\lambda-t)^{-4}=\frac{6\lambda}{(\lambda-t)^4}\tag{5.7.878}$$

Dès lors :

$$\mathrm{E}\left(X^3\right)=M'''_X(0)=\frac{6\lambda}{(\lambda-0)^4}=\frac{6\lambda}{\lambda^4}=\frac{6}{\lambda^3}\tag{5.7.879}$$

Nous substituons maintenant cette relation dans le coefficient d'asymétrie, ce qui donne :

$$\gamma_1=\lambda^3\cdot\mathrm{E}\left(X^3\right)-4=\lambda^3\cdot\left(\frac{6}{\lambda^3}\right)-4=6-4=2\tag{5.7.880}$$

Remarque

Nous verrons plus loin que la fonction de distribution exponentielle n'est qu'un cas particulier d'une distribution plus générale qui est la distribution du Khi-deux, cette dernière aussi n'étant qu'un cas particulier d'une distribution encore plus générale qui est la distribution Gamma. Il s'agit d'une propriété très importante utilisée dans le "test de Poisson"

En cours de traduction de l' anglais

pour les événements rares (voir plus loin aussi).

5.7.6.15 Distribution de Cauchy

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois Normales centrées réduites (variance unité et espérance nulle). La fonction de densité est donc donnée pour chacune des variables par :

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (5.7.881)$$

La variable aléatoire :

$$T = \frac{X}{|Y|} \quad (5.7.882)$$

(la valeur absolue interviendra dans une intégrale lors d'un changement variable) suit une allure caractéristique appelée "distribution de Cauchy" (ou "loi de Cauchy") ou encore "loi de Lorentz".

Déterminons sa fonction de densité f. Pour cela, rappelons que f est déterminée par la relation (générale) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(T \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) \mathrm{d}x \quad (5.7.883)$$

Donc (application du calcul intégral élémentaire) :

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(T \leq t) \quad (5.7.884)$$

dans le cas où f est continue.

Etant donné que X et Y sont indépendants, la fonction de densité du vecteur aléatoire est donnée par un des axiomes des probabilités (voir section Probabilités page 479) :

$$(x, y) \mapsto f_X(x) \cdot f_Y(x) \quad (5.7.885)$$

Donc :

$$P(T \leqslant t) = P\left(\frac{X}{|Y|} < t\right) = P(X \leqslant t|Y|) = \int_D f_X(x) \cdot f_Y(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \quad (5.7.886)$$

où $D = \{(x, y) | x < t|y|\}$. Cette dernière intégrale devient :

$$\int_D f_X(x) \cdot f_Y(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t \cdot |y|} f_X(x) \cdot f_Y(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \quad (5.7.887)$$

En cours de traduction de l'anglais

Faisons le changement de variable $x=u|y|$ dans l'intégrale intérieure. Nous obtenons :

$$P(T\leqslant t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{t} f_X(u\cdot|y|)\cdot f_Y(y)|y|\mathrm{d}u\mathrm{d}y=\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(u\cdot|y|)\cdot f_Y(y)|y|\mathrm{d}y\mathrm{d}u \quad (5.7.888)$$

Donc :

$$f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(T\leqslant t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t\cdot|y|)\cdot f_Y(y)|y|\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}}|y|\mathrm{d}y \quad (5.7.889)$$

C'est maintenant que la valeur absolue va nous être utile pour écrire :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}}|y|\mathrm{d}y=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}}y\mathrm{d}y+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}}y\mathrm{d}y \quad (5.7.890)$$

Pour la première intégrale nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\inf}^{0} e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}}y\mathrm{d}y=\left.\frac{e^{-\frac{y^2(t^2+1)}{2}}}{t^2+1}\right|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}=0 \quad (5.7.891)$$

Il ne reste donc plus que la seconde intégrale et en faisant le changement de variable $v=y^2$, nous obtenons :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\nu(t^2+1)}{2}}\mathrm{d}\nu=-\left.\frac{e^{-\frac{\nu(t^2+1)}{2}}}{\pi(t^2+1)}\right|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\pi(t^2+1)} \quad (5.7.892)$$

Ce que nous noterons par la suite (afin de respecter les notations adoptées jusqu'à présent) :

$$\boxed{P(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}} \quad (5.7.893)$$

et qui n'est d'autre que la "distribution de Cauchy" !

Il s'agit par ailleurs bien d'une fonction de distribution car elle vérifie (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1513) :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\arctan(+\infty)-\arctan(-\infty))=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1 \quad (5.7.894)$$

Il est évident que l'on obtient donc pour la fonction de distribution cumulée :

$$\begin{aligned}P(X\leq x)&=\int\limits_{-\infty}^{x} P(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\arctan(x)-\arctan(-\infty))=\\&=\frac{1}{\pi}\left(\arctan(x)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\arctan(x)+\frac{1}{2}\end{aligned} \quad (5.7.895)$$

En cours de traduction de l' anglais

Voici un exemple de tracé de la fonction de distribution de Cauchy :

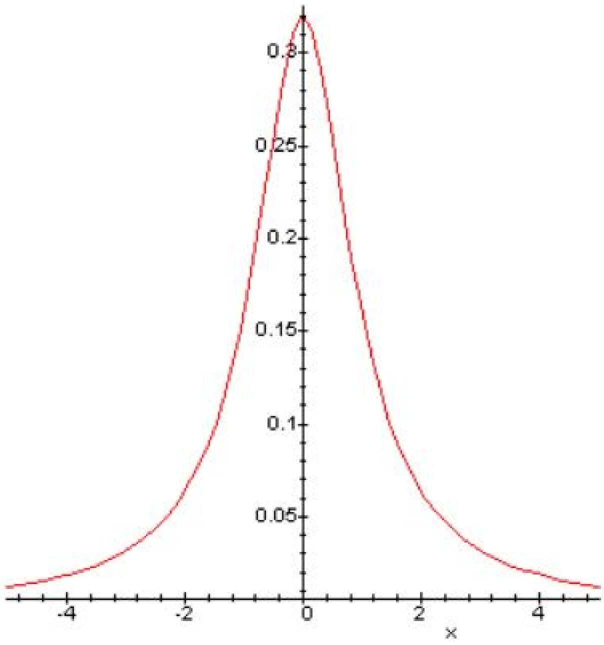


FIG. 5.144 – Loi de Cauchy (fonction de densité)

La distribution de Cauchy a pour espérance (moyenne) :

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln(1+x^2)\big|_{-\infty}^{0} + \ln(1+x^2)\big|_{0}^{+\infty}\right) = \frac{1}{2\pi}(-\ln(\infty)+\ln(\infty)) = 0\end{aligned} \tag{5.7.896}$$

Attention ! ! ! Les calculs précédents ne donnent pas zéro en réalité fait car la soustraction d'infinis n'est non pas nulle mais indéterminée ! La loi de Cauchy n'admet donc pas d'espérance rigoureusement parlant !

Ainsi, même si nous pouvons bricoler une variance :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}x^2P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\lim_{t\to+\infty}(t-\arctan(t)) = +\infty\end{aligned} \tag{5.7.897}$$

celle-ci est absurde et n'existe rigoureusement parlant pas puisque l'espérance n'existe pas... !

La distribution de Cauchy est beaucoup utilisée en ingénierie financière car elle est dite à "queue lourde" et donc un très bon candidat pour être plus précis dans la prédiction de valeurs extrêmes

à l'opposé de la distribution Normale qui a les queues décroissant radidement (exponentiellement). De plus, la distribution de Cauchy est une loi à queue lourde avec un support sur $\mathbb{R}$ alors que la distribution de Pareto (également à queue lourde) est définie uniquement sur $\mathbb{R}^+$.

La distribution de Cauchy est l'une des fonctions de distribution les plus célèbres que ... nous ne pouvons pas trouver dans les logiciels de type tableurs comme Microsoft Excel. Pour pouvoir obtenir la forme fermée du la distribution cumulée inverse de Cauchy, nous partons de fonction de distribution cumullée prouvée précédemment :

$$P(X \leq x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} \quad (5.7.898)$$

et donc si on pose :

$$y = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} \quad (5.7.899)$$

Nous obtenons immédiatement le fonction de distribution cumulée inverse :

$$x = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5.7.900)$$

Cela est utile en finance comme nous le savons (voir section d'Informatique Théorique page ??) pour simuler une variable de Cauchy lorsque nous utilisons l'échantillonnage à transformée inverse :

$$X = \tan\left(\pi\left(\mathcal{U}_{[0,1]} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5.7.901)$$

En utilisant la transformation de variable aléatoire (voir page 621) nous déduisons immédiatement la "distribution générale de Cauchy" ou simplement nommée la "distribution de Cauchy" et donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{b\pi\left[1 + \left(\dfrac{x-a}{b}\right)^2\right]} = \frac{1}{\pi b}\frac{b^2}{(x-a)^2 + b^2} \quad (5.7.902)$$

5.7.6.16 Distribution Bêta

Rappelons d'abord que la fonction Gamma d'Euler est définie par la relation (voir section de Calcul Intégral et Différentiel page 1552) :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\mathrm{d}x \quad (5.7.903)$$

Nous avons démontré (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1552) qu'une propriété non triviale de cette fonction est que :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (5.7.904)$$

En cours de traduction de l'anglais

Posons maintenant :

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\lim_{R\rightarrow+\infty}\iint\limits_{A_R} e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.7.905}$$

où :

$$A_R=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq R\} \tag{5.7.906}$$

En faisant le changement de variables :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u-v\\v\end{pmatrix} \tag{5.7.907}$$

nous obtenons :

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\lim_{R\rightarrow+\infty}\iint\limits_{A_R} e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{R\rightarrow+\infty}\int\limits_0^R e^{-u}\left(\int\limits_0^u (u-v)^{a-1}v^{b-1}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \tag{5.7.908}$$

Pour l'intégrale interne nous utilisons maintenant la substitution $v=ut,0\leq t\leq 1$ et nous trouvons alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b)&=\lim_{R\rightarrow+\infty}\int\limits_0^R e^{-u}\left(\int\limits_0^u (u-v)^{a-1}v^{b-1}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u\\&=\lim_{R\rightarrow+\infty}\int\limits_0^R e^{-u}u^{a+b-1}\mathrm{d}u\int\limits_0^1(1-t)^{a-1}t^{b-1}\mathrm{d}t\overset{\text{def}}{=}B(a,b)\int\limits_0^{+\infty}e^{-u}u^{a+b-1}\mathrm{d}u\\&=B(a,b)\Gamma(a+b)\end{aligned} \tag{5.7.909}$$

La fonction B qui apparaît dans l'expression ci-dessus est appelée "fonction bêta" et nous avons donc :

$$\boxed{B(a,b)=B(b,a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} \tag{5.7.910}$$

Maintenant que nous avons défini ce qu'était la fonction bêta, considérons les deux paramètres $a>0,b>0$ et considérons la relation particulière ci-dessous comme étant la "distribution bêta" ou "loi bêta" (il existe plusieurs formulations de la loi bêta dont une très importante qui est étudiée en détails dans le chapitre de Techniques de Gestion à la page **??**) :

$$\boxed{P_{a,b}(x)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}1_{]0,1[}} \tag{5.7.911}$$

où :

$$\boxed{B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x} \tag{5.7.912}$$

Historiquement cette fonction est issue de la statistique bayésienne (notamment un cas particulier traité par Laplace) à partir du rapport de la distribution binomiale sur la somme de toutes les issues possibles de cette même distribution binomiale telle que :

$$P(x\mid p,q)=\frac{C_{p+q}^p x^p(1-x)^q}{\int C_{p+q}^p y^p(1-y)^q\mathrm{d}y}=\frac{x^p(1-x)^q}{\int y^p(1-y)^q\mathrm{d}y} \tag{5.7.913}$$

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

L'intégrale réécrite comme suit :

$$B(a+1,b+1)=\int_0^1 x^a(1-x)^b \mathrm{d}x \quad (5.7.914)$$

est appelée "intégrale de Chebyshev".

L'intégrale généralisée comme suit :

$$B(x,a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t \quad (5.7.915)$$

est appelée "fonction bêta incomplète". Bien qu'elle soit surtout connue pour ses applications en statistique, elle est également largement utilisée dans de nombreux autres domaines tels que la science actuarielle, l'économie, la finance, l'analyse de survie, les tests de survie et les télécommunications.

Nous vérifions d'abord que $P_{a,b}(x)$ est bien une fonction de distribution (sans trop aller dans les détails...) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} P_{a,b}(x)x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}\cdot 1_{]0,1[}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}\cdot 1_{]0,1[}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x=\frac{B(a,b)}{B(a,b)}=1\end{aligned} \quad (5.7.916)$$

Maintenant, calculons son espérance (moyenne) :

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} xP_{a,b}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}=\frac{a}{a+b}\end{aligned} \quad (5.7.917)$$

en utilisant la relation :

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \quad (5.7.918)$$

et sa variance :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 (x-\mu)^2 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{B(a,b)}\left(\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x-2\mu\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x+\mu^2\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{B(a+2,b)-2\mu^2B(a,b)+\mu^2B(a+1,b)}{B(a,b)}=\frac{B(a+2,b)-\mu^2B(a,b)}{B(a,b)}\end{aligned} \quad (5.7.919)$$

En cours de traduction de l'anglais

En sachant que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{et} \quad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{5.7.920}$$

nous trouvons :

$$B(a+2,b) = \frac{\mu \cdot (a+1)}{a+b+1} \tag{5.7.921}$$

et donc :

$$\sigma^2 = \frac{\mu \cdot (a+1)}{a+b+1} - \mu^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \tag{5.7.922}$$

Exemples de tracés de la fonction de distribution (densité) bêta pour $(a,b) = (0.1, 0.5)$ en rouge, $(a,b) = (0.3, 0.5)$ en vert, $(a,b) = (0.5, 0.5)$ en noir, $(a,b) = (0.8, 0.8)$ en bleu, $(a,b) = (1,1)$ en magenta, $(a,b) = (1, 1.5)$ en cyan, $(a,b) = (1,2)$ en gris, $(a,b) = (1.5, 2)$ en turquoise, $(a,b) = (2,2)$ en jaune,$(a,b) = (3,3)$ en couleur or :

En cours

e l’ anglais

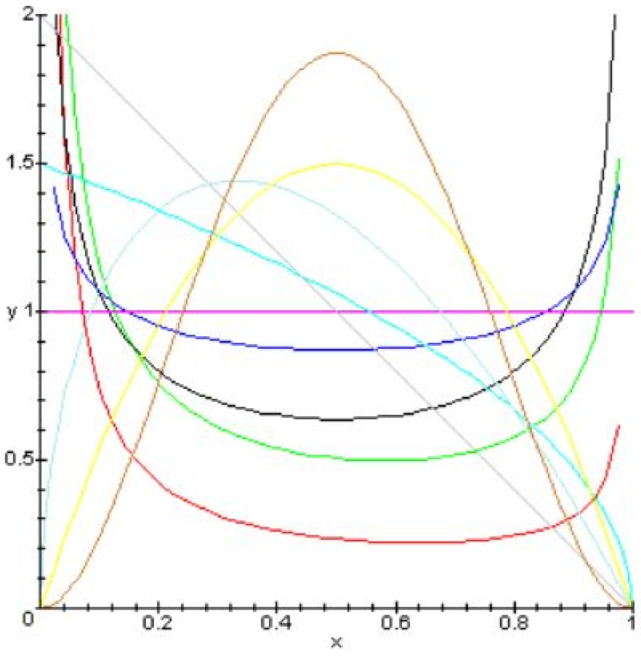


FIG. 5.145 – **Loi bêta (fonctions de densité)**

et tracé de la fonction de distribution et répartition de la loi bêta de paramètres $(a,b) = (2,3)$:

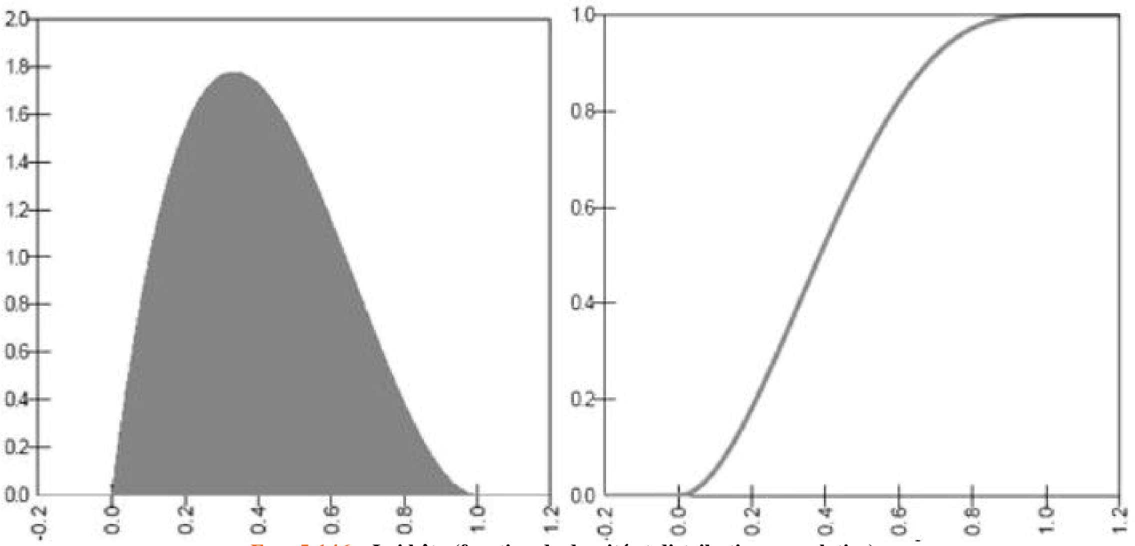


FIG. 5.146 – **Loi bêta (fonction de densité et distribution cumulative)**

Le fait que la loi bêta soit une des rares fonctions de distribution dont le support soit compris entre $]0,1[$ explique son usage courant dans les statistiques bayésiennes en tant que loi a priori de la distribution d'une proportion !

Remarque

Remarquez le cas spécial important lorsque $a, b = 1$, la distribution bêta, se réduit à une distribution continue uniforme ! En effet :

$$P_{a,b} = P_{1,1} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} p^{1-1}(1-p)^{1-1} 1_{]0,1[} = 1 \cdot 1_{]0,1[} \tag{5.7.923}$$

En général, si vous voulez une distribution bêta a priori avec les paramètres a et b mais que vous ne connaissez que μ et σ^2, ils peuvent être trouvés sur via les deux relations :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{a}{a+b} \\ \sigma^2 &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned} \tag{5.7.924}$$

Nous pouvons résoudre le premier comme suit pour b :

$$b = \frac{a(1-\mu)}{\mu} \tag{5.7.925}$$

La substitution de ce dernier dans le σ^2 ci-dessus donne :

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \frac{a^2(1-\mu)}{\mu(a+b)^2(a+b+1)} &= \frac{a^2(1-\mu)}{\mu(a[1+(1-\mu)/\mu])^2(a+a(1-\mu)/\mu+1)} \\ &= \frac{(1-\mu)}{\mu(1+(1-\mu)/\mu)^2(a/\mu+1)} \end{aligned} \tag{5.7.926}$$

Réorganiser ce dernier donne :

$$a = \frac{1-\mu-\sigma^2\mu^3}{\sigma^2\mu^2} \tag{5.7.927}$$

En cours de ... de l'anglais

dès lors :

$$b = \frac{(1-\mu)\left[1-\mu-\sigma^2\mu^3\right]}{\sigma^2\mu^3} \tag{5.7.928}$$

5.7.6.16.1 Fonction bêta integrale régularisée

Ce qui suit devrait être placé dans la section de d'Analyse Fonctionnelle, mais il nous a semblé plus pédagogique de le placer juste ici pour des raisons évidentes.

Considérons la "fonction bêta régularisée incomplète $I_x(a,b)$" (ou "fonction bêta régularisée" pour faire court) définie en termes de fonction bêta incomplète et de fonction bêta complète comme (pour $\alpha > 0$) :

$$I_x(a,b) = \frac{B(x,a,b)}{B(a,b)} = \frac{\int\limits_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t}{\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t} \tag{5.7.929}$$

où pour rappel $a > 0$ et $b > 0$. Cette fonction nous sera utile dans certaines statistiques bayésiennes A/B (voir section Statistiques page 973) mais aussi en Théorie des Cordes (voir section Théorie des Cordes page ??) !

Remarquez les valeurs canoniques qui sont immédiates :

$$I_0(a,b) = 0 \qquad I_1(a,b) = 0 \tag{5.7.930}$$

Nous voulons prouver ici la propriété récursive :

$$I_x(a+1,b) = I_x(a,b) - \frac{x^a(1-x)^b}{a\,B(a,b)} \tag{5.7.931}$$

Remarque

Cela signifie également que :

$$I_x(a-1,b) = I_x(a,b) - \frac{x^{a-1}(1-x)^b}{(a-1)B(a-1,b)} \tag{5.7.932}$$

mais pour $a > 1$ (et toujours $b > 0$).

Démonstration 5.45.6. En utilisant la propriété suivant de la fonction bêta (voir page 748) :

$$B(a+1,b) = \frac{a!(b-1)!}{(a+b)!} = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}\frac{a}{a+b} = \frac{aB(a,b)}{a+b} \tag{5.7.933}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

De la relation ci-dessus et en raison de la symétrie de la fonction bêta, les trois résultats suivants suivent presque immédiatement :

$$B(a,b+1)=\frac{bB(a,b)}{a+b} \quad (5.7.934)$$
$$B(a+1,b)+B(a,b+1)=B(a,b) \quad (5.7.935)$$
$$B(a+1,b-1)=\frac{aB(a,b)}{b-1} \quad (5.7.936)$$

Nous calculons la dérivée :

$$I'_x(a+1,b)=\frac{\mathrm{d}I_x(a+1,b)}{\mathrm{d}t}=\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a+1,b)}=\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a,b)a/(b+a)}=(a+b)\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a,b)a} \quad (5.7.937)$$

Maintenant posons :

$$f(a,b,x)=I_x(a+1,b)-I_x(a,b)+\frac{x^a(1-x)^b}{a\,B(a,b)} \quad (5.7.938)$$

Alors $f(a,b,0)=0$ et :

$$\begin{aligned}f'(a,b,x)&=I'_x(a+1,b)-I'_x(a,b)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^a(1-x)^b}{a\,B(a,b)}\right)\\&=(a+b)\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a,b)a}-\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}+\frac{x^{a-1}(1-x)^b}{B(a,b)}-\frac{bx^a(1-x)^{b-1}}{aB(a,b)}\\&=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}\left(\frac{(a+b)x}{a}-1+1-x-\frac{bx}{a}\right)=0\end{aligned} \quad (5.7.939)$$

Dès lors $f\equiv 0$ et la propriété de récursivité est prouvée.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Dons nous venons de prouver que :

$$I_x(a-1,b)=I_x(a,b)-\frac{x^{a-1}(1-x)^b}{(a-1)B(a-1,b)} \quad (5.7.940)$$

Et notez que nous avons le cas limite :

$$I_x(1,b)=\frac{\int\limits_0^x t^0(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t}{\int\limits_0^1 t^0(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t}=\frac{-\left.\frac{(1-t)^b}{b}\right|_0^x}{-\left.\frac{(1-t)^b}{b}\right|_0^1}=\frac{-\frac{(1-x)^b}{b}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}}=1-(1-x)^b \quad (5.7.941)$$

Maintenant, itérons récursivement :

$$I_x(a-1,b)=I_x(a,b)-\frac{x^{a-1}(1-x)^b}{(a-1)B(a-1,b)} \tag{5.7.942}$$

Jusqu'au cas :

$$I_x(1,b)=1-(1-x)^b \tag{5.7.943}$$

$$I_x(a,b)=1-(1-x)^b-\sum_{j=1}^{a-1}\frac{x^{a-j}(1-x)^b}{(a-j)B(a-j,b)} \tag{5.7.944}$$

En incluant le terme zéro dans la somme :

$$I_x(a,b)=1-\sum_{i=0}^{a-1}\frac{x^i(1-x)^b}{(b+i)B(1+i,b)} \tag{5.7.945}$$

Et nous nous arrêterons ici pour l'étude de cette fonction car c'est tout ce dont nous avons besoin dans l'état actuel de ce livre pour des applications pratiques !

5.7.6.17 Distribution Gamma

La fonction Gamma d'Euler étant connue, considérons deux paramètres $a>0, \lambda>0$ et définissons la "distribution Gamma" (ou "loi Gamma") comme étant donnée par la relation (fonction de densité) :

$$P_{a,\lambda}(x)=\frac{x^{a-1}e^{-\lambda x}}{\int\limits_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x}\cdot 1_{]0,+\infty[} \tag{5.7.946}$$

En faisant le changement de variables $t=\lambda x$ nous obtenons :

$$\int\limits_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(a)}{\lambda^a} \tag{5.7.947}$$

et pouvons alors écrire la relation sous une forme plus classique que nous trouvons fréquemment dans la littérature spécialisée :

$$P_{a,\lambda}(x)=\frac{x^{a-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}\lambda^a\cdot 1_{]0,+\infty[} \tag{5.7.948}$$

et c'est sous cette forme que nous retrouvons cette fonction de distribution dans la version française de Microsoft Excel 11.8346 sous le nom `LOI.GAMMA( )` et pour sa réciproque par `LOI.GAMMA.INVERSE( )`. Indiquons que la relation précédente est aussi parfois notée sous la forme :

$$\Gamma(a,\lambda)=\frac{x^{a-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}\lambda^a\cdot 1_{]0,+\infty[} \tag{5.7.949}$$

En cours de traduction de l'anglais

Voyons maintenant une propriété simple de la loi Gamma qui nous sera en partie utile pour l'étude du test statistique de Welch. Rappelons d'abord que nous avons démontré plus haut que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f_Y(y) = \frac{1}{c^{te}} f_X\left(\frac{y}{c^{te}}\right) \tag{5.7.950}$$

Posons $Y = c^{te}X$, nous avons alors immédiatement :

$$f_Y(y) = \frac{y^{a-1}e^{\lambda \frac{y}{c^{te}}}}{\Gamma(a)} \left(\frac{\lambda}{c^{te}}\right) 1_{]0,+\infty[} \tag{5.7.951}$$

Donc la multiplication par une constante d'une variable aléatoire qui suit une loi Gamma n'a que pour effet de diviser le paramètre λ par cette même constante. Raisons pour laquelle λ est appelé "paramètre d'échelle".

Si $a \in \mathbb{N}$, la loi Gamma au dénominateur devient (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1552) la factorielle $(a-1)!$. La distribution Gamma peut alors s'écrire :

$$P_{a,\lambda} = \frac{x^{a-1}\lambda^a e^{-\lambda x}}{(a-1)!} = \frac{(x\lambda)^{a-1}}{(a-1)!}\lambda e^{-\lambda x} \tag{5.7.952}$$

Cette forme particulière la fonction de distribution Gamma s'appelle alors la "fonction d'Erlang" que nous retrouvons naturellement dans la théorie des files d'attentes et qui est donc très importante dans la pratique !

Remarque

Si $a = 1$ alors $\Gamma(a) = 1$ et $x^{a-1} = 1$ et nous retombons sur la loi exponentielle.

Ensuite, nous vérifions avec un raisonnement similaire en tout point à celui de la fonction bêta que $P_{a,\lambda}(x)$ est bien une fonction de distribution :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{a,\lambda} \mathrm{d}x = 1 \tag{5.7.953}$$

Exemples tracés de la fonction de distribution pour $(a, \lambda) = (0.5, 1)$ en rouge, $(a, \lambda) = (1, 1)$ en vert, $(a, \lambda) = (2, 1)$ en noir, $(a, \lambda) = (4, 2)$ en bleu, $(a, \lambda) = (16, 8)$ en magenta :

En cours de rédaction de l'anglais

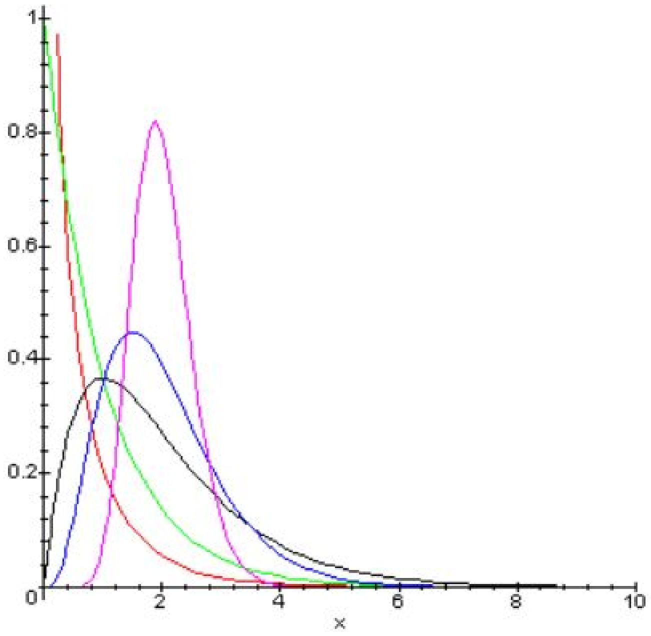


FIG. 5.147 – **Quelques fonctions de densité de la loi Gamma**

et tracé de la fonction de distribution et répartition pour la fonction Gamma de paramètres $(a, \gamma) = (4, 1)$:

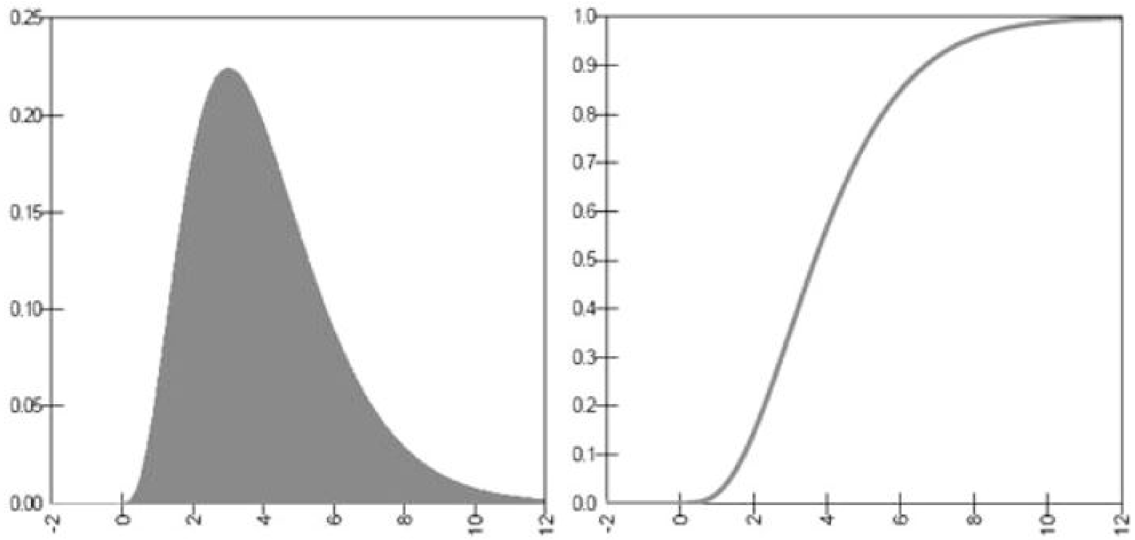


FIG. 5.148 – **Loi Gamma (fonction de densité et distribution cumulative)**

Soit X une variable aléatoire positive suivant une distribution Gamma :

$$X \sim \text{Gam}(a, b) \tag{5.7.954}$$

Alors, la fonction de distribution cumulative de X est :

$$F_X(x) = \frac{\gamma(a, bx)}{\Gamma(a)} \tag{5.7.955}$$

En effet, la fonction de densité de probabilité de la distribution Gamma est pour rappel :

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp[-bx] \quad (5.7.956)$$

Ainsi, la fonction de distribution cumulée est :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x \mathrm{Gam}(z; a, b) \mathrm{d}z \\ &= \int_0^x \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{a-1} \exp[-bz] \mathrm{d}z \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^x z^{a-1} \exp[-bz] \mathrm{d}z \end{aligned} \quad (5.7.957)$$

En remplaçant $t = bz$, c'est-à-dire $z = t/b$, cela devient :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{b\cdot 0}^{b\cdot x} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \exp\left[-b\left(\frac{t}{b}\right)\right] \mathrm{d}\left(\frac{t}{b}\right) \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \frac{1}{b^{a-1}} \cdot \frac{1}{b} \int_0^{bx} t^{a-1} \exp[-t] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{b\cdot x} t^{a-1} \exp[-t] \mathrm{d}t \end{aligned} \quad (5.7.958)$$

Avec la définition de la "fonction gamma incomplète inférieure" :

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} \exp[-t] \mathrm{d}t \quad (5.7.959)$$

nous arrivons au résultat final donné plus haut :

$$F_X(x) = \frac{\gamma(a, bx)}{\Gamma(a)} \quad (5.7.960)$$

La distribution Gamma a par ailleurs pour espérance (moyenne) :

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^a e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{a\Gamma(a)}{\lambda^{a+1}} = \frac{a}{\lambda} \quad (5.7.961)$$

En cours de traduction de l' anglais

et pour variance :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 x^{a-1} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{a+1}e^{-\lambda x}x - 2\mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^a e^{-\lambda x} x + \mu^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^{a+2}} + \mu^2 \frac{\Gamma(a)}{\lambda^a} - 2\mu \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(a)} \left(\Gamma(a+2) + a^2\Gamma(a) - 2a\Gamma(a+1) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(a)} \left((a+1)a\Gamma(a) + a^2\Gamma(a) - 2a^2\Gamma(a) \right) = \frac{a}{\lambda^2}\end{aligned} \quad (5.7.962)$$

Démontrons une propriété de la distribution Gamma qui nous servira à établir plus tard dans ce chapitre, lors de notre étude de l'analyse de la variance et des intervalles de confiance sur des petits échantillons, une autre propriété extrêmement importante de la loi du Khi-deux.

Comme nous le savons, la fonction de densité d'une variable aléatoire suivant une distribution Gamma de paramètres $a, \lambda > 0$ est :

$$P_{a,\gamma}(x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} \lambda^a 1_{[0,+\infty]} \quad (5.7.963)$$

avec (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1552) la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} \mathrm{d}x \quad (5.7.964)$$

Par ailleurs, quand une variable aléatoire suit une distribution Gamma nous la notons souvent sous la forme suivante :

$$X = \gamma(a, \lambda) \quad (5.7.965)$$

Soient X, Y deux variables indépendantes. Montrons que si $X = \gamma(p, \lambda)$ et $Y = \gamma(q, \lambda)$, donc avec le même paramètre d'échelle, alors :

$$X + Y = \gamma(p+q, \lambda) \quad (5.7.966)$$

Notons f la fonction de densité du couple X, Y, $f(x)$ la fonction de densité de X et f_Y la fonction de densité de Y. Vu que X et Y sont indépendantes, nous avons :

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (5.7.967)$$

pour tout $x, y > 0$.

Soit $Z = X + Y$. La fonction de répartition de Z est alors :

$$F(z) = P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (5.7.968)$$

où $D = \{(x, y) | x + y \leq z\}$.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Nous appelons un tel calcul une "convolution" et les statisticiens ont souvent à manipuler de telles entités ayant à travailler sur de nombreuses variables aléatoires qu'il faut sommer ou même multiplier.

En simplifiant :

$$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.7.969}$$

Nous effectuons le changement de variable suivant : $x=x, y=s-x$. Le jacobien est alors (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1503) :

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial s}\\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \tag{5.7.970}$$

Donc avec la nouvelle borne d'intégration $s=x+y=x+(z-x)=z$ nous avons :

$$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} f_X(x)f_Y(s-x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(s-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{5.7.971}$$

Si nous notons par la lettre g la fonction de densité de Z, nous avons :

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(s-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{z} g(s)\mathrm{d}s \tag{5.7.972}$$

Par suite :

$$g(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(s-x)\mathrm{d}x \tag{5.7.973}$$

f_X et f_Y étant nulles lorsque leur argument est négatif, nous pouvons changer les bornes d'intégration :

$$g(s)=\int_{0}^{s} f_X(x)f_Y(s-x)\mathrm{d}x \quad \text{for} \quad s\geqslant 0 \tag{5.7.974}$$

Calculons g :

$$g(s)=\frac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda s}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_{0}^{s} x^{p-1}(s-x)^{q-1}\mathrm{d}x \tag{5.7.975}$$

Après le changement de variable $x=st$ nous obtenons :

$$g(s)=\frac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda s}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}s^{p+q-1}\int_{0}^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t=\frac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda s}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}s^{p+q-1}B(p,q) \tag{5.7.976}$$

En cours de traduction de l'anglais

où B est la fonction bêta que nous avons vue plus haut dans notre étude de la fonction de distribution bêta. Or nous avons aussi démontré la relation :

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{5.7.977}$$

Donc :

$$B(p,q)=\frac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda s}}{\Gamma(p+q)}s^{p+q-1} \tag{5.7.978}$$

Soit plus explicitement :

$$g(x,y)=\frac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda(x+y)}}{\Gamma(p+q)}(x+y)^{p+q-1} \tag{5.7.979}$$

Ce qui finalement nous donne :

$$P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=\int_0^s g(s)\mathrm{d}s=\int_0^s \frac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda s}}{\Gamma(p+q)}s^{p+q-1}\mathrm{d}s \tag{5.7.980}$$

Ce qui montre que bien que si deux variables aléatoires suivent une distribution Gamma alors leur somme aussi telle que :

$$X+Y=\gamma(p+q,\lambda) \tag{5.7.981}$$

Donc la distribution Gamma est stable par addition de même que le sont toutes les lois qui découlent de la loi Gamma et que nous allons aborder ci-après.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.17.1 Distribution Gamma Généralisée

La distribution gamma généralisée est une distribution de probabilité continue avec trois paramètres. Il s'agit d'une généralisation de la distribution gamma à deux paramètres. Étant donné que de nombreuses distributions couramment utilisées pour les modèles paramétriques dans l'analyse de survie (telles que la distribution exponentielle, la distribution de Weibull et la distribution Gamma, et log-normale) sont des cas particuliers du gamma généralisé, elle est parfois utilisé pour déterminer quel modèle paramétrique est approprié pour un ensemble de donné de données.

Par conséquent, notons que si nous écrivons après plusieurs essais et erreurs, la fonction de densité suivante nommée "loi Gamma généralisée" :

$$f(x)=\frac{\eta}{\alpha\Gamma(\kappa)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\kappa\eta-1}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\eta}} \tag{5.7.982}$$

où $x>0$, $\alpha>0$, $\eta>0$, $\kappa>0$.

Alors, pour $\kappa=1$ on retombe sur la fonction de densité de la distribution de Weibull (voir section Génie Industriel page ??) qui avec nos propres notations de la section correspondante est donnée par :

$$f(x)=\frac{\alpha}{\beta}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}}e^{-\frac{x^{\alpha}}{\beta^{\alpha}}}=\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}} \tag{5.7.983}$$

Pour $\eta = 1$, on retombe sur la fonction de densité gamma étudiée juste précédemment :

$$f(x) = \frac{x^{a-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}\lambda^a \cdot 1_{]0,+\infty[} \quad (5.7.984)$$

Pour $\kappa = 1$ et $\eta = 1$, on retombe sur la distribution exponentielle également étudiée précédemment :

$$f(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot 1_{[0,+\infty[} \quad (5.7.985)$$

et enfin pour $\eta \to 0$, $\kappa \to +\infty$ nous retombons sur une distribution log-normale après avoir développé les limites en utilisant les techniques de Stirling, Hospital et Taylor (voir section d'Informatique Théorique page ??, Calcul Différentiel et Intégral page 1444, Séquences et Séries page 1677) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.7.986)$$

Comme toujours, sur demande, nous pouvons détailler les développements !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.18 Distribution du Khi-deux (Pearson)

La "distribution du Khi-deux" (appelée aussi ""loi du Khi-deux" ou encore "loi de Pearson") a une place très importante dans la pratique industrielle pour certains tests d'hypothèses courants (voir plus beaucoup plus loin...) et n'est par définition qu'un cas particulier de la distribution Gamma dans le cas où $a = k/2$ et $\lambda = 1/2$, avec k entier positif :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot 1_{[0,+\infty[} \quad (5.7.987)$$

Remarque

Nous prouverons également plus tard lors de notre étude de l'intervalle de confiance sur la variance à moyenne connue (voir page 842), la propriété très importante que si X suit une distribution standard Normale $\mathcal{N}(0,1)$ alors $X^2 = \chi_1^2$.

Cette relation qui relie la distribution du Khi-deux à la distribution Gamma est importante dans la version française de Microsoft Excel 11.8346 car la fonction `LOI.KHIDEUX( )` donne le seuil de confiance et non la fonction de distribution. Il faut alors utiliser la fonction `LOI.GAMMA( )` avec les paramètres donnés ci-dessus (à part qu'il faut prendre l'inverse de $1/2$, soit 2 comme paramètre) pour avoir la fonction de distribution et de répartition.

Le lecteur qui voudra vérifier que la loi du Khi-2 est seulement un cas particulier de la loi Gamma, pourra écrire dans la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 :

```
=LOI.KHIDEUX.N(2*x,2*k,VRAI)
=LOI.GAMMA.N(x,k,1,VRAI)
```

Tous les calculs faits auparavant s'appliquent et nous avons alors immédiatement :

$$\mu = k, \sigma^2 = 2k \qquad (5.7.988)$$

Exemples de tracés de la fonction de distribution pour $k = 1$ en rouge, $k = 3$ en vert, equation en noir, $k = 4$ en bleu :

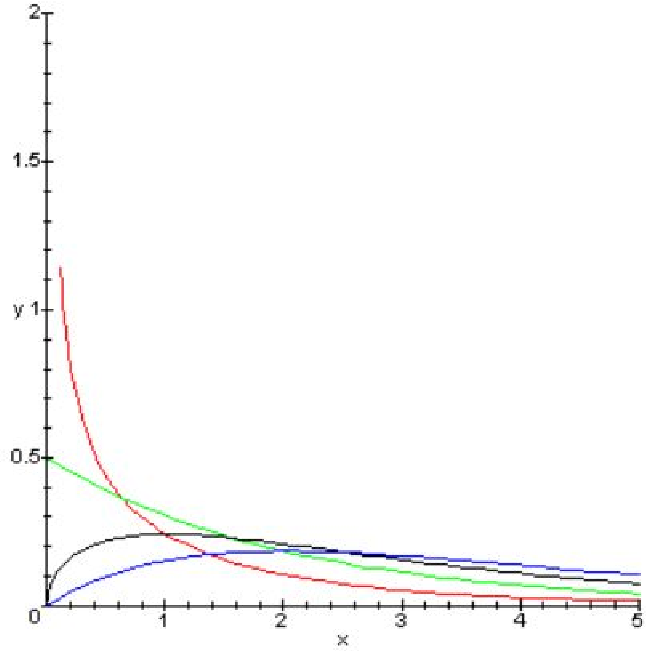


FIG. 5.149 – Loi du χ^2 (fonctions de distribution)

En cours de traduction de l'anglais

et tracé de la fonction de distribution et respectivement de répartition pour la loi du Khi-deux pour $k = 2$ (pour plus de tracés sur cette distribution voir plus bas à la page 386) :

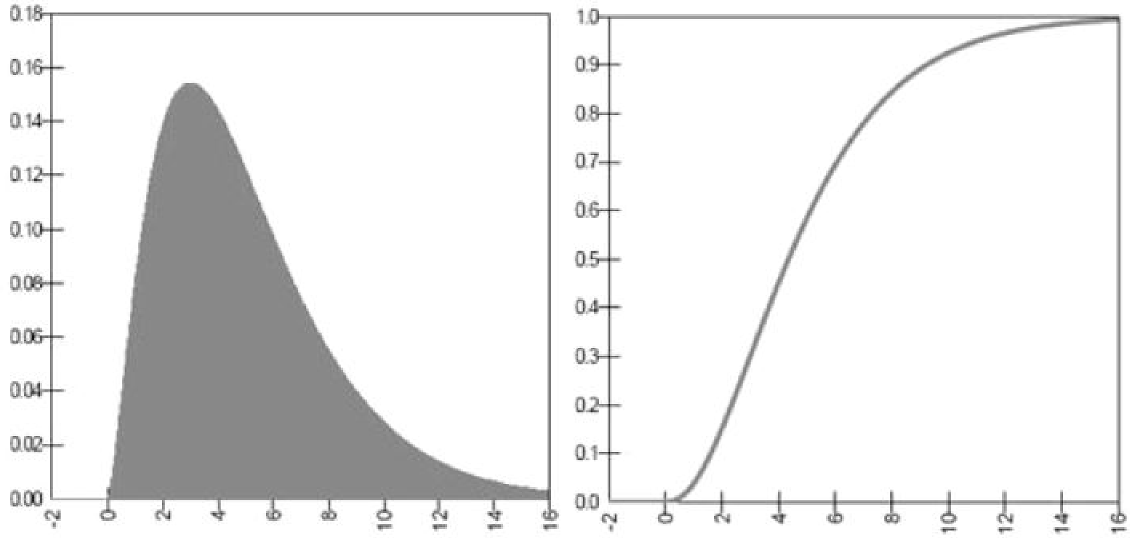


FIG. 5.150 – Loi du χ^2 (fonction de densité et distribution cumulative)

Dans la littérature, il est de tradition de noter :

$$X = \chi_k^2 \quad \text{ou} \quad X = \chi^2(k) \qquad (5.7.989)$$

pour indiquer que la distribution de la variable aléatoire X est la loi du Khi-deux. Par ailleurs il est courant de nommer le paramètre k "degré de liberté" et de l'abréger "ddl".

La fonction du Khi-deux découle donc de la loi Gamma et par ailleurs en prenant $k = 2$ nous retrouvons aussi la loi exponentielle (voir plus haut) pour $\lambda = 1/2$:

$$P_2(x) = \frac{1}{2^1\Gamma(1)}x^{2/2-1}e^{-x/2} \cdot 1_{[0,+\infty[} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}1_{[0,+\infty[} \quad (5.7.990)$$

Par ailleurs, puisque (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (5.7.991)$$

la loi du Khi-deux avec k égal à l'unité peut s'écrire sous la forme :

$$P_1(x) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}e^{-x/2} \cdot 1_{[0,+\infty[} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2} \cdot 1_{[0,+\infty[} \quad (5.7.992)$$

Enfin, terminons avec une propriété assez importante dans les tests statistiques que nous étudierons un peu plus loin et particulièrement dans les intervalles de confiance des événements rares et la fameuse méthode de Fisher pour les p-valeur de multiples tests d'hypothèses. Effectivement, le lecteur pourra vérifier dans un tableur comme Microsoft Excel 14.0.6123 (version française), que nous avons :

=LOI.POISSONS.N($x \in \mathbb{N}, \mu$,VRAI)
=1-LOI.KHIDEUX.N($2\mu, 2(x+1)$,VRAI)
=1-LOI.GAMMA.N($2\mu, x+1$,VRAI)
=1-LOI.EXPONENTIELLE.N($x, 0.5$,VRAI)

Il nous faut donc démontrer cette relation entre loi du khi-2 et loi de Poisson. Voyons cela en partant de la loi Gamma :

$$P_{a,\lambda}(x) = \frac{x^{a-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}\lambda^a 1_{]0,+\infty[} \quad (5.7.993)$$

Si nous posons $\lambda = 1/2$ et $a = k/2$ nous avons alors la loi du khi-2 à k degrés de libertés :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{k/2-1}e^{-x/2}1_{]0,+\infty[} \quad (5.7.994)$$

Maintenant, rappelons que nous avons vu dans le chapitre de Suites Et Séries (page 1683), la série de Taylor (Maclaurin) avec reste intégral à l'ordre $n-1$ autour de 0 jusqu'à λ suivante :

$$\begin{aligned} e^{\lambda} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^x(0) + \int_0^{\lambda} e^n(t)\frac{(\lambda-1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} e^t\frac{(\lambda-1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t \\ &\underset{u=\lambda-t}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} - \int_{\lambda}^{0} e^{\lambda-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u \end{aligned} \quad (5.7.995)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous multiplions par $e^{-\lambda}$:

$$e^{\lambda}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}+\int_0^{\lambda}e^{\lambda-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u\right)\Rightarrow 1=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\int_0^{\lambda}e^{-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u \quad (5.7.996)$$

Et donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1-\int_0^{\lambda}e^{-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u \quad (5.7.997)$$

Or, concentrons-nous sur le terme :

$$\int_0^{\lambda}e^{-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u \quad (5.7.998)$$

et faisons un premier changement de variable :

$$\int_0^{\lambda}e^{-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u\underset{u=x/2}{=}\int_0^{\lambda}\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}x^{n-1}e^{-x/2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\lambda}\frac{1}{2^{n}(n-1)!}x^{n-1}e^{-x/2}\mathrm{d}x \quad (5.7.999)$$

et un second changement de variable (attention ! le k dans le changement de variable n'est pas le même que celui de la somme de la loi de Poisson...) :

$$\int_0^{\lambda}\frac{1}{2^{n}(n-1)!}x^{n-1}e^{-x/2}\mathrm{d}x\underset{n=k/2}{=}\int_0^{\lambda}\frac{1}{2^{k/2}\left(\dfrac{k}{2}-1\right)!}x^{k/2-1}e^{-x/2}\mathrm{d}x \quad (5.7.1000)$$

Or, nous avons démontré dans le chapitre de Calcul Différentiel Et Intégral (page 1552) que si x est un entier strictement positif :

$$x!=\Gamma(x+1)! \quad (5.7.1001)$$

Il vient alors :

$$\left(\frac{k}{2}-1\right)!=\Gamma\left(\left(\frac{k}{2}-1\right)+1\right)=\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \quad (5.7.1002)$$

Nous avons finalement :

$$\int_0^{\lambda}\frac{1}{2^{k/2}\left(\dfrac{k}{2}\right)!}x^{k/2-1}e^{-x/2}\mathrm{d}x \quad (5.7.1003)$$

où nous retrouvons donc bien la fonction de distribution du khi-2 sous l'intégrale ! Donc au final :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1-\int_0^{\lambda}\frac{1}{2^{k/2}\left(\dfrac{k}{2}\right)!}x^{k/2-1}e^{-x/2}\mathrm{d}x \quad (5.7.1004)$$

En cours de traduction de l'anglais

D'où la relation donnée plus haut pour les tableurs en se rappelant bien que nous avons posé :

$$\begin{aligned} n &= \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2n \\ u &= \frac{x}{x} \Leftrightarrow x = 2u = 2(\lambda - t)_{t=0} = 2\lambda \end{aligned} \quad (5.7.1005)$$

Enfin pour les personnes n'ayant pas accès à un tableur ou à un logiciel statistique :

DISTRIBUTION CUMULATIVE DE LA LOI DU KHI-DEUX

k	0.1%	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	12.5%	20.0%	25.0%	33.3%	50.0%
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	38.785	41.449	42.942	45.184	49.335
55	28.173	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	43.220	46.036	47.610	49.972	54.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	47.680	50.641	52.294	54.770	59.335

En cours de traduction de l'anglais

DISTRIBUTION CUMULATIVE DE LA LOI DU KHI-DEUX

k	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.892	53.733	56.334	58.164	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661
55	57.016	58.945	61.665	63.577	67.211	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749	93.168
60	62.135	64.147	66.981	68.972	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.18.1 Loi du khi-deux non centrée

La "loi du khi-deux non centrée" peut être trouvée dans deux situations majeures dans les statistiques industrielles (et donc dans les monde des affaires) :

- Dans les estimations inférieures et supérieures de l'intervalle de tolérance pour une distribution normale univariée.
- Comme la distribution de l'hypothèse alternative (H_1) de nombreux tests NHST (Null Hypothesis Tests) et donc utilisée pour calculer la puissance des tests correspondants.

Déterminons maintenant la fonction de probabilité de densité de la distribution du khi-deux non centrée.

Nous savons que la fonction de probabilité de densité de $X^2 = \mathcal{N}(0,1)^2$ suit par définition une distribution χ^2 à degré de liberté. La question est maintenant de savoir quelle distribution suit $\mathcal{N}(\lambda,1)^2$??

D'abord, nous savons que nous pouvons réécrire ceci comme :

$$T = X - \lambda = \mathcal{N}(0,1) \quad (5.7.1006)$$

Dès lors, T a la distribution $\Phi(t)$ et la fonction de densité (voir plus tôt notre étude de la distribution Normale) :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (5.7.1007)$$

La distribution de X^2 est évidemment :

$$\begin{aligned} P(X^2 \leq x) &= P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) \\ &= P\left(-\sqrt{x} - \lambda \leq X_1 - \lambda \leq \sqrt{x} - \lambda\right) \\ &= \Phi(\sqrt{x} - \lambda) - \Phi(-\sqrt{x} - \lambda) \end{aligned} \quad (5.7.1008)$$

La densité est donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\Phi(\sqrt{x}-\lambda) - \Phi(-\sqrt{x}-\lambda)\right] &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\phi(\sqrt{x}-\lambda) + \phi(\sqrt{x}+\lambda)\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\sqrt{x}-\lambda)^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\sqrt{x}+\lambda)^2}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda^2)}\left[\frac{e^{\lambda\sqrt{x}} + e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2}\right] \end{aligned} \quad (5.7.1009)$$

Et nous connaissons (voir section Suites et Séries page 1683) la série de Macluarin suivante :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad (5.7.1010)$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda^2)}\left[\frac{e^{\lambda\sqrt{x}}+e^{-\lambda\sqrt{x}}}{2}\right]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda^2)}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!}\right]\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\frac{(\lambda^2/2)^k)}{k!}\right\}\left\{e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\right\}\end{aligned}\tag{5.7.1011}$$

Rappelons maintenant que si K est une variable aléatoire avec une distribution de Poisson et espérance $\lambda^2/2$, alors sa distribution est égale à :

$$P_\lambda(K=k)=e^{-\lambda^2/2}\frac{(\lambda^2/2)^k}{k!}\tag{5.7.1012}$$

avec $k=0,1,2,\ldots$.

Dès lors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\frac{(\lambda^2/2)^k)}{k!}\right\}\left\{e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\right\}=\sum_{k=0}^{+\infty}P_\lambda(K=k)\left\{e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\right\}\tag{5.7.1013}$$

Rappelons maintenant que la distribution du chi carré est donnée par :

$$P_k(x)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(k/2)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\cdot 1_{[0,+\infty[}\tag{5.7.1014}$$

Alors :

$$\begin{aligned}P_{2k+1}(x)&=\frac{1}{2^{\frac{2k+1}{2}}\Gamma((2k+1)/2)}x^{\frac{(2k+1)}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\cdot 1_{[0,+\infty[}=\frac{1}{2^{k+\frac{1}{2}}\Gamma(k+\frac{1}{2})}x^{k-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot 1_{[0,+\infty[}\\&=\frac{1}{2\Gamma(k+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot 1_{[0,+\infty[}\end{aligned}\tag{5.7.1015}$$

Ainsi :

$$P_{2k+1}(x)2\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 1_{[0,+\infty[}=\left(\frac{x}{2}\right)^k e^{-\frac{x}{2}}\tag{5.7.1016}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}P_\lambda(K=k)\left\{e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^k\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\right\}&=\sum_{k=0}^{+\infty}P_\lambda(K=k)\left\{P_{2k+1}(x)2\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 1_{[0,+\infty[}\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\right\}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}P_\lambda(K=k)\left\{P_{2k+1}(x)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}1_{[0,+\infty[}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}P_\lambda(K=k)P_{2k+1}(x)\left\{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}1_{[0,+\infty[}\end{aligned}\tag{5.7.1017}$$

Rappelons maintenant que nous avons prouvé dans la section Calcul différentiel et intégral (voir page 1552) que :

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!}{2^{2k-1}(k-1)!}\sqrt{\pi}\tag{5.7.1018}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{+\infty} P_\lambda(K=k)P_{2k+1}(x)\left\{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}1_{[0,+\infty[}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty} P_\lambda(K=k)P_{2k+1}(x)\left\{\frac{(2k-1)!}{2^{2k-1}(k-1)!}\sqrt{\pi}\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}1_{[0,+\infty[}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty} P_\lambda(K=k)P_{2k+1}(x)\left\{\frac{(2k-1)!}{2^{2k-1}(k-1)!}\frac{2^{2k}k!}{(2k)!}\right\}1_{[0,+\infty[}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty} P_\lambda(K=k)P_{2k+1}(x)\frac{1}{2^{-1}}\frac{k}{2k}1_{[0,+\infty[}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty} P_\lambda(K=k)P_{2k+1}(x)1_{[0,+\infty[}
\end{aligned} \tag{5.7.1019}$$

Donc finalement la fonction de distribution du khi-deux non centrée avec un degré de liberté est donnée par :

$$\chi_1(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty} P_\lambda(K=k)P_{2k+1}(x)1_{[0,+\infty[} \tag{5.7.1020}$$

Ou explicitement :

$$\chi_1(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\frac{(\lambda^2/2)^k}{k!}\right\}\left\{\frac{1}{2^{k+\frac{1}{2}}\Gamma(k+\frac{1}{2})}x^{k-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot 1_{[0,+\infty[}\right\} \tag{5.7.1021}$$

Remarque

Il peut être prouvé (mais jusqu'à présent, nous n'avons besoin de ce résultat nulle part dans ce livre), que le cas général avec n degrés de liberté est donné par :

$$\chi_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{+\infty} P_\lambda(K=k)P_{2k+n}(x)1_{[0,+\infty[} \tag{5.7.1022}$$

C'est tout ce dont nous avons besoin pour notre étude ultérieure des intervalles de tolérance ! Nous ne déduirons donc pas la moyenne et la variance de cette distribution car elle serait inutile dans l'état actuel de ce livre !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.19 Distribution de Student

La "distribution de Student" ou "loi de Student") de paramètre k est définie par la relation (nous allons démontrer cependant son origine historique à la page suivante) :

$$P(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \quad (5.7.1023)$$

avec k étant le degré de liberté de la loi du χ^2 sous-jacente à la construction de la fonction de Student comme nous allons le voir.

Il s'agit en réalité de la "distribution de Student centrée réduite" car comme nous le verrons plus loin, elle est dérivée d'une relation impliquant la loi Normale centrée réduite.

Indiquons qu'elle peut aussi être obtenue dans la version français de Microsoft Excel 11.8346 à l'aide des fonctions `LOI.STUDENT( )` et sa réciproque par `LOI.STUDENT.INVERSE( )`.

Il s'agit bien d'une fonction de distribution car elle vérifie bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_k(x)\mathrm{d}x = 1 \quad (5.7.1024)$$

En cours de traduction de l'anglais

Voyons la démonstration la plus simple pour justifier la provenance de la loi de Student et qui nous sera en même temps très utile dans l'inférence statistique et l'analyse de la variance plus loin.

Pour cette démonstration, rappelons que :

1. Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X, f_Y, la loi du couple (X, Y) possède une densité f vérifiant (axiome des probabilités !) :

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (5.7.1025)$$

2. La distribution $\mathcal{N}(0, 1)$ est donnée par (voir plus haut) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad (5.7.1026)$$

3. La distribution du χ_n^2 est donnée par (voir précédemment) :

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n}{2}-1} \quad (5.7.1027)$$

pour $y \geq 0$ et $n \geq 1$.

4. La fonction Gamma d'Euler Γ est définie pour tout $\alpha > 0$ par (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\mathrm{d}x \tag{5.7.1028}$$

et vérifie (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$\Gamma(\alpha-1)=\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1} \tag{5.7.1029}$$

pour $\alpha \geq 2$.

Ces rappels étant faits, considérons maintenant X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi χ^2_n.

Nous supposons X et Y indépendantes et nous considérons la variable aléatoire (c'est à l'origine l'étude historique de la loi de Student dans le cadre de l'inférence statistique qui a amené à poser cette variable dont nous justifierons l'origine plus loin) :

$$T=\sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}=\frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\chi^2_n/n}} \tag{5.7.1030}$$

Nous allons démontrer que T suit une loi de Student de paramètre n.

Démonstration 5.45.7. Notons F et f les fonctions de répartition et de densité de T et f_X, f_Y les fonctions de densité de X, Y et (X,Y) respectivement. Nous avons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F(t)=P(T\leqslant t)=P\left(\sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}\leqslant t\right)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.7.1031}$$

où :

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*|x\leq\frac{t\sqrt{y}}{\sqrt{n}}\right\} \tag{5.7.1032}$$

la valeur imposée positive et non nulle de y étant due au fait qu'elle est sous une racine et en plus au dénominateur.

Ainsi :

$$F(t)=\iint\limits_D f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^{+\infty} f_Y(y)\mathrm{d}y\int\limits_{-\infty}^{t\sqrt{y}/\sqrt{n}} f_X(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{+\infty} f_Y(y)\Phi(t\sqrt{y}/\sqrt{n})\mathrm{d}y \tag{5.7.1033}$$

où comme X suit une loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\Phi(u)=\int\limits_{-\infty}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \tag{5.7.1034}$$

En cours de traduction de l'anglais

est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite.

Nous obtenons alors la fonction de densité de T en dérivant F :

$$f(t)=F'(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{+\infty} f_Y(y)f_X(t\sqrt{y}/\sqrt{n})\sqrt{y}\mathrm{d}y \tag{5.7.1035}$$

car (la dérivée d'une fonction est égale à sa dérivée multipliée par sa dérivée intérieure) :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t\sqrt{n}/\sqrt{t})}{\mathrm{d}t}=f_X(t\sqrt{n}/\sqrt{t})\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1036}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{+\infty} f_Y(y)f_X(t\sqrt{y}/\sqrt{n})\sqrt{y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-y/2}y^{n/2-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t\sqrt{y}/\sqrt{n})^2/2}\sqrt{y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-y/2}y^{n/2-1}e^{-(t\sqrt{y}/\sqrt{n})^2/2}\sqrt{y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi n}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{y(1+t^2/n)}{2}}y^{(n-1)/2}\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{5.7.1037}$$

En faisant le changement de variable :

$$u=\frac{y}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}y=\left(\dfrac{2}{1+\dfrac{t^2}{n}}\right)\mathrm{d}u\\ y=\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}u\end{cases} \tag{5.7.1038}$$

$$\tag{5.7.1039}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{2}{1+t^2/n}\right)^{(n+1)/2}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}u^{(n-1)/2}\mathrm{d}u}_{=\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}\\
&=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}\left(\frac{2}{1+t^2/n}\right)^{(n+1)/2}\\
&=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}
\end{aligned} \tag{5.7.1040}$$

ce qui est bien la loi de Student de paramètre n.

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

Voyons maintenant quelle est l'espérance de la loi de Student :

$$T=\sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}} \quad (5.7.1041)$$

Nous avons :

$$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}(\sqrt{n}X)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right) \quad (5.7.1042)$$

Mais $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right)$ existe si et seulement si $n \geq 2$. En effet pour $n=1$:

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{f_Y(y)}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}y \quad (5.7.1043)$$

et :

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{1-3}{2}}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{y}\mathrm{d}y \geqslant \int_0^{1}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{y}\mathrm{d}y \geqslant e^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}\mathrm{d}y \to +\infty \quad (5.7.1044)$$

Tandis que pour $n \geq 2$ nous avons :

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}y=2^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}u=2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)<+\infty \quad (5.7.1045)$$

Ainsi pour $n=1$, l'espérance n'existe pas.

Donc pour $n \geq 2$:

$$\mathrm{E}(T)=\sqrt{n}\underbrace{\mathrm{E}(X)}_{=0}\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right)=0 \quad (5.7.1046)$$

Voyons maintenant la valeur de la variance. Nous avons donc :

$$\mathrm{V}(T)=\mathrm{E}(T^2)-\mathrm{E}(T)^2 \quad (5.7.1047)$$

Discutons de l'existence de $\mathrm{E}(T^2)$. Nous avons trivialement :

$$\mathrm{E}(T^2)=nE\left(\frac{X^2}{Y}\right)=n\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}\left(\frac{1}{Y}\right) \quad (5.7.1048)$$

X suit une loi Normale centrée réduite donc :

$$\mathrm{V}(X)=1=\mathrm{E}(X^2)-\underbrace{\mathrm{E}(X)^2}_{=0}=\mathrm{E}(X^2) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X^2)=1 \quad (5.7.1049)$$

En cours de traduction de l' anglais

Pour ce qui est de $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{Y}\right)$ nous avons :

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{Y}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{f_Y(y)}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n}{2}-2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{\frac{n}{2}-2}\mathrm{d}u=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\Gamma(n/2)} \tag{5.7.1050}$$

où nous avons fait le changement de variable $u=y/2$.

Mais l'intégrale définissant $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}-1\right)$ converge seulement si $n\geq 3$.

Donc $\mathrm{E}(T^2)$ existe si et seulement si $n\geq 3$ et vaut alors selon les propriétés de la fonction Gamma d'Euler démontrées dans le chapitre de Calcul Différentiel Et Intégral :

$$n\mathrm{E}\left(T\right)=n\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\Gamma(n/2)}=\frac{n}{n-2} \tag{5.7.1051}$$

Ainsi pour $n\geq 3$:

$$\mathrm{V}(T)=\frac{n}{n-2} \tag{5.7.1052}$$

Il est par ailleurs important de remarquer que cette loi est symétrique par rapport à 0 !

Exemple de tracé de la fonction de distribution et répartition pour la fonction de Student de paramètre $k=3$ (pour plus de plots sur cette distribution voir plus bas ci-dessous à la page 386) :

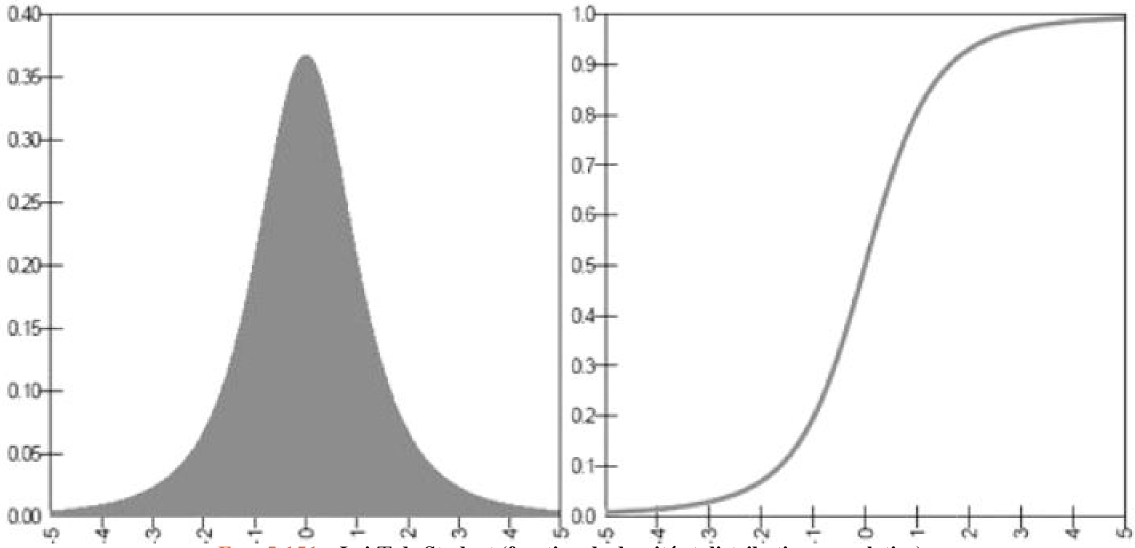


FIG. 5.151 – Loi T de Student (fonction de densité et distribution cumulative)

En traduction de l'anglais

Enfin pour les personnes n'ayant pas accès à un tableur ou à un logiciel statistique :

DISTRIBUTION CUMULATIVE DE LA LOI T DE STUDENT

k	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.19.1 Distribution T de Student multivariée

Il existe malheureusement de nombreuses définitions différentes de la "distribution T multivariée" (nous parlons alors de "candidats" à là distribution T multivariée). Nous nous concentrerons ici sur celle souvent appelée "distribution canonique T multivariée".

Premièrement si le lecteur refait la preuve de la dérivation de la distribution T présentée plus haut mais utilise $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ au lieu de $\mathcal{N}(0,1)$, le lecteur devrait facilement voir que le résultat est :

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi\sigma n}}\left(1+\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{5.7.1053}$$

qui est appelée la "distribution centrée T de Student" (car elle n'est pas réduite !).

Et en utilisant la règle du doigt mouillé (...), il est également assez facile de deviner que si la variable n'était pas centrée, nous aurions :

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi\sigma n}}\left(1+\frac{(t-\mu)^2}{n\sigma^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{5.7.1054}$$

qui est la (vraie) "loi de Student" (c'est-à-dire la loi non-centrée et non-réduite...) !

La distribution T ci-dessus est évidemment un cas particulier de la distribution T multivariée avec un nombre de variables $n=1$, c'est-à-dire un vecteur aléatoire $x\in\mathbb{R}$, moyenne $\mu=0$ et matrice de covariance $\Sigma=1$.

Nous pouvons deviner par la règle du doigt mouillé (...) que la fonction de densité de probabilité de la "distribution T multivariée canonique" sachant à quoi ressemble la distribution Normale multivariée (voir page 708) est donnée par :

$$T(\vec{x};\vec{\mu},\Sigma,\nu)=\frac{\Gamma([\nu+n]/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{(\nu\pi)^n|\Sigma|}}\left[1+\frac{1}{\nu}(\vec{x}-\vec{\mu})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right]^{-(\nu+n)/2} \tag{5.7.1055}$$

avec $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ et Σ étant la matrice des variances-covariances de dimension $n\times n$.

En posant $n=1$, tel que $x\in\mathbb{R}$, mais aussi $\mu=0$ et $\Sigma=1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}T(\vec{x};0,1,\nu)&=\frac{\Gamma([\nu+1]/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{(\nu\pi)^1|1|}}\left[1+\frac{1}{\nu}(x-0)^{\mathrm{T}}1^{-1}(x-0)\right]^{-(\nu+1)/2}\\&=\frac{\Gamma([\nu+1]/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu\pi}}\left[1+\frac{x^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}}\left[1+\frac{x^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}\end{aligned} \tag{5.7.1056}$$

ce qui équivaut à la fonction de densité de probabilité de la distribution T de Student (centrée réduite) !

En cours de traduction de l' anglais

5.7.6.20 Distribution de Fisher

La "fonction de Fisher" (ou "loi de Fisher-Snedecor") de paramètres k et l est définie par la relation :

$$P(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{kx}{l}\right)^{-\frac{k+l}{2}} \tag{5.7.1057}$$

si $x \geq 0$ (voir le graphique ci-dessous à la page 386). Les paramètres k et l sont des entiers positifs et correspondent aux degrés de liberté des deux lois du Khi-deux sous-jacentes. Cette distribution est souvent notée equation ou $F_{k,l}$ ou $F(k,l)$ et peut être obtenue dans la version française de Microsoft Excel 11.8346 par la fonction `LOI.F( )`.

Il s'agit bien d'une fonction de distribution car elle vérifie également (reste à démontrer directement mais bon comme nous allons le voir elle est le produit de deux fonctions de distribution donc indirectement...) :

$$\int_0^{+\infty} F_{k,l}(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{5.7.1058}$$

Voyons la démonstration la plus simple pour justifier la provenance de la loi de Fisher et qui nous sera en même temps très utile dans l'inférence statistique et l'analyse de la variance plus loin.

Pour cette démonstration, rappelons que :

1. La loi χ_n^2 est donnée par (voir plus haut) :

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-y/2} y^{n/2-1} \tag{5.7.1059}$$

pour $y \geq 0$ et $n \geq 1$.

2. La fonction Γ est définie pour tout $\alpha > 0$ par (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\mathrm{d}x \tag{5.7.1060}$$

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois χ_n^2 et χ_m^2.

Nous considérons la variable aléatoire :

$$T = \frac{X/n}{Y/m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m} \tag{5.7.1061}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous allons donc montrer que la loi de T est la loi de Fisher-Snedecor de paramètres n, m.

Notons pour cela F et f les fonctions cumulative et de densité de T et f_X, f_Y, f, les fonctions de densité de X, Y et (X, Y) respectivement. Nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F(t) = P(T \leqslant t) = P\left(\frac{X/n}{Y/m} \leqslant t\right) = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5.7.1062}$$

où :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* | x \leq \frac{nt}{m}y\right\} \tag{5.7.1063}$$

où les valeurs positives imposées proviennent à l'origine d'une loi du Khi-deux pour x et y.

Ainsi :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f_Y(y)\mathrm{d}y \int_0^{\frac{nty}{m}} f_X(x)\mathrm{d}y \tag{5.7.1064}$$

Nous obtenons la fonction de densité de T en dérivant F. D'abord la dérivée intérieure :

$$f(t) = F'(t) = \frac{n}{m}\int_0^{+\infty} f_Y(y) f_X\left(\frac{nty}{m}y\right) y\mathrm{d}y \tag{5.7.1065}$$

Ensuite en explicitant puisque :

$$f(y) = \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}e^{-y/2}y^{m/2-1} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{nt}{m}y\right) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-\frac{nt}{2m}y}\left(\frac{nt}{m}y\right)^{n/2-1} \tag{5.7.1066}$$

nous avons alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{n}{m}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}e^{-y/2}y^{\frac{m}{2}-1}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)}e^{-\frac{nt}{2m}y}\left(\frac{nt}{m}y\right)^{\frac{n}{2}-1} y\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)2^{m/2}\Gamma(m/2)}\frac{n}{m}\int_0^{+\infty} e^{-y/2}y^{m/2-1}e^{-\frac{nt}{2m}y}\left(\frac{nt}{m}y\right)^{\frac{n}{2}-1} y\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)2^{m/2}\Gamma(m/2)}\frac{n}{m}\left(\frac{nt}{m}\right)^{n/2-1}\int_0^{+\infty} e^{-y/2}y^{m/2-1}e^{-\frac{nt}{2m}y}y^{n/2-1}y\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\frac{n}{m}\left(\frac{nt}{m}\right)^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty} y^{\frac{n+m}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{nt}{m}\right)}\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.7.1067}$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{y}{2}\left(1+\frac{nt}{m}\right) \Rightarrow y = \frac{2u}{1+\frac{nt}{m}} \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}u\frac{2}{1+\frac{nt}{m}} \tag{5.7.1068}$$

En cours de traduction de l'anglais

nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{n}{m}\frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nt}{m}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{2}{1+\frac{nt}{m}}\right)^{\frac{n+m}{2}}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} u^{\frac{n+m}{2}-1}e^{-u}\mathrm{d}u}_{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{n}{m}\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{nt}{m}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{nt}{m}\right)^{-\frac{n+m}{2}} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}t^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{nt}{m}\right)^{-\frac{n+m}{2}} \end{aligned} \tag{5.7.1069}$$

En cours de traduction de l' anglais

Pour les personnes qui n'ont pas accès à un tableur ou à un logiciel statistique, voici quelques tableaux utiles :

POURCENTAGE DE POINTS DE LA DISTRIBUTION F

$\nu_2 \backslash \nu_1$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	0.900	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.1	59.7	60.5	61.0	61.5	62.0	62.6	63.0	63.3
	0.950	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	242.	244.	246.	248.	250.	252.	254.
	0.975	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	969.	977.	985.	993.			
	0.990														
	0.999														
2	0.900	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.39	9.41	9.43	9.44	9.46	9.47	9.49
	0.950	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	0.975	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5
	0.990	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	99.5
	0.999	999.	999.												
3	0.900	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
	0.950	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.58	8.53
	0.975	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9
	0.990	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.1
	0.999	149.	141.	137.	135.	133.	132.	131.	129.	128.	127.	126.	125.	125.	123.
4	0.900	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
	0.950	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.70	5.63
	0.975	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.38	8.26
	0.990	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5
	0.999	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.1	45.4	44.9	44.1
5	0.900	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.15	3.10
	0.950	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.44	4.36
	0.975	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.14	6.02
	0.990	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.24	9.02
	0.999	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.4	24.9	24.4	23.8
6	0.900	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.77	2.72
	0.950	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.75	3.67
	0.975	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.98	4.85
	0.990	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.09	6.88
	0.999	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	16.7	16.3	15.7
7	0.900	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.52	2.47
	0.950	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.32	3.23
	0.975	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.28	4.14
	0.990	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.86	5.65
	0.999	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.9	12.5	12.2	11.7
8	0.900	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.35	2.29
	0.950	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.02	2.93
	0.975	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	3.89	3.81	3.67
	0.990	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.07	4.86
	0.999	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.5	10.1	9.80	9.33

En cours de traduction de l'anglais

POURCENTAGE DE POINTS DE LA DISTRIBUTION F

$\nu_2\backslash\nu_1$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
9	0.900	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.22	2.16
	0.950	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.80	2.71
	0.975	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.47	3.33
	0.990	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.52	4.31
	0.999	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.90	8.55	8.26	7.81
10	0.900	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.16	2.12	2.06
	0.950	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.64	2.54
	0.975	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.22	3.08
	0.990	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.11	3.91
	0.999	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.80	7.47	7.19	6.76
11	0.900	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.12	2.08	2.04	1.97
	0.950	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.51	2.40
	0.975	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.23	3.12	3.03	2.88
	0.990	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.81	3.60
	0.999	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	6.68	6.42	6.00
12	0.900	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.97	1.90
	0.950	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.40	2.30
	0.975	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.87	2.72
	0.990	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.57	3.36
	0.999	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.40	6.09	5.83	5.42
13	0.900	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.85
	0.950	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.31	2.21
	0.975	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.95	2.84	2.74	2.60
	0.990	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	3.51	3.37	3.17
	0.999	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.93	5.63	5.37	4.97
14	0.900	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.10	2.05	2.01	1.96	1.91	1.87	1.80
	0.950	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.24	2.13
	0.975	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.64	2.49
	0.990	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.22	3.00
	0.999	11.8	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.40	6.13	5.85	5.56	5.25	5.00	4.60
15	0.900	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.83	1.76
	0.950	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.18	2.07
	0.975	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.55	2.40
	0.990	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.08	2.87
	0.999	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.08	5.81	5.53	5.25	4.95	4.70	4.31
16	0.900	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.03	1.99	1.94	1.89	1.84	1.79	1.72
	0.950	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.12	2.01
	0.975	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	2.99	2.89	2.79	2.68	2.57	2.47	2.32
	0.990	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	2.97	2.75
	0.999	11.0	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.81	5.55	5.27	4.99	4.70	4.45	4.06
17	0.900	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.69
	0.950	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.08	1.96
	0.975	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.92	2.82	2.72	2.62	2.50	2.41	2.25
	0.990	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.87	2.65
	0.999	10.7	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.58	5.32	5.05	4.77	4.48	4.24	3.85

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.21 Loi Normale repliée généralisée

La "distribution Normale repliée" est la distribution de la valeur absolue d'une variable aléatoire avec une distribution Normale [33]. Comme nous l'avons mentionné précédemment, la distribution Normale est peut-être la plus importante en probabilités et est utilisée pour modéliser une incroyable variété de phénomènes aléatoires. Étant donné que l'on ne peut s'intéresser qu'à l'ampleur d'une variable Normalement distribuée, la Normale repliée apparaît de manière très naturelle, en particulier en Finance et en Génie Industriel pour la conception des Plans d'Expériences (voir section de Génie Industriel ??) . Le nom vient du fait que la mesure de probabilité de la distribution Normale sur $]-\ infty,0]$ est repliée sur $[0,+\infty[$.

Définition (#5.7.134) : Supposons que X ait une distribution Normale avec moyenne $\mu\in\mathbb{R}$ et écart-type $\sigma\in[0,+\ infty[$. Alors $Y=|X|$ a la distribution Normale repliée avec les paramètres μ et σ.

Supposons que Z suit la distribution Normale centrée réduite. Rappelons que Z a alors une fonction de densité de probabilité notée ϕ et une fonction de distribution notée Φ données par :

$$\begin{aligned}\phi(z)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\\ \Phi(z)&=\int\limits_{-\infty}^{z}\phi(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{5.7.1070}$$

avec $z\in\mathbb{R}$.

Si $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma\in[0,+\infty[$, alors $X=\mu+\sigma Z$ a une distribution Normale avec une moyenne μ et écart-type σ, et il est donc évident à ce niveau que :

$$Y=|X|=|\mu+\sigma Z|\tag{5.7.1071}$$

suit la distribution Normale repliée avec les paramètres μ et σ.

Déterminons maintenant la fonction de probabilité cumulée d'une telle variable ! Pour $y\in[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}F(y)&=P(Y\leq y)=P(|X|\leq y)=P(|\mu+\sigma Z|\leq y)=P(-y\leq\mu+\sigma Z\leq y)\\&=P\left(\frac{-y-\mu}{\sigma}\leq Z\leq\frac{y-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-y-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}\tag{5.7.1072}$$

Comme $\Phi(-Z)=1-\Phi(Z)$ nous avons :

$$\begin{aligned}F(y)&=\Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-y-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{y+\mu}{\sigma}\right)-1\\&=\int\limits_{0}^{y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right)^2}+e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right\}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{5.7.1073}$$

Nous ne pouvons pas calculer la fonction quantile F^{-1} sous forme fermée, mais les valeurs de cette fonction peuvent être approximées.

[33] La majorité du texte ci-dessous provient de http://www.math.uah.edu/stat/

En cours de traduction de l' anglais

Il vient donc immédiatement que Y a une fonction de densité de probabilité f donnée par :

$$f(|Y|) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\mu}{\sigma}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right\} \quad (5.7.1074)$$

Cela découle de la différenciation de la fonction de répartition cumulée par rapport à y comme nous le savons !

Maintenant, comme toujours dans ce livre, nous nous concentrerons uniquement sur ce dont nous avons besoin pour les applications des autres chapitres ! Donc, comme nous n'avons pas besoin des moments du dossier Distribution normale, nous ne les calculerons pas. Le seul but du développement ci-dessus était de construire les outils pour pouvoir introduire un cas particulier du dossier Distribution normale.

5.7.6.21.1 Distribution demi-Normale

En théorie des probabilités et statistiques, la "distribution demi-Normale" est un cas particulier de la distribution normale repliée.

Soit X une variable aléatoire suivante une distribution Normale ordinaire, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors $Y = |X|$ est dite suivre une distribution demi-normale. Ainsi, la distribution semi-normale est un pli à la moyenne d'une distribution Normale ordinaire avec une moyenne $\mu = 0$.

Ainsi, soit $Y = |\sigma Z| = \sigma|Z|$ où Z a une distribution Normale standard et $\sigma \in [0, +\infty[$. Il est clair que σ est un paramètre d'échelle, contrairement au cas de la distribution Normale repliée généralisée. La distribution de Y lorsque $\sigma = 1$, $Y = |Z|$ suite une "distribution demi-Normale standardisée".

Comme la distribution demi-Normale n'est qu'un cas particulier de la distribution Normale repliée avec $\mu = 0$, il vient immédiatement :

$$f(y) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad (5.7.1075)$$

avec $y \in \mathbb{R}^+$ et cette distribution est parfois notée $\mathcal{HN}(0,\sigma^2)$.

Or ce qui nous intéresse pour les autres chapitres de ce livre (notamment pour les Pland d'Expérience) sont les moments de ce dernier !

Pour les calculer, rappelez-vous d'abord que :

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (5.7.1076)$$

avec $z \in \mathbb{R}$. Il est donc immédiat que :

$$\phi'(z) = -z\phi(z) \quad (5.7.1077)$$

Souvenez-vous également que nous avons déjà prouvé que :

$$\mathrm{E}(Z) = 0 \qquad \mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{V}(Z) = 1 \quad (5.7.1078)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous devons d'abord déterminer les moments de la distribution Normale ! Donc pour $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathrm{E}(Z^{n+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^{n+1}\phi(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} z^n z\phi(z)\mathrm{d}z = -\int_{-\infty}^{+\infty} z^n\phi'(z)\mathrm{d}z \quad (5.7.1079)$$

Maintenant, nous intégrons par parties (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1511), avec $u = z^n$ et $\mathrm{d}v = \phi'(z)\mathrm{d}z$ pour obtenir :

$$\mathrm{E}(Z^{n+1}) = -z^n\phi(z)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} nz^{n-1}\phi(z)\mathrm{d}z = 0 + n\mathrm{E}(Z^{n-1}) \quad (5.7.1080)$$

Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n > 1$:

$$\mathrm{E}(Z^{n+1}) = n\mathrm{E}(Z^{n-1}) \quad (5.7.1081)$$

Les moments de la distribution Normale standard sont maintenant faciles à calculer. Nous savons d'abord que :

- $\mathrm{E}(Z) = 0$
- $\mathrm{E}(Z^2) = 1$

Dès lors :

- $\mathrm{E}(Z) = 0$
- $\mathrm{E}(Z^2) = 1$
- $\mathrm{E}(Z^3) = \mathrm{E}(Z^{2+1}) = 2 \cdot \mathrm{E}(Z^{2-1}) = 2 \cdot \mathrm{E}(Z) = 0$
- $\mathrm{E}(Z^4) = \mathrm{E}(Z^{3+1}) = 3 \cdot \mathrm{E}(Z^{3-1}) = 3 \cdot \mathrm{E}(Z^2) = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3$
- $\mathrm{E}(Z^5) = \mathrm{E}(Z^{4+1}) = 4 \cdot \mathrm{E}(Z^{4-1}) = 4 \cdot \mathrm{E}(Z^3) = 4 \cdot 0 = 0$
- $\mathrm{E}(Z^6) = \mathrm{E}(Z^{5+1}) = 5 \cdot \mathrm{E}(Z^{5-1}) = 5 \cdot \mathrm{E}(Z^4) = 5 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$
- $\mathrm{E}(Z^7) = \mathrm{E}(Z^{6+1}) = 6 \cdot \mathrm{E}(Z^{6-1}) = 6 \cdot \mathrm{E}(Z^5) = 6 \cdot 0 = 0$
- $\mathrm{E}(Z^8) = \mathrm{E}(Z^{7+1}) = 7 \cdot \mathrm{E}(Z^{7-1}) = 7 \cdot \mathrm{E}(Z^6) = 7 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- ...

On voit donc que pour les puissances impaires, c'est-à-dire Z^{2n+1} avec $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\mathrm{E}(Z^{2n+1}) = 0 \quad (5.7.1082)$$

et même pour les puissances paires :

$$\mathrm{E}(Z^{2n}) = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{n!2^n} \quad (5.7.1083)$$

En cours de traduction de l' anglais

Il s'ensuit $X = \mathcal{N}(0, \sigma)$ (vous pouvez vérifier par vous-même avec $n = 0$ et $n = 1$) :

$$\boxed{\mathrm{E}(X^{2n+1}) = 0 \qquad \mathrm{E}(X^{2n}) = \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{n!2^n}} \tag{5.7.1084}$$

Les moments de la distribution demi-Normale peuvent désormais être calculés explicitement.

Tout d'abord, il devrait être assez évident par construction que les moments d'ordre pair de Y sont les mêmes que les moments d'ordre pair de Z (dans les deux cas, les valeurs sont toutes positives et donc égales). Par conséquent :

$$\mathrm{E}(Y^{2n}) = \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{n!2^n} \tag{5.7.1085}$$

Pour les moments d'ordre impair, nous devons utiliser (voir ci-dessus) :

$$f(Y) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}} \tag{5.7.1086}$$

avec $x \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent, nous avons par définition :

$$\mathrm{E}(Y^{2n+1}) = \int_0^{+\infty} y^{2n+1}f(y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} y^{2n+1}\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \tag{5.7.1087}$$

dès lors :

$$\mathrm{E}(Y^{2n+1}) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} y^{2n+1}e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \tag{5.7.1088}$$

Maintenant, nous faisons le changement de variable $u = y^2/(2\sigma^2)$, donc nous avons d'abord (c'est évident) :

$$e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = e^{-u} \tag{5.7.1089}$$

anetd :

$$\mathrm{d}u = \frac{2y\mathrm{d}y}{2\sigma^2} \Leftrightarrow \mathrm{d}y = \frac{\sigma^2}{y}\mathrm{d}u \tag{5.7.1090}$$

Par conséquent, nous avons jusqu'à présent :

$$\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} y^{2n+1}\frac{1}{y}e^{-u}\mathrm{d}u = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(y^2\right)^n e^{-u}\mathrm{d}u \tag{5.7.1091}$$

Alors finalement :

$$\mathrm{E}(Y^{2n+1}) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(2\sigma^2u\right)^n e^{-u}\mathrm{d}u = \sigma^{2n+1}2^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}u^ne^{-u}\mathrm{d}u \tag{5.7.1092}$$

En cours de traduction de l' anglais

On reconnaît dans cette expression l'intégrale de la fonction Gamma Euler (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1552) ! Il est donc immédiat que :

$$\text{E}(Y^{2n+1})=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma_0(u)=\sigma^{2n+1}2^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}n! \tag{5.7.1093}$$

Donc en résumé :

$$\text{E}(Y^{2n})=\sigma^{2n}\frac{(2n)!}{n!2^n}\qquad \text{E}(Y^{2n+1})=\sigma^{2n+1}2^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}n! \tag{5.7.1094}$$

Donc, finalement, nous obtenons le résultat dont nous avons besoin pour certaines propriétés du mouvement brownien en finance :

$$\begin{aligned}&\text{E}(Y)=\text{E}(Y^{2\cdot 0+1})=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\\&\text{V}(Y)=\text{E}(Y^2)-(\text{E}(Y))^2=\text{E}(Y^{2\cdot 1})-(\text{E}(Y))^2=\sigma^2-\left(\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2=\sigma^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\end{aligned} \tag{5.7.1095}$$

Mais encore une propriété manque et maintenant pour nos besoins dans la section de génie industriel (page ??) : la valeur de la médiane !

Soit donc M_e la médiane de la distribution demi-normale. Alors, par définition, il s'ensuit que :

$$0.50=F(M_e)=\int_0^{M_e}f(y)\text{d}y=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{M_e}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}\text{d}y \tag{5.7.1096}$$

Substituant $y/(\sqrt{2}\sigma)=u$ nous avons :

$$0.50=F(M_e)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{M_e}{\sqrt{2}\sigma}}e^{-u^2}\text{d}u \tag{5.7.1097}$$

On reconnaît ici la fonction d'Erreur (voir section Thermodynamique page ??). Dès lors :

$$0.50=F(M_e)=\text{erf}\left(\frac{M_e}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{5.7.1098}$$

Ainsi :

$$\text{erf}^{-1}(0.50)=\frac{M_e}{\sqrt{2}\sigma} \tag{5.7.1099}$$

Un tableur comme Microsoft Excel nous donne la fonction d'erreur complémentaire :

```
=ERFC(0.5)=0.479500122
```

Dès lors :

$$\boxed{M_e\cong 0.479500122\sqrt{2}\sigma\cong 0.67\sigma} \tag{5.7.1100}$$

La technique que nous verrons dans la section Génie Industriel (page ??) fait donc l'approximation :

$$1.5\cdot M_e\cong\sigma \tag{5.7.1101}$$

en effet ... c'est de l'ingénierie ...

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.22 Distribution de Laplace

Dans la théorie des probabilités et les statistiques, la "distribution de Laplace" est une distribution de probabilité continue nommée aussi parfois nommée "distribution exponentielle double", car elle peut être considérée comme deux distributions exponentielles (avec un paramètre d'emplacement supplémentaire) mélangées ensemble (bien que le terme soit également parfois utilisé pour désigner la distribution de Gumbel). Cette distribution a de nombreuses applications mais celle qui nous intéresse dans ce livre est l'application pour la régression LASSO (voir section de Méthodes Numériques page ??).

La différence entre deux variables aléatoires exponentielles indépendantes distribuées de manière identique est régie par une distribution de Laplace.

Démonstration 5.45.8. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoirse exponentielles indépendantse dont la moyenne des populations est respectivement α_1 et α_2. Définissons $Y = X_1 - X_2$. Le but est de trouver la distribution de Y par la technique de la fonction de distribution cumulative. Nous savons d'abord que :

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\alpha_1} e^{-x_1/\alpha_1} \qquad x_1 > 0 \tag{5.7.1102}$$

et :

$$f_{X_2}(x_x) = \frac{1}{\alpha_2} e^{-x_2/\alpha_2} \qquad x_2 > 0 \tag{5.7.1103}$$

Par indépendance, il s'ensuit que la fonction de densité de probabilité conjointe de X_1 et X_2 est :

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} e^{-x_1/\alpha_1} e^{-x_2/\alpha_2} \qquad x_1 > 0, x_2 > 0 \tag{5.7.1104}$$

Nous voulons $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ où $-\infty < y < +\infty$. En regardant le support de $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ donné ci-dessus, nous voyons que la fonction de distribution cumulative résultante pour Y sera (doit) être par morceaux, où les morceaux sont séparés à $y = 0$. Nous considérons donc d'abord le cas où $y \leq 0$. La double intégrale nous donnant la fonction de distribution cumulative $F_Y(y)$ de $y \leq 0$ est :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X_1 - X_2 \leq y) = P(X_2 \geq X_1 - y) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_{x_1-y}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^{+\infty}\int_{x_1-y}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} e^{-x_1/\alpha_1} e^{-x_2/\alpha_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} e^{y/\alpha_2} \qquad y \leq 0 \end{aligned} \tag{5.7.1105}$$

Pour $y > 0$, la fonction de distribution cumulative de Y est :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(X_1 - X_2 > y) = 1 - P(X_2 \geq X_1 - y) \\ &= 1 - \int_y^{+\infty}\int_0^{x_1-y} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = 1 - \int_y^{+\infty}\int_0^{x_1-y} \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} e^{-x_1/\alpha_1} e^{-x_2/\alpha_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\ &= 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} e^{-y/\alpha_1} \qquad y > 0 \end{aligned} \tag{5.7.1106}$$

En cours de traduction de l' anglais

La différenciation par rapport à y donne :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{y/\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} & \text{si } y \leq 0 \\ \dfrac{e^{-y/\alpha_1}}{\alpha_1+\alpha_2} & \text{si } y > 0 \end{cases} \tag{5.7.1107}$$

qui est la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire de Laplace avec les paramètres α_1 et α_2.

■ Q.E.D.

Une variable aléatoire a une distribution $\mathcal{L}(\mu, b)$ si sa fonction de densité de probabilité est :

$$\mathcal{L}(x \mid \mu, b) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) = \frac{1}{2b}\begin{cases} \exp\left(-\frac{\mu-x}{b}\right) & \text{si } x < \mu \\ \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right) & \text{si } x \geq \mu \end{cases} \tag{5.7.1108}$$

Ici, μ est un paramètre de localication et $b > 0$, qui est parfois appelé "diversité", est un paramètre d'échelle. Si $\mu = 0$ et $b = 1$, la demi-ligne positive est exactement une distribution exponentielle mise à l'échelle par $1/2$.

Notez que la distribution de Laplace est souvent notée :

$$\mathcal{L}(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) \tag{5.7.1109}$$

La fonction de densité de probabilité de la distribution de Laplace rappelle également la distribution Normale ; cependant, alors que la distribution Normale est exprimée en termes de différence au carré de la moyenne μ, la densité de Laplace est exprimée en termes de différence absolue par rapport à la moyenne. Par conséquent, la distribution de Laplace a des queues plus épaisses que la distribution Normale.

La distribution de Laplace est facile à intégrer (si nous distinguons deux cas symétriques) grâce à l'utilisation de la fonction de valeur absolue. Sa fonction de distribution cumulée est la suivante :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right) & \text{si } x < \mu \\ 1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right) & \text{si } x \geq \mu \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sng}(x-\mu)\left(1-\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)\right) \end{aligned} \tag{5.7.1110}$$

Dérivons maintenant la moyenne et la variance de la distribution de Laplace en adoptant la notation suivante :

$$\mathcal{L}(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) \tag{5.7.1111}$$

En cours de traduction de l'anglais

Soit $u=x-\mu$, nous avons alors $x=u+\mu$ et $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$. Par linéarité $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(U+\mu)=\mathrm{E}(U)+\mu$, dès lors :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X]&=\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\,e^{-\frac{|u|}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\mu\\&=\underbrace{\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\infty}^{0}u\,e^{\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u}_{\text{set }u=-u}+\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{0}^{\infty}u\,e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\mu\\&=-\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{0}^{\infty}u\,e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{0}^{\infty}u\,e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\mu\\&=\mu\end{aligned}\quad(5.7.1112)$$

et :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[X^2\right]&=\mathrm{E}\left[(U+\mu)^2\right]=\mathrm{E}\left[U^2\right]+2\mu\mathrm{E}\left[U\right]+\mu^2=\mathrm{E}\left[U^2\right]+2\mu\,\mathrm{E}\left[X-\mu\right]+\mu^2\\&=\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2e^{-\frac{|u|}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\mu^2=\underbrace{\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\infty}^{0}u^2e^{\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u}_{\text{set }u=-u}+\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{0}^{\infty}u^2e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\mu^2\\&=\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{0}^{\infty}u^2e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{0}^{\infty}u^2e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u+\mu^2\\&=\underbrace{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{0}^{\infty}u^2e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u}_{\text{set }v=\frac{u}{\sigma}}+\mu^2=\sigma^2\int\limits_{0}^{\infty}v^2e^{-v}\,dv+\mu^2\\&=2\sigma^2+\mu^2\end{aligned}\quad(5.7.1113)$$

où :

$$\Gamma(n+1)=\int\limits_{0}^{+\infty}v^ne^{-v}\,\mathrm{d}v=n!\qquad\text{où } n \text{ est un entier.}\quad(5.7.1114)$$

Dès lors :

$$\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}\left[X^2\right]-\left(\mathrm{E}[X]\right)^2=2\sigma^2\quad(5.7.1115)$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.6.23 Distribution de Benford

Cette distribution aurait été découverte une première fois en 1881 par Simon Newcomb, un astronome américain, après qu'il se fut aperçu de l'usure (et donc de l'utilisation) préférentielle des premières pages des tables de logarithmes (alors compilées dans des ouvrages). Frank Benford, qui aux alentours de 1938 remarqua à son tour cette usure inégale, crut être le premier à formuler cette loi qui porte indûment son nom aujourd'hui et arriva aux mêmes résultats après avoir répertorié des dizaines de milliers de données (longueurs de fleuves, cours de la bourse, etc.).

Seule explication possible : nous avons plus souvent besoin d'extraire le logarithme de chiffres commençant par 1 que de chiffres commençant par 9, ce qui implique que les premiers sont "plus nombreux" que les seconds.

Bien que cette idée lui paraisse tout à fait invraisemblable, Benford entreprend de vérifier son hypothèse. Rien de plus simple : il se procure des tables de valeurs numériques et calcule le pourcentage d'apparition du chiffre le plus à gauche (première décimale). Les résultats qu'il obtient confirment son intuition :

Chiffre initial	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilité d'apparition (%)	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

TAB. 5.42 – **Probabilité d'apparition d'un chiffre selon la loi de Benford**

À partir de ces données, Benford trouve expérimentalement que la probabilité cumulée qu'un nombre commence par le chiffre n (excepté 0) est (nous allons le démontrer plus loin) donnée par la relation :

$$P(n) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (5.7.1116)$$

appelée "distribution de Benford" (or "loi de Benford").

Voici un tracé de la fonction précédente :

En cours de traduction de l'anglais

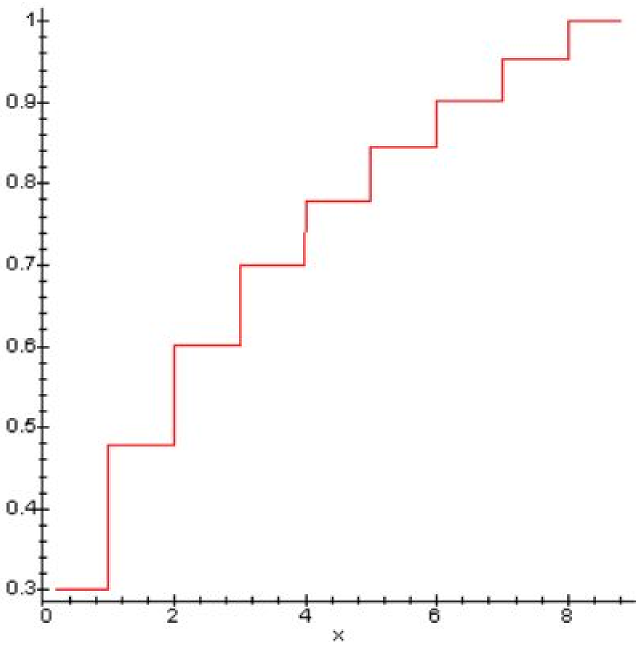


FIG. 5.152 – **Tracé de la fonction de Benford (fonction de répartition)**

En cours de traduction de l'anglais

Il convient de préciser que cette loi ne s'applique qu'à des listes de valeurs "naturelles", c'est-à-dire à des chiffres ayant une signification physique. Elle ne fonctionne évidemment pas sur une liste de chiffres tirés au hasard.

La loi de Benford a été testée sur toutes sortes de tables : longueur des fleuves du globe, superficie des pays, résultat des élections, liste des prix de l'épicerie du coin... Elle se vérifie presque à tous les coups.

La distribution serait en plus indépendante de l'unité choisie. Si l'on prend par exemple la liste des prix d'un supermarché, elle fonctionne aussi bien avec les valeurs exprimées en Francs qu'avec les mêmes prix convertis en Euros.

Cet étrange phénomène est resté peu étudié et inexpliqué jusqu'à une époque assez récente. Puis une démonstration générale en a été donnée en 11996 (calendrier holocène), qui fait appel au théorème de la limite centrale.

Aussi surprenant que cela puisse paraître, cette loi a trouvé une application : le fisc l'utiliserait aux Etats-Unis pour détecter les fausses déclarations. Le principe est basé sur la restriction vue plus haut : la loi de Benford ne s'applique que sur des valeurs ayant une signification physique.

S'il existe une distribution de probabilité universelle $P(n)$ sur de tels nombres, ils doivent être invariants sous un changement d'échelle tel que :

$$P(kn) = f(k)P(n) \tag{5.7.1117}$$

Si :

$$\int P(n)\mathrm{d}n = 1 \tag{5.7.1118}$$

Alors :

$$\int P(kn)\mathrm{d}n = \frac{1}{k} \tag{5.7.1119}$$

et la normalisation de la distribution donne :

$$f(k) = \frac{1}{k} \tag{5.7.1120}$$

Si nous dérivons $P(kn) = f(k)P(n)$ par rapport à k nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}P(kn) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{k}P(n) \Rightarrow nP'(kn) = P(n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{1}{k} \Rightarrow nP'(kn) = -P(n)\frac{1}{k^2} \tag{5.7.1121}$$

en posant $k = 1$ nous avons :

$$nP'(n) = -P(n) \tag{5.7.1122}$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$P(n) = \frac{1}{n} \tag{5.7.1123}$$

Cette fonction, n'est pas en premier lieu à proprement parler une fonction de distribution de probabilité (elle diverge) et deuxièmement, les lois de la physique et humaines imposent des limites.

Nous devons donc comparer cette distribution par rapport à une référence arbitraire. Ainsi, si le nombre décimal étudié contient plusieurs puissances de 10 (10 au total : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$) la probabilité que le premier chiffre non nul (décimal) soit D est alors donnée par :

$$P_D = \frac{\int\limits_D^{D+1} P(n)\mathrm{d}n}{\int\limits_1^{10} P(n)\mathrm{d}n} \tag{5.7.1124}$$

Les bornes de l'intégrale sont de 1 à 10 puisque la valeur nulle est interdite.

L'intégrale du dénominateur donne :

$$\int\limits_0^{10} P(n)\mathrm{d}n = \int\limits_0^{10} \frac{1}{n}\mathrm{d}n = \ln(10) - \ln(1) = \ln(10) \tag{5.7.1125}$$

L'intégrale du numérateur donne :

$$\int\limits_D^{D+1} P(n)\mathrm{d}n = \int\limits_D^{D+1} \frac{1}{n}\mathrm{d}n = \ln(D+1) - \ln(D) = \ln\left(\frac{D+1}{D}\right) \tag{5.7.1126}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$P_D = \frac{\ln\left(\frac{D+1}{D}\right)}{\ln(10)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{D}\right)}{\ln(10)} \tag{5.7.1127}$$

En cours de traduction de l'anglais

De par les propriétés des logarithmes (voir section d'Analyse Fonctionelle page 2259) nous avons :

$$P_D = \log_{10}\left(1+\frac{1}{D}\right) \tag{5.7.1128}$$

Cependant, la loi de Benford ne s'applique pas uniquement aux données invariantes par changement d'échelle mais également à des nombres provenant de sources quelconques. Expliquer ce cas implique une investigation plus rigoureuse en utilisant le théorème de la limite centrale. Cette démonstration a été effectuée seulement en 1996 par T. Hill par une approche utilisant la distribution des distributions.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.6.24 Distribution ex-Gaussienne

En théorie des probabilités, une "distribution gaussienne modifiée de manière exponentielle" (GME, également connue sous le nom de "distribution ex-Gaussienne") décrit la somme de variables aléatoires normales et exponentielles indépendantes. Une variable aléatoire ex-gaussienne Z peut être exprimée sous la forme $Z = X + Y$, où X et Y sont indépendants, X est gaussienne avec une moyenne μ et une variance σ^2 et Y est exponentielle de taux λ. Elle présente une asymétrie positive caractéristique par rapport à la composante exponentielle.

Elle peut également être considéré comme une fonction pondérée d'une exponentielle décalée, le poids étant fonction de la distribution Normale.

Remarque

Cette distribution est utilisée comme modèle théorique pour la forme des pics chromatographiques. Elle a été proposée comme modèle statistique du temps intermitotique dans les cellules en division. Elle est également utilisée dans la modélisation des faisceaux d'ions en grappe. Elle est couramment utilisée en psychologie et dans d'autres sciences du cerveau dans l'étude des temps de réponse. Dans une légère variante où la moyenne de la composante Normale est fixée à zéro, elle est également utilisée dans l'Analyse des Frontières Stochastiques, comme l'une des spécifications distributionnelles pour le terme d'erreur de composition qui modélise l'inefficience. Dans le traitement du signal, les GME ont été étendues au cas multimodal avec un terme d'oscillation optionnel pour représenter les signaux sonores numérisés.

Plus techniquement, soit A une variable aléatoire qui est Normalement distribuée avec une moyenne μ et une variance σ^2, et soit B une variable aléatoire qui est distribuée exponentiellement avec un taux λ. Supposons en outre que A et B soient indépendants. Ensuite, nous disons que la somme $X = A + B$ a une distribution gaussienne (c'est-à-dire ex-gaussienne) modifiée exponentiellement, avec les paramètres μ, σ et λ ; c'est-à-dire :

$$X \sim \text{ex-Gaussian}(\mu, \sigma, \lambda) \tag{5.7.1129}$$

où $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, et $\lambda > 0$.

La fonction de densité de probabilité de X est :

$$\boxed{\text{ex-Gaussian}(\mu, \sigma, \lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{\lambda^2\sigma^2}{2} - \lambda(t-\mu)\right] \cdot \int\limits_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}-\lambda\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] \mathrm{d}y} \tag{5.7.1130}$$

Effectivement, supposons que X suive une distribution ex-gaussienne. Alors $X = A + B$, où A et B sont indépendants, A est Normalement distribué avec une moyenne μ et une variance σ^2, et B est distribué de manière exponentielle avec un taux λ. Alors, la fonction de densité de probabilité pour A est donnée par :

$$f_A(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{5.7.1131}$$

et la fonction de densité de probabilité pour B est donnée par :

$$f_B(t) = \begin{cases} \lambda \exp[-\lambda t], \text{ si } t \geq 0 \\ 0, \text{ si } t < 0 \end{cases} \tag{5.7.1132}$$

Ainsi, la fonction de densité de probabilité pour la somme $X = A + B$ est donnée en prenant la convolution de f_A et f_B :

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(x) f_B(t-x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{t} f_A(x) f_B(t-x) dx + \int_{t}^{\infty} f_A(x) f_B(t-x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{t} f_A(x) f_B(t-x) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.7.1133}$$

ce qui découle du fait que $f_B(t-x) = 0$ pour $x > t$. À partir de là, nous substituons ces expressions aux fonctions de densité de probabilité f_A et f_B :

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \lambda \exp[-\lambda(t-x)] \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \exp[-\lambda t + \lambda x] \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \exp[-\lambda t] \cdot \exp[\lambda x] \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda \exp[-\lambda t]}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + \lambda x\right] \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.7.1134}$$

Nous pouvons simplifier davantage l'intégrande avec une substitution ; à cette fin, soit :

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} - \lambda\sigma \tag{5.7.1135}$$

Cela donne les trois identités suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sigma}, \qquad \text{or equivalently,} \qquad \mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}y \tag{5.7.1136}$$

et :

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = y + \lambda\sigma \tag{5.7.1137}$$

et :

$$x = y\sigma + \lambda\sigma^2 + \mu \tag{5.7.1138}$$

En cours de traduction de l'anglais

En remplaçant ces identités dans :

$$f_X(t)=\frac{\lambda\exp[-\lambda t]}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2+\lambda x\right]\mathrm{d}x \tag{5.7.1139}$$

donne :

$$\begin{aligned}
f_X(t)&=\frac{\lambda\exp[-\lambda t]}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}+\lambda\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}(y+\lambda\sigma)^2+\lambda\left(y\sigma+\lambda\sigma^2+\mu\right)\right]\sigma\mathrm{d}y\\
&=\frac{\lambda\sigma\exp[-\lambda t]}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}+\lambda\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y^2+2y\lambda\sigma+\lambda^2\sigma^2\right)+\lambda y\sigma+\lambda^2\sigma^2+\lambda\mu\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{\lambda\exp[-\lambda t]}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}+\lambda\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}y^2-y\lambda\sigma-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}+\lambda y\sigma+\lambda^2\sigma^2+\lambda\mu\right]dy\\
&=\frac{\lambda\exp[-\lambda t]}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}+\lambda\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]\cdot\exp\left[\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}+\lambda\mu\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{\lambda\exp[-\lambda t]}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}+\lambda\mu\right]\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}+\lambda\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]\cdot\mathrm{d}y\\
&=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\lambda t+\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}+\lambda\mu\right]\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}+\lambda\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}-\lambda(t-\mu)\right]\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}+\lambda\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{5.7.1140}$$

En cours de traduction de l'anglais

et cela termine la démonstration !

Soit X toujours une variable aléatoire suivant une distribution ex-gaussienne :

$$X\sim\text{ex-Gaussian}(\mu,\sigma,\lambda) \tag{5.7.1141}$$

Alors, la valeur moyenne ou attendue de X est :

$$\mathrm{E}(X)=\mu+\frac{1}{\lambda} \tag{5.7.1142}$$

La valeur moyenne ou attendue $\mathrm{E}(X)$ est le premier moment brut de X, nous pouvons donc utiliser la fonction génératrice de moment de la distribution ex-gaussienne pour calculer (voir page 912) :

$$\mathrm{E}(X)=M'_X(0) \tag{5.7.1143}$$

Dans un premier temps, nous différenciions :

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \quad (5.7.1144)$$

relativement à t. L'utilisation de la règle produit et de la règle en chaîne donne :

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] + \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] (\mu + \sigma^2 t) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \cdot \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \cdot \left[\frac{1}{\lambda - t} + \mu + \sigma^2 t\right] \end{aligned} \quad (5.7.1145)$$

L'évaluation de ce dernier à $t = 0$ donne le résultat souhaité :

$$\begin{aligned} M'_X(0) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - 0}\right) \cdot \exp\left[\mu \cdot 0 + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 0^2\right] \cdot \left[\frac{1}{\lambda - 0} + \mu + \sigma^2 \cdot 0\right] \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left[\frac{1}{\lambda} + \mu\right] \\ &= \mu + \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (5.7.1146)$$

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution ex-gaussienne :

$$X \sim \text{ex-Gaussian}(\mu, \sigma, \lambda) \quad (5.7.1147)$$

Alors la variance de X est :

$$\mathrm{V}(X) = \sigma^2 + \frac{1}{\lambda^2} \quad (5.7.1148)$$

Pour calculer la variance de X, nous divisons la variance en valeurs attendues en utilisant la relation de Huygens (voir page 583) :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \quad (5.7.1149)$$

Nous utilisons ensuite la fonction génératrice de moment de la distribution ex-gaussienne pour calculer :

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \quad (5.7.1150)$$

respectivement à t. L'utilisation de la règle produit et de la règle en chaîne donne :

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] + \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] (\mu + \sigma^2 t) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \cdot \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \cdot \left[\frac{1}{\lambda - t} + \mu + \sigma^2 t\right] \\ &= M_X(t) \cdot \left[\frac{1}{\lambda - t} + \mu + \sigma^2 t\right] \end{aligned} \quad (5.7.1151)$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous utilisons maintenant la règle du produit pour obtenir la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}M''_X(t) &= M'_X(t)\cdot\left[\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right]+M_X(t)\cdot\left[\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right]\\ &= M_X(t)\cdot\left[\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right]^2+M_X(t)\cdot\left[\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right]\\ &= M_X(t)\cdot\left[\left(\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right)^2+\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right]\\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)\cdot\exp\left[\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right)^2+\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right]\end{aligned} \tag{5.7.1152}$$

En appliquant :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=M''_X(0) \tag{5.7.1153}$$

cela nous donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^2\right) &= M''_X(0)\\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-0}\right)\cdot\exp\left[\mu\cdot 0+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot 0^2\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{\lambda-0}+\mu+\sigma^2\cdot 0\right)^2+\frac{1}{(\lambda-0)^2}+\sigma^2\right]\\ &= 1\cdot 1\cdot\left[\left(\frac{1}{\lambda}+\mu\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}+\sigma^2\right]\\ &= \frac{1}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda}+\mu^2+\frac{1}{\lambda^2}+\sigma^2=\frac{2}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda}+\mu^2+\sigma^2\end{aligned} \tag{5.7.1154}$$

Puisque la moyenne d'une distribution ex-gaussienne est donnée par :

$$\mathrm{E}(X)=\mu+\frac{1}{\lambda} \tag{5.7.1155}$$

nous pouvons appliquer la relation de Huygens pour montrer :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right)-\mathrm{E}(X)^2\\ &= \left[\frac{2}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda}+\mu^2+\sigma^2\right]-\left(\mu+\frac{1}{\lambda}\right)^2\\ &= \frac{2}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda}+\mu^2+\sigma^2-\mu^2-\frac{2\mu}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\\ &= \sigma^2+\frac{1}{\lambda^2}\end{aligned} \tag{5.7.1156}$$

et ceci termine la démonstration.

En cours de traduction de l'anglais

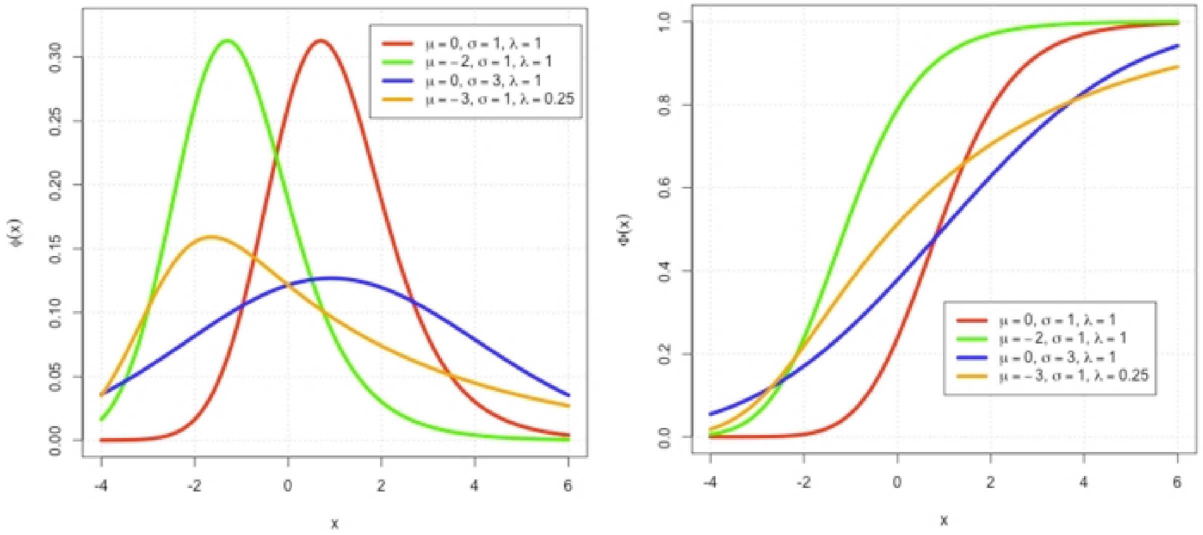


FIG. 5.153 – Loi ex-gaussienne (fonction de distribution de masse et cumulative)

Soit X toujours une variable aléatoire suivant une distribution ex-gaussienne :

$$X \sim \text{ex-Gaussian}\,(\mu, \sigma, \lambda) \qquad (5.7.1157)$$

Alors l'asymétrie de X est :

$$\text{Skew}(X) = \gamma_1 = \frac{2}{\lambda^3\left(\sigma^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5.7.1158)$$

En effet, rappelons d'abord que le coefficient d'asymétrie de Fisher-Pearson est défini par (voir page **??**) :

$$\gamma_1 = \frac{\text{E}\left(X^3\right) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \qquad (5.7.1159)$$

où μ et σ sont respectivement la moyenne et l'écart type de X. Pour éviter toute confusion entre les notations utilisées pour les paramètres ex-gaussiens et la moyenne et l'écart type de X, nous réécrivons la relation ci-dessus comme suit :

$$\gamma_1 = \frac{\text{E}\left(X^3\right) - 3 \cdot \text{E}(X) \cdot \text{V}(X) - \text{E}(X)^3}{\text{V}(X)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5.7.1160)$$

Puisque X suit une distribution ex-gaussienne, la moyenne de X est donnée par :

$$\text{E}(X) = \mu + \frac{1}{\lambda} \qquad (5.7.1161)$$

et la variance par :

$$\text{V}(X) = \sigma^2 + \frac{1}{\lambda^2} \qquad (5.7.1162)$$

Ainsi, le travail principal consiste à calculer $\text{E}\left(X^3\right)$. Pour ce faire, nous utilisons à nouveau la fonction génératrice de moment de la distribution ex-gaussienne pour calculer :

$$\text{E}\left(X^3\right) = M_X'''(0) \qquad (5.7.1163)$$

En cours de traduction de l'anglais

basé sur la relation entre le moment brut et la fonction génératrice de moment. Tout d'abord, nous différencions la fonction génératrice de moment de la distribution ex-gaussienne :

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\exp\left[\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right]+\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)\exp\left[\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right](\mu+\sigma^2 t) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)\cdot\exp\left[\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right]\cdot\left[\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right] \\ &= M_X(t)\cdot\left[\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right] \end{aligned} \quad (5.7.1164)$$

Nous utilisons ensuite la règle du produit pour obtenir la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} M''_X(t) &= M'_X(t)\cdot\left[\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right]+M_X(t)\cdot\left[\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right] \\ &= M_X(t)\cdot\left[\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right]^2+M_X(t)\cdot\left[\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right] \\ &= M_X(t)\cdot\left[\left(\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right)^2+\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right] \end{aligned} \quad (5.7.1165)$$

Enfin, nous utilisons la règle du produit et la règle de la chaîne pour obtenir la dérivée troisième :

$$\begin{aligned} M'''_X(t) = M'_X(t)&\left[\left(\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right)^2+\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right] \\ +M_X(t)&\left[2\left(\frac{1}{\lambda-t}+\mu+\sigma^2 t\right)\left(\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\sigma^2\right)+\frac{2}{(\lambda-t)^3}\right] \end{aligned} \quad (5.7.1166)$$

Injectant :

$$\mathrm{E}\left(X^3\right)=M'''_X(0) \quad (5.7.1167)$$

dans la relation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X^3\right) &= M'''_X(0) \\ &= M'_X(0)\left[\left(\frac{1}{\lambda}+\mu\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}+\sigma^2\right]+M_X(0)\left[2\left(\frac{1}{\lambda}+\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda^2}+\sigma^2\right)+\frac{2}{\lambda^3}\right] \\ &= \left(\mu+\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda}+\mu^2+\frac{1}{\lambda^2}+\sigma^2\right)+\left(\frac{2}{\lambda^3}+\frac{2\sigma^2}{\lambda}+\frac{2\mu}{\lambda^2}+2\mu\sigma^2+\frac{2}{\lambda^3}\right) \\ &= \left(\mu+\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{2}{\lambda^2}+\frac{2\mu}{\lambda}+\mu^2+\sigma^2\right)+\left(\frac{4}{\lambda^3}+\frac{2\sigma^2}{\lambda}+\frac{2\mu}{\lambda^2}+2\mu\sigma^2\right) \\ &= \frac{2\mu}{\lambda^2}+\frac{2\mu^2}{\lambda}+\mu^3+\mu\sigma^2+\frac{2}{\lambda^3}+\frac{2\mu}{\lambda^2}+\frac{\mu^2}{\lambda}+\frac{\sigma^2}{\lambda}+\frac{4}{\lambda^3}+\frac{2\sigma^2}{\lambda}+\frac{2\mu}{\lambda^2}+2\mu\sigma^2 \\ &= \frac{6\mu}{\lambda^2}+\frac{6}{\lambda^3}+\frac{3\mu^2+3\sigma^2}{\lambda}+3\mu\sigma^2+\mu^3 \end{aligned} \quad (5.7.1168)$$

Nous substituons maintenant les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mu+\frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{V}(X) &= \sigma^2+\frac{1}{\lambda^2} \\ \mathrm{E}\left(X^3\right) = M'''_X(0) &= \frac{6\mu}{\lambda^2}+\frac{6}{\lambda^3}+\frac{3\mu^2+3\sigma^2}{\lambda}+3\mu\sigma^2+\mu^3 \end{aligned} \quad (5.7.1169)$$

En cours de traduction de l'anglais

Dans le numérateur de :

$$\text{Skew}(X) = \gamma_1 = \frac{\mathrm{E}\left(X^3\right) - 3 \cdot \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{V}(X) - \mathrm{E}(X)^3}{\mathrm{V}(X)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.7.1170}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^3\right) - 3 \cdot \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{V}(X) - \mathrm{E}(X)^3 &= \left(\frac{6\mu}{\lambda^2} + \frac{6}{\lambda^3} + \frac{3\mu^2+3\sigma^2}{\lambda} + 3\mu\sigma^2 + \mu^3\right) - 3\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\right)\left(\sigma^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \left(\mu + \frac{1}{\lambda}\right)^3 \\ &= \frac{6\mu}{\lambda^2} + \frac{6}{\lambda^3} + \frac{3\mu^2+3\sigma^2}{\lambda} + 3\mu\sigma^2 + \mu^3 - 3\mu\sigma^2 - \frac{3\mu}{\lambda^2} - \frac{3\sigma^2}{\lambda} - \frac{3}{\lambda^3} - \mu^3 - \frac{3\mu^2}{\lambda} - \frac{3\mu}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} \\ &= \frac{2}{\lambda^3}\end{aligned} \tag{5.7.1171}$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}\text{Skew}(X) = \gamma_1 &= \frac{\mathrm{E}\left(X^3\right) - 3 \cdot \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{Var}(X) - \mathrm{E}(X)^3}{\mathrm{Var}(X)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\frac{2}{\lambda^3}}{\left(\sigma^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2}{\lambda^3\left(\sigma^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{5.7.1172}$$

Pour résumer un partie importante de tout ce que nous avons vu jusqu'ici, l'illustration ci-dessous est très utile car elle résume les relations de 76 distributions univariées courantes (57 continues et 19 discrètes) :

En cours de traduction de l' anglais

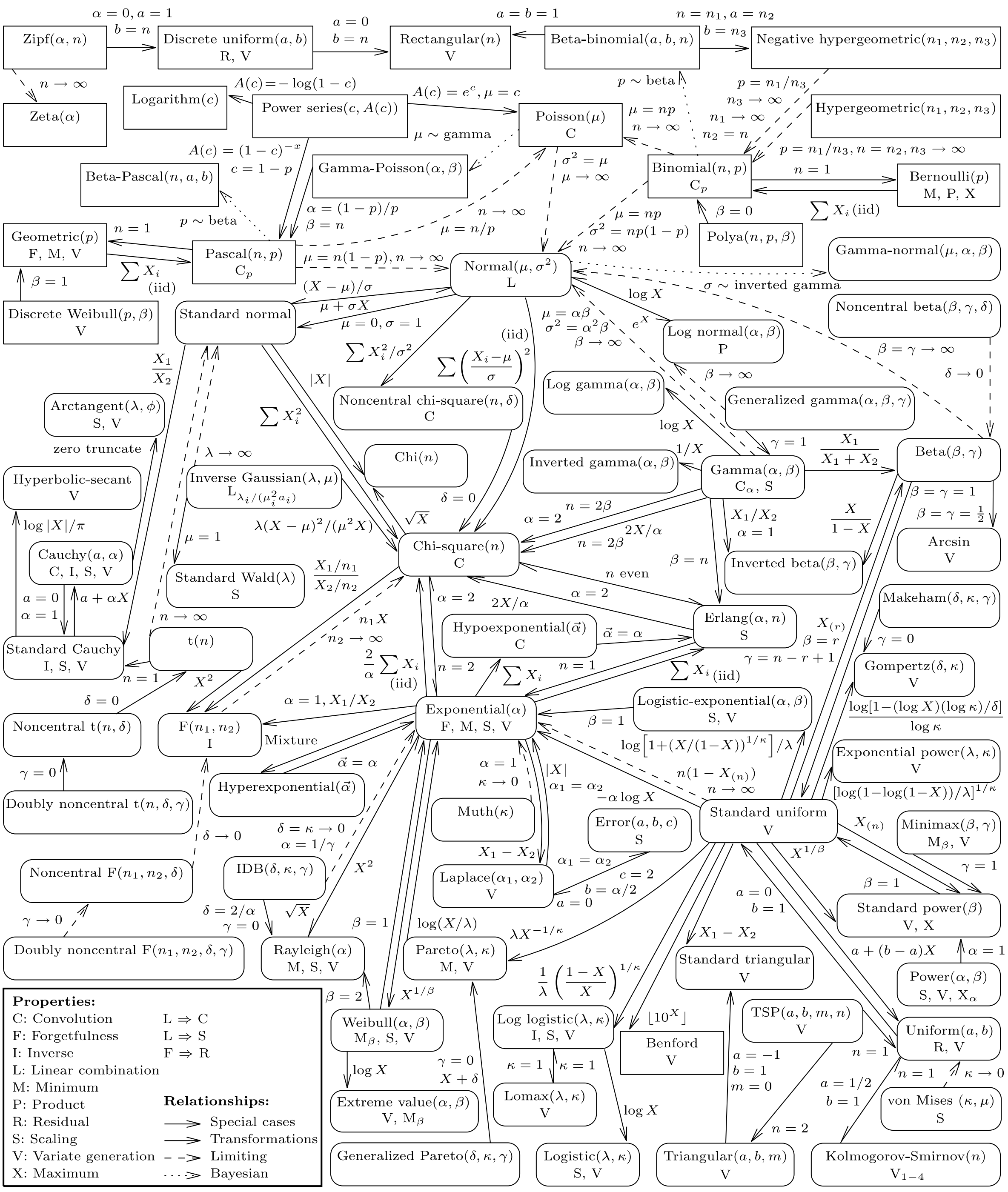


FIG. 5.154 – **Relations entre distributions (source : AMS Lawrence M. Leemis et Jacquelyn T. McQueston)**

Et il ne faut pas oublier les traditionnels tableaux récapitulatifs que tout bon manuel fournit (ils faudrait évidemment ajouter la médiane, l'asymétrie et l'aplatissement mais il n'y a bien souvent pas de place pour cela) :

	Notation	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{V}(X)$	$M_X(s)$
Uniforme	$\text{Unif}\,\{a,\ldots,b\}$	$\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{\lfloor x\rfloor-a+1}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$	$\dfrac{I(a\le x\le b)}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\dfrac{e^{as}-e^{-(b+1)s}}{s(b-a)}$
Bernoulli	$\text{Bern}(p)$	$(1-p)^{1-x}$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$	$1-p+pe^s$
Binomiale	$\text{Bin}(n,p)$	$I_{1-p}(n-x,x+1)$	$\begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^s)^n$
Multinomiale	$\text{Mult}\,(n,p)$		$\dfrac{n!}{x_1!\ldots x_k!}p_1^{x_1}\ldots p_k^{x_k}\quad \sum_{i=1}^{k}x_i=n$	$\begin{pmatrix}np_1\\ \vdots\\ np_k\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}np_1(1-p_1) & -np_1p_2\\ -np_2p_1 & \ddots\end{pmatrix}$	$\left(\sum_{i=0}^{k}p_ie^{s_i}\right)^n$
Hypergéometrique	$\text{Hyp}(N,m,n)$	$\approx\Phi\left(\dfrac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$	$\dfrac{\begin{pmatrix}m\\x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N-m\\n-x\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}N\\n\end{pmatrix}}$	$\dfrac{nm}{N}$	$\dfrac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$	
Négative Binomiale	$\text{NBin}(r,p)$	$I_p(r,x+1)$	$\begin{pmatrix}x+r-1\\r-1\end{pmatrix}p^r(1-p)^x$	$r\dfrac{1-p}{p}$	$r\dfrac{1-p}{p^2}$	$\left(\dfrac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^r$
Géometrique	$\text{Geo}(p)$	$1-(1-p)^x\quad x\in\mathbb{N}^+$	$p(1-p)^{x-1}\quad x\in\mathbb{N}^+$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$
Poisson	$\text{Po}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\dfrac{\lambda^i}{i!}$	$\dfrac{\lambda^xe^{-\lambda}}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^s-1)}$

TAB. 5.43 – Résumé des distributions discrètes les plus courantes

	Notation	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{V}(X)$	$M_X(s)$
Uniforme	$\text{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x>b\end{cases}$	$\dfrac{I(a<x<b)}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{sb}-e^{sa}}{s(b-a)}$
Normale	$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$	$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t)\,dt$	$\phi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2	$e^{\mu s+\frac{\sigma^2s^2}{2}}$
Log-Normale	$\ln\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{erf}\left[\dfrac{\ln x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right]$	$\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$	
Normale Multivariée	$\text{MVN}(\mu,\Sigma)$		$(2\pi)^{-k/2}\lvert\Sigma\rvert^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$	μ	Σ	$e^{\mu^Ts+\frac{1}{2}s^T\Sigma s}$
Student t	$\text{Student}(\nu)$	$I_x\left(\dfrac{\nu}{2},\dfrac{\nu}{2}\right)$	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$	$0\quad \nu>1$	$\begin{cases}\dfrac{\nu}{\nu-2} & \nu>2\\ \infty & 1<\nu\le 2\end{cases}$	
Khi-deux	χ_k^2	$\dfrac{1}{\Gamma(k/2)}\gamma\left(\dfrac{k}{2},\dfrac{x}{2}\right)$	$\dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{k/2-1}e^{-x/2}$	k	$2k$	$(1-2s)^{-k/2}\ s<1/2$
F	$\text{F}(d_1,d_2)$	$I_{\frac{d_1x}{d_1x+d_2}}\left(\dfrac{d_1}{2},\dfrac{d_2}{2}\right)$	$\dfrac{\sqrt{\frac{(d_1x)^{d_1}d_2^{d_2}}{(d_1x+d_2)^{d_1+d_2}}}}{x\mathrm{B}\left(\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2}\right)}$	$\dfrac{d_2}{d_2-2}$	$\dfrac{2d_2^2(d_1+d_2-2)}{d_1(d_2-2)^2(d_2-4)}$	
Exponentielle	$\text{Exp}(\beta)$	$1-e^{-x/\beta}$	$\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$	β	β^2	$\dfrac{1}{1-\frac{s}{\beta}}\,(s<\beta)$
Gamma	$\text{Gamma}(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\gamma(\alpha,\beta x)}{\Gamma(\alpha)}$	$\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\dfrac{1}{1-\frac{s}{\beta}}\right)^\alpha\,(s<\beta)$
Gamma Inverse	$\text{InvGamma}(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\Gamma\left(\alpha,\frac{\beta}{x}\right)}{\Gamma(\alpha)}$	$\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{-\alpha-1}e^{-\beta/x}$	$\dfrac{\beta}{\alpha-1}\ \alpha>1$	$\dfrac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\ \alpha>2$	$\dfrac{2(-\beta s)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha)}K_\alpha\left(\sqrt{-4\beta s}\right)$
Dirichlet	$\text{Dir}(\alpha)$		$\dfrac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{k}\Gamma\left(\alpha_i\right)}\prod_{i=1}^{k}x_i^{\alpha_i-1}$	$\dfrac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}$	$\dfrac{\mathrm{E}X_i(1-\mathrm{E}X_i)}{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+1}$	
Beta	$\text{Beta}(\alpha,\beta)$	$I_x(\alpha,\beta)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\dfrac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\dfrac{s^k}{k!}$
Weibull	$\text{Weibull}(\lambda,k)$	$1-e^{-(x/\lambda)^k}$	$\dfrac{k}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k}$	$\lambda\Gamma\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$	$\lambda^2\Gamma\left(1+\dfrac{2}{k}\right)-\mu^2$	$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{s^n\lambda^n}{n!}\Gamma\left(1+\dfrac{n}{k}\right)$
Pareto	$\text{Pareto}(x_m,\alpha)$	$1-\left(\dfrac{x_m}{x}\right)^\alpha\quad x\ge x_m$	$\alpha\dfrac{x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}\quad x\ge x_m$	$\dfrac{\alpha x_m}{\alpha-1}\ \alpha>1$	$\dfrac{x_m^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\ \alpha>2$	$\alpha(-x_ms)^\alpha\Gamma(-\alpha,-x_ms)\ s<0$

TAB. 5.44 – Résumé des distributions continues les plus courantes

En cours de traduction de l'anglais

Et un résumé visuel de certaines distributions continues importantes :

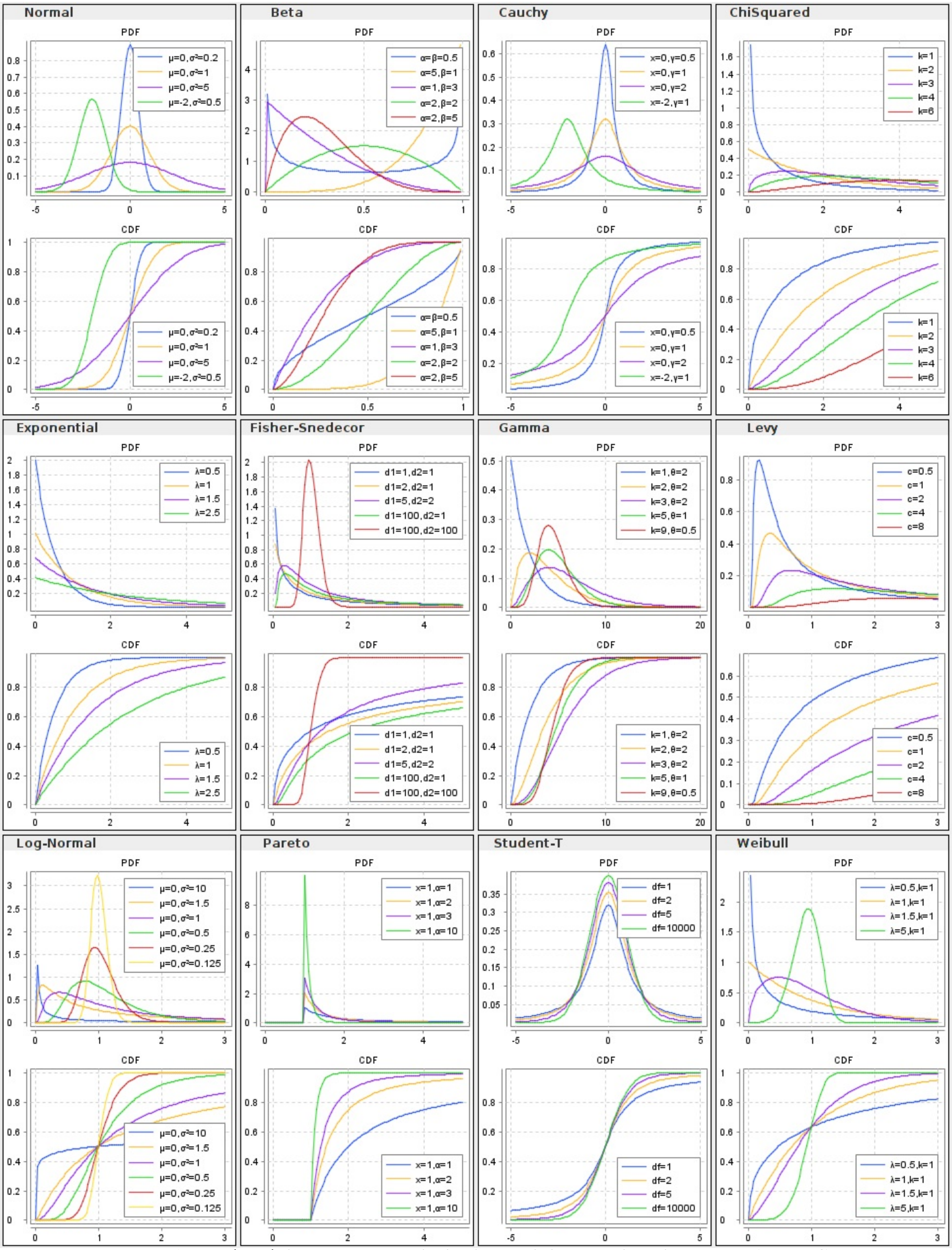


FIG. 5.155 – **Résumé visuel de quelques distributions statistiques continues importantes (source : ?)**

5.7.7 Estimateurs de Vraisemblance

Ce qui va suivre est d'une extrême importance en statistiques et est utilisé énormément en pratique. Il convient donc d'y accorder une attention toute particulière ! Outre le fait que nous utiliserons cette technique dans la présent chapitre, nous la retrouverons dans le chapitre de Méthodes Numériques pour les techniques avancées de régressions linéaires généralisées ((y compris leur généralisation aux M-estimateurs ou même W-estimateurs !) ainsi que dans le chapitre de Génie Industriel dans le cadre de l'estimation des paramètres de fiabilité.

Nous supposons que nous disposons d'observations $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ qui sont des réalisations de variables aléatoires non biaisées (dans le sens qu'elles sont choisies aléatoirement parmi un lot) indépendantes $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ de loi de probabilité inconnue mais identique.

Supposons que nous procédons par tâtonnements pour estimer la loi de probabilité P inconnue. Une manière de procéder est de se demander si les observations $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ avaient une probabilité élevée ou non de sortir avec cette loi de probabilité arbitraire P ?

Nous devons pour cela calculer la probabilité conjointe qu'avaient les observations $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de sortir avec les probabilités $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Cette probabilité conjointe vaut (voir section Probabilités page 479) :

$$\prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \tag{5.7.1173}$$

en notant P la loi de probabilité supposée associée à $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Il faut avouer qu'il serait alors particulièrement maladroit, au niveau de la notion intuitive de risque, de choisir une loi de probabilité (avec ses paramètres !) qui minimise cette quantité...

Au contraire, nous allons chercher les probabilités $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ (ou les paramètres de la loi associée) qui maximisent $\prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$, c'est-à-dire qui rende les observations $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ le plus vraisemblable possible.

Nous sommes donc amenés à chercher le (ou les) paramètre(s) θ qui maximise(nt) la quantité :

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_i = x_i) \tag{5.7.1174}$$

et où le paramètre θ est souvent dans les cas scolaires un moment d'ordre un (espérance) ou d'ordre deux (variance).

Cette quantité L porte le nom de "vraisemblance". C'est une fonction du ou des paramètres equation et des observations θ.

La ou les valeurs du paramètre θ qui maximisent la vraisemblance $L_n(\theta)$ sont appelées "estimateurs du maximum de vraisemblance" (estimateur MV/EMV).

Dans le cas très particulier mais formateur de la loi Normale, un des paramètres θ sera donc la variance (voir un peu plus loin l'exemple concret) et il peut être considéré comme intuitif au physicien que pour maximiser la probabilité, l'écart-type doit être le plus petit possible (pour que le maximum d'évenements se trouve dans un même intervalle). Ainsi, lorsque nous calculons un EMV qui est le plus petit parmi plusieurs possibles, nous parlons alors d'estimateur

En cours de traduction de l'anglais

UMV pour "Uniform Minimum Variance Unbiased" car leur propre variance doit être la plus petite possible. Cela se démontre (mais c'est peu élégant) en utilisant la définition de l'Information de Fisher et du théorème de Fréchet (ou de Rao-Cramer) qui fait usage de l'inégalité de Cauchy-Schwartz (voir section de Calcul Vectoriel page 1803) et de l'analogie entre espérance et produit scalaire... Cette démonstration ne sera pas présentée dans ce livre.

Faisons quand même sept petits exemples (très classiques, utiles et importants dans l'industrie) avec dans l'ordre d'importance (donc pas forcément dans l'ordre de facilité...) la fonction de distribution de Gauss-Laplace (Normale), la fonction de distribution de Poisson, la distribution Binomiale, la distribution Géométrique, la distribution de Weibull, la distribution de Gamma et finalement la distribution Pareto.

Remarques

R1. Ces sept exemples sont importants car utilisés dans les SPC (maîtrise statistiques de processus) dans différentes multinationales à travers le monde (voir section de Génie Industriel page ??).

R2. Une estimation fréquentiste du maximum de vraisemblance est semblable au "mode" de la fonction de vraisemblance, donc dans un contexte bayésien avec un a priori uniforme, le MLE est comme un mode du postérieur.

R3. Dans les statistiques bayésiennes (voir plus bas), nous avons le "maximum à posteriori" (MAP) qui trouve un maximum de la distribution postérieure pour une probabilité a priori uniforme. L'estimateur MAP coïncide avec l'estimateur du maximum de vraisemblance.

5.7.7.1 Estimateurs de la distribution Normale

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un n-échantillon de variables aléatoires identiquement distribuées supposées suivre une loi de Gauss-Laplace (loi Normale) de paramètres μ et σ^2.

Nous recherchons quelles sont les valeurs des estimateurs du maximum de vraisemblance equation qui maximisent la vraisemblance $L_n(\theta)$ de la loi Normale ?

Remarque

Il va de soi que le vecteur d'estimateurs du maximum de vraisemblance est ici :

$$\vec{\theta} = (\mu, \sigma) \tag{5.7.1175}$$

Nous avons démontré plus haut que la densité d'une variable aléatoire gaussienne était donnée par :

$$P(x, \mu, \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.7.1176}$$

La vraisemblance est alors donnée par :

$$L(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i,\mu,\mu)=\frac{1}{\sigma^n\sqrt{2\pi}^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \quad (5.7.1177)$$

Maximiser une fonction ou maximiser son logarithme est équivalent donc la "log-vraisemblance" sera :

$$\ln(L(\mu,\sigma))=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln(\sigma)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \quad (5.7.1178)$$

Pour déterminer les deux estimateurs de la loi Normale, fixons d'abord l'écart-type. Pour cela, dérivons $\ln(L(\mu,\sigma))$ par rapport à $\ln(L(\mu,\sigma))$ et regardons pour quelle valeur de la moyenne μ la fonction s'annule.

Remarque

La dérivéer partielle que nous cherchons à annuler est souvent appelée la "fonction score" (nous retrouverons souvent ce concept lors de notre étude des techniques d'optimisation et de l'apprentissage machine/machine learning dans le chapitre d'Informatique Théorique) :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left[L(\theta)\right] \quad (5.7.1179)$$

Il nous reste après simplification le terme suivant qui est égal à zéro :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \quad (5.7.1180)$$

Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne (espérance) de la loi Normale est donc après réarrangement :

$$\boxed{\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i} \quad (5.7.1181)$$

et nous voyons qu'il s'agit simplement de la moyenne arithmétique (ou appelée aussi "moyenne empirique").

Fixons maintenant la moyenne. L'annulation de la dérivée de $\ln(L(\mu,\sigma))$ en σ conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln(L(\mu,\sigma))=-\frac{n}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0 \quad (5.7.1182)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'estimateur du maximum de vraisemblance pour l'écart-type (la variance lorsque la moyenne est connue selon la loi de distribution supposée elle aussi connue !) :

$$\boxed{\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \quad (5.7.1183)$$

En cours de traduction

que certains appellent aussi "écart-type de Pearson"...

Même si elle est un peu redondante, certaines personnes nous ont demandé de montrer la preuve de l'estimateur de la matrice de covariance (et donc de la matrice de corrélation).

N'oubliez pas que nous avons prouvé précédemment que pour le cas bivarié, nous avions :

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\overrightarrow{(x-\mu)}^T \Sigma^{-1} \overrightarrow{(x-\mu)}} \qquad (5.7.1184)$$

En fait, la relation est la même pour le cas multivarié avec T !

La log-vraisemblance est donc immédiate par analogie avec le cas univarié :

$$\ln\left(L(\vec{\mu}, \Sigma)\right) = -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\Sigma) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}(x_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(x_i-\mu) \qquad (5.7.1185)$$

Que nous pouvons aussi écrire (étant donné que Σ est diagonale et Σ^{-1} de même) :

$$\begin{aligned}\ln\left(L(\vec{\mu}, \Sigma)\right) &= -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\Sigma) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\text{tr}\left((x_i-\mu)^T\Sigma^{-1}(x_i-\mu)\right) \\ &= -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\Sigma) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T}\text{tr}\left(\Sigma^{-1}(x_i-\mu)^T(x_i-\mu)\right) \\ &:= -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\Sigma) - \frac{1}{2}\text{tr}\left(\Sigma^{-1}S\right)\end{aligned} \qquad (5.7.1186)$$

Où par définition et en utilisant l'estimateur de la moyenne :

$$S = \sum_{i=1}^{T}(x_i-\hat{\mu})^T(x_i-\hat{\mu}) \qquad (5.7.1187)$$

Nous en déduisons ensuite :

$$\frac{\partial}{\partial\Sigma^{-1}}\ln\left(L(\vec{\hat{\mu}}, \Sigma)\right) = \frac{T}{2}\Sigma - \frac{1}{2}\Sigma = 0 \qquad (5.7.1188)$$

et on obtient enfin :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}S \qquad (5.7.1189)$$

Cependant, nous n'avons pas encore défini ce qu'était un bon estimateur ! Ce que nous entendons par là :

- Si l'espérance d'un estimateur est égale à elle-même, nous disons que cet estimateur est "sans biais" et c'est bien évidemment ce que nous voulons !
- Si l'espérance d'un estimateur n'est pas égale à elle-même, nous disons alors que cet estimateur est "biaisé" et c'est forcément moins bien...

En cours de traduction de l' anglais

Dans l'exemple précédent, la moyenne est donc non biaisée (trivial car la moyenne de la moyenne arithmétique est égale à elle-même). Mais qu'en est-il de la variance (in extenso de l'écart-type) ?

Un petit calcul simple par linéarité de l'espérance (puisque les variables aléatoires sont identiquement distribuées) va nous donner la réponse dans le cas où la moyenne théorique est approchée comme dans la pratique (industrie) par l'estimateur de la moyenne (cas le plus fréquent).

Nous avons donc le calcul de l'espérance de la "variance empirique" :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) &= \mathrm{E}(\mathrm{V}(X)) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\hat{\mu}+\hat{\mu}^2)\right)\\ &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{\mu}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}^2)\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\hat{\mu}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{n}n\hat{\mu}^2)\right)\\ &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\hat{\mu}^2+\hat{\mu}^2)\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\hat{\mu})\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i^2)-\mathrm{E}(\hat{\mu}^2)\end{aligned} \tag{5.7.1190}$$

Or, comme les variables sont équidistribuées :

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i^2)-\mathrm{E}(\hat{\mu}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x^2)-\mathrm{E}(\hat{\mu}^2) = \mathrm{E}(x^2)-\mathrm{E}(\hat{\mu}^2) \tag{5.7.1191}$$

Et nous avons (relation de Huyghens) :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X^2) \tag{5.7.1192}$$

$$\mathrm{V}(\hat{\mu}) = \mathrm{E}(\hat{\mu}^2)-\mathrm{E}(\hat{\mu})^2 = \mathrm{E}(\hat{\mu}^2)-\mathrm{E}(X)^2 \tag{5.7.1193}$$

où la deuxième relation ne peut s'écrire que parce que nous utilisons l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne (moyenne empirique). Par conséquent, en combinant les deux relations ci-dessus avec l'anté-précédente, nous obtenons :

$$\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \mathrm{E}(x^2)-\mathrm{E}(\hat{\mu}^2) = \left(\mathrm{V}(X)+\mathrm{E}(X)^2\right)-\left(\mathrm{V}(\hat{\mu})+\mathrm{E}(X)^2\right) = \mathrm{V}(X)-\mathrm{V}(\hat{\mu}) \tag{5.7.1194}$$

et comme :

$$\mathrm{V}(X) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{5.7.1195}$$

Nous avons finalement :

$$\boxed{\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2-\frac{\sigma^2}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2} \tag{5.7.1196}$$

nous avons donc un biais de moins une fois l'erreur-standard :

$$-\frac{\sigma^2}{n} \tag{5.7.1197}$$

nous disons alors que cet estimateur à un biais négatif (il sous-estime la vraie valeur !).

En cours de traduction de l'anglais

Nous noterons également que l'estimateur tend vers un estimateur sans biais (E.S.B.) lorsque le nombre d'individus tend vers l'infini $n \rightarrow +\infty$. Nous disons alors que nous avons un "estimateur asymptotiquement non biaisé" ou "estimateur asymptotiquement débiaisé".

Ensuite, le "biais d'un estimateur" est défini, selon le cas particulier ci-dessus, en général comme :

$$\text{bias}(\hat{\theta}) = \text{E}(\hat{\theta}) - \theta \tag{5.7.1198}$$

Il est important de prendre note que nous avons démontré que la variance empirique tend vers la variance théorique quand n tend vers l'infini et ce... que les données suivent une loi Normale ou non !

De par les propriétés de l'espérance, nous avons alors :

$$\text{E}(\text{E}(\hat{\sigma}^2)) = \text{E}(\hat{\sigma}^2) = \text{E}\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2\right) \tag{5.7.1199}$$

Il vient alors :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2} \tag{5.7.1200}$$

que certains appellent aussi "standard deviation"... (à ne pas confondre avec "l'erreur-standard" que nous verrons plus loin !).

Un estimateur est dit "estimatuer consistant" s'il converge en probabilités (car il peut être considéré lui-même comme une variable aléatoire ayant sa propre distribution), lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers la vraie valeur du paramètre. Techniquement, cette condition sera écrite :

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{5.7.1201}$$

Peut-être que l'exemple suivant peut aider à la compréhension. Supposons que les échantillons proviennent d'une distribution Normale. Ensuite, en utilisant le fait que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (voir page 845) est une variable aléatoire chi-carré avec $n-1$ degrés de la liberté, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{V}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) &= \text{Var}\ \chi^2_{n-1} \\ \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}\text{V}(S^2) &= 2(n-1) \\ \text{V}(S^2) &= \frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}, \end{aligned} \tag{5.7.1202}$$

où nous avons utilisé le fait (voir page 761) :

$$\text{V}\left(\chi^2_{n-1}\right) = 2(n-1) \tag{5.7.1203}$$

Donc, écrit différemment (selon la notation ci-dessus) :

$$\text{V}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{2\sigma^2}{n-1} \tag{5.7.1204}$$

En cours de traduction de l' anglais

De ces faits, nous pouvons voir officieusement que la distribution de $\mathrm{V}\left(\hat{\sigma}^2\right)$ devient de plus en plus concentrée sur σ^2 à mesure que la taille de l'échantillon augmente puisque la moyenne $\mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2\right)$ converge vers σ^2 (ie $\hat{\sigma}$ est sans biais) et la variance $\mathrm{V}\left(\hat{\sigma}^2\right)$ converge vers 0 (ie $\hat{\sigma}$ est consistent) !

Nous avons donc finalement pour résumer les deux résultats importants suivants

1. "L'estimateur du maximum de vraisemblance biaisé" ou appelé également "écart-type empirique" ou encore "écart-type échantillonnal" ou encore "écart-type de Pearson" ... et donc donné par :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2} \quad (5.7.1205)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Nous retrouvons cet écart-type suivant les contextes (par tradition) noté de cinq autres différentes façons qui sont :

$$\sigma^*, S^*, \sigma_*, S_*, S_n \quad (5.7.1206)$$

et même parfois (mais c'est très malheureux car cela génère alors souvent de la confusion avec l'estimateur non biaisé) σ ou S.

2. "L'estimateur du maximum de vraisemblance non biaisé" ou appelé également "écart-type standard" avec la "correction de Bessel" (le -1 au dénominateur est la correction en question...) :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2} \quad (5.7.1207)$$

qui comme nous le voyons est un estimateur convergent (quand n tend vers l'infini celui-ci tend vers l'estimateur du maximum de vraisemblance biaisé).

Nous retrouvons cet écart-type suivant les contextes (par tradition) noté de trois autres différentes façons qui sont :

$$\sigma, S, S_{n-1} \quad (5.7.1208)$$

Nous retrouverons ces deux dernières notations souvent dans les tables et dans de nombreux logiciels et que nous utiliserons plus bas dans les développements des intervalles de confiance et des tests d'hypothèses !

Par exemple, dans la version française de de Microsoft Excel 11.8346 l'estimateur biaisé est donné par la fonction `ECARTYPEP( )` et le non biaisé par `ECARTTYPE( )`.

Au total, cela nous fait donc trois estimateurs pour la même quantité ! ! Comme dans l'écrasante majorité des cas de l'industrie la moyenne théorique n'est pas connue, nous utilisons le plus souvent les deux dernières relations encadrées ci-dessus. Maintenant, c'est là que c'est le plus vicieux : lorsque nous calculons le biais des deux estimateurs, le premier est biaisé, le second

En cours de traduction de l'anglais

ne l'est pas. Donc nous aurions tendance à n'utiliser que le second. Que nenni ! Car nous pourrions aussi parler de la variance et de la précision d'un estimateur, qui sont aussi des critères importants pour juger de la qualité d'un estimateur par rapport à un autre. Si nous faisions le calcul de la variance des deux estimateurs, alors le premier, qui est biaisé, a une variance plus petite que le second qui est sans biais ! Tout ça pour dire que le critère du biais n'est pas (et de loin) le seul à étudier pour juger de la qualité d'un estimateur.

Enfin, il est important de se rappeler que le facteur -1 du dénominateur de l'estimateur du maximum de vraisemblance non biaisé provient du fait qu'il fallait corriger l'espérance de l'estimateur biaisé à la base minoré de une fois l'erreur-standard ! !

5.7.7.2 Estimateur de la distribution de Poisson

En utilisant la même méthode que pour la loi Normale (Gauss-Laplace), nous allons donc rechercher les estimateurs du maximum de vraisemblance de la loi de Poisson qui rappelons-le, est donnée par :

$$P_k = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \quad (5.7.1209)$$

Dès lors, la vraisemblance est donnée par :

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, \mu) = \frac{\mu^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}e^{-\mu n} \quad (5.7.1210)$$

Maximiser une fonction ou maximiser son logarithme est équivalent donc :

$$\ln[L(\mu)] = \ln(\mu)\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - \mu n \quad (5.7.1211)$$

Nous cherchons maintenant à la maximiser :

$$\frac{\partial \ln[L(\mu)]}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \quad (5.7.1212)$$

et obtenons donc son unique estimateur du maximum de vraisemblance qui s

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad (5.7.1213)$$

Il est tout à fait normal de retrouver dans cet exemple didactique la moyenne empirique, car c'est le meilleur estimateur possible pour le paramètre de la loi de Poisson (qui représente aussi l'espérance d'une loi de Poisson).

Sachant que l'écart-type de cette distribution particulière (voir plus haut lors de notre développement de la loi de Poisson) n'est que la racine carrée de la moyenne, nous avons alors pour

En cours de traduction de l' anglais

l'écart-type du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}} \quad (5.7.1214)$$

Remarque

Nous montrons de la même manière des résultats identiques pour la loi exponentielle très utilisée en maintenance préventive et fiabilité !

5.7.7.3 Estimateur de la distribution Binomiale

Supposons que nous ayons un modèle de Bernoulli dans lequel chaque observation a une probabilité constante et égale de succès notée p. Une variable de Bernoulli prend l'une des deux valeurs, conventionnellement 1 ou 0, qui indiquent un «succès» ou un «échec». La distribution de probabilité pour cette variable est donc :

$$\begin{aligned} f(1) &= p \\ f(0) &= 1 - p \end{aligned} \quad (5.7.1215)$$

En cours de traduction de l'anglais

Si S représente le nombre de succès et F le nombre d'échecs, alors la vraisemblance est :

$$L(p) = \prod_{i=1}^{S} p \prod_{i=1}^{F} (1-p) = p^S (1-p)^F \quad (5.7.1216)$$

et la log-vraisemblance serait alors :

$$\ln(L(p)) = S\ln(p) + F\ln(1-p) \quad (5.7.1217)$$

Nous prenons ensuite la dérivée de ceci par rapport à p :

$$\frac{\partial \ln(L(p))}{\partial p} = \frac{S}{p} - \frac{F}{1-p} \quad (5.7.1218)$$

Nous définissons maintenant cela égal à zéro et résolvons pour p et nous obtenons immédiatement :

$$\hat{p} = \frac{S}{S+F} \quad (5.7.1219)$$

5.7.7.4 Estimateur de la distribution Géométrique

En utilisant la même méthode que pour la loi Normale (Gauss-Laplace) et la loi de Poisson, nous allons donc rechercher l'estimateur du maximum de vraisemblance de la loi Binomiale qui rappelons-le, est donnée par :

$$P(N,k) = C_k^N \cdot P = \frac{N!}{k!(N-k!)} p^k q^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k!)} p^k (1-p)^{N-k} \tag{5.7.1220}$$

Dès lors, la vraisemblance est donnée par :

$$L(p) = \prod_{i=1}^{N} P(x_i, p) = C_k^N p^k (1-p)^{N-k} \tag{5.7.1221}$$

Il convient de se rappeler que le facteur qui suit le terme combinatoire exprime déjà les variables successives selon ce que nous avons vu lors de notre étude de la fonction de distribution de Bernoulli et de la fonction binomiale. D'où la disparition du produit dans la dernière égalité précédente.

Maximiser une fonction ou maximiser son logarithme est équivalent donc :

$$\ln[L(p)] = \ln(C_k^N) + k\ln(p) + (N-k)\ln(1-p) \tag{5.7.1222}$$

Nous cherchons maintenant à la maximiser :

$$\frac{\partial \ln[L(p)]}{\partial p} = \frac{k}{p} - \frac{N-k}{1-p} = 0 \tag{5.7.1223}$$

Le lecteur aura peut-être remarqué que le coefficient binomial a disparu. Dès lors, nous en déduisons immédiatement que l'estimateur de la loi binomiale sera le même que celui de la loi géométrique.

Ce qui donne

$$k(1-p) - p(N-k) = k - kp - pN + pk = k - pN = 0 \tag{5.7.1224}$$

d'où nous tirons l'estimateur du maximum de vraisemblance qui sera donc la simple moyenne empirique :

$$\boxed{\hat{p} = \frac{k}{N}} \tag{5.7.1225}$$

Ce résultat est assez intuitif si l'on considère l'exemple classique d'une pièce de monnaie qui a une chance sur deux de tomber sur une de ces faces. La probabilité p étant le nombre de fois k où une face donnée a été observée sur le nombre d'essais total (toutes faces confondues).

Remarque

Dans la pratique, il n'est pas aussi simple d'appliquer ces estimateurs ! Il faut bien réfléchir lesquels sont les plus adaptés à une expérience donnée et idéalement calculer également l'erreur quadratique moyenne (erreur-standard) de chacun des estimateurs de

En cours de traduction de l'anglais

la moyenne (comme nous l'avons déjà fait pour la moyenne empirique plus tôt). Bref c'est un long travail de réflexion.

5.7.7.5 Estimateurs de la distribution de Weibull

Nous avons vu dans la section de Génie Industriel une étude très détaillée de la loi de Weibull à trois paramètres avec son écart-type et son espérance car nous avions précisé qu'elle était assez utilisée dans le domaine de l'ingénierie de la fiabilité (voir section Génie Industriel page ??).

Malheureusement les trois paramètres de cette loi nous sont en pratique inconnus. A l'aide des estimateurs nous pouvons cependant déterminer l'expression de deux des trois en supposant γ comme étant nul. Cela nous donne donc la loi de Weibull dite "loi de Weibull à deux paramètres" suivante :

$$P(x, \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^{\beta}} \tag{5.7.1226}$$

avec pour rappel $\beta > 0$ et $\eta > 0$.

Dès lors la vraisemblance est donnée par :

$$L(\beta, \eta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, \beta, \eta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{n}\right)^{\beta}} = \left(\frac{\beta}{\eta}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{n}\right)^{\beta}} \tag{5.7.1227}$$

Maximiser une fonction ou maximiser son logarithme est équivalent donc :

$$\begin{aligned}
\ln(L(\beta, \eta)) &= \ln\left(\left(\frac{\beta}{\eta}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^{\beta}}\right)\\
&= n\ln\left(\frac{\beta}{\eta}\right) - \frac{1}{\eta^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^{\beta-1}\right]\\
&= n\ln\left(\frac{\beta}{\eta}\right) - \eta^{-\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)
\end{aligned} \tag{5.7.1228}$$

Cherchons maintenant à maximiser cela en se rappelant que (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1457) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^{x} = a^{x}\ln(a) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^{-x} = -a^{x}\ln(a) \tag{5.7.1229}$$

En cours de traduction de l' anglais

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(\beta,\eta)}{\partial\beta} &= n\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\eta^\beta}\ln(\eta)\sum_{i=1}^n x_i^\beta-\frac{1}{\eta^\beta}\sum_{i=1}^n x_i^\beta\ln(x_i)+\sum_{i=1}^n\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)\\ &= n\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\eta^\beta}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\left(\ln(\eta)-\ln(x_i)\right)\right]+\sum_{i=1}^n\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)\\ &= n\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\eta^\beta}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\left(\ln(x_i)-\ln(\eta)\right)\right]+\sum_{i=1}^n\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)\\ &= n\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\eta^\beta}\sum_{i=1}^n x_i^\beta\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)+\sum_{i=1}^n\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)=0\end{aligned} \tag{5.7.1230}$$

Et nous avons pour le deuxième paramètre :

$$\frac{\partial \ln(\beta,\eta)}{\partial\eta}=-n\frac{1}{\eta}-\frac{\beta}{\eta^\beta\eta}\sum_{i=1}^n x_i^\beta+(1-\beta)n\frac{1}{\eta}=0 \tag{5.7.1231}$$

Alors :

$$-\frac{1}{\eta^\beta}\sum_{i=1}^n x_i^\beta-n=0 \tag{5.7.1232}$$

Enfin pour résumer avec les notations correctes (et dans l'ordre de résolution en pratique) :

$$n\frac{1}{\hat\beta}-\frac{1}{\hat\eta^{\hat\beta}}\sum_{i=1}^n x_i^{\hat\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)+\sum_{i=1}^n\ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right)=0\quad\text{et}\quad-\frac{1}{\hat\eta^{\hat\beta}}\sum_{i=1}^n x_i^{\hat\beta}-n=0 \tag{5.7.1233}$$

La résolution de ces équations implique des calculs lourds et on ne peut a priori rien faire avec ça dans des tableurs conventionnels comme Microsoft Excel ou Open Office Calc sans programmation (du moins pour autant que l'on sache ...).

Nous adoptons ensuite une approche différente en écrivant notre distribution de Weibull avec deux paramètres comme suit :

$$P(x,\beta,\theta)=\frac{\beta}{\theta}x^{\beta-1}e^{\frac{x^\beta}{\theta}} \tag{5.7.1234}$$

avec pour rappel $\beta>0$ et $\theta>0$.

Par conséquent, la vraisemblance est donnée par :

$$L(\beta,\eta)=\prod_{i=1}^n P(x_i,\beta,\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{\beta}{\theta}x_i^{\beta-1}e^{-\frac{x_i^\beta}{\theta}}=\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n\frac{x_i^\beta}{\theta}}\prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \tag{5.7.1235}$$

Maximiser une fonction ou maximiser son logarithme est équivalent donc :

$$\begin{aligned}\ln(L(\beta,\eta)) &= \ln\left[\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n\frac{x_i^\beta}{\theta}}\prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1}\right]\\ &= n\ln\frac{\beta}{\theta}-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^\beta+\sum_{i=1}^n\ln(x_i^{\beta-1})=n\ln\frac{\beta}{\theta}-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^\beta+(\beta-1)\sum_{i=1}^n\ln(x_i)\end{aligned} \tag{5.7.1236}$$

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, nous cherchons à maximiser cela en nous rappelant que (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1457) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x \ln(a) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^{-x} = -a^x \ln(a) \tag{5.7.1237}$$

alors :

$$\frac{\partial \ln(\beta,\theta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0 \tag{5.7.1238}$$

Et nous avons pour le deuxième paramètre :

$$\frac{\partial \ln(\beta,\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} = 0 \tag{5.7.1239}$$

Il est alors immédiat que :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \tag{5.7.1240}$$

injecté dans l'équation :

$$\frac{n}{\beta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0 \tag{5.7.1241}$$

Nous obtenons :

$$\frac{n}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} ln(x_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0 \tag{5.7.1242}$$

En simplifiant :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln(x_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \tag{5.7.1243}$$

La résolution des deux équations (dans l'ordre de haut en bas) :

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \ln(x_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} - \bar{\theta}\end{gathered}} \tag{5.7.1244}$$

peut être facilement calculé avec l'Outil Cible de Microsoft Excel ou Open Office Calc.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.7.6 Estimateurs de la distribution Gamma

Nous allons utiliser ici une technique appelée "méthode des moments" pour déterminer les estimateurs des paramètres de la loi Gamma.

Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi Gamma avec pour densité :

$$P_{a,\lambda}(x) = \frac{x^{a-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}\lambda^a 1_{[0,+\infty[} \tag{5.7.1245}$$

Nous cherchons à estimer a, λ. Pour cela, nous déterminons d'abord quelques moments théoriques. Le premier moment est l'espérance qui comme nous l'avons démontré vaut :

$$\text{E}(X) = m_1 = \frac{a}{\lambda} \tag{5.7.1246}$$

et le second moment, l'espérance du carré de la variable aléatoire, est comme nous l'avons démontré implicitement lors de la démonstration de la variance de la loi Gamma :

$$\text{E}(X^2) = m_2 = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} \tag{5.7.1247}$$

Nous exprimons ensuite la relation entre les paramètres et les moments théoriques :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{a}{\lambda} \\ m_2 &= \frac{a(a+1)}{\lambda^2} \end{aligned} \tag{5.7.1248}$$

La résolution de ce système simple donne :

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} \\ \lambda &= \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2} \end{aligned} \tag{5.7.1249}$$

Une fois ce système établi, la méthode des moments consiste à utiliser les moments empiriques, en l'occurrence pour notre exemple les deux premiers, $\hat{m}_1, \hat{m}_2$:

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \\ \hat{m}_2 &= \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \end{aligned} \tag{5.7.1250}$$

que nous posons égaux aux moments théoriques vrais... Dès lors, il vient :

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2} \\ \lambda &= \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}{\hat{m}_1^2} \end{aligned}} \tag{5.7.1251}$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.7.7 Estimateur de la loi de Pareto

Rappelons la densité de Pareto est donnée par :

$$f(x)=k\frac{x_m^k}{x^{k+1}} \tag{5.7.1252}$$

Choisissons une notation plus pratique et traditionnelle :

$$f(x,\alpha,\beta)=\alpha\frac{\beta^\alpha}{x^\alpha} \qquad x\geq\beta \qquad \alpha,\beta>0 \tag{5.7.1253}$$

La fonction de vraisemblance de la distribution de Pareto sur un échantillon $x=(x_1,\ldots,x_n)$ est donnée par :

$$L(\alpha,\beta,x)=\prod_{i=1}^n\alpha\frac{\beta^\alpha}{x_i^{\alpha+1}}=\alpha^n\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^n\frac{1}{x_i^{\alpha+1}} \tag{5.7.1254}$$

En prenant le log de la vraisemblance, on obtient :

$$\ln[L(\alpha,\beta;x)]\equiv\ell(\alpha,\beta;x)=n\ln(\alpha)+n\alpha\ln(\beta)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^n\ln(x_i). \tag{5.7.1255}$$

Étant donné qu'un β plus élevé entraînera toujours une probabilité plus élevée - $\ln(\beta)$ augmente de façon monotone - nous maximisons la probabilité en fixant $\hat{\beta}$ le plus haut possible (nous ne pouvons pas utiliser la différenciation pour maximiser la probabilité dans ce cas). Puisque $\beta\leq x_i$ pour tout i, nous maximisons la probabilité en définissant $\hat{\beta}=\min_i x_i$, le plus petit x_i dans l'échantillon.

Pour α, nous définissons la dérivée partielle de ℓ par rapport à α égale à 0 :

$$\frac{\partial\ell(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+n\ln(\beta)-\sum_{i=1}^n\ln(x_i)=0 \tag{5.7.1256}$$

Dès lors :

$$\hat{\alpha}=\frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^n\ln(x_i)-n\ln(\hat{\beta})}=\frac{1}{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln(x_i)-n\ln(\hat{\beta})} \tag{5.7.1257}$$

5.7.7.8 Estimateurs de données censurées

Le "vraisemblance de données censurées" est d'une importance cruciale dans le domaine de la fiabilité industrielle ainsi que dans les pharmacies et les études cliniques, sachant que pour des raisons de coût et de circonstances imprévues, il y a souvent une limite au temps d'observation ou aux événements qui font que les sujets d'étude quittent l'expérience. Sachant qu'il existe quatre types de situations (voir la figure ci-dessous si nécessaire) :

1. "Données non-censurées" (nc), l'événement d'intérêt est observé entre le moment de début de la mesure et la fin de la mesure.

En cours de traduction de l'anglais

2. "Censurées à droite" (cd), l'événement d'intérêt ne s'est pas produit pendant le temps d'observation limité, c'est-à-dire entre le début et la fin de la mesure.

3. "Censurées à gauche" (cg), l'objet d'étude a quitté l'expérience pour une raison quelconque observée entre le début de la mesure et la fin de la mesure, ou nous ne savons pas avec précision quand l'événement d'intérêt qui aurait dû être mesuré a commencé.

4. "Intervalle censurée" (ic), l'événement d'intérêt a eu lieu entre deux instants, mais nous ne savons pas exactement quand dans cet intervalle (avant, entre ou après les périodes de mesure).

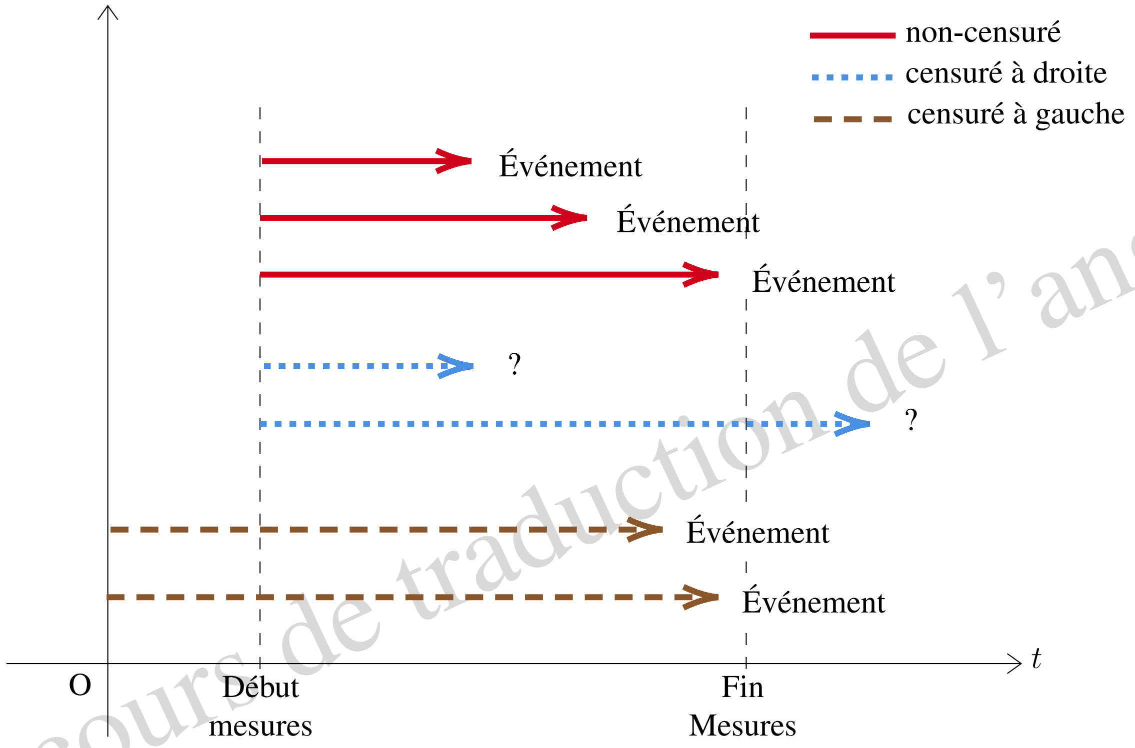


FIG. 5.156 – **Type de données censurées**

En cours de traduction de l'anglais

Il est alors relativement intuitif que si tous les événements sont indépendants, la fonction de vraisemblance sera donnée par :

$$L(\theta)=\prod_{T_i\in\text{uc}}P(T=T_i,\theta)\prod_{T_i\in\text{lc}}P(T<T_i,\theta)\prod_{T_i\in\text{rc}}P(T>T_i,\theta)\prod_{T_i\in\text{ci}}P(T_{i,l}<T<T_{i,r},\theta) \quad (5.7.1258)$$

où l'index l est pour "gauche" et l'index r est pour "droite".

Nous avons évidemment (pensez au cas discret avant de penser au cas continu) :

$$\begin{aligned}P(T=T_i,\theta)&=f(T_i,\theta)\\P(T<T_i,\theta)&=F(T_i,\theta)=1-R(T_i,\theta)\\P(T>T_i,\theta)&=1-F(T_i,\theta)=R(T_i,\theta)\\P(T_{i,l}<T<T_{i,r},\theta)&=F(T_{t,r},\theta)-F(T_{t,l},\theta)=R(T_{i,l},\theta)-R(T_{i,r},\theta)\end{aligned} \quad (5.7.1259)$$

Dans le domaine de l'ingénierie de fiabilité qui nous intéresse ici, nous nous réduisons souvent aux cas suivants :

$$L(\theta)=\prod_{T_i\in \text{uc}} P(T=T_i,\theta)\prod_{T_i\in \text{rc}} P(T>T_i,\theta) \tag{5.7.1260}$$

mais avec la notation suivante (...) :

$$\boxed{L(\theta)=\prod_{T_i\in \text{uc}} P(T=T_i,\theta)\prod_{T_i\in \text{rc}} R(T_i,\theta)} \tag{5.7.1261}$$

Dans de nombreuses expériences, le nombre d'éléments défectueux f à observer sur n est fixé à l'avance (on parle souvent de "censure de type II") ou simplement connu par la suite. Par conséquent, nous avons :

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{f} P(T=T_i,\theta)\prod_{i=f+1}^{n} R(T_i,\theta) \tag{5.7.1262}$$

Explicitons cette probabilité avec la loi de Weibull. Rappelons qu'une forme possible d'écriture de la fonction de densité s'écrit pour cette dernière (voir section de Génie Industriel page ??) :

$$f(x)=\frac{\alpha}{\beta}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}}e^{-\dfrac{x^\alpha}{\beta^\alpha}}=\frac{\alpha}{\beta}x^{\alpha-1}e^{-\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^\alpha} \tag{5.7.1263}$$

et que nous avons prouvé que sa fonction de survie correspondante était donnée par :

$$R(x)=e^{-\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^\alpha} \tag{5.7.1264}$$

Dès lors :

$$L(\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{f}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\dfrac{t_i}{\beta}\right)^\alpha}\prod_{i=f+1}^{n}e^{-\left(\dfrac{t_i}{\beta}\right)^\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha}\right)^f e^{-\dfrac{1}{\beta^\alpha}\sum_{i=1}^n t_i^\alpha}\prod_{i=1}^{f}t_i^{\alpha-1} \tag{5.7.1265}$$

Maximiser la probabilité équivaut à maximiser le logarithme. Dès lors :

$$\ln[L(\alpha,\beta)]=f\ln(\alpha)-f\alpha\ln(\beta)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{f}\ln(t_i) \tag{5.7.1266}$$

Nous calculons la dérivée partielle par rapport à α, β (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1457) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln[L(\alpha,\beta)]}{\partial\alpha}&=\frac{f}{\alpha}-f\ln(\beta)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\ln\left(\frac{t_i}{\beta}\right)+\sum_{i=1}^{f}\ln(t_i)=0\\ \frac{\partial\ln[L(\alpha,\beta)]}{\partial\alpha}&=-\frac{f\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha=0\end{aligned} \tag{5.7.1267}$$

La deuxième relation peut facilement être explicitée par rapport à β de telle sorte que :

$$\hat{\beta}=\left(\frac{1}{f}\sum_{i=1}^{n}t_i^\alpha\right)^{1/\hat{\alpha}} \tag{5.7.1268}$$

Dans tous les cas, il semble qu'il sera nécessaire d'utiliser des techniques d'optimisation numérique pour déterminer tous les paramètres.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.7.9 Matrice d'information de Fisher

Nous allons introduire maintenant une matrice qui nous sera utile beaucoup plus tard pour certains tests statistiques avancés mais aussi pour déterminer (entre autres !) des paramètres de loi statistique non triviaux et aussi un critère d'information important nommé le "critère d'information Akaike".

Nous avons vu précédemment que la dérivée partielle de la log-vraisemblance (que nous désignerons par $\mathcal{L}$ pour les développements suivants) relativement à un paramètre donné θ_i d'une fonction de probabilité (dépendante d'un ensemble de paramètres $\vec{\theta}$) nous donnera un estimateur de ce paramètre si nous le posons comme égal à zéro.

Aussi, respectivement, nous avons alors que la dérivée partielle évaluée à cet estimateur correspondant donne alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \theta_i}(\hat{\theta}) = 0 \qquad (5.7.1269)$$

Remarque

L'expression :

$$\mathcal{S}_i(\vec{\theta}) = \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \theta_i}(\hat{\theta}) = \frac{\partial \ln(L(\vec{\theta}))}{\partial \theta_i}(\hat{\theta}) \qquad (5.7.1270)$$

est connue sous le nom de "fonction de score".

Rappelons que lors de notre étude des séries bivariées de Taylor (voir section Séquences et Séries page 1694), nous avons prouvé que :

$$f(x_0+h, y_0+k) \cong f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + \frac{1}{2!}(h\ k)H\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \qquad (5.7.1271)$$

où :

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \qquad (5.7.1272)$$

Faisons le remplacement suivant :

$$h = x - x_0 \qquad k = y - y_0 \qquad (5.7.1273)$$

Nous avons alors :

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0\ y-y_0)H\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \qquad (5.7.1274)$$

En cours de traduction anglais

Remarque

Dans le cas univarié ceci est aussi noté :

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)H(x-x_0) \tag{5.7.1275}$$

ou encore dans certains livre de référence :

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)H(x_0)(x-x_0) \tag{5.7.1276}$$

Sous forme vectorielle ceci est souvent noté de la manière suivante :

$$f(\vec{v}) \cong f(\vec{v}_0) + \left(\vec{\nabla} f(\vec{v}_0)\right) \circ (\vec{v}) + \frac{1}{2!}\vec{v}^T H \vec{v} \tag{5.7.1277}$$

Maintenant rappelons-nous que $f(\vec{v}_0)$ et $\vec{\nabla} f(\vec{v}_0)$ ne contiennent plus aucun terme en x ou y étant donné que la fonction est valuée. Dès lors, si nous prenons le gradient dans l'ensemble de l'expression précédente, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} f(\vec{v}) \cong \underbrace{\vec{\nabla} f(\vec{v}_0)}_{=0} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} f(\vec{v}_0) \circ (\vec{v})\right) + \frac{1}{2!}\vec{\nabla}\left(\vec{v}^T H \vec{v}\right) = \vec{\nabla} f(\vec{v}_0) + H\vec{v} \tag{5.7.1278}$$

Si le lecteur ne comprend pas ce résultat, refaire le calcul dans le cas univarié peut aider. Effectivement, en partant de :

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)H(x_0)(x-x_0) \tag{5.7.1279}$$

Nous avons alors de manière très détaillée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x)}{\partial x} &\cong \underbrace{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x-x_0)\right) + \frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial x}\left((x-x_0)H(x_0)(x-x_0)\right) \\
&= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)(x-x_0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)}_{=1} \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)}_{=1}H(x_0)(x-x_0) + \underbrace{(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}H(x_0)(x-x_0)}_{=0} + (x-x_0)H(x_0)\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)}_{=1}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + \frac{1}{2!}\left(H(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)H(x_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + \frac{1}{2!}(2H(x_0)(x-x_0)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + H(x_0)(x-x_0)
\end{aligned} \tag{5.7.1280}$$

Cette dernière relation peut être écrite :

$$\vec{\nabla} f(x) \cong \vec{\nabla} f(x_0) + H(x_0)(x-x_0) \tag{5.7.1281}$$

Maintenant revenons à l'égalité :

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{v}) \cong \vec{\nabla} f(\vec{v}_0) + H\vec{v}} \tag{5.7.1282}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons résoudre cette expression pour le point optimal $\vec{\nabla}f(\vec{v})=\vec{0}$, ce qui donne :

$$\vec{0}\cong\vec{\nabla}f(\vec{v}_0)+H\vec{v}=\vec{\nabla}f\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+H\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\qquad(5.7.1283)$$

Dès lors :

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}-H^{-1}\vec{\nabla}f\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}}\qquad(5.7.1284)$$

Il s'agit de la méthode de Newton-Raphson pour l'optimisation multidimensionnelle pour information...

Concentrons-nous maintenant sur l'égalité suivante de la précédente :

$$\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\cong -H^{-1}\vec{\nabla}f\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\qquad(5.7.1285)$$

Et changeons la notation f par $\mathcal{L}$:

$$\begin{pmatrix}\theta_1-\theta_{1,0}\\\theta_2-\theta_{2,0}\end{pmatrix}\cong -H^{-1}\vec{\nabla}\mathcal{L}\begin{pmatrix}\theta_1-\theta_{1,0}\\\theta_2-\theta_{2,0}\end{pmatrix}=H^{-1}\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\qquad(5.7.1286)$$

où $\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})$ (le gradient de la vraisemblance au point $\vec{\theta}$) est nommé "vecteur de score".

Remarque

Dans le cas univarié, ceci ce réduira à :

$$\theta-\theta_0\cong -H^{-1}\frac{\partial\mathcal{L}(\theta_0)}{\partial\theta}=-\left[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta_0)}{\partial\theta^2}\right]^{-1}\frac{\partial\mathcal{L}(\theta_0)}{\partial\theta}\qquad(5.7.1287)$$

Maintenant ayons un peu de 'fun'... Prenons le produit scalaire (voir section Algèbre Linéaire page 1987) of $\vec{\theta}$, ie :

$$\vec{\theta}\vec{\theta}^T=\begin{pmatrix}\theta_1-\theta_{1,0}\\\theta_2-\theta_{2,0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1-\theta_{1,0} & \theta_2-\theta_{2,0}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}(\theta_1-\theta_{1,0})^2 & (\theta_1-\theta_{1,0})(\theta_2-\theta_{2,0})\\\theta_2-\theta_{2,0} & (\theta_2-\theta_{2,0})^2\end{bmatrix}\qquad(5.7.1288)$$

Ok jusqu'à présent rien d'intéressant. Mais prenons l'espérance :

$$\text{E}(\vec{\theta}\vec{\theta}^T)=\begin{bmatrix}\text{E}(\theta_1-\theta_{1,0})^2 & \text{E}((\theta_1-\theta_{1,0})(\theta_2-\theta_{2,0}))\\\text{E}((\theta_2-\theta_{2,0})(\theta_1-\theta_{1,0})) & \text{E}(\theta_2-\theta_{2,0})^2\end{bmatrix}\qquad(5.7.1289)$$

Ici, nous reconnaissons quelque chose ! Les éléments de la diagonale ressemblent à une variance... La variance de θ_1 par rapport à $\theta_{1,0}$. Il est courant de supposer que θ_1 est l'estimateur et $\theta_{1,0}$ est la vraie valeur, puis nous écrivons (gardez à l'esprit que cela peut être généralisé à plus de 2 paramètres !) :

$$\text{E}(\vec{\theta}\vec{\theta}^T)=\begin{bmatrix}\text{E}(\hat{\theta}_1-\theta_1)^2 & \text{E}((\hat{\theta}_1-\theta_1)(\hat{\theta}_2-\theta_2))\\\text{E}((\hat{\theta}_2-\theta_2)(\hat{\theta}_1-\theta_1)) & \text{E}(\hat{\theta}_2-\theta_2)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{V}(\hat{\theta}_1) & \text{cov}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\\\text{cov}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) & \text{V}(\hat{\theta}_2-\theta_2))\end{bmatrix}=\Sigma(\vec{\theta})\qquad(5.7.1290)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous reconnaissons ici la matrice de variance-covariance[34] (voir plus haut page ??). Ok c'est bien mais alors quoi??? Qu'est-ce que cela nous apporte? En fait, en utilisant les égalités précédentes, nous avons :

$$\mathrm{E}(\vec{\theta}\vec{\theta}^T)=\Sigma(\vec{\theta})\cong \mathrm{E}\left[\left(H^{-1}\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\right)\left(H^{-1}\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\right)^T\right] \quad (5.7.1291)$$

En utilisant les propriétés de transposition comme on les a démontrées dans la section d'Algèbre Linéaire et la propriété d'association de multiplication matricielle, cette dernière relation peut être écrite :

$$\Sigma(\vec{\theta})\cong \mathrm{E}\left[\left(H^{-1}\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\right)\left(\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})^T(H^{-1})^T\right)\right]=\mathrm{E}\left[H^{-1}\left(\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})^T\right)(H^{-1})^T\right] \quad (5.7.1292)$$

En utilisant une autre propriété de la transposition, cela peut aussi s'écrire :

$$\Sigma(\vec{\theta})\cong \mathrm{E}\left[H^{-1}\left(\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})^T\right)(H^T)^{-1}\right] \quad (5.7.1293)$$

En supposant que la Hessienne est symétrique de telle sorte que $H^T=H$ (si le théorème de Schwarz [35] s'applique à la fonction considérée à l'intérieur de la Hessienne!), nous avons alors :

$$\Sigma(\vec{\theta})\cong \mathrm{E}\left[H^{-1}\left(\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})^T\right)H^{-1}\right] \quad (5.7.1294)$$

En utilisant la propriété de linéarité de la moyenne :

$$\Sigma(\vec{\theta})\cong \left[\mathrm{E}(H^{-1})\mathrm{E}\left(\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})^T\right)\mathrm{E}(H^{-1})\right] \quad (5.7.1295)$$

Concentrons-nous maintenant sur :

$$\mathrm{E}\left(\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})^T\right) \quad (5.7.1296)$$

Mais nous avons besoin d'un résultat important avant! Comme la probabilité $L(\vec{x}),\vec{\theta})$ est une densité, nous savons que :

$$\int L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x=1 \quad (5.7.1297)$$

Maintenant, en différenciant les deux côtés par rapport à l'un des paramètres θ_i, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x=0 \quad (5.7.1298)$$

En supposant (cette hypothèse doit être vérifiée dans tous les cas!) que nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\int L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x=\int \frac{\partial L(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_i}\mathrm{d}x \quad (5.7.1299)$$

Alors :

$$\int \frac{\partial L(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_i}\mathrm{d}x=0 \quad (5.7.1300)$$

[34] Tristement désignée dans certains manuels $\mathrm{V}(\vec{\theta})$....
[35] voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1453

En cours de traduction de l'anglais

Mais ceci aussi égal à :

$$\int \frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x = 0 \qquad (5.7.1301)$$

En différenciant à nouveau par rapport à θ_i et en prenant la dérivée intérieure, cela nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_i}\int \frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x &= \int \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i^2} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x + \int \frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i}\frac{\partial L(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i^2} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x + \int \frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i}\frac{1}{L(\vec{x},\vec{\theta})}\frac{\partial L(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i^2} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x + \int \frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i}\frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned} \qquad (5.7.1302)$$

Dès lors :

$$\int \frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i}\frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x = -\int \frac{\partial^2 \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i^2} L(\vec{x},\vec{\theta})\mathrm{d}x \qquad (5.7.1303)$$

Écrit d'une manière plus courante par les statisticiens comme suit :

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i}\frac{\partial \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i}\right) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln(L(\vec{x},\vec{\theta}))}{\partial \theta_i^2}\right) \qquad (5.7.1304)$$

Et en utilisant la notation définie précédemment :

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i}\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i}\right) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i^2}\right) \qquad (5.7.1305)$$

Si nous refaisons le même développement mais en prenant la dérivée partielle une deuxième fois relativement à θ_j au lieu de θ_i, nous obtenons immédiatement :

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i}\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_j}\right) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) \qquad (5.7.1306)$$

Cela peut être mis évidemment sous forme de matrice pour chaque composant i, j. Il est alors habituel de définir la moyenne de la matrice composée des composants $\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i}\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_j}$ comme la "matrice d'information de Fisher" noté $\mathcal{I}(\vec{\theta})$ et nous reconnaissons qu'une matrice composée des composants $\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ est la "Hessienne" (voir section Séquences et Séries page 1695) notée pour rappel par $H(\vec{\theta})$, alors nous avons :

$$\boxed{\mathcal{I}(\vec{\theta}) = -\mathrm{E}\left(H(\vec{\theta})\right)} \qquad (5.7.1307)$$

Et et il s'agit bien de la relation que nous nous attendions à trouver !

Revenons donc maintenant à :

$$\Sigma(\vec{\theta}) = \left[\mathrm{E}(H^{-1})\mathrm{E}\left(\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})\vec{\nabla}\mathcal{L}(\vec{\theta})^T\right)\mathrm{E}(H^{-1})\right] \qquad (5.7.1308)$$

En cours de traduction de l' anglais

Que nous pouvons maintenant réécrire :

$$\Sigma(\vec{\theta}) = \left[\mathrm{E}(H^{-1})\mathcal{I}(\vec{\theta})\mathrm{E}(H^{-1})\right] = \left[\mathrm{E}(H^{-1})(-\mathrm{E}(H(\vec{\theta})))\mathrm{E}(H^{-1})\right] = -\left[\mathrm{E}(H^{-1})\mathrm{E}(H)\mathrm{E}(H^{-1})\right] \tag{5.7.1309}$$

Donc, finalement, nous obtenons le résultat final important que nous recherchions depuis le début nommé "égalité de la matrice d'information" :

$$\boxed{\Sigma(\vec{\theta}) \cong -\mathrm{E}(H^{-1})} \tag{5.7.1310}$$

C'est-à-dire que la matrice de covariance-variance (elle-même égale au produit extérieur de $\vec{\theta}$ avec elle-même !), est égale au négatif de l'inverse de la matrice Hessienne ! Ou en d'autres termes : matrice hessienne d'une fonction de vraisemblance est égale à la matrice d'information, ou la matrice de variance-covariance des fonctions de score !

✍Exemple :

Notre échantillon est constitué des premiers n termes d'une séquence indépendante et identiquement distribuée $\{X_n\}$de variables aléatoires Normalement distribuées ayant une moyenne μ et une variance σ^2. La fonction de densité de probabilité d'un terme générique de la séquence est :

$$f_X(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_j-\mu)^2}{\sigma^2}} \tag{5.7.1311}$$

La moyenne μ et la variance σ^2sont les deux paramètres à estimer.

Nous pouvons accéder aux erreurs standards de $\vec{\theta}$ à partir des racines carrées des éléments diagonaux de la matrice Σ. Notez que ceux-ci ne sont corrects qu'asymptotiquement et sont difficiles à calculer dans des échantillons finis.

Nous savons que la fonction de vraisemblance est :

$$L(\mu,\sigma^2,x_1,\ldots,y_n) = L(\vec{\theta},\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu)^2}{\sigma^2}} \tag{5.7.1312}$$

et donc (pour rappel) :

$$\ln(L(\vec{\theta},\vec{x})) = \mathcal{L}(\vec{\theta}) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2 \tag{5.7.1313}$$

Les vraisemblances et leur solution sont pour rappel :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln(L(\vec{\theta})}{\partial\mu} &= \frac{\mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_t-\mu) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j \\ \frac{\partial\ln(L(\vec{\theta})}{\partial\sigma^2} &= \frac{\mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_j-\hat{\mu})^2\end{aligned} \tag{5.7.1314}$$

Calculons maintenant la Hessienne de $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$, c'est-à-dire la Hessienne de $\mathcal{L}(\vec{\theta})$. Nous devons pour cela calculer 4 composantes de la matrice étant donné que la vraisemblance a 2 paramètres ($2 \times 2 = 4$) et les composantes hors diagonale sont égales en supposant que le théorème de Schwarz s'applique. Dès lors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \mu^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \sigma^2} &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \sigma^2 \partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu) \end{aligned} \tag{5.7.1315}$$

Quand valué au point $\hat{\vec{\theta}}$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \mu^2}\right|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}} &= -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} \\ \left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \sigma^2}\right|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}} &= \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{1}{\hat{\sigma}^6}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\hat{\mu})^2 = \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^6} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} \\ \left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\vec{\theta})}{\partial \sigma^2 \partial \mu}\right|_{\hat{\vec{\theta}}} &= -\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu) = 0 \end{aligned} \tag{5.7.1316}$$

Dès lors :

$$H(\hat{\vec{\theta}}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{n}{2\hat{\sigma}^4} \end{bmatrix} \tag{5.7.1317}$$

Nous avons aussi :

$$H(\vec{\theta}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & -\dfrac{1}{\sigma^4}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu) \\ -\dfrac{1}{\sigma^4}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu) & \dfrac{n}{2\sigma^4} - \dfrac{1}{\sigma^6}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j-\hat{\mu})^2 \end{bmatrix} \tag{5.7.1318}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[-\frac{n}{\sigma^2}\right] &= -\frac{n}{\sigma^2} \\ \mathrm{E}\left[-\frac{1}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)\right] &= -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}(x_j-\mu) = 0 \\ \mathrm{E}\left[\frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\hat{\mu})^2\right] &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}(x_j-\hat{\mu})^2 = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{n\sigma^2}{\sigma^6} = -\frac{n}{2\sigma^4} \end{aligned} \tag{5.7.1319}$$

Par conséquent, la matrice d'information de Fisher est donnée par :

$$\mathcal{I}(\vec{\theta}) = -\mathrm{E}(H(\vec{\theta})) = \begin{bmatrix} \dfrac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix} \tag{5.7.1320}$$

L'inversion de matrice nous donne aussi (voir section Algèbre Linéaire page 1955) :

$$\Sigma(\vec{\theta}) \cong -\mathrm{E}(H^{-1}) = \frac{1}{\dfrac{n}{\sigma^2}\dfrac{n}{2\sigma^4} - 0\cdot 0}\begin{bmatrix} \dfrac{n}{2\sigma^4} & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{\sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\sigma^4}{n} \end{bmatrix} \quad (5.7.1321)$$

Dès lors :

$$\mathrm{V}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{n} \\ \dfrac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix} \quad (5.7.1322)$$

Rappelons maintenant que lors de notre démonstration du théorème de limite centrale, nous avons prouvé que (page 918) :

$$Z_n = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cong \mathcal{N}(0,1) \quad (5.7.1323)$$

Dès lors :

$$\sqrt{n}\,(\hat{\mu} - \mu) = \mathcal{N}(0,\sigma) \quad (5.7.1324)$$

Maintenant, au lieu de l'estimateur $\hat{\mu}$, considérons l'estimation de la fonction de score (le σ est évidemment le même que la relation précédente) :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\mathcal{S}}_i(\theta) - \mathcal{S}_i(\theta)\right) = \mathcal{N}(0,\sigma) \quad (5.7.1325)$$

Maintenant, nous considérons que la valeur de $\hat{\mathcal{S}}$ valué au point de la vraie valeur de θ (c'est-à-dire θ_0) n'est pas nul car il s'agit d'un estimateur (mais il est cependant probable proche de zéro) ! Mais $\mathcal{S}$ est cependant nul à θ_0. Nous avons alors :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\mathcal{S}}_i(\theta_0) - \mathcal{S}_i(\theta_0)\right) = \sqrt{n}\left(\hat{\mathcal{S}}_i(\theta_0) - 0\right) = \mathcal{N}(0,\sigma) \quad (5.7.1326)$$

Dès lors :

$$\sqrt{n}\hat{\mathcal{S}}_i(\theta_0) = \mathcal{N}(0,\sigma) \quad (5.7.1327)$$

Ou sous forme vectorielle :

$$\sqrt{n}\vec{\hat{\mathcal{S}}}(\theta_0) = \mathcal{N}\left(0,\Sigma(\vec{\hat{\mathcal{S}}})\right) \quad (5.7.1328)$$

Avec explicitement, par construction de la matrice variance-covariance (pour le cas particulier de dimension 2×2 pour simplifier l'exemple) :

$$\Sigma(\vec{\hat{\mathcal{S}}}) = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\hat{\mathcal{S}}_1} & \sigma_{\hat{\mathcal{S}}_1}\sigma^2_{\hat{\mathcal{S}}_2} \\ \sigma_{\hat{\mathcal{S}}_1}\sigma_{\hat{\mathcal{S}}_2} & \sigma^2_{\hat{\mathcal{S}}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}((\hat{\mathcal{S}}_1 - \mathcal{S}_1)^2) & \mathrm{E}((\hat{\mathcal{S}}_1 - \mathcal{S}_1)(\hat{\mathcal{S}}_2 - \mathcal{S}_2)) \\ \mathrm{E}((\hat{\mathcal{S}}_1 - \mathcal{S}_1)(\hat{\mathcal{S}}_2 - \mathcal{S}_2)) & \mathrm{E}((\hat{\mathcal{S}}_2 - \mathcal{S}_2)^2) \end{bmatrix} \quad (5.7.1329)$$

Cependant, estimées au point $\vec{\theta}_0$, les vraies valeurs $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont égales à zéro. La matrice variance-covariance se réduit alors à :

$$\Sigma(\vec{\hat{\mathcal{S}}}) = \begin{bmatrix} \mathrm{E}(\hat{\mathcal{S}}_1^2) & \mathrm{E}(\hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2) \\ \mathrm{E}(\hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2) & \mathrm{E}(\hat{\mathcal{S}}_2^2) \end{bmatrix} = \mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{S}}_1^2 & \hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2 \\ \hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2 & \hat{\mathcal{S}}_2^2 \end{bmatrix}\right) \quad (5.7.1330)$$

En cours de traduction de l' anglais

Ou en explicitant les fonctions de partition :

$$\Sigma(\vec{\hat{\mathcal{S}}}) = \text{E}\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{S}}_1^2 & \hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2 \\ \hat{\mathcal{S}}_1\hat{\mathcal{S}}_2 & \hat{\mathcal{S}}_2^2 \end{bmatrix}\right) = \text{E}\left(\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_1}\right)^2 & \dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_2} \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_1}\dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_2} & \left(\dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial\theta_2}\right)^2 \end{bmatrix}\right) \quad (5.7.1331)$$

Nous reconnaissons ici la matrice d'information Fisher ! Par conséquent :

$$\Sigma(\vec{\hat{\mathcal{S}}}) = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\hat{\mathcal{S}}_1} & \sigma_{\hat{\mathcal{S}}_1}\sigma^2_{\hat{\mathcal{S}}_2} \\ \sigma_{\hat{\mathcal{S}}_1}\sigma_{\hat{\mathcal{S}}_2} & \sigma^2_{\hat{\mathcal{S}}_2} \end{bmatrix} = \mathcal{I}(\vec{\theta}) \quad (5.7.1332)$$

Et donc finalement :

$$\sqrt{n}\vec{\hat{\mathcal{S}}}(\theta_0) = \mathcal{N}(0, \mathcal{I}(\vec{\theta})) \quad (5.7.1333)$$

5.7.8 Facteur de correction sur population finie

Maintenant démontrons un autre résultat qui nous sera indispensables dans certains tests statistiques que nous verrons plus loin.

Supposons que nous avons une population de N individus que nous représentons par l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et une variable aléatoire X qui est donc une application de $\{1, 2, \ldots, N\}$ dans $\mathbb{R}$. Nous posons $x_i = X(i)$. La moyenne de X est alors donnée par :

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad (5.7.1334)$$

Rappelons que la variance de X est par définition :

$$\sigma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \quad (5.7.1335)$$

Considérons à présent l'ensemble E des échantillons equation de taille n pris dans $\{1, 2, \ldots, N\}$ avec $0 < n < N$. Chaque individu a une probabilité d'être tiré égale à :

$$\frac{1}{N}\frac{1}{N-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{N-(n-1)} = \frac{(N-n)!}{N!} \quad (5.7.1336)$$

Nous nous intéressons à la variable aléatoire $\bar{X}$ définie sur E et étant égale à la moyenne de l'échantillon. Plus précisément :

$$\bar{X}(i_1, \ldots, i_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \quad (5.7.1337)$$

Afin de calculer la variance $\text{V}(\bar{X})$, nous allons exprimer $\bar{X}$ comme somme de variables aléatoires. En effet si nous définissons les variables X_k avec $k = 1 \ldots N$ par :

$$X_k(i_1, \ldots, i_n) = \begin{cases} x_k \text{ si } k \in \{i_1, \ldots, i_n\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (5.7.1338)$$

En cours de traduction de l'anglais

(5.7.1339)

Nous avons naturellement (donc de la par la définition précédente) :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} X_k \quad (5.7.1340)$$

et donc il vient :

$$\text{V}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\text{V}(X_k) + \sum_{i \neq j}^{N}\text{cov}(X_i, X_j)\right) \quad (5.7.1341)$$

Les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes deux à deux, en effet comme nous allons le voir, leurs covariances ne sont pas nulles si N est fini. Dans le cas contraire (covariance nulle), nous retrouvons un résultat déjà démontré plus haut :

$$\text{V}(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.7.1342)$$

Il nous faut donc calculer les variances $\text{V}(X)$ et les covariances $\text{cov}(X_i, X_j)$.

Pour ce faire nous allons utiliser la relation de Huygens et nous allons commencer par calculer l'espérance $\text{E}(X_k)$:

$$\text{E}(X_k) = P(X_k = x_k)x_k \quad (5.7.1343)$$

Or $P(X_k = x_k)$ est la probabilité qu'un échantillon contienne k. Cette probabilité vaut bien évidemment n/N et par suite :

$$\text{E}(X_k) = P(X_k = x_k)x_k = \frac{n}{N}x_k \quad (5.7.1344)$$

De la même façon nous obtenons :

$$\text{E}(X_k^2) = P(X_k = x_k)x_k = \frac{n}{N}x_k^2 \quad (5.7.1345)$$

Nous pouvons donc calculer la variance $\text{V}(X_k)$:

$$\text{V}(X_k) = \text{E}(X_k^2) - \text{E}(X_k)^2 = \frac{n}{N}x_k^2 - \left(\frac{n}{N}x_k\right)^2 = \frac{n(N-n)}{N^2}x_k^2 \quad (5.7.1346)$$

Pour calculer les covariances nous avons à présent besoin de calculer les espérances $\text{E}(X_iX_j)$:

$$\text{E}(X_iX_j) = P(X_i = x_i, X_j = x_j)x_ix_j \quad (5.7.1347)$$

Or $P(X_i = x_i, X_j = x_j)$ est la probabilité qu'un échantillon contienne i et j. Cette probabilité vaut bien évidemment :

$$\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1} \quad (5.7.1348)$$

et par suite :

$$\text{E}(X_iX_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}x_ix_j \quad (5.7.1349)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons à présent calculer les covariances :

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \text{E}(X_i X_j) - \text{E}(X_i)\text{E}(X_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} x_i x_j - \frac{n^2}{N^2} x_i x_j = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)} x_i x_j \quad (5.7.1350)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer $\text{V}(\bar{X})$:

$$\text{V}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N} \text{V}(X_k) + \sum_{i \neq j}^{N} \text{cov}(X_i, X_j)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n(N-n)}{N^2}\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}\sum_{i\neq j}^{N} x_i x_j\right) \quad (5.7.1351)$$

En utilisant le théorème de Huygens, nous obtenons :

$$\text{V}(X_k) = \sigma^2 = \text{E}(X_k^2) - \text{E}(X_k)^2 = \text{E}(X_k^2) - \mu^2 = \text{E}(X_k^2) - \mu^2 \Leftrightarrow \sigma^2 + \mu^2 = \text{E}(X_k^2) \quad (5.7.1352)$$

En utilisant le résultat démontré juste plus haut et la relation précédente :

$$\text{E}(X_k^2) = \frac{n}{N} x_k^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad (5.7.1353)$$

Dès lors :

$$x_k^2 = \frac{N}{n}\sigma^2 + \frac{N}{n}\mu^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = \frac{N^2}{n}\left(\sigma^2 + \mu^2\right) \quad (5.7.1354)$$

Pour la double somme $\sum_{i\neq j}^{N} x_i x_j$, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}^{N} x_i x_j &= \sum_{i=1}^{N} x_i(x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i(N\mu - x_i) \\ &= N\mu \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = N\mu N\mu - \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = N^2\mu^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \\ &= N^2\mu^2 - \frac{N^2}{n}\left(\sigma^2 + \mu^2\right)\end{aligned} \quad (5.7.1355)$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\bar{X}) &= \frac{1}{n}\left[\frac{n(N-n)}{N^2}\frac{N^2}{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)-\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}\left(N^2\mu^2-\frac{N^2}{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)\right)\right]\\
&= \frac{1}{n}\left[(N-n)\left(\sigma^2+\mu^2\right)-\frac{n(N-n)}{N-1}\left(\mu^2-\frac{1}{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)\right)\right]\\
&= \frac{1}{n}\left((N-n)\left(\sigma^2+\mu^2\right)-\frac{n(N-n)}{N-1}\mu^2+\frac{N-n}{N-1}\sigma^2+\frac{N-n}{N-1}\mu^2\right)\\
&= \frac{1}{n}\left((N-n)\sigma^2+\frac{N-n}{N-1}\sigma^2+\mu^2\left(\frac{N-n}{N-1}-\frac{n(N-n)}{N-1}+(N-n)\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left((N-n)\sigma^2+\frac{N-n}{N-1}\sigma^2+\mu^2\left(\frac{-nN+n^2+N^2-nN}{N-1}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left((N-n)\sigma^2+\frac{N-n}{N-1}\sigma^2+\mu^2\frac{(N-n)^2}{N-1}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{N(N-n)}{N-1}\sigma^2+\mu^2\frac{(N-n)^2}{N-1}\right)\\
&= ..???.. = \sigma^2\frac{N-n}{n(N-1)}
\end{aligned} \tag{5.7.1356}$$

Ainsi :

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\mathrm{V}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{5.7.1357}$$

Le fameux facteur :

$$\text{fpc} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq 1 \tag{5.7.1358}$$

que nous avons déjà rencontré lors de notre étude la loi hypergéométrique est appelé "facteur de correction sur population finie" et il a pour effet de réduire l'erreur-standard d'autant plus que n est grand.

Si l'échantillon est relativement important (plus de 5% de la population), il est parfois d'usage d'utiliser ce facteur de correction.

Dans la science des Sondages, nous pouvons conclure que pour "l'échantillon aléatoire sans remplacement (EASR)" et pour "l'échantillon aléatoire avec remplacement (EAAR)", la moyenne est presque toujours donnée par :

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5.7.1359}$$

mais pour l'écart type :

$$\hat{\sigma}_{\text{EASR}} = \sqrt{\mathrm{V}(\bar{X}_n)} = \frac{\sigma_N^2}{\sqrt{n}} \qquad \hat{\sigma}_{\text{EAAR}} = \sqrt{\mathrm{V}(\bar{X}_n)} = \frac{\sigma_N^2}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{5.7.1360}$$

En cours de traduction de l' anglais

5.7.9 Intervalles de Confiance (inférence)

Jusqu'à présent, nous avons toujours déterminé les estimateurs de vraisemblance ou estimateurs simples (variance, écart-type) à partir de distributions statistiques théoriques ou mesures sur une population entière de données. Mais maintenant que nous avons couvert les statistiques descriptives, les probabilités et les bases de l'échantillonnage, nous sommes prêts à faire de "l'inférence fréquentiste" et de "inférence bayésienne" à partir de notre échantillon de données pour notre population d'intérêt.

Dans l'inférence fréquentiste statistique, nous prenons ce que nous savons de l'échantillon, appliquons la théorie sous-jacente de l'échantillonnage (théorème central limite) pour faire des déclarations sur notre population d'intérêt. Nous faisons des estimations sur la population en utilisant les données de l'échantillon. Les estimations peuvent être des estimations ponctuelles ou des estimations d'intervalle. Dans l'inférence statistique bayésienne, nous prenons la connaissance vraisemblable que nous avons sur les données et les a priori sur certains paramètres pour inférer une distribution postérieure ayant de nouveaux "hyperparamètres".

quote 5.7:834.#38

> *Être statisticien, c'est ne jamais avoir à dire que l'on est certain !*
>
> ?

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.1 Inférence Fréquentiste

Définition (#5.7.135) : Un "intervalle de confiance" (I.C.) dans l'inférence fréquentiste est une paire de nombres (dans le cas univarié) qui définit (a priori) la plage de valeurs possibles avec une certaine probabilité cumulée de la distribution d'un estimateur donné à partir d'un échantillon d'une expérience (la plage de l'indicateur statistique étant généralement calculée à l'aide de paramètres réels mesurés). En d'autres termes, l'I.C. est une collection d'intervalles avec un pourcentage donné (probabilité) d'entre eux contenant le vrai paramètre !

Formellement, soit y un échantillon aléatoire issu d'une distribution de probabilité régie par un paramètre d'intérêt θ et des quantités sans intérêt φ. Un intervalle de confiance pour θ est défini comme un intervalle $[u(y), v(y)]$ déterminé par les variables aléatoires $u(y)$ et $v(y)$ avec la propriété :

$$P(u(y) < \theta < v(y) \mid \theta, \varphi) = \gamma \qquad \forall(\theta, \varphi) \tag{5.7.1361}$$

où $\gamma = 1 - \alpha$ est le niveau de confiance.

Remarque

L'intervalle de confiance est souvent confondu avec "l'intervalle de crédibilité bayésien" qui est un intervalle dans lequel une valeur de paramètre non observée tombe avec une probabilité particulière. Il s'agit d'un intervalle dans le domaine d'une distribution de probabilité postérieure ou d'une distribution prédictive (la généralisation aux problèmes multivariés est la "région crédible").

Les auteurs d'ouvrages de référence et les partisans des intervalles de confiance comblent l'écart de manière transparente en affirmant que les intervalles de confiance ont trois propriétés souhaitables : premièrement, que le coefficient de confiance peut être lu comme une mesure de l'incertitude que l'on devrait avoir pour que l'intervalle contient le paramètre ; deuxièmement, la largeur de l'I.C. est une mesure de l'incertitude d'estimation ; et troisièmement, que l'intervalle contient les valeurs "probables" ou "raisonnables" du paramètre. Tout cela implique un raisonnement sur le paramètre à partir des données observées : c'est-à-dire qu'il s'agit d'inférences "post-données".

Ces interprétations des intervalles de confiance ne sont pas correctes. Nous appelons l'erreur que ces auteurs commettent le "l'Erreur de Confiance Fondamentale" (ECF) car elle semble découler naturellement de la définition de l'intervalle de confiance (voir [350]).

Le raisonnement derrière l'erreur de confiance fondamentale semble plausible : sur un échantillon donné, nous pourrions obtenir l'un des intervalles de confiance possibles. Si 95% des intervalles de confiance possibles contiennent la vraie valeur, sans aucune autre information, il semble raisonnable de dire que nous avons 95% de certitude que nous avons obtenu l'un des intervalles de confiance qui contiennent la vraie valeur. Cette interprétation est suggérée par le nom "d'intervalle de confiance" lui-même : le mot "confiant", en usage profane, est étroitement lié aux concepts de plausibilité et de croyance. Le nom "intervalle de confiance" - plutôt que, par exemple, l'expression "procédure de couverture" plus précise - encourage l'Erreur de Confiance Fondamentale.

Donc, si les intervalles de confiance de deux paramètres ne se chevauchent, vous ne pouvez pas conclure que ces paramètres ne sont pas significativement différents l'un de l'autre ! Et c'est parce que si vous construisez cent intervalles de confiance à 95%, alors environ 95 de ces intervalles contiendront la valeur de la population (vous devez toujours garder à l'esprit que vous travaillez avec des objets statistiques ! ! ! !). Les valeurs spécifiques d'un intervalle de confiance calculé ne doivent donc pas être rigoureusement interprétées directement !

En bref, voici ce dont vous devez vous souvenir lorsque vous comparez deux intervalles de confiance :

1. Lorsque deux intervalles de confiance d'un paramètre donné ne se chevauchent pas, la différence entre les deux paramètres sera significative.

2. Lorsque deux intervalles de confiance d'un paramètre donné se chevauchent, la différence entre les deux paramètres peut être significative ou non significative.

Gardez bien à l'esprit par exemple lorsque le paramètre est la moyenne, que les erreurs-types de moyennes ne sont pas les mêmes que les erreurs-types de différences de moyennes !

En cours de traduction de l'anglais

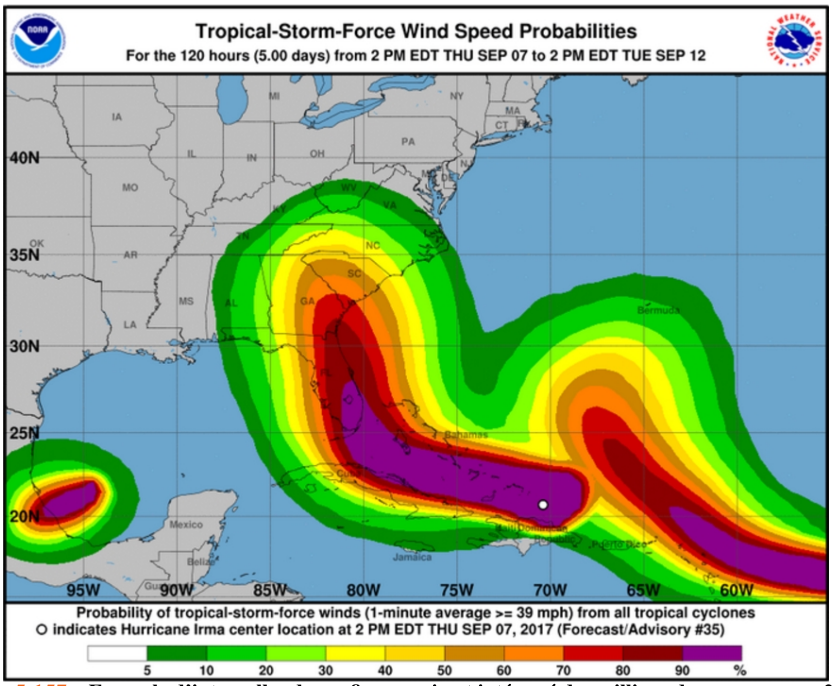


FIG. 5.157 – Exemple d'intervalles de confiance qui ont intéressé des millions de personnes en 2017

Nous passons maintenant à la tâche qui consiste naturellement à nous demander quelle doit être la taille des échantillons de nos données mesurées pour avoir une certaine validité pour nos estimateurs ou même à quel intervalle de confiance correspond un certain écart-type ou un quantile donné dans une distribution Normale réduite centrée (pour grands échantillons), dans une distribution du khi-deux, une distribution de Student ou une distribution de Fisher (nous verrons les deux derniers cas de petits échantillons plus loin lors de notre étude de l'analyse de variance, ie ANOVA) lorsque la moyenne ou la variance sont respectivement connus ou inconnus sur tout ou partie de la population donnée.

Il est important de savoir que ces intervalles de confiance utilisent souvent le théorème de la limite centrale qui sera démontré plus loin (pour éviter toute frustration possible) et les développements que nous allons faire maintenant sont également utiles dans le domaine des tests d'hypothèses (a posteriori) qui ont un rôle majeur en statistique et donc indirectement dans tous les domaines scientifiques ! ! !

Enfin, il pourrait être utile d'indiquer qu'un grand nombre d'organisations (privées ou institutionnelles) font de fausses statistiques car les hypothèses et conditions d'utilisation de ces intervalles de confiance (verbatim des tests d'hypothèses sous-jacents) ne sont pas rigoureusement vérifiées ou simplement omises ou pire, toute la base (les mesures) n'est pas collectée dans les règles de l'art (fiabilité des protocoles de collecte et de reproductibilité des données non validée par des pairs scientifiques).

Le lecteur doit également savoir que nous avons mis de nombreuses autres techniques d'intervalle de confiance, avec leurs preuves détaillées, relatives par exemple aux techniques de régression dans la section de Méthodes Numériques théorique **??**.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le praticien doit faire très attention au calcul des intervalles de confiance et à l'utilisation des tests d'hypothèse dans la pratique. C'est pourquoi, pour éviter toute erreur d'utilisation ou erreur d'interprétation, il est important de se référer aux normes internationales suivantes, par exemple : ISO 2602 :1980 (*Interprétation statistique des résultats des tests - Estimation de la moyenne - Intervalle de confiance*), ISO 2854 :1976 (*Interprétation statistique des données - Techniques d'estimation et tests relatifs aux moyennes et variances*), ISO 3301 :1975 (*Interprétation statistique des données - Comparaison de deux moyennes dans le cas d'observations appariées*), ISO 3494 :1976 (*Interprétation statistique des données - Efficacité des tests relatifs aux moyennes et aux variances*), ISO 5479 :1997 (*Interprétation statistique des données - Tests pour écarts à la distribution Normale*), ISO 10725 :2000 + ISO 11648-1 :2003 + ISO 11648-2 :2001 (*Plans d'échantillonnage et procédures d'acceptation pour le contrôle des matières en vrac*), ISO 11453 :1996 (*Interprétation statistique des données - Essais et intervalles de confiance relatives aux proportions*), ISO 16269-4 :2010 (*Interprétation statistique des données - Détection et traitement des valeurs aberrantes*), ISO 16269-6 :2005 (*Interprétation statistique des données - Détermination des intervalles de tolérance statistique*), ISO 16269-8 : 2004 (*Interprétation statistique des données - Détermination des intervalles de prédiction*), ISO / TR 18532 :2009 (*Lignes directrices pour l'application de la qualité statistique et des normes industrielles*).

Attention ! Le lecteur ne doit pas s'attendre à trouver dans ce livre une dérivation détaillée des près de 500 tests d'hypothèses paramétriques, non-paramétriques et bayésiens et de leurs intervalles de confiance respectifs ! Il faudrait des dizaines de milliers de pages pour faire un tel travail. Cependant nous fournissons dans la section des Méthodes Numériques à la page **??**, une liste exhaustive de tous ces types de tests et même une illustration (voir page **??**) les catégorisant par famille (il peut y avoir des erreurs de catégorisation !).

5.7.9.1.1 I.C. sur la Moyenne avec Variance théorique connue

Commençons par le cas le plus simple et le plus courant qui est la détermination du nombre d'individus pour avoir une certaine confiance dans la moyenne des mesures d'une variable aléatoire supposée suivre une distribution Normale.

D'abord rappelons que nous avons démontré au début de ce chapitre que l'erreur-type (écart-type à la moyenne) était sous l'hypothèses de variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1362}$$

Maintenant, avant d'aller plus loin, considérons X comme une variable aléatoire suivant une loi Normale de moyenne equation et d'écart-type σ. Nous souhaiterions que la variable aléatoire ait par exemple 95% de probabilité cumulée de se trouver dans un intervalle symétrique borné

donné. Ce qui s'exprime donc sous la forme suivante :

$$P(\mu-\delta \leqslant X \leqslant \mu+\delta)=0.95 \tag{5.7.1363}$$

Remarque

Donc avec un intervalle de confiance de 95% vous aurez raison 19 fois sur 20, ou n'importe quel autre niveau de confiance ou niveau de risque α (1-niveau de confiance, soit 5%) que vous vous serez fixé à l'avance. En moyenne, vos conclusions seront donc bonnes, mais nous ne pourrons jamais savoir si une décision particulière est bonne ! Si le niveau de risque est très faible mais que l'événement a quand même lieu, les spécialistes parlent alors de "grande déviation" ou de "black swan" (cygne noir). La gestion des valeurs aberrantes est traitée dans la norme ISO 16269-4 :2010 *Détection et traitement des valeurs aberrantes* que tout ingénieur faisant des statistiques en entreprise se doit de respecter.

En centrant et réduisant la variable aléatoire :

$$P\left(-\frac{\delta}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{\delta}{\sigma}\right)=0.95 \tag{5.7.1364}$$

Notons maintenant Y la variable centrée réduite :

$$P\left(-\frac{\delta}{\sigma} \leqslant Y\right)-P\left(Y \geqslant \frac{\delta}{\sigma}\right)=0.95 \tag{5.7.1365}$$

Puisque la loi Normale centrée réduite est symétrique :

$$1-2P\left(Y \geqslant \frac{\delta}{\sigma}\right)=0.95 \tag{5.7.1366}$$

D'où :

$$P\left(Y \geqslant \frac{\delta}{\sigma}\right)=0.025 \tag{5.7.1367}$$

À partir de là en lisant dans les tables numériques de la loi Normale centrée réduite (ou en utilisant un simple tableur), nous avons pour satisfaire cette égalité que :

$$\frac{\delta}{\sigma} \cong 1.96 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \cong 1.96\sigma \tag{5.7.1368}$$

WCe qui s'obtient facilement avec la version anglaise de Microsoft Excel 11.8346 en utilisant la fonction :

```
=-NORMSINV((1-0.95)/2)
```

Ce qui est noté de façon traditionnelle dans le cas général autre que 95% par (Z étant la variable aléatoire correspondant donc à la moitié du quantile du seuil fixé de la loi Normale centrée réduite) :

$$\delta \cong Z\sigma \tag{5.7.1369}$$

En cours de traduction de l' anglais

Or, considérons que la variable X sur laquelle nous souhaitons faire de l'inférence statistique est justement la moyenne (et nous démontrerons plus loin que celle-ci suit une loi Normale centrée réduite). Dès lors :

$$\delta \cong Z\sigma = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1370}$$

Nous en tirons la taille de l'échantillon :

$$n \cong \frac{Z^2\sigma^2}{\delta^2} \tag{5.7.1371}$$

dont nous prenons évidemment (normalement...) la valeur entière supérieure...

Cette dernière notation est plus souvent écrite sous la forme suivante mettant mieux en évidence la largeur de l'intervalle de confiance à un niveau α sous-jacent :

$$\boxed{n \cong \left\lceil \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\delta}\right)^2 \right\rceil} \tag{5.7.1372}$$

Relation appelée "effectif de l'échantillon pour estimation par loi Normale".

Remarque

Calculer une taille d'échantillon appropriée pour un essai clinique typique revient à marcher sur le fil du rasoir pour le statisticien : si la taille d'échantillon est trop faible alors l'étude risque de ne pas pouvoir détecter une différence entre le groupe de traitement et le groupe contrôle, si la taille d'échantillon est trop grande alors l'étude risque d'avoir un effet de "suréchantillonnage" de l'étude qui peut conduire à plusieurs problèmes théoriques (p-hacking) qui pourraient empêcher l'étude d'être aussi efficace ou interprétable, et potentiellement devenir contraire à l'éthique.

Ainsi, nous pouvons maintenant savoir le nombre d'individus à avoir pour s'assurer un intervalle de précision δ (marge d'erreur) autour de la moyenne et pour qu'un pourcentage donné des mesures se trouvent dans cet intervalle et en supposant l'écart-type théorique σ connu (ou imposé) d'avance (typiquement utilisé dans l'ingénierie de la qualité ou les instituts de sondages/enquêtes).

Dans le cas des sondages/enequêtes où la population n'est pass assez grande pour considéréer que nous avons un échantillonnage avec remise, nous parlons devons alors introduire la facteur fcp que nous avons démontré plus haut (nous parlons alors dans PSSR pour "plan de sondage sans remise"). Il vient alors en prenant l'approximation de fcp :

$$\begin{aligned}
n &\cong \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sqrt{1-\dfrac{n}{N}}\sigma}{\delta}\right)^2 = \frac{Z_{\alpha/2}^2\left(1-\dfrac{n}{N}\right)\sigma^2}{\delta^2} \\
\Rightarrow n\left(1+\frac{Z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{N}\right) &\cong \frac{Z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{\delta^2} \\
\Rightarrow n &\cong \frac{Z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{\delta^2\left(1+\dfrac{Z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{N}\right)} = \frac{NZ_{\alpha/2}^2\sigma^2}{\delta^2 N + Z_{\alpha/2}^2\sigma^2}
\end{aligned} \tag{5.7.1373}$$

En cours de ... anglais

Autrement dit, nous pouvons calculer le nombre n d'individus à mesurer pour s'assurer un intervalle de confiance donné (associé au quantile Z) de la moyenne mesurée en supposant l'écart-type théorique connu (ou imposé) et en souhaitant un précision de δ en valeur absolue sur la moyenne.

Cependant... en réalité, la variable Z provient du théorème central limite (voir plus bas) qui donne pour un échantillon de grande taille (approximativement) :

$$Z = Z_n = \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (5.7.1374)$$

En réarrangeant nous obtenons :

$$\mu = \bar{X} - Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.1375)$$

et comme Z peut être négatif ou positif alors il est plus censé d'écrire cela sous la forme :

$$\mu = \bar{X} \pm Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.1376)$$

Soit :

$$\bar{X} - Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.1377)$$

que les ingénieurs notent parfois :

$$\text{LCL} \leqslant \mu \leqslant \text{UCL} \qquad (5.7.1378)$$

avec LCL étant la lower confidence limit et UCL la upper confidence limit. C'est de la terminologie Six Sigma (voir section de Génie Industriel **??**).

Et nous venons de voir plus avant que pour avoir un intervalle de confiance à 95% nous devrions avoir $Z = 1.96$. Et puisque la loi Normale est symétrique :

$$95\% = 1 - 5\% = 1 - \alpha = 1 - 2 \cdot 2.5\% = 1 - 2 \cdot 0.025 \qquad (5.7.1379)$$

Nous écrivons finalement le "test Z à un échantillon" :

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.1380)$$

où nous définissons pour tous les tests ayant le même type de structure, la "marge d'erreur" par :

$$\text{ME} = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.1381)$$

Si les éléments échantillonnés ne sont pas indépendants alors il faut bien évidemment écrire :

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{fpc} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{fpc} \qquad (5.7.1382)$$

En cours de traduction de l' anglais

où pour rappel comme prouvé précédemment :

$$\text{fpc} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{5.7.1383}$$

est le facteur de correction de la population finie.

Comme nous l'avons déjà mentionné, et nous le démontrerons un peu plus loin, la moyenne arithmétique centrée réduite d'une séries de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de variance fini suit asymptotiquement une loi Normale centrée réduite, alors l'intervalle de confiance ci-dessus a une portée très générale ! Raison pour laquelle nous parlons parfois de "d'intervalle de confiance asymptotique de la moyenne".

Ces intervalles ont évidemment pour origine que nous travaillons très souvent en statistiques sur des échantillons et non sur toute la population disponible. L'échantillonnage choisi influe donc sur l'estimateur ponctuel. Nous parlons alors de "fluctuation d'échantillonnage".

Dans le cas particulier d'un I.C. (intervalle de confiance) à 95%, la dernière relation s'écrit :

$$\bar{X} - Z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + Z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1384}$$

Parfois nous retrouvons l'inégalité antéprécédente sous la forme équivalente suivante :

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}} \tag{5.7.1385}$$

ou encore plus rarement sous la forme générale suivante (que l'on retrouve pour toutes les intervalles) :

$$\bar{X} - \text{ME} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + \text{ME} \tag{5.7.1386}$$

où ME signifie "margin of error".

Nous sommes ainsi capables maintenant d'estimer des tailles de population nécessaires à obtenir un certain niveau de confiance α dans un résultat, soit d'estimer dans quel intervalle de confiance se trouve la moyenne théorique en connaissant la moyenne expérimentale (empirique) et l'estimateur du maximum de vraisemblance de l'écart-type. Nous pouvons bien évidemment dès lors aussi déterminer la probabilité avec laquelle la moyenne est en dehors d'un certain intervalle... (l'un comme l'autre étant beaucoup utilisés dans l'industrie).

Enfin, signalons que du résultat précédent, nous déduisons immédiatement par la propriété de stabilité de la loi Normale (démontrée plus haut) le test suivant que nous retrouvons dans de très nombreux logiciels de statistiques :

$$Z^{\text{calc.}} = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \tag{5.7.1387}$$

appelé ""test Z bilatéral sur la différence de deux moyennes, aussi parfois nommé "test Z à deux échantillons", avec l'intervalle de confiance correspondant :

$$(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \leq \mu_2 - \mu_1 \leq (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \tag{5.7.1388}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et ce n'est pas parce que deux moyennes sont significativement différentes que leurs intervalles de tolérance ne se superposent pas ! Comme le montre le graphique ci-dessous obtenu avec le logiciel Minitab 16 où le test-Z de la différence est significative à 95% :

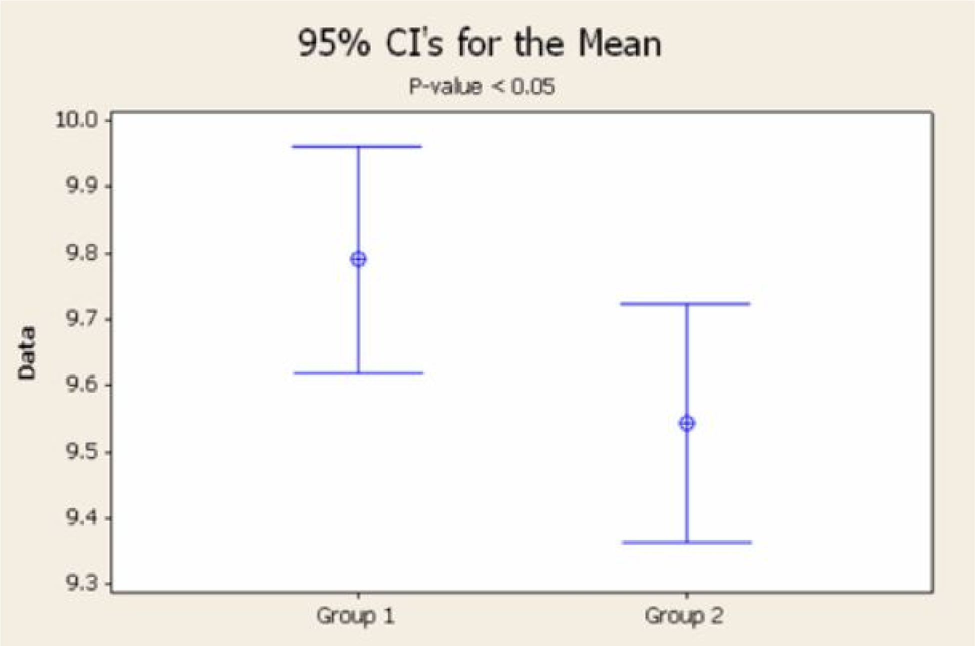


FIG. 5.158 – **Illustration de la superposition d'intervalle de confiance à 95% (source : Minitab 15)**

alors que leur moyenne est significativement différente à un seuil de confiance de 95%.

Notez également que de nombreuses personnes (en particulier les non scientifiques) ne comprennent pas pourquoi une "différence moyenne pratique" n'est pas la même chose qu'une "différence statistique moyenne". Mais la raison est évidente ! Le premier n'implique pas la variance et le second le fait ! D'où le fait que le second est plus rigoureux ! ! !

Remarque

La taille de la population mère pour les relations développées plus haut n'entre pas en ligne de compte dans le calcul des intervalles de confiance ni dans celui de la taille de l'échantillon, et pour cause, elle est considérée infinie. Il faut donc faire attention à ne pas avoir parfois des tailles d'échantillons qui sont plus grandes que la population mère réelle possible...

5.7.9.1.2 I.C. sur la Variance avec Moyenne théorique connue

Commençons par démontrer une propriété fondamentale de la loi du Khi-deux :

Si une variable aléatoire X suit une loi Normale centrée réduite $X = \mathcal{N}(0,1)$ alors son carré suit une loi du Khi-deux de degré de liberté 1 :

$$X^2 = \chi^2(1) \tag{5.7.1389}$$

Ce résultat est parfois appelé "statistique de Wald" et tout test statistique l'utilisant directement (on devrait plutôt parler de "famille de tests") peut être rangé sous la dénomination de "test de

Erreurs de traduction anglais

Wald" (pour un exemple concret voir plus bas le test de Cochran–Mantel–Haenszel à la page 1263).

Démonstration 5.45.9. Pour démontrer cette propriété, il suffit de calculer la densité de la variable aléatoire X^2 avec $X = \mathcal{N}(0,1)$. Or, si $X = \mathcal{N}(0,1)$ et si nous posons $Y = X^2$, alors pour tout $y \geq 0$ nous obtenons :

$$P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant Y \leqslant \sqrt{y}) \tag{5.7.1390}$$

Puisque la loi Normale centrée réduite est symétrique par rapport à 0 pour la variable aléatoire X, nous pouvons écrire :

$$P(Y \leqslant y) = 2P(0 \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \tag{5.7.1391}$$

En notant Φ la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite (sa probabilité cumulée en d'autres termes pour rappel...), nous avons :

$$P(Y \leqslant y) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 2 \cdot 0.5 = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \tag{5.7.1392}$$

et comme :

$$\Phi(0) = P(\mathcal{N}(0,1) \leq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-k/2} \mathrm{d}k = 0.5 \tag{5.7.1393}$$

alors :

$$P(Y \leq y) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 2 \cdot 0.5 = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \tag{5.7.1394}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire (probabilité cumulée) $Y = X^2$ est donc donnée par :

$$P(Y \leq y) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \tag{5.7.1395}$$

si y est supérieur ou égal à zéro, nulle si y inférieur à zéro. Nous noterons cette répartition $f_Y(y)$ pour la suite des calculs.

Puisque la fonction de distribution est la dérivée de la fonction de répartition et que X suit une loi Normale centrée réduite alors nous avons pour la variable aléatoire X :

$$P(X = x) = \Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{5.7.1396}$$

et il s'ensuit pour la loi de distribution de Y (qui est donc le carré de X pour rappel !) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(2\Phi(\sqrt{y}) - 1) = 2\Phi'(\sqrt{y}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\Phi'(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} \tag{5.7.1397}$$

cette dernière expression correspond exactement à la relation que nous avions obtenue lors de notre étude de la loi du Khi-deux en imposant un degré de liberté unité.

Le théorème est donc bien démontré, à savoir que si X suit une loi Normale centrée réduite alors son carré suit une loi du Khi-deux à 1 degré de liberté tel que :

$$\boxed{\left(X_{\mathcal{N}(0,1)}\right)^2 = \chi^2(1)} \tag{5.7.1398}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

Ce type de relation est utilisé dans les processus industriels et leur contrôle (voir section de Génie Industriel page ??).

Ouvrons maintenant une parenthèse qui est assez importante dans certains rapports de régression linéaire donnés par certains logiciels de statistiques et en particulier dans le test de courbure de Fisher dans le domaine des Plans d'Expérience (voir section Génie Industriel page ??). Rappelons que nous avons :

$$T_n = \frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\chi_n^2/n}} \tag{5.7.1399}$$

Et nous venons de prouver ci-dessus que :

$$Z^2 = \frac{\chi_1^2}{1} \tag{5.7.1400}$$

Dès lors :

$$T_n = \frac{\sqrt{\chi_1^2/1}}{\sqrt{\chi_n^2/n}} = \sqrt{\frac{\chi_2^1/1}{\chi_n^2/n}} \tag{5.7.1401}$$

Et comme nous l'avons également vu

$$F_{n,m} = \frac{\sqrt{\chi_n^2/n}}{\sqrt{\chi_m^2/m}} \tag{5.7.1402}$$

il s'ensuit que :

$$T_n = \sqrt{F_{1,n}} \tag{5.7.1403}$$

ou plus couramment dans la pratique :

$$\boxed{T_n^2 = F_{1,n}} \tag{5.7.1404}$$

Nous allons maintenant utiliser un résultat démontré lors de notre étude de la loi Gamma. Nous avons effectivement vu plus haut que la somme de deux variables aléatoires suivant une loi Gamma suit aussi une loi Gamma dont les paramètres s'additionnent :

$$X + Y = \gamma(p+q,\lambda) \tag{5.7.1405}$$

Comme la loi du Khi-deux n'est qu'un cas particulier de la loi Gamma, le même résultat s'applique.

Pour être plus précis, cela revient à dire : Si $X_1,\ldots,X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes (!) et identiquement distribuées $\mathcal{N}(0,1)$ alors par extension de la démonstration précédente où nous avons montré que :

$$\left(X_{\mathcal{N}(0,1)}\right)^2 = \chi^2(1) \tag{5.7.1406}$$

En cours de traduction de l'anglais

et de la propriété d'addition de la loi Gamma, la somme de leurs carrés suit alors une loi du Khi-deux de degrés de liberté k telle que :

$$\chi^2(k) = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2 \tag{5.7.1407}$$

Ainsi, la loi du χ^2 à k degrés de liberté est la loi de probabilité de la somme des carrés de k variables normales centrées réduites linéairement indépendantes entre elles. Il s'agit de la propriété de linéarité de la loi du Khi-deux (implicitement de la linéarité de la loi Gamma) !

Maintenant voyons une autre propriété importante de la loi du Khi-deux : Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (donc de même moyenne et même écart-type et suivant une loi Normale) et si nous notons l'estimateur du maximum de vraisemblance de la variance :

$$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \tag{5.7.1408}$$

alors, le rapport de la variable aléatoire S_*^2 sur l'écart-type supposé connu de l'ensemble de la population (dit "écart-type vrai" ou "écart-type théorique" pour bien différencier !) multiplié par le nombre d'individus n de la population suit une loi du Khi-deux de degré n telle que :

$$\chi^2(n) = \chi_n^2 = \frac{nS_*^2}{\sigma^2} \tag{5.7.1409}$$

Ce résultat est appelé "théorème de Cochran" ou encore "théorème de Fisher-Cochran" (dans le cas particulier d'échantillons gaussiens) et nous donne donc une distribution pour les écarts-types empiriques (dont la loi parente est une loi Normale).

En utilisant la valeur de l'écart-type démontrée lors de notre étude da la loi du khi-deux nous avons donc :

$$\mathrm{V}\left(\frac{nS_*^2}{\sigma^2}\right) = \mathrm{V}(\chi^2(n)) = 2n \tag{5.7.1410}$$

Mais n et σ sont imposés et sont donc considérés comme des constantes. Il vient alors :

$$\frac{n^2}{\sigma^4}\mathrm{V}(S_*^2) = \mathrm{V}(\chi^2(n)) = 2n \Rightarrow \mathrm{V}(S_*^2) = \sigma_{S_*^2} = \sigma^4\frac{2}{n} \tag{5.7.1411}$$

Et dès lors nous avons une expression de l'écart-type de l'écart-type empirique si nous connaissons l'écart-type de la population :

$$\sigma_{S_*} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}} \tag{5.7.1412}$$

Mais nous avons démontré lors de notre étude des estimateurs que :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma \tag{5.7.1413}$$

Dès lors il vient que :

$$\hat{\sigma}_{S_*} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma_{S_*^2} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2}}\sigma^2 \tag{5.7.1414}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il en découle donc la relation parfois importante dans la pratique de l'estimateur de l'écart-type de.... l'écart-type :

$$\hat{\sigma}_{S_*} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2}}\sigma^2 \quad (5.7.1415)$$

Rappelons que la population parente est dite "infinie" si le tirage de l'échantillon est avec remise ou encore si la taille N de la population parente est très supérieure à celle de n de l'échantillon.

Remarques

R1. En laboratoire, les $X_1, \ldots, X_n$ peuvent être vus comme une classe d'individus d'un même produit étudié identiquement par différentes équipes de recherche avec des instruments de même précision (écart-type de mesure identique).

R2. S_*^2 est la "variance interclasse" également appelée "variance expliquée". Donc elle donne la variance d'une mesure ayant eu lieu dans les différents laboratoires.

Ce qui est intéressant c'est qu'à partir du calcul de la loi du Khi-deux en connaissant n et l'écart-type σ^2 il est possible d'estimer cette variance (écart-type) interclasse.

Pour voir que cette dernière propriété est une généralisation élémentaire de la relation :

$$\chi^2(n) = X_1^1 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \quad (5.7.1416)$$

il suffit de constater que la variable aléatoire nS_*^2/σ^2 est une somme de n carrés de $\mathcal{N}(0,1)$ indépendants les uns des autres. Effectivement, rappelons qu'une variable aléatoire centrée réduite (voir notre étude de la loi Normale) est donnée par :

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad (5.7.1417)$$

Dès lors :

$$\frac{nS_*^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \quad (5.7.1418)$$

Or, puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Normale, alors les variables aléatoires :

$$\frac{X_1-\mu}{\sigma}, \ldots, \frac{X_n-\mu}{\sigma} \quad (5.7.1419)$$

sont aussi indépendantes et identiquement distribuées mais selon une loi Normale centrée réduite.

Puisque :

$$\frac{nS_*^2}{\sigma^2} = \chi^2(n) \quad (5.7.1420)$$

en réarrangeant nous obtenons :

$$\sigma^2 = \frac{nS_*^2}{\chi^2(n)} \quad (5.7.1421)$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc sur la population de mesures, l'écart-type vrai suit la relation donnée ci-dessus. Il est donc possible de faire de l'inférence statistique sur l'écart-type lorsque la moyenne théorique est connue (...).

Puisque la fonction du Khi-deux n'est pas symétrique, la seule possibilité pour faire l'inférence c'est de faire appel au calcul numérique et nous noterons alors l'intervalle de confiance à 95% (par exemple...) de la manière suivante :

$$\frac{nS_*^2}{\chi^2_{2.5\%}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nS_*^2}{\chi^2_{97.5\%}(n)} \qquad (5.7.1422)$$

Soit en notant $95\% = 1-\alpha$:

$$\boxed{\frac{nS_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nS_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}} \qquad (5.7.1423)$$

le dénominateur étant alors bien évidemment le quantile de la loi du khi-2. Cette relation est rarement utilisée dans la pratique car la moyenne théorique n'est pas connue. Indiquons, aussi, qu'afin d'éviter toute confusion, cette dernière relation est souvent notée sous la forme suivante :

$$\frac{nS_*^2}{\chi^2_{\alpha/2,n}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nS_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}} \qquad (5.7.1424)$$

Voyons donc le cas le plus courant :

5.7.9.1.3 I.C. sur la Variance avec Moyenne empirique connue

Cherchons maintenant à faire de l'inférence statistique lorsque la moyenne théorique de la population μ n'est pas connue. Pour cela, considérons maintenant la somme :

$$\chi^2(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\bar{X})+(\bar{X}-\mu)\right)^2 \qquad (5.7.1425)$$

où pour rappel $\bar{X}$ est la moyenne empirique (arithmétique) de l'échantillon :

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad (5.7.1426)$$

En continuant le développement nous avons :

$$\chi^2(n)=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})+n(\bar{X}-\mu)^2\right] \qquad (5.7.1427)$$

Or, nous avons démontré au début de ce chapitre que la somme des écarts à la moyenne était nulle. Donc :

$$\begin{aligned}\chi^2(n)&=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+2(\bar{X}-\mu)\cdot 0+n(\bar{X}-\mu)^2\right]\\&=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu)^2\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma^2/\sqrt{n}}\right)^2\end{aligned} \qquad (5.7.1428)$$

En cours de traduction de l'anglais

et reprenons l'estimateur sans biais de la loi Normale (nous changeons de notation pour respecter les traditions et bien différencier la moyenne empirique de la moyenne théorique) :

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \tag{5.7.1429}$$

Dès lors :

$$\chi^2(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma^2/\sqrt{n}}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma^2/\sqrt{n}}\right)^2 \tag{5.7.1430}$$

ou autrement écrit :

$$\chi^2(n)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}+\left(\frac{M_n-\mu}{\sigma^2/\sqrt{n}}\right)^2 \tag{5.7.1431}$$

Puisque le deuxième terme (au carré) suit une loi Normale centrée réduite aussi, alors si nous le supprimons nous obtenons de par la propriété démontrée plus haut de la loi du Khi-deux :

$$\chi^2(n-1)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \tag{5.7.1432}$$

Ces développements nous permettent cette fois-ci de faire aussi de l'inférence sur la variance d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque les paramètres μ et σ sont tous les deux inconnus pour l'ensemble de la population. C'est ce résultat qui nous donne, par exemple, l'intervalle de confiance :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \tag{5.7.1433}$$

lorsque la moyenne théorique μ est donc inconnue. Et à aussi, pour éviter tout confusion, il est plutôt d'usage d'écrire :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \tag{5.7.1434}$$

De la même manière que plus haut, nous pouvons calculer l'écart-type de l'écart-type et qui a une grande importance dans la pratique de la finance :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\mathrm{V}(\chi^2_{n-1}\\
&\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}\mathrm{V}(S^2)=2(n-1)\\
&\mathrm{V}(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}\\
&\sigma_{S^2}=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\sigma^2
\end{aligned} \tag{5.7.1435}$$

En cours de traduction de l' anglais

5.7.9.1.4 I.C. sur la Moyenne avec Variance empirique connue

Nous avons démontré beaucoup plus haut que la loi de Student provenait de la relation suivante :

$$T(k)=\frac{Z}{\sqrt{U/k}} \tag{5.7.1436}$$

si Z et U sont des variables aléatoires indépendantes et si Z suit une loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et U une loi du Khi-deux $\chi^2(k)$ tel que :

$$f_T(t)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{k\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\dfrac{k+1}{2}} \tag{5.7.1437}$$

et rappelons que la fonction de densité (distribution) est symétrique !

Voici une application très importante du résultat ci-dessus :

Supposons que $X_1,\ldots,X_n$ constituent un échantillon aléatoire de taille n issu de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$. Alors nous pouvons déjà écrire que selon les développements faits plus haut :

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{5.7.1438}$$

Et pour U qui suit une loi $\chi^2(k)$, si nous posons equation alors selon les résultats obtenus plus haut :

$$U=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\chi^2(n-1) \tag{5.7.1439}$$

Nous avons alors après quelques simplifications triviales :

$$\frac{Z}{\sqrt{U/k}}=\frac{\dfrac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}}=\frac{\dfrac{X-\mu}{1/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{(n-1)}}}=\frac{\dfrac{X-\mu}{1/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2}}=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \tag{5.7.1440}$$

Donc puisque :

$$T(k)=\frac{Z}{\sqrt{U/k}} \tag{5.7.1441}$$

suit une loi de Student de paramètre k alors nous obtenons le "independent one-sample t-test" (en anglais) ou "test-T à 1 échantillon" :

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=T(n-1)} \tag{5.7.1442}$$

qui suit aussi une loi de Student de paramètre $n-1$ et qui est très utilisé dans les laboratoires pour les tests d'étalonnages[36].

[36]L'ingénieur ne doit pas oublier qu'un instrument calibré, ne veut pas dire qu'il mesure correctement ! Cependant cela signifie qu'il a des valeurs d'incertitude connues sur ses mesures par rapport à une référence ou une spécification !

En cours de traduction de l'anglais

Ce qui nous donne aussi après réarrangement :

$$\mu = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} T(n-1) \quad (5.7.1443)$$

Ce qui nous permet de faire de l'inférence sur la moyenne μ d'une loi Normale d'écart-type théorique inconnu (sous-entendu qu'il n'y a pas assez de valeurs expérimentales) mais dont l'estimateur sans biais de l'écart-type est connu. C'est ce résultat qui nous donne l'intervalle de confiance :

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} T_{\alpha/2}(n-1) \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} T_{\alpha/2}(n-1) \quad (5.7.1444)$$

où nous retrouvons les mêmes indices que pour l'inférence statistique sur la moyenne (espérance) d'une variable aléatoire d'écart-type (théorique) connu puisque la loi de Student tend asymptotiquement pour de grandes valeurs de n vers une loi Normale. Ainsi, l'intervalle précédent et l'intervalle suivant :

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.7.1445)$$

donneront des valeurs très proches (à la troisième décimale) pour des grandeurs de n aux alentours des $10'000$ (dans la pratique on considère qu'à partir de 100 c'est identique...).

Nous déduisons immédiatement par la propriété de stabilité de la loi du Khi-deux (démontrée plus haut par le fait qu'elle découle de la loi Gamma) le test suivant que nous retrouvons dans de très nombreux logiciels de statistiques :

$$(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq \mu_2 - \mu_1 \leq (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) + T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \quad (5.7.1446)$$

appelé "test-T (de Student) bilatéral sur la différence de deux moyennes" ou plus simplement "test-T à deux échantillons" (rigoureusement... sommer les degrés de liberté comme nous venons de le faire n'est valable que si les deux variances sont égales et nous démontrerons le cas général où les variances ne sont pas égales lors de la démonstration du test de Welch plus loin).

Nous pouvons bien évidemment dès lors aussi déterminer la probabilité avec laquelle la moyenne est dedans ou en dehors d'un certain intervalle... (l'une comme l'autre étant beaucoup utilisées dans l'industrie).

Le lecteur peut pour plaisir contrôler avec Microsoft Excel 11.8346 que pour un grand nombre de mesures n, la distribution de Student tend vers la distribution Normale centrée réduite en comparant les valeurs des deux fonctions ci-dessous :

```
=LOI.STUDENT.INVERSE.N(5%/2,n-1)
=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(5%/2)
```

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le résultat précédent fut obtenu par William S. Gosset aux alentours de 11910 (selon calendrier holocène). Gosset qui avait étudié la mathématique et la chimie, travaillait comme statisticien pour la brasserie Guinness en Angleterre. À l'époque, on savait que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées alors :

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \mathcal{N}(0,1) \qquad (5.7.1447)$$

Toutefois, dans les applications statistiques on s'intéressait bien évidemment plutôt à la quantité :

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \qquad (5.7.1448)$$

On se contentait alors de supposer que cette quantité suivait à peu près une loi Normale centrée réduite ce qui n'était pas une mauvaise approximation comme le montre l'image ci-dessous ($\mathrm{d}f = n-1$) :

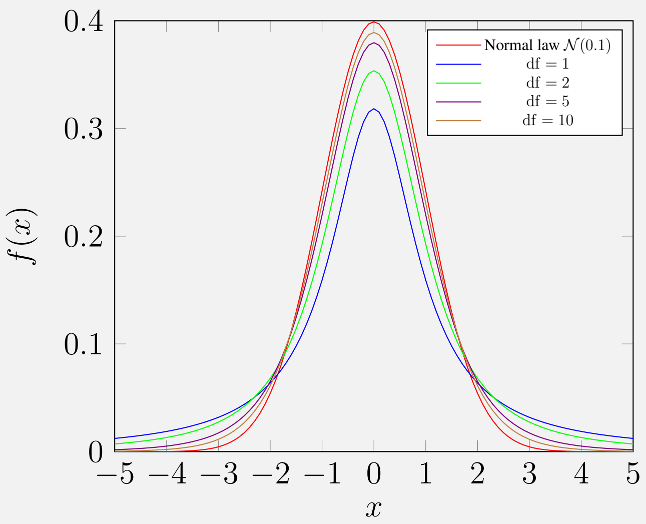


FIG. 5.159 – **Comparaison entre la fonction de distribution Normale et de Student**

Suite à de nombreuses simulations, Gosset arriva à la conclusion que cette approximation était valide seulement lorsque n est suffisamment grand (donc cela lui donnait l'indication comme quoi il devait y avoir quelque part derrière le théorème central limite). Il décida de déterminer l'origine de la distribution et après avoir suivi un cours de statistique avec Karl Pearson il obtint son fameux résultat qu'il publia sous le pseudonyme de Student. Ainsi, on appelle loi de Student la loi de probabilité qui aurait dû être appelée la "loi ou fonction de Gosset".

Signalons enfin que le test-T de Student est aussi très utilisé pour identifier si des variations (progressions ou l'inverse) de la moyenne des chiffres de deux populations identiques sont statistiquement significatives. C'est-à-dire que si la taille de deux échantillons dépendants est identique alors nous pouvons créer le test suivant (nous avons indiqué tous les différents types d'écritures que l'on peut retrouver dans la littérature et dans les nombreux logiciels implémen-

tant ce test) :

$$T(n-1)=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{X_{\bar{D}-\mu_D}}{S_D/\sqrt{n}}=\frac{\bar{D}-\delta_0}{S_D/\sqrt{n}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_i d_i-\delta_0}{S_D/\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\frac{1}{n}\sum_i(X_{i2}-X_{i1})-\delta_0}{S_D/\sqrt{n}}=\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_i X_{i2}-\frac{1}{n}\sum_i X_{i1}\right)-\delta_0}{S_D/\sqrt{n}}=\frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-\delta_0}{S_D/\sqrt{n}} \quad (5.7.1449)$$

avec :

$$S_D=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i(d_i-\bar{D})} \quad (5.7.1450)$$

La relation antéprécédente est donc très utile pour comparer deux fois le même échantillon dans des situations différentes de mesure (ventes avant ou après rabais d'un article par exemple). La relation antéprécédente est appelée "test-T (de Student) de deux moyennes d'échantillons appariés (ou échantillons dépendants)" ou plus simplement "test-T de Student pour échantillons appariés".

Définition (#5.7.136) : Nous parlons "d'échantillons appariés" (par paires) si les échantillons de valeurs sont prises 2 fois sur les mêmes individus (donc les valeurs des paires ne sont pas indépendantes, contrairement à deux échantillons pris indépendamment).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.1.5 I.C. sur la Moyenne Géométrique (avec Variance empirique connue ou non)

Voyons juste comment calculer l'intervalle de confiance pour la moyenne géométrique qui est d'une importance capitale en finance ! Considérons que nous avons $X_1,\ldots X_n$ d'une distribution avec une moyenne μ et une variance σ^2.

Considérons $Y_i=\ln(X_i)$ (en pratique certains prennent le $\log$ plutôt que le $\ln$), où la moyenne arithmétique de Y est μ_y et la variance correspondante est σ_y^2. Considérons la moyenne des Y : $\bar{Y}_n=\sum_{i=1}^n Y_i/n$. Alors grâce au théorème central limite :

$$\sqrt{n}\left(\bar{Y}_n-\mu_y\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\sigma_y^2\right) \quad (5.7.1451)$$

Maintenant considérons $e^{\bar{Y}_n}$:

$$e^{\bar{Y}_n}=\exp\left\{\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}Y_i\right\}=\exp\left\{\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\ln(X_i)\right\}=\exp\left\{\sum_{i=1}^n\ln(X_i^{1/n})\right\}$$
$$=\prod_{i=1}^n\exp\left\{\ln(X_i^{1/n})\right\}=\prod_{i=1}^n X_i^{1/n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} \quad (5.7.1452)$$

Ainsi, $e^{\bar{Y}}$ est la moyenne géométrique des X_i ! Ensuite, nous pouvons appliquer la méthode au théorème central limite. Pour cela nous posons $g(x)=e^x$, puis $g'(x)=e^x$. Par la méthode Delta (voir section Informatique Théorique page ??) :

$$\sqrt{n}\left(e^{\bar{Y}_n}-e^{\mu_y}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,e^{2\mu_y}\sigma_y^2\right) \quad (5.7.1453)$$

Remarquons bien le $e^{2\mu_y}$ devant le σ_y^2 ! Nous vous avons donc un outil pour construire notre intervalle de confiance à partir !

e^{μ_y} est notre vraie moyenne géométrique des Ys, et nous devons faire un intervalle de confiance pour ce dernier (ce n'est pas un intervalle de confiance pour la valeur attendue μ). La première étape consiste à estimer σ_y^2. Puisque σ_y^2 est la variance des Y :

$$\sigma_y^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(X_i) - \ln(e^{\bar{Y}_n})\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{e^{\bar{Y}_n}}\right) \tag{5.7.1454}$$

Pour créer notre intervalle de confiance $100(1-\alpha)\%$ pour la vraie moyenne géométrique des Xs, nous avons alors :

$$e^{\bar{Y}_n} - Z_{\alpha/2}\frac{e^{\bar{Y}_n}\sigma_y}{\sqrt{n}} \leq G_X \leq e^{\bar{Y}_n} + Z_{\alpha/2}\frac{e^{\bar{Y}_n}\sigma_y}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1455}$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\hat{G}_X - Z_{\alpha/2}\frac{e^{\bar{Y}_n}\sigma_y}{\sqrt{n}} \leq G_X \leq \hat{G}_X + Z_{\alpha/2}\frac{e^{\bar{Y}_n}\sigma_y}{\sqrt{n}}} \tag{5.7.1456}$$

Ceci est donc le "test Z de la moyenne géométrique" (lorsque la variance est connue).

Gardez à l'esprit que le test Z de la moyenne géométrique ne doit être utilisé que si le σ_y est connu. Sinon, nous devons utiliser la version de Student de ce test ! C'est-à-dire :

$$\boxed{\hat{G}_X - T_{\alpha/2}(n-1)\frac{e^{\bar{Y}_n}\hat{\sigma}_y}{\sqrt{n}} \leq G_X \leq \hat{G}_X + T_{\alpha/2}(n-1)\frac{e^{\bar{Y}_n}\hat{\sigma}_y}{\sqrt{n}}} \tag{5.7.1457}$$

Ceci est donc le "test T de la moyenne géométrique".

Attention ! Beaucoup de gens et de logiciels statistiques calculent cet intervalle incorrectement. Par exemple dans la documentation Stata en 2021, la méthode de calcul est explicitement décrite comme : « *Pour calculer la moyenne géométrique, la fonction* `ameans` *crée* $u_j = \ln(x_j)$ *pour tout* x_j *positif. La moyenne arithmétique du* u_j *et son intervalle de confiance sont alors calculés comme dans la fonction* `ci`. *Soit* $\bar{u}$ *la moyenne résultante, et soit* $[L, U]$ *l'intervalle de confiance correspondant. La moyenne géométrique est alors* $\exp(\bar{u})$, *et son intervalle de confiance est* $[\exp(L), \exp(U)]$. ». Et malheureusement le package DescTools du logiciel statistique R et sa fonction Gmeans() est basé sur la méthode Stata...

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.1.6 Test Binomial exact

Il arrive fréquemment lors de mesures que l'on souhaite comparer si deux échantillons de petite taille pris au hasard (sans remise !) d'une population elle aussi petite... sont statistiquement significativement différents ou non alors que l'on attendait une égalité parfaite !

Nous cherchons donc un test adapté aux cas suivants :

- Savoir si un échantillon d'une population préfère utiliser une technique de travail plutôt qu'une autre alors que l'on s'attend à ce que la population utilise autant l'une que l'autre
- Savoir si un échantillon d'une population a une caractéristique prédominante parmi deux possibilités alors que l'on s'attend à ce que la population soit parfaitement équilibrée

Avant d'aller plus en détails, rappelons qu'il faut être extrêmement prudent quant à la manière d'obtenir les deux échantillons. Il faut que l'expérience soit non biaisée, cela signifie pour rappel, que le protocole de tirage ne doit en aucun cas avantager l'une au l'autre des caractéristiques de la population (si vous étudiez l'équilibre homme/femme dans une population en attirant dans le sondage des personnes grâce à un cadeau sous la forme de bijoux ou en appelant pandans les jours ouvrés vous aurez alors un échantillon biaisé... car vous aurez probablement naturellement plus de femmes que d'hommes...).

En cours de traduction de l'anglais

Ceci étant dit, cette situation correspond donc à une loi binomiale pour laquelle nous avons démontré plus haut dans ce chapitre que la probabilité de k réussites pour une population de taille N dont la probabilité de réussite est p (et la probabilité d'échec q donc de $1-p$) était donnée par la relation :

$$P(N,k)=C_k^N p^k q^{N-k}=C_k^N p^k(1-p)^{N-k} \tag{5.7.1458}$$

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons donc $p=q=0.5$:

$$P(N,k)=C_k^N 0.5^k 0.5^k=0.5^N C_k^N \tag{5.7.1459}$$

tout en se rappelant que la distribution ne sera pas pour autant symétrique et ce surtout si la taille N de la population est petite.

Si nous notons maintenant x le nombre de réussites (considéré comme la taille du premier échantillon) et y le nombre d'échecs (considéré comme la taille du deuxième échantillon), nous avons alors :

$$P(N,k)=0.5^N C_k^N=P(x+y,k)=0.5^{x+y}C_k^{x+y} \tag{5.7.1460}$$

Ceci étant fait, pour construire le test et de par l'asymétrie de la distribution, nous allons calculer la probabilité cumulée que k soit plus petit que le x obtenu par l'expérience et la sommer à la probabilité cumulée pour que k soit plus grand que le y obtenu par l'expérience (ce qui correspond à la probabilité cumulée des queues respectivement gauche et droite de la distribution). Cette somme correspond donc à la probabilité :

$$P=0.5^N\sum_{k=0}^{x}C_k^N+0.5^N\sum_{k=y}^{N}C_k^N \tag{5.7.1461}$$

et cette dernière relation est appelée "test binomial exact (bilatŕal)".

Si la probabilité P obtenue pour la somme est au-dessus d'une certaine probabilité cumulée fixée à l'avance, nous dirons alors que la différence avec un échantillon tiré au hasard dans une population parfaitement équilibrée n'est pas statistiquement significative (en bilatéral...) et respectivement si elle est en-dessous, la différence sera donc statistiquement significative et nous rejetterons l'équilibre supposé

Ainsi,si :

$$0.5^N \sum_{k=0}^{x'} C_k^N + 0.5^N \sum_{k=y'}^{N} C_k^N = 0.5^N \left(\sum_{k=0}^{x'} C_k^N + \sum_{k=y'}^{N} C_k^N \right) \geq \alpha \quad (5.7.1462)$$

la différence par rapport à une population équilibrée sera considérée comme non statistiquement significative. Souvent on prendra au maximum α comme valant 5% (mais rarement en-dessous) ce qui correspond donc à un intervalle de confiance de 95%.

Malheureusement d'un logiciel de statistiques à l'autre les paramètres demandés ou les résultats obtenus ne seront pas nécessairement les mêmes (les tableurs n'intègrent pas de fonction spécifique pour le test binomial, il faudra souvent construire un tableau ou programmer soi-même la fonction). Par exemple, certains logiciels calculent systématiquement et imposent (ce qui est assez logique dans un sens...) :

$$0.5^N \left(\sum_{k=0}^{x-1} C_k^N + \sum_{k=y+1}^{N} C_k^N \right) = P \quad (5.7.1463)$$

En cours de traduction de l'anglais

✍Exemple :

D'une petite population ayant deux caractéristiques x et y particulières qui nous intéressaient et pour laquelle nous nous attendions à avoir un parfait équilibre tel que equation mais nous avons en réalité obtenu $x = 5$ et $y = 7$. Nous souhaiterions faire le calcul avec Microsoft Excel 11.8346 pour savoir si cette différence est statistiquement significative ou non à un niveau de 5% ?

Pour répondre à cette question, nous allons donc calculer la probabilité cumulée :

$$0.5^N \left(\sum_{k=0} C_k^N + \sum_{k=y}^{N} C_k^N \right) = 0.5^{12} \left(\sum_{k=0}^{5} C_k^{12} + \sum_{k=7}^{12} C_k^{12} \right) \quad (5.7.1464)$$

ce qui nous donne :

k	Coeff. binomial
0	1
1	12
2	66
3	220
4	495
5	792
7	792
8	495
9	220
10	66
11	12
12	1
P	0.774

FIG. 5.160 – **Valeurs du calcul des coefficients binomiaux dans Microsoft Excel 11.8346**

soit explicitement :

k	Coeff. binomial
0	=COMBIN(12;E12)
1	=COMBIN(12;E13)
2	=COMBIN(12;E14)
3	=COMBIN(12;E15)
4	=COMBIN(12;E16)
5	=COMBIN(12;E17)
7	=COMBIN(12;E18)
8	=COMBIN(12;E19)
9	=COMBIN(12;E20)
10	=COMBIN(12;E21)
11	=COMBIN(12;E22)
12	=COMBIN(12;E23)
P	=0.5^12*SOMME(F12:F23)

FIG. 5.161 – **Formules du calcul des coefficients binomiaux dans Microsoft Excel 11.8346**

donc la probabilité cumulée étant de 0.774 (soit 77.4%) la différence par rapport à une population équilibrée sera considérée donc comme non statistiquement significative.

Remarque

Ce test est également utilisé par la majorité des logiciels de statistiques (comme Minitab) pour donner un intervalle de confiance de la conformité d'opinions par rapport à celle d'un expert. C'est ce que nous appelons une étude R&R (reproductabilité & répétabilité) par attributs (voir mon livre sur Minitab pour un exemple).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.1.7 I.C. pour une Proportion

Indiquons que certains statisticiens utilisent le fait que la loi Normale découle de la loi de Poisson qui elle-même découle de la loi Binomiale (nous l'avons démontré lorsque n tend vers l'infini et que p et q sont du même ordre) pour faire un intervalle de confiance dans le cadre de l'analyse de proportions (très utilisé dans l'analyse de la qualité dans les industries).

Pour voir cela, notons X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ème élément de l'échantillon possède l'attribut } A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.7.1465}$$

où l'attribut A peut être la propriété "défectueux" ou "non défectueux" par exemple pour une analyse de pièces. Nous noterons k le nombre de réussites de l'attribut A.

La variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ nous l'avons démontré au début de ce chapitre, suit une loi Binomiale de paramètres n et p avec les moments :

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{E}(X) = np \\ \sigma &= \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \tag{5.7.1466}$$

Ceci étant, nous ne connaissons pas la valeur vraie de p. Nous allons donc utiliser l'estimateur de la loi Binomiale démontré plus haut :

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{X}{n} \tag{5.7.1467}$$

D'après les propriétés de l'espérance nous avons alors :

$$\mathrm{E}(\hat{p}) = \mu_{\hat{p}} = \mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{np}{n} = p \qquad (5.7.1468)$$

Et nous avons d'après les propriétés de la variance, la relation suivante pour la variance de la moyenne empirique de la proportion :

$$\mathrm{V}(\hat{p}) = \sigma_{\hat{p}}^2 = \mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\mathrm{V}(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \qquad (5.7.1469)$$

Ce qui nous amène alors à :

$$\mu_{\hat{p}} \cong \hat{p} \quad \text{et} \quad \sigma_{\hat{p}} \cong \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \qquad (5.7.1470)$$

Maintenant rappelons enfin que nous avons démontré que la loi Normale découlait de la loi Binomiale sous certaines conditions (les praticiens admettent que c'est applicable tant que $n > 50$ et $np \geq 5$). Autrement dit, que la variable aléatoire X suivant une loi Binomiale suit une loi Normale sous certaines conditions. Évidemment, si X suit une loi Normale alors X/n aussi (et donc $\hat{p}$...). Dès lors nous pouvons centrer et réduire $\hat{p}$ afin qu'il se comporte comme la variable aléatoire Normale centrée réduite notée Z :

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} \qquad (5.7.1471)$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Si 5% de la production annuelle d'une entreprise est défectueuse, quelle est la probabilité qu'en prenant un échantillon de 75 pièces de la ligne de production que seulement 2% ou moins soit défectueux ?

Nous avons dès lors avec :

$$Z = \frac{0.02 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{75}}} \tag{5.7.1472}$$

La probabilité cumulée correspondante à cette valeur de la variable aléatoire est avec la version anglaise de Microsoft Excel 11.8346 :

```
=NORMSDIST(-1.19)=11.66%
```

Mais remarquez que nous n'avons pas $np \geq 5$ qui est satisfait donc normalement il est exclu d'utiliser ce résultat.

E2. Dans son rapport de 1998, la banque J.P. Morgan a expliqué que durant l'année 11998 (selon calendrier holocène) ses pertes allèrent au-delà de la Value at Risk (voir section d'Économie page ??) 20 jours sur les 252 jours ouvrés de l'année en se basant sur une VaR temporelle de 95% (donc 5% des journées ouvrées considérées comme à perte). Au seuil de 95% est-ce de la malchance ou est-ce que le modèle de VaR utilisé était mauvais ?

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} = \frac{n\hat{p} - np}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})n}} = \frac{-0.05 \cdot 252 - 20}{\sqrt{0.05(1-0.05)252}} \cong -2.14 < -1.96 \tag{5.7.1473}$$

Donc c'était juste de la malchance.

E3. Certains individus s'attendent à ce que toutes les personnes déclarées cliniquement mortes expérimentent une EMI (Expérience de Mort Imminente). L'étude *Near-death experience in survivors of cardiac arrest : a prospective study in the Netherlands* basée sur un échantillon de 344 patients a compté 62 patients (18%) ayant reporté une EMI (soit 82% qui n'ont pas vécu une EMI). Nous voulons savoir si 82% est statistiquement différent de 100% attendu à un seuil de 5% :

$$Z = \frac{n\hat{p} - np}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})n}} = \frac{244 - 344}{\sqrt{0.05(1-0.05)344}} \cong -24.73 < -1.96 \tag{5.7.1474}$$

La probabilité cumulée correspondante à cette valeur peut être facilement obtenue avec Microsoft Excel 11.8346 :

```
=NORMSDIST(-24.73)=100%
```

Par conséquent, les EMI ne sont pas un phénomène global (généralisé) et nous ne pouvons donc pas leur attribuer une existence absolue au-delà de tout doute raisonnable ! Cependant, d'autres facteurs pourraient expliquer le fait que seules quelques personnes vivent des EMI.

Nous pouvons maintenant approximer l'intervalle de confiance pour la proportion en se basant sur la loi Binomiale et son comportement asymptotiquement Normal dans les conditions démontrées lors de notre introduction de la loi Normale tel que nous avons le "test Z à une proportion" ou "test p à une proportion" :

$$\hat{p}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\leq p\leq \hat{p}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{5.7.1475}$$

Avant de passer à un exemple, il est peut-être utile de préciser au lecteur que cette approximation par une loi Normale est très courante et que nous allons la rencontrer encore de nombreuse fois dans les démonstrations qui vont suivre. C'est tellement courant qu'il a même été donné un nom à cette méthode... : la "méthode de Wald" (bon en réalité il y a plusieurs méthodes de Wald mais c'est la plus connue que nous utiliserons à chaque fois).

✍**Exemple :**

Prenons $\alpha=5\%$, nous avons alors :

$$\hat{p}-Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\leq p\leq \hat{p}+Z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{5.7.1476}$$

C'est-à-dire :

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\leq p\leq \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{5.7.1477}$$

Sur une production de 300 éléments nous en avons trouvé 8 qui étaient défectueux. Quel est donc l'intervalle de confiance ?

Nous vérifions d'abord avec :

$$\hat{p}=\frac{8}{300}\cong 2.66\% \tag{5.7.1478}$$

que :

$$n\hat{p}=300\frac{8}{300}=8\geq 5 \tag{5.7.1479}$$

Donc il est acceptable d'utiliser l'intervalle de confiance par la loi Normale. Nous avons dès lors :

$$\frac{8}{300}-1.96\sqrt{\frac{\frac{8}{300}\left(1-\frac{8}{300}\right)}{300}}\leq p\leq \frac{8}{300}+1.96\sqrt{\frac{\frac{8}{300}\left(1-\frac{8}{300}\right)}{300}} \tag{5.7.1480}$$

C'est-à-dire :

$$0.84\%\leq p\leq 4.49\% \tag{5.7.1481}$$

Pour clore ce sujet, nous pouvons évidemment nous intéresser aussi au nombre d'indivi-

dus (taille d'échantillon) qu'il faut avoir pour satisfaire une certaine précision d'intervalle de confiance (imposé) en ayant un écart-type imposé.

Nous avons donc selon les hypothèses susmentionnées et dans l'acceptation de l'approximation par une loi Normale que :

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \tag{5.7.1482}$$

Et en procédant de manière identique aux développements effectués plus haut avec la loi Normale, nous obtenons "l'effectif de l'échantillon pour estimation par loi binomiale" :

$$n \cong \frac{Z_{\alpha/2}^2 p(1-p)}{\delta^2} = \frac{Z_{\alpha/2}^2 pq}{\delta^2} \tag{5.7.1483}$$

dont nous prenons évidemment normalement la valeur entière supérieure dans la pratique...

Une question qui revient souvent dans la pratique concerne le fait de savoir s'il faut appliquer ce test en unilatéral ou bilatéral. Au fait il n'y a pas de réponse précise, tout dépend de ce que nous cherchons à mettre en évidence.

Remarque

La taille de la population mère pour les relations développées plus haut n'entre pas en ligne de compte dans le calcul des intervalles de confiance ni dans celui de la taille de l'échantillon, et pour cause, elle est considérée infinie. Il faut donc faire attention à ne pas avoir parfois des tailles d'échantillons qui sont plus grandes que la population mère réelle possible... Sinon, nous devez insérer le fpc (facteur de correction de population finie).

Le lecteur peut trouver dans la plupart des manuels de marketing les valeurs tabulées (incluant le fpc dans la résultat ci-dessus) et qui conduisent à la construction du tableau suivant :

	Niveau de confiance = 95%			Niveau de confiance = 99%		
	Marge d'erreur			Marge d'erreur		
Taille de la population	5%	2.5%	1%	5%	2.5%	1%
100	80	94	99	87	96	99
500	217	377	475	285	421	485
1'000	278	606	906	399	727	943
10'000	370	1'332	4'899	622	2'098	6'239
100'000	383	1'513	8'762	659	2'585	14'227
500'000	384	1'532	9'423	663	2'640	16'055
1'000'000	384	1'534	9'512	663	2'647	16'317

TAB. 5.45 – **Taille de l'échantillon d'enquête à une question avec facteur fpc**

En cours de l'anglais

✍**Exemple :**

Nous souhaiterions savoir le nombre d'individus (taille d'échantillon) à prendre d'un lot de production sachant que la proportion de défectueux est imposée à 30% avec une erreur tolérée d'environ 5% entre la proportion réelle et empirique et ce afin d'obtenir un intervalle de confiance à un niveau de 95% du résultat :

$$n \cong \frac{Z^2_{5\%/2} 30\%(1-30\%)}{5\%^2} = \frac{(-1.96)^2 30\% 70\%}{5\%^2} \cong 322 \tag{5.7.1484}$$

Remarque

La dernière relation est très très souvent utilisée en théorie des sondages (analyses pour des votations avec réponses de type : Oui/Non) où parfois la taille de l'échantillon n est imposée pour des raisons de coûts du sondage et dont nous cherchons à calculer l'incertitude δ et parfois l'inverse (l'incertitude est imposée et donc nous cherchons à connaître la taille de l'échantillon).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.1.7.1 Transformation stabilisatrice de variance

Souvent, la variance d'un estimateur dépend de la valeur du paramètre étant d'estimation. Par exemple, si $X_n \sim$ Binôme(n,p), alors avec $\hat{p}_n = X_n/n$:

$$\text{V}\left[\widehat{p}_n\right] = \frac{p(1-p)}{n} \tag{5.7.1485}$$

Dans les situations de régression, par exemple, nous souhaitons généralement que les Y_i' dépendants aient la même variance pour chaque i. Malheureusemen si ces Y_i' s sont binomiaux, ou Poisson, la variance ne sera pas très vraisemblablement pas constante. Cependant, en prenant une fonction des variables, on peut obtenir des variances approximativement égales. Une telle fonction est nommée "transformation de stabilisation de la variance". Formellement, si $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur de θ, alors nous souhaite trouver une fonction g telle que :

$$\sqrt{n}\left(g\left(\widehat{\theta}_n\right) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \tag{5.7.1486}$$

Le "1" pour la variance de la loi Normale arbitraire. L'important est qu'elle ne dépende pas de θ. Dans l'exemple binomial, la variance stabilisant g satisferait :

$$\sqrt{n}\left(g\left(\hat{p}_n\right) - g(p)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \tag{5.7.1487}$$

Nous savons que :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{p}_n - p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,p(1-p)) \tag{5.7.1488}$$

et par la méthode Δ univariée (voir section Méthodes Numériques page ??) :

$$\sqrt{n}\left(g\left(\hat{p}_n\right) - g(p)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, g'(p)^2 p(1-p)\right) \tag{5.7.1489}$$

Que devrait être g pour que la variance soit 1 ? Nous devons résoudre pour répondre à cette question :

$$g'(p) = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{5.7.1490}$$

tel que :

$$g(p) = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} \mathrm{d}y \tag{5.7.1491}$$

Premièrement, posons $u = \sqrt{y}$, tel que $y = u^2$ et $\mathrm{d}y = 2u\mathrm{d}u$, et :

$$g(p) = \int_0^{\sqrt{p}} \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} 2u\mathrm{d}u = 2\int_0^{\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u \tag{5.7.1492}$$

L'intégrale est $\arcsin(u)$ (voir section Calcul différentiel et Intégral page 1513), ce qui signifie que la transformation stabilisatrice de la variance est :

$$g(p) = 2\arcsin(\sqrt{p}) \tag{5.7.1493}$$

Notez que l'ajout d'une constante à g ne changera pas la dérivée. L'approximation suggérée par :

$$\sqrt{n}\left(g\left(\hat{p}_n\right) - g(p)\right) \longrightarrow^{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1) \tag{5.7.1494}$$

est alors après réarrangement de la relation précédente :

$$2\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}_n}\right) \cong \mathcal{N}\left(2\arcsin(\sqrt{p}), \frac{1}{n}\right) \tag{5.7.1495}$$

Un intervalle de confiance approximatif de 95% pour $2\arcsin(\sqrt{p})$ est :

$$2\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}_n}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1496}$$

Cet intervalle peut être inversé pour obtenir l'intervalle pour p, c'est-à-dire en appliquant $g^{-1}(u) = \sin(u/2)^2$ aux deux extrémités :

$$p \in \left(\sin\left(\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}_n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2, \sin\left(\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}_n}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \tag{5.7.1497}$$

Cet intervalle peut être légèrement meilleur que l'intervalle approximatif habituel :

$$\hat{p}_n \pm 2\sqrt{\frac{\hat{p}_n\left(1-\hat{p}_n\right)}{n}} \tag{5.7.1498}$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.1.7.2 Test de l'égalité (différence) de deux Proportions

Toujours dans le même contexte que l'approximation précédente de la loi Binomiale par une loi Normale, l'industrie (en particulier la biostatistique) est friande de comparer deux proportions de deux populations différentes afin de savoir si elles sont statistiquement égales ou non (autrement dit : statistiquement significativement différentes ou pas).

Dès lors rappelons que nous avons démontré la stabilité de la loi Normale si deux variables aléatoires étaient indépendantes et identiquement distribuées (selon une loi Normale donc !) :

$$X - Y = \mathcal{N}\left(\mu = \mu_X - \mu_Y, \sigma = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) \tag{5.7.1499}$$

Dans le cadre des hypothèses susmentionnées il en est alors de même approximativement pour la différence de deux proportions :

$$\begin{aligned}\frac{X}{n_1} - \frac{Y}{n_2} &\cong \mathcal{N}\left(\mu_{\bar{p}_X} - \mu_{\bar{p}_Y}, \sqrt{\sigma_{\bar{p}_X}^2 + \sigma_{\bar{p}_Y}^2}\right) \cong \mathcal{N}\left(\hat{p}_X - \hat{p}_Y, \sqrt{\sigma_{\hat{p}_X}^2 + \sigma_{\hat{p}_Y}^2}\right)\\ &= \mathcal{N}\left(\hat{p}_X - \hat{p}_Y, \sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}}\right)\end{aligned} \tag{5.7.1500}$$

Dès lors nous savons que cette nouvelle variable centrée réduite suit une loi Normale selon :

$$Z = \frac{(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - \mu}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}}} \tag{5.7.1501}$$

et comme nous cherchons à savoir la probabilité cumulée que l'espérance théorique de la différence est nulle, cette dernière relation se réduit alors dans ce cas au "test Z de l'égalité de deux proportions non-groupées" :

$$Z = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}}} \tag{5.7.1502}$$

Évidemment nous pouvons aussi construire (comme toujours...) un intervalle de confiance à partir de cette relation :

$$\boxed{(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}} \leq p_X - p_Y \leq (\hat{p}_X - \hat{p}_Y) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}}} \tag{5.7.1503}$$

Nous appelons cet intervalle "l'intervalle de Wald". Les intervalles de Wald pour une seule proportion ou pour la différence de deux proportions sont connus pour leurs performances médiocres et sont généralement bien inférieurs à la couverture nominale), bien qu'ils soient encore largement utilisés dans la pratique en raison de leur simplicité. L'intervalle de Wald souffre également d'un dépassement, c'est-à-dire que les limites de l'intervalle calculé peuvent être en dehors de la plage des valeurs possibles !

Le test ci-dessus dans le domaine de l'analyse de sensibilité (en particulier lorsqu'il est appliqué à la conception de sites Internet), est nommé "test des proportions A/B" (à ne pas confondre avec les autres types de tests A/B que nous verrons plus bas).

En cours de traduction de l' anglais

Attention ! Le test de la différence de deux proportions de deux échantillons différents n'est évidemment pas le même que le test de la différence de deux proportions dans un même échantillon (covariance oublige puisque les deux proportions ne sont dès lors plus indépendantes) ! Dans le dernier cas nous utilisons le test de McNemar (voir plus bas page 1244).

Il semblerait cependant que cette dernière relation approximative, appelée "test Z pour l'égalité de deux proportions groupées", serait d'après le retour sur expérience plus correcte en prenant pour dénominateur :

$$Z=\frac{\hat{p}_X-\hat{p}_Y}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1}+\dfrac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}}}=\frac{\hat{p}_X-\hat{p}_Y}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}} \tag{5.7.1504}$$

où $\hat{p}$ sera pris comme le mélange de deux populations. C'est-à-dire :

$$\hat{p}=\frac{\text{somme des événements dans chacun des deux échantillons}}{\text{somme des tailles d'échantillons}} \tag{5.7.1505}$$

soit (en changeant la notations des indices des proportions expérimentales) :

$$\hat{p}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2} \tag{5.7.1506}$$

Ce test est appelé "test Z de l'égalité de deux proportions" ou plus simplement "test p de deux proportions". En médecine, on appelle cela le "test des différences de risque" (en sous-entendant que chaque proportion est une catégorie de population étudiée par rapport à un événement indésirable).

Remarque

Les simulations numériques semblent montrer que la variance non regroupée est légèrement plus biaisée que la variance groupée. Nous verrons également lors de notre étude du test d'indépendance du χ^2 (voir page 1219) pourquoi des logiciels comme R utilisent plutôt le test du χ^2 plutôt que le test Z pour comparer deux proportions.

Erreurs de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Dans le cadre d'un plan d'échantillonnage (voir section Génie Industriel page ??) nous avons prélevé sur un premier lot de 50 individus, 48 en parfait états. Dans un second lot de 30 individus, 26 étaient en bon état.

Nous avons donc :

$$\hat{p}_X = \frac{48}{50} = 96\%, \hat{p}_Y = \frac{26}{30} = 86.66\% \qquad (5.7.1507)$$

Nous souhaiterions donc savoir si la différence est statistiquement significative avec une certitude de 95% ou simplement due au hasard. Nous utilisons alors :

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{48+26}{50+30} = 92.50\% \qquad (5.7.1508)$$

et :

$$Z = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.96 - 0.8666}{\sqrt{0.925(1-0.925)\left(\dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{30}\right)}} \cong 1.535 \qquad (5.7.1509)$$

Ce qui correspond à une probabilité cumulée en utilisant la version anglaise de Microsoft Excel 11.8346 de :

```
=NORMSDIST(1.535)=93.77%
```

Donc la différence est due au hasard (ceci dit c'est presque in extremis...). Autrement dit, elle n'est pas statistiquement significative sous les contraintes énoncées.

En cours ... is

5.7.9.1.8 Test des signes

Nous mesurons quelque chose sur un échantillon puis, plus tard, nous mesurons la même chose sur ce même échantillon mais avec une autre méthode (donc il s'agit donc d'échantillons appariés !). Les deux classements ordonnées des mesures sont comparés et chaque observation est affectée d'un signe ("+" en cas d'élévation dans le classement, "˘" en cas de descente). Celles qui restent au même niveau sont éliminées.

Selon l'hypothèse à tester, il y a autant de "+" que de "˘", c'est-à-dire que la médiane de la distribution n'a pas bougé (cette affirmation peut ne pas paraître évidente à la première lecture il faut donc bien prendre du temps parfois pour réfléchir là-dessus).

L'idée étant que pour chaque couple de valeurs, il n'y a que deux signes possibles de variations, nous avons une chance sur deux (50% de probabilité) que la différence soit positive ou négative. Ce test est donc basé uniquement sur l'étude des signes des différences observées entre les paires d'individus, quelles que soient les valeurs de ces différences.

Nous pouvons alors souhaiter contrôler deux hypothèses :

- L'inégalité des proportions de signes doit être statistiquement significative. Donc l'un deux signes doit être en petit nombre par rapport à l'autre, ce qui correspond à un test unilatéral gauche (la probabilité cumulée d'avoir ce petit nombre de signes doit être inférieur à un niveau α donné).
- La proportion des deux signes doit être faiblement déséquilibrée ($P(+) = P(-) = 0.5$). Il s'agit donc dans ce cas d'un test en bilatéral (c'est le cas le plus courant) avec un certain niveau α donné.

Pour pouvoir créer un tel test, nous allons considérons l'apparition des "+" et des "$-$" comme un système de tirage aléatoire binaire dont l'ordre des succès n'est pas pris en compte (il s'agit donc d'une loi binomiale ou hypergéométrique) et avec remise (ce qui élimine d'emblée la loi hypergéométrique qui n'est pas symétrique et pose des problèmes d'utilisation dans la pratique...). Pour considérer un tirage aléatoire avec remise (alors qu'on ne fait pas réellement de remise), il faut que la population N soit grande. Raison pour laquelle le test des signes considère que les valeurs appariées doivent être continues (ce qui permet in extenso d'approcher la loi hypergéométrique par la loi binomiale). Cependant certains logiciels de statistiques utilisent la loi hypergéométrique pour des soucis de précision.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Il faut savoir que la majorité des logiciels de statistiques, font implicitement l'hypothèse lors de ce test que les données sont continues et utilisent la loi binomiale.

✍**Exemple :**

Considérons deux séries de mesures avec deux méthodes différentes. Nous souhaiterions tester l'hypothèse avec un niveau α de 5% si la différence entre les deux méthodes est statistiquement significative (nous nous attendons donc à une équilibre des

signes). Il s'agit donc d'un test des signes à deux échantillons (sachant qu'il est possible de faire la même chose en comparant les valeurs d'un seul et unique échantillon à sa médiane) :

$$\begin{array}{l} 20.4, 25.4, 25.6, 25.6, 26.6, 28.6, 28.7, 29, 29.8, 30.5, 30.9, 31.1 \\ 20.7, 26.3, 26.8, 28.1, 26.2, 27.3, 29.5, 32, 30.9, 32.3, 32.3, 31.7 \end{array} \tag{5.7.1510}$$

Nous avons donc les différences :

$$-0.3, -0.9, -1.2, -2.5, 0.4, 1.3, -0.8, -3.0, -1.1, -1.8, -1.4, -0.6 \tag{5.7.1511}$$

Avec les signes :

$$-, -, -, -, +, +, -, -, -, -, -, - \tag{5.7.1512}$$

Bon il est déjà clair que le résultat va être le rejet de l'hypothèse comme quoi il n'y pas de différence. Mais faisons quand même le calcul. Comme le test est en bilatéral à un niveau de 5%, la probabilité cumulée d'avoir obtenu au moins deux signes "+" ne doit pas être inférieure à 2.5% et pas supérieure à 97.5% si l'on veut accepter (ne pas rejeter) l'hypothèse comme quoi la différence n'est pas statistiquement significative.

Nous avons alors :

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} C_k^{12} 0.5^k (1-0.5)^{12-k} = \sum_{k=0}^{2} C_k^{12} 0.5^k 0.5^{12-k} = 0.5^{12} \sum_{k=0}^{2} C_k^{12} \cong 1.93\% \tag{5.7.1513}$$

Soit avec la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 :

```
=LOI.BINOMIALE(2,12,0.5,VRAI)=1.928%
```

ou si nous ne faisons pas d'approximation en étant plus précis avec la loi hypergéométrique :

```
=LOI.HYPERGEOMETRIQUE.N(2,24/2,12,24,VRAI)=0.17%
```

ce qui n'est guère plus brillant...

Donc la probabilité cumulée est inférieure à 2.5% et n'est de loin pas supérieure à 97.5%, nous rejetons l'hypothèse comme quoi la différence n'est pas statistiquement significative.

Nous pourrions accepter l'hypothèse si nous prenions pour equation la valeur :

$$p - \text{value} \cong 1.93\% \cdot 2 = 3.86\% \tag{5.7.1514}$$

mais bon ce n'est pas le cas !

Enfin, pour terminer concernant ce test des signes (test de la médiane), indiquons que certains logiciels de statistiques proposent un intervalle de confiance de la médiane basé sur la méthode de calcul exposée précédemment (intervalle de confiance d'une loi binomiale). Cependant, nous

pensons qu'il vaudrait mieux favoriser le bootstrapping comme nous l'avons vu dans la section de Méthodes Numériques (page **??**), nous nous abstiendrons donc de présenter cette technique ici. De plus il est peu utile de préciser que certains font un approximation en loi Normale (comme avec la majorité des tests mais nous nous en abstiendrons dans le cas présent).

5.7.9.1.9 Test de la médiane de Mood

Nous allons ici introduire un test qui a de multiples noms : "test de la médiane", "test de la médiane", "test de la médiane de Mood" ou encore "test de la médiane de Westenberg-Mood" ou "test de la médiane de Brown-Mood"...

Nous considérons deux échantillons indépendants $(X_1,\ldots,X_{n_1})$ et $(Y_1,\ldots,Y_{n_2})$. Nous supposons que $(X_1,\ldots,X_{n1})$ est un échantillon indépendant et distribué selon une loi continue F et $(Y_1,\ldots,Y_{n_2})$ est un échantillon indépendant et identiquement distribué d'une loi continue G.

Après regroupement des n_1+n_2 valeurs des deux échantillons, $k=n_1M_n$ (la notation n'est pas géniale car elle peut faire croire à une multiplication mais bon...) est le nombre d'observations X_i du premier échantillon qui sont supérieures à la médiane des $N=n_1+n_2$ observations.

Sous l'hypothèse nulle que les variables X et Y suivent la même loi continue (c'est-à-dire $G=F$), la variable $k=n_1M_n$ peut prendre les valeurs $0,1,\ldots,n_1$ selon la loi hypergéométrique :

$$P(N,N/2,n_1,k)=\frac{C_k^{n_1}C_{N/2-k}^{n_2}}{C_{N/2}^{N}}=\frac{\dfrac{n_1!}{k!(n_1-k)!}\dfrac{n_2!}{(N/2-k)!(n_2-(N/2-k))!}}{\dfrac{N!}{N/2!(N-N/2)!}} \quad (5.7.1515)$$

Dès lors, nous pouvons calculer la probabilité cumulée en unilatéral d'avoir k. Le test de Mood est donc un test purement unilatéral.

E rs de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons les deux échantillons :

$$\begin{gathered}23.4, 24.4, 24.6, 24.9, 25.0, 26.2, 26.3, 26.8, 26.8, 26.9, 27.0, 27.6, 27.7\\ 22.5, 22.9, 23.7, 24, 24.4, 24.5, 25.3, 26, 26.2, 26.4, 26.7, 26.9, 27.4\end{gathered} \quad (5.7.1516)$$

La médiane globale calculée avec Microsoft Excel 14.0.6123 est de 26.10. Nous avons au total :

$$k=n_1M_n=8 \quad (5.7.1517)$$

Il vient alors avec la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 :

```
=LOI.HYPERGEOMETRIQUE.N(8,26/2,13,26,VRAI)=94.24%
```

Donc à un seuil de 5%, nous ne rejettons pas l'hypothèse nulle (mais bon étant proche de la limite c'est un peu périlleux de conclure cela...). Si nous faisons le même calcul avec la loi Binomiale nous obtenons :

```
=LOI.BINOMIALE.N(8,26/2,0.5,VRAI)=86.65%
```

Mais bien évidemment ici l'approximation ne s'applique pas puisque l'approximation par une loi binomiale est acceptable dans la pratique que lorsque l'échantillon est environ 10 fois plus petit que la population.

Remarque

Il existe malheureusement plusieurs versions du test de Mood. Par exemple un logiciel comme Minitab compare à l'aide d'une table de contingence... le contingent de valeurs au-dessus ou en-dessous de la médiane et fait un simple test d'indépendance du Khi-deux (test de Pearson) comme vu dans la section de Méthodes Numériques.

5.7.9.1.10 Test de Poisson (1 échantillon)

Nous savons qu'un certain nombre d'événements rares suivent une loi de Poisson. Nous pouvons alors nous permettre comme pour toute autre loi, de calculer la probabilité cumulée dans un intervalle donné (bilatéral ou unilatéral).

Donc, si nous avons une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson :

$$P_k = \frac{\mu^k}{k!}e^{\mu} \tag{5.7.1518}$$

Nous avons alors en unilatéral droite à un certain niveau de confiance α, la valeur de n de k la plus proche satisfaisant la condition :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^k}{k!}e^{\mu} \rightarrow 1-\alpha \tag{5.7.1519}$$

Donc pour trouver la valeur de n (entier strictement positif ou nul) il faudrait inverser la somme, ce qui est peu... pratique (raison pour laquelle aucun tableur à ce jour ne propose de fonction pour la loi de Poisson inverse).

Maintenant, rappelons que nous avons vu dans la section de Suites Et Séries, la série de Taylor (Maclaurin) avec reste intégral à l'ordre $n-1$ autour de 0 jusqu'à λ suivante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}e^{\lambda} = 1 - \int_0^{\lambda} \frac{1}{2^{k/2-1}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1}e^{-x/2}\mathrm{d}x \tag{5.7.1520}$$

Résultat que nous avions également donné sous la forme de fonctions pour la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 pour que le lecteur puisse vérifier cette équivalence :

=LOI.POISSON.N($x \in \mathbb{N}, \mu$,VRAI)
=1-LOI.KHIDEUX.N($2\mu, 2(x+1)$,VRAI)

Il vient alors que dans les tableurs, nous pouvons utiliser la loi du Khi-deux inverse pour calculer l'inverse de la loi de Poisson avec cette fois cependant une petite nuance : le résultat ne donnera pas nécessairement un nombre entier.

En cours de traduction de l'anglais

Si par exemple nous prenons (toujours avec la version française de Microsoft Excel 14.0.6123) :

```
=1-LOI.KHIDEUX.N(2*20,2*(15+1),VRAI)=15.6513135%
```

La question est alors de trouver l'écriture pour l'inverse... Celle-ci est alors donnée par (on divise par 2 pour tomber pile poile sur la moyenne qui est donc la valeur qui nous intéresse) :

```
=CHIINV(1-15.6513135%,2*(15+1))/2=15.53194258
```

Finalement, l'écriture de l'inverse est assez naturelle. Ainsi, le "test de Poisson à 1 échantillon" à un niveau α donné en unilatéral droite peut s'écrire :

$k \leq$`=KHIDEUX.INVERSE(1-alpha,2*(nombre de mesures+1))/2`

Soit formellement :

$$\boxed{\lambda \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha}2(n_{\text{choisi}}+1)}{2}} \qquad (5.7.1521)$$

Attention cependant à une chose ! Il semblerait que certains logiciels de statistiques approximent parfois un peu abusivement la loi de Poisson par une loi Normale. Dès lors, l'intervalle unilatéral se calcule à partir de :

$$\mu \leq \bar{X} + Z_{1_\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5.7.1522)$$

Mais avec la loi de Poisson, nous avons :

$$\mu = \sigma^2 = \lambda \qquad (5.7.1523)$$

$$\bar{X} = \hat{\lambda} \qquad (5.7.1524)$$

Il vient alors :

$$\lambda = \hat{\lambda} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda_{\text{imposé}}}{n}} \qquad (5.7.1525)$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Une société fabrique des télévisions en quantité constante et a mesuré le nombre d'appareils défectueux produits chaque trimestre pendant les dix dernières années (donc 4 fois 10 mesures). La direction décide que le nombre maximum acceptable d'unités défectueuses est de 20 par trimestre et souhaite déterminer si l'usine satisfait à ces exigences (sous l'hypothèse que la distribution des défectueux suive une loi de Poisson) à un niveau de confiance de 5%.

Les 40 mesures nous donnent une moyenne de :

$$\bar{X} = \hat{\lambda} = 17.825 \tag{5.7.1526}$$

Nous avons alors avec l'approximation grossière :

$$\lambda = 17.825 + Z_{1-5\%}\sqrt{\frac{20}{40}} \tag{5.7.1527}$$

Soit dans un tableur comme la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 :

```
=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(1-5%)*RACINE(20/40)+17.825=18.988
```

ou :

$$\lambda \leq \frac{\chi^2_{1-5\%}2(20+1)}{2} \tag{5.7.1528}$$

Soit dans un tableur comme la version française de Microsoft Excel 11.8346 :

```
=KHIDEUX.INVERSE(1-5%,2*(20+1))/2=14.072
```

Dans les deux cas, nous sommes en-dessous de la moyenne imposée de 20 (donc on rejette l'hypothèse nulle comme quoi le nombre de défauts est supérieur ou égal à 20). Bien évidemment, il est possible pour chacune des méthodes de déterminer quelle devrait être la probabilité cumulée (niveau de confiance) qui nous amène à la limite des 20 (donc la p-valeur en d'autres termes sur laquelle nous reviendrons plus loin). Avec la première méthode (approximation Normale), la p-valeur est de 0.104%.

Évidemment, dans le cas bilatéral, nous avons :

$$\boxed{\frac{\chi^2_{\alpha/2}2(n+1)}{2} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}2(n+1)}{2}} \tag{5.7.1529}$$

✍**Exemple :**

Une compagnie d'aviation a eu 2 deux crashs en $1,000,000$ de vols (événement très rare). Quelle est l'intervalle de confiance en bilatéral à 95% sachant qu'au niveau mondial le nombre d'accident par millions est de 0.4.

Nous avons alors :

$$\frac{\chi^2_{5\%/2}2(2+1)}{2} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{1-5\%/2}2(2+1)}{2} \tag{5.7.1530}$$

Soit pour la borne supérieure avec un tableur comme la version française de Microsoft Excel 11.8346 :

```
=LOI.KHIDEUX.INVERSE(1-5%/2,2*(2+1))/2=7.224
```

et pour la borne inférieure :

```
=LOI.KHIDEUX.INVERSE(1-5%/2,2*(2+1))/2=0.618
```

Donc statistiquement, cette compagnie est moins sûre que l'ensemble des compagnies.

5.7.9.1.11 Test de Poisson (2 échantillons)

Nous venons de voir que :

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2}2(n+1)}{2} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}2(n+1)}{2} \tag{5.7.1531}$$

Or, en suivant le même raisonnement que celui qui nous a amené à construire le test de comparaison des moyennes suivant :

$$(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_2-\mu_1 \leq (\bar{X}_2-\bar{X}_1)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{5.7.1532}$$

ou son équivalent avec la loi de Student quand l'écart-type vrai n'est pas connu et en utilisant le fait que nous avons démontré que la loi de Poisson est stable par l'addition (et donc aussi par la soustraction), que la loi de Gamma était aussi stable par l'addition (et donc aussi par la soustraction) et la loi du Khi-deux aussi puisque ce n'est qu'un cas particulier de la loi Gamma. Nous aurions peut-être tendance à écrire un peu une généralisation logique de ce que nous avons vu juste plus haut :

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2(n_2+1)-2(n_1+1))}{2} \leq \lambda_2-\lambda_1 \leq \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2(n_2+1)-2(n_1+1))}{2} \tag{5.7.1533}$$

Et au fait cela constitue un piège selon certains praticiens... Car la loi du Khi-deux a un support qui est défini comme étant strictement positif et l'intervalle de confiance peut naturellement avoir la borne de gauche qui est négative (... O_o). Une solution consiste alors à utiliser le test de la différence de deux proportions que nous avons déjà étudié plus haut :

$$Z \cong \frac{(\hat{p}_X-\hat{p}_Y)-\mu}{\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1}+\frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}}} \tag{5.7.1534}$$

En cours de traduction de l'anglais

À condition bien évidemment que les conditions permettant d'approcher le test par une loi Normale soient satisfaites (les proportions doivent être inférieures typiquement à 0.1 et les n supérieurs à 50).

Certains logiciels semblent avoir implémenté cette dernière méthode (avec laquelle je ne suis pas forcément d'accord).

✍**Exemple :**

Une compagnie d'aviation a eu 2 deux crashs en $1'000'000$ vols (événement très rare). Une autre compagnie a eu 3 crashs en $1'200'000$ vols. Quel est l'intervalle de confiance en bilatéral à 95% en supposant que la différence est nulle.

Les proportions sont alors respectivement :

$$\hat{p}_X=\frac{2}{n_1}=\frac{2}{1,000,000}=0.000002 \quad \text{et} \quad \hat{p}_Y=\frac{3}{n_2}=\frac{3}{1,200,000}=0.0000025 \tag{5.7.1535}$$

Notons :

$$\begin{aligned}\Delta&=\hat{p}_X-\hat{p}_Y=-0.0000005\\ \hat{q}_X&=1-\hat{p}_X\\ \hat{q}_Y&=1-\hat{p}_Y\end{aligned} \tag{5.7.1536}$$

Nous avons alors :

$$\Delta-Z_{5\%/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_X\hat{q}_X}{n_1}+\frac{\hat{p}_Y\hat{q}_Y}{n_2}}\leq\mu\leq\Delta+Z_{5\%/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_X\hat{q}_X}{n_1}+\frac{\hat{p}_Y\hat{q}_Y}{n_2}} \tag{5.7.1537}$$

ce qui donne un intervalle de confiance pour la différence de proportion théorique attendue :

$$-0.000004461\leq\mu\leq 0.000003461 \tag{5.7.1538}$$

et donc comme -0.0000005 est dans cet intervalle, nous acceptons l'hypothèse comme quoi la différence des proportions n'est pas statistiquement significative au seuil de 5%. Ou en prenant l'expression non approximée, nous avons (avec la même conclusion) :

$$\begin{gathered}\frac{\chi^2_{5\%/2}(2(3+1)-2(2+1))}{2}\leq\lambda_2-\lambda_1\leq\frac{\chi^2_{1-5\%/2}(2(3+1)-2(2+1))}{2}\\ \Downarrow\\ 0.0253\leq\mu\leq 3.6889\end{gathered}$$

Donc pour résumer un peu les convergences de lois dans tous ces différents tests et intervalles que nous avons vu jusqu'à maintenant, nous proposons au lecteur le schéma suivant qui clarifiera peut-être plus ou moins bien les choses :

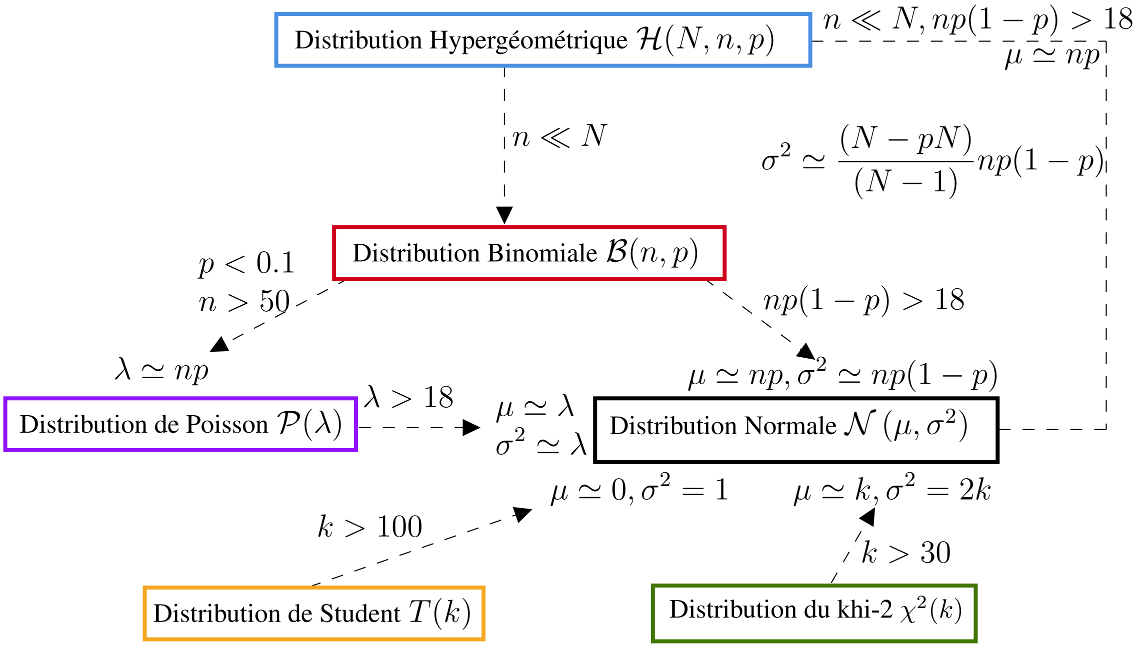


FIG. 5.162 – **Convergence des différentes lois usuelles en inférence statistique élémentaire**

Et aussi ce tableau où toutes les relations ont été démontrées en détail plus haut et certains déjà utilisées (d'autres le seront plus loin) :

Statistique d'échantillonnage	**Moyenne de la statistique**	**Écart-type de la statistique**
Moyenne (population infinie)	μ	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Moyenne (population finie)	μ	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$
Proportion (population finie)	p	$\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$
Proportion (population infinie)	p	$\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$
$\hat{\sigma}^2$ (population infinie)	$\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$	$\sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n^2}}\sigma^2$

TAB. 5.46 – **Tableau des statistiques d'échantillonnage démontrées et utilisées en partie jusqu'à maintenant**

Définition (#5.7.137) : En termes bayésiens, "l'abduction" désigne le processus de recherche de l'hypothèse a priori la plus courte, techniquement appelée "longueur de description minimale" (LDM) (mais aussi connue sous le nom de "rasoir d'Ockham"), qui explique le mieux les données. Avec l'induction, nous cherchons souvent à déterminer ce qui sera le plus vraisemblable dans le futur. Avec l'abduction, nous cherchons souvent à déterminer ce qui explique le mieux un événement déjà survenu.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.1.12 Intervalles de Confiance/Tolérance/Prédiction/Crédibilité

Nous y voici et afin d'éviter une confusion fréquente et avant de passer à d'autres sujets plus complexes, comparer l'intervalle de confiance, l'intervalle de tolérance (souvent appelé "intervalle de fluctuation" dans certains programmes scolaires), l'intervalle de prédiction et l'intervalle de crédibilité.

Définitions (#5.7.138) :

D1. "L'intervalle de tolérance" (ou "intervalle de fluctuation") est du point de vue du statisticien[37] un intervalle contenant un certain pourcentage (souvent 68.26, 95.44 ou 99.73% pour une distribution Normale) des individus d'une population de mesures.

D2. "L'intervalle de confiance" pour un indicateur statistique donné (moyenne, proportion, écart-type ou autre...) est un intervalle tel que si nous en construisons un certain nombre de structure similaire, alors un certain pourcentage d'entre eux (généralement 90, 95 ou 99%) contiendra peut-être la valeur vraie de l'indicateur statistique.

D3. "L'intervalle de crédibilité" pour un indicateur statistique donné (moyenne, proportion, écart-type ou autre...) est un intervalle borné qui a un certain seuil de probabilité cumulée (généralement 90, 95 ou 99%) contient la valeur vraie de l'indicateur et pour lequel avons une connaissance a priori particulière de sa distribution (voir plus bas page **??**).

D4. "L'intervalle de prédiction" permet de déterminer un intervalle d'une valeur individuelle basée sur la connaissance de la moyenne échantillonnale et de l'écart-type de la population.

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons déjà passé un long moment sur les intervalles de confiance et de crédibilité plus haut. Faisons alors un exemple pour les deux définitions restantes en prenant le cas où la moyenne et l'écart-type des prix de 49 DVD sont donnés par :

$$\bar{X} = \hat{\mu} = 31.5531 \quad S = \hat{\sigma} = 0.7992 \tag{5.7.1539}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} [\bar{X} \pm S] &= [30.8, 32.4] \\ [\bar{X} \pm 2S] &= [30.0, 33.2] \\ [\bar{X} \pm 3S] &= [29.2, 34.2] \end{aligned} \tag{5.7.1540}$$

correspondant respectivement à des intervalles de tolérance selon une loi Normale de 68.26, 95.44 et 99.73%.

Par contre, un intervalle de confiance à 95% basé sur la relation démontrée plus haut :

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} T_{\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} T_{\alpha/2}(n-1) \tag{5.7.1541}$$

[37] À l'opposé de celui de l'ingénieur en mécanique où l'intervalle de tolérance est l'intervalle de mesure d'une cote de pièce qui ne sera pas rejetée une fois sortie de la production.

donne :

$$31.32 \leq \mu \leq 31.78 \qquad (5.7.1542)$$

Donc 95% de probabilité cumulée que la moyenne vraie (espérance) se trouve comprise entre 31.32 et 31.78.

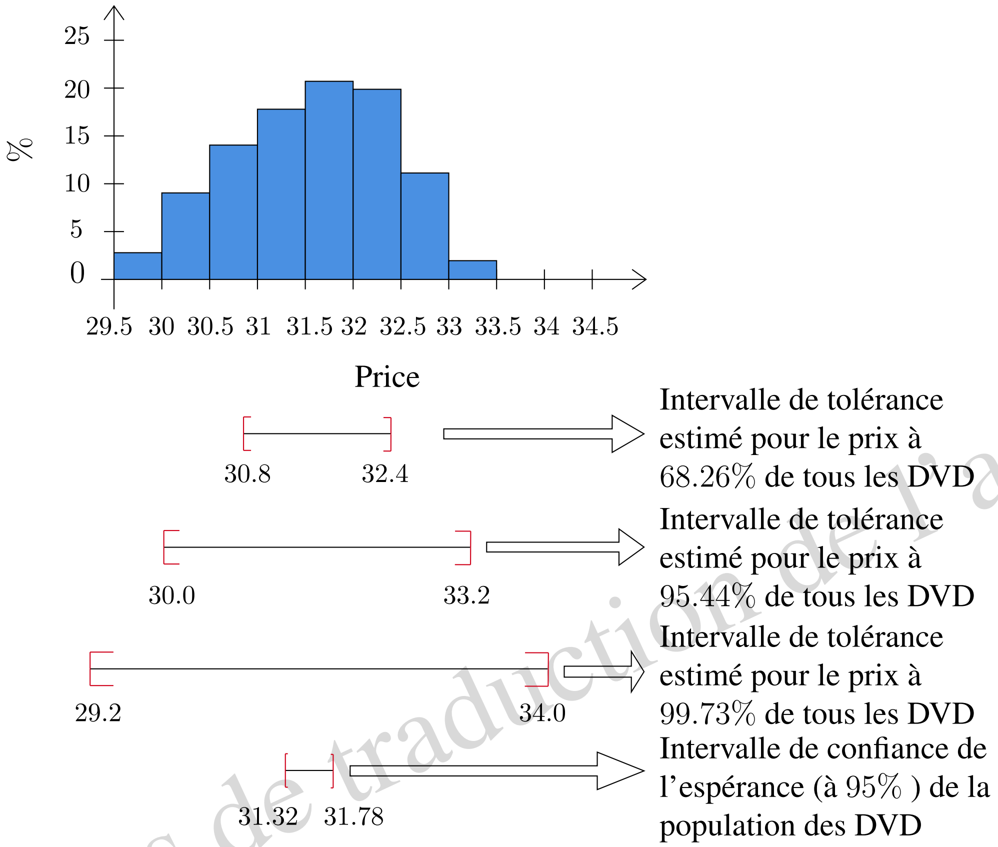


FIG. 5.163 – **Histogramme de l'échantillon des prix de 49 DVD**

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant passons à une notion qui curieusement est rarement traitée dans les ouvrages de statistiques. L'idée de l'intervalle de prédiction est de plutôt que de s'intéresser à l'intervalle de confiance de l'espérance basé sur une moyenne expérimentale, d'utiliser cette moyenne expérimentale (échantillonnale) comme base pour prévoir l'intervalle d'une unique valeur (et non d'une moyenne !).

Nous allons donc nous intéresser à la différence entre la moyenne et une valeur ponctuelle :

$$\bar{x} - x \qquad (5.7.1543)$$

que nous supposerons proche de zéro (il vaut mieux pour avoir un produit fiable et passer les tests d'autorisation des ventes...). Concernant la variance, ce qui nous intéresse ce n'est plus simplement l'écart-type de la moyenne mais l'écart-type de la différence... et comme l'échantillon est indépendant de la valeur unique nous avons :

$$\sigma^2_{\bar{x}-x} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_x = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (5.7.1544)$$

Donc nous pouvons écrire qu'en première approximation :

$$Z \cong \frac{\bar{x}-x}{\sigma^2_{\bar{x}-x}} = \frac{\bar{x}-x}{\sqrt{\sigma^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}} = \frac{\bar{x}-x}{\sigma\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} \tag{5.7.1545}$$

Et bien sûr après ce que nous avons vu :

$$T(n-1) \cong \frac{\bar{x}-x}{S\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} \tag{5.7.1546}$$

Nous pouvons donc construire verbatim l'intervalle de prédiction :

$$\bar{x} - T_{\alpha/2}(n-1)S\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq x \leq \bar{x} + T_{\alpha/2}(n-1)S\sqrt{1+\frac{1}{n}} \tag{5.7.1547}$$

En cours de traduction de l' anglais

5.7.9.2 Inférence Bayésienne

Pour comprendre l'idée "d'inférence bayésienne" (à ne pas confondre avec le concept de "test d'hypothèse bayésien"), rappelez-vous que dans l'approche non bayésienne (fréquentiste), nous mesurons par exemple un paramètre θ. Ensuite, nous calculons l'erreur standard ou un intervalle de confiance sur lequel nous effectuons un test d'hypothèse.

Dans l'approche bayésienne, nous supposons que le paramètre θ suit une distribution a priori non triviale. Nous calculons ensuite sa distribution de probabilité postérieure connaissant les mesures effectuées et nous calculons ensuite un intervalle de confiance sur cette dernière.

Selon certains spécialistes, il existerait maintenant un grand nombre de théorèmes et une grande quantité d'exemples numériques élaborés qui fournissent de fortes évidences de la supériorité de la méthode bayésienne dans une centaine de domaines différents ! Les méthodes fréquentistes traditionnelles qui n'utilisent que des distributions d'échantillonnage sont utilisables et utiles dans de nombreux problèmes particulièrement simples et idéalisés ; cependant, ils représentent les cas particuliers les plus proscrits de la théorie des probabilités, car ils supposent des conditions (répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire mais pas d'informations pertinentes !) qui ne sont presque jamais rencontrées dans des problèmes réels.

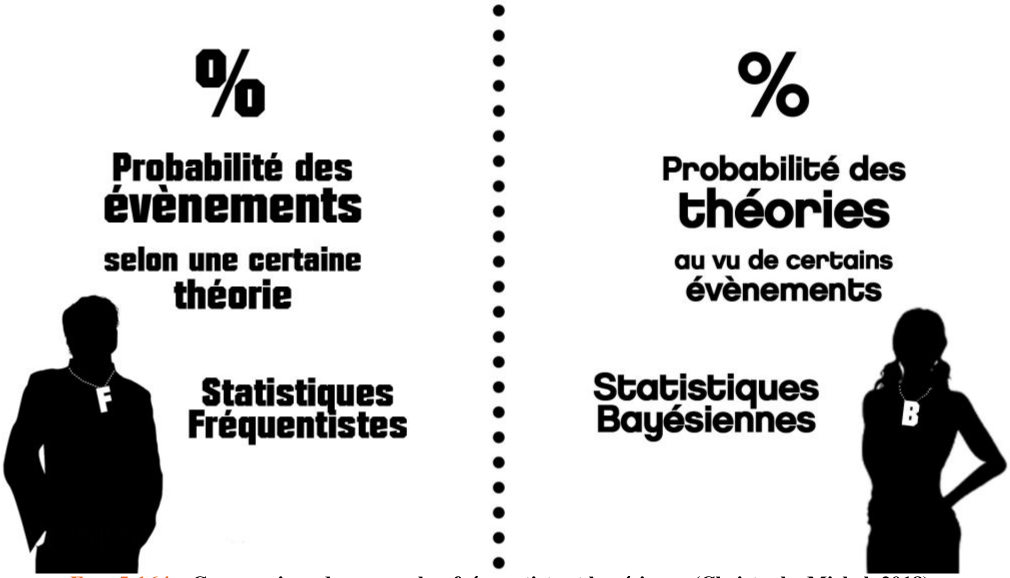


FIG. 5.164 – **Comparaison des approches fréquentiste et bayésienne (Christophe Michel, 2018).**

Remarque

L'approche fréquentiste est le cas de ce que nous appelons également un "a priori uniforme". Mais le lecteur ne doit pas penser qu'une loi uniforme a priori est un exemple de a priori non informé (il y a un exemple mathématique détaillé plus loin juste après notre étude de la distribution bêta-binomiale postérieure) ! ! ! En effet, les purs fréquentistes ne font AUCUN a priori (c'est-à-dire que la probabilité est complètement indéterminée $0/0$) ! Le fréquentiste pur suppose toujours que les données de l'échantillon sont exactement représentatives de la population parce que c'est tout ce qu'il peut faire.

Supposons que nous avons un modèle bayésien univarié avec une vraisemblance $P(y|\vec{\theta})$ (parfois aussi notée $f(y|\vec{\theta})$) et une distribution a priori univariée $P(\vec{\theta})$ (également parfois appelé $f(\vec{\theta})$).

Rappelons que (selon ce que nous avons vu lors de notre étude des probabilités bayésiennes à la page 485) si nous multiplions la vraisemblance univariée $P(y|\vec{\theta})$ et la probabilité a priori univariée $P(\vec{\theta})$ nous obtenons la distribution a posteriori univariée $P(\vec{\theta}|y)$ (également notée $\pi(\vec{\theta}|y)$). En effet, en utilisant ce que nous avons vu plus haut nous obtenons (le dénominateur est pour rappel la "probabilité marginale") :

$$\text{Postérieure} = P(\vec{\theta}|y) = \frac{\text{vraisemblance} \cdot \text{antérieure}}{\text{marginale}} = \frac{P(y|\vec{\theta})P(\vec{\theta})}{P(y)} \propto P(y|\vec{\theta})P(\vec{\theta}) \tag{5.7.1548}$$

Également souvent noté (toujours dans le cas univarié et en utilisant la définition de la distribution marginale) :

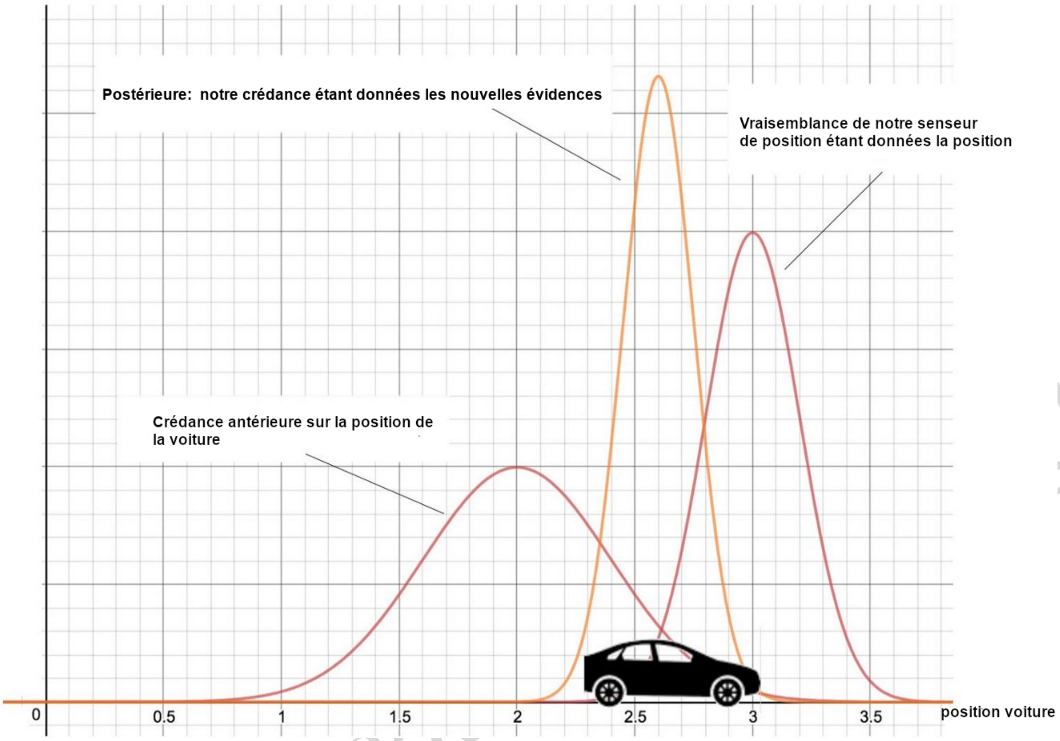
$$\pi(\vec{\theta}|y) = \frac{\ell(y|\vec{\theta})f(\vec{\theta})}{f(y)} = \frac{\ell(y|\vec{\theta})f(\vec{\theta})}{\int f(y,\vec{\theta})\mathrm{d}p} \propto f(y|\vec{\theta})f(\vec{\theta}) \tag{5.7.1549}$$

Où le ratio :

$$\frac{\ell(y|\vec{\theta})}{f(y)} \tag{5.7.1550}$$

est parfois appelé "vraisemblance standardisée".

À l'exception de la probabilité marginale, les estimations a posteriori, a priori et la vraisemblance ne sont pas des estimations ponctuelles. Ce sont des courbes. Dans l'exemple ci-dessous, nous montrons la fonction de densité de probabilité sur différents emplacements d'une voiture :



Nous recommandons fortement au lecteur de voir les exemples ci-dessous pour une meilleure compréhension du dénominateur.

Définition (#5.7.139) : Un estimation antérieure $P(\vec{\theta})$ pour un modèle échantillonal est appelé "l'estimation antérieure conjuguée" si l'estimation postérieure résultant notée traditionnellement $\pi(\vec{\theta}|\vec{y})$ (pour les cas multivariés) appartient à la même famille de distribution que l'estimation antérieure.

En d'autres termes : si notre distribution postérieure est de la même famille que la distribution antérieure, nous parlons alors "distributions conjuguées". Ensuite, nous disons également que la fonction antérieure est la "conjuguée de la vraisemblance" (en pratique c'est cependant l'exception plutôt que la règle...).

Voici par exemple un tableau résumant les cas les plus classiques :

Vraisemblance	Antérieure	Postérieure
Binomiale	Bêta	Distribution (Bêta-)Binomiale
Binomiale	Binomiale	Distribution Binomiale
Négative Binomiale	Bêta	Distribution (Bêta-)Negative Binomiale
Poisson	Gamma	Distribution (Poisson-)Gamma
Géométrique	Bêta	Distribution (Beta-)Geometrique
Normale (moyenne inconnue)	Normale	Distribution Normale
Normale (variance inconnue)	Inverse Gamma	Distribution (Normal-)Gamma inverse
Normale (tous les moments connus)	Normale/Gamma	Distribution Normale/Gamma
Multinomiale	Dirichlet	Distribution (Multinomiale-)Dirichlet

Cependant (et comme toujours !) dans ce livre, nous ne détaillerons que les conjuguées qui ont des applications pratiques dans d'autres chapitres !

Un dernier rappel avant de continuer. Si l'on connaît pour une distribution de vraisemblance donnée l'expression $P(y_i/\vec{\theta})$, alors pour un vecteur de réalisations indépendantes d'une variable aléatoire, la vraisemblance totale est égale au produit des probabilités :

$$P(\vec{y}|\vec{\theta}) = P(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n|\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i|\vec{\theta}) \quad (5.7.1551)$$

Soyez prudent avec l'inférence bayésienne ! Ne vous fiez pas trop à l'intuition, car même les scénarios a priori les plus simples et les plus vraisemblables la défient ! Le quartet ci-dessous montre que le choix de la distribution a priori et de la vraisemblance est très important. Plus spécifiquement, la "queue" de la distribution compte davantage ! !

L'auteur de ce quartet décrit quatre cas :

- Antérieure Normale, Vraisemblance Normale (tout est ok ici)
- Antérieure de Student, Vraisemblance Normale (les choses commencent à mal tourner, nous avons maintenant un postérieur bimodal)
- Antérieure de Student, Vraisemblance Normale (le postérieur imite l'antérieur et d'une certaine manière, l'antérieure n'ayant absolument aucune influence)
- Antérieure Normale, Vraisemblance de Student (le postérieur imite l'antérieur, d'une certaine manière, l'antérieur n'a absolument aucune influence)

Par conséquent, l'inférence bayésienne nécessite beaucoup de travail et de connaissances pour bien faire les choses.

En cours de traduction de l'anglais

Quartet de Richard McElreath

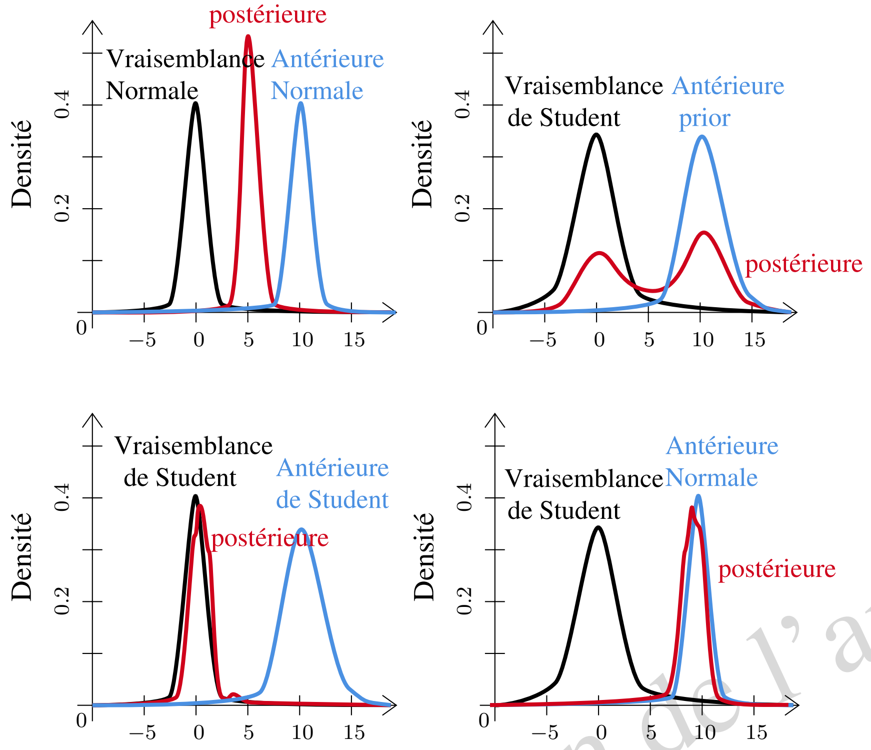


FIG. 5.165 – Quartet de Richard McElreath's

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.2.1 Antérieure Bêta conjuguée pour vraisemblance Binomiale (distribution bêta–binomial)

Introduisons maintenant la distribution bêta-binomiale qui est très utilisée en Ingénierie mais aussi en statistique bayésienne (surtout connue pour le fameux test A/B par exemple !).

Nous décidons de commencer avec cette distribution ayant une vraisemblance Binomiale car c'est une loi avec un seul paramètre et pédagogiquement il semble plus judicieux de commencer avec cette dernière plutôt qu'avec une vraisemblance Normale qui a deux paramètres (en plus il y a trois conjugués possibles pour la vraisemblance Normale comme le montre le tableau ci-dessus).

Définition (#5.7.140) : La "distribution bêta-binomiale distribution" est la distribution binomiale dans laquelle la probabilité p de succès à chaque essai est fixe mais tirée au hasard à partir d'une distribution bêta avant les n essais de Bernoulli.

Prouvons maintenant que la distribution bêta est une distribution conjuguée de la distribution Binomiale, mais avant une définition !

Supposons que nous observions n variable aléatoire indépendante de Bernoulli $x_1, \ldots, x_n$. Nous souhaitons estimer la probabilité de succès p avec l'approche bayésienne. Nous utiliserons une version bêta $P_{a,b}$ a priori pour p (comme $P_{a,b} \in]0,1[$ cela peut être un bon choix ...) et prouverons que c'est un conjugué avant.

Supposons que nous observions n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $x_1, \ldots, x_n$. Nous souhaitons estimer la probabilité de succès p avec l'approche bayésienne. Nous utiliserons une estimation antérieure (a priori) bêta $P_{a,b}$ pour p (comme $P_{a,b} \in]0,1[$ cela peut être un bon choix ...) et prouverons que c'est bien une estimation antérieure conjuguée.

En utilisant d'abord la relation entre la fonction gamma d'Euler et la factorielle (voir section Calcul différentiel et Intégral 1552), nous avons en utilisant la notation conventionnelle (puisque la probabilité de l'a priori est supposée indépendante des essais eux-mêmes nous multiplions ensuite les deux probabilités) :

$$\begin{aligned}\pi(\vec{\theta}|y) \propto P(y|\vec{\theta})P(\vec{\theta}) &= P(y|p,n)P(p,a,b) = \mathcal{B}(n,y)P_{a,b} = \mathcal{B}(n,y)\frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a,b)}\\ &= \left(\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}\right)\left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}\right)\\ &= \frac{n!}{y!(n-y)}p^y(1-p)^{n-y}\left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}\right)\\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}\end{aligned} \tag{5.7.1552}$$

Notez que nous avons également le résultat équivalent suivant (juste la notation diffère !) :

$$\begin{aligned}\pi(p(a,b)|y,n) \propto P(y,n|p(a,b))P(p(a,b)) &= \mathcal{B}(n,y)P_{a,b}\\ &= \left(\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}\right)\left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}\right)\\ &= \binom{n}{y}\frac{p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}}{B(a,b)}\end{aligned} \tag{5.7.1553}$$

Bien que cela ne soit pas vraiment nécessaire, déduisons la densité marginale de y (dans le but de normaliser la densité postérieure plus loin !) :

$$\begin{aligned}P(y) &= \int_0^1 f(y,n,p(a,b))\mathrm{d}p\\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}\mathrm{d}p\\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(y+a)\Gamma(n-y+b)}{\Gamma(n+a+b)}\int_0^1\frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(y+a)\Gamma(n-y+b)}p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}\mathrm{d}p\\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(y+a)\Gamma(n-y+b)}{\Gamma(n+a+b)}\end{aligned} \tag{5.7.1554}$$

Cette dernière densité marginale s'écrit aussi parfois :

$$\begin{aligned}P(y) &= \int_0^1 f(y,p(a,b))\mathrm{d}p = \int_0^1 \mathcal{B}(n,y)P_{a,b}\mathrm{d}p\\ &= \int_0^1\binom{n}{y}\frac{p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}}{B(a,b)}\mathrm{d}p = \binom{n}{y}\frac{\displaystyle\int_0^1 p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}\mathrm{d}p}{B(a,b)}\end{aligned} \tag{5.7.1555}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc une définition commune (fausse) de la distribution bêta-binomiale est donnée par ces deux relations équivalentes de la densité marginale :

$$P(y)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(y+a)\Gamma(n-y+b)}{\Gamma(n+a+b)}=\binom{n}{y}\frac{\int\limits_0^1 p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}\mathrm{d}p}{B(a,b)} \quad (5.7.1556)$$

Concentrons-nous maintenant sur la postérieure $\pi(\vec{\theta},y)$ (c'est-à-dire l'expression "réelle" de la distribution bêta-binomiale), alors donnée par :

$$\begin{aligned}\pi(p(a,b)|y,n)&=\frac{P(y|p(a,b))P(p(a,b))}{P(y)}=\frac{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}}{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(y+a)\Gamma(n-y+b)}{\Gamma(n+a+b)}}\\&=\frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(y+a)\Gamma(n-y+b)}p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}=\frac{p^{y+a-1}(1-p)^{n-y+b-1}}{B(y+a,n-y+b)}\end{aligned} \quad (5.7.1557)$$

Cette dernière égalité est parfois notée :

$$\pi(p(a,b)|y,n)=\frac{p^{s+\alpha-1}(1-p)^{f+\beta-1}}{B(s+\alpha,f+\beta)} \quad (5.7.1558)$$

Clairement, cette postérieure est une distribution bêta $P_{a,b}(y+a,n-y+b)$. On voit donc que seuls les paramètres de la bêta antérieure se transforment désormais en "hyperparamètres" d'une beta postérieure !

Notez que nous obtenons ensuite rapidement par extension (lors tirage des éléments N parmi les n) :

$$\begin{aligned}\pi(p(a,b)|\vec{y},n)&=\prod_{i=1}^{N}\frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(y_i+a)\Gamma(n-y_i+b)}p^{y_i+a-1}(1-p)^{n-y_i+b-1}\\&=P_{a,b}\left(\sum_i^N y_i+a,nN-\sum_i^N y_i+b\right)\end{aligned} \quad (5.7.1559)$$

Cette dernière relation est parfois notée Bbin(a,b,n).

Remarque

Le pire est que certains auteurs du domaine de fiabilité technique notent la probabilité cumulée que $y<n-F$ où F est le nombre de défaillances comme suit (voir section Génie Industriel page ??) :

$$P_{a,b}\left((n-F)+1,n-(n-F)+b\right)=B(n-F+1,F+b) \quad (5.7.1560)$$

Ensuite, il ne devient pas du tout évident hors contexte de savoir si nous avons affaire à une densité de masse ou à une fonction de distribution.

Un cas intéressant à considérer est celui où nous n'avons aucune prémonition particulière concernant la distribution antérieure. Par conséquent, nous pouvons prendre une fonction qui a

En cours de traduction de l'anglais

la même probabilité pour toutes les valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ du paramètre p de la distribution binomiale.

Par conséquent, la fonction bêta peut toujours être conservée comme une distribution a priori car elle est réduite au cas uniforme :

$$P_{a,b}=P_{1,1}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)}p^{1-1}(1-p)^{1-1}1_{]0,1[}=1\cdot 1_{]0,1[} \tag{5.7.1561}$$

qui est donc une distribution uniforme continue dans l'intervalle $[0,1]$. La fonction postérieure du paramètre p est alors donnée par :

$$\pi(p(1,1)|\vec{y},n)=P_{1,1}\left(\sum_i^N y_i+1,nN-\sum_i^N y_i+1\right) \tag{5.7.1562}$$

Calculons maintenant la moyenne et la variance attendues de la distribution bêta-binomiale en utilisant[38] la loi de l'espérance totale (voir page 497) et celle de la loi de la variance totale (page 499) :

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|\pi)) \qquad \mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(\mathrm{V}(Y|\pi))+\mathrm{V}(\mathrm{E}(Y|\pi)) \tag{5.7.1563}$$

L'espérance et la variance pour la distribution binomiale sont supposées si bien connues que nous ne les mentionnerons pas ici (voir page
pagerefbinomial distribution), et pour la distribution bêta que nous avons (voir page 747) :

$$\mathrm{E}(\pi)=\frac{a}{a+b} \qquad \mathrm{V}(\pi)=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \tag{5.7.1564}$$

En utilisant la loi de l'espérance totale, nous avons :

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|\pi))=\mathrm{E}(np)=n\mathrm{E}(p)=n\mathrm{E}(\pi)=\frac{na}{a+b} \tag{5.7.1565}$$

et en utilisant la loi de la variance totale, nous avons (dans la deuxième ligne, nous avons utilisé la relation de Huygens) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{E}(\mathrm{V}(Y|\pi))+\mathrm{V}(\mathrm{E}(Y|\pi))=\mathrm{E}(np(1-p))+\mathrm{V}(np)\\
&=n\mathrm{E}(p)-n\mathrm{E}(p^2)+n^2\mathrm{V}(p)=n\left(\mathrm{E}(p)-\mathrm{V}(p)-\mathrm{E}(p)^2+n\mathrm{V}(p)\right)\\
&=n\left(\frac{a}{a+b}-\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+n\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\right)\\
&=n\left(\frac{a(a+b)(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}-\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}-\frac{a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}+n\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\right)\\
&=n\frac{a(a+b)(a+b+1)-ab-a^2(a+b+1)+nab}{(a+b)^2(a+b+1)}\\
&=n\frac{(a^2+ab)(a+b+1)-ab-a^3-a^2b-a^2+nab}{(a+b)^2(a+b+1)}\\
&=n\frac{a^3+a^2b+a^2+a^2b+ab^2+ab-ab-a^3-a^2b-a^2+nab}{(a+b)^2(a+b+1)}\\
&=n\frac{a^2b+ab^2+nab}{(a+b)^2(a+b+1)}=\frac{nab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned} \tag{5.7.1566}$$

[38] Il existe d'autres façons (compliquées) de déduire l'espérance et la variance, mais si vous vous souvenez de ces relations, vous avez pour autant que nous le savonss la dérivation la plus simple !

En cours de traduction de l'anglais

Donc, pour résumer, nous avons pour l'espérance postérieure et la variance postérieure :

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{na}{a+b} \qquad \mathrm{V}(Y)=\frac{nab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)} \tag{5.7.1567}$$

Si nous réintroduisons p, cela peut être écrit :

$$\mathrm{E}(Y)=np \qquad \mathrm{V}(Y)=np(1-p)\frac{a+b+n}{a+b+1} \tag{5.7.1568}$$

On remarque que la variance est plus élevée que pour la distribution binomiale correspondante. On dit alors qu'il y a "surdispersion".

5.7.9.2.1.1 Antérieure Non-informative

Lorsque les distributions antérieures (probabilités à priori) n'ont pas de base de population, elles peuvent être difficiles à choisir, et il existe depuis longtemps un désir de distributions à priori dont on peut garantir qu'elles jouent un rôle minimal dans la distribution postérieure. Ces distributions sont parfois nommées "distributions antérieures de référence", et la densité antérieure est décrite comme "à priori non informatif". On dit souvent que la raison pour l'usage des distribution à priori non-informatives est de *laisser les données parler d'elles-mêmes*, de sorte que les inférences ne sont pas affectées par des informations extérieures aux données connues.

Certaines personnes s'attendent à ce qu'une estimation antérieure uniforme soit un bon exemple d'un a priori non-informatif et qui permettrait de retomber sur le même résultat que l'approche fréquentiste[39]. Cependant, ce n'est pas le cas !

Par exemple, regardons le problème classique de Bernoulli - nous lançons des pièces et s sont les côtés faces, f les côtés piles.

Nous voulons prédire p, la probabilité de faces sur n'importe quel lancé d'une pièce donnée.

L'approche fréquentiste consiste à dire que p est simplement $s/(s+f)$. Dans cette approche, nous ne supposons rien sur la distribution de p et nous trouvons simplement l'estimation du maximum de vraisemblance. C'est logique !

Maintenant, adoptons l'approche bayésienne et nous disons :

$$P(p|\text{données})=\frac{P(\text{données}|p)\cdot P(p)}{P(\text{données})} \tag{5.7.1569}$$

Comme nous l'avons prouvé plus haut à la page 881 si nous prenons comme antérieure la distribution bêta, nous obtenons :

$$P(p|\text{data})=\frac{p^{s+\alpha-1}(1-p)^{f+\beta-1}}{B(s+\alpha,f+\beta)} \tag{5.7.1570}$$

[39]Pour des raisons que nous ignorons encore, même les physiciens de la théorie des cordes semblent utiliser la distribution uniforme comme "choix naturel" (critère de naturalité) pour un a priori non-informatif. Une première tentative pour justifier la distribution de probabilité uniforme pour le critère de naturalité pourrait être de dire qu'elle n'introduit pas de paramètres supplémentaires dans la théorie des cordes. Mais bien sûr, elle le fait : elle introduit le nombre 1 comme largeur typique ! Certains physiciens, cependant, soutiennent sans évidence scientifique pour l'instant, que 1 satisfait le critère de naturalité...

En cours de traduction de l'anglais

Supposons maintenant que nous voulons trouver l'espérance p :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(p|\text{data}) &= \int_0^1 P(p|\text{data})\cdot p\cdot \mathrm{d}p = \int_0^1 \dfrac{p^{s+\alpha-1}(1-p)^{f+\beta-1}}{B(s+\alpha,f+\beta)}\cdot p\cdot \mathrm{d}p \\ &= \int_0^1 \dfrac{p^{s+\alpha}(1-p)^{f+\beta-1}}{B(s+\alpha,f+\beta)}\cdot \mathrm{d}p = \dfrac{B(s+\alpha+1,f+\beta)}{B(s+\alpha,f+\beta)}\end{aligned} \tag{5.7.1571}$$

On retombe évidemment sur la même expression de l'espérance que la distribution bêta (car c'est un conjugué antérieur !). On peut donc faire la même simplification :

$$\mathrm{E}(p|\text{données}) = \dfrac{B(s+\alpha+1,f+\beta)}{B(s+\alpha,f+\beta)} = \dfrac{s+\alpha}{s+\alpha+f+\beta} \tag{5.7.1572}$$

Jusqu'à présent, cela fait sens ! Supposons maintenant que nous voulions choisir une antérieure vraiment "objective" afin d'émuler l'approche fréquentiste, comme une distribution uniforme. Cela équivaut à $B(1,1)$ comme nous l'avons prouvé lors de notre étude de la distribution bêta. Dans ce cas, nous obtiendrions :

$$\mathrm{E}(p|\text{data};\alpha=1,\beta=1) = \dfrac{s+1}{s+f+2} \tag{5.7.1573}$$

Cela peut faire mal au cerveau de certaines personnes ! Même si nous sommes aussi "objectif" que possible ("p" est vraisemblablement égal à n'importe quoi), nous obtenons un résultat différent de l'approche fréquentiste.

D'un autre côté, si nous choisissons une antérieure non intuitive comme $B(0,0)$, nous obtenons le même résultat que l'approche fréquentiste :

$$\mathrm{E}(p|\text{données};\alpha=0,\beta=0) = \dfrac{s}{s+f} \tag{5.7.1574}$$

Qu'est-ce qui rend $B(0,0)$ plus similaire à l'approche fréquentiste que $B(1,1)$? Quelle hypothèse faisons-nous avec $B(1,1)$? Comment est-il possible que $B(0,0)$ soit moins informative ? En fait, vous ne pouvez pas poser cette question car elle est tout simplement incohérente par définition !

Il n'existe pas d'a priori objectif et unique qui représente l'ignorance. Au lieu de cela, les a priori de référence sont choisis par accord public, tout comme les unités de longueur et de poids. Dans cette interprétation, les références a priori s'apparentent à une option par défaut dans un progiciel informatique. Nous revenons à la valeur par défaut lorsqu'il n'y a pas suffisamment d'informations pour définir autrement l'a priori.

Décrivons brièvement ci-dessous les classes suivantes d'a priori non informatifs :

- **Antérieure uniforme de Bayes-Laplace** : Il s'agit du a priori que nous avons introduits juste plus haut et qui sont originaires de Bayes et de Laplace (118 et 119ème siècle selon calendrier holocène).
- **Antérieure de Jeffreys'** : Jeffreys (11946 selon calendrier holocène) a proposé une méthode d'attribution d'a priori cohérente sous reparamétrisation (nous donnerons plus de détails à ce sujet le jour où nous en aurons besoin pour une application pratique dans ce livre).

En cours de traduction de l'anglais

- **Antérieure avec entropie maximale de Jaynes** : Jaynes (11968 selon calendrier holocène) a proposé une autre méthode pour obtenir des a priori non informatifs. Il a soutenu que la distribution de probabilité qui représente le mieux un état de connaissances donné peut être trouvée en maximisant l'entropie de la distribution (voir section Mécanique Statistique page ??), sous réserve de certaines contraintes représentant les informations disponibles.

- **Antérieure de référence de Bernardo** : Bernardo (11979 selon calendrier holocène) a proposé que comme l'antérieure doit influencer le moins possible la postérieure, pour que cela se produise, la postérieure devrait être en moyenne très différent de l'antérieure. Par conséquent, un a priori de référence est trouvé en maximisant la valeur attendue de la divergence Kullback-Leibler (voir section Mécanique Satistique page ??) de l'antérieure par rapport à la postérieure.

Définitions (#5.7.141) :

D1. Une distribution est dite "priori plat", si sa précision est nulle ou si sa variance est infinie (dans l'inférence bayésienne, la "précision" est par définition l'inverse de la variance).

D2. Une distribution est dite "priori stricte", si sa précision est infinie ou si sa variance est nulle (dans l'inférence bayésienne, la "précision" est par définition l'inverse de la variance).

D3. Une distribution est nommée "priori faible", si sa précision ou sa variance sont non nulles et finies (dans l'inférence bayésienne, la "précision" est par définition l'inverse de la variance).

D4. Une distribution est nommée "priori empirique", si elle a été dérivée de données empiriques.

D5. Une distribution est nommée "a priori théorique", si elle a été spécifiée sans tenir compte des données empiriques.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.2.2 Antérieure Normale pour vraisemblance Normale

Nous ne nous concentrerons ici que sur le cas où la moyenne est inconnue car en pratique c'est la plus utilisée (à notre connaissance) et c'est aussi selon notre point de vue personnel le seul cas intuitif à expliquer pédagogiquement...

Considérons que nous voulons faire l'inférence sur la moyenne. Nous supposons que la variable aléatoire mesurée y suit probablement une distribution Normale de la moyenne et de l'écart type $\mathcal{N}(y|\mu,\sigma)$ (c'est-à-dire la vraisemblance de y) et avec l'antérieure que μ suive une distribution Normale $\mathcal{N}(\mu_0,\sigma_0)$, qui peut être considérée comme un bon choix tant que les valeurs possibles de μ correspondent au domaine de définition de la distribution Normale.

Nous avons alors (rappelez-vous que dans la distribution précédente c'est le paramètre d'intérêt

qui est la variable aléatoire !) :

$$\begin{aligned}
\pi(\mu|\vec{y},\sigma) &\propto P(\vec{y}|\mu,\sigma)P(\mu_0,\sigma_0)=\mathcal{N}(\vec{y}|\mu,\sigma)\mathcal{N}(\mu_0,\sigma_0)\\
&=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\exp\left(-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)\\
&\propto \exp\left(\sum_{i=1}^{n}-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_0^2}\left[\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2+\sigma^2(\mu-\mu_0)^2\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_0^2}\left[\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}(y_i^2-2\mu y_i+\mu^2)+\sigma^2(\mu^2-2\mu\mu_0+\mu_0^2)\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_0^2}\left[\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sigma_0^2\mu\sigma_{i=1}^{n}y_i+\sigma_0^2n\mu^2+\sigma^2\mu^2-2\sigma^2\mu\mu_0+\sigma^2\mu_0^2\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_0^2}\left[\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sigma_0^2\mu\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i+\sigma_0^2n\mu^2+\sigma^2\mu^2-2\sigma^2\mu\mu_0+\sigma^2\mu_0^2\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_0^2}\left[\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sigma_0^2\mu n\bar{y}+\sigma_0^2n\mu^2+\sigma^2\mu^2-2\sigma^2\mu\mu_0+\sigma^2\mu_0^2\right]\right)
\end{aligned}\tag{5.7.1575}$$

Nous regroupons et réorganisons certains termes :

$$\begin{aligned}
\pi(\mu|\vec{y},\sigma) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\sigma_0^2}\left[\mu^2(\sigma^2+\sigma_0^2n)-2\mu(\sigma^2\mu_0+\sigma_0^2n\bar{y})+\sigma^2\mu_0^2+\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\mu^2\left(\frac{\sigma^2+\sigma_0^2n}{\sigma^2\sigma_0^2}\right)-2\mu\left(\frac{\sigma^2\mu_0+\sigma_0^2n\bar{y}}{\sigma^2\sigma_0^2}\right)+\frac{\sigma^2\mu_0^2+\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{\sigma^2\sigma_0^2}\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\mu^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)-2\mu\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}\right)+\frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{\sigma^2}\right]\right)
\end{aligned}\tag{5.7.1576}$$

Nous multiplions maintenant la partie intérieure des crochets par :

$$\frac{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}\tag{5.7.1577}$$

dans le but d'éliminer μ^2 :

$$\begin{aligned}
\pi(\mu|\vec{y},\sigma) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}\left[\mu^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)-2\mu\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}\right)+k\right]\right)\\
&=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)\left[\mu^2\left(\frac{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}\right)-2\mu\left(\frac{\dfrac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\dfrac{n\bar{y}}{\sigma^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}\right)+\underbrace{\frac{\dfrac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{\sigma^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2}+\dfrac{n}{\sigma^2}}}_{:=k}\right]\right)
\end{aligned}\tag{5.7.1578}$$

En cours de traduction de l'anglais

où k ne dépend pas de μ. Continuons... :

$$\begin{aligned}\pi(\mu|\vec{y},\sigma) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)\left[\mu^2-2\mu\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}\right)+k\right]\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)\left[\mu-\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}\right)\right]^2\right)\end{aligned} \quad (5.7.1579)$$

En supposant qu'il existe un k tel que (...) :

$$k=\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}\right)^2 \quad (5.7.1580)$$

Remarque

En d'autres termes, nous devons vérifier que lors de l'utilisation de cet outil que :

$$\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}\right)^2=\frac{\frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}+\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}} \quad (5.7.1581)$$

La distribution postérieure ressemble donc bien à l'apparence d'une loi Normale :

$$\pi(\mu|\vec{y},\sigma)\propto\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)\left[\mu-\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}\right)\right]^2\right) \quad (5.7.1582)$$

Remarque

A l'opposé de notre étude de la distribution postérieure bêta-binomiale, nous ne diviserons pas ici par la distribution marginale qui n'est de toute façon qu'une constante de normalisation et ne nous intéresse pas vraiment pour l'instant pour l'application pratique que nous aurons beaucoup plus tard dans ce livre.

La moyenne et la variance de la distribution postérieure sont alors, par analogie, égales à :

$$\begin{aligned}\mu_p &= \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}}=\frac{\frac{\mu_0\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{y}\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma^2}}{\sigma^2+\sigma_0^2 n}=\frac{\mu_0\sigma^2+n\bar{y}\sigma_0^2}{\sigma^2+\sigma_0^2 n}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2 n}\mu_0+\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2+\sigma_0^2 n}n\bar{y}\\ \sigma_p^2 &= \left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)^{-1}=\frac{\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma_0^2 n+\sigma^2}\end{aligned} \quad (5.7.1583)$$

En cours de traduction anglais

Analysons un peu plus en détail comment la moyenne antérieure μ_0 et la moyenne postérieure μ_p sont liées l'une à l'autre :

$$\mu_p = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2 n}\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2+\sigma_0^2 n} n\bar{y} \qquad (5.7.1584)$$

Nous pouvons observer que lorsque n augmente, la moyenne empirique $\bar{y}$ (deuxième terme) domine la moyenne antérieure (a priori) μ_0. Lorsque la variance antérieure σ_0^2 diminue, la moyenne a priori (premier terme) prend une importance prédominante.

Rappelons qu'en pratique le spécialiste choisira, sur la base de son retour d'expérience (REX), les antérieurs $\{\mu_0, \sigma_0\}$ à propos de μ_p (puisque ce dernier en dépend) et que l'écart type σest supposé connu (c'est l'ensemble de tous ces paramètres qui fait que beaucoup de praticiens préfèrent l'approche fréquentiste...).

5.7.9.2.3 Antérieure Binomiale pour vraisemblance Binomiale

Ce cas nous a été envoyé par un lecteur. Nous avons accepté de l'ajouter dans le présent livre pour deux raisons ! La première est que le "binôme conditionnel" est un cas intéressant où l'a priori et la vraisemblance sont tous deux discrets (et ce n'est pas toujours intuitif de traiter cela), la seconde est qu'il utilise une sorte de notation qui devrait être connue à un maximum de gens et que nous pouvons rencontrer dans d'autres manuels. Voyons donc cela !

Soit X et Y deux variables aléatoires où Y est distribué de manière binomiale conditionnellement à X :

$$Y \mid X \sim \text{Bin}(X, q) \qquad (5.7.1585)$$

et X suit également une distribution binomiale mais avec une fréquence de réussite différente :

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \qquad (5.7.1586)$$

Alors, comme nous allons le prouver, la distribution marginale de Y inconditionnelle sur X est encore une distribution binomiale :

$$Y \sim \text{Bin}(n, pq) \qquad (5.7.1587)$$

En effet, pour démontrer cela rappelons-le, nous nous intéressons à la probabilité que Y soit égal à un nombre m. Selon la loi de probabilité marginale ou la loi de probabilité totale, cette probabilité peut s'exprimer comme suit :

$$P(Y=m) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=m \mid X=k)\cdot P(X=k) \qquad (5.7.1588)$$

Puisque, par définitions de l'antérieure et de la vraisemblance, $P(X=k)=0$ quand $k>n$ et $P(Y=m \mid X=k)=0$ quand $k<m$, nous avons :

$$P(Y=m) = \sum_{k=m}^{n} P(Y=m \mid X=k)\cdot P(X=k) \qquad (5.7.1589)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons maintenant prendre la fonction de masse de probabilité de la distribution binomiale (voir section Statistiques 646) et l'injecter dans les termes de la somme ci-dessus pour obtenir :

$$P(Y=m)=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}q^m(1-q)^{k-m}\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \tag{5.7.1590}$$

En appliquant l'identité du coefficient binomial (voir section Probabilités page 523) :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} \tag{5.7.1591}$$

et en réorganisant les termes, nous avons :

$$P(Y=m)=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}p^kq^m(1-p)^{n-k}(1-q)^{k-m} \tag{5.7.1592}$$

Maintenant, nous partitionnons $p^k=p^m\cdot p^{k-m}$ et extrayons tous les termes dépendants de k de la somme :

$$\begin{aligned}P(Y=m)&=\binom{n}{m}p^mq^m\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}p^{k-m}(1-p)^{n-k}(1-q)^{k-m}\\&=\binom{n}{m}(pq)^m\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}(p(1-q))^{k-m}(1-p)^{n-k}\end{aligned} \tag{5.7.1593}$$

Ensuite, nous substituons $i=k-m$, tel que $k=i+m$:

$$P(Y=m)=\binom{n}{m}(pq)^m\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n-m}{i}(p-pq)^i(1-p)^{n-m-i} \tag{5.7.1594}$$

D'après le théorème binomial (voir section Algèbre page 1347) :

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \tag{5.7.1595}$$

la somme dans la relation anté-précédente est donc égale à :

$$\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n-m}{i}(p-pq)^i(1-p)^{n-m-i}=((p-pq)+(1-p))^{n-m} \tag{5.7.1596}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}P(Y=m)&=\binom{n}{m}(pq)^m\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n-m}{i}(p-pq)^i(1-p)^{n-m-i}\\&=\binom{n}{m}(pq)^m(p-pq+1-p)^{n-m}\\&=\binom{n}{m}(pq)^m(1-pq)^{n-m}\end{aligned} \tag{5.7.1597}$$

qui est la fonction de masse de probabilité de la distribution binomiale avec les paramètres n et pq, telle que :

$$Y\sim\text{Bin}(n,pq) \tag{5.7.1598}$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.9.2.4 Intervalles de Crédibilité

Dans le domaine inférence bayésienne, un "intervalle de crédibilité" est un intervalle dans lequel une valeur de paramètre non observée tombe avec une probabilité particulière. Il s'agit d'un intervalle dans le domaine d'une distribution de probabilité postérieure ou d'une distribution prédictive. La généralisation aux problèmes multivariés est la région crédible. Les intervalles crédibles sont analogues aux intervalles de confiance dans les statistiques fréquentistes, bien qu'ils diffèrent sur une base philosophique : les intervalles bayésiens traitent leurs limites comme fixes et le paramètre estimé comme une variable aléatoire, tandis que les intervalles de confiance fréquentistes traitent leurs limites comme des variables aléatoires et le paramètre comme un valeur fixe. En outre, les intervalles de crédibilité bayésiens utilisent (et nécessitent en fait) la connaissance de la distribution antérieure spécifique à la situation, contrairement aux intervalles de confiance fréquentistes.

Un statisticien bayésien dirait que, compte tenu de ses données observées, il y a une probabilité cumulée de 95% que la vraie valeur de θ se situe dans la région crédible tandis que le statisticien fréquentiste dirait qu'il y a une probabilité de 95% que lorsqu'il calcule un intervalle de confiance à partir de données de ce type, la vraie valeur de θ y tombera.

Techniquement, "l'intervalle de crédibilité" bayésien de taille $1-\alpha$ est un intervalle $[x_1, x_2]$, où :

$$P(x_1 \leq \theta \leq x_2 | D) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \pi(p(\theta|D))\mathrm{d}\theta = 1-\alpha \tag{5.7.1599}$$

Notez que c'est le paramètre et non les limites d'intervalle, conditionné par les données D, qui est aléatoire dans ce contexte ! Cela rend un intervalle de crédibilité plus intuitif car maintenant nous pouvons interpréter $1-\alpha$ comme une probabilité (postérieure) étant donné un ensemble de données observées. Dans le cadre fréquentiste, un intervalle de confiance donné est correct ou incorrect puisque θ est fixe. Le niveau de confiance nous indique seulement quelle proportion d'intervalles de confiance serait correcte si nous répétions nos calculs en utilisant de nouveaux échantillons indépendants de la même distribution sous-jacente, ce que de nombreux non-statisticiens trouvent déroutant.

En cours de traduction de l'anglais

Voyons un exemple compagnon bien illustré (par ailleurs...) dans notre livre compagnon sur le logiciel `R` pour obtenir plus d'intuition sur les différentes approches.

Considérons un problème simple avec des essais de Bernoulli dans le domaine des réclamations d'assurance. Nous voulons dériver un certain intervalle de confiance pour la probabilité de réclamer une perte. Il y avait $n=1047$ polices d'assurance et $y=159$ réclamations.

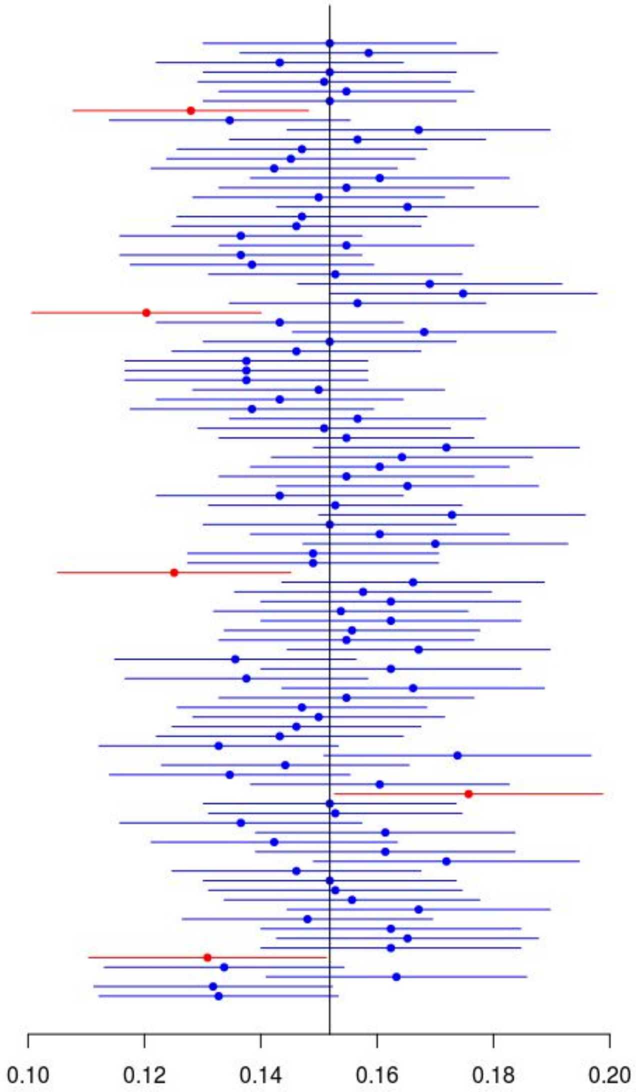
Considérons l'intervalle de confiance standard (fréquentiste) de la proportion. Qu'est-ce que cela signifie que :

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{5.7.1600}$$

est l'intervalle de confiance (asymptotique) à 95% ? La façon dont nous pouvons le voir est très simple. Générons quelques échantillons, de taille n, avec la même probabilité que l'empirique,

c'est-à-dire $\hat{p}$ (qui est la signification de *à partir de données de ce type*). Pour chaque échantillon, nous calculons l'intervalle de confiance avec la relation ci-dessus. Il s'agit d'un intervalle de confiance de 95% car dans 95% des scénarios, la valeur empirique se situe dans l'intervalle de confiance.

Si nous écrivons un code `R` qui calcule 100 de ces intervalles, nous obtenons généralement :



En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, qu'en est-il de l'intervalle de crédibilité bayésien ? Supposons que la distribution antérieure de la probabilité (notée $\hat{p}$ dans le cadre fréquentiste) de faire une réclamation ait une distribution $\mathcal{B}(a, b)$. Nous avons vu dans ce qui précède que, puisque la distribution bêta est le conjugué de celle de Bernoulli, la distribution postérieure sera également bêta. Plus précisément :

$$\pi(p(a,b)|\vec{y},n) = P_{a,b}\left(\sum_i^N y_i + a, nN - \sum_i^N y_i + b\right) \qquad (5.7.1601)$$

Choisissons une antérieure (a priori) uniforme :

$$\pi(p(1,1)|\vec{y},n) = P_{1,1}\left(\sum_i^N y_i + 1, nN - \sum_i^N y_i + 1\right) \qquad (5.7.1602)$$

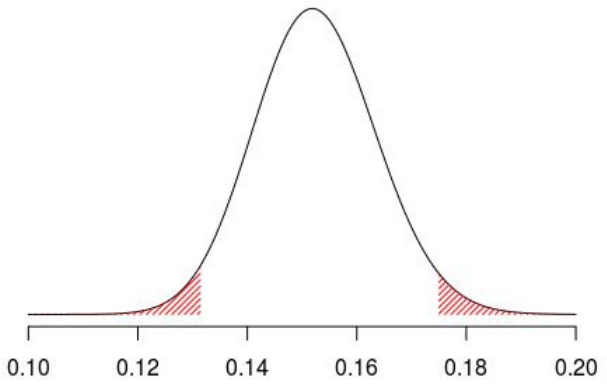
et considérons que nous ne faisons l'expérience qu'une seule fois ($N = 1$) :

$$\pi(p(1,1)|\vec{y},n) = P_{1,1}\left(y+1, n-y+1\right) = P_{1,1}\left(159+1, 1047-159+1\right) = P_{1,1}(160, 989) \quad (5.7.1603)$$

Sur la base de cette propriété, l'intervalle de crédibilité à 95% est basé sur des quantiles de cette distribution (postérieure) tels que :

$$P(x_1 \leq \theta \leq x_2|D) = \int_{x_1}^{x_2} \pi(p(\theta|D))\mathrm{d}\theta = \int_{x_1}^{x_2} P_{1,1}(160, 989)\mathrm{d}\theta = 95\% \quad (5.7.1604)$$

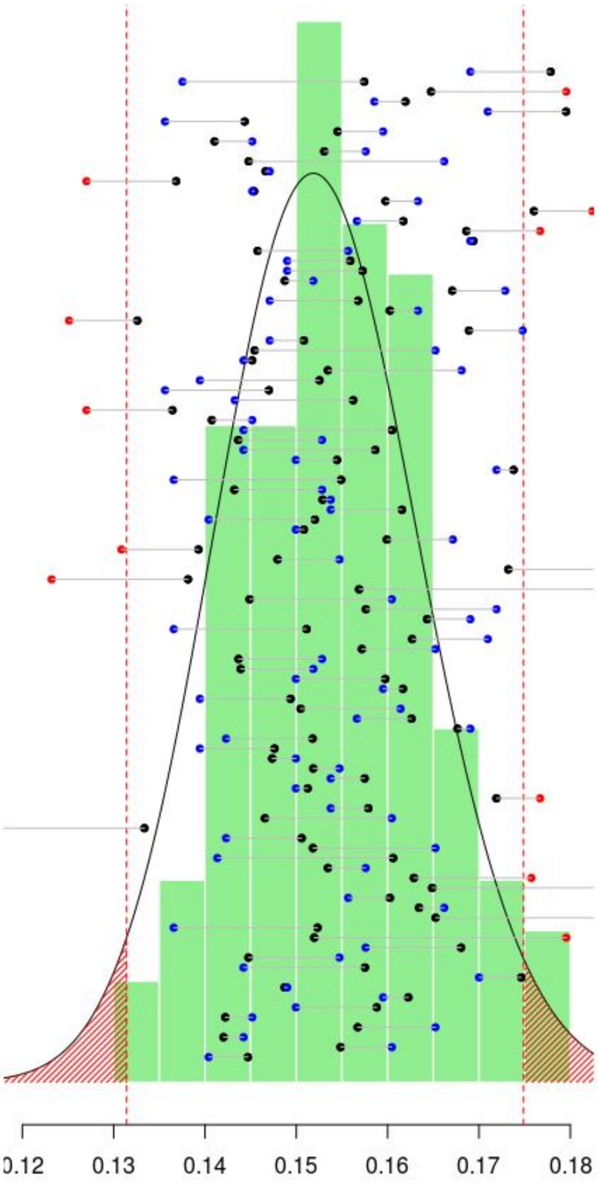
et a la forme suivante si tracée avec le logiciel statistique R :



Il est simple avec un logiciel statistique d'obtenir les quantiles de la borne inférieure et de la borne supérieure de l'intervalle de crédibilité.

Nous pouvons maintenant tracer à nouveau 100 simulations pas générées en utilisant toujours la même proportion estimée comme auparavant, mais en utilisant cette fois-ci certaines probabilités possibles (en vert, ci-dessous, nous pouvons visualiser l'histogramme de ces valeurs choisies au hasard), sur la base de cette distribution postérieure (étant données les observations) :

En cours de traduction de l'anglais



En cours de l'anglais

Ci-dessus, il y a 95% de probabilité cumulée que ces proportions empiriques se situent dans l'intervalle de crédibilité, défini à l'aide des quantiles de la distribution postérieure. On peut en fait visualiser toutes ces proportions : en noir la proportion utilisée pour générer l'échantillon, puis, en bleu ou rouge, les moyennes obtenues sur ces échantillons simulés.

5.7.9.2.5 Facteur de Bayes (FB)

En statistique, l'utilisation du "Facteur de Bayes" (c'est-à-dire "évidence" en science expérimentale) est une alternative bayésienne au test d'hypothèse classique de la p-valeur. La comparaison de modèles bayésiens est une méthode de sélection de modèles basée sur des facteurs de Bayes. Les modèles considérés sont des modèles statistiques. L'objectif du facteur Bayes est de quantifier le support d'un modèle par rapport à un autre, que ces modèles soient corrects ou non. La définition technique de "support" dans le contexte de l'inférence bayésienne est décrite ci-dessous.

Rappelons que selon le théorème de Bayes, nous pouvons mettre à jour les probabilités a priori d'un modèle $\mathcal{M}$ ($P(\mathcal{M})$) en probabilités a posteriori ($P(\mathcal{M}|D)$) après avoir observé une certaine quantité de données D en tenant compte de la probabilité d'observer ces données étant donné le modèle ($P(D|\mathcal{M})$, également appelée "vraisemblance") :

$$P(\mathcal{M}|D)=\frac{P(D|\mathcal{M})P(\mathcal{M})}{P(D)} \qquad (5.7.1605)$$

En utilisant cette équation, nous pouvons comparer les cotes de probabilité de deux modèles :

$$\frac{P(\mathcal{M}_1|D)}{P(\mathcal{M}_2|D)}=\frac{P(D|\mathcal{M}_1)}{P(D|\mathcal{M}_2)}\cdot\frac{P(\mathcal{M}_1)}{P(\mathcal{M}_2)} \qquad (5.7.1606)$$

Cette dernière relation est aussi souvent notée :

$$\frac{P(H_0|D)}{P(H_1|D)}=\frac{P(D|H_0)}{P(D|H_1)}\cdot\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \qquad (5.7.1607)$$

Où le terme le plus à gauche est la cote a posteriori, le terme le plus à droite est la cote a priori et le terme du milieu est le facteur de Bayes :

$$\text{BF}_{12}=\frac{P(D|\mathcal{M}_1)}{P(D|\mathcal{M}_2)} \qquad (5.7.1608)$$

Cette dernière relation est aussi souvent notée :

$$\text{BF}_{10}=\mathfrak{B}_{12}=\frac{P(D|H_0)}{P(D|H_1)} \qquad (5.7.1609)$$

Ainsi, les facteurs de Bayes peuvent être vus soit comme un ratio quantifiant la probabilité relative de certaines données observées par deux modèles tels qu'ils peuvent être calculés en comparant les probabilités marginales des deux modèles, soit comme le degré auquel certaines croyances antérieures sur la crédibilité relative de deux modèles doivent être mis à jour car ils peuvent être calculés en divisant les cotes a posteriori par les cotes a priori, comme nous le montrerons bientôt.

Évidemment lorsque les deux modèles sont équiprobables a priori, de sorte que $P(\mathcal{M}_1)=P(\mathcal{M}_2)$, le facteur de Bayes est égal au rapport des probabilités a posteriori de $mathcalM_1$ et $\mathcal{M}_2$.

Facteur de Bayes BF_{10}	**Usages (...)**
>100	Évidence extrême pour H_1
$30-100$	Évidence très solide pour H_1
$10-30$	Évidence forte H_1
$3-10$	Évidence modérée pour H_1
$1-3$	Évidence anecdotique pour H_1
1	Pas d'évidence
$1/3-1$	Évidence anecdotique pour H_0
$1/3-1/10$	Évidence modérée pour H_0
$1/10-1/30$	Évidence forte H_0
$1/30-1/100$	Évidence très solide pour H_0
$<1/100$	Évidence extrême pour H_0

TAB. 5.47 – **Interprétations du Facteur de Bayes**

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Supposons que nous ayons une variable aléatoire qui produit soit un succès, soit un échec. Nous voulons comparer un modèle $\mathcal{M}_1$ où la probabilité de succès est $q = 1/2$, et un autre modèle $\mathcal{M}_2$ où θ est inconnue et on prend pour θ une distribution a priori uniforme sur $[0, 1]$. Nous prenons un échantillon de 200 lancés et trouvons 115 succès et 85 échecs. La vraisemblance peut être calculée selon la distribution binomiale :

$$\binom{200}{115}\theta^{115}(1-\theta)^{85} \tag{5.7.1610}$$

Dès lors nous avons pour $\mathcal{M}_1$:

$$P(X = 115 \mid \mathcal{M}_1) = \binom{200}{115}\left(\frac{1}{2}\right)^{200} = 0.005956\ldots \tag{5.7.1611}$$

alors que pour $\mathcal{M}_2$ nous avons (le développement implique la distribution bêta) :

$$\begin{aligned}
P(X = 115 \mid \mathcal{M}_2) &= \int_0^1 \binom{200}{115}\theta^{115}(1-\theta)^{85}\mathrm{d}\theta = \binom{200}{115}\cdot\int_0^1 \theta^{115}(1-\theta)^{85}\mathrm{d}\theta \\
&= \binom{200}{115}\cdot B(116, 86) = \binom{200}{115}\cdot\frac{\Gamma(116)\cdot\Gamma(86)}{\Gamma(116+86)} \\
&= \frac{200!}{115!\cdot 85!}\cdot\frac{115!\cdot 85!}{201!} = \frac{1}{201} = 0.004975\ldots
\end{aligned} \tag{5.7.1612}$$

Le ratio est alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{BF}_{12} &= \frac{P(X = 115 \mid \mathcal{M}_1)}{P(X = 115 \mid \mathcal{M}_2)} = \frac{\mathcal{B}(k, N, 0.5)}{\int B(\theta, 1, 1)\mathcal{B}(k, N, \theta)} \\
&= \frac{\binom{N}{k}0.5^k(1-0.5)^{N-k}}{\int_0^1 \binom{N}{k}\theta^k(1-\theta)^{N-k}\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\binom{N}{k}0.5^N}{\binom{N}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{N-k}\,\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{0.5^N}{B(k+1, N-k+1)} \cong 1.197\ldots
\end{aligned} \tag{5.7.1613}$$

ce qui "vaut à peine la peine d'être mentionné" même si cela pointe très légèrement vers $\mathcal{M}_1$.

Un test d'hypothèse fréquentiste de $\mathcal{M}_1$ (considéré ici comme une hypothèse nulle) aurait produit un résultat très différent. Un tel test indique que $\mathcal{M}_1$ doit être rejeté au niveau de signification 5%, puisque la probabilité d'obtenir 115 réussites ou plus à partir d'un échantillon de 200 si $\theta = 1/2$ est égale à 0.0200, et en tant que test bilatéral pour obtenir un chiffre aussi extrême ou plus extrême que 115, c'est 0.0400. Notez que 115 est à plus de deux écarts-types de 100. Ainsi, alors qu'un test d'hypothèse fréquentiste donnerait des résultats significatifs au niveau de signification de 5%, le facteur Bayes ne considère guère qu'il s'agit d'un résultat extrême. Notez, cependant, qu'un a priori non uniforme (par exemple un qui reflète le fait que vous vous attendez à ce que le nombre

de succès et d'échecs soit du même ordre de grandeur) pourrait entraîner un facteur de Bayes qui est plus en accord avec le test d'hypothèse fréquentiste.

Nous pouvons voir dans cet exemple que le facteur de Bayes (l'évidence) de H_0 par rapport à H_1 est alors le rapport de la vraisemblance sous H_0 à la vraisemblance moyenne sous H_1 (ou "cote" de H_0 à H_1) !

Un test classique du rapport de vraisemblance aurait trouvé l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ, soit $115/200 = 0,575$, d'où :

$$P\left(X = 115 \mid \mathcal{M}_2\right) = \binom{200}{115} \theta^{115}(1-\theta)^{85} = 0.056991 \qquad (5.7.1614)$$

(plutôt que de faire la moyenne de tous les θ possibles). Cela donne un rapport de vraisemblance de $0;1045$ et pointe en faveur de $\mathcal{M}_2$.

$\mathcal{M}_2$ est un modèle plus complexe que $\mathcal{M}_1$ car il a un paramètre libre qui lui permet de modéliser les données plus finement. La capacité des facteurs de Bayes à prendre cela en compte est une des raisons pour lesquelles l'inférence bayésienne a été proposée comme justification théorique et généralisation du rasoir d'Occam, réduisant les erreurs de type I.

D'autre part, la méthode moderne de vraisemblance relative prend en compte le nombre de paramètres libres dans les modèles, contrairement au rapport de vraisemblance classique. La méthode de vraisemblance relative pourrait être appliquée comme suit. Le modèle $\mathcal{M}_1$ a 0 paramètres, et donc sa valeur AIC (voir section Méthodes numériques page ??) est $2 \cdot 0 - 2 \cdot \ln(0.005956) = 10.2467$. Le modèle $\mathcal{M}_2$ a le paramètre 1, et donc sa valeur AIC vaut $2 \cdot 1 - 2 \cdot \ln(0.056991) = 7.7297$. Donc $\mathcal{M}_1$ est environ exp $((7.7297 - 10.2467)/2) = 0.284$ fois plus probable que $\mathcal{M}_2$ pour minimiser la perte d'information. Ainsi, $\mathcal{M}_2$ est légèrement préféré, mais $\mathcal{M}_1$ ne peut pas être exclu !

En cours ... lais

Remarquez de l'exemple ci-dessus que nous pouvons déduire même une définition plus générale du facteur de Bayes :

$$\text{BF}_{12} = \frac{P(D|\mathcal{M}_1)}{P(D|\mathcal{M}_2)} = \frac{\int P(D|\theta_1, \mathcal{M}_1)P(\theta_1|\mathcal{M}_1)\mathrm{d}\theta_1}{\int P(D|\theta_2, \mathcal{M}_2)P(\theta_2|\mathcal{M}_2)\mathrm{d}\theta_2} \qquad (5.7.1615)$$

Soit écrit sous la forme de l'hypothèse nulle et alternative :

$$\text{BF}_{10} = \frac{P(D|H_0)}{P(D|H_1)} = \frac{\int P(D|\theta_1, H_0)P(\theta_1|H_0)\mathrm{d}\theta_1}{\int P(D|\theta_2, H_1)P(\theta_2|H_1)\mathrm{d}\theta_2} \qquad (5.7.1616)$$

Le facteur de Bayes (évidence) de H_0 à H_1 est alors le rapport de la probabilité moyenne sous H_0 à la probabilité moyenne sous H_1 (ou "cotes" de H_0 par rapport à H_1) !

Dans la plupart des cas, ce facteur doit cependant être calculé à l'aide des chaînes de Markov de Monte Carlo (voir section Méthodes numériques page ??).

Comme déjà mentionné lors de notre étude de la distribution de Cauchy, lors de la soumission d'un article avec des facteurs de Bayes pour publication, il est probable que les relecteurs (peer-reviewers) demandent aux auteurs de justifier leurs a priori et de l'expliciter dans leur article

(sinon une certaine valeur du Facteur de Bayes peut avoir été obtenue en trichant !). Des logiciels tels que JASP et le package BayesFactor de R s'appuient sur la distribution de Cauchy (avec deux paramètres qui sont la plupart du temps très difficiles à justifier en pratique) comme a priori pour de nombreuses analyses.

Remarque

Pour éviter le tricheries cachées avec le facteur Bayes (dans la même veine que les tricheries avec la p-valeur), des logiciels comme JASP fournissent automatiquement un graphique de l'évidence pour H_1 ou H_0 pour différents paramètres de largeur de la fonction a priori de Cauchy (appelé parfois "analyse de sensibilité"). En plus du graphique, JASP fournit également une valeur notée $\max \text{BF10}$: cela donne le facteur de Bayes (pour l'hypothèse alternative) et la valeur du paramètre de largeur de la distribution de Cauchy (notée r dans JASP) pour laquelle on trouve le plus grand facteur de Bayes. Ainsi, mener de nombreuses analyses et ne rapporter que la « meillue » est un problème à la fois pour l'inférence fréquentiste et bayésienne. Les facteurs de Bayes ne fournissent pas de solution à ce problème et ne fournissent pas non plus de solutions au taux de faux positifs ! ! ! Les p-valeur et les facteurs de Bayes partagent certains de leurs pièges respectifs. Ni l'un ni l'autre ne doivent être appliqués sans une certaine compréhension des principes sous-jacents ! Par conséquent, un passage des statistiques fréquentistes aux statistiques bayésiennes ne sera probablement pas suffisant pour atténuer la crise de la réplication de la Science...

Ensuite, en pratique, nous remplaçons simplement le numérateur et le dénominateur par des estimations de Monte Carlo. Au numérateur nous obtenons :

$$\int P(D|\theta_1,\mathcal{M}_1)P(\theta_1|\mathcal{M}_1)\mathrm{d}\theta_1 = \mathrm{E}_{\mathcal{M}_1}\left(P(D|\theta,\mathcal{M}_1)\right) \cong \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(D|\theta_1^{(j)},\mathcal{M}_1) \qquad (5.7.1617)$$

où l'indice $\mathcal{M}_1$ à l'espérance indique que θ dans l'espérance est distribué selon (le a priori du) modèle 1 et, en conséquence, les $\theta_1^{(j)}$ se trouvant à droite sont des échantillons indépendants et identiquement distribués du a priori du modèle 1. En utilisant la même approximation pour le dénominateur, nous obtenons :

$$\widehat{\text{BF}}_{12} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(D|\theta_1^{(j)},\mathcal{M}_1)}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(D|\theta_2^{(j)},\mathcal{M}_2)} \qquad (5.7.1618)$$

La loi des grands nombres garantit que cette estimation converge vers la valeur correcte $\widehat{\text{BF}}_{12}$ lorsque la taille de l'échantillon N augmente.

En cours de traduction

Attention ! Il y a une certaine confusion entre les paradigmes fréquentiste et bayésien parce qu'ils utilisent des mêmes mots pour signifier des choses très différentes. Pour nommer le plus problématique d'entre eux, le mot "probabilité". Au-delà des axiomes de Kolmogorov, il serait vraisemblablement bon d'éliminer le mot "probabilité" du domaine des statistiques. Sous le paradigme fréquentiste, « *la probabilité...* » devrait toujours être appelé, « *la proportion d'échantillonnage à long terme...* ». De même, sous le paradigme bayésien, « *la probabilité...* » devrait être appelée « *la croyance infalsifiable de l'expérimentateur...* fg. Si le domaine des statistiques apportait ce changement simple, cela pourrait éviter de nombreuses affirmations absurdes.

Le facteur de Bayes est très utilisé dans les domaines de pointe de diverses sciences comme : les Sciences Sociales (pour comparer différents modèles de comportements), l'Histoire (pour quantifier l'existence réelle d'un personnage), la Cosmologie (pour comparer différents modèles cosmologiques), la Physique des Particules (pour comparer différents modèles de particules fondamentales). Pour en savoir plus, voir l'excellent article [247].

Pour clore ce sujet, donnons un exemple de la réglementation de la FDA (Federal Drug Administration) relative aux essais cliniques basés sur la méthode bayésienne car c'est assez intéressant (en tant que lecteur, faites vos propres conclusions...) :

https://www.fda.gov/media/71512/download

Skala automatyczna

4.8 Assessing the operating characteristics of a Bayesian design

Because of the inherent flexibility in the design of a Bayesian clinical trial, a thorough evaluation of the operating characteristics should be part of the trial planning. This includes evaluation of:

- probability of erroneously approving an ineffective or unsafe device (type I error rate),
- probability of erroneously disapproving a safe and effective device (type II error rate),
- power (the converse of type II error rate: the probability of appropriately approving a safe and effective device),
- sample size distribution (and expected sample size),
- prior probability of claims for the device, and
- if applicable, probability of stopping at each interim look.

A more thorough discussion appears in **Technical Details, Section 7**.

"Pure" Bayesian approaches to statistics do not necessarily place the same emphasis on the notion of control of type I error as traditional frequentist approaches. There have, however, been some proposals in the literature that Bayesian methods should be "calibrated" to have good frequentist properties (e.g. Rubin, 1984; Box, 1980). In this spirit, as well as in adherence to regulatory practice, FDA recommends you provide the type I and II error rates of your proposed Bayesian analysis plan (see **Technical Details, Section 7**).

For Bayesian trials, here are some points to consider regarding type I error:

1. FDA considers type I error, along with other operating characteristics of the trial design, in evaluating submissions. We strive for reasonable control of the type I error rate. An adequate characterization of the

En co n de l'anglais

5.7.10 Loi Faible des Grands Nombres

Nous allons maintenant nous attarder sur une relation très intéressante en statistiques qui permet de dire pas mal de choses tout en ayant peu de données et ce quelle que soit la loi considérée (ce qui est pas mal quand même !). C'est une propriété très utilisée en simulation statistique par exemple dans le cadre de l'utilisation de Monte-Carlo.

Soit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors nous allons démontrer la relation suivante appelée "inégalité de Markov" :

$$\forall\lambda > 0 : P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathrm{E}(X)}{\lambda} \tag{5.7.1619}$$

avec $\mathrm{E}(X) \leq \lambda$ dans le contexte particulier des probabilités.

En d'autres termes, nous proposons de démontrer que la probabilité qu'une variable aléatoire soit plus grande ou égale qu'une valeur λ est inférieure ou égale à son espérance divisée par la valeur considérée λ et ce quelle que soit la loi de distribution de la variable aléatoire X !

Démonstration 5.45.10. Notons les valeurs de X par $(x_1, \ldots, x_n)$, où $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (c'est-à-dire triées par ordre croissant) et posons $x_0 = 0$. Nous remarquons d'abord que l'inégalité est triviale au cas où $\lambda \geq x_n \geq 0$. Effectivement, comme X ne peut être compris qu'entre 0 et x_n par définition alors la probabilité qu'il soit supérieur à x_n est nulle. En d'autres termes :

$$P(X \geqslant \lambda) = 0 \tag{5.7.1620}$$

et X étant positif, $\mathrm{E}(X)$ l'est aussi, d'où l'inégalité pour ce cas particulier dans un premier temps.

Sinon, nous avons $0 < \lambda \leq x_n$ et il existe alors un $k \in (1, \ldots, n)$ tel que $x_{k-1} < \lambda \leq x_k$. Donc :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \geqslant \sum_{i=k}^{n} x_i p_i \geqslant \sum_{i=k}^{n} p_i = \lambda P(X \geqslant \lambda) \tag{5.7.1621}$$

■ Q.E.D.

✍**Exemple :**

Nous supposons que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50. Si nous souhaitons estimer la probabilité cumulée que la production dépasse 75 pièces nous appliquerons simplement :

$$P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{\mathrm{E}(X)}{\lambda} = \frac{50}{75} = 0.6666 = 66.66\% \tag{5.7.1622}$$

Considérons maintenant une sorte de généralisation de cette inégalité appelée "inégalité de Bienaymé-Tchebychev" (abrégée "inégalité BT") qui va nous permettre d'obtenir un résultat très très très intéressant et important un peu plus bas.

En cours de traduction de l'anglais

Considérons une variable aléatoire X réelle (donc nous ne nous limitons pas au seul cas où elle est dans $\mathbb{R}^+$). Alors nous allons démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev suivante :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}} \tag{5.7.1623}$$

qui exprime le fait que plus l'écart-type est petit, plus la probabilité que la variable aléatoire X s'éloigne de son espérance est faible.

Démonstration 5.45.11. Nous obtenons cette inégalité en écrivant d'abord :

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = P\left([X - \mathrm{E}(X)]^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \tag{5.7.1624}$$

où le choix du carré va nous servir pour une simplification future.

Puis en appliquant l'inégalité de Markov (comme quoi c'est quand même utile...) à la variable aléatoire $Y = [X - \mathrm{E}(X)]^2$ avec $\lambda = \varepsilon^2$ il vient automatiquement :

$$P(Y \geqslant \varepsilon^2) = P\left([X - \mathrm{E}(X)]^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{\mathrm{E}(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^2\right)}{\varepsilon^2} \tag{5.7.1625}$$

Ensuite, en utilisant la définition de la variance :

$$\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^2\right) = \mathrm{E}\left([X - \mu_X]^2\right) = \mathrm{V}(X) = \sigma^2 \tag{5.7.1626}$$

Nous obtenons bien :

$$P(Y \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \tag{5.7.1627}$$

■ Q.E.D.

Si nous posons :

$$\varepsilon = t\sigma \tag{5.7.1628}$$

l'inégalité s'écrit aussi :

$$\boxed{P(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant t\sigma) \leqslant \frac{1}{t^2}} \tag{5.7.1629}$$

et exprime que la probabilité cumulée qu'afin que X s'éloigne de son espérance de plus que t fois son écart-type, est inférieure à $1/t^2$. Mais pour $t = 2, 3$ et 4, on peut déduire qu'il y a respectivement 75%, 89% et 94% des données entre l'intervalle défini par 2, 3 et 4 d'écarts-types autour de la moyenne. Il y a, en particulier, moins de 1 chance sur 9 pour que X s'éloigne de son espérance de plus de trois fois l'écart-type. C'est par ailleurs ce théorème qu'a utilisé le comité de Bâle pour définir le facteur de correction de la Value At Risk utilisé en finance (voir section Économie page ??).

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Nous reprenons l'exemple où le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50. Nous supposons en plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Nous cherchons à calculer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit comprise entre 40 et 60 pièces.

Pour calculer ceci il faut d'abord se souvenir que l'inégalité de BT est basée en partie sur le terme $|X - \text{E}(X)|$ donc nous avons :

$$|40 - 50| = |60 - 50| = 10 \quad (5.7.1630)$$

donc l'inégalité de BT nous permet bien de travailler sur des intervalles égaux en valeur absolue ce qui s'écrit aussi :

$$-10 \leq X - \text{E}(X) \leq 10 \quad (5.7.1631)$$

Ensuite, ne reste plus qu'à appliquer simplement l'inégalité numériquement :

$$P(|X - \text{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = P(|X - \text{E}(X)| \geqslant 10) = \frac{\text{V}(x)}{\varepsilon^2} = \frac{25}{10^2} = 0.25 = 25\% \quad (5.7.1632)$$

Parce qu'elle peut être appliquée à des distributions complètement arbitraires à condition qu'elles aient une moyenne et une variance finies connues, l'inégalité donne généralement une limite médiocre par rapport à ce qui pourrait être déduit si davantage d'aspects étaient connus sur la distribution impliquée :

t	**Min. % dans t écart-types à la moyenne**	**Max. % au-delà de t écart-types à la moyenne**
1	0%	100%
$\sqrt{2}$	50%	50%
1.5	55.56%	44.44%
2	75%	25%
$2\sqrt{2}$	87.5%	12.5%
3	88.8889%	11.1111%
4	93.75%	6.25%
5	96%	4%
6	97.2222%	2.7778%
7	97.9592%	2.0408%
8	98.4375%	1.5625%
9	98.7654%	1.2346%
10	99%	1%

TAB. 5.48 – **Intervalles à la moyenne typiques de Chebyshev**

Il existe une autre inégalité parfois utile en pratique. Prouvons-la rapidement !

En cours de traduction

Posons $Y = X - \mathrm{E}[X]$, il s'ensuite que $\mathrm{E}[Y] = 0$ et $\mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(X) =: \sigma^2 = \mathrm{E}\left[Y^2\right]$.

Pour $t, u > 0$, en utilisant l'inégalité de Markov donnée pour rappel par (voir page **??**) :

$$\forall \lambda > 0 : P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathrm{E}(X)}{\lambda} \tag{5.7.1633}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} P(Y \geq t) = P(Y + u \geq t + u) \leq P\left((Y+u)^2 \geq (t+u)^2\right) \\ \leq \frac{\mathrm{E}\left[(Y+u)^2\right]}{(t+u)^2} = \frac{\sigma^2 + u^2}{(t+u)^2} =: \varphi(u) \end{aligned} \tag{5.7.1634}$$

la dernière inégalité étant une conséquence de l'inégalité de Markov ! Avant de passer aux étapes suivantes, un lecteur nous a demandé d'expliquer comment $P(Y + u \geq t + u) \leq P\left((Y+u)^2 \geq (t+u)^2\right)$? Ce n'est en effet pas forcément triviale à première vue !

Tout d'abord, rappelez-vous que nous avons $t, u > 0$. La première chose triviale est que $(Y + u)^2 \geq (Y+u)$. Maintenant, ce que vous devez observer numériquement, c'est que pour certaines valeurs de $1 > t, u > 0$ nous avons $t + u < t^2 + 2tu + u^2$. La largeur de l'intervalle del a probabilité est donc plus grande et cela explique l'inégalité !

Comme ce qui précède est valable pour tout choix de $u \in \mathbb{R}$, nous pouvons choisir de l'appliquer avec la valeur qui minimise : $\varphi'(u) = 0$, c'est-à-dire :

$$\varphi'(u) = 2\frac{u}{(t+u)^2} - 2\frac{\sigma^2 + u^2}{(t+u)^3} = 0 \tag{5.7.1635}$$

ce qui donne $u = \sigma^2/t$, et le résultat suit :

$$\boxed{P(X - \mathrm{E}(X) \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}} \tag{5.7.1636}$$

et ceci est "l'inégalité de Cantelli" (également appelée "inégalité de Chebyshev-Cantelli" ou "inégalité de Chebyshev unilatérale).

Les deux dernières inégalités obtenues avant l'exemple vont nous permettre d'obtenir une relation très importante et puissante que nous appelons la "loi faible des grands nombres" (L.F.G.N.) ou encore "théorème de Khintchine".

Considérons une variable aléatoire X admettant une variance et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes (donc non corrélées deux-deux) de même loi que X et ayant toutes les mêmes espérances equation et les mêmes écarts-types σ.

Ce que nous allons montrer est que si nous mesurons une même quantité aléatoire X_n de même loi au cours d'une suite d'expériences indépendantes (alors dans ce cas, nous disons techniquement que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires est définie sur le même espace probabilisé), alors la moyenne arithmétique des valeurs observées va se stabiliser sur l'espérance de X quand le nombre de mesures est infiniment élevé.

De manière formelle ceci s'exprime sous la forme :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \quad \left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0} \tag{5.7.1637}$$

En cours de traduction de l'anglais

lorsque $n \rightarrow +\infty$ c'est cela le résultat très important dont nous faisions mention plus haut ! L'estimateur empirique de la moyenne tend donc pour toute loi vers l'espérance vraie si n est grand ! Donc de par la même nous assurons que la moyenne empirique est un estimateur convergent de l'espérance ! Ce résultat (assez intuitif) est parfois appelé "théorème fondamental de Monte-Carlo" car il est au centre du principe des simulations du même nom (voir section Méthodes Numériques page ??) qui ont une importance cruciale dans l'étude des statistiques avancées.

Remarque

Cette propriété de convergence est également nommée "régression vers la moyenne". Signifiant implicitement que si une variable est extrême lors de sa première mesure, elle aura tendance à être plus proche de la moyenne lors de sa deuxième mesure - et si elle est extrême lors de sa deuxième mesure, elle aura eu tendance à être plus proche de la moyenne lors de sa première mesure.

L'un des premiers exemples de Galton était la taille moyenne des parents et de leurs enfants. Il a constaté que les parents de grande taille avaient (en moyenne) des enfants plus petits qu'eux et que les parents de petite taille avaient (en moyenne) des enfants plus grands qu'eux. Dans les deux cas, les enfants dont les parents se trouvaient aux extrémités de la distribution avaient des hauteurs plus proches de la taille moyenne de la population.

Donc en d'autres termes la probabilité cumulée que la différence entre la moyenne arithmétique et l'espérance des variables aléatoires observées soit comprise dans un intervalle autour de la moyenne tend vers zéro quand le nombre de variables aléatoires mesurées tend vers l'infini (ce qui est finalement intuitif).

Ce résultat nous permet d'estimer l'espérance mathématique en utilisant la moyenne empirique (arithmétique) calculée sur un très grand nombre d'expériences.

Démonstration 5.45.12. Nous utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire (cette relation s'interprète difficilement mais permet d'avoir le résultat escompté) :

$$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{5.7.1638}$$

Et nous calculons d'abord en utilisant les propriétés mathématiques de l'espérance que nous avions démontrées plus haut :

$$\text{E}(Y)=\text{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\text{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\text{E}(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu \tag{5.7.1639}$$

et dans un deuxième temps en utilisant les propriétés mathématiques de la variance aussi déjà démontrées plus haut :

$$\text{V}(Y)=\text{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\text{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\text{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}\text{cov}(X_i,X_j)\right) \tag{5.7.1640}$$

En cours de traduction de Opera Magistris

et puisque nous avons supposé les variables non corrélées entre elles alors la covariance est nulle dès lors :

$$\mathrm{V}(Y)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i)\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\right)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n^2} \quad (5.7.1641)$$

Donc en injectant cela dans l'inégalité BT :

$$P\left([Y-\mathrm{E}(Y)]^2\geqslant\varepsilon^2\right)\leqslant\frac{\mathrm{V}(Y)}{\varepsilon^2} \quad (5.7.1642)$$

nous avons alors :

$$P\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right]^2\geqslant\varepsilon^2\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad (5.7.1643)$$

et l'inégalité tend bien vers zéro quand n au dénominateur tend vers l'infini.

■ Q.E.D.

Signalons que cette dernière relation est souvent notée dans certains ouvrages et conformément à ce que nous avons vu au début de ce chapitre :

$$P\left(|M_n-m_X|^2\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sigma_X^2}{n\varepsilon^2} \quad (5.7.1644)$$

ou encore :

$$P\left(|M_n-m_X|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{\sigma_X^2}{n\varepsilon^2} \quad (5.7.1645)$$

Donc, pour $\forall\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\rightarrow+\infty}P\left(|M_n-m_X|<\varepsilon\right)=1 \quad (5.7.1646)$$

5.7.11 Fonction Caractéristique

Dans la théorie des probabilités et des statistiques, la "fonction caractéristique" de toute variable aléatoire à valeur réelle définit complètement sa distribution de probabilité. Si une variable aléatoire admet une fonction de densité de probabilité, nous prouverons plus loin que la fonction caractéristique est alors la transformée de Fourier inverse de la fonction de densité de probabilité. Ainsi, elle fournit la base d'une voie alternative aux résultats analytiques par rapport au travail direct avec les fonctions de densité de probabilité ou les fonctions de distribution cumulative.

Avant de donner une démonstration à la manière de l'ingénieur du théorème central limite, introduisons d'abord le concept de "fonction caractéristique" qui tient une place centrale en statistiques.

En cours de traduction de l' anglais

Tout d'abord, rappelez-vous que la transformée de Fourier est donnée dans sa version physicienne (voir section Séquences et séries page 1738) par la relation :

$$\mathcal{F}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x \qquad (5.7.1647)$$

Rappelons que la transformation de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions non périodiques, et permet de leur associer un spectre en fréquences. Au facteur près, il s'agit d'une "transformée de Laplace bilatérale" donnée par (voir section d'Analyse page 2313) :

$$\mathcal{L}[f(x)]=\mathcal{F}(p)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-px}\mathrm{d}x \qquad (5.7.1648)$$

avec p qui est la variable complexe donnée dans le cas présent par (la partie réelle est nulle puisque la transformée de Fourier n'est que le cas particulier d'une transformée de Laplace dont la partie réelle de la variable est nulle : dont faire une transformée de Fourier c'est faire une transformée de Laplace sur l'axe des complexes uniquement) :

$$p=\mathrm{i}k \qquad (5.7.1649)$$

Nous souhaitons maintenant démontrer que si :

$$g(x)=f'(x)\quad\Rightarrow\quad G(k)=\mathrm{i}k\mathcal{F}(k) \qquad (5.7.1650)$$

En d'autres termes, nous cherchons une expression simplifiée de la transformée de Fourier de la dérivée de $f(x)$.

Démonstration 5.45.13. Nous partons donc de :

$$G(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x \qquad (5.7.1651)$$

Une intégration par parties donne : (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1511) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x=f(x)e^{-\mathrm{i}xk}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}+\mathrm{i}k\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x \qquad (5.7.1652)$$

En imposant que, f tend vers zéro à l'infini, nous avons alors :

$$f(x)e^{-\mathrm{i}xk}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}=0 \qquad (5.7.1653)$$

et :

$$G(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x=\mathrm{i}k\mathcal{F}(k) \qquad (5.7.1654)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

C'est le premier résultat dont nous avions besoin !

Maintenant, démontrons que si :

$$g(x) = xf(x) \quad \Rightarrow \quad G(k) = \mathrm{i}\mathcal{F}'(k) \tag{5.7.1655}$$

Démonstration 5.45.14. Nous partons donc de :

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{i}\mathcal{F}'(k) \\ &= \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-\mathrm{i}x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.7.1656}$$

■ Q.E.D.

C'est le deuxième résultat dont nous avions besoin.

Maintenant effectuons le calcul de la transformée de Fourier de la loi Normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0,1)$ (ce choix n'est pas innocent...) :

$$y = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{5.7.1657}$$

Nous savons que cette dernière relation est trivialement solution de l'équation différentielle (ou bien elle vérifie) :

$$y' = -xy \tag{5.7.1658}$$

en prenant la transformée de Fourier des deux côté de l'égalité, nous avons en utilisant les deux résultats précédents :

$$g(x) = f'(x) \text{ alors } G(k) = \mathrm{i}k\mathcal{F}(k) \tag{5.7.1659}$$

$$g(x) = xf(x) \text{ alors } G(k) = \mathrm{i}\mathcal{F}'(k) \tag{5.7.1660}$$

Nous avons :

$$\mathrm{i}k\mathcal{F}(k) = -\mathrm{i}\mathcal{F}'(k) \tag{5.7.1661}$$

Ou encore :

$$-k\mathrm{d}k = \frac{1}{\mathcal{F}(k)}\mathrm{d}\mathcal{F}(k) \tag{5.7.1662}$$

Donc après intégration :

$$\begin{aligned} &\int_0^k -k\mathrm{d}k = \int_0^k \frac{1}{\mathcal{F}(k)}\mathrm{d}\mathcal{F}(k) \Rightarrow -\frac{1}{2}k^2\bigg|_0^k = \ln(\mathcal{F}(k))\bigg|_0^k \Rightarrow -\frac{1}{2}k^2 = \ln(\mathcal{F}(k)) - \ln(\mathcal{F}(0)) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}k^2 = \ln\left(\frac{\mathcal{F}(k)}{\mathcal{F}(0)}\right) \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}k^2} = \frac{\mathcal{F}(k)}{\mathcal{F}(0)} \Rightarrow \mathcal{F}(k) = \mathcal{F}(0)e^{-\frac{1}{2}k^2} \end{aligned} \tag{5.7.1663}$$

En cours de traduction de l'anglais

Puisque :

$$\mathcal{F}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}k \tag{5.7.1664}$$

nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(0)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.7.1665}$$

Nous avons démontré lors de notre étude de la loi Normale que :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi} \tag{5.7.1666}$$

Donc :

$$\mathcal{F}(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{5.7.1667}$$

Nous avons alors (résultat très important !) :

$$\mathcal{F}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-k^2/2} \tag{5.7.1668}$$

Introduisons maintenant la fonction caractéristique telle que définie par les statisticiens :

$$\boxed{\phi_X(\omega)=\mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}kX}\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}kx}f_X(x)\mathrm{d}x} \tag{5.7.1669}$$

qui est un outil analytique important et puissant permettant d'analyser une somme de variables aléatoires indépendantes. De plus, cette fonction contient toutes les informations caractéristiques de la variable aléatoire X.

Remarque

La notation n'est pas innocente puisque le $\mathrm{E}[\ldots]$ représente une espérance de la fonction de densité par rapport à l'exponentielle complexe.

Donc la fonction caractéristique de la variable aléatoire normale centrée réduite de distribution :

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{5.7.1670}$$

En cours de traduction de l'anglais

devient simple à déterminer car :

$$\phi_X(k)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}kx} f_X(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(-k) \tag{5.7.1671}$$

Raison pour laquelle la fonction caractéristique de la loi Normale centrée réduite est souvent assimilée à une simple transformée de Fourier (voir section Séquences et Séries page 1738).

Et grâce au résultat précédent :

$$\mathcal{F}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-k^2/2}\Rightarrow F(-k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(-k)^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-k^2/2} \tag{5.7.1672}$$

Donc :

$$\phi_X(k)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}e^{-k^2/2}=e^{-k^2/2} \tag{5.7.1673}$$

qui est le résultat dont nous avons besoin pour le théorème central limite. Cette fonction caractéristique est égale, à une constante près, à la densité de probabilité de la loi. Nous disons alors que la fonction caractéristique d'une gaussienne est gaussienne....

Mais avant cela, regardons d'un peu plus près cette fonction caractéristique :

$$\phi_X(\omega)=\mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}kx}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x \tag{5.7.1674}$$

En développement de Maclaurin nous avons (voir section Séquences et Séries page 1677) et en changeant un peu les notations :

$$\phi_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{i}\omega)^k}{k!}x^k f_X(x)\mathrm{d}x\right] \tag{5.7.1675}$$

et en intervertissant la somme et l'intégrale, nous avons :

$$\phi_X(\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{i}\omega)^k}{k!}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\mathrm{d}x\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{i}\omega)^k}{k!}M_X^k \tag{5.7.1676}$$

Cette fonction caractéristique contient donc tous les moments (terme général utilisé pour l'écart-type et l'espérance) de X.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.11.1 Série génératrice de moments et cumulants

Dans la théorie des probabilités et statistiques, la série génératrice de moments d'une variable aléatoire à valeur réelle est une spécification alternative de sa distribution de probabilité. Ainsi, elle fournit la base d'une voie alternative aux résultats analytiques par rapport au travail direct avec des fonctions de densité de probabilité ou des fonctions de distribution cumulative. Il existe des résultats particulièrement simples pour les séries génératrices des moments des distributions définies par les sommes pondérées de variables aléatoires. Cependant, toutes les variables aléatoires n'ont pas de séries génératrices de moments.

Comme son nom l'indique, la série génératrice de moments (appelée autrefois "fonction génératrice") peut être utilisée pour calculer les moments d'une distribution : le $n$ème moment autour de 0 est la $n$ème dérivée de la série génératrice de moments, évaluée en 0.

En plus des distributions à valeurs réelles (distributions univariées), des séries génératrices de moments peuvent être définies pour des variables aléatoires à valeurs vectorielles ou matricielles, et peuvent même être étendues à des cas plus généraux.

La série génératrice de moments d'une distribution à valeur réelle n'existe pas toujours, contrairement à la fonction caractéristique. Il existe des relations entre le comportement de la série génératrice de moments d'une distribution et les propriétés de la distribution, telles que l'existence de moments.

La série génératrice de moments d'une variable aléatoire X est :

$$M_X(t) := \mathrm{E}\left(e^{tX}\right), \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.7.1677}$$

partout où cette espérance existe. En d'autres termes, la série génératrice de moments de X est l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

$M_X(0)$ existe toujours et est égal à 1 (voir la preuve ci-dessous). Cependant, un problème clé avec les séries génératrices de moments est que les moments et la série génératrice de moments peuvent ne pas exister, car les intégrales n'ont pas besoin de converger absolument. En revanche, la fonction caractéristique ou transformée de Fourier existe toujours (car elle est l'intégrale d'une fonction bornée sur un espace de mesure finie), et peut être utilisée à certaines fins à la place.

La série génératrice de moments est ainsi nommée car elle peut être utilisée pour trouver les moments de la distribution. Le développement en série de e^{tX} est :

$$e^{tX} = 1 + t\,X + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \ldots + \frac{t^nX^n}{n!} + \ldots \tag{5.7.1678}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) &= 1 + t\mathrm{E}(X) + \frac{t^2\mathrm{E}\left(X^2\right)}{2!} + \frac{t^3\mathrm{E}\left(X^3\right)}{3!} + \ldots + \frac{t^n\mathrm{E}\left(X^n\right)}{n!} + \ldots \\ &= 1 + tm_1 + \frac{t^2m_2}{2!} + \frac{t^3m_3}{3!} + \ldots + \frac{t^nm_n}{n!} + \ldots \end{aligned} \tag{5.7.1679}$$

où m_n est le n-ème moment. En différenciant $M_X(t)$ un nombre i fois par rapport à t et en fixant $t = 0$, nous obtenons le i-ème moment sur l'origine, noté m_i.

En cours de traduction de l'anglais

Si elle existe pour t dans un voisinage de 0, alors tous les "moments" de X existent, et :

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}M_X(t)\right|_{t=0}=\mathrm{E}\left(X^k\right) \tag{5.7.1680}$$

La "série génératrice cumulante" est le logarithme de la série génératrice des moments :

$$c_X(t)=\log\left(M_X(t)\right) \tag{5.7.1681}$$

Cela génère les "cumulants", qui sont définis par ce que la série génératrice de cumulants génère, c'est-à-dire, pour une variable aléatoire, le k-ème cumulant est :

$$\gamma_k=\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}c_X(t)\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\log\left(M_X(t)\right)\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}\log\left(\mathrm{E}(e^{tX})\right)\right|_{t=0} \tag{5.7.1682}$$

Les cumulants sont légèrement plus faciles à utiliser que les moments. Les quatre premiers sont :

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\mathrm{E}(X)=\mu_1=\mu\\ \gamma_2&=\mathrm{V}(X)=\mu_2=\sigma^2\\ \gamma_3&=\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^3\right]=\mu_3\\ \gamma_4&=\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^4\right]-3\mathrm{V}[X]^2=\mu_4-3\mu_2^2=\mu_4-3\sigma^4\end{aligned} \tag{5.7.1683}$$

Le coefficient d'asymétrie et d'applatissement (voir page 624) sont alors de simples fonctions des cumulants :

$$\text{Skewness}\,[X]=\frac{\gamma_3}{\sigma^3}\qquad\text{et}\qquad\text{Kurtosis}\,[X]=\frac{\gamma_4}{\sigma^4} \tag{5.7.1684}$$

Si X est une variable aléatoire continue, la relation suivante entre sa série génératrice de moment $M_X(t)$ et la transformée de Laplace bilatérale sa fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ est valable :

$$M_X(t)=\mathcal{L}\left\{f_X\right\}(-t) \tag{5.7.1685}$$

étant donné que la transformée de Laplace de la fonction de densité de probabilité (voir section Analyse page 2313) est donnée par :

$$\mathcal{L}(f(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-sx}f_X(x)\mathrm{d}x \tag{5.7.1686}$$

et la "série génératrice de moments" (SGM) s'écrit alors (par la loi du statisticien inconscient...) :

$$M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f_X(x)\mathrm{d}x \tag{5.7.1687}$$

La série génératrice de moments est l'espérance d'une fonction de la variable aléatoire, elle peut s'écrire :

- Pour une fonction de masse de probabilité discrète, $M_X(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}e^{tx_i}p_i$
- Pour une fonction de masse de probabilité continue, $M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)\mathrm{d}x$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Prenons le cas de la distribution Normale.

Supposons $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (avec $\sigma^2 > 0$). Alors sa SGM est :

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}\left(x^2-2\mu x+\mu^2\right)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}\left(x^2-2\left(\mu+t\sigma^2\right)x+\mu^2\right)}\mathrm{d}x$$

Dans l'exposant, complétons le carré par rapport au x :

$$x^2 - 2\left(\mu + t\sigma^2\right)x = \left(x - \left(\mu + t\sigma^2\right)\right)^2 - \left(\mu + t\sigma^2\right)^2$$

Alors :

$$M_X(t) = e^{\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}\left(\left(\mu+t\sigma^2\right)^2-\mu^2\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}\left(x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right)^2}\mathrm{d}x$$

Notez que l'intégrande est la fonction de densité de probabilité de $\mathcal{N}(\mu + t\sigma^2, \sigma^2)$, ce qui signifie que l'intégrale vaut 1. Étendre l'expression $(\mu + t\sigma^2)^2$ et en simplifiant un peu il vient :

$$M_X(t) = e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}, t \in \mathbb{R}$$

La série génératrice des cumulants est alors une simple quadrique :

$$c_X(t) = t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2t^2$$

et il est facile de voir que :

$$c_X'(0) = \mu, \quad c''(0) = \sigma^2, \quad c'''(t) = 0$$

Ainsi, la moyenne est μ et la variance est σ^2 (sans surprise), et tous les autres cumulants sont 0. En particulier, le coefficient d'asymétrie et d'aplatissement sont tous deux de 0.

E2. Voyons maintenant un exemple avec la distribution Gamma.

La distribution Gamma a comme nous le savons deux paramètres : $\alpha > 0$ est le paramètre de forme, et $\lambda > 0$ est le paramètre d'échelle. Son support est $\mathcal{X} = [0, +\infty[$, et sa fonction de densité de probabilité est $cx^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)$, où :

$$\frac{1}{c} = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}(u/\lambda)^{\alpha-1}e^{-u}\mathrm{d}u/\lambda = \frac{1}{\lambda^\alpha}\int_0^{\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du = \frac{1}{\lambda^\alpha}\Gamma(\alpha)$$

La fonction gamma est définie comme étant l'intégrale, telle que pour $\alpha > 0$ (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} \mathrm{d}u$$

Elle n'a généralement pas de solution analytique connue, mais il y a quelques faits pratiques que nous avons déjà prouvés au cours de son étude :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \alpha\Gamma(\alpha) \text{ pour } \alpha > 0 \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \text{ pour } n = 1, 2, \ldots; \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

La fonction de densité de probabilité pour $\Gamma(\alpha, \lambda)$ est alors :

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \in (0, \infty)$$

Si $\alpha = 1$, nous retombons sur la "distribution exponentielle" (λ), avec la fonction de densité de probabilité :

$$g(x \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \in \mathcal{X} = [0, +\infty[$$

La SGM est alors :

$$M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} \mathrm{d}x$$

Cette intégrale a besoin de $(\lambda - t) > 0$ pour être finie, donc nous avons besoin de $t < \lambda$, ce qui signifie que la SGM est finie pour un voisinage près de zéro, puisque $\lambda > 0$. Maintenant, l'intégrale à la fin de la relation précédente est la même que celle rencontrée juste plus haut :

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) \mathrm{d}x$$

à la différence que nous avons $\lambda - t$ à la place de λ. Nous avons alors :

$$\mathrm{E}\left(e^{tX}\right) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha, t < \lambda$$

Nous utiliserons la série génératrice de cumulants $c_X(t) = \log\left(M_X(t)\right)$ pour obtenir la moyenne et la variance, car c'est un peu plus facile. Ainsi :

$$c_X'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \alpha(\log(\lambda) - \log(\lambda - t)) = \frac{\alpha}{\lambda - t} \Longrightarrow \mathrm{E}(X) = c_X'(0) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

et :

$$c_X''(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha(\log(\lambda) - \log(\lambda - t)) = \frac{\alpha}{(\lambda - t)^2} \Longrightarrow \mathrm{V}(X) = c_X''(0) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

En général, le k-ème cumulant est donné par :

$$\gamma_k = \left.\frac{\partial^k}{\partial t^k} c_X(t)\right|_{t=0} = (k-1)!\frac{\alpha}{\lambda^k}$$

et en particulier :

$$\begin{aligned}
\text{Skewness }(X) &= \frac{2\alpha/\lambda^3}{\alpha^{3/2}/\lambda^3} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \\
\text{Kurtosis }(X) &= \frac{6\alpha/\lambda^4}{\alpha^2/\lambda^4} = \frac{6}{\alpha}
\end{aligned}$$

Ainsi, le coefficient d'asymétrie et d'aplatissement dépendent uniquement du paramètre de forme α. En outre, ils sont positifs, mais tendent vers 0 lorsque α augmente.

E3. Voyons maintenant un exemple avec la distribution binomiale.

La distribution binomiale est, comme nous le savons déjà, un modèle pour compter le nombre de succès dans n essais, par exemple, le nombre de faces dans dix lancés d'une pièce, où les essais sont indépendants et ont la même probabilité p de succès :

$$X = \mathcal{B}(n,p) \Longrightarrow f_X(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \quad x \in \mathcal{X} = \{0,1,\ldots,n\}$$

Le fait que la fonction de densité de probabilité soit égale à 1 repose sur le théorème binomial (voir section Algèbre page 1347) :

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} a^x b^{n-x}$$

avec $a = p$ et $b = 1-p$. Ce théorème aide également à trouver la SGM :

$$\begin{aligned}
M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x (1-p)^{n-x} = \left(pe^t + 1 - p\right)^n
\end{aligned}$$

Qui est finie $t \in \mathbb{R}$, comme c'est le cas pour toute variable aléatoire bornée. Les deux premiers moments sont alors :

$$\mathrm{E}(X) = M'_X(0) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t\Big|_{t=0} = np$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2\right) = M''_X(0) &= \left.\left[n(n-1)\left(pe^t+1-p\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2 + n\left(pe^t+1-p\right)^{n-1} pe^t\right]\right|_{t=0} \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

E4. Voyons maintenant un exemple avec la distribution de Poisson.

$$\begin{aligned}M_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{tX}\right) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{1}{x!} \lambda^x \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}\end{aligned}$$

où :

$$e^{\lambda e^t} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

est l'expansion habituelle en série de Taylor de la fonction exponentielle (voir la section Séquences et Séries 1683). De plus, puisque la série converge pour toute valeur de t, la fonction génératrice de moment d'une variable aléatoire de Poisson existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

E5. Voyons maintenant un exemple avec la distribution ex-gaussienne (voir section Statistiques page 794).

Alors, la fonction génératrice de moment de X est :

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \quad (5.7.1688)$$

En effet, supposons que X suive une distribution ex-Gaussienne. Ensuite, $X = A + B$ où A et B sont indépendants A est Normalement distribuée avec une moyenne μ et une variance σ^2, et B est distribuée de manière exponentielle avec un taux λ. Nous avons déjà démontré plus haut que la fonction génératrice de moment pour A (distribution Normale) est donnée par :

$$M_A(t) = \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \quad (5.7.1689)$$

et nous avons également déjà démontré que la fonction génératrice de moment pour B (distribution de Poisson) est donnée par :

$$M_B(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (5.7.1690)$$

Par définition, X est une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes A et B, donc la fonction génératrice de moment de X est le produit de $M_A(t)$ et $M_B(t)$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}M_X(t) &= M_A(t) \cdot M_B(t) \\ &= \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right] \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \exp\left[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]\end{aligned} \quad (5.7.1691)$$

Théorème 5.46. La distribution limite d'une distribution de Poisson (λ) quand $\lambda \rightarrow +\infty$ est Normale (cela nous sera utile dans la section Ingénierie Qualité).

Démonstration 5.46.1. Soit $X_n \sim \text{Poisson}(n)$, pour $n = 1, 2, \ldots$ La fonction de masse de probabilité de X_n est :

$$f_{X_n}(x) = \frac{n^x e^{-n}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.7.1692}$$

La fonction génératrice de moment de X_n est comme le prouve l'exemple juste au-dessus :

$$M_{X_n}(t) = E\left[e^{tX_n}\right] = e^{n\left(e^t - 1\right)} \tag{5.7.1693}$$

pour $-\infty < t < +\infty$. Prendre la limite ne nous mène nulle part car :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} M_{X_n}(t) = \lim_{n\rightarrow\infty} e^{n\left(e^t-1\right)} = \infty \tag{5.7.1694}$$

Considérons maintenant une variable aléatoire de Poisson "standardisée" :

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1695}$$

qui a une fonction génératrice de moment limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\rightarrow+\infty} M_{(X_n-n)/\sqrt{n}}(t) &= \lim_{n\rightarrow+\infty} \mathrm{E}\left[\exp\left(t\cdot\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\rightarrow+\infty} \exp(-t\sqrt{n})\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{tX_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\rightarrow+\infty} \exp(-t\sqrt{n})\exp\left(n\left(e^{t/\sqrt{n}}-1\right)\right) \\
&= \lim_{n\rightarrow+\infty} \exp\left(-t\sqrt{n}+n\left(tn^{-1/2}+t^2n^{-1}/2+t^3n^{-3/2}/6+\cdots\right)\right) \\
&= \lim_{n\rightarrow+\infty} \exp\left(t^2/2+t^3n^{-1/2}/6+\cdots\right) \\
&= \exp\left(t^2/2\right) \quad -\infty < t < +\infty
\end{aligned} \tag{5.7.1696}$$

en utilisant la fonction génératrice de moment d'une variable aléatoire de Poisson et en développant la fonction exponentielle sous forme de série. Cela peut être reconnu comme la fonction génératrice de moment d'une variable aléatoire Normale standard ! Cela implique que la variable aléatoire non standardisée associée X_n a une distribution limite Normale avec une moyenne n et une variance n. Ce résultat est la base de « l'approximation normale de la distribution de Poisson » ! En pratique, la plupart des gens considèrent l'approximation suffisamment valable si $n > 20$ (c'est-à-dire $\lambda > 20$).

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.12 Théorème Central Limite

Le théorème central limite est un ensemble de résultats du début du 20ème siècle sur la convergence faible d'une suite de variables aléatoires en probabilité. Intuitivement, d'après ces résultats, toute somme (implicitement : la moyenne de ses variables) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une certaine variable aléatoire. Le résultat le plus connu et le plus important est simplement appelé "théorème central limite" qui concerne une somme de variables aléatoires indépendantes avec variance existante dont le nombre tend vers l'infini et c'est celui-ci que nous allons démontrer de manière heuristique ici.

Dans le cas le plus simple, considéré ci-dessous pour la démonstration du théorème, ces variables sont continues, indépendantes et possèdent la même moyenne et la même variance. Pour tenter d'obtenir un résultat fini, il faut centrer cette somme en lui soustrayant sa moyenne et la réduire en la divisant par son écart-type. Sous des conditions assez larges, la loi de probabilité (de la moyenne) converge alors vers une loi Normale centrée réduite. L'omniprésence de la loi Normale s'explique par le fait que de nombreux phénomènes considérés comme aléatoires sont dus à la superposition de causes nombreuses.

Ce théorème de probabilités possède donc une interprétation en statistique mathématique. Cette dernière associe une loi de probabilité à une population. Chaque élément extrait de la population est donc considéré comme une variable aléatoire et, en réunissant un nombre n de ces variables supposées indépendantes, nous obtenons un échantillon. La somme de ces variables aléatoires divisée par n donne une nouvelle variable nommée la moyenne empirique. Celle-ci, une fois réduite, tend vers une variable Normale réduite lorsque n tend vers l'infini comme nous le savons.

Le théorème central limite nous dit à quoi il faut s'attendre en matière de sommes de variables aléatoires indépendantes. Mais qu'en est-il des produits ? Eh bien, le logarithme d'un produit (à facteurs strictement positifs) est la somme des logarithmes des facteurs, de sorte que le logarithme d'un produit de variables aléatoires (à valeurs strictement positives) tend vers une loi Normale, ce qui entraîne une loi log-Normale pour le produit lui-même.

En elle-même, la convergence vers la loi Normale ("normalité asymptotique") de nombreuses sommes de variables aléatoires lorsque leur nombre tend vers l'infini n'intéresse que le mathématicien. Pour le praticien, il est intéressant de s'arrêter un peu avant la limite : la somme d'un grand nombre de ces variables est presque gaussienne, ce qui fournit une approximation souvent plus facilement utilisable que la loi exacte.

En s'éloignant encore plus de la théorie, on peut dire que bon nombre de phénomènes naturels sont dus à la superposition de causes nombreuses, plus ou moins indépendantes. Il en résulte que la loi Normale les représente de manière raisonnablement efficace.

A l'inverse, on peut dire qu'aucun phénomène concret n'est vraiment Gaussien car il ne peut dépasser certaines limites, en particulier s'il est à valeurs positives.

Démonstration 5.46.2. Soit $\{X_i\}_{i=1\ldots+\infty}$ une suite (échantillon) de variables aléatoires continues (dans notre démonstration simplifiée...), indépendantes (mesures de phénomènes physiques ou mécaniques indépendants par exemple) et identiquement distribuées, dont la moyenne μ_X et l'écart-type σ_X existent (ce qui signifie que le théorème central limite fonctionne que pour

En cours de traduction de l'anglais

les phénomènes à variance finie ! ! !).

Nous avons vu au début de cette section que :

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{M_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (5.7.1697)$$

sont les mêmes expressions d'une variable centrée réduite générée à l'aide d'une suite de n variables aléatoires identiquement distribuées qui par construction a donc une moyenne nulle et une variance unitaire :

$$\mathrm{E}(Z_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(Z_n) = 1 \quad (5.7.1698)$$

Développons la première forme de l'égalité antéprécédente (les 2 sont de toute façon égales !) :

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right] \quad (5.7.1699)$$

Maintenant utilisons la fonction caractéristique de la loi Normale centrée-réduite (nous allégeons par la même occasion l'écriture des estimateurs de la moyenne et de l'écart-type) :

$$\phi_{Z_n}(\omega) = \mathrm{E}[e^{\mathrm{i}\omega Z_n}] = \mathrm{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\omega\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right] \quad (5.7.1700)$$

Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, il vient :

$$\phi_{Z_n}(\omega) = \mathrm{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\omega\frac{X_1 - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right] \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\omega\frac{X_n - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right] = \left(\mathrm{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\omega\frac{X - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]\right)^n \quad (5.7.1701)$$

Un développement de Taylor (voir section Séquences et Séries page 1677) du terme entre accolades donne au troisième ordre (développement en série de Maclaurin de l'exponentielle) :

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}\omega\frac{X - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right] \cong \mathrm{E}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega}{\sqrt{n}\sigma_{\bar{X}}}(X - \mu) - \frac{\omega^2}{n\sigma^2}(X - \mu)^2\right] \quad (5.7.1702)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\phi_{Z_n}(\omega) &\cong \left(\mathrm{E}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega}{\sqrt{n}\sigma}(X - \mu) - \frac{\omega^2}{n\sigma^2}(X - \mu)^2\right]\right)^n \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + \mathrm{i}\frac{\omega}{\sqrt{n}\sigma}(X - \mu) - \frac{\omega^2}{n\sigma_{\bar{X}}^2}(X - \mu)^2\right) f_X(x)\mathrm{d}x\right]^n \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}X\omega}{\sqrt{n}\sigma} f_X(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}\mu\omega}{\sqrt{n}\sigma} f_X(x)\mathrm{d}x - \frac{\omega^2}{n\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(X - \mu)^2 f_X(x)\mathrm{d}x\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{n}\sigma_{\bar{X}}}\int_{-\infty}^{+\infty} X f_X(x)\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}\mu\omega}{\sqrt{n}\sigma_{\bar{X}}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x - \frac{\omega^2}{n\sigma_{\bar{X}}^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(X - \mu)^2 f_X(x)\mathrm{d}x\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\sqrt{n}\sigma_{\bar{X}}}\mu - \frac{\mathrm{i}\mu\omega}{\sqrt{n}} - \frac{\omega^2}{n\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(X - \mu)^2 f_X(x)\mathrm{d}x\right]^n \\
&= \left[1 - \frac{\omega^2}{n\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(X - \mu)^2 f_X(x)\mathrm{d}x\right]^n = \left[1 - \frac{\omega^2}{n\sigma_{\bar{X}}^2}\mathrm{V}(X)\right]^n = \left[1 - \frac{\omega^2}{2n}\right]^n
\end{aligned} \quad (5.7.1703)$$

En cours de traduction de l'anglais

Posons :

$$-\frac{\omega^2}{2n}=\frac{1}{x} \tag{5.7.1704}$$

Nous avons alors :

$$\phi_{Z_n}(\omega)\cong\left[1+\frac{1}{x}\right]^{-\frac{\omega^2 x}{2}}=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{5.7.1705}$$

Et donc quand x tend vers l'infini (voir section d'Analyse Fonctionnelle page 2201) :

$$\phi_{Z_n}(\omega)\cong\lim_{n\rightarrow+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-\frac{\omega^2}{2}}=\left[\lim_{n\rightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-\frac{\omega^2}{2}}=e^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{5.7.1706}$$

Nous retrouvons donc la fonction caractéristique de la loi Normale centrée réduite !

En deux mots, le Théorème Central Limite (TCL) dit que pour de grands échantillons, la somme centrée et réduite de n variables aléatoires identiquement distribuées suit une loi Normale centrée et réduite. Et donc nous avons in extenso pour la moyenne empirique :

$$\frac{M_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\mathcal{N}(0,1)\Leftrightarrow M_n=\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.7.1707}$$

Ou plus élégamment le TCL s'écrira :

$$\sqrt{n}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-\mu\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right) \tag{5.7.1708}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Attention ! En fait, il existe de nos jours trois théorèmes central limite (TCL)... Le "TCL de Lindeberg-Levy" prouvé juste au-dessus n'est pas très utile car il faut des variables identiquement distribuées. Le "TCL de Lyapunov et Lindeberg" qui est beaucoup plus flexible assouplissant l'exigence de variables distribuées de manière identique au prix de la nécessité que des moments plus élevés comme le coefficient d'asymétrie (skewness) et le coefficient d'aplatissement (kurtosis) disparaîssent suffisamment rapidement (étant juste finis et tendant rapidement vers zéro). Le "TCL de Gnedenko-Kolmogorov" est encore mieux car il gère aussi les distributions à queues lourdes, c'est-à-dire à heavy-tails en anglais (mais il y a aussi des pièges car beaucoup de choses dans la vie ne sont pas aussi simples qu'elles en ont l'air... !).

Maintenant, nous allons illustrer le théorème central limite dans le cas d'une suite $\{X_i\}$ de variables aléatoires indépendantes discrètes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Nous pouvons imaginer que X_n représente le résultat obtenu au n-ème lancé d'une pièce de monnaie (en attribuant le nombre 1 pour pile et 0 pour face). Notons :

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \tag{5.7.1709}$$

la moyenne. Nous avons pour tout n bien évidemment :

$$\text{E}(X_n) = \frac{1}{2} \qquad \text{V}(X_n) = \frac{1}{4} \tag{5.7.1710}$$

et donc :

$$\text{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{V}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4} = \frac{1}{4n} \tag{5.7.1711}$$

Après avoir centré et réduit $\bar{X}_n$ nous obtenons :

$$\frac{\bar{X}_n - \text{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{V}(\bar{X}_n)}} = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \tag{5.7.1712}$$

Notons Φ la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite.

Le théorème central limite nous dit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \leq t\right) = \Phi(t) \tag{5.7.1713}$$

A l'aide de Maple 4.00b nous avons tracé en bleu quelques graphiques de la fonction :

$$t \mapsto F_n(t) = P\left(2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \leq t\right) \tag{5.7.1714}$$

pour différentes valeurs de n. Nous avons représenté en rouge la fonction Φ.

Pour $n = 1$:

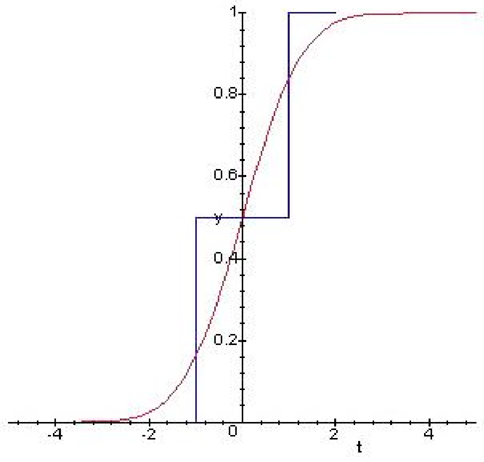


FIG. 5.166 – Première approche de la loi de Bernoulli par le loi Normale selon le TCL

Pour $n = 2$:

En cours de traduction de l' anglais

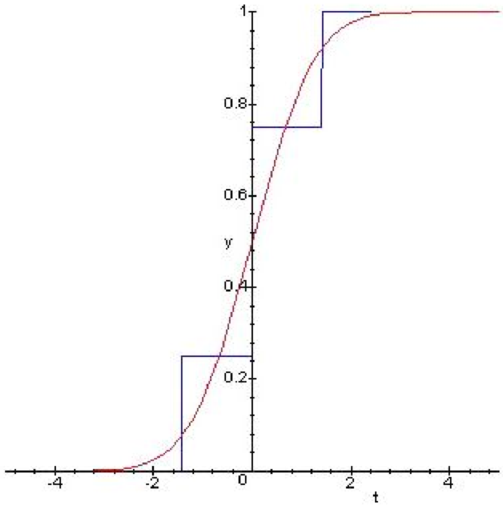


FIG. 5.167 – Deuxième approche de la loi de Bernoulli par le loi Normale selon le TCL

Pour $n = 5$:

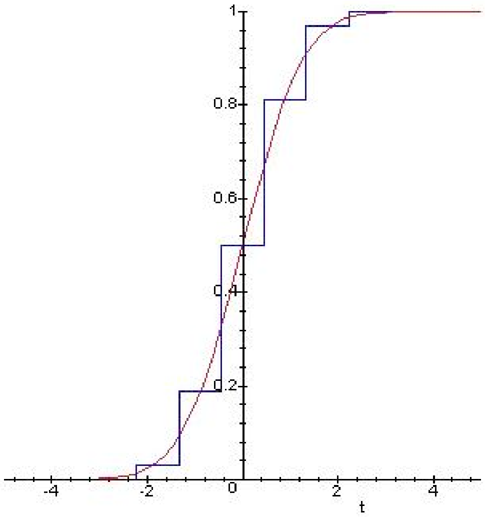


FIG. 5.168 – Cinquième approche de la loi de Bernoulli par le loi Normale selon le TCL

En cours de l' anglais

Pour $n = 30$:

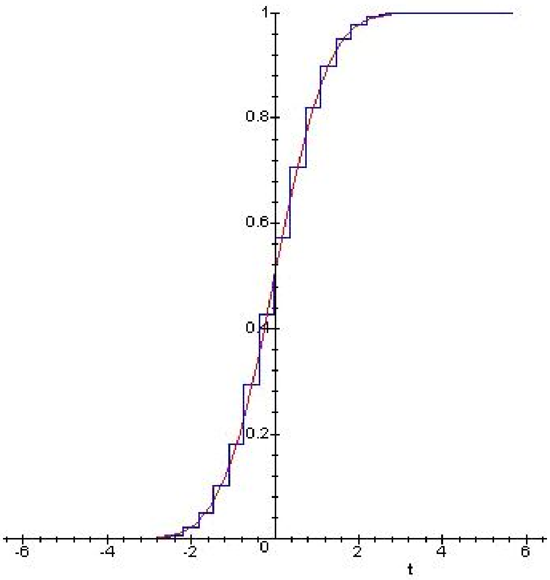


FIG. 5.169 – **Trentième approche de la loi de Bernoulli par le loi Normale selon le TCL**

Ces graphiques ont été obtenus avec Maple 4.00b à l'aide des commandes suivantes :

```
>with(stats):
>with(plots):
>e1:=plot(Heaviside(t+1)*statevalf[dcdf,binomiald[1,0.5]](trunc((t+1)/2))
,t=-2..2,y=0..1,color=blue):
>e2:=plot(Heaviside(t+sqrt(2))*statevalf[dcdf,binomiald[2,0.5]]
(trunc((t*sqrt(2)+2)/2)),t=-sqrt(2)-1..sqrt(2)+1,y=0..1,color=blue):
>e3:=plot(Heaviside(t+sqrt(5))*statevalf[dcdf,binomiald[5,0.5]]
(trunc((t*sqrt(5)+5)/2)),t=-sqrt(5)-1..sqrt(5)+1,y=0..1,color=blue):
>e4:=plot(statevalf[cdf,normald](t),t=-5..5):
>e5:=plot(Heaviside(t+sqrt(30))*statevalf[dcdf,binomiald[30,0.5]]
(trunc((t*sqrt(30)+30)/2)),t=-sqrt(30)-1..sqrt(30)+1,y=0..1,color=blue):
>display(e1,e4);
>display(e2,e4);
>display(e4,e3);
>display(e5,e4);
```

En cours de traduction de l'anglais

montrent bien la convergence de F_n vers Φ.

En fait nous remarquons que la convergence est carrément uniforme ce qui est confirmé par le "théorème central limite de Moivre-Laplace" :

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$. Alors :

$$F_n(t) = P\left(2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right) \leq t\right) = \Phi(t) \quad (5.7.1715)$$

tend uniformément vers $\Phi(t)$ sur $\mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$.

5.7.13 Tests d'hypothèses univariés et d'adéquations (NHST)

Définition (#5.7.142) : Un "modèle statistique" est un modèle mathématique qui incarne un ensemble d'hypothèses statistiques concernant la génération d'échantillons de données (et d'autres données provenant d'une population plus large), souvent sous une forme considérablement idéalisée. Il est généralement spécifié comme une relation mathématique entre une ou plusieurs variables aléatoires et d'autres variables non aléatoires appelées "paramètres". Tous les tests d'hypothèses statistiques et tous les estimateurs statistiques sont dérivés via des modèles statistiques !

Lors de notre étude des intervalles de confiance, rappelons que nous sommes arrivés aux quelques relations suivantes (ce n'est que l'échantillon des plus importantes démontrées plus haut !) :

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1716}$$

et :

$$\frac{nS_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS_*^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} \tag{5.7.1717}$$

et :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \tag{5.7.1718}$$

et finalement :

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}T_{\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}T_{\alpha/2}(n-1) \tag{5.7.1719}$$

qui permettaient donc de faire de l'inférence statistique en fonction de la connaissance ou non de la moyenne ou de la variance vraie sur la totalité ou sur un échantillon de la population. En d'autres termes de savoir dans quelles bornes se situait un moment (moyenne ou variance) en fonction d'un certain niveau de confiance α imposé.

Nous allons également démontrer en détails plus loin les deux intervalles suivants :

$$\frac{1}{F_{\alpha/2}(n,m)}\frac{S^2_{*X}}{S^2_{*Y}} \leq \frac{\sigma^2_X}{\sigma^2_Y} \leq \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n,m)}\frac{S^2_{*X}}{S^2_{*Y}} \tag{5.7.1720}$$

et :

$$\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)}\frac{S^2_X}{S^2_Y} \leq \frac{\sigma^2_X}{\sigma^2_Y} \leq \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}\frac{S^2_{*X}}{S^2_{*Y}} \tag{5.7.1721}$$

Ce ne sont là que quelques-uns des plus de 500 intervalles de confiance - et leurs tests respectifs - paramétriques et non paramétriques qui existent en ce début du 21ème siècle (pour une liste plus exhaustive consultez la carte mentale de la science des données à la page **??**) ! ! !

Définition (#5.7.143) : Lorsque nous cherchons à savoir si nous pouvons faire confiance à la valeur d'une statistique (moyenne, médiane, variance, coefficient de corrélation, etc.) avec

En cours de traduction de l' anglais

une certaine certitude, nous parlons de "test d'hypothèse" et plus particulièrement de "test de conformité" (nous parlons de "test d'adéquation" quand il s'agit de vérifier que des mesures semblent bien suivre une loi donnée et non juste une statistique).

Formellement, une hypothèse statistique est une déclaration sur les paramètres d'une distribution décrivant une population à partir de laquelle les observations peuvent être échantillonnées en tant que données mesurées. Plus précisément, soit m un modèle génératif décrivant les données mesurées y en termes de distribution $\mathcal{D}(\theta)$ avec les paramètres du modèle $\theta \in \Theta$. Alors, une hypothèse statistique est formellement spécifiée comme :

$$H : \theta \in \Theta^* \quad \text{où : } \Theta^* \subset \Theta \tag{5.7.1722}$$

Soit H une hypothèse statistique. Alors :

- H est appelée "hypothèse ponctuelle" ou "hypothèse exacte", si elle spécifie une valeur de paramètre exacte :

$$H : \theta = \theta^* \tag{5.7.1723}$$

- H est appelé "hypothèse d'ensemble" ou "hypothèse inexacte", si elle spécifie un ensemble de valeurs possibles avec plus d'un élément pour la valeur du paramètre (par exemple une plage ou un intervalle) :

$$H : \theta \in \Theta^* \tag{5.7.1724}$$

En cours de traduction de l'anglais

L'énoncé qui est éprouvé dans un test d'hypothèse statistique est nommé "hypothèse nulle" et noté H_0. Le test est conçu pour évaluer la solidité des évidences contre H_0 et éventuellement les rejeter. L'opposé de H_0 est nommé "hypothèse alternative". Habituellement, H_0 est une déclaration selon laquelle un paramètre particulier est nul, qu'il n'y a aucun effet d'un traitement particulier ou qu'il n'y a pas de différence entre des conditions particulières. Plus précisément, soit m un modèle génératif décrivant les données mesurées y en utilisant les paramètres du modèle $\theta \in \Theta$. Ensuite, une hypothèse nulle est formellement spécifiée comme :

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{où : } \Theta_0 \subset \Theta \tag{5.7.1725}$$

Soit H_0 une hypothèse nulle d'un test d'hypothèse statistique. Ensuite, l'hypothèse alternative correspondante, notée H_1, est soit la négation de H_0, soit un sous-cas intéressant dans la négation de H_0, selon le contexte. Le test est conçu pour évaluer la solidité des évidences contre H_0 et éventuellement les rejeter en faveur de H_1. Habituellement, H_1 est une déclaration selon laquelle un paramètre particulier est non nul, qu'il existe un effet d'un traitement particulier ou qu'il existe une différence entre des conditions particulières.

Plus précisément, soit m un modèle génératif décrivant les données mesurées y en utilisant les paramètres du modèle $\theta \in \Theta$. Ensuite, les hypothèses nulles et alternatives sont formellement spécifiées comme suit :

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \in \Theta_0 \quad \text{où : } \quad \Theta_0 \subset \Theta \\ H_1 &: \theta \in \Theta_1 \quad \text{où : } \quad \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0 \end{aligned} \tag{5.7.1726}$$

Remarque

Le lecteur doit également se rappeler, comme déjà dit précédemment dans cette section, que nous avons mis de nombreuses autres preuves mathématiques détaillés de calculs d'intervalles de confiance liées par exemple aux techniques de régression dans la section de Méthodes Numériques.

Les tests d'hypothèses sont destinés à vérifier si un échantillon peut être considéré comme extrait d'une population donnée ou représentatif de cette population, vis-à-vis d'un paramètre comme la moyenne, la variance ou la fréquence observée. Ceci implique que la loi théorique du paramètre soit connue au niveau de la population. Les tests d'hypothèses ne sont pas faits pour démontrer l'hypothèse nulle (exprimant généralement une égalité ou une homogénéité entre différentes populations), mais pour éventuellement la rejeter (dispons pour être exact que le rejet est plus robuste). Au niveau de la communication des tests statistiques un certain nombre de spécialistes recommandent :

1. De toujours communiquer la p-valeur avec 4 chiffres après la virgule (nous reviondrons plus loin sur ce concept).
2. De ne jamais dire qu'une p-valeur faible montre une amplitude importante de l'effet étudié car cela n'est pas forcéement vrai (pour le vérifier il suffit de prendre un phénomène de très petite amplitude sur une gros échantillon et la p-valeur deviendra toute de suite très petite par construction).
3. De toujours donner l'intervalle de confiance du test qu'il soit unilatéral ou bilatéral.
4. De bien se garder de fixer un seuil de rejet au test excepté si une norme ou législation l'impose (dans ce dernier cas on précisera laquelle).
5. De ne jamais dire que le test est "démontré", ou "significatif" ou même "statistiquement significatif". Juste dire que le résultat est "statistique" ou que nous avons la "probabilité des données connaissant l'hypothèse nulle" et c'est tout !
6. Si l'intérêt est de montrer l'hypothèse nulle et que cette dernière n'est pas rejetée, étant donné souvent sa puissance statistique faible, il faudra répéter l'expérience pour conforter la conclusion.
7. Si l'intérêt est de rejeter l'hypothèse nulle et que cela se vérifie, une bonne pratique scientifique est de chercher des études supplémentaires qui mettraient en défaut la conclusion.
8. S'il y a absence par exemple de différence statistique entre deux valeurs, cela ne signfie pas pour autant qu'il y ait présence statistique d'équivalence. Il faut alors procéder à des "tests d'équivalences".
9. La rejet de l'hypothèse nulle ne signifie pas que le méchanisme du phénomène étudié a été mis en évidence mais indique juste pour rappel une information de taille sur les données a posteriori (ou en termes bayésiens : *la vraisemblance des données n'est pas la crédence de la théorie.*) !
10. Nous communiquons la puissance a posteriori du test.

En cours de traduction de l'anglais

Pour résumer, les études doivent être diffusées en respectant le principe de véracité, après avoir fait l'objet des vérifications de rigueur, et doivent être exposées, décrites et présentées avec impartialité (certains spécialistes parlent alors de "a-théorique"). Il ne faut pas confondre résultats objectifs et spéculations ! Les conclusions doivent être l'expression le plus fidèle possible du contenu des faits et des données.

Le lecteur doit savoir que les tests de signification de l'hypothèse nulle (NHST) sont le résultat de l'évolution de deux théories de test d'hypothèses, à savoir l'approche de Fisher pour les tests de données et l'approche de Neyman-Pearson pour les tests d'acceptation. La procédure finale est la combinaison incongrue de les deux théories précédentes dans l'approche actuelle : NSHT. Nous pouvons aussi considérer que les tests d'hypothèses Bayésiens (BHT) sont eux-mêmes un type (...) d'évolution des NHST. Ces quatre théories de test d'hypothèses (Fisher, Neyman-Pearson, NHST, BHT) sont complémentaires et le scientifique doit éviter d'en utiliser un seul type lorsqu'il analyse le résultat d'une expérience. Comme déjà mentionné au début du livre, différentes approches analytiques sont d'une importance primordiale pour comparer les résultats en minimisant le biais du praticien. Pour plus de détails voir [349].

Par exemple, si nous souhaitons savoir avec une certaine confiance si une moyenne donnée d'un échantillon de population est réaliste par rapport à la vraie moyenne théorique inconnue, nous utiliserons le "test-Z" qui est simplement :

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1727}$$

Maintenant rappelons que nous avons démontré que si nous avions deux variables aléatoires de loi :

$$\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1) \qquad \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2) \tag{5.7.1728}$$

alors la soustraction (différencier) des moyennes donne :

$$\mathcal{N}\left(\mu_2-\mu_1,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \tag{5.7.1729}$$

Donc pour la différence de deux moyennes de variables aléatoires provenant de deux échantillons de population nous obtenons directement :

$$\mathcal{N}\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1,\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \tag{5.7.1730}$$

Nous pouvons alors adapter le test-Z sous la forme :

$$Z^{\text{calc}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} = \frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{5.7.1731}$$

La relation qui est très utile lorsque pour deux échantillons de deux populations de données, nous voulons vérifier s'il existe une différence statistiquement significative des différences des

En cours de traduction de

moyennes théoriques à un niveau de confiance equation fixé et la probabilité associée pour avoir cette différence :

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - Z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leqslant \mu_2 - \mu_1 \leqslant \bar{X}_2 - \bar{X}_1 + Z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (5.7.1732)$$

Donc :

$$|Z^{\text{calc}}| \leqslant |Z_{\alpha/2}| \quad (5.7.1733)$$

Nous parlons du "test-Z de la moyenne à deux échantillons" et il est beaucoup utilisé dans l'industrie pour vérifier l'égalité de la moyenne de deux populations de mesures.

Et si l'écart-type théorique n'est pas connu, nous utiliserons le "test-T de Student" (pas mal utilisé en pharmaco-économie) démontré plus haut :

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}T_{\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}T_{\alpha/2}(n-1) \quad (5.7.1734)$$

Dans la même idée pour l'écart-type, nous utiliserons le "test du Khi-deux de la variance" aussi déjà démontré plus haut :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \quad (5.7.1735)$$

Et lorsque nous voulons tester l'égalité de la variance de deux populations nous utilisons le "Test F de Fisher" de Fisher (démontré plus bas lors de notre étude de l'analyse de la variance) :

$$\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)}\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}\frac{S_{*X}^2}{S_{*Y}^2} \quad (5.7.1736)$$

Dans la pratique il faut avoir conscience que le but d'un test est très très souvent de montrer que l'effet est significatif. Il est alors d'usage de dire que le test réussit si l'hypothèse nulle est rejetée au profit de l'hypothèse alternative. Lorsque le praticien sait que l'effet est significatif et pourtant que son test échoue à rejeter l'hypothèse nulle on parle parfois du "dilemne du non rejet de l'hypothèse nulle". Comme nous le verrons un peu plus loin, l'idée est alors de calculer à posteriori la puissance du test (celle-ci étant alors appelée par certains logiciels comme SPSS : "puissance observée") et d'adapter la taille de l'échantillon en conséquence pour avoir une puissance acceptable selon la tradition d'usage.

5.7.13.1 Orientation du test d'hypothèse et p-valeurs

Le fait que nous obtenions l'ensemble des valeurs satisfaisant à un testborné à droite et (!) à gauche est ce que nous appelons dans le cas général un "test bilatéral" car il comprend le test unilatéral à gauche et unilatéral à droite. Ainsi, tous les tests susmentionnés sont dans une forme bilatérale mais nous pourrions en faire une utilisation unilatérale aussi ! Nous utilisons un test unilatéral lorsque la différence attendue (ou à mettre en évidence) ne peut aller que dans un sens (typiquement dans le cas des essais cliniques ou lors d'un action corrective de contrôle qualité en industrie pour laquelle nous nous attendons à une amélioration allant dans une unique direction).

En cours de traduction de l'anglais

Les test unilatéraux sont parfois nommés "tests de non-infériorité" (unilatéral gauche) ou "test de non-supériorité" (unilatéral droite).

Ci-dessous, nous avons représenté par exemple un test unilatéral à droite (car la région de rejet est à droite et donc la probabilité cumulée est unilatérale gauche) et un test bilatéral de 5% (depuis le début du 121ème siècle (calendrier holocène), de plus en plus de praticiens recommandent de prendre une valeur de 1%) :

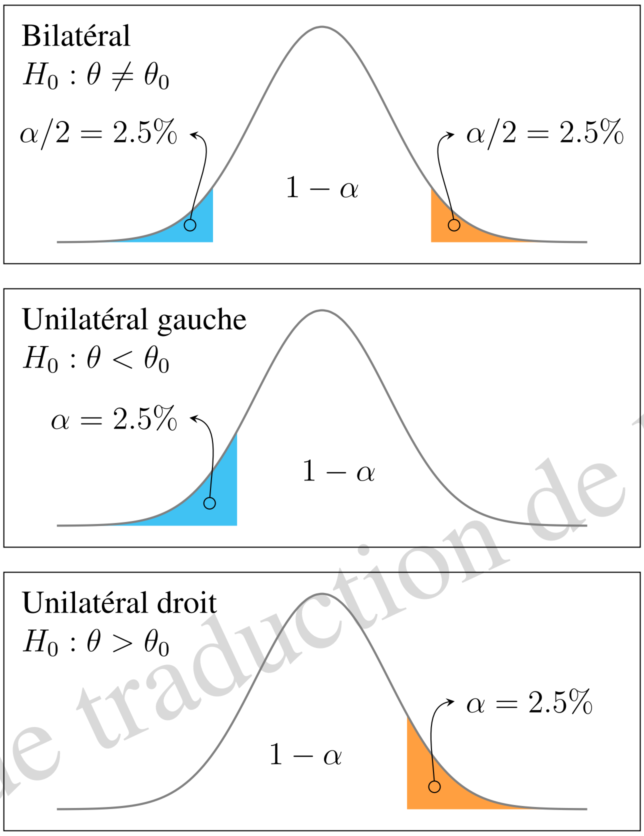


FIG. 5.170 – **Illustration d'un test (ou niveau de confiance) unilatéral et bilatéral (author : Walmes Zeviani)**

En cours de traduction de l' anglais

Nous pouvons également résumer la manière de déterminer la p-valeur (sur laquelle nous reviendrons plus loin en détail) par le logigramme suivant :

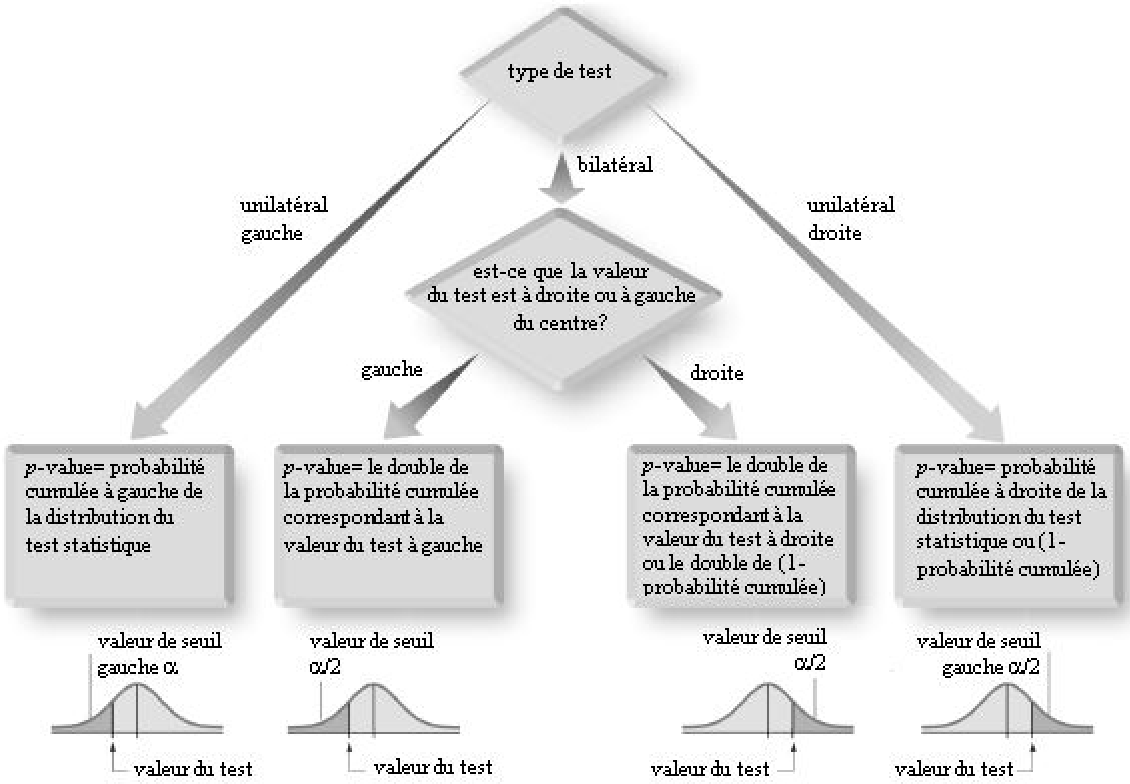


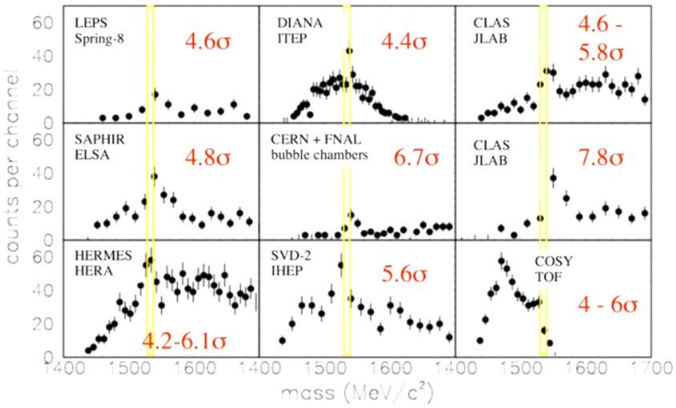
FIG. 5.171 – Figure de résumé pour déterminer la p-valeur lors de tests paramétriques à distribution symétrique

Définition (#5.7.144) : La "p-valeur" est la probabilité d'obtenir un effet au moins aussi extrême que celui de vos données d'échantillon, en supposant l'hypothèse nulle vraie. En d'autres termes, si l'hypothèse nulle est vraie, la valeur p est la probabilité d'obtenir vos données d'échantillon. Cela répond à la question : vos données d'échantillonnage sont-elles inhabituelles si l'hypothèse nulle est vraie ? Si vous pensez que la valeur p est la probabilité que l'hypothèse nulle soit vraie, la probabilité que vous commettiez une erreur si vous rejetez la valeur nulle, ou toute autre chose dans ce sens, alors vous tombé dans malentendu le plus courant des praticiens.

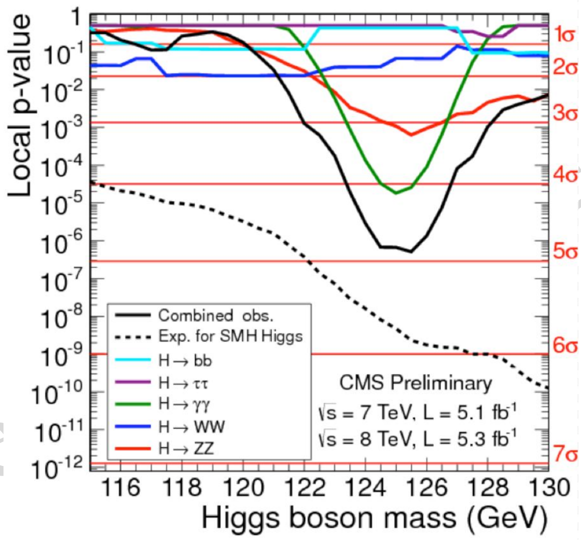
Remarque

Comme l'a écrit l'Association Américaine de Statistique (ASA) dans sa déclaration de 12016 selon calendrier holocène (voir https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00031305.2016.1154108) : « *Les p-valeurs ne mesurent pas la probabilité que l'hypothèse étudiée soit vraie, ni la probabilité que les données soient le fruit du hasard.* » Si nous cherchons une description non technique, l'ASA propose plutôt l'affirmation suivante : « *Les p-valeurs peuvent indiquer le degré d'incompatibilité des données avec un modèle statistique spécifié.* »

Comme déjà mentionné, la valeur p-valeur est souvent considérée comme significative si elle est inférieure à 5% ou même mieux quand ... en dessous de 1%. En physique des particules, selon la distribution de Gauss (pour laquelle il est facile de convertir des pourcentages en écart-type comme nous le savons déjà !), La valeur p-valeur est souvent communiquée en σ comme le montre l'exemple aléatoire ci-dessous de études de découverte du pentaquark en 2003 :



ou un autre exemple aléatoire (aléatoire bien connu ...) de la découverte de confirmation de Higgs Boson au LHC en 2012[40] :



En cours de
l' anglais

L'idée fausse commune est ce que nous aimerions vraiment savoir ! Nous aimerions beaucoup savoir la probabilité qu'une hypothèse soit correcte, ou la probabilité de faire une erreur. Ce que nous obtenons à la place avec les méthodes fréquentistes, c'est la probabilité de notre observation, qui n'est tout simplement pas aussi utile.

Ce serait formidable si nous pouvions avoir des évidences uniquement à partir d'un échantillon et déterminer la probabilité que l'échantillon soit faux. Malheureusement, cela ne semble pas possible avec les méthodes fréquentistes et cela pour des raisons logiques quand on y pense. Sans informations extérieures, un échantillon ne peut pas vous dire s'il est représentatif de la population.

Les p-valeurs sont basées exclusivement sur les informations contenues dans un échantillon. Par conséquent, les p-valeurs ne peuvent pas répondre à la question à laquelle nous voulons le plus répondre, mais il semble y avoir une tentation irrésistible de l'interpréter de cette façon.

[40] Le standard de certitude dont les physiciens des particules ont besoin au début du 21ème siècle pour une découverte est d'environ 1 dans 3.5 millions de dollars, soit 5σ.

Notons également que les tests d'hypothèse sur l'écart type (variance), la moyenne ou la corrélation sont nommés "tests paramétriques" à l'inverse des tests non paramétriques que nous verrons bien plus loin.

Remarques

R1. Il existe également une autre définition du concept de test paramétrique et non-paramétrique (un peu différente car plus précise) à voir plus loin...

R2. Attention ! Certains auteurs ou professeurs parlent parfois de test "unilatéral à gauche" pour un "test unilatéral à droite"... Au fait il s'agit simplement d'un choix de vocabulaire. Si la référence pédagogique n'est pas la zone de rejet mais la zone d'acception, alors il est clair que les concepts de droite et gauche s'inversent...

Enfin, de nombreux logiciels calculent donc ce que nous appelons la "p-valeur" qui est le risque calculé (probabilité) α qu'aurait pu fixer le statisticien pour être à la limite entre l'acceptation de l'hypothèse nulle et son rejet (rappelons qu'un test qui réussit ne prouve rien). La p-valeur est donc une valeur fondamentale dans le domaine car elle permet de chiffrer la vraisemblance de l'hypothèse nulle equation (acception ou rejet).

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#5.7.145) : Mais en toute rigueur la "p-valeur" est la probabilité conditionnelle (bayésienne), que nos données satisfont l'hypothèse nulle (que H_0 est vraie[41]), ie la vraisemblance des résultats :

$$\boxed{p\text{-valeur} = P(\text{données}|H_0)} \tag{5.7.1737}$$

et non la probabilité de l'hypothèse nulle connaissant les données (plausibilité de H_0, ie $P(H_0|\text{données})$) ! :

$$p\text{-valeur} \neq P(H_0|\text{données}) \tag{5.7.1738}$$

Même si la différence peut être faible comme nous l'avons vu dans le section de Probabilités, elle n'en est pas moins non nulle ! Donc la p-valeur en réalité ne dit rien sur l'hyphothèse elle-même, mais elle donne une information sur les données expérimentales si l'expérience est menée un nombre infini de fois et que toutes les hypothèses pertinentes sont valables ! Donc, comme une valeur p ne donne des informations que dans le cas où nous répéterions l'expérience un grand nombre de fois, nous comprenons mieux pourquoi les valeurs p sont souvent décriées dans des études à expérience unique...

Comme l'a dit Ronald Fisher : *Un fait scientifique ne doit être considéré comme expérimentalement établi que si une expérience correctement conçue ne donne que rarement ce niveau de signification*. Cela signifie que la p-valeur inférieure à 0.05 indique seulement qu'il faut répéter l'expérience !

Il est vrai que plus la p-valeur est petite, plus les données seraient inhabituelles si chaque hypothèse était correcte ; mais une très petite p-valeur ne nous dit pas quelle hypothèse est incorrecte.

[41] De manière équivalente, nous pouvons dire que c'est la probabilité conditionnelle d'obtenir des données aussi extrêmes que celle qui ont éé réellement observée, en supposant que l'hypothèse nulle est vraie ! Une autre belle façon de décrire, c'est de dire que la valeur p est la proportion de fois où vous verriez des preuves plus fortes que ce qui a été observé, par rapport à l'hypothèse nulle, si l'hypothèse nulle était vraie et que vous répétiez hypothétiquement l'expérience (échantillonnage d'individus d'une population) un grand nombre de fois !

Par exemple, la p-valeur peut être très petite car l'hypothèse ciblée est fausse ; mais elle peut à la place (ou en plus) être très petite parce que les protocoles d'étude ont été violés, ou parce qu'il a été sélectionné pour présentation en fonction de sa petite taille. Inversement, une grande p-valeur indique seulement que les données ne sont pas inhabituelles sous le modèle, mais n'implique pas que le modèle ou l'un de ses aspects (comme l'hypothèse ciblée) est correct ; elle peut à la place (ou en plus) devenir grande car (encore une fois) les protocoles d'étude ont été violés, ou parce qu'elle a été sélectionnée pour la présentation en fonction de sa grande taille !

La définition générale d'une p-valeur peut aider à comprendre pourquoi les tests statistiques nous en disent beaucoup moins que ce que beaucoup pensent qu'ils font : Non seulement la p-valeur ne nous dit pas si l'hypothèse ciblée pour le test est vraie ou pas ; mais elle ne dit rien de spécifiquement lié à cette hypothèse, à moins que nous ne puissions être complètement assurés que toutes les autres hypothèses utilisées pour son calcul sont correctes, une assurance qui fait défaut dans beaucoup trop d'études.

Surtout gardez à l'esprit (parce que beaucoup de gens ont un biais cognitif naturel à ce sujet ...) qu'en général :

$$P(\text{données}|H_0) \neq P(H_0|\text{données}) \tag{5.7.1739}$$

Mais ces deux probabilités (vraisemblance à gauche et plausibilité à droite) sont cependant liées par le théorème de Bayes (voir section page Probabilités 489) :

$$P(H_0|\text{données}) = \frac{P(\text{données}|H_0)P(H_0)}{P(\text{données})} \tag{5.7.1740}$$

Mais les deux termes $P(H_0)$ (probabilité a prorio du phénomène observé) et $P(\text{données})$ sont en pratique difficiles voire impossibles à connaître.

Pour un test d'hypothèse, par exemple, le 5% de risque α est celui de rejeter l'hypothèse nulle H_0 alors même qu'elle est vraie. Si le risque imposé/choisi est 5% et que la p-valeur calculée est inférieure (dans la majorité des tests mais il faut être prudent car ce n'est pas une généralité ! ! !), le test échoue (rejet de l'hypothèse nulle) en faveur d'une hypothèse alternative notée H_1 ou parfois H_a. N'oubliez jamais que rejeter le test vaut toujours mieux en terme de pouvoir que de l'accepter. En d'autres termes, nous pouvons dire que la valeur p est la plus petite α à laquelle nous rejetterions H_0.

Dans un article publié le 7 mars 2016 (calendrier holocène) par l'American Statistical Association, nous avons une liste de principes pour améliorer la conduite et l'interprétation de la science quantitative par rapport à l'utilisation de la p-valeur ! Les six principes de la déclaration, dont beaucoup traitent d'idées fausses et de l'utilisation abusive de la p-valeur, sont les suivants :

1. La p-valeur peut indiquer dans quelle mesure les données sont incompatibles avec un modèle statistique spécifié.
2. La p-valeur ne mesure pas la probabilité que l'hypothèse étudiée soit vraie, ni la probabilité que les données aient été produites par le seul hasard.
3. Les conclusions scientifiques et les décisions commerciales ou politiques ne devraient pas être basées uniquement sur le fait qu'une valeur p-valeur dépasse un seuil spécifique.

En cours de traduction de l'anglais

4. Une inférence appropriée nécessite un rapport complet et une transparence.

5. Une p-valeur, ou signification statistique, ne mesure pas la taille d'un effet ou l'importance d'un résultat.

6. En soi, une p-valeur ne fournit pas une bonne mesure des évidences concernant un modèle ou une hypothèse.

L'hypothèse alternative H_1 a bien évidemment elle-même son propre risque que nous notons β et sa propre p-valeur. Donc lorsque l'hypothse nulle n'est pas rejetée, le risque associé à cette décision est un "risque de deuxième espèce". Pour l'évaluer, il faudrait donc calculer le puissance du test considéré (voir les démonstrations mathématiques plus bas).

Peut-être, pour mieux comprendre, voici une illustration d'un cas particulier d'un test d'hypothèse bilatéral de la moyenne pour une variable aléatoire suivant typiquement une loi Normale (en gros c'est le même principe pour tous les tests...) :

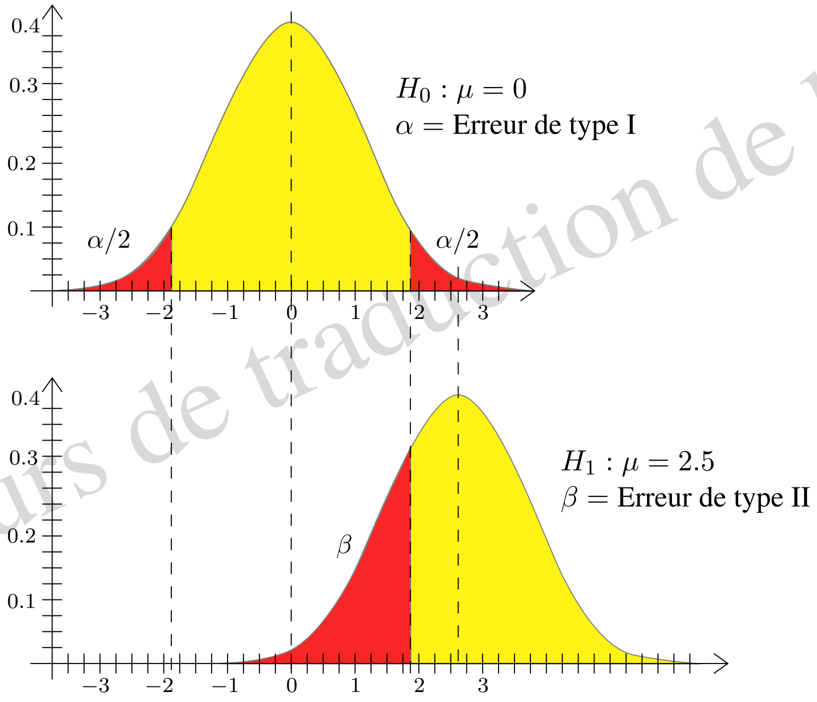


FIG. 5.172 – **Hypothèse nulle et alternative d'un test bilatéral particulier**

En cours de traduction de l' anglais

Ainsi, dans le cas présenté ci-dessus, nous voyons mieux pourquoi l'hypothèse nulle peut donc être acceptée ou rejetée en faveur de l'hypothèse alternative (qui est de même loi que l'hypothèse nulle mais juste décalée) dépendant de la valeur de référence mesurée qui sera utilisée pour le test (en l'occurence dans le cas particulier il s'agit de la moyenne arithmétique des mesures).

Nous remarquons aussi que la zone rouge de l'hypothèse alternative, correspondant à la probabilité cumulée β, est confondue en partie avec la partie jaune de l'hypothèse nulle. Raison pour laquelle nous pouvons parfois accepter l'hypothèse nulle à tort. Nous voyons cependant que plus β serait petit, plus l'hypothèse alternative serait donc éloignée de la zone limite rouge de l'hypothèse nulle (cela correspondrait à une translation vers la droite dans le cas présent)

et moins la probabilité de faire une fausse conclusion est grande. Raison pour laquelle nous parlons de "risque β" car plus celui-ci est petit, mieux c'est. In extenso, plus $1-\beta$ est grand, moins il y a de risque de confondre l'hypothèse nulle et alternative. Raison pour laquelle $1-\beta$ est appelé "puissance du test" (voir plus bas la section qui est consacrée à cette notion).

Nous ne rejettons pas (à contrecoeur) l'hypothèse nulle souvent si la p-valeur est plus grande que 5% (0.05). Au fait, plus la p-valeur est grande, mieux c'est car l'intervalle de confiance est de plus en plus petit. Si l'intervalle de confiance vient à être énorme (très proche de 100%) car la p-valeur est très petite alors l'analyse n'a plus vraiment de sens physiquement parlant !

Ainsi, si la p-valeur est petite, c'est qu'il faudrait prendre un risque α faible de se tromper, donc accepter (ie ne pas rejeter) dans presque tous les cas l'hypothèse testée (H_0)...

Remarques

R1. Nous ne devrions jamais dire que nous "acceptons" une hypothèse ou encore qu'elle est "vraie" ou "fausse" car ces termes sont trop forts et pourraient faire penser à une preuve scientifique. Nous devrions dire si nous "rejetons" ou "ne rejetons pas" l'hypothèse nulle et qu'elle est éventuellement "correcte" ou "non correcte".

R2. Pour les test d'hypothèses bilatéraux, nous pouvons par exemple dire que nous avons (ou n'avons pas) une différence significative entre la valeur de référence mesurée et la valeur attendue. Pour les tests unilatéraux, nous pouvons dire que la valeur de référence mesurée est significativement plus grande ou plus petite que la valeur attendue.

R3. Par ailleurs si le lecteur a bien compris la construction des tests d'hypothèses, le fait de rejeter une hypothèse à tort ("TErreur de Type I" ou "Erreur de première espèce") est donc plus robuste que de l'accepter à tort ("Erreur de type II" ou "Erreur de deuxième espèce").

R4. Le lecteur remarquera aussi en s'aidant de la figure précédent qu'un test unilatéral a une plus forte puissance qu'un test unilatéral (a même niveau de risque bien entendu !). Ainsi, une différence non statistiquement significative en test bilatéral, peut s'avérer statistiquement significative en unilatéral.

R5. Si la p-valeur est proche de la valeur limite (de rejet), nous disons que "l'effet est marginalement significatif".

Un gros problème avec les tests d'hypothèses[42] est ce que nous appelons le "p-hacking" : l'idée sous-jacente consiste à répliquer un test des dizaines de fois jusqu'à ce qu'il aboutisse à la conclusion que l'expérimentateur veut ... ou essayer toutes les combinaisons possibles de variables jusqu'à ce que nous trouvions quelque chose de significatif ou même que nous prenions simplement de gros échantillons (car nous savons que les tests NHST échouent systématiquement lorsque les échantillons sont gros).

[42]Un autre est la "malédiction du filtre de significativité" relativement bien documenté dans [480].

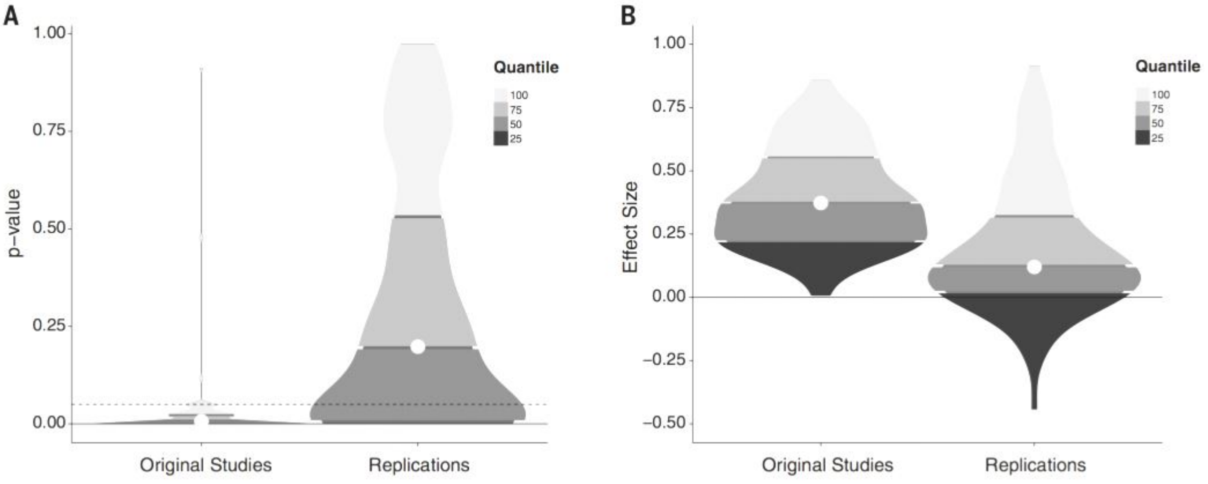


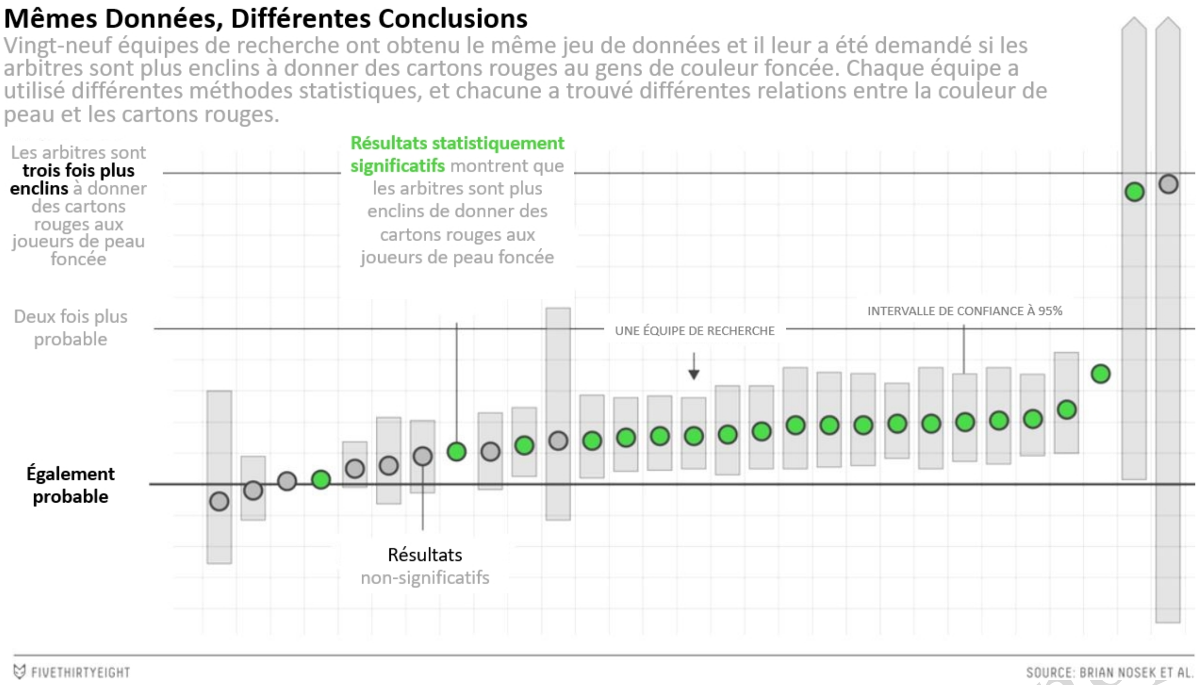
FIG. 5.173 – p-hacking Open Science Collaboration, *Estimating the reproducibility of physiological science*, Science, 349 (2015)

Le p-hacking est généralement considéré comme de la triche, mais que se passerait-il si nous le rendions obligatoire à la place ? Si le but des études est de repousser les frontières de la connaissance, alors peut-être que jouer avec différentes méthodes ne devrait pas être considéré comme un sale tour, mais encouragé comme un moyen d'explorer les frontières. Un récent projet dirigé par Brian Nosek, fondateur du Center for Open Science, a offert un moyen intelligent de le faire.

Vingt-neuf équipes avec un total de 61 analystes y ont participé. Les chercheurs ont utilisé une grande variété de méthodes, allant - pour ceux d'entre vous intéressés par le gore méthodologique - des techniques de régression linéaire simples aux régressions multiniveaux complexes et aux approches bayésiennes. Ils ont également pris différentes décisions concernant les variables secondaires à utiliser dans leurs analyses.

Malgré l'analyse des mêmes données, les chercheurs ont obtenu une variété de résultats. Vingt équipes ont conclu que les arbitres de football donnaient plus de cartons rouges aux joueurs à la peau foncée, et neuf équipes n'ont trouvé aucune relation significative entre la couleur de la peau et les cartons rouges.

En cours de traduction de l'anglais



La variabilité des résultats n'est pas due à une fraude ou à un travail bâclé. Ils sont considérés comme des analystes hautement compétents qui sont motivés pour trouver l'évidence, a déclaré Eric Luis Uhlmann, psychologue à l'école de commerce Insead à Singapour et l'un des chefs du projet. Même les chercheurs les plus qualifiés doivent faire des choix subjectifs qui peuvent avoir un impact énorme sur les résultats qu'ils trouvent.

Mais ces résultats disparates ne signifient pas que les études ne peuvent pas nous guider vers l'évidence. La leçon importante ici est qu'une seule analyse n'est pas suffisante pour trouver une réponse fiable au-delà de tout doute raisonnable.

En cours de traduction de l'anglais

De plus, la signification statistique n'a littéralement aucune connexion avec la "signification pratique", appelée aussi "signification scientifique" ou "relevance". Elle ne vous dira jamais si quelque chose est important ou non ! En effet, ce n'est pas un indicateur connaissant le contexte ! Lorsqu'une hypothèse nulle est rejetée ou non cela signifie seulement que le test d'hypothèse n'a pas atteint le niveau de signification prédéfini α et non que les résultats sont significatifs ou non significatifs pour des applications pratiques (ils le sont très probablement pour le scientifique qui a passé des nuits dans son laboratoire à recueillir des données) ! Les statistiques de tests ne regardent que l'effet (différence, ratio, covariance, etc.) et la variance ou autre. En d'autres termes, elle regarde juste si le signal est suffisamment visible sur le bruit de fond. Elle prend la condition actuelle - taille de l'échantillon - en considération. Plus de données signifient que des effets plus petits seront indiqués comme statistiquement significatifs.

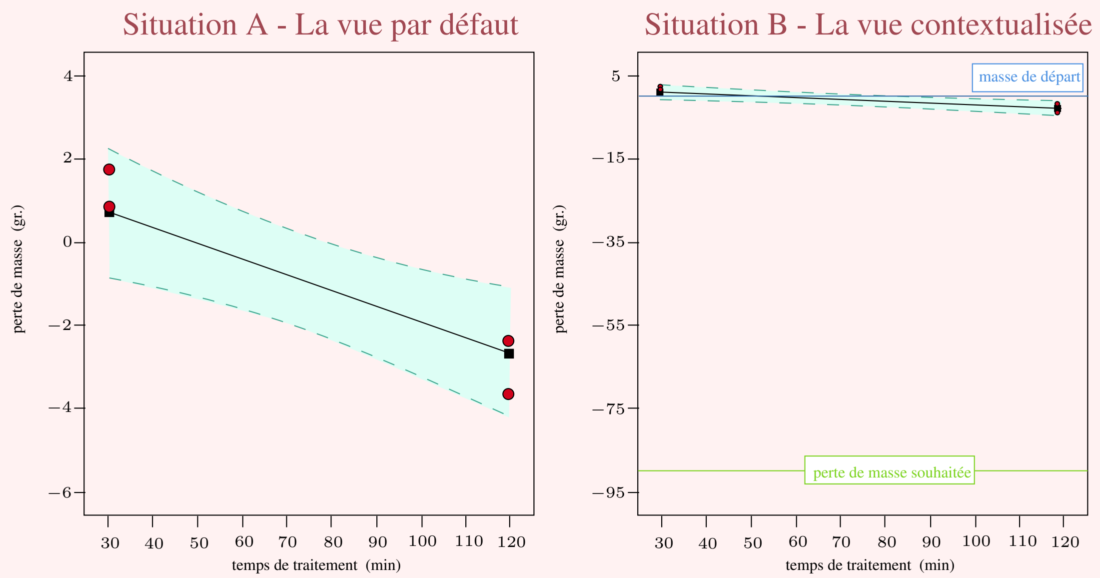


FIG. 5.174 – Signification statistique élevée qui, contextualisée, a une faible signification pratique (source : Danish Technological Institute)

Pour décider si quelque chose est pratiquement significatif, nous avons besoin du seuil de différence minimale significative ! Il ne provient pas d'une procédure mathématique « aveugle », ignorant le contexte, mais plutôt des connaissances du domaine : experts, revue de la littérature, votre expérience, études pilotes, etc. En médecine, nous l'appelons DMCS pour "différence minimale cliniquement importante". Et nous pouvons l'intégrer dans les tests d'hypothèses statistiques via les intervalles d'hypothèses, comme dans les études cliniques de non-infériorité, de supériorité ou d'équivalence.

quote 5.7:938.#39

> *La médecine fondée sur les évidences a mis des siècles à faire progresser l'humanité au point où les gens sont en si bonne santé et vivent si longtemps qu'ils peuvent nier que la science, les statistiques et la médecine sont ce qui nous a amenés là où nous sommes.*

Gardez à l'esprit que, comme nous l'avons dit dans l'introduction : Ce qui rend la science si puissante, c'est qu'elle se corrige d'elle-même. Bien sûr, de fausses conclusions sont publiées, mais finalement de nouvelles études viennent les renverser, et la nouvelle évidence est révélée. Du moins, c'est ainsi que cela est censé fonctionner. Mais le monde de la publication scientifique n'a pas une grande expérience en matière de suivi des corrections, mais cela évolue avec les nouvelles technologies qui facilitent ce suivi avec des bases de données informatiques.

La méthode scientifique est donc a posteriori de loin la méthode la plus fiable (moins pire) que toute autre façon d'acquérir du savoir que nous avons AUJOURD'HUI (mais ce n'est pas un argument pour ne pas chercher à en trouver une meilleure) !

Remarques

Soit dit en passant ... le lecteur peut essayer de se souvenir d'un adage nommé d'après l'économiste Charles Goodhart, qui a été formulé par Marilyn Strathern comme : *Quand une mesure devient une objectif, elle cesse d'être une bonne mesure.* Mais le la formulation d'origine était : *Toute régularité statistique observée aura tendance à s'effondrer une fois la pression exercée sur elle à des fins de contrôle.*

Définitions (#5.7.146) :

D1. La "probabilité α de l'erreur de Type I" (de première espèce/faux négatif[43]) est la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraisemblablement vraie[44]. En statistiques, la "taille d'un test" est la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle. Autrement dit, il s'agit de la probabilité de commettre une erreur de type I. Elle est désignée par la lettre grecque α (alpha). Pour une hypothèse nulle simple, la taille est déterminée par la probabilité conditionnelle suivante :

$$P(\text{ test rejette } H_0 \mid H_0) \quad (5.7.1741)$$

D2. La "probabilité β de l'erreur de Type II" (de deuxième espèce/faux positif) est la probabilité de maintien de l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraisemblablement fausse. Puisque, par définition, la puissance est égale à un $1-\beta$, la puissance d'un test diminuera au fur et à mesure que le bêta augmentera. Autrement dit, pour une hypothèse nulle et alternative donnée, la puissance est déterminée par la probabilité conditionnelle suivante :

$$P(\text{ test ne rejette pas } H_0 \mid H_1) \quad (5.7.1742)$$

En cours de traduction de l'anglais

[43]Notez que selon le point de vue du scientifique, un "faux négatif" peut être nommé "faux positif", c'est pourquoi de nombreux manuels de Statistiques évitent d'utiliser ce vocabulaire spécifique !

[44]Veuillez garder à l'esprit que comme déjà mentionné dans l'introduction de ce livre, nous ne parlons pas ici de la "vérité philosophique", mais de la "vérité" comme la meilleure explication à notre niveau actuel de connaissance ! ! !

	État de la Nature	
Résultat du test	H_0 **fausse**	H_0 **vraie**
Rejeter H_0	Rejet correct de l'hypothèse nulle ($1-\beta$: puissance du test)	Erreur de Type I (faux négatif) (Risque α)
Échec du rejet de H_0	Erreur de Type II (faux positif) (Risque β)	Acceptation correcte de l'hypothèse nulle ($1-\alpha$: seuil de confiance)

Ou sous une forme plus mathématique :

	État de la Nature	
Résultat du test	H_0 **fausse**	H_0 **vraie**
Rejeter H_0	Rejet correct de l'hypothèse nulle P(reject $H_0 \vert H_0$ est fausse) $= 1-\beta$	Erreur de Type I (faux négatif) P(rejeter $H_0 \vert H_0$ est vraie) $= \alpha$
Échec du rejet de H_0	Erreur de Type II (faux positif) P(échec du rejet de $H_0 \vert H_0$ est fausse β	Acceptation correcte de l'hypothèse nulle P(échec du rejet de $H_0 \vert H_0$ est vraie) $=$ $1-\alpha$

Ainsi, un critère traditionnel de sélection de test est d'utiliser le principe suivant : parmi tous les tests qui ont la même grandeur de l'erreur de type I, choisir celui qui a la plus petite grandeur de l'erreur de type II.

Ainsi, on peut dire qu'un test d'hypothèse a simplement pour but de minimiser α l'erreur de Type I et, au contraire, de maximiser $1-\beta$, la puissance du test.

En général, l'amplitude de l'erreur de type II augmente lorsque celle de l'erreur de type I diminue. Nous ne pouvons pas minimiser les deux erreurs à la fois. Pour cette raison, nous prenons souvent une valeur donnée pour α, la grandeur de l'erreur de type I, et nous minimisons β, l'amplitude de l'erreur de type II (i.e. nous augmentons la puisse $1-\beta$).

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

En 2017, le taux de faux négatifs dans la population générale des États-Unis pour le test du VIH est d'environ 0.003%, soit trois fois sur $100'000$ tests.

Les taux de faux positifs sont bien inférieurs, entre 0.0004% et 0.0007% en raison de la pratique par laquelle le résultat positif initial est confirmé par un second test.

Autre exemple, les faux négatifs se produisent sur 1 des chaque $2'500$ femmes dépistées (Programme de dépistage du cancer du sein du NHS - dépliant *Helping you decide* de Juillet 2013) et se produisent plus souvent chez les femmes plus jeunes que chez les femmes plus âgées parce que le tissu mammaire des femmes plus jeunes est plus dense.

Pour clore, voici les trois situations types de tests d'hypothèses sur la statistique qu'est la moyenne dans le cadre d'une distribution sous-jacente Normale et dont l'espérance est dans ce cas particulier supposée nulle et de variance unitaire (car on peut très souvent ce ramener à ce cas particulier en centrant et réduisant la variable aléatoire sous-jacente) :

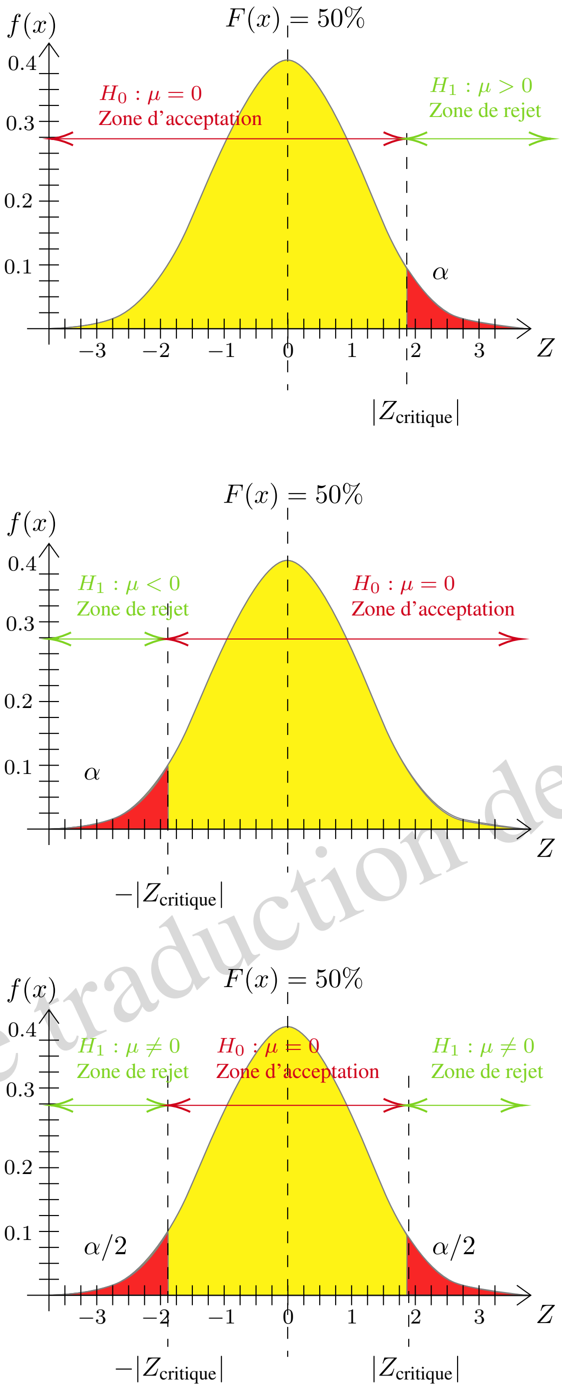


FIG. 5.175 – Les trois scénarios possibles d'un test d'hypothèse sur la moyenne

En cours de traduction de l'anglais

Indiquons que cela n'a aucun sens (contrairement à ce que nous pouvons parfois lire sur certains supports papier ou électronique) d'avoir les hypothèses nulles suivantes dans le cas paticulier représenté ci-dessus :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \leq 0 \\ H_0 &: \mu \geq 0 \\ H_0 &: \mu \neq 0 \end{aligned} \tag{5.7.1743}$$

avec l'hypothèse alternative qui en découle automatiquement (je ne l'ai pas écrite car c'est inutile). La raison en est simple : comment pourriez-vous positioner votre distribution Normale

centrée réduite si l'espérance n'est pas fixée... ? ? ? Raison pour laquelle l'hypothèse nulle dans le cadre des tests sur la moyenne (et d'un certain autre nombre de tests) est toujours une égalité !

Évidemment, le lecteur aura très probablement remarqué que :

- Si l'intervalle de confiance contient le paramètre d'intérêt relativement à H_0 le test n'est pas significatif
- Si l'intervalle de confiance exclut le paramètre d'intérêt relativement à H_0 le test est significatif

Pour résumer, nous pouvons dire que si nous prenons une décision, nous pouvons nous tromper et il vaut mieux éviter de se tromper souvent. En clair, la probabilité de dire une bêtise doit être connue et de préférence petite.

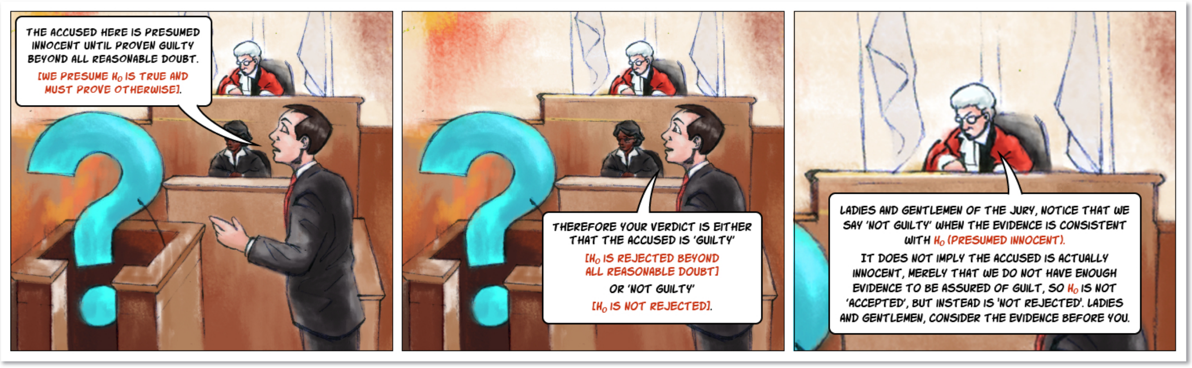
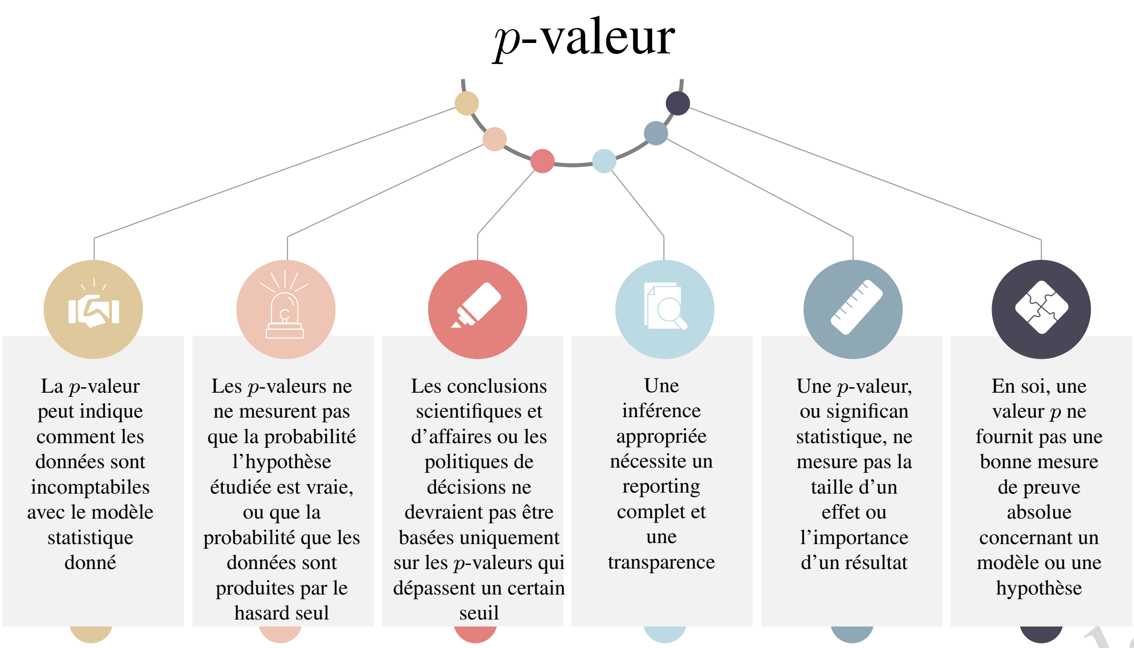


FIG. 5.176 – BD illustrant l'hypothèse nulle et alternative (auteur : ?)

Mais gardez à l'esprit qu'une meilleure compréhension de la p-valeur n'enlèvera pas l'impulsion humaine (biais cognitif) d'utiliser les statistiques pour créer un niveau de confiance impossible. La plupart des gens veulent quelque chose qu'ils ne peuvent pas vraiment obtenir et qu'ils ne comprennent pas vraiment à cause d'un manque d'éducation et de pensée critique. Ils veulent des certitudes ! Et même si vous essayez de le leur expliquer, vous aurez un effet de retour de flamme car ils souffrent souvent du syndrome de l'anti-intellectualisme.

Attention ! Dans certains logiciels de statistiques avancés, la p-valeur peut ne pas correspondre à l'intervalle de confiance. Par exemple, dans R avec le test de proportion (voir page **??**), la p-valeur est calculée à l'aide du test de score de Rao (basé sur la variance groupée), l'intervalle unilatéral est calculé à l'aide du score de Wilscon et l'intervalle de confiance bilatéral est calculé à l'aide de la variance non groupée de Wald (normale). Le même scénario se produit dans R (et d'autres logiciels statistiques) avec le test exact de Fisher (voir page 1235).



5.7.13.2 Méthode de Fisher pour p-valeurs multiples

En statistique, la "méthode de Fisher, également connue sous le nom de "test de probabilité combiné de Fisher", est une technique de fusion de données ou "méta-analyse" (analyse des analyses). Elle a été développée par et nommée pour Ronald Fisher. Dans sa forme de base, elle est utilisé pour combiner les résultats de plusieurs tests indépendants portant sur la même hypothèse globale (H_0).

Considérons un ensemble de k tests indépendants, chacun d'eux pour tester une certaine hypothèse nulle $H_{0|i}, i = \{1, 2, \ldots, k\}$. Pour chaque test, un niveau de signification p_i, c'est-à-dire une p-valeur, est obtenue. Toutes ces p-valeurs peuvent être combinées dans un test conjoint pour savoir s'il existe un effet global, c'est-à-dire si une hypothèse nulle globale H_0 peut être rejetée.

Il existe plusieurs façons de combiner ces tests partiels indépendants. La méthode de Fisher est l'une de celles-ci et est peut-être la plus connue et la plus largement utilisée. Le test a été présenté dans le livre désormais classique de Fisher, *Statistical Methods for Research Workers* (11932 selon calendrier holocène).

Le test est basé sur le fait que la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle globale est liée à l'intersection des probabilités de chaque test individuel, $\prod_i p_i$. Cependant, $\prod_i p_i$ n'est pas uniformément distribué (mais chaque p_i est supposé être uniformément distribué !), même si l'hypothèse nulle est vrai pour tous les tests partiels, et ne peut pas être utilisé lui-même comme niveau de signification conjoint pour le test global. Pour remédier à ce fait, certaines propriétés et relations intéressantes entre les distributions de variables aléatoires ont été exploitées par Fisher et incorporées dans l'extrait succinct ci-dessus. La preuve est donnée ci-dessous :

Démonstration 5.46.3. Nous recherchons donc la loi de distribution de :

$$X = \prod_i p_i \tag{5.7.1744}$$

En cours de traduction de l'anglais

mais cela semble assez difficile à faire car nous avons affaire à un produit. Dès lors, nous prenons d'abord le logarithme (le logarithme naturel comme nous savons par expérience que dans le domaine des statistiques que la plupart du temps c'est le $\ln$ qui apparaît) :

$$\ln(X) = \ln\left(\prod_i p_i\right) = \sum_i \ln(p_i) \tag{5.7.1745}$$

Nous avons donc maintenant une somme des logarithmes naturels de distributions uniformes $\mathcal{U}_{0,1}$. C'est un peu mieux mais maintenant nous avons le problème du $\ln\left(\mathcal{U}_{0,1}\right)$.

Mais voyons maintenant quelque chose de sympa ! N'oubliez pas que la fonction de distribution cumulative d'une distribution exponentielle est :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{5.7.1746}$$

L'inverse est alors donné par :

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - F(x)) \tag{5.7.1747}$$

Si P est une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 1]$, il en est de même de $1 - P$. En conséquence, la relation précédente peut s'écrire de manière équivalente :

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(P) \tag{5.7.1748}$$

où encore une fois : $P = \mathcal{U}_{0,1}$. Nous venons donc de trouver que le logarithme naturel d'une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$ suit une distribution exponentielle avec le paramètre $\lambda = 1$!

Mais maintenant, nous avons un petit problème. Comme nous avons une somme de lois exponentielles, nous n'avons jamais prouvé si la loi exponentielle est stable par addition...

Rappelons maintenant que la distribution chi-carré avec k degrés de liberté est donnée par :

$$\chi_k^2(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot 1_{[0,+\infty[} \tag{5.7.1749}$$

Si $k = 2$ nous obtenons :

$$\chi_2^2(x) = \frac{1}{2^{2/2}\Gamma(2/2)} x^{\frac{2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \cdot 1_{[0,+\infty[} = \frac{1}{2 \cdot 1} x^0 e^{-x/2} = \frac{1}{2} e^{-x/2} \tag{5.7.1750}$$

En d'autres termes, une distribution chi-carré avec deux degrés de liberté est égale à une distribution exponentielle avec $\lambda = 1/2$!

Et rappelez-vous maintenant, lors de notre étude de la distribution Gamma, nous avons prouvé qu'elle était stable par addition. Et comme nous avons prouvé que la distribution du chi-carré découle d'un cas particulier de la distribution Gamma, et tout à l'heure que la distribution exponentielle découle d'un cas particulier de la distribution du chi carré, alors cette dernière est également stable par addition de degrés de liberté ! ! ! !

En cours de traduction de l'anglais

Par conséquent, en multipliant la somme des logarithmes par -2 pour se débarrasser des $-$ provenant de la loi exponentielle et des $1/2$ provenant de ce qui limite la loi du chi-carré à la loi exponentielle, nous obtenons :

$$\chi^2_{2k} = -2\sum_{i=1}^{k} p_i \tag{5.7.1751}$$

à partir de laquelle une p-valeur pour l'hypothèse globale peut être facilement obtenue.

■ Q.E.D.

Selon la méthode de Fisher, deux petites valeurs p_1 et p_2 se combinent pour former une p-valeur plus petite. La limite jaune-verte dans la figure ci-dessous définit la région où la p-valeur de la méta-analyse est inférieure à 0.05. Par exemple, si les deux valeurs de p sont d'environ 0.10, ou si l'une est d'environ 0.04 et l'autre d'environ 0.25, la p-valeur de la méta-analyse est alors d'environ 0.05 :

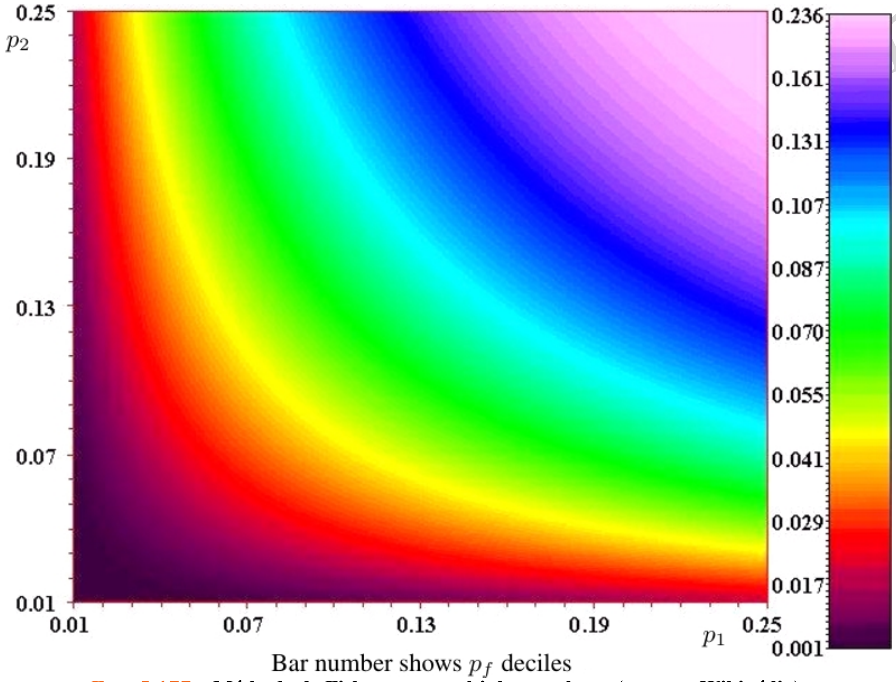


FIG. 5.177 – **Méthode de Fisher pour multiples p-valeurs (source : Wikipédia)**

En cour ... nglais

Remarque

Dans la fameuse affaire de jugement de Lucia de Berk, le tribunal a largement utilisé des calculs statistiques pour obtenir sa condamnation. Dans une émission télévisée spéciale de NOVA en 2003, le professeur néerlandais de droit pénal Theo de Roos a déclaré : *Dans l'affaire Lucia de Berk, les preuves statistiques ont été d'une importance considérable. Je ne vois pas comment on aurait pu arriver à une condamnation sans cela*. Le psychologue juridique Henk Elffers, qui a été utilisé par les tribunaux comme témoin expert sur les statistiques à la fois dans l'affaire initiale et en appel, a également été interrogé sur le programme et a déclaré que la possibilité qu'une infirmière travaillant les trois hôpitaux soit présente sur les lieux de tant de décès inexpliqués et de réanimation

est des 1 chance sur 342 millions. Mais malheureusement, cette valeur a été mal calculée (c'est pourquoi tout calcul statistique important doit toujours être revu par des pairs au moins par trois autres personnes indépendantes) en faisant un simple calcul de la multiplication des p-valeurs... De plus, toujours dans le contexte de Lucai de Berk, les statisticiens Richard D. Gill et Piet Groeneboom ont calculé qu'il y avait finalement qu'une chance sur vingt-cinq qu'une infirmière puisse vivre une séquence d'événements du même type que Lucia de Berk.

L'utilisation des arguments de probabilités dans le cas De Berk a été discuté dans un article de 2007 de *Nature* par Mark Buchanan. Il a écrit *Le tribunal doit peser deux explications différentes : meurtre ou coïncidence. L'argument selon lequel il était peu probable que les décès soient survenus par hasard (que ce soit* 1 *chance sur* 48 *ou* 1 *chance sur* 342 *millions) n'est pas si significatif en soi - par exemple, la probabilité que dix meurtres se produisent dans le même hôpital pourrait être encore plus improbable. Ce qui compte, c'est la probabilité relative (odds ratio) des deux explications ! Cependant, le tribunal n'a reçu une estimation que pour le premier scénario.*

Nous voyons donc ici que l'utilisation d'une simple multiplication de des p-valeurs selon la méthode de Fisher n'est pas le bon outil dans une telle situation !

Notons que l'utilisation de la méthode de Fisher ne fonctionne que si les études incluses dans une méta-analyse sont comparables (taille de l'échantillon). Si ce n'est pas le cas, nous devons utiliser d'autres techniques permettant l'utilisation de poids comme illustré dans la figure ci-dessous que nous avons déjà rencontrée dans l'introduction de ce livre :

Occupational therapy for patients with problems in personal activities of daily living after stroke: systematic review of randomised trials

Study or Subgroup	Treatment Events	Treatment Total	Control Events	Control Total	Weight	Risk Difference IV, Fixed, 95% CI	Year
Drummond 1995	2	42	3	23	12.8%	-0.08 [-0.23, 0.07]	1995
Corr 1995	33	55	32	54	8.7%	0.01 [-0.18, 0.19]	1995
Logan 1997	6	53	14	58	15.3%	-0.13 [-0.27, 0.01]	1997
Walker 1999	18	90	27	86	18.0%	-0.11 [-0.24, 0.01]	1999
Gilbertson 2000	33	66	41	67	10.5%	-0.11 [-0.28, 0.06]	2000
Parker 2001	106	248	56	123	25.7%	-0.03 [-0.14, 0.08]	2001
Sackley 2006	27	53	36	47	9.0%	-0.26 [-0.44, -0.08]	2006
Total (95% CI)		**607**		**458**	**100.0%**	**-0.09 [-0.15, -0.04]**	
Total events	225		209				

Heterogeneity: Chi² = 6.10, df = 6 (P = 0.41); I² = 2%
Test for overall effect: Z = 3.32 (P = 0.0009)

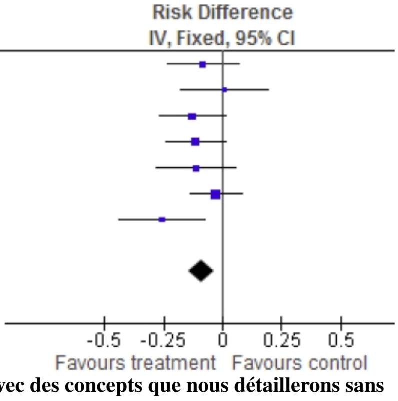


FIG. 5.178 – **Exemple particulier de méta-analyse dans le domaine des essais cliniques avec des concepts que nous détaillerons sans exception dans tout ce livre (source : [278])**

La différence de risque (D.R.) étant simplement la différence de deux proportions, on utilise le fameux intervalle de Wald suivant (voir page 863) pour le calcul de l'intervalle de confiance :

$$(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}} \leq p_X - p_Y \leq (\hat{p}_X - \hat{p}_Y) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_1} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_2}} \quad (5.7.1752)$$

où par définition D.R. $:= p_X - p_Y$.

Nous voyons ci-dessus que la largeur de l'intervalle de confiance à 95% de la différence de risque commune (totale) est inférieure à la largeur de l'intervalle de confiance 95% de l'effet estimé dans chacun des essais. C'est évidemment parce que l'effet combiné est plus précis que l'effet estimé dans les essais.

Il est également très important de noter que dans une méta-analyse (comme l'exemple ci-dessus), même si aucun essai ne détecte un effet du traitement expérimental (comme vous pouvez le voir ci-dessus dans chaque essai zéro est dans l'intervalle de confiance), la synthèse des résultats des essais (différence de risque comme ci-dessus) peut permettre de déceler un effet global (le lecteur peut voir que dans l'intervalle de confiance total, le zéro est en dehors de l'intervalle de confiance). Nous gagnons donc en puissance du test !

Le lecteur peut se demander d'où vient le -0.09 dans la ligne "Total (IC 95%)" ? Il provient de la simple moyenne pondérée suivante de toutes les différences de risques :

$$\widehat{\text{D.R.}}_{\text{pondérée}} = 0.128 \cdot (-0.08) + 0.087 \cdot (0.01) + 0.153 \cdot (-0.13) + \ldots = -0.09$$

5.7.13.2.1 Paradoxe de Simpson (sophisme)

Le "paradoxe de Simpson" (en fait c'est un sophisme et non un paradoxe car c'est juste un cas particulier de biais de variable omis), est un paradoxe de probabilités et de statistiques, dans lequel une tendance apparaît dans différents groupes de données mais disparaît ou s'inverse lorsque ces groupes sont combinés [45].

Ce résultat est souvent rencontré en particulier dans les statistiques des sciences sociales (ressources humaines, marketing, psychologie) et des sciences médicales et est particulièrement déroutant lorsque les données fréquentielles reçoivent indûment des interprétations causales. Le paradoxe de Simpson disparaît lorsque les relations causales sont prises en compte.

Voyons un exemple réel célèbre d'une véritable étude médicale (il y a aussi un autre cas célèbre avec le rapport *Nation at Risk*, si le lecteur est intéressé, il suffit de le rechercher sur Internet !) :

Le tableau ci-dessous montre les taux de succès et le nombre de traitements pour les traitements impliquant à la fois de petits et grands calculs rénaux, où le traitement A comprend toutes les interventions chirurgicales ouvertes et le traitement B est la néphrolithotomie percutanée (qui n'implique qu'une petite ponction). Les nombres entre parenthèses indiquent le nombre de cas de réussite sur la taille totale du groupe (par exemple, 93% équivaut à 81 divisé par 87) :

	Traitement A	**Traitement B**
Petits calculs	Groupe 1 93% $(81/87)$	Groupe 2 87% $(234/270)$
Grands calculs	Groupe 3 73% $(192/263)$	Groupe 4 69% $(55/88)$
Ensemble	78% $(273/350)$	83% $(289/350)$

[45] Edward H. Simpson a décrit ce phénomène pour la première fois dans un article technique en 1951, mais les statisticiens Karl Pearson et al., en 1899, et Udny Yule, en 1903, avait mentionné des effets similaires plus tôt. Le nom de paradoxe de Simpson a été introduit par Colin R. Blyth en 1972.

En cours de traduction de l'anglais

La conclusion paradoxale est que le traitement A est plus efficace lorsqu'il est utilisé sur de petites calculs, et aussi lorsqu'il est utilisé sur de gros calculs, pourtant le traitement B est plus efficace si l'on considère les deux tailles de calculs en même temps. Dans cet exemple, la variable "cachée" (ou "variable de confusion") de la taille du calcul n'était pas connue auparavant pour être importante jusqu'à ce que ses effets soient inclus.

Formellement, si on dénote (on change les notations ! ! ! !) A le résultat, B le traitement, et C les calculs, dans le cas général, avec le paradoxe de Simpson il est possible d'avoir en termes (formalisme) de probabilités bayésiennes :

$$P(A|B,C) < P(A|B^c,C) \text{ et } P(A|B,C^c) < P(A|B^cC^c) \text{ avec aussi : } P(A|B) > P(A|B^c) \tag{5.7.1753}$$

Le traitement considéré comme meilleur est déterminé par une inégalité entre deux ratios (succès / total). L'inversion de l'inégalité entre les ratios, qui crée le paradoxe de Simpson, se produit parce que deux effets se produisent ensemble :

1. Les tailles des groupes, qui sont combinées lorsque la variable cachée est ignorée, sont très différentes. Les médecins ont tendance à donner aux cas graves (gros calculs) le meilleur traitement A, et aux cas les plus bénins (petits calculs) le traitement inférieur B. Par conséquent, les totaux sont dominés par les groupes 3 et 2, et non par les deux groupes beaucoup plus petits 1 et 4.

2. La variable cachée a un effet important sur les ratios, c'est-à-dire que le taux de réussite est plus fortement influencé par la gravité du cas que par le choix du traitement. Par conséquent, le groupe de patients avec de gros calculs utilisant le traitement A (groupe 3) fait moins bien que le groupe avec de petits calculs, même si ce dernier a utilisé le traitement inférieur B (groupe 2).

Sur la base de ces effets, le résultat paradoxal semble provenir de la suppression de l'effet causal de la taille des calculs sur le succès du traitement. Le résultat paradoxal peut être reformulé plus précisément comme suit : Lorsque le traitement le moins efficace (B) est appliqué plus fréquemment à des cas plus faciles, il peut apparaître comme un traitement plus efficace.

En cours de traduction de l'anglais

Le paradoxe de Simpson nous trompe généralement sur les tests de performance. Dans un exemple célèbre, les chercheurs ont conclu qu'un traitement plus récent pour les calculs rénaux était plus efficace que la chirurgie traditionnelle, mais il a été révélé plus tard que le nouveau traitement était plus souvent utilisé sur les petits calculs rénaux. Plus récemment, aux tests des écoles élémentaires, les élèves des minorités du Texas surpassent leurs pairs du Wisconsin, mais le Texas compte tellement d'élèves des minorités que le Wisconsin le bat dans le classement des États. Ce serait dommage si le paradoxe de Simpson conduisait les médecins à prescrire des traitements inefficaces ou les écoles du Texas à gaspiller de l'argent à copier le Wisconsin.

Considérons un autre exemple illustré amusant dans le domaine du marketing ! Considérons que nous avons les informations suivantes :

Campagne de courriel	Convertis	Non-convertis	Total	Taux de succès
A	21100	900	22000	95,90%
B	20310	690	21000	96,70%
Total	41410	1590	43000	

FIG. 5.179 – Performance de la campagne marketing

Évidemment, la campagne B est la plus performante pour convertir un e-mail en clic ("taux de conversion") !

Mais maintenant, en séparant les clics sur les liens de grande valeur (produits coûteux : conversion de ticket élevée) ou les liens de faible valeur (conversion de ticket bas), nous obtenons :

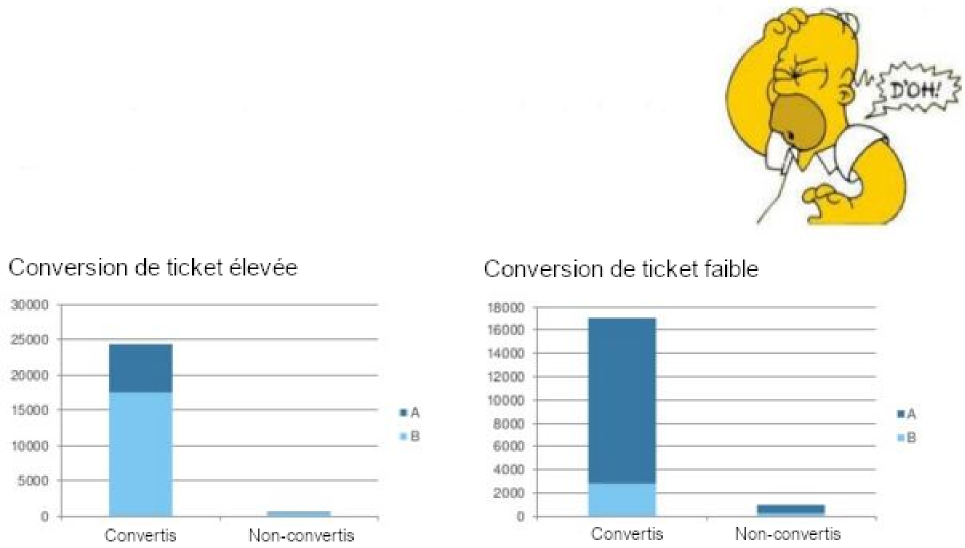


FIG. 5.180 – Performance de la campagne marketing dans la covariable de conversion de ticket

Ou pour les personnes plus visuelles (avec des graphiques), voici un exemple de notre livre compagnon R. Il s'agit d'une simple régression de l'ensemble du jeu de données IRIS. La tendance de la régression linéaire semble négative :

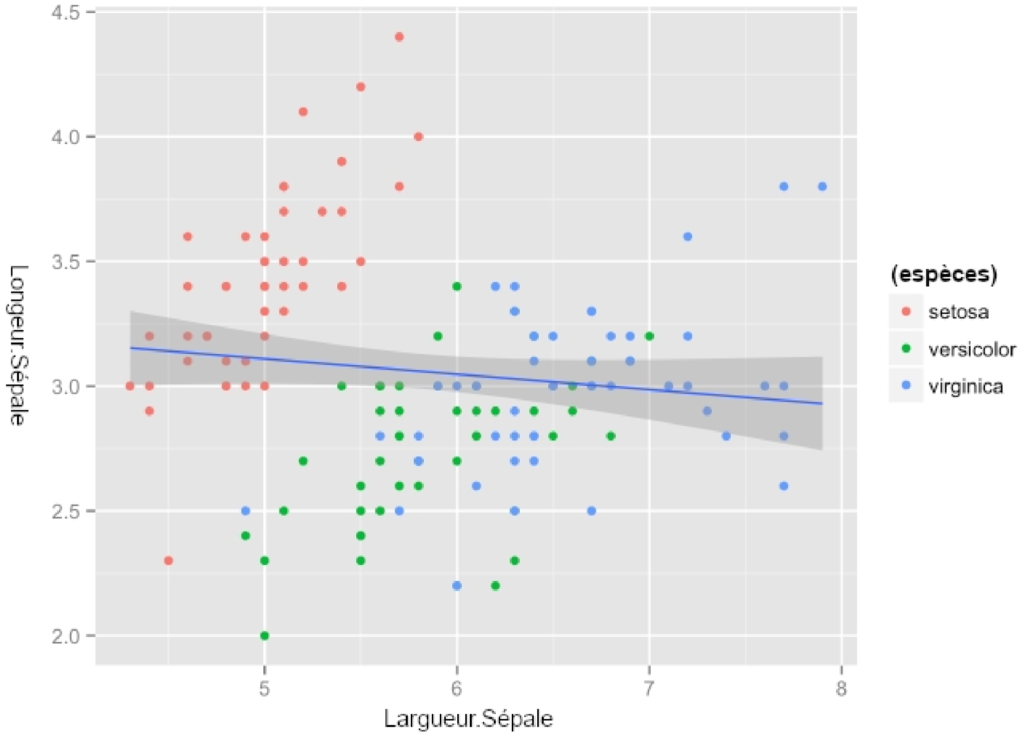


FIG. 5.181 – **Régression non groupée du jeu de données IRIS dans R pour illustrer le paradoxe de Simpson**

Maintenant, si nous regroupons les régressions ... toutes les tendances sont positives ... :

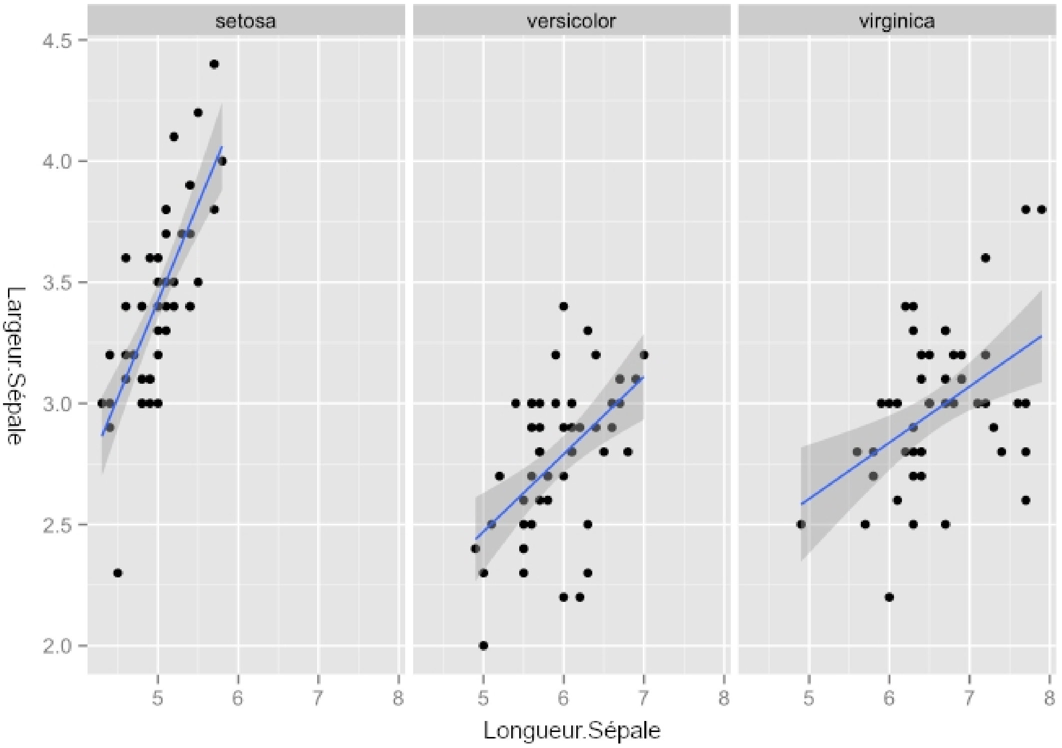
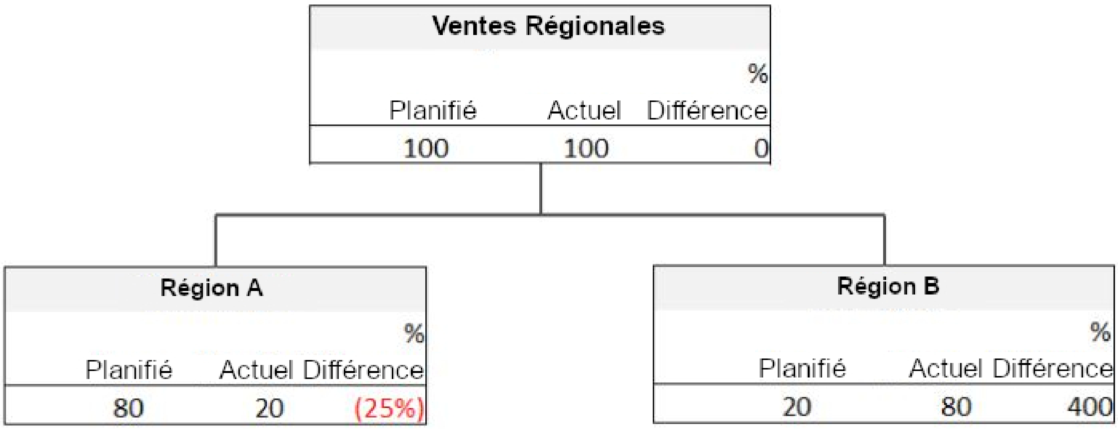


FIG. 5.182 – **Régression groupée du jeu de données IRIS dans R pour illustrer le paradoxe de Simpson**

Certaines personnes pourraient critiquer que ce n'est pas un problème que l'on rencontre dans

En
uction de
nglais

le business... Voici donc un exemple du paradoxe de Simpson typique dans les tableaux de bord de Business Intelligence :



Nous voyons ci-dessus que les ventes régionales agrégées semblent conformes aux objectifs. Mais au niveau de détail suivant (au niveau des territoires), nous pouvons voir que le territoire A se porte très mal (25% des objectifs) et le territoire B fait exceptionnellement bien (400% des objectifs). Ceci est un défi majeur dans le monde de la BI. Il est facile de se sentir satisfait de ce que les rapports et les tableaux de bord BI nous disent sans disposer d'un moyen simple et automatisé de se plonger dans les détails pour trouver les domaines de l'entreprise qui sont nettement sur ou sous-performants.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.3 Puissance d'un test

Lorsque l'effet est concrètement important, on imagine bien qu'il faut moins d'observations pour le démontrer que lorsqu'il est petit... mais combien au juste ? A-t-on les moyens, en termes de nombre de mesures, de démontrer ce que l'on cherche ? Faut-il s'y prendre autrement et changer le dispositif de son observation/expérimentation ?

Nous avons vu mentionné plus haut que nous ne pouvons jamais "prouver" l'hypothèse nulle [46] ; tout ce que nous pouvons faire est de la rejeter ou de ne pas la rejeter. Cependant, il y a des moments où il est nécessaire d'essayer de "prouver" (ie avoir des évidences) l'inexistence d'une différence entre les groupes. Cela se produit le plus souvent dans le contexte de la comparaison d'un nouveau traitement avec un traitement établi et montrant que la nouvelle méthode n'est pas inférieure à la méthode standard en vigueuer (dans certaines circonstances, nous avons besoin de beaucoup plus de sujets pour obtenir des évidences de non-infériorité que lorsque nous devons montrer une différence). Pouvons-nous faire quelque chose comme ça ?

Pour répondre à toutes les questions ci-dessus, nous devons maintenant étudier plus en détail le concept de "puissance d'un test" que nous n'avons jusqu'ici que mentionné. Pour cela, rappelez-vous la figure suivante que nous avons déjà recontré un peu plus haut :

En cours de traduction de l'anglais

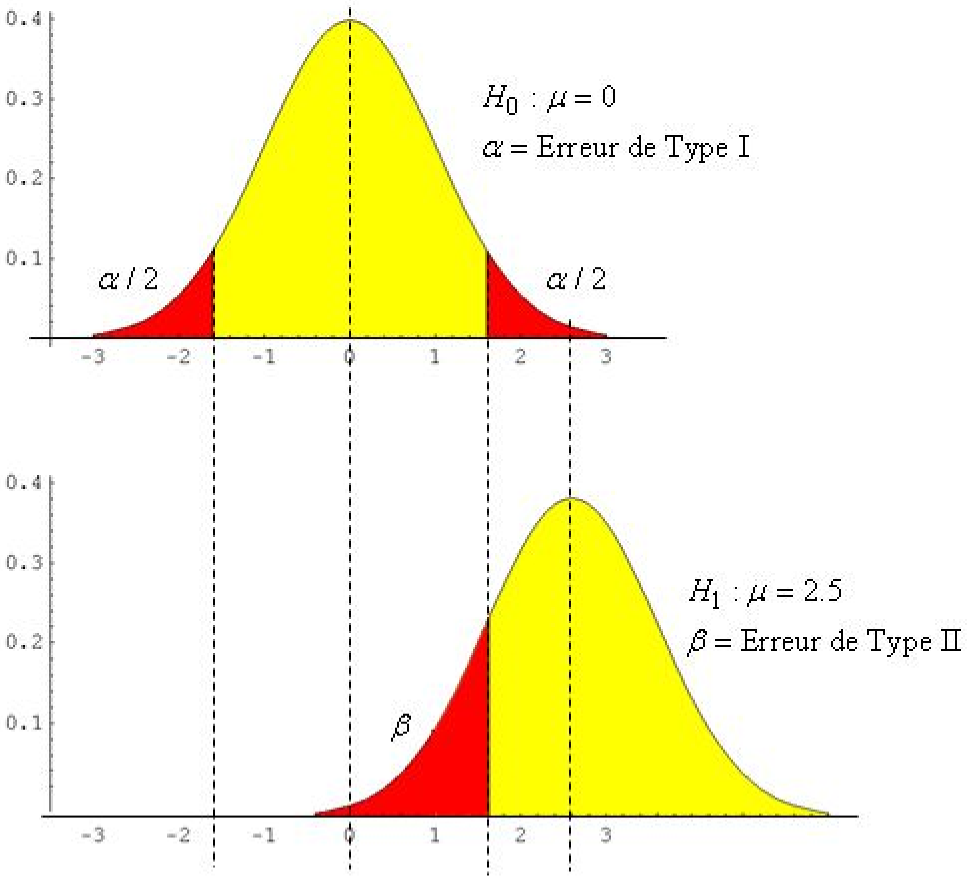


FIG. 5.183 – **Hypothèse nulle et alternative d'un cas particulier de test bilatéral**

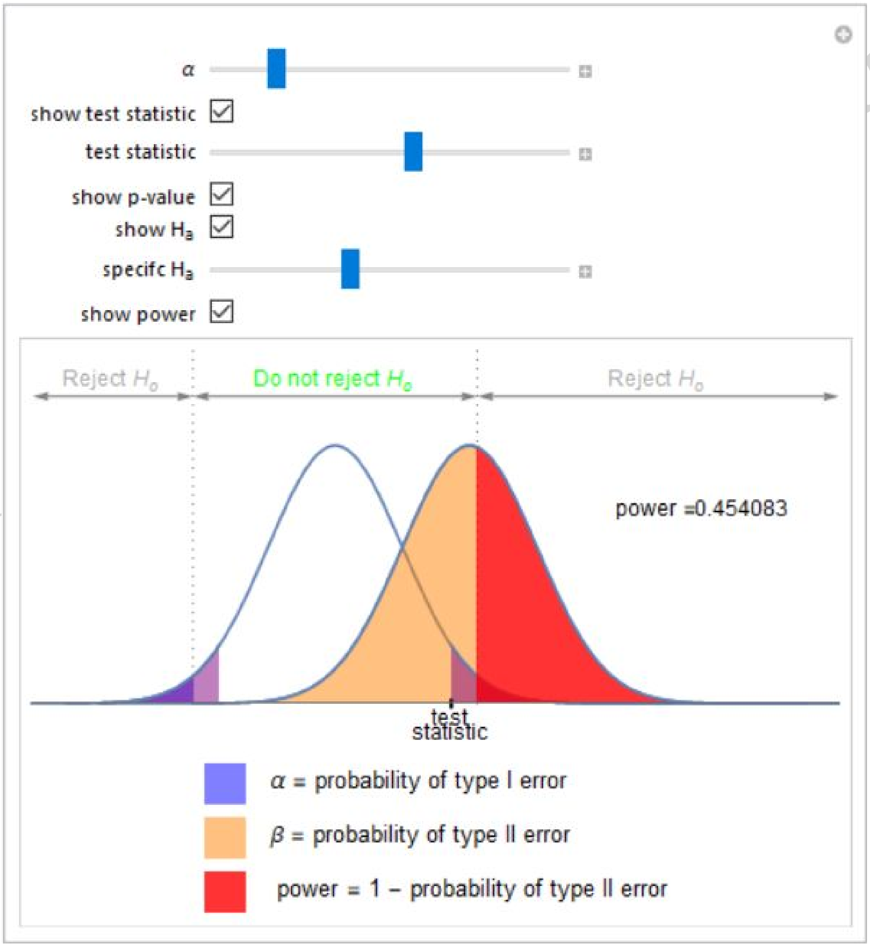
[46] Rappelez-vous qu'avec les tests statistiques basés sur l'hypothèse nulle, si la p-valeur est supérieure à un seuil donné, nous ne devons pas dire que nous pouvons accepter (ou prouver) hypothèse nulle ; nous utilisons plutôt la locution alambiquée que «*Nous n'avons pas réussi à réfuter le nul*».

Dans l'exemple particulier ci-dessus, nous allons donc rejeter l'hypothèse nulle H_0 si $\bar{X} > 1.96$ ou si $\bar{X} < 1.96$. Imaginons que dans le cadre de l'hypothèse alternative, si nous avons mesuré 2.5, nous aurons comme puissance du test :

$$1-\beta = 1 - P\left(Y_{\mathcal{N}(2.5,1)} \leq 1.96\right) = 1 - P\left(Y_{\mathcal{N}(\bar{X},1)} \leq Z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - 0.2946 \cong 0.705 \tag{5.7.1754}$$

Donc le test est relativement puissant (dans la pratique, nous considérons un test comme étant puissant si sa valeur est au-delà de 80%, c'est-à-dire $\beta \leq 20\%$). Ainsi, nous remarquons que la puissance equation (a posteriori !) est d'autant plus grande que la p-valeur sera petite (et respectivement la puissance sera à posteriori d'autant plus petite que la p-valeur sera grande). Donc la puissance a posteriori est en correspondance décroissante avec la p-valeur (dans la pratique il est cependant un peu absurde de faire ces calculs a posteriori).

Une excellente façon de jouer avec ce concept et de les visualiser est de jeter un oeil au widget Wolfram disponible sur http://demonstrations.wolfram.com/StatisticalPower/ :



Avant de continuer, laissez-nous vous informer que un pourcentage significatif d'individus ne comprennent pas pourquoi la probabilité d'obtenir une erreur de type I lors d'un test d'hypothèse n'est pas affectée par la taille de l'échantillon ? !

Si nous utilisions un test d'hypothèse standard, nous pouvons définir le niveau de confiance α et comparer la p-valeur du test à celui-ci. Dans ce cas, la taille de l'échantillon n'aura pas

d'incidence sur la probabilité d'erreur de type I car votre niveau de confiance α est la probabilité d'erreur de type I, à peu près par définition. En d'autres termes, vous définissez la probabilité d'erreur de type I en choisissant le niveau de confiance ! La probabilité d'erreur de type I n'est affectée que par votre choix du niveau de confiance et rien d'autre !

Mais oui, nous pourrions également corriger le taux d'erreur de type II (mais ce n'est pas le but de la science, comme nous le savons, de "prouver" l'hypothèse nulle car elle est pratiquement assez difficile la plupart du temps !), Le taux d'erreur de type I devient généralement le paramètre inconnu et il dépend de la taille de l'échantillon, de la variance et de la taille de l'effet (delta).

Remarque

Beaucoup de gens disent que si une personne A postule l'existence d'un phénomène, il incombe à la personne A de prouver son existence plutôt que d'être le travail du personne B de le réfuter. Par exemple, si nous affirmons qu'il y a des licornes roses à pois violets cachées au fond de la forêt, je ne peux pas simplement dire, «*Eh bien, prouvez qu'elles n'existent pas*». Pour que le monde scientifique accepte notre demande, nous devons en ramener une, morte ou vivante. Est-il jamais légitime de violer cette injonction et d'essayer de "prouver" l'inexistence de quelque chose ? Dans le texte ci-dessus, nous avons ensuite cherché à essayer de "prouver" (c'est-à-dire obtenir "suffisamment d'évidence) que quelque chose n'existe pas[a].

[a]Évidemment, si nous sommes sûrs d'avoir étudié TOUTES les combinaisons possibles, les lieux et que l'énorme majorité des propriétés majoritaires des licornes sont prouvées fausses ou impossibles, alors il est très probable au-delà de tout doute raisonnable que la licorne elle-même n'existe pas !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.3.1 Évidence ("preuve") de la négative

Le ministre géorgien Nelson L. Price affirme sur son site Web (et de nombreux autres vulgarisateurs scientifiques sur YouTube) que «*l'une des lois de la logique est que vous ne pouvez pas prouver un négatif*». Le fait est, cependant, que cette prétendue "loi de la logique" n'est pas une loi !

Remarquez, pour commencer, que le «Vous ne pouvez pas prouver un négatif» est elle-même une négation. Donc, si c'était vrai, elle serait elle-même impossible à prouver. Notez que toute affirmation peut être transformée en une négation par une petite reformulation - le plus évident, en niant l'affirmation puis en la niant à nouveau. «J'existe» équivaut logiquement à «Je n'existe pas», ce qui est négatif. Pourtant, voici une négation qu'il semble que nous pourrions peut-être prouver (à la manière de Descartes : «*je pense, donc je n'existe pas !*»).

Bien sûr, ceux qui disent «Vous ne pouvez pas prouver un négatif» insisteront sur le fait que nous avons mal compris leur point de vue. Comme le note Steven D. Hales, quand les gens disent : «Vous ne pouvez pas prouver un négatif», ce qu'ils veulent vraiment dire, c'est que «Vous ne pouvez pas prouver que quelque chose n'existe pas«. Si ce point était correct, il s'appliquerait non seulement aux êtres surnaturels se trouvant au-delà du voile cosmique, mais aussi aux choses qui pourraient être supposées exister de ce côté du voile, comme les licornes, les martiens, les lapins à 20 têtes, etc. Nous ne pourrions pas non plus prouver la non-existence de l'une de ces choses.

Mais le point est-il correct ? Est-il vrai que nous ne pouvons jamais prouver que quelque chose n'existe pas ? Encore une fois, la réponse dépend **SI** nous avons suffisamment défini la portée de ce que nous regardez et le niveau d'évidence [47]. Si quelqu'un prétend qu'il y a une licorne ayant des caractéristiques matérielles similaires à celles d'un chevel dans le hangar à outils (voir [414] pour un traitement relativement en profondeur de ce sujet), nous pouvons rapidement établir que cette personne se trompe en allant y jeter un oeil. Nous pourrions également établir qu'il n'y a pas de monstre du Loch Ness en drainant l'entiéreté du lac. Mais qu'en est-il de l'affirmation selon laquelle les licornes existaient autrefois ? Nous ne pouvons pas voyager dans le temps et observer directement tout le passé comme nous le pouvons dans chaque coin de la remise à outils ou du lac du Loch Ness. S'ensuit-il que nous ne pouvons pas prouver que les licornes n'ont jamais existé ?

Cela dépend en partie, comme nous le savons déjà, de ce que nous entendons par "prouver". Le mot a une variété de significations. En disant que quelque chose est «prouvé», nous pourrions vouloir dire qu'il est établi au-delà de tout doute possible. Ou nous pourrions dire qu'il a été établi au-delà de tout doute raisonnable (c'est le genre de preuve en science expérimentale). Pouvons-nous établir au-delà de tout doute raisonnable que les licornes n'ont jamais vécu sur la Terre ? Certes, cette partie de l'histoire de notre planète serait donc passée, nous ne pouvons donc plus l'inspecter directement. Mais sûrement, si les licornes parcouraient la Terre, nous nous attendrions à trouver des évidences de leur présence, telles que des fossiles de licornes ou du moins d'animaux étroitement apparentés à partir desquels les licornes auraient vraisemblablement évolué. Il n'y en a pas. Nous avons également de nombreuses évidences que les licornes sont une création fictive, auquel cas, il est sûrement raisonnable pour nous de conclure qu'il n'y a jamais eu de licornes. En effet, nous suggérons que nous puissions en donner la "preuve" au-delà de tout doute raisonnable (surtout si toutes les propriétés inhérentes aux licornes ont déjà été déconstruites).

En cours de traduction de l'anglais

En réponse, on pourrait nous dire : «Mais vous ne pouvez pas prouver de manière concluante, au-delà de tout doute possible, que les licornes n'ont jamais vécu sur la Terre.» C'est indéniablement vrai ! Cependant, ce point n'est pas propre aux négatifs. Il peut être fait à propos de toute affirmation sur l'inobservé, et donc de toute théorie scientifique, y compris des théories scientifiques sur ce qui existe. Nous pouvons "prouver" (avoir suffisamment d'évidences) au-delà de tout doute raisonnable que les dinosaures existaient, mais pas au-delà de tout doute possible !

Malgré la montagne d'évidences que les dinosaures ont bien vécu sur Terre, il est toujours possible que, disons, tous ces fossiles de dinosaures soient des faux placés là par des extraterrestres farceurs il y a bien longtemps...

Résumons ! Si «Vous ne pouvez pas prouver un négatif» signifie que vous ne pouvez pas "prouver" (ie fournir des évidences) au-delà de tout doute raisonnable que certaines choses n'existent pas, alors l'affirmation est tout simplement fausse. Nous "prouvons" (ie fournissons des évidences) régulièrement la non-existence des choses. Si, d'un autre côté, «Vous ne pouvez pas prouver un négatif» signifie que vous ne pouvez pas "prouver" (ie fournir des évidences) au-delà de tout doute possible que quelque chose n'existe pas, eh bien, cela peut, sans doute, être

[47] Par exemple, la grande majorité des charactéristiques et des actes qui définissent certaines divinités dans des livres saints ont été montrés avec des évidences solides par la science moderne comme étant fausses. Cela nous amène à la conclusion très probable qu'il n'y a pas de divinités - en particulier les divinités qui sont devenues des mythologies nous en donnent une autre évidence solide.

vrai. Mais alors quoi ? Ce point n'est pas pertinent dans la mesure où la défense des croyances en des entités surnaturelles contre l'accusation que la science et/ou la raison ont établi au-delà de tout doute raisonnable qu'elles n'existent pas.

Considérons maintenant que quelque chose a un nombre fini de propriétés / caractéristiques observables (c'est-à-dire réfutables) dans un volume fini. Alors disons que nous avons un bol. Nous pouvons prouver la non-existence de lait dans notre bol avec une photo (ou avec un appareil plus complexe) d'un bol vide. Mais cette photo ne représente pas de lait négatif. Il représente un fond positif du bol, et de ce positif, nous pouvons déduire l'impossibilité de la présence du lait, sachant, à partir d'autres évidences, à quoi ressemble le lait. Nous utilisons donc des évidences positives pour obtenir l'évidence de l'impossibilité. L'impossibilité est l'épuisement des possibilités exclusives. Les possibilités sont nulles ou positives. Dans ce cas, lait et vide sont mutuellement exclusifs, où la probabilité de lait est de 0 et la probabilité de vide est de 1. C'est différent de "prouver" un négatif. Or, comme la plupart des religions ont des livres saints (au contenu moral plus que douteux) qui décrivent assez précisément certaines propriétés et actions de leurs dieux sur Terre (volume fini). Si l'on trouve des évidences dans ce volume fermé (Terre) qui réfutent au moins une des propriétés (c'est-à-dire caractéristiques) de leur dieu, alors ce dernier n'existe très probablement pas au-delà de tout doute raisonnable... Techniquement cela sera noté :

$$\begin{gathered}\forall\ H_{0,i} \in \mathcal{H}_0 = \{H_{0,1}, H_{0,2} \ldots, H_{0,n} | H_{0,j} \cap H_{0,i} = \varnothing \wedge \cap_{i=1}^{n} H_{0,i} \neq \varnothing\ \forall i, j\} \\ \text{si } \exists H_{0,i} = \texttt{FAUX B.A.R.D.} \Rightarrow \mathcal{H}_0 = \texttt{FAUX B.A.R.D.}\end{gathered} \tag{5.7.1755}$$

et nommé la "méthode de falsification Stenger-Neyman-Pearson". Donc en appliquant cette relation aux livres religieux (vedas, bible, torah, coran, etc.) sachant que la bible a (sans compter les contradictions et erreurs historiques) au moins 21 erreurs scientifiques, le coran a (sans compter les contradictions et erreurs historiques)) au moins 73 erreurs scientifiques, la torah a (sans compter les contradictions et erreurs historiques) au moins 20 erreurs scientifiques, les vedas ont (sans compter les contradictions et erreurs historiques) au moins 26 erreurs scientifiques nous amènent à une conclusion assez évidente sur la perfection - et donc l'existence - de leurs supposées divinités respectives...

En cours de traduction de l'anglais

quote 5.7:956.#40

> *La science ne nous dit pas ce que nous devons penser mais parfois elle nous indique ce que nous ne pouvons plus croire.*
>
> Etienne Klein

Le vieil adage «Vous ne pouvez pas prouver un négatif» est un argument typique de niveau d'évidence 02 émanant de personnes scientifiquement illettrées.

Donc, la preuve de la non-existence dépend de la précision avec laquelle la chose à vérifier n'existe pas. Si nous pouvons définir un attribut que la chose doit absolument avoir dans un volume ou une plage de temps finis, alors nous pourrons peut-être avoir des évidences solides que la chose avec cet attribut n'existe pas. Mais dès qu'il y a un flou dans la description, nous ne pouvons pas le faire. Donc, encore une fois, pour "prouver" que quelque chose n'existe pas, nous devons établir les propriétés de cette chose dans un volume fini et dans un temps fini au point de pouvoir tester sa négation.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.3.1.1 Double test-T unilatéral (DTU)

Si l'on veut tester l'égalité de deux valeurs $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ (moyenne, proportion ou autre), c'est-à-dire l'inexistence d'un effet (ou d'un "négatif", comme étant l'hypothèse alternative H_A nous ne pouvons pas faire cela avec le test classique de l'hypothèse nulle et alternative (car il est assez difficile de construire la statistique de l'hypothèse nulle H_0 dans ce cas, c'est-à-dire la distribution statistique de $\hat{\theta}_1 \neq \hat{\theta}_2$) !

Une approche bien connue dans la pratique scientifique (en considérant le cas avec des moyennes !) est la "Double test-T unilatéral (DTU)". Il s'agit de regarder la différence entre les valeurs moyennes des deux populations puis de tester une hypothèse nulle conjointe : que cette différence est inférieure ou égale à $+\delta$ ET que cette différence est supérieure ou égale à $-\delta$ (pour un certain δ suffisamment petit et positif). Si nous pouvons rejeter cette hypothèse nulle conjointe, alors nous pouvonsconclure que la valeur absolue de la différence entre les moyennes est inférieure à δ (voir [240] pour une analyse sur la façon de choisir δ).

En d'autres termes, la procédure du double test-T unilatéral (DTU) est utilisée pour montrer que deux échantillons sont similaires, contrairement aux tests statistiques classiques qui vérifient la dissimilarité. Le DTU repose sur un paramètre appelé delta, qui doit être défini par le chercheur à l'aide de son intuition. Cela peut être difficile, en raison des interactions complexes des paramètres pertinents.

Dans certains domaines, il peut y avoir des normes industrielles guidant dans le choix de δ. Si aucun tel outil existe, le critère d'acceptation de similarité est mieux développé à partir d'un consensus entre les parties prenantes telles que les décideurs, les ingénieurs système, les opérateurs et les experts en la matière. Décider quelle différence est « assez bonne » et déterminer δ pour le test de similarité n'est pas une tâche triviale et un temps suffisant doit être alloué pour cela dans la phase de planification. La valeur de δ doit être basée sur l'importance pratique d'une différence pour considérer que les moyennes ne sont pas équivalentes. Δ est similaire à la différence à détecter lorsque nous dimensionnons une expérience conçue traditionnellement. Une fois que δ est dérivé, l'hypothèse peut être énoncée comme suit :

$$\begin{aligned}&H_0 : |\mu_1-\mu_2|>\delta : \text{La différence des moyennes est supérieure au critère d'acceptation de similarité}\\&H_A : |\mu_1-\mu_2|\leq\delta : \text{La différence des moyennes est inférieure ou égale à } \delta \text{ (les moyennes sont similaires)}\end{aligned} \tag{5.7.1756}$$

Un test-T de similarité unilatéral (TSU) est approprié si l'équipe qui fait le test ne se soucie que si la réponse diffère dans un sens. Par exemple, si un nouveau composé de caoutchouc est utilisé pour fabriquer un pneu avec une garantie de kilométrage, les producteurs ne se soucieront peut-être que si le pneu a moins de kilomètres d'utilisation. Ceci est souvent appelé "test de non-infériorité". Dans ces situations, l'hypothèse nulle est souvent appelée hypothèse "d'infériorité" et l'hypothèse alternative est l'hypothèse de "non-infériorité". L'équation suivante est utilisée pour comparer la valeur de t à la valeur critique.

Comme toujours, nous n'utiliserons pas μ, car il représente le véritable paramètre de population, que nous ne connaîtrons vraisemblablement jamais. À la place, nous utilisons $\hat{\mu}$, qui désigne la moyenne de l'échantillon. La valeur critique $t_{\alpha,\text{df}}$ peut être calculée avec un logiciel ou recherchée dans des tableaux statistiques.

Nous rejettons H_0 si :

$$\frac{|\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2|+\delta}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}+\dfrac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}}>t_{\alpha,n_1+n_2-2} \tag{5.7.1757}$$

Dans les tests de similarité, il n'y a pas de test bilatéral. Au lieu de cela, nous effectuons deux tests de non-infériorité des deux côtés :

$$H_0 : |\mu_1-\mu_2|>\delta \longrightarrow \begin{cases} H_0 : \mu_1-\mu_2>\delta & \text{Hypothèse nulle élargie pour la partie supérieure du côté du test}\\ H_0 : \mu_1-\mu_2<-\delta & \text{ypothèse nulle élargie pour la partie inférieure du côté du test}\end{cases} \tag{5.7.1758}$$

$$H_A : |\mu_1-\mu_2|\leq\delta \longrightarrow H_A : -\delta\leq\mu_1-\mu_2\leq\delta \text{ L'hypothèse alternative est élargie}$$

Lorsque les hypothèses sont élargies pour créer les statistiques de test, nous obtenons le critère suivant. Nous rejettons H_0 si :

$$\frac{|\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2|+\delta}{\text{ES}}>t_{\alpha,n_1+n_2-2} \quad \text{ET} \quad \frac{|\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2|-\delta}{\text{ES}}<-t_{\alpha,n_1+n_2-2} \tag{5.7.1759}$$

Notez que les deux moyennes sont considérées comme similaires si, et seulement si, les deux hypothèses nulles sont rejetées ! Il faut montrer que la différence des moyennes est inférieure à $+\delta$ et supérieure à $-\delta$ pour montrer que les moyennes sont équivalentes ; cela ne peut pas être vrai que dans une seule direction ! Il est également prudent de souligner que cela est différent

En cours de traduction de l'anglais

d'un test d'hypothèse bilatéral traditionnel. Lors de la réalisation d'un test bilatéral avec une probabilité de type I de α, nous utilisons $\alpha/2$ pour comparer à la p-valeur de chaque côté. Dans cette situation, nous utilisons la valeur totale de α sur les deux tests car ils sont tous les deux unilatéraux.

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Supposons que nous analysions l'efficacité du mitrailleur de porte dans un hélicoptère. Habituellement le mitrailleur de porte utilise le M-249 mais une unité souhaite plutôt l'armer avec la M-4. La M-249 est une mitrailleuse capable d'une fréquence de tir plus élevé, mais elle est plus lourde, plus difficile à déplacer et plus sujette aux blocages. La M-4 peut-elle fournir une puissance de combat équivalente ? Nous avons les données suivantes :

Type d'arme	**Score de dégâts de la cible**
M-249	180
M-249	143
M-4	65
M-4	112
M-4	139
M-4	112
M-4	125
M-4	78
M-4	138
M-4	84
M-249	117
M-249	169
M-249	111
M-249	114
M-249	166
M-4	134
M-249	131
M-4	69
M-249	93
M-249	177

Le lecteur peut voir l'arme utilisée et le score de dégâts pour chacun des 20 essais. Cet exemple est suffisamment petit pour que nous puissions effectuer les calculs manuellement. Trois statistiques de base sont calculées et présentées dans le tableau ci-dessous :

Arme	Taille échantillon	Estimateur moyenne	Estimateur variance
M-249	$n_1 = 10$	$\hat{\mu}_1 = 140.1$	$\hat{\sigma}_1^2 = 981.21$
M-4	$n_2 = 10$	$\hat{\mu}_2 = 105.6$	$\hat{\sigma}_2^2 = 849.6$

En utilisant les valeurs calculées dans le tableau ci-dessus, nous pouvons calculer la statistique de test et la valeur critique. D'abord pour l'extrémité supérieure de la courbe :

$$\text{ES} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{981.21}{10} + \frac{849.6}{10}} = \sqrt{183.0811} \cong 13.53$$

Nous rejettons H_0 si :

$$\frac{|\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2| + \delta}{\text{ES}} > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$$

Dès lors :

$$\frac{|140.1 - 105.6| + 20}{13.53} > t_{0.05,18}$$

C'est-à-dire :

$$4.03 > 1.73 \xrightarrow{\text{dès lors}} \text{Vrai}$$

L'énoncé est vrai, nous rejetons donc H_0 dans le premier test unilatéral. Ensuite, nous effectuons le deuxième test :

$$\frac{|\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2| - \Delta}{\text{ES}} < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$$

Dès lors :

$$\frac{|140.1 - 105.6| - 20}{13.53} < -t_{0.05,18}$$

C'est-à-dire :

$$1.07 < -1.734 \xrightarrow{\text{dès lors}} \text{Faux}$$

L'énoncé est faux et nous ne parvenons pas à rejeter H_0 dans le deuxième test unilatéral. Par conséquent, nous ne rejetons pas non plus l'hypothèse nulle globale selon laquelle la M-4 n'est pas équivalent à la M-249. Ce n'est pas un résultat surprenant car notre différence initiale de moyennes était de 34.5.

En cours de traduc... is

5.7.13.3.2 Puissance du test Z à 1 échantillon

En toute généralité, dans le cas d'un test bilatéral, la relation précédente s'écrira donc :

$$1-\beta=1-P\left(Y_{\mathcal{N}(\bar{X},1)}\leq\mu+Z_{1-\alpha/2}\right)=1-P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq\mu-\bar{X}+Z_{1-\alpha/2}\right) \quad (5.7.1760)$$

Si l'écart-type de la moyenne n'est pas été unitaire, nous avons :

$$1-\beta=1-P\left(Y_{\mathcal{N}(0,\sigma_{\bar{X}})}\leq\mu-\bar{X}+Z_{1-\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}\right) \quad (5.7.1761)$$

Il vient donc :

$$1-\beta=1-P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq\frac{\mu-\bar{X}}{\sigma_{\bar{X}}}+Z_{1-\alpha/2}\right)=1-P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq\frac{\mu-\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n}}+Z_{1-\alpha/2}\right) \quad (5.7.1762)$$

autrement écrit :

$$\begin{aligned}1-\beta&=1-P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq\frac{\mu-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}+Z_{1-\alpha/2}\right)=1-P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq d_\sigma\sqrt{n}+Z_{1-\alpha/2}\right)\\&=P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq -Z_{1-\alpha/2}-d_\sigma\sqrt{n}\right)=P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq Z_{\alpha/2}-d_\sigma\sqrt{n}\right)\end{aligned} \quad (5.7.1763)$$

C'est sous cette forme que nous retrouvons la puissance d'un test bilatéral de la moyenne (puissance du test Z à 1 échantillon) :

$$1-\beta=P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq Z_{\alpha/2}-d_\sigma\sqrt{n}\right) \quad (5.7.1764)$$

où d_σ est parfois appelé la "taille d'effet" et est défini par :

$$d_\sigma=\frac{\mu-\bar{X}}{\sigma}=\frac{\delta}{\sigma} \quad (5.7.1765)$$

et δ est nommé la "différence" !

Il va de soit que si la variance vraie n'est pas connue, il faut alors remplacer la loi Normale par la loi de Student tel que :

$$1-\beta=P\left(Y_{\mathcal{N}(0,1)}\leq T_{\alpha/2}-d_S\sqrt{n}\right) \quad (5.7.1766)$$

avec :

$$d_S=\frac{\mu-\bar{X}}{S}=\frac{\delta}{S} \quad (5.7.1767)$$

Attention à un petit piège courant ! Le développement ci-dessus correspond à un δ qui est donc négatif relativement à l'exemple de départ ! La relation est un peu différente dans le cas où δ est positif mais cela n'a aucune importance car la puissance du test est identique valeur absolue !

Pour avoir la taille de l'échantillon c'est assez simple. Nous avons en égalisant les centiles :

$$Z_{1-\beta}=Z_{\alpha/2}-d_\sigma\sqrt{n} \quad (5.7.1768)$$

En cours de traduction de l'anglais

et donc en bilatéral :

$$n=\left(\frac{Z_{\alpha/2}-Z_{1-\beta}}{d_\sigma\sqrt{n}}\right)^2 \tag{5.7.1769}$$

où nous voyons que si la puissance du test est imposée comme étant égale à 50%, ayant $Z_{1-\beta}$ qui vaut alors 0 nous retombons (!) sur la relation de l'effectif de l'échantillon pour loi Normale démontrée bien plus haut :

$$n=\left(\frac{Z_{\alpha/2}}{d_\sigma\sqrt{n}}\right)^2 \tag{5.7.1770}$$

Signalons aussi que nous retrouvons parfois dans la littérature la relation antéprécédente sous la forme suivante :

$$n=\frac{\sigma^2\left(Z_{1-\alpha/2}+Z_{1-\beta}\right)^2}{(\mu_0-\mu_A)^2} \tag{5.7.1771}$$

Évidemement nous pouvons fixer d'autres paramètres pour déterminer la valeur de la variable restante. Nous pourrions par exemple chercher la valeur de la puissance du test en imposant l'écart-type, la taille de l'échantillon et le niveau de confiance, etc.

Un lecteur nous a proposé une manièttre très élégante de retrouver le même résultat avec beaucoup moins de développements... Effectivement, il suffit de voir sur la figure précédente que nous avons :

$$Z_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\bar{X}=Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu \tag{5.7.1772}$$

Dont nous tirons immédiatement une relation équivalement aux deux précédentes (qui donne bien évidemment le même résultat numérique) :

$$n=\left(\frac{\sigma\left(Z_\beta+Z_{1-\alpha/2}\right)}{(\mu-\bar{X})}\right)^2 \tag{5.7.1773}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le lecteur attentif aura peut-être remarqué que nous avons supposé dans les développements qui précédent que l'écart-type de la moyenne vraie et aternative (estimée) est implicitement supposée être la même... Dans la pratique cela est presque tout le temps le cas, raison pour laquelle les quasi totalité des logiciels de statistiques ne demandent qu'un seul écart-type pour le calcul de la puissance du test Z à 1 échantillon. Cependant, dans certains rares logiciels universitaires, on demande l'écart-type des deux moyennes. Mais dès lors les développements ci-dessus sont différents.

Une analyse de puissance peut avoir plusieurs facettes :

1. Nous connaissons le niveau du test, la taille d'échantillon et la taille d'effet (implicitement la différence) et nous cherchons à calculer la puissance. Ceci permet de voir si notre dispositif expérimental est bien calibré.

2. Nous connaissons la puissance voulue, le niveau du test et la taille d'effet à détecter. Nous cherchons alors à calculer la taille d'échantillon nécessaire pour monter un dispositif expérimental efficace.

3. Nous connaissons la puissance voulue, le niveau du test et la taille d'échantillon et nous cherchons à vérifier qu'elle taille d'effet nous pouvons espérer mettre en évidence.

Sauf exception, nous considèrerons qu'il est inutile de montrer un test si la puissance escomptée est inférieure à 80%. Cette puissance correspond à une probabilité de 80% de ne pas rejeter l'hypothèse nulle à tort, ou, ce qui revient au même de 20% d'erreur de type II.

Évidemment, il est possible de faire le même raisonnement (analytiquement quand c'est possible, sinon numériquement) avec absolument TOUS les tests d'hypothèses que nous avons vus jusqu'à maintenant. Donc au même titre qu'il y a un peu plus d'une centaine de tests d'hypothèses dans le domaine des statistiques comme nous l'avons déjà mentionné... il est évident que nous n'allons pas nous... amuser... à faire les mêmes développements pour tous ces tests mais seulement pour les grands classiques. Tant que nous avons des ordinateurs à notre disposition avec les algorithmes intégrés par des informaticiens/scientifiques, nous pouvons nous passer de refaire tous les développements qui n'apporteraient pas grand chose. Par ailleurs, la majorité des logiciels comportement des outils pour calculer la puissance de 5 à 10 tests le plus souvent.

Remarque

Nous ne traiterons pas des tests statistiques paramétriques de détection des valeurs abérrantes dans ce livre comme le test Q de Dixon ou de Grubb pour la simple raison qu'ils ont une origine trop empirique et qu'ils n'ont aucun intérêt analytiquement parlant. Par contre, si des lecteurs insistent, nous pourrons mettre les détails sur ces tests avec les algorithmes détaillés de calcul des valeurs critiques en utilisant un simple tableur et la technique de Monte-Carlo pour n'importe la distribution de leur votre choix (mais pas uniquement selon la loi Normale contrairement à ce qui est écrit dans la majorité des livres).

5.7.13.3.3 Puissance du test P à 1 et 2 échantillons

De même que l'intervalle de confiance de la loi Normale avec écart-type théorique connu (c'est-à-dire sur toute la population), nous pouvons déterminer le nombre d'individus (taille d'échantillon) si nous souhaitons imposer une puissance au test de la proportion à 1 échantillon étudié plus haut. Pour cela, nous utilisons la même technique que pour la puissance du test Z. Nous écrivons alors dans un premier temps :

$$Z_\beta\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}+\hat{p}=Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}+p \quad (5.7.1774)$$

D'où nous déduisons :

$$n=\left(\frac{Z_\beta\sqrt{\hat{p}\hat{q}}-Z_{1-\alpha/2}\sqrt{pq}}{p-\hat{p}}\right)^2 \quad (5.7.1775)$$

Donc si la puissance est de 50%, nous retrouvons bien :

$$n=\frac{Z_{1-\alpha/2}^2 pq}{\delta^2} \tag{5.7.1776}$$

Pour la puissance du test de la différence de deux proportions (test de la proportion à deux échantillons) dans l'objectif de déterminer la taille de l'échantillon nous sommes obligés de poser $n=n_1=n_2$. Dés lors, les développements obtenus lors de l'étude du test de la différence de deux proportions s'écrivent :

$$Z=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1}-\dfrac{1}{n_2}\right)}}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{2\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{2\hat{p}\hat{q}}{n}}} \tag{5.7.1777}$$

avec :

$$\hat{p}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}=\frac{n(\hat{p}_1+\hat{p}_2)}{2n}=\frac{\hat{p}_1+\hat{p}_2}{2} \tag{5.7.1778}$$

De la même manière que nous l'avons fait pour le test Z et le test P à 1 échantillon, nous avons :

$$Z_\beta\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p}_2-\hat{p}_1)}+(\hat{p}_2-\hat{p}_1)=Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2\hat{p}\hat{q}}{n}}+\frac{\hat{p}_1+\hat{p}_2}{2} \tag{5.7.1779}$$

Soit :

$$Z_\beta\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p}_2-\hat{p}_1)}+(\hat{p}_2-\hat{p}_1)=Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2\hat{p}\hat{q}}{n}}+\hat{p} \tag{5.7.1780}$$

Ce qui revient donc à supposer que la différence vraie des deux proportions est la moyenne (ce qui est discutable...).

Mais nous avons aussi (comme les échantillons sont indépendants de par la propriété de la variance) :

$$Z_\beta\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p}_2)+\mathrm{V}(\hat{p}_1)}+(\hat{p}_2-\hat{p}_1)=Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2\hat{p}\hat{q}}{n}}+\hat{p} \tag{5.7.1781}$$

Soit :

$$Z_\beta\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}+(\hat{p}_2-\hat{p}_1)=Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2\hat{p}\hat{q}}{n}}+\hat{p} \tag{5.7.1782}$$

ce qui nous donne :

$$Z_\beta\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1+\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}+(\hat{p}_2-\hat{p}_1)=Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2\hat{p}\hat{q}}{n}}+\hat{p} \tag{5.7.1783}$$

Nous avons alors après réarrangement :

$$\boxed{n=\left(\frac{Z_\beta\sqrt{\hat{p}_1\hat{q}_1+\hat{p}_2\hat{q}_2}-Z_{1-\alpha/2}\sqrt{2\hat{p}\hat{q}}}{\hat{p}-(\hat{p}_2-\hat{p}_1)}\right)^2} \tag{5.7.1784}$$

Le logiciel R possède une fonction nommée `power.prop.test( )` qui nous aide à jouer avec la relation ci-dessus.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Vous pouvez trouver d'autres relations dans la littérature pour la taille de l'échantillon des tests de proportions à un ou deux échantillons. Mais attention... ! ! ! Malheureusement, certains manuels calculent le n en fonction de la manière d'obtenir un intervalle de confiance donné, et non en fonction de la manière d'obtenir une puissance donnée (d'où l'absence de Z_β dans les relations correspondantes). Cela n'a donc rien à voir avec la taille de l'échantillon pour obtenir une puissance donnée, mais plutôt avec la taille de l'échantillon pour faire du p-hacking.......

En cou ... l' anglais

Considérons maintenant que la puissance n'est pas donnée pour trouver la taille de l'échantillon, mais que nous avons la taille de l'échantillon et que nous voulons calculer la puissance !

À titre d'exemple, considérons que nous essayons de tester si le sex-ratio de certains individus échantillonnés diffère significativement du sex-ratio attendu de 1 en supposant que nous ayons $n = 64$, dont 34 femmes et 30 hommes.

Afin de trouver la puissance, nous devons avoir une alternative spécifique en tête. Supposons que l'hypothèse nulle soit $H_0 : p = 0.5$ contre $H_1 : p > 0.5$, où $p = P(\text{Female})$. Supposons également que nous ayons $n = 64$ et que vous souhaitiez la puissance d'un test au niveau $\alpha = 0.05$ par rapport à l'alternative spécifique $p = 0.6$.

Pour un test binomial exact, il faut d'abord trouver la valeur critique c telle que $P(X \leq c \mid n = 64, p = 0.5)$ soit maximisée, mais toujours inférieure à 0.95. Avec n'importe quel logiciel statistique ou même tableur on peut trouver que cette valeur vaut $c = 40$ (prudence ! de nombreux logiciels statistiques font une approximation Normale de la loi binomiale dans un tel calcul de puissance...). La puissance de ce test par rapport à la valeur alternative $p = 0.6$ est alors donnée par $P(X \leq 40 \mid n = 64, p = 0.6) = 0.3927$.

5.7.13.3.4 Calcul de puissance basé sur des simulations

Dans les modèles plus complexes, il n'est pas possible de déterminer une expression explicite de la puissance d'un test et le calcul de la puissance à partir de simulations peut être une approche intéressante. Parfois, il peut également être plus simple de laisser l'ordinateur faire le travail en exécutant des simulations plutôt que de se perdre dans des dérivations d'expressions explicites de puissance, même si elles peuvent en fait être déduites.

Rappelons que la puissance est la probabilité d'obtenir un résultat significatif lorsqu'il y a effectivement une différence, donc à long terme c'est la proportion de résultats significatifs par rapport au nombre total de tests :

$$\text{puissance} = \frac{\text{no. } p\text{-valeurs } < \alpha}{\text{no. tests}} \tag{5.7.1785}$$

Nous pouvons laisser l'ordinateur générer des données aléatoires à partir du modèle sous l'hypothèse alternative, puis effectuer le test de signification. Nous pouvons même le faire plusieurs fois et enregistrer les valeurs p, ce qui nous permet de calculer la puissance via la relation ci-dessus.

Si le nombre de cas est déjà disponible, les calculs de puissance ne sont pas utiles. Il s'agit d'une tentative d'interprétation rétrospective d'un résultat via la puissance, ce qui n'est pas utile car aucun lien direct ne peut être démontré. Les calculs de puissance post-hoc doivent donc être évités. Ce sujet est également abordé dans la littérature depuis plusieurs années et un article bien connu sur le sujet est [202].

Maintenant que nous avons vu ce que sont les p-valeurs, les intervalles de confiance et la puissance dans le cadre des tests statistiques d'hypothèse nulle, le lecteur intéressé à jeter un oeil à un article consacré uniquement au sujet des interprétations erronées les plus courantes de ces trois concepts peut se référer à : *Statistical tests, P values, confidence intervals, and power : a guide to misinterpretations*(voir [166]).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.4 Tests A/B

Le "test A/B" (également appelés "bucket tests" ou "split-run testing") est une expérience aléatoire avec deux variantes à tester A et B. Il inclut l'application de tests d'hypothèses statistiques ou de "tests d'hypothèses à deux échantillons" utilisés dans le domaine des statistiques. Le test A/B est un moyen de comparer deux versions d'une même variable, généralement en testant la réponse d'un sujet à la variante A par rapport à la variante B, et en déterminant laquelle des deux variantes est la plus efficace.

En plein essor dans le domaine des affaires (business) et considéré commme une analyse de base dans les essais cliniques, les tests A/B évaluent l'effet d'une intervention ou d'un traitement en comparant son taux de réussite à celui d'une condition témoin. Comme son nom l'indique, deux versions (A et B) sont comparées, qui sont identiques à l'exception d'une variante qui pourrait affecter le comportement d'un utilisateur. La version A pourrait être la version (contrôle) actuellement utilisée, tandis que la version B est modifiée à certains égards (traitement). Par exemple, sur un site Web de commerce électronique, l'entonnoir d'achat est généralement un bon candidat pour les tests A/B, car même des améliorations marginales des taux de conversion peuvent représenter un gain significatif de ventes. Des améliorations significatives peuvent parfois être observées en testant des éléments tels que la police de texte, les mises en page, les images et les couleurs, mais pas toujours.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Lorsque vous exécutez des tests A/B sur quelque chose et que vous vérifiez régulièrement les expériences en cours pour des résultats significatifs, vous devez faire attention à ne pas tomber dans le piège que les statisticiens appellent les "erreurs de test significatifs répétés". En effet, le calcul de la significance fait toujours l'hypothèse critique que nous avons que la taille de l'échantillon qui est fixée à l'avance ! Si nous attendons et que la taille de l'échantillon est trop grande, nous retombons dans le cas du p-acking où la taille de l'échantillon est trop grande et crée alors un faux test significatif.

Voyons trois tests A/B typiques par ordre croissant de complexité mathématique (le premier peut être considéré comme un "test fréquentiste" et les deux autres comme des "tests bayésiens").

5.7.13.4.1 Test de Fieller (ratio des moyennes)

Le but du "test de Fieller" est le calcul d'un intervalle de confiance pour le rapport de deux moyennes. C'est un test particulièrement tendance dans le domaine de la conception de sites Web lorsque deux design ou interface utilisateur d'un même site Web (ou le nombre de clics) doivent être comparés. Le test de Fieller est également connu sous le nom de "test A/B pour les moyennes".

Considérons X et Y deux variables aléatoires Normalement distribuées représentant des

moyennes d'échantillons de taille respectivement n et m et ayant la même variance, telles que :

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = \mathcal{N}(\mu, a\sigma^2) \\ Y &= \mathcal{N}\left(\nu, \frac{\sigma^2}{m}\right) = \mathcal{N}(\nu, b\sigma^2) \end{aligned} \quad (5.7.1786)$$

Il s'agit donc d'un cas homoscédastique et ensuite, en pratique, nous prenons l'écart type global.

En réalité, cependant, nous n'aurons accès qu'aux estimateurs :

$$X = \mathcal{N}\left(\hat{\mu}, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) = \mathcal{N}(\hat{\mu}, aS^2)Y \quad = \mathcal{N}\left(\hat{\nu}, \frac{\hat{\sigma}^2}{m}\right) = \mathcal{N}(\hat{\nu}, bS^2) \quad (5.7.1787)$$

Ce qui nous intéresse, c'est de construire un intervalle de confiance pour le ratio :

$$\theta = \frac{\mu}{\nu} \quad (5.7.1788)$$

Et c'est évidemment le but du test de Fieller !

L'idée est alors de calculer et de regrouper les deux variables aléatoires en une seule :

$$X - \theta Y \quad (5.7.1789)$$

qui par l'hypothèse nulle suivra donc une variable aléatoire du type :

$$\mathcal{N}(0, (a + \theta^2 b)\sigma^2) \quad (5.7.1790)$$

Nous avons alors in extenso :

$$\frac{X - \theta Y}{\sigma\sqrt{a + \theta^2 b}} = \mathcal{N}(0, 1) = Z \quad (5.7.1791)$$

Si l'écart type ne peut qu'être estimé, nous savons que nous avons alors :

$$\frac{X - \theta Y}{S\sqrt{a + \theta^2 b}} = T(m + n - 2) = T(k) \quad (5.7.1792)$$

Il s'ensuit, bien entendu, que :

$$P\left(-T_{\alpha/2}(k) \leq \frac{X - \theta Y}{S\sqrt{a + \theta^2 b}} \leq T_{\alpha/2}(k)\right) = 1 - \alpha \quad (5.7.1793)$$

Par symétrie de la loi de Student on peut donc écrire que :

$$P\left(\frac{(X - \theta Y)^2}{S^2(a + \theta^2 b)}\right) = 1 - \alpha \quad (5.7.1794)$$

Après réarrangement, on obtient :

$$P\left((Y^2 - bS^2T^2_{\alpha/2}(k))\theta^2 - 2XY\theta + (X^2 - aS^2T^2_{\alpha/2}(k)) \leq 0\right) = 1 - \alpha \quad (5.7.1795)$$

En cours de traduction de l'anglais

Il y a maintenant deux situations intéressantes à considérer en fonction du signe du coefficient θ^2 mais laissons cela de côté pour l'instant en nous concentrant uniquement sur les racines du polynôme entre parenthèses. Nous avons alors (voir section Calcul Algébrique 1364) :

$$\theta_{1,2}=\frac{2XY\pm\sqrt{(-2XY)^2-4(Y^2-bS^2T^2_{\alpha/2}(k))(X^2-aS^2T^2_{\alpha/2}(k))}}{2(Y^2-bS^2S^2_{\alpha/2}(k))} \tag{5.7.1796}$$

Ceci est immédiatement simplifié en :

$$\theta_{1,2}=\frac{XY\pm\sqrt{(XY)^2-(Y^2-bS^2T^2_{\alpha/2}(k))(X^2-aS^2T^2_{\alpha/2}(k))}}{Y^2-bS^2S^2_{\alpha/2}(k)} \tag{5.7.1797}$$

Le développement dans la racine donne :

$$\theta_{1,2}=\frac{XY\pm\sqrt{aY^2S^2T_{\alpha/2}(k)+bX^2S^2T^2_{\alpha/2}(k)-abS^4T^4_{\alpha/2}(k)}}{Y^2-bS^2T^2_{\alpha/2}(k)} \tag{5.7.1798}$$

Ce qui peut être réécrit sous une forme qui nous sera utile :

$$\theta_{1,2}=\frac{\dfrac{X}{Y}\pm\dfrac{1}{Y}\sqrt{aS^2T_{\alpha/2}(k)+b\left(\dfrac{X}{Y}\right)^2S^2T^2_{\alpha/2}(k)-\dfrac{1}{Y^2}abS^4T^4_{\alpha/2}(k)}}{1-\dfrac{bS^2T^2_{\alpha/2}(k)}{Y^2}} \tag{5.7.1799}$$

Posons :

$$g=\frac{bS^2T^2_{\alpha/2}(k)}{Y^2} \tag{5.7.1800}$$

Nos racines peuvent alors s'écrire :

$$\theta_{1,2}=\frac{\dfrac{X}{Y}\pm\sqrt{aS^2T_{\alpha/2}(k)+X^2g-gaS^2T^2_{\alpha/2}(k)}}{1-g} \tag{5.7.1801}$$

ou :

$$\theta_{1,2}=\frac{\dfrac{X}{Y}\pm\dfrac{1}{Y}\sqrt{X^2g+aS^2T^2_{\alpha/2}(k)(1-g)}}{1-g} \tag{5.7.1802}$$

ou autrement :

$$\theta_{1,2}=\frac{\dfrac{X}{Y}\pm\dfrac{1}{Y}\sqrt{X^2g+a\dfrac{gY^2}{b}(1-g)}}{1-g} \tag{5.7.1803}$$

Nous faisons une dernière simplification :

$$\theta_{1,2}=\frac{\dfrac{X}{Y}\pm\sqrt{\left(\dfrac{X}{Y}\right)^2g+\dfrac{a}{b}g(1-g)}}{1-g} \tag{5.7.1804}$$

Qui sont donc pour rappeler les racines de :

$$P\left((Y^2-bS^2T^2_{\alpha/2}(k))\theta^2-2XY\theta+(X^2-aS^2T^2_{\alpha/2}(k))\leq 0\right)=1-\alpha \tag{5.7.1805}$$

Le coefficient de θ^2 dans le polynôme est $Y^2-bS^2T^2_{\alpha/2}(k)$. Par conséquent :

En cours de traduction de l'anglais

- Si celle-ci est supérieure à zéro, alors la parabole (voir section Géométrie Analytique page 2755) est concave (vue de dessus) et l'intervalle de confiance se situe alors entre les deux racines de la parabole (car les valeurs y sont négatives en fonction de l'inégalité imposée).
- Si le coefficient de θ^2 dans le polynôme est négatif alors la parabole est convexe (vue d'en haut) et l'intervalle de confiance est alors en dehors des deux racines de la parabole car les valeurs y sont négatives selon l'inégalité imposée) .
- Si le coefficient de θ^2 a une probabilité proche de zéro d'être égal à zéro, nous pouvons ignorer ce scénario.

Evidemment seul le premier cas nous intéresse car le second est difficile à interpréter (les intervalles auraient des bornes infinies ce qui est irréaliste et surtout inutile). Il faut donc avoir :

$$Y^2 - bS^2T^2_{\alpha/2}(k) > 0 \tag{5.7.1806}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{bS^2T^2_{\alpha/2}(k)}{Y^2} < 1 \tag{5.7.1807}$$

Dès lors :

$$g < 1 \tag{5.7.1808}$$

En cours de traduction de l' anglais

✍Exemple :

Considérons le cas où nous avons :

$$\begin{aligned} X &= \mu_X = 160.3684 \\ m &= 19 \\ Y &= \mu_Y = 155 \\ n &= 19 \\ S &= 13.44278 \end{aligned} \tag{5.7.1809}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{m} = \frac{1}{19} \\ b &= \frac{1}{n} = \frac{1}{19} \\ k &= m + n - 2 = 36 \\ T^2_{\alpha/2}(k) &= T^2_{5\%/2}(36) = 1.688298 \end{aligned} \tag{5.7.1810}$$

Nous avons :

$$\frac{X}{Y} = \frac{160.3684}{155} \cong 1.034635 \tag{5.7.1811}$$

et :

$$g = \frac{bS^2T^2_{\alpha/2}(k)}{Y^2} = 0.00112839 \tag{5.7.1812}$$

Ainsi que (nous montrons ce calcul parce que certains logiciels statistiques - R en particulier - les donnent dans leur sortie alors que normalement il n'est utile que pour le test T de Student de deux échantillons homoscédastiques indépendants) :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_R &= \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2} = 178.228 \\ T(36) &= \frac{(X-Y)-(\mu-\nu)}{\sqrt{\mathrm{V}_r\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)}} = \frac{X-Y}{\sqrt{\mathrm{V}_r\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)}} = 1.2397\end{aligned} \quad (5.7.1813)$$

Nous avons alors l'intervalle suivant entre les deux racines de la parabole :

$$\theta_{1,2} = \frac{\dfrac{X}{Y} \pm \sqrt{\left(\dfrac{X}{Y}\right)^2 g + \dfrac{a}{b}g(1-g)}}{1-g} = \{0.987, 1.084\} \quad (5.7.1814)$$

On peut aller un peu plus loin en considérant le cas où :

$$\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma^2} = \rho \Leftrightarrow (X,Y) = \sigma^2\rho \quad (5.7.1815)$$

Soit dans le contexte estimé :

$$\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma^2} = S^2 R \quad (5.7.1816)$$

Cela nous donne la distribution suivante (en supposant laNormalité) pour la variable aléatoire regroupant les deux premières selon $X-\theta Y$:

$$\mathcal{N}\left(0, aS^2 - 2\theta RS^2 + b\theta^2 S^2\right) \quad (5.7.1817)$$

Nous avons alors :

$$\frac{X-\theta Y}{S\sqrt{a-2\theta R+b\theta^2}} = T(m+n-2) = T(k) \quad (5.7.1818)$$

Et donc, comme auparavant, nous pouvons écrire :

$$P\left(\frac{(X-\theta Y)^2}{S^2(a-2\theta R+b\theta^2)} \leq T_{\alpha/2}^2\right) = 1-\alpha \quad (5.7.1819)$$

Ce que nous pouvons réécrire sous la forme suivante :

$$P\left((X-\theta Y)^2 \leq T_{\alpha/2}^2(k)S^2(a-2\theta R+b\theta^2)\right) = 1-\alpha \quad (5.7.1820)$$

Ce qui développé donne :

$$P\left(X^2 - 2\theta XY + \theta^2 Y^2 \leq T_{\alpha/2}(k)S^2 a - 2\theta R T_{\alpha/2}^2(k)S^2 + b\theta^2 T_{\alpha/2}(k)S^2\right) = 1-\alpha \quad (5.7.1821)$$

Nous regroupons les termes comme précédemment :

$$P\left(\theta^2(Y^2 - bT_{\alpha/2}^2(k)S^2) - 2\theta(XY - RT_{\alpha/2}^2S^2) + (X^2 - T_{\alpha/2}^2 S^2 a) \leq 0\right) \quad (5.7.1822)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors pour racines après simplification des facteurs numériques :

$$\theta_{1,2}=\frac{XY\pm\sqrt{(XY-RT^2_{\alpha/2}(k)S^2)^2-(Y^2-bT^2_{\alpha/2}(k)S^2)(X^2-T^2_{\alpha/2}S^2a)}}{Y^2-bT^2_{\alpha/2}(k)S^2} \quad (5.7.1823)$$

Après la méthode de simplification vue ci-dessus (pfff ...) nous obtenons enfin :

$$\theta_{1,2}=\frac{\dfrac{X}{Y}\pm\dfrac{1}{Y^2}ST^2_{\alpha/2}(k)\sqrt{-2RXY+RS^2T^2_{\alpha/2}(k)+bX^2+a(Y^2-bS^2T^2_{\alpha/2}(k))}}{1-g} \quad (5.7.1824)$$

5.7.13.4.2 Test A/B bayésien pour résultats binaires

Pour un test sur résultats binaires (par exemple un test de taux de conversion), la probabilité que B batte A à long terme est donnée par [48] :

$$P(p_B>p_A)=\sum_{i=0}^{\alpha_B-1}\frac{B(\alpha_A+i,\beta_B+\beta_A)}{(\beta_B+i)B(1+i,\beta_B)B(\alpha_A,\beta_A)} \quad (5.7.1825)$$

où :

- α_A est un plus le nombre de succès pour A
- β_A est un plus le nombre d'échecs pour A
- α_B est un plus le nombre de succès pour B
- β_B est un plus le nombre d'échecs pour B
- B est la fonction bêta comme vue à la page 748 (gardez à l'esprit que nous devons avoir $a>0,b>0$) :

$$P_{a,b}(x)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}1_{]0,1[}=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x}1_{]0,1[} \quad (5.7.1826)$$

Démonstration 5.46.4. La distribution bêta est une distribution antérieure pratique pour modéliser un paramètre binomial p (car nous savons que c'est l'une des rares distributions à avoir un domaine de définition dans $[0,1]$). À partir d'un a priori non informatif, la distribution de p après S succès et F échecs est donnée par $B(S+1,F+1)$. Pour le reste de la discussion, nous considérons $\alpha=S+1$ et $\beta=F+1$, qui ne sont que les deux paramètres de la distribution bêta pour le a priori.

Supposons maintenant que nous ayons deux branches expérimentales (A et B) et que nous ayons un a priori bayésien pour chacune :

$$p_A=B(\alpha_A,\beta_A) \qquad p_B=B(\alpha_B,\beta_B) \quad (5.7.1827)$$

[48] La dérivation et le texte qui suivent viennent principalement de https://www.evanmiller.org/bayesian-ab-testing.html.

En cours de traduction de l'anglais

En utilisant la fonction de densité de probabilité de la distribution bêta comme a priori pour p, nous pouvons obtenir la probabilité totale que p_B soit supérieur à p_A en intégrant la distribution conjointe sur toutes les valeurs pour lesquelles $p_B > p_A$:

$$P(p_B > p_A) = \int_0^1 \int_{p_A}^1 \frac{p_A^{\alpha_A-1}(1-p_A)^{\beta_A-1}}{B(\alpha_A,\beta_A)} \frac{{p_B}^{\alpha_B-1}(1-p_B)^{\beta_B-1}}{B(\alpha_B,\beta_B)} \mathrm{d}p_B \mathrm{d}p_A \tag{5.7.1828}$$

parfois appelée "intégrale hypergéométrique d'Euler".

En évaluant l'intégrale intérieure :

$$\begin{aligned}\int_{p_A}^1 \frac{{p_B}^{\alpha_B-1}(1-p_B)^{\beta_B-1}}{B(\alpha_B,\beta_B)} \mathrm{d}p_B &= \int_{p_A}^1 \frac{{p_B}^{\alpha_B-1}(1-p_B)^{\beta_B-1}}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x} \mathrm{d}p_B \\ &= \frac{1}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x} \int_{p_A}^1 {p_B}^{\alpha_B-1}(1-p_B)^{\beta_B-1}\mathrm{d}p_B \\ &= \frac{1}{B(\alpha_B,\beta_B)} \int_{p_A}^1 {p_B}^{\alpha_B-1}(1-p_B)^{\beta_B-1}\mathrm{d}p_B\end{aligned} \tag{5.7.1829}$$

la relation devient :

$$P(p_B > p_A) = 1 - \int_0^1 \frac{p_A^{\alpha_A-1}(1-p_A)^{\beta_A-1}}{B(\alpha_A,\beta_A)} I_{p_A}(\alpha_B,\beta_B)\mathrm{d}p_A \tag{5.7.1830}$$

où I_x est la fonction bêta incomplète (voir section Statistiques page 752). En utilisant l'identité $I_x(1,b) = 1-(1-x)b$, la relation récursive :

$$I_x(a,b) = I_x(a-1,b) - \frac{x^{a-1}(1-x)^b}{(a-1)B(a-1,b)} \tag{5.7.1831}$$

et le fait que α et β sont des entiers, nous pouvons exprimer I_x comme :

$$I_x(a,b) = 1-(1-x)^b - \sum_{j=1}^{a-1} \frac{x^{a-j}(1-x)^b}{(a-j)B(a-j,b)} \tag{5.7.1832}$$

Ou de manière équivalent :

$$I_x(a,b) = 1 - \sum_{i=0}^{a-1} \frac{x^i(1-x)^b}{(b+i)B(1+i,b)} \tag{5.7.1833}$$

En cours de traduction de l'anglais

Notre intégrale de probabilité peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
P(p_B > p_A) &= 1 - \int_0^1 \frac{p_A^{\alpha_A-1}(1-p_A)^{\beta_A-1}}{B(\alpha_A,\beta_A)} I_{p_A}(\alpha_B,\beta_B)\mathrm{d}p_A \\
&= 1 - \int_0^1 \frac{p_A^{\alpha_A-1}(1-p_A)^{\beta_A-1}}{B(\alpha_A,\beta_A)} \left(1 - \sum_{i=0}^{\alpha_B-1} \frac{p_A^i(1-p_A)^{\beta_B}}{(\beta_B+i)B(1+i,\beta_B)}\right)\mathrm{d}p_A \\
&= 1 - 1 + \int_0^1 \frac{p_A^{\alpha_A-1}(1-p_A)^{\beta_A-1}}{B(\alpha_A,\beta_A)} \sum_{i=0}^{\alpha_B-1} \frac{p_A^i(1-p_A)^{\beta_B}}{(\beta_B+i)B(1+i,\beta_B)}\mathrm{d}p_A \\
&= \int_0^1 \sum_{i=0}^{\alpha_B-1} \frac{p_A^{\alpha_A-1+i}(1-p_A)^{\beta_A+\beta_B-1}}{(\beta_B+i)B(\alpha_A,\beta_A)B(1+i,\beta_B)}\mathrm{d}p_A \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha_B-1} \int_0^1 \frac{p_A^{\alpha_A-1+i}(1-p_A)^{\beta_A+\beta_B-1}}{(\beta_B+i)B(\alpha_A,\beta_A)B(1+i,\beta_B)}\mathrm{d}p_A \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha_B-1} \frac{B(\alpha_A+i,\beta_A+\beta_B)}{(\beta_B+i)B(\alpha_A,\beta_A)B(1+i,\beta_B)} \int_0^1 \frac{p_A^{\alpha_A-1+i}(1-p_A)^{\beta_A+\beta_B-1}}{B(\alpha_A+i,\beta_A+\beta_B)}\mathrm{d}p_A
\end{aligned} \tag{5.7.1834}$$

Finalement :

$$P(p_B > p_A) = \sum_{i=0}^{\alpha_B-1} \frac{B(\alpha_A+i,\beta_A+\beta_B)}{(\beta_B+i)B(1+i,\beta_B)B(\alpha_A,\beta_A)} \tag{5.7.1835}$$

■ Q.E.D.

Le lecteur doit savoir que même s'il existe une formule fermée, au jour où l'on écrit ces lignes, la plupart des logiciels statistiques mettent en oeuvre des méthodes numériques (simulations) pour calculer cette probabilité !

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Si nous voulons supposer que chaque valeur de p a la même probabilité, c'est-à-dire que nous n'avons aucune information hors données (a priori) que nous aimerions inclure dans notre modèle, alors nous pouvons définir $\alpha_A = \beta_A = \alpha_B = \beta_B$, cela signifie une distribution uniforme pour toutes les valeurs de p dans l'intervalle $[0, 1]$.

R2. Le lecteur peut se référer à notre livre compagnon électronique gratuit sur le logiciel open source R pour voir comment appliquer facilement ces équations sur des cas pratiques !

5.7.13.4.3 Test A/B bayésien pour données de comptage

L'analyse des données de comptage (par exemple, si vous comparez le nombre de ventes par vendeur ou le nombre de ventes d'une semaine à l'autre) nécessite une relation différente. La probabilité que le groupe 1 ait un taux d'arrivée plus élevé que le groupe 2 est donnée par :

$$P(\lambda_1 > \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\alpha_1 - 1} \frac{(\beta_1 + \beta_2)^{-(k+\alpha_2)} \beta_1^k \beta_2^{\alpha_2}}{(k+\alpha_2) B(k+1, \alpha_2)} \tag{5.7.1836}$$

Une dérivation et une mise en œuvre suivent ; ils reflètent tous deux étroitement le cas du résultat binaire.

Démonstration 5.46.5. Soit λ_1 et λ_2 les paramètre de Poisson pour chaque groupe. Avec une croyance a priori distribuée gamma (voir section Statistiques page 754), les vraisemblances postérieures sont données par :

$$\lambda_1 = \Gamma(\alpha_1, \beta_1) \qquad \lambda_2 = \Gamma(\alpha_2, \beta_2) \tag{5.7.1837}$$

En utilisant la fonction de densité de probabilité de la distribution gamma, nous pouvons obtenir la probabilité totale que λ_1 soit supérieur à λ_2 en intégrant la distribution conjointe sur toutes les valeurs pour lesquelles $\lambda_1 > \lambda_2$:

$$P(\lambda_1 > \lambda_2) = \int_0^{+\infty} \int_{\lambda_2}^{+\infty} \Gamma(\alpha_1, \beta_1) \Gamma(\alpha_2, \beta_2) \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^{+\infty} \int_{\lambda_2}^{+\infty} \frac{\beta_1^{\alpha_1} \lambda_1^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta_1 \lambda_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\beta_2^{\alpha_2} \lambda_2^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta_2 \lambda_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \tag{5.7.1838}$$

En évaluant l'intégrale interne, l'équation devient :

$$\int_0^{+\infty} Q(\alpha_1, \beta_1 \lambda_2) \frac{\beta_2^{\alpha_2} \lambda_2^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta_2 \lambda_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \mathrm{d}\lambda_2 \tag{5.7.1839}$$

où Q est la fonction gamma régularisée incomplète supérieure (voir section de Calcul Différential et Intégral page 1556). En utilisant l'identité $Q(1, z) = e^{-z}$ et la relation récursive :

$$Q(a+n, z) = Q(a, z) + z^a e^{-z} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{\Gamma(a+k+1)} \tag{5.7.1840}$$

nous pouvons exprimer Q comme (voir section de Calcul Différential et Intégral page 1556) :

$$Q(n, z) = e^{-z} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \tag{5.7.1841}$$

L'intégrale de probabilité peut donc s'écrire (nous avons utilisé l'intégrale déjà vue lors de notre

En cours de traduction de l'anglais

étude de la fonction Gamma à la page 1552) :

$$\begin{aligned}
P(\lambda_1 > \lambda_2) &= \int_0^{+\infty} e^{-\beta_1\lambda_2}\left(\sum_{k=0}^{\alpha_1-1}\frac{(\beta_1\lambda_2)^k}{\Gamma(k+1)}\right)\frac{\beta_2^{\alpha_2}\lambda_2^{\alpha_2-1}e^{-\beta_2\lambda_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\mathrm{d}\lambda_2\\
&= \sum_{k=0}^{\alpha_1-1}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta_1\lambda_2}(\beta_1\lambda_2)^k}{\Gamma(k+1)}\frac{\beta_2^{\alpha_2}\lambda_2^{\alpha_2-1}e^{-\beta_2\lambda_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\mathrm{d}\lambda_2\\
&= \sum_{k=0}^{\alpha_1-1}\frac{\beta_1^k\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{+\infty} e^{-(\beta_1+\beta_2)\lambda_2}\lambda_2^{k+\alpha_2-1}\mathrm{d}\lambda_2\\
&= \sum_{k=0}^{\alpha_1-1}\frac{\beta_1^k\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha_2)}\frac{\Gamma(k+\alpha_2)}{(\beta_1+\beta_2)^{(k+\alpha_2)}}\\
&= \sum_{k=0}^{\alpha_1-1}\beta_1^k\beta_2^{\alpha_2}(\beta_1+\beta_2)^{-(k+\alpha_2)}\frac{\Gamma(k+\alpha_2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha_2)}\frac{k+\alpha_2}{k+\alpha_2}
\end{aligned} \tag{5.7.1842}$$

En utilisant $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, nous avons :

$$P(\lambda_1 > \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\alpha_1-1}\beta_1^k\beta_2^{\alpha_2}(\beta_1+\beta_2)^{-(k+\alpha_2)}\frac{\Gamma(k+\alpha_2+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha_2)}\frac{1}{k+\alpha_2} \tag{5.7.1843}$$

En remplaçant la fonction gamma par une fonction bêta (voir page 748), nous avons :

$$\boxed{P(\lambda_1 > \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\alpha_1-1}\frac{(\beta_1+\beta_2)^{-(k+\alpha_2)}\beta_1^k\beta_2^{\alpha_2}}{(k+\alpha_2)B(k+1,\alpha_2)}} \tag{5.7.1844}$$

■ Q.E.D.

Remarque

Encore une fois, le lecteur peut se référer à notre livre compagnon électronique gratuit sur R pour voir comment appliquer ces équations facilement sur des cas pratiques avec un logiciel et un code open-source gratuits !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.5 Analyse de la Variance (ANOVA)

"L'analyse de la variance", en anglais "Analysis Of VAriance", est un ensemble de modèles statistiques utilisés pour analyser les différences entre les moyennes des groupes et leurs procédures associées (telles que les "variations" intra et inter groupes), développé par le statisticien et biologiste évolutionniste Ronald Fisher. Dans le cadre de l'ANOVA, la variance observée dans une variable particulière est divisée en composantes attribuables à différentes sources de variation.

Les principales techniques d'analyse des variances sont les suivantes (certaines d'entre elles sont détaillées plus loin) dans l'ordre du plus utilisé au moins utilisé (et par ordre croissant de complexité) :

- ANOVA à un facteur et deux varaibles (test T de Student)[49]
- ANOVA à un facteur fixe (n variables fixes indépendantes)[50]
- ANOVA à facteurs fixes avec/sans répétitions[51]
- ANOVA multifactorielle avec/sans répétitions
- ANOVA à mesures répétées ANOVA (RM-ANOVA)[52]
- Conception en blocs[53] (randomisés) (ANOVA en blocs)
- ANOVA carré latin
- ANOVA carré gréco-latin
- ANOVA carré de Youden[54]
- ANOVA en parcelles divisées (Split-Plot)
- ANOVA en bandes croisées (Split-Block)
- ANOVA en blocs divisés (ANOVA)
- ANOVA en bandes doublement divisées (Split-Split-Plot)
- Analyse de la covariance (ANCOVA)
- Analyse de la variance imbriquée (hiérarchique) (HANOVA)
- ANOVA partiellement imbriquée (PANOVA)
- Analyse multivariée de la variance (MANOVA)
- ANOVA à effets aléatoires
- ANOVA à effets mixes (avec facteurs fixes ou aléatoires)
- ANOVA croisées
- ANOVA robustes (par permutations, basées sur M-estimateurs)
- ...

En cours de traduction de l'anglais

[49] Il existe un test de Friedman non paramétrique équivalent par une transformation en rangs que nous verrons plus loin..

[50] Il existe un test équivalent non paramétrique par une transformation en rangs appelé test Kruskal-Wallis où le test post-hoc sera typiquement le test U de Mann-Whitney et nous les verrons tous deux plus loin ci-dessous.

[51] Dans les faits pour toutes les ANOVA, il existe une variante mathématique pour les mesures répétées.

[52] L'ANOVA à mesures répétées est l'équivalent de l'ANOVA à un facteur, mais pour des groupes liés, non indépendants, et est l'extension du test T de Student pour données appariées. Une ANOVA à mesures répétées est également appelée ANOVA intra-sujets ou ANOVA pour les échantillons corrélés.

[53] Il existe une variante où les blocs bloqués sont considérés comme fixes ou aléatoires ... Dans les faits, le bloc est considéré comme un autre facteur. Alors dans ce dernier cas il s'agit juste d'une ANOVA à deux facteurs

[54] Ce sont des carrés latins incomplets, dans lesquels le nombre de colonnes n'est pas égal au nombre de lignes.

et certaines des ANOVA ci-dessus sont dites "équilibrées" ou "non-équilibrées", selon que le nombre de mesures est égal ou non égal pour chaque variable et peut donc être calculé avec différents types de somme des carrés des erreurs carrées dans le cas déséquilibré nommés "Somme des carrés de type I", "Somme des carrés de type II" ou "Somme des carrés de type III". On peut donc dire qu'il existe au moins entre 20 et 60 types d'ANOVA différents (y compris les variations spéciales mais sans inclure les versions randomisées / bootstrapées...) !

Il faut également savoir que la terminologie de l'ANOVA est en grande partie issue des plans statistiques des expériences (voir la section Génie industriel page ??). L'expérimentateur ajuste les facteurs et mesure les réponses pour tenter de déterminer un effet. Les facteurs sont attribués aux unités expérimentales par une combinaison de randomisation et de blocage pour garantir la validité des résultats.

Remarque

Pour le lecteur intéressé à avoir un aperçu plus approfondi, mais sans trop de détails mathématiques, à l'opposé du présent livre, nous recommandons la référence mondiale actuelle suivante pour les experts en ANOVA et en conception d'expériences : *Design and Analyis of Experiments* [a] (auteurs : Hinkelmann, K. et Kempthorne, O.), environ 730.-USD et 1,800 pages (voir [195], [196] et [197]) et *Applied Linear Statistical Models* (voir [259]).

[a] Ensemble de trois volumes ! ! !

Le but de cette section aura principalement pour but d'éviter le type de conversation téléphonique suivante entre un spécialiste en ANOVA (S) et un chercheur scientifique ou ingénieur (R). R : «Bonjour, M. Stat, je me demande si vous avez juste une minute pour une question rapide de statistiques ?» S : «Habituellement, je ne fais pas de consultation statistique par téléphone, mais laissez-moi voir si je peux vous aider. Quel est le problème ?» R : «Nous développons de nouveaux supports de croissance pour les producteurs industriels pour la culture de plantes à fleurs. Nous avons trois de ces supports et nous les utilisons avec quatre variétés de fleurs. Nous avons cinq réplications pour chaque combinaison de médium et de fleur. Nous avons analysé les données sous forme d'une classification bidirectionnelle de 3×4 avec cinq observations par cellule. Mais mon assistant diplômé a parlé à l'un de vos étudiants et il est maintenant confus quant à la validité de cette analyse. Je veux juste que vous confirmiez que nous avons fait la bonne chose.» S : «Eh bien, je ne sais pas.» R : «Que voulez-vous dire, vous ne savez pas ? Vous êtes expert pourtant ? !» S : «J'ai vraiment besoin d'en savoir plus sur la façon dont vous avez réalisé l'expérience. Par exemple, comment avez-vous préparé les supports que vous avez utilisés dans les pots individuels ? Je suppose que vous cultivez les fleurs dans des pots dans la serre.» R : «Oui, c'est vrai. Mon assistant diplômé a simplement mélangé chaque médium dans un grand récipient, que nous avons ensuite placé dans les pots individuels.» S : «Cela peut être un problème, car il se peut maintenant que vous n'ayez aucune réplication.» R : «Que voulez-vous dire, nous n'avons pas de réplication ? Je viens de vous dire que nous avons cinq répliques.» S : «Oui, mais ... je pense qu'il serait préférable que vous veniez à mon bureau pour que je vous explique cela et pour examiner de plus près votre expérience.» R : «Mais nous avons déjà soumis l'article pour publication.» S : «Alors pourquoi ne viendriez-vous pas quand vous recevrez les retours ?» Silence. R : «Oui, merci. Je ferai ainsi...»

En cours de traduction

Ceci est, bien sûr, juste une conversation fictive [55]. Mais de nombreux statisticiens consultants ont eu des conversations similaires (la plupart du temps, le document a déjà été rejeté). Le but de cette section est d'aider les ingénieurs non seulement à mieux se comprendre, mais aussi à mieux comprendre les subtilités de la conception et de l'analyse d'expériences.

En cours de traduction de l' anglais

[55] Un autre exemple réel typique peut être trouvé dans la vidéo YouTube suivante https://youtu.be/ew2psDyhxb8

5.7.13.5.1 ANOVA à un facteur fixe

L'objectif de l'analyse de la variance (contrairement à ce que son nom pourrait laisser penser) est une technique statistique permettant de comparer les moyennes de deux populations ou plus (très utilisé dans le pharma ou dans les labos de R&D ou de bancs d'essais[56]). Cette méthode, néanmoins, doit son nom au fait qu'elle utilise des mesures de variance afin de déterminer le caractère statistiquement significatif, ou non, des différences de moyennes mesurées sur les populations.

Plus précisément, la vraie signification est de savoir si le fait que des moyennes d'échantillons sont (légèrement) différentes peut être attribué au hasard de l'échantillonnage ou provient du fait qu'un facteur de variabilité engendre réellement des échantillons significativement différents (si nous avons les valeurs de toute la population, nous n'avons rien à faire !).

Remarque

Pour plus d'informations au niveau du vocabulaire et la mise en application, l'ingénieur et le chercheur se reporteront à la norme ISO 3534-3 :1999.

Pour l'analyse de la variance appelée "ANOVA à un facteur" (ANalysis Of VAriance) ou "ANAVAR à un facteur" (ANAlyse de la VARiance), ou encore "ANOVA à une voie" ou plus rigoureusement "ANOVA à un facteur fixe avec répétitions" ou encore "ANOVA à une variable catégorielle fixe avec répétitions", nous allons d'abord rappeler, comme nous l'avons démontré, que la loi de Fisher-Snedecor est donnée par le rapport de deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi du Khi-deux et divisée par leur degré de liberté tel que :

$$\frac{U/k}{V/l}=F_{k,l}(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{k+l}{2}\right)\left(\dfrac{k}{l}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{l}{2}\right)}\frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{k}{l}x\right)^{\frac{k+l}{2}}} \tag{5.7.1845}$$

et nous allons voir maintenant son importance.

Remarque

Lorsqu'un facteur peut avoir un très grand nombre de niveaux nous considérons le fait d'avoir choisi un niveau du facteur parmi une multitude de possibles comme une sélection aléatoire. Raison pour laquelle nous parlons alors dans ce derniers cas de "facteur aléatoire" qui fait l'objet d'ANOVA particulières étudiées une fois celles à facteurs fixes maîtrisées (par exemple les ANOVA mélengeant facteurs fixes et facteurs aléatoires sont appelées "ANOVA mixes").

Considérons un échantillon aléatoire de taille n, disons $X_1,X_2,\ldots,X_n$ issu de la loi $\mathcal{N}(\mu_X,\sigma_X)$ et un échantillon aléatoire de taille m, disons $Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$ issu de la loi $\mathcal{N}(\mu_Y,\sigma_Y)$.

Considérons les estimateurs du maximum de vraisemblance de l'écart-type de la loi Normale

[56] Dans le cas des "facteurs aléatoires" (concept que nous verrons plus tard !) on compare cependant les variances .... !

En cours de traduction de l'anglais

traditionnellement notés dans le domaine de l'analyse de la variance par :

$$S_{*X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_X)^2 \quad \text{et} \quad S_{*Y}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2 \tag{5.7.1846}$$

Les statistiques ci-dessus sont celles que nous utiliserions pour estimer les variances si les moyennes théoriques μ_X, μ_Y étaient connues. Donc nous pouvons utiliser un résultat démontré plus haut lors de notre étude des intervalles de confiance :

$$\chi^2(n)=\frac{nS_{*X}^2}{\sigma_X^2} \quad \text{et} \quad \chi^2(m)=\frac{mS_{*Y}^2}{\sigma_Y^2} \tag{5.7.1847}$$

Comme les X_i sont indépendantes des Y_j (hypothèse qui implique que la covariance est nulle, la réciproque n'étant pour rappel pas toujours vraie !), les variables :

$$\frac{nS_{*X}^2}{\sigma_X^2} \quad \text{et} \quad \frac{mS_{*Y}^2}{\sigma_Y^2} \tag{5.7.1848}$$

sont indépendantes l'une de l'autre.

Remarque

Il existe un type d'ANOVA prévu pour le cas où les variables ne sont pas indépendantes (on parle alors de "covariable"). Il s'agit de "l'ANCOVA" qui signifie "Analyse de la COvariance et de la VAriance" qui utilise un mix entre la régression linéaire (voir section Méthodes Numériques page ??) et l'ANOVA. Le but de l'ANCOVA est de supprimer statistiquement l'effet indirect de la covariable. Nous verrons bien plus loin comment cela fonctionne dans les détails.

Nous pouvons donc appliquer la loi de Fisher-Snedecor avec :

$$U=\frac{nS_{*X}^2}{\sigma_X^2};\; k=n \quad \text{et} \quad V=\frac{mS_{*Y}^2}{\sigma_Y^2};\; l=m \tag{5.7.1849}$$

Nous avons donc :

$$\frac{U/k}{V/l}=\frac{\frac{nS_{*X}^2}{\sigma_X^2}/n}{\frac{mS_{*Y}^2}{\sigma_Y^2}/m}=\frac{\frac{S_{*X}^2}{\sigma_X^2}}{\frac{S_{*Y}^2}{\sigma_Y^2}}=\frac{S_{*X}^2\sigma_Y^2}{S_{*Y}^2\sigma_X^2}=F_{n,m}(x) \tag{5.7.1850}$$

Soit :

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}=\frac{1}{F_{n,m}(x)}\frac{S_{*X}^2}{S_{*Y}^2} \tag{5.7.1851}$$

Ce théorème nous permet de déduire l'intervalle de confiance du rapport de deux variances lorsque la moyenne théorique est connue. Puisque la fonction de Fisher n'est pas symétrique, la seule possibilité pour faire l'inférence c'est de faire appel au calcul numérique et nous noterons alors pour un intervalle de confiance donné le test de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{1}{F_{\alpha/2}(n,m)}\frac{S_{*X}^2}{S_{*Y}^2}\leqslant\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\leqslant\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n,m)}\frac{S_{*X}^2}{S_{*Y}^2}} \tag{5.7.1852}$$

En cours de traduction en anglais

Dans le cas où les moyennes μ_X, μ_Y sont inconnues, nous utilisons les estimateurs sans biais des variances traditionnellement notés dans le domaine de l'analyse de la variance par :

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \quad \text{et} \quad S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \bar{Y})^2 \tag{5.7.1853}$$

Pour estimer les variances théoriques, nous utilisons le résultat démontré plus haut :

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} = \chi^2(n-1) \quad \text{et} \quad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} = \chi^2(m-1) \tag{5.7.1854}$$

Comme les X_i sont indépendantes des Y_j (hypothèse !), les variables :

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \quad \text{et} \quad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \tag{5.7.1855}$$

sont indépendantes l'une de l'autre. Nous pouvons donc appliquer la loi de Fisher-Snedecor avec :

$$U = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2};\ k = n-1 \quad \text{et} \quad V = \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2};\ l = m-1 \tag{5.7.1856}$$

Nous avons donc :

$$\frac{U/k}{V/l} = \frac{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}/(n-1)}{\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}/(m-1)} = \frac{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2}} = \frac{S_X^2\sigma_Y^2}{S_Y^2\sigma_X^2} = F_{n-1,m-1}(x) \tag{5.7.1857}$$

Soit :

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = \frac{1}{F_{n-1,m-1}(x)}\frac{S_X^2}{S_Y^2} \tag{5.7.1858}$$

Ce théorème nous permet de déduire l'intervalle de confiance du rapport de deux variances lorsque la moyenne empirique est connue. Puisque la fonction de Fisher n'est pas symétrique, la seule possibilité pour faire l'inférence c'est de faire appel au calcul numérique et nous noterons alors pour un intervalle de confiance donné le "test de Fisher" de la manière suivante :

$$\boxed{\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)}\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leqslant \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leqslant \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}\frac{S_X^2}{S_Y^2}} \tag{5.7.1859}$$

tout en se rappelant que son utilisation nécessite implicitement des contraintes de normalité des variables étudiées.

R. A. Fisher (1890-1962) est, comme Karl Pearson, l'un des principaux fondateurs de la théorie moderne de la statistique. Fisher étudia à Cambridge où il obtint en 1912 un diplôme en astronomie. C'est en étudiant la théorie de l'erreur dans les observations astronomiques que Fisher s'intéressa à la statistique. Fisher est l'inventeur de la branche de la statistique appelée l'analyse de la variance.

Au début du 20ème siècle, R. A. Fisher développe donc la méthodologie des plans d'expérience (voir section de Génie Industriel page ??). Pour valider l'utilité d'un facteur, il met au

En cours de traduction de l'anglais

point un test permettant d'assurer que des échantillons différents sont de natures différentes. Ce test est basé sur l'analyse de la variance (des échantillons), et nommé ANOVA pour "analyse normalisée de la variance".

Prenons k échantillons de n valeurs aléatoires chacun. Chacune des valeurs étant considérée comme une observation ou une mesure de quelque chose ou sur la base de quelque chose (un lieu différent, ou un objet différent... bref : un seul et unique facteur de variabilité entre les échantillons !). Nous aurons donc un nombre total de N d'observations (mesures) donné par :

$$N = kn \tag{5.7.1860}$$

si chacun des échantillons a un nombre identique de valeurs n (taille de l'échantillon) tel que $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$ nous parlons alors de "plan équilibré" ou "plan balancé" à k niveaux (ou k modalités).

Remarque

Si nous avons plusieurs facteurs de variabilité (par exemple : chaque lieu compare à lui-même plusieurs laboratoires), nous parlerons alors "d'ANOVA multifactorielle". Dès lors, s'il n'y a que deux facteurs de variabilité, nous parlons "d'ANOVA à deux facteurs" (voir plus loin pour plus de détails sur les différentes ANOVA à deux facteurs).

Nous considérerons que chacun des k échantillons est issu (suit) d'une variable aléatoire suivant une loi Normale :

Facteur 1			
Échantillon 1	Échantillon 2	Échantillon ...i	Échantillon k
x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1k}
x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2k}
$\ldots$	$\ldots$	x_{ij}	$\ldots$
x_{n1}	x_{n2}	$\ldots$	x_{nk}
Moyenne : $\bar{x}_1$	Moyenne : $\bar{x}_2$	Moyenne : $\bar{x}_i$	Moyenne : $\bar{x}_k$

TAB. 5.49 – **Structure typique dite "croisée" d'une analyse de la variance à un facteur**

En cours de traduction de l'anglais

Par conséquent, dans une analyse de variance à un facteur (ANOVA à un facteur), un seul facteur (traitement) à plusieurs niveaux est considéré.

En termes de test, nous voulons tester si les moyennes des k échantillons de taille n sont égales sous l'hypothèse que leurs variances sont égales. Ce que nous écrivons sous forme d'hypothèse de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu \\ H_1 &: \quad \exists i, j \quad \mu_i \neq \mu_j \end{aligned} \tag{5.7.1861}$$

Autrement dit, les échantillons sont représentatifs d'une même population (d'une même loi statistique). C'est-à-dire que les variations constatées entre les valeurs des différents échantillons sont dues essentiellement au hasard. Pour cela nous étudions la variabilité des résultats dans les échantillons et entre les échantillons.

Remarque

Le modèle statistique des observations peut aussi s'écrire sous la forme très importante suivante, nommée "modèle d'effets factoriels" ou même parfois "modèle linéaire classificatoire" :

$$x_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \tag{5.7.1862}$$

Le paramètre μ est la "moyenne globale", τ_i est le i-ème "effet de traîtement", et ε_{ij} est une "erreur aléatoire". On suppose que les ε_{ij} sont i.i.d selon $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. C'est un modèle complètement additif (il n'y a pas d'interactions !). Sous cette forme les hypothèses sont alors :

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \sigma_{\mu_i} = 0 \\ H_1 : &\quad \sigma_{\mu_i} > 0 \end{aligned} \tag{5.7.1863}$$

Notez que nous avons alors :

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{k}\tau_i = 0 \tag{5.7.1864}$$

Il revient exactement au même comme nous le verrons plus loin de poser que (formulation qu'on retrouve dans certains articles ou ouvrages) :

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \sigma_{\mu} = 0 \\ H_1 : &\quad \sigma_{\mu} > 0 \end{aligned} \tag{5.7.1865}$$

Nous noterons donc pour la suite i l'indice d'échantillon (de 1 à k) et j l'indice de l'observation (de 1 à n). Donc x_{ij} sera la valeur de la j-ème observation de l'échantillon de données numéro i (nous avons choisi d'inverser la notation d'usage donc attention à ne pas vous tromper par la suite... nous sommes désolés... c'était une bêtise !).

Selon l'hypothèse susmentionnée, nous avons :

$$x_{ij} = \mathcal{N}(\mu_i, \sigma) \tag{5.7.1866}$$

Nous noterons par $\bar{x}_i$ la moyenne empirique/estimée (arithmétique) de l'échantillon i (souvent appelée "moyenne marginale" et parfois notée aussi $\bar{x}_{i.}$) :

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = n_i\bar{x}_i \tag{5.7.1867}$$

et $\bar{\bar{x}}$ (aussi parfois notée $\bar{x}_{..}$) la moyenne empirique/estimée des N valeurs (soit la moyenne des $\bar{x}_i$) donnée donc par :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(n_i\bar{x}_i) \tag{5.7.1868}$$

En utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance déjà démontrées plus haut nous savons que :

$$\bar{x}_i = \mathcal{N}\left(\mu_i, \frac{\sigma_i}{\sqrt{n_i}}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\bar{x}} = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.7.1869}$$

En cours de traduction de ...is

avec μ qui est la moyenne des moyennes vraies μ_i :

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\mu_i \qquad (5.7.1870)$$

Remarque

Écrire le modèle comme modèle à effet de facteurs :

$$x_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad (5.7.1871)$$

nous voyons que les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle sont $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}}$ et $\hat{\tau}_i = \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}$. Dès lors :

$$\hat{x}_{ij} = \bar{\bar{x}} + (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}) = \bar{x}_i \qquad (5.7.1872)$$

Maintenant, introduisons trois variances importantes :

1. La "variance totale" comme étant intuitivement la variance estimée sans biais en considérant l'ensemble des N observations comme un unique échantillon :

$$\text{V}_T = \frac{\displaystyle\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2}{N-1} \qquad (5.7.1873)$$

où le terme au numérateur est appelé "somme des carrés des écarts totaux".

2. La "variance entre échantillons" (c'est-à-dire entre les moyennes des échantillons) est aussi intuitivement l'estimateur de la variance des moyennes des échantillons :

$$\text{V}_E = \frac{\displaystyle\sum_{i}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} \qquad (5.7.1874)$$

où le terme au numérateur est appelé "somme des carrés des écarts entre échantillons".

Comme nous avons démontré que si toutes les variables sont identiquement distribuées (même variance) et indépendantes la variance des individus vaut n fois celle de la moyenne :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{V}(\bar{X})n = \text{V}(X) \qquad (5.7.1875)$$

alors la "variance des observations" (variables aléatoires dans un échantillon) est donnée par :

$$\text{V}_A = n\text{V}_E = \frac{n\displaystyle\sum_{i}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} \qquad (5.7.1876)$$

Nous avons donc ci-dessus l'hypothèse de l'égalité des variances qui est exprimée sous forme mathématique pour les développements à suivre.

En cours de traduction de l'anglais

3. La "variance résiduelle" est l'effet des facteurs dits "non contrôlés". C'est par définition la moyenne des variances des échantillons (en quelque sorte : l'erreur standard) :

$$\mathrm{V}_R = \frac{1}{k}\sum_i \frac{\sum_j (x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{n-1} = \frac{\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{k(n-1)} \quad (5.7.1877)$$

où le terme au numérateur est appelé "somme des carrés des écarts des résidus" ou encore plus souvent "erreur résiduelle".

Au final, ces indicateurs sont parfois résumés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&Q_T = \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 && \mathrm{ddl}_T = N-1 = kn-1 && \mathrm{V}_T = \frac{Q_T}{\mathrm{ddl}_T}\\
&Q_A = n\sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2 && \mathrm{ddl}_A = k-1 && \mathrm{V}_A = \frac{Q_A}{\mathrm{ddl}_A}\\
&Q_R = \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 && \mathrm{ddl}_R = k(n-1) && \mathrm{V}_R = \frac{Q_R}{\mathrm{ddl}_R}
\end{aligned} \quad (5.7.1878)$$

Remarquons que si les échantillons n'ont pas la même taille (ce qui est rare dans la pratique), nous avons alors :

$$\begin{aligned}
&Q_T = \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 && \mathrm{ddl}_T = N-1 && \mathrm{V}_T = \frac{Q_T}{\mathrm{ddl}_T}\\
&Q_A = n\sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2 && \mathrm{ddl}_A = k-1 && \mathrm{V}_A = \frac{Q_A}{\mathrm{ddl}_A}\\
&Q_R = \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 && \mathrm{ddl}_R = \sum_i(n_i-1) && \mathrm{V}_R = \frac{Q_R}{\mathrm{ddl}_R}
\end{aligned} \quad (5.7.1879)$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Le terme Q_T est souvent indiqué dans l'industrie par l'abréviation SST signifiant en anglais "Sum of Squares Total" ou plus rarement TSS pour "Total Sum of Squares".

R2. Le terme Q_A est souvent indiqué dans l'industrie par l'abréviation SSB signifiant en anglais "Sum of Squares Between (samples)" ou plus rarement SSk pour "Sum of Squares Between treatments" (aussi noté parfois : $\mathrm{SS}_{\mathrm{tr}}$).

R3. Le terme Q_R est souvent indiqué dans l'industrie par l'abréviation SSW signifiant en anglais "Sum of Squares Within (samples)" ou plus rarement SSE pour "Sum of Squares due to Errors" (aussi noté parfois : SS_E).

Indiquons que nous voyons souvent dans la littérature (nous réutiliserons un peu plus loin cette

notation) :

$$\begin{aligned}Q_R &= \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = \frac{n_i-1}{n_i-1}\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{n_i-1} = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2\end{aligned} \quad (5.7.1880)$$

avec donc l'estimateur sans biais de la variance des observations :

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 \quad (5.7.1881)$$

Avant d'aller plus loin, arrêtons-nous sur la variance résiduelle. Nous avons donc pour des échantillons qui ne sont pas de même taille :

$$\boxed{\mathrm{V}_R = \frac{\displaystyle\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{\displaystyle\sum_{i}(n_i-1)}} \quad (5.7.1882)$$

Cette écriture est souvent appelée "variance groupée" ("pooled variance" en anglais). La racine carrée d'un estimateur de variance groupée est évidemment connue sous le nom de "écart-type groupé". Nous voyons aussi que si nous assumons que toutes les moyennes $\bar{x}_i$ sont égales et également toutes les tailles d'échantillons n_i, nous retombons sur l'erreur standard !

Ouvrons maintenant une petite parenthèse... Prenons le cas particulier de deux échantillons seulement :

$$\mathrm{V}_R = \frac{\displaystyle\sum_{j}(x_{1j}-\bar{x}_1)^2+\sum_{j}(x_{2j}-\bar{x}_2)^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{\displaystyle\sum_{j}(x_{1j}-\bar{x}_1)^2+\sum_{j}(x_{2j}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2} \quad (5.7.1883)$$

Soit en introduisant l'estimateur du maximum de vraisemblance de la variance :

$$\mathrm{V}_R = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \quad (5.7.1884)$$

Remarque

Il est alors facile de comprendre d'où vient la relation suivante :

$$V_R = S_R^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left((n_i-1)S_i^2\right)}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}n_i\right)-p} \quad (5.7.1885)$$

aussi nommé "variance de variance de répétabilité de p séries de données".

Dans les expériences de laboratoire, cela conduit également à la définition de la "variance

En cours de traduction de l'anglais

inter-séries" (différence entre la variance des valeurs moyennes de la série de données et la variance de répétabilité divisée par le nombre de mesures par série), où étant donné p séries de données (i variant de 1 à p), chaque série de données contenant des valeurs j (j variant de 1 à n_i) :

$$S_g^2 = S_{\mu_i}^2 - \frac{S_R^2}{n} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{p}\left(n_i(\mu_i-\mu_p)^2\right)}{p-1} - S_R^2}{n} \tag{5.7.1886}$$

Dans la pratique, si la variance des moyennes est inférieure à la contribution de la variance de répétabilité, S_R^2, la variance inter-séries est définie égale à zéro !

Nous pouvons d'ailleurs observer que dans le cas particulier où $n_1 = n_2 = n$:

$$\mathrm{V}_R = \frac{nS_1^2 - S_1^2 + nS_2^2 - S_2^2}{2n-2} = \frac{n(S_1^2+S_2^2)-(S_1^2+S_2^2)}{2(n-1)} = \frac{(n-1)(S_1^2+S_2^2)}{2(n-1)} = \frac{S_1^2+S_2^2}{2} \tag{5.7.1887}$$

Donc :

$$S_1^2 \leqslant \mathrm{V}_R \leqslant S_2^2 \tag{5.7.1888}$$

Supposons maintenant que nous souhaitions comparer avec un certain intervalle de confiance la moyenne de deux populations ayant une variance différente pour savoir si elles sont de natures différentes ou non.

Nous connaissons pour le moment deux tests pour vérifier les moyennes. Le test-Z et le test-T. Comme dans l'industrie il est rare que nous ayons le temps de prendre des grands échantillons, concentrons-nous sur le deuxième que nous avions démontré plus haut :

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}T_{\alpha/2}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}T_{\alpha/2}(n-1) \tag{5.7.1889}$$

Et rappelons aussi que :

$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1890}$$

Maintenant rappelons que nous avons démontré que si nous avions deux variables aléatoires de loi :

$$\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1) \qquad \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2) \tag{5.7.1891}$$

alors la soustraction (différencier) des moyennes donne (propriété de stabilité de la loi Normale) :

$$\mathcal{N}\left(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \tag{5.7.1892}$$

Donc pour la différence de deux moyennes de variables aléatoires provenant de deux échantillons de population nous obtenons directement :

$$\mathcal{N}\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1, \sqrt{S_{\bar{X}_1}^2+S_{\bar{X}_2}^2}\right) = \mathcal{N}\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1, \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right) \tag{5.7.1893}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et maintenant l'idée est de prendre l'approximation (sous l'hypothèse que les variances sont égales) :

$$\mathcal{N}\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1,\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)\cong\mathcal{N}\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1,\sqrt{\frac{\text{V}_R}{n_1}+\frac{\text{V}_R}{n_2}}\right)=\mathcal{N}\left(\bar{X}_2-\bar{X}_1,\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right) \quad (5.7.1894)$$

Cette approximation est appelée "hypothèse homoscédastique".

Nous avons alors l'intervalle de confiance (en supposant que nous n'avons à notre connaissance qu'un estimateur de la variance) suivant en se rappelant que la soustraction ou la somme de deux variables aléatoires indépendantes implique que leurs variances s'additionnent toujours (et donc il en va de même pour les degrés de liberté de la loi de Student y relative comme nous l'avons démontré plus haut suite à la liaison directe avec la loi du khi-2) :

$$(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}T_{\alpha/2}(n-1)\leqslant\mu_2-\mu_1\leqslant(\bar{X}_2-\bar{X}_1)+\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}T_{\alpha/2}(n-1) \quad (5.7.1895)$$

avec :

$$n=n_1+n_2 \quad (5.7.1896)$$

Comme l'idée dans la pratique est souvent de tester l'égalité des moyennes théoriques (et donc que leur différence est nulle) à partir des estimateurs connus alors :

$$(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}T_{\alpha/2}(n-2)\leqslant 0\leqslant(\bar{X}_2-\bar{X}_1)+\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}T_{\alpha/2}(n-2) \quad (5.7.1897)$$

Dans la plupart des logiciels disponibles sur le marché, le résultat est uniquement donné à partir du fait que le quantile T que nous avons est compris dans le $T_{\alpha/2}$ correspondant à l'intervalle de confiance donné rappelons-le par :

$$T^{\text{calc}}(n-2)=\frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad (5.7.1898)$$

dans le cas de l'hypothèse homoscédastique (égalité des variances/homogénéité des variances).

Remarque

Cette dernière relation est appelée "independent two-sample T-test", ou "test-T homoscédastique" ou encore "test-T d'égalité des espérances de 2 observations avec variances égales" ou encore plus simplement mais un peu abusivement "test-T à 2 échantillons", avec taille des échantillons différentes et variances égales. Souvent dans la littérature, les deux moyennes théoriques sont égales lors de la comparaison. Il s'en suit que nous avons alors :

$$T^{\text{calc}}(n-2)=\frac{\bar{X}_2-\bar{X}_1}{\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{\bar{X}_2-\bar{X}_1}{S_R\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad (5.7.1899)$$

En cours de traduction de l' anglais

Sinon, dans le cas plus général de l'hypothèse d'hétéroscédasticité (non égalité des variances), nous écrivons explicitement (nous reviendrons là-dessus lors de notre étude du test de Welch plus loin....) :

$$T^{\text{calc}}(n-2)=\frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \tag{5.7.1900}$$

Donc :

$$|T^{\text{calc}}(n-1)|\leqslant|T_{\alpha/2}(n-1)| \tag{5.7.1901}$$

Remarque

La relation antéprécédente est appelée "independent two-sample T-test", ou "test-T hétéroscédastique" ou encore "test d'égalité des espérances : deux observations avec variances différentes". Si la taille des échantillons est égale et que les variances le sont aussi et que nous supposons les deux moyennes théoriques égales lors de la comparaison, il s'ensuit que nous avons alors :

$$T^{\text{calc}}(n-2)=\frac{\bar{X}_2-\bar{X}_1}{S_{1,2}\sqrt{\dfrac{2}{n}}} \tag{5.7.1902}$$

Si nous devons comparer deux moyennes i,j parmi un nombre k de plusieurs moyennes d'une ANOVA (comme les tests post-hoc pour identifier quelles moyennes sont différentes car le test omnibus ANOVA ne nous dit rien à ce sujet !), la relation précédente est alors généralisée à :

$$T^{\text{calc}}(n-k)=\frac{\bar{X}_i-\bar{X}_j}{\sqrt{\text{V}_R\left(\dfrac{1}{n_i}+\dfrac{1}{n_j}\right)}} \tag{5.7.1903}$$

et réécrit traditionnellement comme suit :

$$\text{LSD}=\bar{X}_i-\bar{X}_j=T^{\text{calc}}(n-k)\sqrt{\text{V}_R\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} \tag{5.7.1904}$$

et est nommé le "test de Fisher de différence la moins significative" ou simplement abrégé DMS[57] (ou "least significant difference Fisher test" en anglais). Évidemment le test consiste à vérifier que $\bar{X}_i-\bar{X}_j>$ DMS à un seuil α donné et à répéter cette procédure pour toutes les $k(k-1)/2$ comparaisons.

Bref, fermons cette parenthèse et revenons à nos moutons... Nous en étions donc au tableau

[57] Les tests post-hoc ne nécessitent pas que l'ANOVA soit faite en premier, sauf le test DMS (l'ANOVA est ce que l'on appelle un "test protecteur" du DMS). Post-hoc ne signifie en aucun cas «post-ANOVA» (ceux qui le revendiquent, même les auteurs de manuels, n'ont clairement aucune idée de ce que font réellement les tests !). Post hoc (ou post factum) signifie «après la collecte des données».

En cours de traduction

suivant :

$$\begin{aligned} Q_T &= \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 & \text{ddl}_T &= N-1=kn-1 & \text{V}_T &= \frac{Q_T}{\text{ddl}_T} \\ Q_A &= n\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2 & \text{ddl}_A &= k-1 & \text{V}_A &= \frac{Q_A}{\text{ddl}_A} \\ Q_R &= \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 & \text{ddl}_R &= k(n-1) & \text{V}_R &= \frac{Q_R}{\text{ddl}_R} \end{aligned} \tag{5.7.1905}$$

où nous avons donc dans le cas d'échantillons de même taille :

$$\text{ddl}_T=\text{ddl}_A+\text{ddl}_R=k-1+k(n-1)=k-1+kn-k=kn-1 \tag{5.7.1906}$$

et ainsi que l'erreur totale qui est la somme de l'erreur des moyennes (interclasses) et de l'erreur résiduelle (intra-classes) et ce que les échantillons soient de même taille ou non :

$$\boxed{Q_T=Q_A+Q_R} \tag{5.7.1907}$$

Remarque

Rappelez-vous que cette décomposition de somme totale des carrés s'écrit aussi parfois :

$$\text{SCTO}=\text{SCTR}+\text{SCE} \tag{5.7.1908}$$

où SSTR est l'abréviation Somme des Carrés des Traîtements Résiduels (l'équivalent de Q_A) et Somme des Carrés des Erreurs (l'équivalent de Q_R).

Effectivement :

$$\begin{aligned} Q_T &= \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2=\sum_i\sum_j\left((x_{ij}-\bar{x}_i)+(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\right)^2 \\ &= \sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)^2+\sum_i\sum_j(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2+2\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}) \end{aligned} \tag{5.7.1909}$$

Or, nous avons :

$$\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})=\sum_i\left[(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)\right]=0 \tag{5.7.1910}$$

car :

$$\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)=0 \quad \forall i \tag{5.7.1911}$$

Donc :

$$Q_T=\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)^2+\sum_i\sum_j(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2=Q_R+Q_A \tag{5.7.1912}$$

Maintenant, sous l'hypothèse forte (qui va nous être indispensable un peu plus loin) que les variances vraies sont liées par la relation :

$$\sigma_R^2=\sigma_A^2=\sigma_T^2=\sigma^2 \tag{5.7.1913}$$

En cours de traduction anglais

et donc que leurs estimateurs respectifs sont asymptotiquement égaux... ce qui dans la pratique n'est approximativement vrai que lorsque certaines conditions sont satisfaites (raison pour laquelle il faut absolument avant de faire une ANOVA exécuter un calcul de la puissance et de l'effectif d'une ANOVA !) nous avons :

$$\frac{Q_R}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{\sigma^2}=\chi^2_{N-k} \tag{5.7.1914}$$

ce qui découle immédiatement de la démonstration que nous avions faite lors de notre étude de l'inférence statistique avec la loi du Khi-deux où nous avions obtenu (pour rappel) :

$$\chi^2_{n-1}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)\left(\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \tag{5.7.1915}$$

Pour déterminer le nombre de degrés de liberté de la loi du Khi-deux de :

$$\frac{Q_A}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i}n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2}{\sigma^2} \tag{5.7.1916}$$

nous allons utiliser le fait que (par le même raisonnement que pour la relation antéprécédente)

$$\frac{Q_T}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2}{N-1}=\chi^2_{N-1} \tag{5.7.1917}$$

et puisque $Q_T=Q_A+Q_R$, nous devons alors avoir :

$$\frac{Q_T}{\sigma^2}=\frac{Q_A+Q_R}{\sigma^2}=\frac{Q_A}{\sigma^2}+\frac{Q_R}{\sigma^2}=\chi^2_?+\chi^2_{N-k}=\chi^2_{N-1} \tag{5.7.1918}$$

Il s'ensuit de par la propriété de linéarité du Khi-deux :

$$\frac{Q_A}{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i}n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2}{\sigma^2}=\chi^2_{k-1} \tag{5.7.1919}$$

Donc pour résumer nous avons :

$$\boxed{\frac{Q_A}{\sigma^2}=\chi^2_{k-1}\quad\text{et}\quad\frac{Q_R}{\sigma^2}=\chi^2_{N-k}} \tag{5.7.1920}$$

C'est maintenant qu'intervient la loi de Fisher dans l'hypothèse où les variances sont égales (et les mesures Normalement distribuées) ! Puisque :

$$\frac{(k-1)S_A^2}{\sigma^2}=\chi^2_{k-1}\quad\text{et}\quad\frac{(N-k)S_R^2}{\sigma^2}=\chi^2_{N-k} \tag{5.7.1921}$$

Ce que nous souhaitons faire c'est voir s'il y a une différence entre la variance des moyennes (interclasses) et la variance résiduelle (intra-classes). Pour comparer deux variances lorsque les

En cours de traduction de l' anglais

moyennes vraies sont inconnues nous avons vu que le mieux était d'utiliser le test de Fisher. Or, nous avons démontré dans notre étude de la loi de Fisher un peu plus haut que :

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}=\frac{1}{F_{n-1,m-1(x)}}\frac{S_X^2}{S_Y^2} \tag{5.7.1922}$$

où dans notre cas d'étude :

$$\frac{\sigma_A^2}{\sigma_R^2}=1\Rightarrow F_{k-1,N-k}=\frac{S_A^2}{S_R^2}=\frac{\mathrm{V}_A}{\mathrm{V}_R}=\frac{\dfrac{\sum\limits_i n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2}{k-1}}{\dfrac{\sum\limits_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{N-k}}=\frac{\dfrac{Q_A}{k-1}}{\dfrac{Q_R}{N-k}} \tag{5.7.1923}$$

Comme il existe des dizaines de types différentes d'ANOVA il faut bien comprendre ce choix de la plus simple des ANOVA que nous sommes entrain d'étudier maintenant. Ainsi, si les moyennes sont les mêmes, l'hypothèse nulle est alors que ce rapport des variances est égal à l'unité (sous les conditions déjà susmentionnées bien plus haut). Si F vient à être trop grand à un seuil donné, nous rejetons alors l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes (car in extenso les variances vont être fortement différentes aussi). Donc ici il semble cohérent de comparer les variances entre groupes (numératieur) avec celle dans les groupes (numérateur) mais comme nous le verrons ce n'est pas toujours ce choix qui sera fait (particulièrement dans les ANOVA hiérarchisées).

Au vu de l'hypothèse de la première égalité de le relation ci-dessus (qui précède l'implication), nous comprenons en même temps aussi beaucoup mieux la très grande sensibilité des résultats de l'ANOVA à la non égalité des variances vraies !

Indiquons encore que la relation précédente :

$$\boxed{F_{k-1,N-k}=\frac{\dfrac{Q_A}{k-1}}{\dfrac{Q_R}{N-k}}=\frac{\dfrac{\text{SSB}}{k-1}}{\dfrac{\text{SSW}}{N-k}}} \tag{5.7.1924}$$

est souvent indiquée dans la littérature sous la forme suivante :

$$F_{k-1,N-k}=\frac{\text{MCk}}{\text{MCE}} \tag{5.7.1925}$$

où MSk est appelé "Mean Square for treatments" et MSE "Mean Square for Error". Ce rapport va donc nous donner la valeur de la variable aléatoire F (dont le support est pour rappel borné à zéro à gauche). Concernant le choix du test (unilatéral droite/gauche ou bilatéral), remarquons que si les moyennes sont vraiment égales, alors pour tout i :

$$(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})=0 \tag{5.7.1926}$$

Donc dans ce cas :

$$F_{k-1,N-k}=\frac{\dfrac{\sum\limits_i n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2}{k-1}}{\dfrac{\sum\limits_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{N-k}}=\frac{\dfrac{\sum\limits_i n_i\cdot 0}{k-1}}{\dfrac{\sum\limits_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{N-k}}=0 \tag{5.7.1927}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce qui nous amène évidemment à immédiatement adopter un test unilatéral droite !

Sinon, en général l'interprétation de cette fraction est donc en gros la suivante : Il s'agit du rapport (normalisé au nombre de degrés de liberté) de la somme de l'erreur des moyennes (interclasses) et de l'erreur résiduelle (intra-classes) ou autrement dit le rapport de la variance interclasse par la variance résiduelle. Ce rapport suit donc une loi de Fisher à deux paramètres donnés par les degrés de liberté des classes respectives.

Remarque

S'il y a seulement deux populations (échantillons), il faut bien comprendre qu'à ce moment l'utilisation du test-T de Student suffit amplement et est considéré comme équivalent ! Au fait, l'ANOVA est une comparaison indirecte des moyennes, Student une comparaison directe... il est donc évident de deviner lequel est le mieux dans cette situation particulière !

Tous les calculs que nous avons faits sont très souvent représentés dans les logiciels sous la forme d'une table standardisée dont voici la forme et le contenu (c'est ainsi que le présente Microsoft Excel 11.8346 ou Minitab 15.1.1 par exemple) :

Source	Somme des carrés (SCE)	χ^2 ddl	Moyenne des carrés	F	F Critical
Inter-Classe	$Q_A=\sum_i n_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2$	$k-1$	$\text{MCk}=\dfrac{Q_A}{k-1}$	$\dfrac{\text{MCk}}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{k-1,N-k})$
Intra-Classe	$Q_R=\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$	$N-k$	$\text{MCE}=\dfrac{Q_R}{N-k}$		
Total	$Q_T=\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2$	$N-1$			

TAB. 5.50 – Terminologie et paramètres traditionnels d'un Tableau ANOVA (TAV) à un facteur

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, pour que l'hypothèse nulle ne soit pas rejetée, il faut que la valeur de :

$$F_{k-1,N-k}=\frac{\text{MCk}}{\text{MCE}} \qquad (5.7.1928)$$

soit plus petite ou égale au centile de la même loi F avec une probabilité cumulée correspondante à 1 soustrait de niveau de confiance α et notée parfois F_c.

La valeur choisie du F critique est un peu malheureuse à notre avis dans les tableaux d'ANOVA (mais bon une fois que l'on sait que c'est ainsi...). Il est peut-être plus aisé de comprendre cette valeur si nous l'introduisons ainsi (le test unilatéral à droite ressort pédagogiquement mieux à mon avis) :

La p-valeur dans le tableau ANOVA et les résultats de comparaison multiples comme le test de Dunnett (voir plus loin ci-dessous) et le test de Tukey (voir également plus loin ci-dessous) sont basés sur des méthodologies différentes et peuvent parfois produire des résultats contradictoires. Par exemple, il est possible que la p-valeur de l'ANOVA puisse indiquer qu'il n'y a pas de différences entre les moyennes tandis que la sortie de comparaisons multiples indique que certaines moyennes sont différentes. Dans ce cas, il est d'usage à ce jour généralement faire confiance à la sortie de comparaisons multiples.

Il faut cependant bien se rappeler que pour utiliser l'ANOVA, on doit donc supposer que les échantillons sont issus de populations différentes (données non-appariées) et suivent une loi Normale (même si l'ANOVA est relativement robuste à la non-normalité). Il est donc nécessaire de vérifier la normalité des distributions et l'homoscédasticité (test de Levene par exemple). Dans le cas contraire, il faut utiliser des variantes non paramétriques de l'analyse de variance (ANOVA de Kruskal-Wallis ou ANOVA de Friedman par exemple parmi d'autres que nous verrons plus loin).

Remarques

R1. À noter que dans la pratique, la variance inter-classe est très souvent nommée "variance inter-laboratoires" et la variance intra-classe est in extenso souvent nommée "variance intra-laboratoire".

R2. Il existe en ce début de 21ème siècle plus de 50 test ou procédures de comparaison de variances. L'opinion varie parmi les auteurs quant à leur pertinence et l'efficacité des tests d'homogénéité de variance (THV). Certains affirment que ces derniers sont indispensables à réaliser avant toute ANOVA, d'autres disent que ces tests sont de toute façon de piètre performance, l'ANOVA étant plus robuste aux écarts d'homoscédasticité que ce qui peut être détecté par les THV, particulièrement en cas de non-Normalité. En fait, toutes ces questions se reportent au problème dit "problème de Behrens-Fisher", qui est celui de la comparaison de moyennes sans supposer l'équivariance. Cependant parmis la cinquantaine de tests existants, plusieurs études comparatives ont permis de dégager les tests suivants : Test de Bartlett, Levene et Brown-Forsythe.

R3. Lorsque certains niveaux d'un facteur sont réunis en un seul pour être comparés à un niveau de référence les statisticiens parlent alors de création de "contrastes" (voir plus bas).

En cours de ... anglais

La distribution de $\bar{x}_i$ est $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_\varepsilon^2/n)$. Dès lors, comme nous l'avons démontré plus haut, nous pouvons écrire :

$$\bar{x}_i - T_{\alpha/2}(N-k)\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq \mu_i \leq \bar{x}_i + T_{\alpha/2}(N-k)\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1929}$$

Donc :

$$\bar{x}_i - T_{\alpha/2}(N-k)\frac{\text{MCE}}{\sqrt{n}} \leq \mu_i \leq \bar{x}_i + T_{\alpha/2}(N-k)\frac{\text{MCE}}{\sqrt{n}} \tag{5.7.1930}$$

Un intervalle de confiance pour la différence de deux moyennes est alors comme d'habitude :

$$(\bar{x}_i - \bar{x}_j) - T_{\alpha/2}(N-k)\sqrt{\frac{2\text{MCE}}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\bar{x}_i - \bar{x}_j) + T_{\alpha/2}(N-k)\sqrt{\frac{2\text{MCE}}{n}} \tag{5.7.1931}$$

5.7.13.5.1.1 Test de Welch

Lors de notre étude de l'ANOVA à un facteur fixe ci-dessus, nous avions introduit le fait qu'il était possible de comparer la moyenne de deux populations dont les données suivaient une distribution Normale mais de variances inégales en utilisant le test hétéroscédastique T-test Student :

$$T^{\text{calc}}(n-2)=\frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \tag{5.7.1932}$$

avec :

$$n=n_1+n_2 \tag{5.7.1933}$$

Mais en réalité nous avions un peu passé sous silence ... (certains l'auront peut-être remarqué) que nous ne sommes pas autorisés à faire cette dernière addition des degrés de liberté dès que les variances ne sont pas égales ! En effet, revenons à la source de la distribution Student :

$$T(n-1)=\frac{Z}{\dfrac{U}{n-1}} \tag{5.7.1934}$$

où pour rappel, la variable Z suit une loi Normale centrée réduite et la variable aléatoire U suit une loi du χ^2 avec $n-1$ degrés de liberté. Et rappelez-vous que nous avons prouvé que :

$$\chi^2(n-1)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \tag{5.7.1935}$$

Mais maintenant, considérons que cette même variable aléatoire U est donnée par (nous travaillons pour rappel avec l'écart type de la moyenne !) :

$$\begin{aligned}U&=\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}=\frac{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1-1}\chi^2(n_1-1)}{n_1}+\frac{\dfrac{\sigma_2^2}{n_2-1}\chi^2(n_2-1)}{n_2}=\frac{\dfrac{\sigma_1^2}{f_1}\chi^2_{n_1-1}}{n_1}+\frac{\dfrac{\sigma_2^2}{f_2}\chi^2_{n_2-1}}{n_2}\\&=\frac{\sigma_1^2}{n_1f_1}\chi^2_{n_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2f_2}\chi^2_{n_2-1}=aX+bY\end{aligned} \tag{5.7.1936}$$

où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois du chi^2 avec respectivement f_1 et f_2 degrés de liberté tels que :

$$X=\chi^2(f_1) \qquad \text{et} \qquad Y=\chi^2(f_2) \tag{5.7.1937}$$

où nous imposons que a et b sont positifs car sinon, comme prouvé plus haut, aX et bY ne suivraient pas des lois gamma.

Rappelons-nous alors que (voir page 761) :

$$\text{E}(X)=f_1 \qquad \text{et} \qquad \text{V}(X)=2f_1 \tag{5.7.1938}$$

Nous avons alors

$$aX=\gamma\left(\frac{f_1}{2},\frac{1}{2a}\right) \qquad \text{et} \qquad bY=\gamma\left(\frac{f_2}{2},\frac{1}{2b}\right) \tag{5.7.1939}$$

En cours de traduction de l' anglais

Cependant $U=aX+bY$ ne suit pas une loi gamma si $a\ neqb$ (comme nous l'avons démontré lors de notre étude de la loi Gamma à la page 754). En supposant cependant qu'elles soient suffisamment proches, les simulations numériques ont montré que l'on peut approcher la loi de U par la loi gamma suivante :

$$\gamma\left(\frac{f}{2},\frac{1}{2g}\right) \tag{5.7.1940}$$

qui a donc pour moyenne et variance (voir page 754) :

$$\mu=\frac{\dfrac{f}{2}}{\dfrac{1}{2g}}=fg \qquad \sigma^2=\frac{\dfrac{f}{2}}{\left(\dfrac{1}{2g}\right)^2}=2fg^2 \tag{5.7.1941}$$

et nous déterminerons les nombres positifs f et g pour que les moyennes et les variances espérées coïncident avec celles de U.

Nous avons donc par l'indépendance des deux variables aléatoires :

$$\text{E}(U)=af_1+bf_2 \qquad \text{et} \qquad \text{V}(U)=2(a^2f_1+b^2f_2) \tag{5.7.1942}$$

Pour que l'espérance et la variance de notre approximation correspondent à celle de U, il faut avoir :

$$fg=af_1+bf_2 \qquad \text{et} \qquad 2fg^2=2(a^2f_1+b^2f_2) \tag{5.7.1943}$$

En divisant la deuxième équation par la première, f disparaît et on trouve :

$$g=\frac{a^2f_1+b^2f_2}{af_1+bf_2} \tag{5.7.1944}$$

En remplaçant dans la première on trouve ce qu'il est d'usage d'appeler le "l'équation de Welch-Satterthwaite" :

$$f=\frac{(af_1+bf_2)^2}{af_1+bf_2} \tag{5.7.1945}$$

Ainsi explicitement :

$$f=\frac{\left(\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1f_1}\right)f_1+\left(\dfrac{\sigma_2^2}{n_2f_2}\right)f_2\right)^2}{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1f_1}\right)^2f_1+\left(\dfrac{\sigma_2^2}{n_2f_2}\right)^2f_2}=\frac{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(\sigma_1^2/n_1)^2}{f_1}+\dfrac{(\sigma_2^2/n_2)^2}{f_2}}=\frac{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(\sigma_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\dfrac{(\sigma_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} \tag{5.7.1946}$$

Comme on ne connaît pas en pratique les variances (et donc les vrais écarts-types), on prend en fait :

$$\boxed{f=\frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}} \tag{5.7.1947}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ainsi, l'expression ci-dessus arrondie à l'entier le plus proche est le nombre de degrés de liberté qui doivent réellement être pris pour le test hétéroscédastique de Student :

$$T^{\text{calc}}([f])=\frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \qquad (5.7.1948)$$

Enfin, indiquons que dans le cas général avec n termes, l'équation de Welch-Satterthwaite s'écrit (sans preuve) :

$$f_n=\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{n_i}\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(S_i^2/n_i)^2}{n_i-1}} \qquad (5.7.1949)$$

Remarque

Pour le cas particulier $n=2$ cette dernière relation se retrouve souvent dans la littérature sous la forme suivante (...) :

$$\nu=\frac{\left(\frac{s_1^2}{N_1}+\frac{s_2^2}{N_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{N_1^2\cdot\nu_1}+\frac{s_2^4}{N_2^2\cdot\nu_2}}=\frac{\left(\frac{s_1^2}{N_1}+\frac{s_2^2}{N_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{N_1^2\cdot(N_1-1)}+\frac{s_2^4}{N_2^2\cdot(N_2-1)}}. \qquad (5.7.1950)$$

Dans le domaine de la finance lors de l'utilisation du modèle CAPM (voir section Économie page ??) ou lors de l'utilisation de l'ANCOVA (voir section Statistiques page ??) et pas seulement... il est utile et important de comparer les pentes de la droite de régression pour savoir si elles sont significativement différentes ou non !

Nous avons prouvé dans la section Méthodes Numériques (page **??**) que pour une fonction linéaire dont les paramètres étaient estimés et qui s'exprimait sous la forme :

$$\hat{Y}=Ax+B \qquad (5.7.1951)$$

et dont l'expression inconnue exacte est :

$$Y=ax+b \qquad (5.7.1952)$$

nous avions :

$$A-T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum e_k^2}{n\mathrm{V}(x)}}\leq a\leq A+T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum e_k^2}{n\mathrm{V}(x)}} \qquad (5.7.1953)$$

et que si la variance réelle est inconnue :

$$A-T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum e_k^2}{(n-1)\hat{\mathrm{V}}(x)}}\leq a\leq A+T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum e_k^2}{(n-1)\hat{\mathrm{V}}}(x)} \qquad (5.7.1954)$$

En cours de traduction

ou parfois aussi écrit :

$$A - T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{\text{SSE}}{n\text{V}(x)}} \leq a \leq A + T_{\alpha/2}(n-2)\sqrt{\frac{\text{SSE}}{n\text{V}(x)}} \tag{5.7.1955}$$

Qui a la même forme que le test d'intervalle de confiance de Student pour la moyenne attendue !

Ceci étant rappelé, l'objectif est maintenant de tester si deux pentes de deux régressions différentes sont égales (test très important pour l'étude de l'ANCOVA !), et alors écrivons que l'hypothèse nulle dans le cadre d'un test d'hypothèse évidemment comme suit :

$$H_0 : A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_2 - A_2 = \Delta A = 0 \tag{5.7.1956}$$

Puisque l'intervalle de confiance d'une seule pente d'une régression est similaire dans tous les aspects à un intervalle de confiance de la moyenne de Student, la différence de deux pentes est alors similaire dans tous les aspects au test d'hypothèse de Welch. Nous avons alors puisque nous faisons l'hypothèse nulle que les deux vraies pentes ont une différence nulle (ie $a_1 = a_2$) :

$$T^{\text{calc}}([f]) = \frac{(A_2 - A_1) - (a_2 - a_1)}{\sqrt{\dfrac{\text{SSE}_1}{n_1\text{V}(x_1)} + \dfrac{\text{SSE}_2}{n_2\text{V}(x_2)}}} = \frac{A_2 - A_1}{\sqrt{\dfrac{\text{SSE}_1}{n_1\text{V}(x_1)} + \dfrac{\text{SSE}_2}{n_2\text{V}(x_2)}}} \tag{5.7.1957}$$

avec :

$$f \cong \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\dfrac{1}{n_i - 2}\sum e_{i,k}^2}{n_i\text{V}(x_i)}\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\left(\dfrac{\dfrac{1}{n_i - 2}\sum e_{i,k}^2}{n_i\text{V}(x_i)}\right)}{n_i - 1}} \tag{5.7.1958}$$

Ce qui est souvent noté par tradition :

$$T^{\text{calc}}(f \cong n_1 + n_2 - 4) \cong \frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}} \tag{5.7.1959}$$

N'oubliez pas (cas très important dans l'application de l'ANCOVA) que si nous travaillons avec les estimateurs, alors $n_i\text{V}(x_i)$ devient $(n_i - 1)\hat{\text{V}}(x_i)$.

5.7.13.5.1.2 Contrastes

Le test F est plutôt peu spécifique. Cela nous donne essentiellement une réponse binaire de type "Oui/Non" à la question : Y a-t-il un effet du traitement ? Cela ne nous dit pas quel traitement spécifique ou quelle combinaison de traitements est spécial. Bien souvent, nous nous posons une question plus spécifique que l'hypothèse nulle globale susmentionnée. Par exemple, nous pourrions souhaiter comparer un ensemble de nouveaux traitements à un traitement témoin ou effectuer des comparaisons par paires entre plusieurs (ou tous) traitements.

En cours de traduction de l'anglais

De nombreuses méthodes de comparaison multiples utilisent l'idée de ce que nous appelons un "contraste". Qu'est-ce que c'est ? Pour introduire ce concept, considérons une ANOVA à un facteur fixe où l'hypothèse nulle H_0 a été rejetée mais où en réalité nous ne savons pas quel niveau de la variable cause la différence qui nous pousse à rejeter l'hypothèse nulle.

Considérons par exemple que nous soupçonnons le niveau parmi les niveaux i, j, k, ... nous soupçonnons que les niveaux i et k sont différents. Par conséquent, nous aimerions tester l'hypothèse :

Considérons par exemple que parmi les niveaux i, j, k, ... nous soupçonnons que les niveaux i et k sont différents. Par conséquent, nous aimerions tester l'hypothèse :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_k \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_k \end{aligned} \tag{5.7.1960}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i - \mu_k = 0 \\ H_1 &: \mu_i - \mu_k \neq 0 \end{aligned} \tag{5.7.1961}$$

Si nous avions soupçonné au début de l'expérience que la moyenne des deux premiers niveaux (considérant une expérience imaginaire avec un facteur ayant 5 niveaux fixes) ne différait pas de la moyenne des deux niveaux les plus élevés, alors l'hypothèse aurait été :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 \\ H_1 &: \mu_1 + \mu_2 \neq \mu_3 + \mu_4 \end{aligned} \tag{5.7.1962}$$

ou :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0 \\ H_1 &: \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \neq 0 \end{aligned} \tag{5.7.1963}$$

En général, un "contraste" est une combinaison linéaire de paramètres de la forme :

$$C = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i \quad \text{où} \quad \sum_i c_i = 0, c_i = \{\pm 1, 0\} \tag{5.7.1964}$$

Remarque

Deux contrastes C_1, C_2 avec coefficients $\{c_i\}$ et $\{d_i\}$, ie :

$$C_1 = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i \qquad C_2 = \sum_{i=1}^{n} d_i \mu_i \tag{5.7.1965}$$

sont dits "contrastes orthogonaux" si et seulement si $\sum c_i d_i = 0$.

Par exemple, $C_1 = \mu - 2\mu_2 + \mu_3$ et $C_2 = \mu_1 - \mu_2$ sont des contrastes orthogonaux puisque $(1)(1) + (-2)(0) + (1)(-1) = 0$.

En cours de traduction de l'anglais

Les deux hypothèses ci-dessus peuvent alors être exprimées en termes de contrastes :

$$\begin{aligned} H_0 &: \sum_i^k c_i\mu_i = 0 \\ H_1 &: \sum_i^k c_i\mu_i \neq 0 \end{aligned} \quad (5.7.1966)$$

Dès lors dans le cas de notre exemple précédent :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0 \\ H_1 &: \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \neq 0 \end{aligned} \quad (5.7.1967)$$

nous avons $c_1 = +1$, $c_2 = +1$, $c_3 = -1$, $c_4 = -1$, $c_5 = 0$.

Les tests d'hypothèses impliquant des contrastes peut se faire de trois manières. Nous n'introduirons ici que celui qui donne au praticien la possibilité de construire un intervalle de confiance. Cette méthode utilise un test T de Student. En effet, écrivons le contraste en termes d'estimateurs :

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^k c_i\bar{y}_{i.} \quad (5.7.1968)$$

comme sous l'hypothèse nulle on devrait avoir (ne pas l'oublier !) :

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^k c_i\bar{y}_{i.} = 0 \quad (5.7.1969)$$

La variance de la somme peut s'écrire :

$$\mathrm{V}(\hat{C}) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^k c_i\bar{y}_i\right) = \sum_{i=1}^k c_i^2\mathrm{V}(\bar{y}_i) \quad (5.7.1970)$$

Si l'hypothèse d'égalité de variance est satisfaite et que le plan est équilibré, nous avons :

$$\mathrm{V}(\mu_i) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.7.1971)$$

Mais avec des estimateurs, nous savons que cela s'écrit :

$$\mathrm{V}(\bar{y}_i) = \frac{S^2}{n} \quad (5.7.1972)$$

et alors :

$$\mathrm{V}(\hat{C}) = \sum_{i=1}^k c_i^2\mathrm{V}(\bar{y}_i) = \sum_{i=1}^k c_i^2\frac{S^2}{n} = \frac{S^2}{n}\sum_{i=1}^k c_i \quad (5.7.1973)$$

Finalement :

$$\frac{C-\mu}{\sigma_C} = \frac{C}{\sqrt{\mathrm{V}(C)}} \quad (5.7.1974)$$

En cours de traduction de l'anglais

devrait suivre une loi normale centrée sous les hypothèses ci-dessus :

$$\frac{C}{\sqrt{\text{V}(C)}} = \mathcal{N}(0,1) \tag{5.7.1975}$$

Mais comme nous travaillons avec des estimateurs, nous savons que nous avons à la place :

$$T(N-k) = \frac{\hat{C}}{\sqrt{\text{V}(\hat{C})}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i \bar{y}_i}{\sqrt{\dfrac{S^2}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i}} \tag{5.7.1976}$$

Cela est parfois noté dans le domaine de l'analyse de la variance :

$$T(N-k) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i \bar{y}_i}{\sqrt{\dfrac{\text{MCE}}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i}} \tag{5.7.1977}$$

Par conséquent, l'intervalle de confiance de $100 \cdot (1-\alpha)$ pourcent sur le contraste $\sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i$ est :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} c_i \bar{y}_i - T_{\alpha/2}(N-k)\sqrt{\frac{S^2}{n}\sum_{i=1}^{k} c_i} \leq \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i \leq \sum_{i=1}^{k} c_i \bar{y}_i + T_{\alpha/2}(N-k)\sqrt{\frac{S^2}{n}\sum_{i=1}^{k} c_i}} \tag{5.7.1978}$$

Il est clair que si cet intervalle de confiance inclut zéro, nous ne pourrions pas rejeter l'hypothèse nulle.

Remarque

Gardez à l'esprit que si vous souhaitez tester par exemple dans le cadre d'une ANOVA $H_0: \ \mu_2 = (\mu_1 + \mu_3)/2$, cela revient donc à écrire et tester le contraste suivant $\sum c_i \mu_i = \mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 = \bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + \bar{y}_3$.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.13.5.2 ANOVA à deux facteurs fixes sans répétitions

Nous allons voir maintenant le concept d'interaction qui est fondamental pour bien comprendre ce qu'il y a derrière l'ANOVA à deux facteurs (fixes), aussi appelée "ANOVA à deux variables catégorielles fixes" ou "plan d'expérience complétement randomisé avec blocs[58], sans et surtout plus tard avec (!) répétitions. Effectivement, c'est principalement avec l'ANOVA à deux facteurs avec répétitions – par construction mathématique - que l'on peut statistiquement (sous certaines hypothèses) étudier objectivement si deux ou plusieurs facteurs interagissent de manière significative ensemble.

Il nous faut donc, avant de passer à la partie mathématique pure, introduire quelques notions !

Définitions (#5.7.147) :

D1. Nous disons qu'il y a "absence d'interaction" quand la moyenne des réponses d'un facteur en fonction de ses niveaux varie de la même amplitude et avec le même signe que la moyenne des réponses d'un autre facteur en fonction de ses niveaux. Nous disons alors que les courbes de réponses dans le diagramme des interactions sont parallèles.

> **Remarque**
>
> Le parallélisme des courbes de réponses est normal en situation d'absence d'interaction, car cela signifie que quel que soit le niveau de l'un ou l'autre des facteurs, la variation (si elle existe) de la réponse sera toujours de la même amplitude. Ce qui est caractéristique de l'indépendance (du moins localement).

D2. Nous disons que deux facteurs sont "en interaction" quand la moyenne des réponses d'un facteur en fonction de ses niveaux ne varie pas de la même amplitude ou/et pas avec le même signe que la moyenne des réponses d'un autre facteur en fonction de ses niveaux. Nous disons alors que les courbes de réponses dans le diagramme des interactions ne sont pas parallèles.

> **Remarque**
>
> L'absence d'interaction est une hypothèse très forte et une observation rare. Souvent, nous avons des interactions ou de fortes interactions.

Pour comprendre le concept, nous aurons recours à de petits exemples sans répétition qui permettront de se faire une idée qualitative du phénomène mais en aucun cas une approche scientifique de l'interaction.

À chaque fois nous visualiserons les situations au moyen de deux types de représentations : un graphique illustrant les effets principaux d'une part et un diagramme des interactions d'autre part.

[58] Comme déjà mentionné, un "bloc" peut être considéré comme un facteur et donc le traitement mathématique est exactement le même !

En cours de traduction de l'anglais

Considérons le petit tableau suivant avec deux facteurs à deux niveaux ("variables explicatives") comportant donc 4 cellules ("variables d'intérêt") :

	Facteur 2	
Facteur 1	Niveau 1	Niveau 2
Niveau 1	3	3
Niveau 2	3	3

TAB. 5.51 – **Premier exemple d'une petite ANOVA à deux facteurs sans répétitions**

Nous aurons comme représentations avec un logiciel comme Minitab :

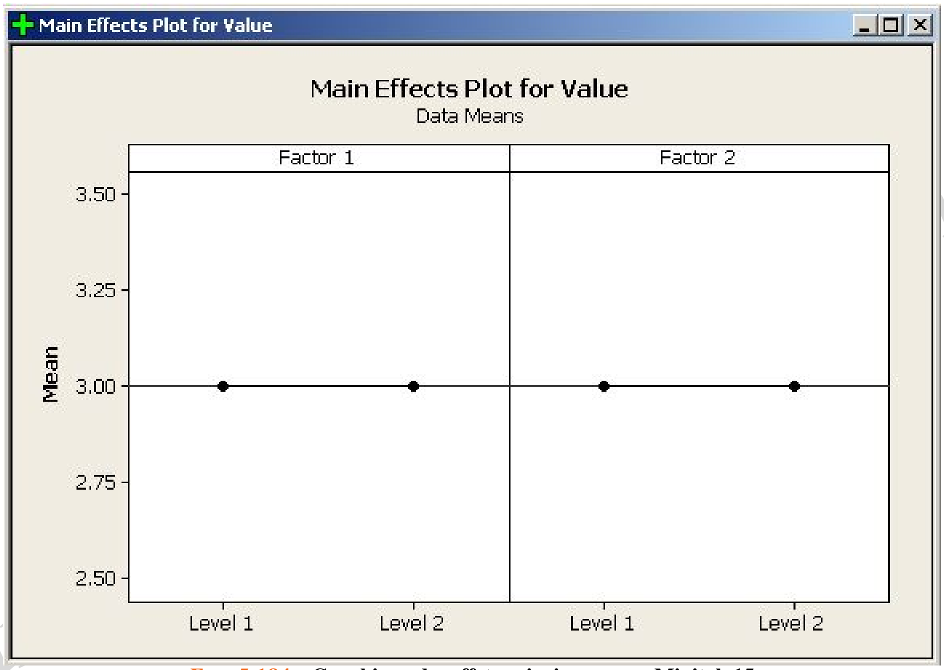


FIG. 5.184 – **Graphique des effets principaux avec Minitab 15**

Nous voyons bien qu'aucun facteur n'a un effet principal sur quoi que ce soit. Ce qui est relativement intuitif étant donné le contenu de tableau précédent.

Le diagramme des interactions (appelé souvent "profileur" dans l'industrie) donne lui :

En cours ... anglais

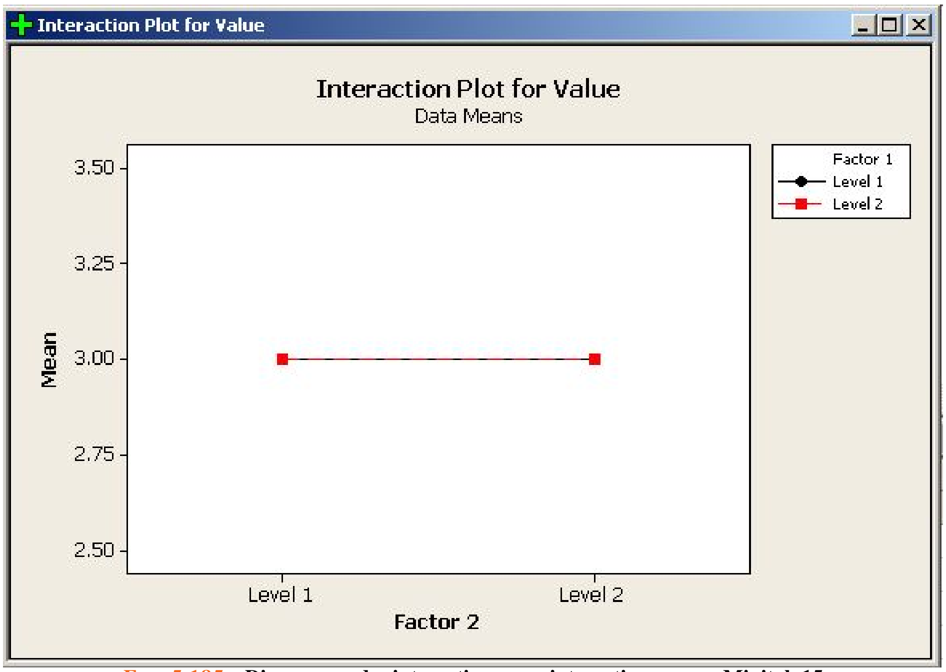


FIG. 5.185 – **Diagramme des interactions sans interactions... avec Minitab 15**

où nous pouvons constater que les facteurs n'interagissent pas entre eux (ou se neutralisent c'est selon...). Nous disons alors qu'il n'y a "(a priori) aucun effet ni aucune interaction (localement)". Au fait dans certaines expériences, l'absence d'interaction est une hypothèse très forte et donc souvent rare. Raison pour laquelle il faut faire attention aux mots choisis lors de l'interprétation des graphiques d'interaction (car ne pas passer par les calculs purs est délicat pour cette étape voire non scientifique !).

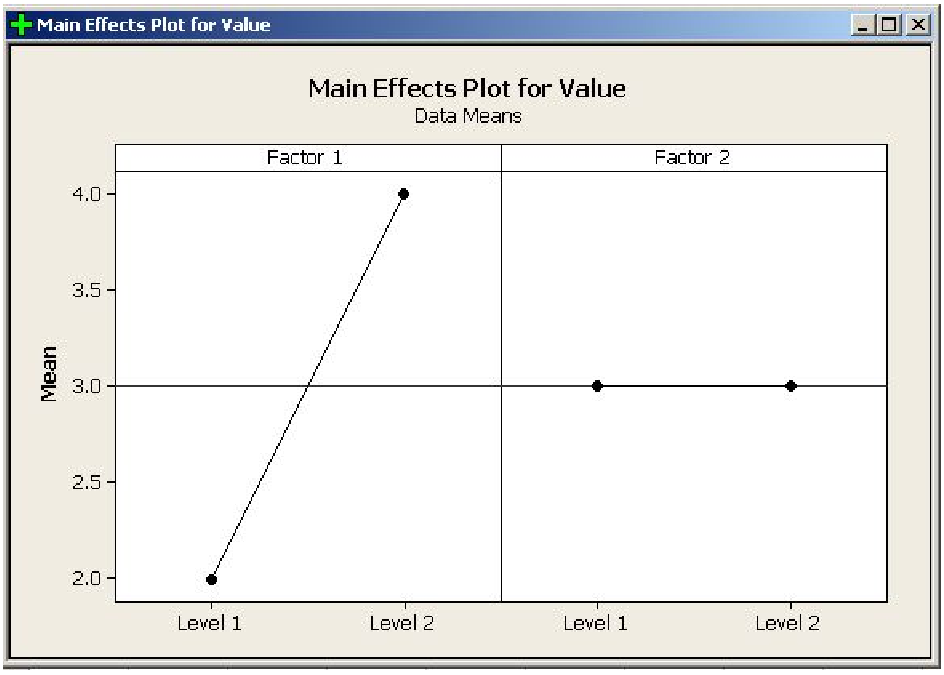
En cours de traduction de l'anglais

Maintenant considérons le tableau suivant :

	Facteur 2	
Facteur 1	Niveau 1	Niveau 2
Niveau 1	2	2
Niveau 2	4	4

TAB. 5.52 – **Second exemple d'une ANOVA à deux facteurs sans répétitions**

Il nous paraît clair que le Facteur 1 à travers la prise en compte de son niveau semble avoir une influence sur la réponse. Mais voyons les différentes représentations :



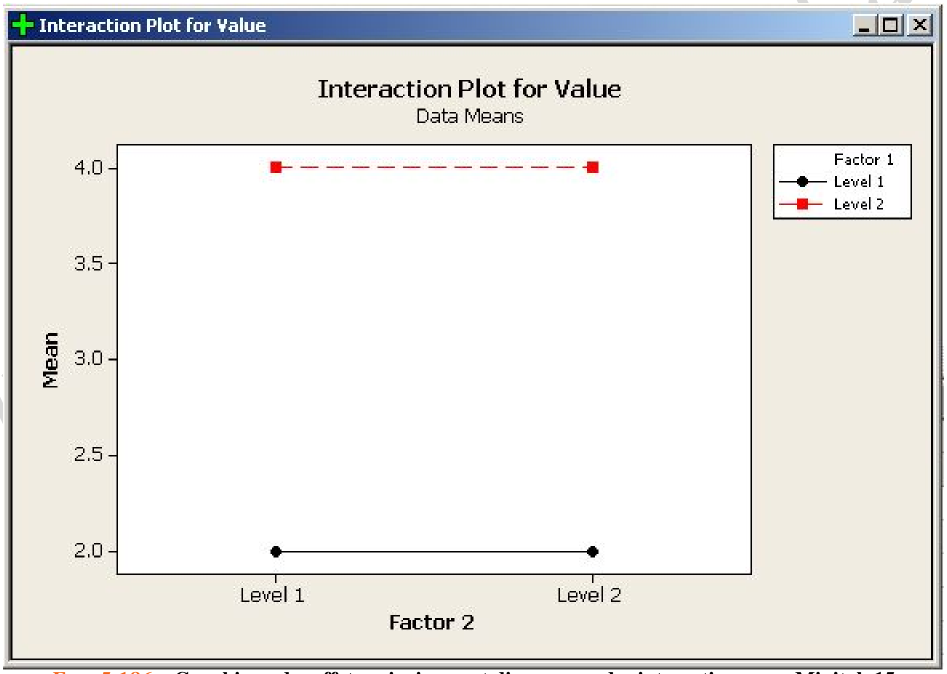


FIG. 5.186 – **Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15**

Détaillons plus le premier graphique comme l'a proposé un lecteur :

Ce graphique comporte 2 parties : celle de gauche analyse les effets du facteur 1 à travers ses 2 niveaux ; celle de droite en fait de même pour le facteur 2.

Examinons de plus près la partie de gauche :

Nous y voyons 2 points reliés par un segment de droite. Ici le premier point, celui pour le niveau 1, est situé à l'ordonnée 2 alors que le deuxième point, celui pour le niveau 2, est situé à l'ordonnée 4. Rappelons-nous maintenant que chaque point représente une moyenne. Ainsi

l'ordonnée du premier point est bien située à la moyenne de $(2+2)/2=2$.

Ceci étant dit et en espérant que cela a aidé à une meilleure compréhension, revenons à nos moutons...

Il apparaît assez clairement dans le graphique du dessus que seul le niveau du Facteur 1 influence la réponse, alors que le Facteur 2 n'influence en rien la réponse. Nous disons alors qu'il y a effet principal (localement) du Facteur 1.

Sur le diagramme des interactions, nous avons la même information, mais sous une forme différente. Nous voyons que quel que soit le niveau du Facteur 2, les réponses sont horizontales et donc que celui-ci n'influence en rien les résultats. Nous sommes alors dans une situation où "(a priori) l'effet principal est (localement) le Facteur 1 et en absence d'interactions entre les facteurs".

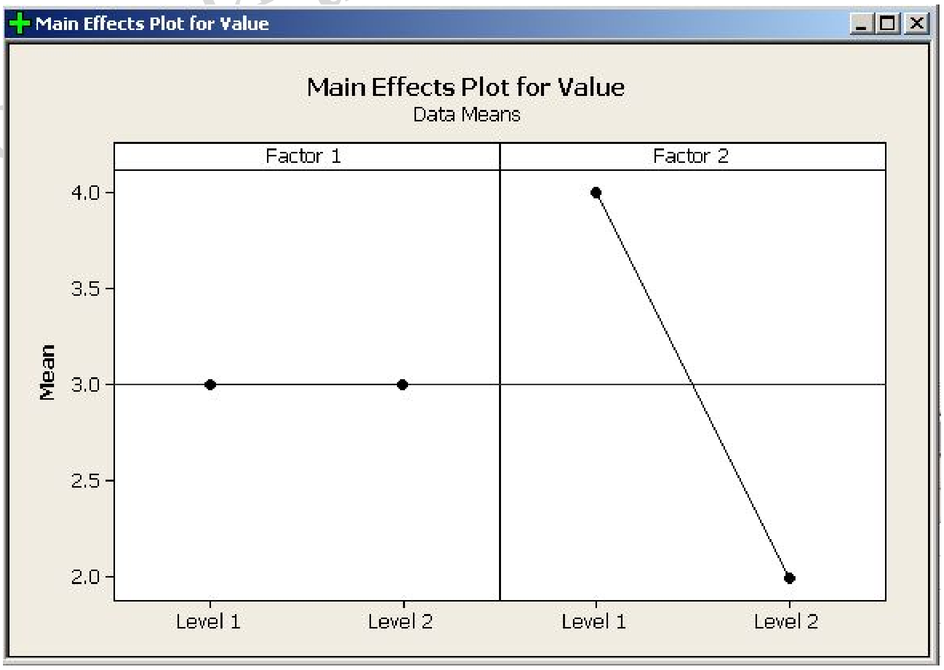
Voyons maintenant le tableau suivant :

	Facteur 2	
Facteur 1	Niveau 1	Niveau 2
Niveau 1	4	2
Niveau 2	4	2

TAB. 5.53 – **Troisième exemple d'une petite ANOVA à deux facteurs sans répétitions**

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons cette fois observer que le Facteur 2 a une influence mais pas le Facteur 1. Mais voyons aussi cela avec nos 2 types de représentations :



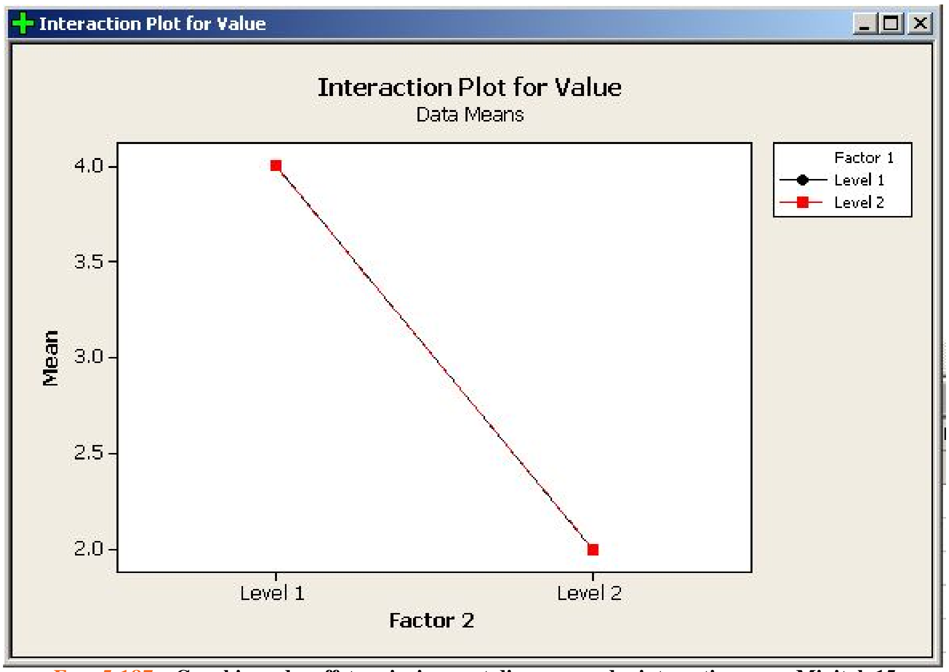


FIG. 5.187 – **Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15**

En cours de traduction de l'anglais

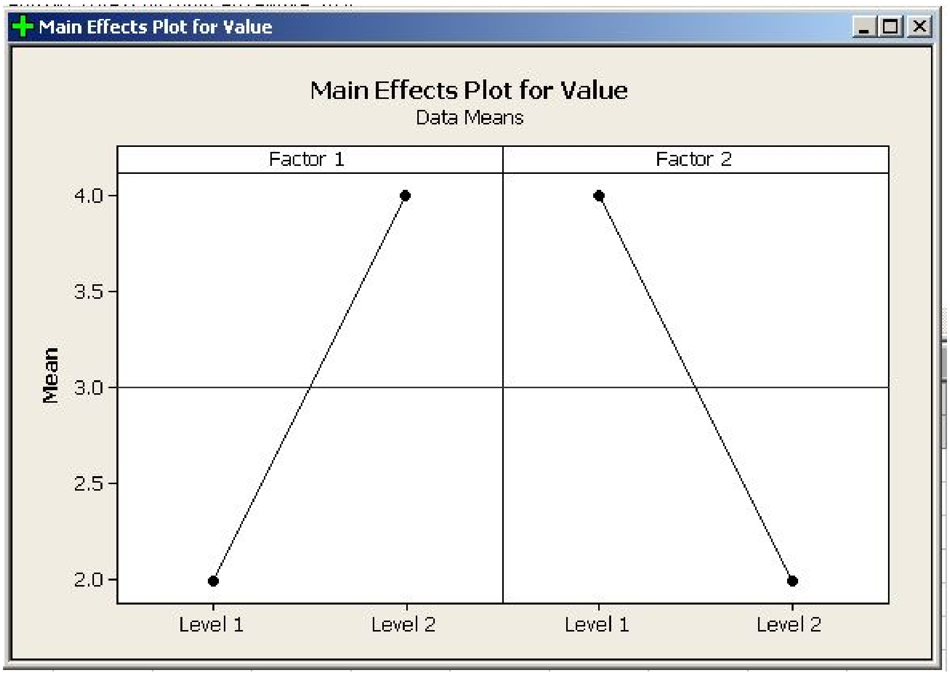
Nous observons bien sur le graphique que le Facteur 1 n'a aucune influence. Sur le diagramme du dessous c'est moins évident mais la superposition des deux droites montre que le Facteur 1 n'a pas d'influence. Nous disons alors qu'il y a "(a priori) effet principal (localement) du Facteur 2 et absence d'interactions entre les facteurs".

Considérons maintenant le tableau suivant :

	Facteur 2	
Facteur 1	Niveau 1	Niveau 2
Niveau 1	3	1
Niveau 2	5	3

TAB. 5.54 – **Quatrième exemple d'une petite ANOVA à deux facteurs sans répétitions**

Nous voyons que les deux facteurs ont une influence sur la réponse. Ce que montrent bien les deux représentations ci-dessous :



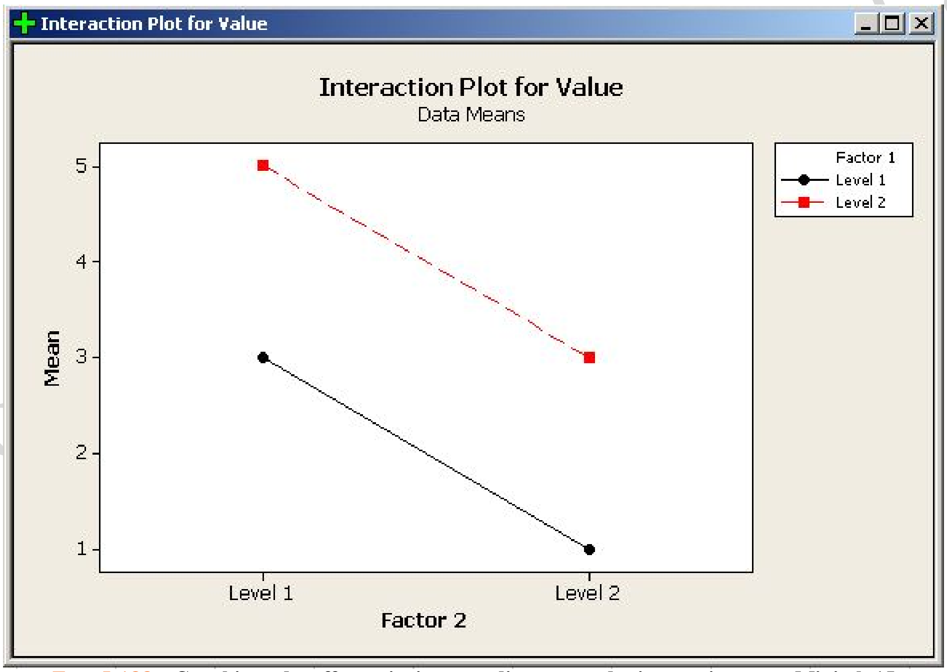


FIG. 5.188 – **Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15**

Nous observons bien sur le graphique du dessus que le Facteur 1 a une influence sur la réponse et qu'il en est de même du Facteur 2 (et en plus de la même amplitude quel que soit le sens !). Sur le graphique du dessous c'est moins évident mais la même conclusion est valable. Nous disons alors que "(a priori) les deux facteurs sont (localement) significatifs et sans interactions".

Passons au tableau suivant :

	Facteur 2	
Facteur 1	Niveau 1	Niveau 2
Niveau 1	2	4
Niveau 2	4	2

TAB. 5.55 – **Cinquième exemple d'une petite ANOVA à deux facteurs sans répétition**

qui sous cette forme n'est pas trivial à interpréter. Mais avec les représentations nous avons tout de suite des informations plus pertinentes :

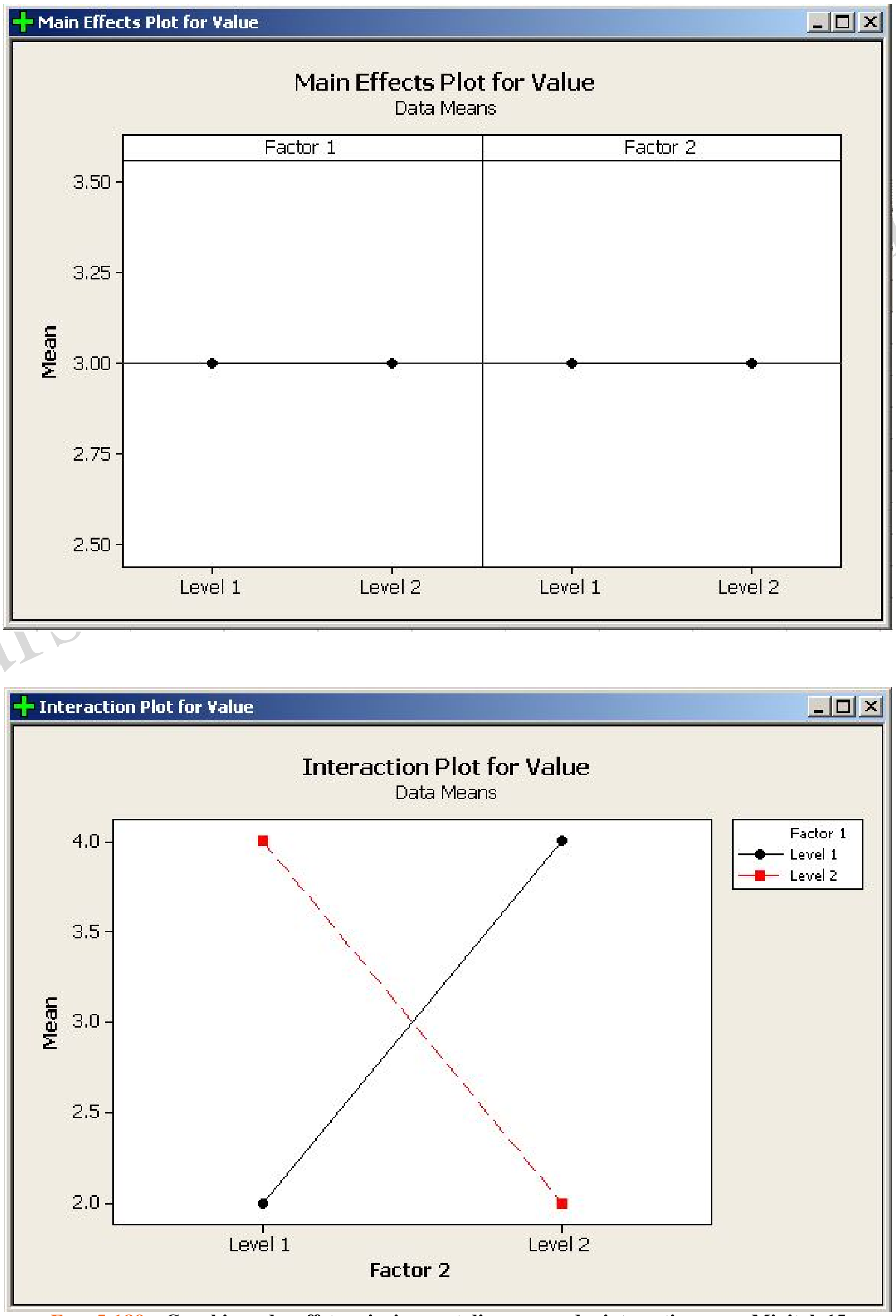


FIG. 5.189 – **Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15**

Nous observons bien sur le graphique ci-dessus qu'aucun des facteurs n'a d'influence sur la réponse a priori (même graphique qu'au tout début avec la même moyenne). Le diagramme du dessous nous donne une information complémentaire par contre (!!!) : Les facteurs ont une influence croisée et comme cette influence croisée est de même amplitude, les effets s'annulent. Nous disons alors que les "(a priori) les deux facteurs sont (localement) en interaction F1 * F2".

Attention ! Il peut arriver qu'une "interaction statistique" comme celle ci-dessus ne signifie pas ce que vous pensez ! En régression, lorsque vous prédisez Y à partir de deux variables (disons, X et Z), nous disons donc qu'elles "interagissent" lorsque le caractère prédictif d'une variable dépend de l'autre. Par exemple, peut-être que X prédit fortement Y lorsque Z est élevé mais terriblement autrement. Dans ce cas, nous pourrions dire que X et Z interagissent pour prédire Y. Nous pourrions considérer un prédicteur (par exemple, Z) comme un interrupteur qui allume ou éteint l'autre variable. Pour que X prédise Y, vous avez également besoin de la bonne combinaison de X et Z. Très important ! Et pour cette raison, les analystes et les data scientists explorent souvent cela en incluant des termes de produits dans leurs régressions :

$$Y = X + Z + X * Z$$

Si $X * Z$ explique la variance unique de Y, c'est le signe que Z et X interagissent. Nous pouvons réorganiser les termes pour raconter l'histoire de cette interaction, mais c'est ainsi que nous la testons généralement. Donc... $X * Z$ est fort et significatif. Cependant... (!!!) vous pouvez également obtenir le même effet dans d'autres cas. Eek ! Pourquoi ? Imaginez que X ait une relation quadratique avec Y, disons :

$$Y = X + X^2$$

Il s'agit simplement d'un cas particulier d'interaction. Donc, dans ce cas, X "se modère lui-même" et cela a du sens : si la relation entre X et Y est non linéaire, elle est plus forte à certains niveaux de X mais plus faible à d'autres. La relation entre X et Y dépend... de X ! Eh bien, si d'autres variables sont en corrélation avec X (par exemple Z), devinez quoi ? Ils pourraient agir de la même manière parce qu'ils détectent cette relation quadratique. Donc, si vous exécutez le "test d'interaction" habituel :

$$Y = X + Z + X * Z$$

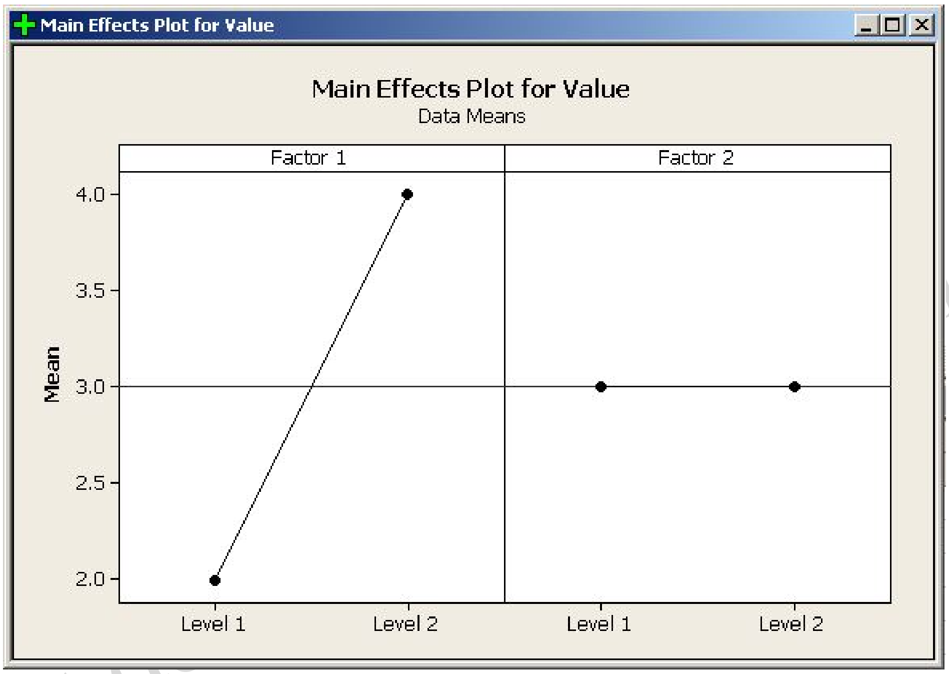
Votre terme peut paraître important car il exploite la relation quadratique que X entretient avec lui-même, que vous n'avez pas vérifiée ! Soyez donc sceptique quant aux interactions, surtout en cas de non-linéarité ! Examinez la linéarité des relations entre vos prédicteurs (un seul à la fois) et votre résultat si vous envisagez de tester les interactions !

Considérons maintenant le tableau suivant :

	Facteur 2	
Facteur 1	Niveau 1	Niveau 2
Niveau 1	1	3
Niveau 2	5	3

TAB. 5.56 – **Sixième exemple d'une petite ANOVA à deux facteurs sans répétitions**

qui, sous cette forme, n'est pas toujours évident à interpréter. Mais avec les schémas, nous avons immédiatement une information plus pertinente :



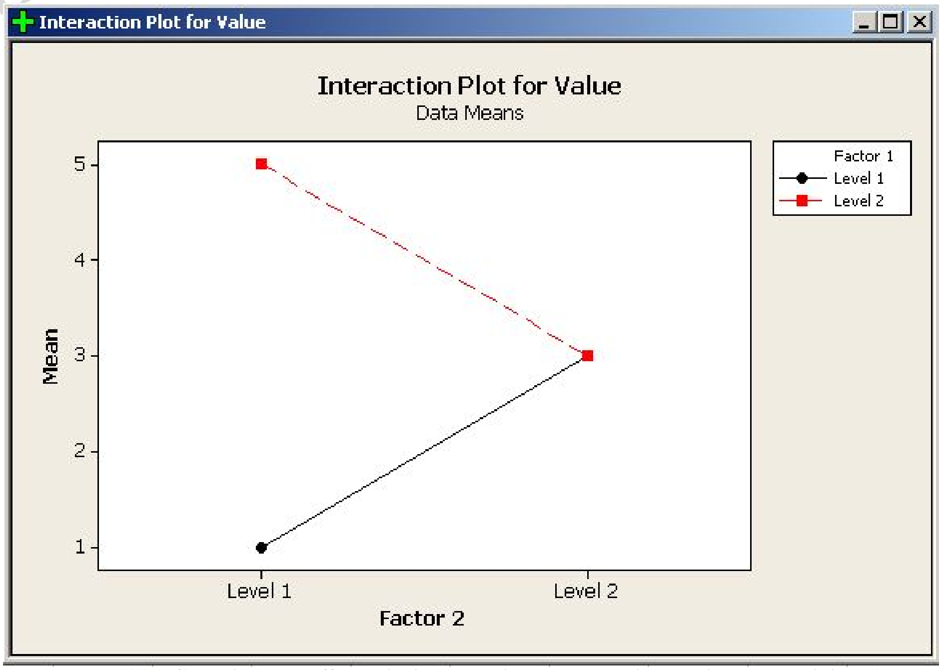


FIG. 5.190 – **Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15**

En cours ... anglais

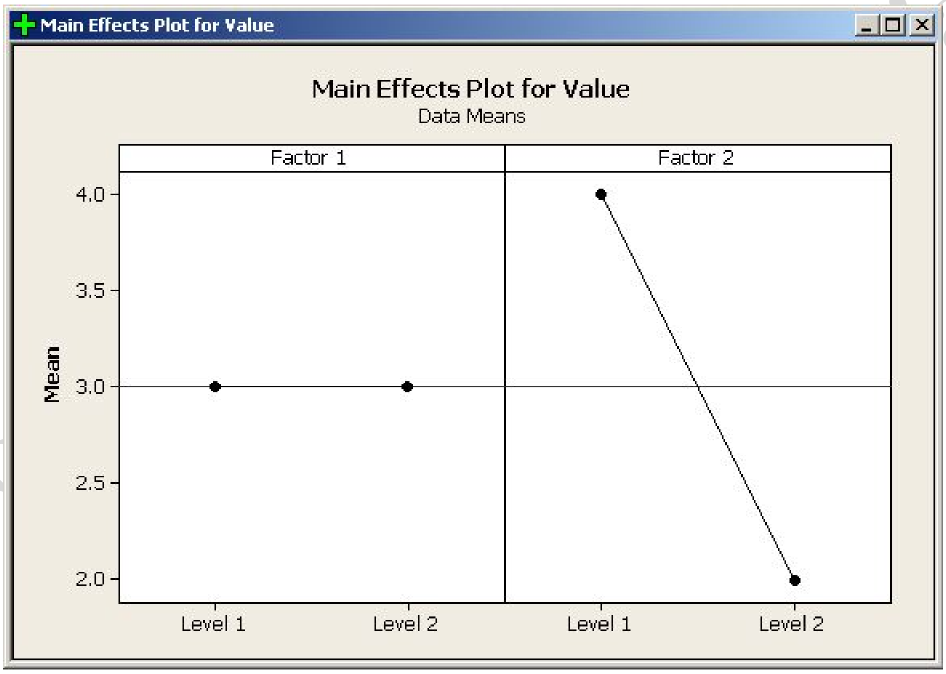
Nous observons bien sur le graphique du dessus que le Facteur 1 semble avoir une influence et que le Facteur 2 non (en moyenne !). Le diagramme des interactions du dessous nous donne, lui aussi, encore une fois, une information complémentaire (! ! !) : C'est que les facteurs sont en interaction. Nous disons alors que nous avons "(a priori) deux facteurs (localement) en interaction F1 * F2 où l'influence du Facteur 1 est significative".

Considérons maintenant le tableau suivant :

	Facteur 2	
Facteur 1	Level 1	Niveau 2
Niveau 1	3	3
Niveau 2	5	1

TAB. 5.57 – **Septième exemple d'une petite ANOVA à deux facteurs sans répétition**

Nous voyons que les deux facteurs ont une influence sur la réponse. Ce que montrent bien les deux représentations ci-dessous :



En cours ... anglais

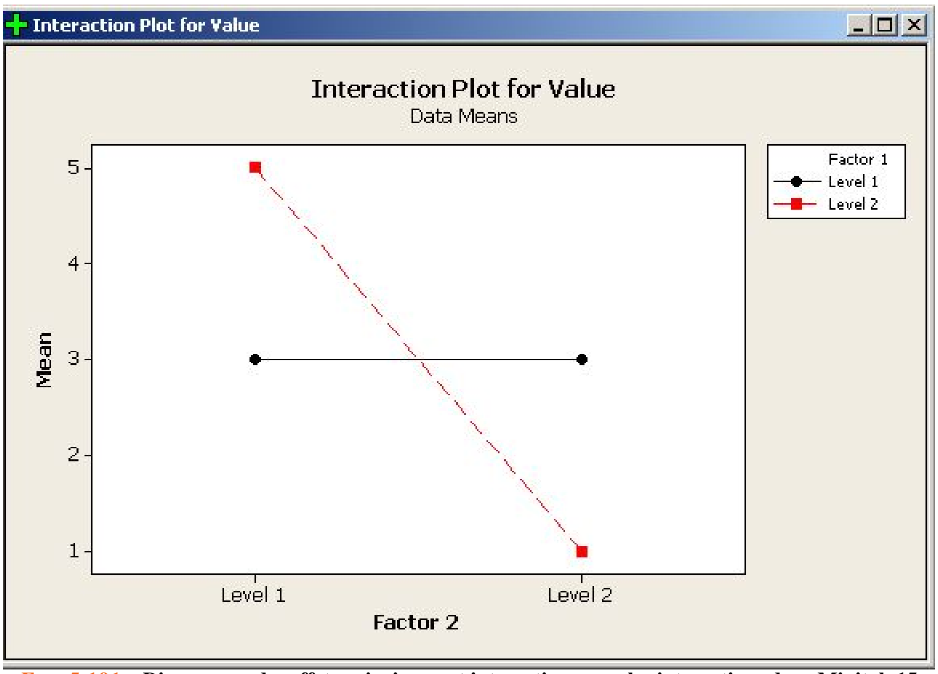


FIG. 5.191 – Diagramme des effets principaux et interactions avec les interactions dans Minitab 15

Nous disons ici que nous avons "(a priori) les deux facteurs (localement) en interaction F1*F2 où l'influence du Facteur 2 est significative".

Et enfin un dernier tableau :

	Facteur 2	
Facteur 1	Level 1	Niveau 2
Niveau 1	1	5
Niveau 2	5	1

TAB. 5.58 – Huitième exemple d'une petite ANOVA à deux facteurs sans répétitions

En cours de traduction de l'anglais

qui nous donne les deux représentations :

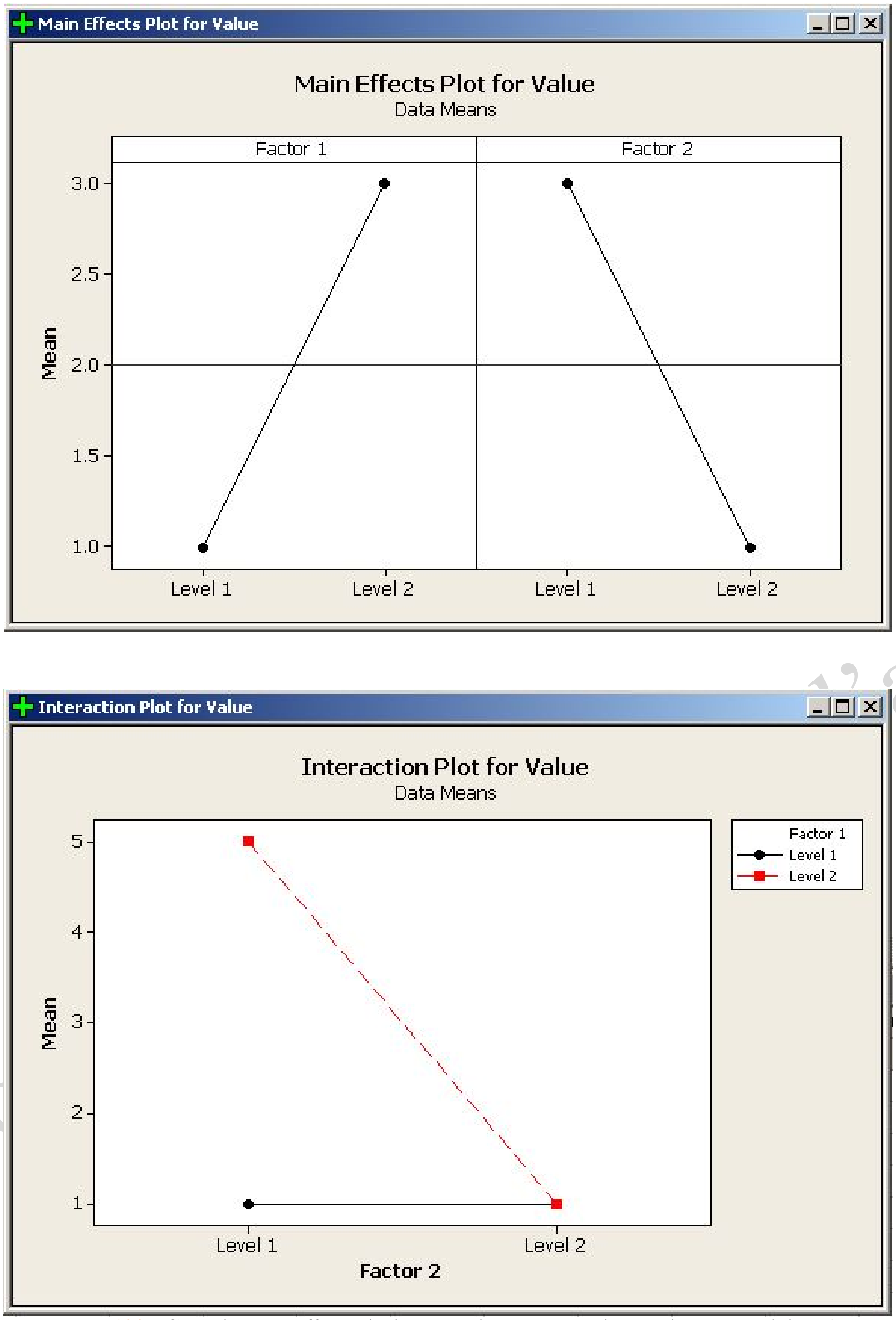


FIG. 5.192 – **Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15**

Nous disons ici que nous avons "(a priori) les deux facteurs (localement) en interaction F1*F2 où l'influence des deux facteurs est significative".

Remarques

R1. Une croyance (communément répandue) de personnes qui manquent d'expérience dans les laboratoires consiste à penser que pour qu'une interaction soit significative il est nécessaire que les facteurs qui la composent le soient également.

R2. Si une interaction est significative, les principaux effets sont objectivement rarement

interprétables !

Après tous ces tableaux, passons à partie mathématique :

Nous avons vu précédemment comment effectuer une analyse de la variance à un facteur. Pour rappel, cela consiste donc à faire un test d'égalité des espérances pour k échantillons indépendants de n variables aléatoires chacun (dans le cas où tous les échantillons ont donc le même nombre de mesures). Chaque échantillon étant considéré comme une expérience sur un sujet différent ou identique considéré alors comme un facteur variable indépendant !

Cependant il arrive dans la réalité que pour chaque échantillon on fasse varier un deuxième paramètre, considéré alors comme un deuxième facteur variable. Nous parlons alors bien évidemment d'analyse de la variance à deux facteurs. De plus, nous allons considérer dans un premier temps pour simplifier les calculs que les variables aléatoires sont indépendantes ! Donc un facteur n'a pas d'influence sur l'autre ! ! ! En d'autres, termes il n'y a pas d'interaction entre les facteurs. Nous parlons alors d'une "ANOVA à deux facteurs sans interactions".

Afin de déterminer la formulation du test à effectuer, rappelons que pour l'analyse de la variance à un facteur, nous avions décomposé la variance totale en la somme de la variance des moyennes (interclasses) et de la variance résiduelle (intra-classes) telle que :

$$Q_T = Q_A + Q_R \tag{5.7.1979}$$

en explicitant le fait que nous comparions les échantillons $i = 1 \ldots k$:

$$\begin{aligned} Q_T &= \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_i\sum_j((x_{ij}-\bar{x}_i)+(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}))^2 \\ &= \sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 + \sum_i\sum_j(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2 + 2\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}) \end{aligned} \tag{5.7.1980}$$

ce qui nous avait donné au final :

$$Q_T = \sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 + \sum_i\sum_j(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2 = Q_R + Q_A \tag{5.7.1981}$$

Pour l'ANOVA à deux facteurs nous partirons du tableau suivant ("Éch." est l'abréviation de "Échantillon") :

	Facteur A				
Facteur B	Éch. 1	Éch. 2	Éch. ...j	Éch. r	
Éch. 1 Éch. 2 Éch. i Éch. k	x_{11} x_{21} $\ldots$ x_{n1}	x_{12} x_{22} $\ldots$ x_{n2}	$\ldots$ $\ldots$ x_{ij} $\ldots$	x_{1r} x_{2r} $\ldots$ x_{kr}	Moyenne $\bar{x}_1$ Moyenne $\bar{x}_2$ Moyenne $\bar{x}_i$ Moyenne $\bar{x}_k$
	Moyenne : $\bar{x}_1$	Moyenne : $\bar{x}_2$	Moyenne : $\bar{x}_j$	Moyenne : $\bar{x}_r$	$\bar{\bar{x}}$

TAB. 5.59 – **Structure typique dite "croisée" d'une analyse de la variance à 2 facteurs sans répétition**

pour lequel dans un laboratoire, le facteur maintenu fixe pendant qu'on fera varier l'autre sera appelé le "facteur bloc" et l'autre sera appelé le "facteur de traitement" et dans la pratique on

En cours de traduction de l'anglais

fera en sorte que ce dernier ne soit pas effectué toujours dans le même ordre afin d'éliminer des éventuels effets d'inertie lors du passage d'un traitement à l'autre (les américains désignent les ANOVA à deux facteurs contrôlés sans interactions sous les termes : "randomized block design" (GRBD)).

Pour la suite, toute l'astuce consiste à décomposer la variance totale en comparant l'espérance des lignes (observations) indexées cette fois-ci avec $i = 1 \ldots k$ et des colonnes (échantillons) indexées avec $j = 1 \ldots r$ par rapport à la moyenne totale telle que :

$$\begin{aligned}Q_T &= \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_i\sum_j\left[(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})+(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})\right]^2\\ &= \sum_{ij}[((\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}))^2+2\left((\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})\right)(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})\\ &+(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})^2]\\ &= \sum_{ij}[(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2+2(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})^2+2((\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}))(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})\\ &+(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})^2]\end{aligned} \quad (5.7.1982)$$

Or, nous avons dans un premier temps :

$$\sum_{ij}2(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}) = 2\underbrace{\sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})}_{=0}\underbrace{\sum_j(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})}_{=0}=0 \quad (5.7.1983)$$

Donc il reste :

$$\begin{aligned}Q_T = &\sum_{ij}[(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})^2+2((\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}))(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})\\ &+(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})^2]\end{aligned} \quad (5.7.1984)$$

Mais nous avons aussi :

$$\begin{aligned}&\sum_{ij}2((\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}))(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})\\ &=2\sum_{ij}((\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}))(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})\\ &=2\sum_{ij}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})+2\sum_{ij}(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})\end{aligned} \quad (5.7.1985)$$

Pour la suite, indiquons d'abord que relativement à notre tableau, nous avons :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}} &= \frac{1}{rk}\sum_{ij}x_{ij}\\ \bar{x}_i &= \frac{1}{r}\sum_i x_i\\ \bar{x}_j &= \frac{1}{k}\sum_j x_j\end{aligned} \quad (5.7.1986)$$

En cours de traduction de l'anglais

Il s'ensuit alors que :

$$\begin{aligned}\sum_{ij}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}}) &= \sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\left(\sum_j x_{ij}-\sum_j \bar{x}_i-\sum_j \bar{x}_j+\sum_j \bar{\bar{x}}\right)\\ &= \sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\left(r\bar{x}_i-\bar{x}_i\sum_j 1-\sum_j\frac{1}{k}\sum_i x_{ij}+\bar{\bar{x}}\sum_j 1\right)\\ &= \sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\left(r\bar{x}_i-\bar{x}_i r-\frac{1}{k}\sum_{ij}x_{ij}+\bar{\bar{x}}r\right)=\sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})(-r\bar{\bar{x}}+\bar{\bar{x}}r)\\ &= \sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\cdot 0=0\end{aligned} \tag{5.7.1987}$$

et il vient alors immédiatement que nous avons de même :

$$\sum_{ij}(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})=0 \tag{5.7.1988}$$

Donc il reste au final :

$$\begin{aligned}Q_T &= \sum_{ij}[(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2+(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})^2+(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})^2]\\ &= \sum_{ij}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{ij}(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})^2\\ &= k\sum_j(\bar{x}_k-\bar{\bar{x}})^2+r\sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2+\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})^2\end{aligned} \tag{5.7.1989}$$

ce que nous noterons dans ce livre de la manière condensée suivante :

$$\boxed{Q_T=Q_A+Q_B+Q_R} \tag{5.7.1990}$$

où Q_A, Q_B sont bien évidemment associés aux effets principaux (comparaison des moyennes marginales avec la moyenne totale).

Donc en comparaison à l'ANOVA à un facteur nous avons un terme supplémentaire pour la variance totale.

Dans l'ordre il est évident que la première somme des écarts par rapport au premier facteur colonne :

$$\sum_{ij}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}}) \tag{5.7.1991}$$

aura au même titre que l'ANOVA à un facteur $k-1$ degrés de liberté. C'est-à-dire que sous les mêmes hypothèses que l'ANOVA à un facteur fixe :

$$\frac{\sum_{ij}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})}{\sigma^2}=\chi^2_{k-1} \tag{5.7.1992}$$

En cours de traduction de l'anglais

La deuxième somme des écarts par rapport au deuxième facteur ligne :

$$\sum_{ij}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}) \tag{5.7.1993}$$

est nouvelle mais cependant on démontre de manière parfaitement identique au premier qu'elle aura $k-1$ degrés de liberté. C'est-à-dire que sous les mêmes hypothèses que l'ANOVA à un facteur fixe :

$$\frac{\sum_{ij}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})}{\sigma^2} = \chi^2_{r-1} \tag{5.7.1994}$$

Pour la troisième somme qui suit obligatoirement aussi une loi du Khi-deux (étant donné que la variance totale suit une loi du Khi-deux et que les deux premiers termes de la somme aussi !) :

$$\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})^2 \tag{5.7.1995}$$

c'est un peu plus délicat... mais il y a une astuce à la sauce physicienne... ! Nous savons de par notre étude de l'ANOVA à un facteur que la somme des degrés de liberté de chaque terme doit être égale au nombre total de degrés de libertés. En d'autres termes, nous devons avoir pour l'ANOVA à deux facteurs :

$$\text{ddl}_T = N - 1 = kr - 1 = (k-1) + (r-1) + ??? \tag{5.7.1996}$$

Donc il manque bien évidemment :

$$??? = kr - 1 - [(k-1) + (r-1)] = kr - 1 - k + 1 - r + 1 = kr - k - r + 1 = (k-1)(r-1) \tag{5.7.1997}$$

Ainsi :

$$\frac{\sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(k-1)(r-1)} \tag{5.7.1998}$$

Nous avons alors le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll} Q_T = \sum_{ij}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 & \text{ddl}_T = N-1 = kr-1 & \text{V}_T = \dfrac{Q_T}{\text{ddl}_T} \\ Q_A = k\sum_{j}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 & \text{ddl}_A = r-1 & \text{V}_A = \dfrac{Q_A}{\text{ddl}_A} \\ Q_B = r\sum_{i}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 & \text{ddl}_B = k-1 & \text{V}_B = \dfrac{Q_B}{\text{ddl}_B} \\ Q_R = \sum_{ij}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})^2 & \text{ddl}_R = (k-1)(r-1) & \text{V}_R = \dfrac{Q_R}{\text{ddl}_R} \end{array} \tag{5.7.1999}$$

Enfin, le reste est exactement le même que pour l'ANOVA à un facteur simplement que nous avons deux tests à effecteur cette fois-ci qui sont :

$$F_{k-1,(k-1)(r-1)} = \frac{\dfrac{Q_A}{k-1}}{\dfrac{Q_R}{(k-1)(r-1)}} \quad \text{et} \quad F_{r-1,(k-1)(r-1)} = \frac{\dfrac{Q_B}{r-1}}{\dfrac{Q_R}{(k-1)(r-1)}} \tag{5.7.2000}$$

En cours de traduction de l'anglais

Le choix ci-dessus semble intuitivement judicieux.

Tous les calculs que nous avons faits précédemment sont très souvent représentés dans les logiciels sous la forme d'une table standardisée dont voici la forme et le contenu (c'est ainsi que le présente Microsoft Excel 11.8346 ou Minitab15.1.1 par exemple) :

Somme des carrés (SCE)	χ^2 ddl	Moyenne des carrés	F	Valeur critique F
$Q_A = k\sum_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$	$k-1$	$\text{MCk}A = \dfrac{Q_A}{k-1}$	$\dfrac{\text{MCk}A}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{k-1,(k-1)(r-1)})$
$Q_B = r\sum_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$	$r-1$	$\text{MCk}B = \dfrac{Q_B}{r-1}$	$\dfrac{\text{MCk}B}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{r-1,(k-1)(r-1)})$
$Q_R = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})^2$	$(k-1)(r-1)$	$\text{MCE} = \dfrac{Q_R}{(k-1)(n-1)}$		
$Q_T = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$	$N-1$	$\text{MCT} = \dfrac{Q_T}{N-1}$		

TAB. 5.60 – **Terminologie et paramètres traditionnels d'un Tableau ANOVA (TAV) à deux facteurs sans répétitions**

et la condition d'acception de l'hypothèse d'égalité des moyennes pour chaque facteur est la même que pour l'ANOVA à un facteur (voir le serveur d'exercice pour un exemple pratique et détaillé avec Microsoft Excel 11.8346).

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons donc deux tests de Fisher permettant chacun de savoir si le facteur A (respectivement B) ont une influence significative ou pas sur les mesures.

Évidemment, dans les développements ci-dessus, les facteurs A et B sont interchangeables dans les développements par symétrie !

Remarque

Le modèle d'effet de facteur correspondant est (notez que le modèle est supposé être purement additif, c'est-à-dire sans interactions !) :

$$\boxed{x_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}} \quad (5.7.2001)$$

avec $i = 1\ldots a$, $j = 1\ldots b$ où μ est la moyenne globale, τ_i est l'effet du i-ème traitement A, β_j est l'effet du j-ème niveau du traitement B (effet principal) et ε_{ij} est l'erreur aléatoire habituelle qui suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Les suppositions sur les termes d'effets sont $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$, $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$.

L'hypothèse d'intérêt est $H_0 : \ \tau_i = 0$ et $H_0 : \ \beta_j = 0$.

On voit que les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle sont $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}}$ et $\hat{\tau}_i = \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}$ et $\hat{\beta}_j = \bar{x}_j - \bar{\bar{x}}$. Dès lors :

$$\hat{x_{ij}} = \bar{\bar{x}} + (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}) = \bar{x}_i + \bar{x}_j - \bar{\bar{x}} \quad (5.7.2002)$$

5.7.13.5.3 ANOVA à deux facteurs fixes avec répétitions

Jusqu'à présent nous avons examiné des ANOVA sur des expériences à un ou deux facteurs fixes (autrement dit : une ou deux variables catégorielles). Dans le cas à deux facteurs, nous avons considéré que pour chaque combinaison de facteurs nous n'avions qu'une seule mesure (cellule). Or, il peut arriver (et c'est préférable) que nous ayons plusieurs mesures pour une combinaison ! Nous qualifions ce type d'étude de "plan expérimental à mesures répétées" et les résultats seront traités avec une analyse de la variance à deux facteurs fixes à mesures répétées (MR-ANOVA) et avec interactions ! Il s'agit d'un outil extrêmement important puisqu'il permet de valider des études menées par plusieurs laboratoires (ou employés) indépendants et il est également associé à de nombreux autres outils statistiques comme celui de l'étude de la reproductibilité et de la répétabilité (Étude R&R) pour ne citer que le plus connu dans le domaine industriel.

Il faut comprendre qu'il est obligatoire dans le domaine de la statistique d'associer les interactions entre facteurs systématiquement lorsque nous avons affaire à une expérience à mesures répétées. Ceci pour la simple raison que le terme mathématique d'interaction n'apparaît que dans cette situation.

Ainsi, il peut être intuitif (avant même de le démontrer) qu'une ANOVA à deux facteurs (fixes) à mesures répétées (les américains désignent les ANOVA à deux facteurs contrôlés avec interactions sour les termes : "generalized randomized block design" (GRBD)) contient une interaction double, et deux effets principaux. Une ANOVA à trois facteurs (fixes) et à mesures répétées aura in extenso une interaction triple, trois interactions doubles et 3 effets principaux. Et ainsi de suite...

Avant de commencer, nous allons considérer le tableau de mesures suivant où l'abréviation "Éch." fait référence au mot "échantillon" :

En cours de traduction de l'anglais

	Facteur A				
Facteur B	Éch. 1	Éch. 2	Éch. ...j	Éch. r	MOYENNE
Éch. 1	x_{111}	x_{112}	$\ldots$	x_{11r}	
Réplication 2	x_{211}	x_{212}	$\ldots$	x_{21r}	
Réplication m	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
Réplication n	x_{n11}	x_{n12}	$\ldots$	x_{n1r}	
Moyenne Éch. 1	$\bar{x}_{11}$	$\bar{x}_{12}$	$\ldots$	$\bar{x}_{13}$	$\bar{x}_{1.}$
Moyenne Éch. 2	x_{121}	x_{122}	$\ldots$	x_{12r}	
Réplication 2	x_{221}	x_{222}	$\ldots$	x_{22r}	
Réplication m	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
Réplication n	x_{n21}	x_{n22}	$\ldots$	x_{n2r}	
Moyenne Éch. 2	$\bar{x}_{21}$	$\bar{x}_{22}$	$\ldots$	$\bar{x}_{2r}$	$\bar{x}_{2.}$
Éch. i	$\ldots$	$\ldots$	x_{1ij}	$\ldots$	
Réplication 2	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
Réplication m	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
Réplication n	$\ldots$	$\ldots$	x_{nij}	x_{nir}	
Moyenne Éch. i	$\ldots$	$\ldots$	$\bar{x}_{ij}$	$\ldots$	$\bar{x}_{i.}$
Éch. k	x_{2k1}	x_{2k2}	$\ldots$	x_{2kr}	
Réplication 2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2r}	
Réplication m	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
Réplication n	x_{nk1}	x_{nk2}	$\ldots$	x_{nkr}	
Moyenne Éch. k	$\bar{x}_{k1}$	$\bar{x}_{k2}$	$\ldots$	$\bar{x}_{kr}$	$\bar{x}_{k.}$
MOYENNE	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	$\bar{x}_{.j}$	$\bar{x}_{.r}$	$\bar{\bar{x}}_{..}$

TAB. 5.61 – Structure typique croisée d'une analyse de la variance à 2 facteurs avec répétition

En cours de traduction de l'anglais

avec les propriétés habituelles des moyennes (pour rappel) :

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{i.} &= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\bar{x}_{ij} = \frac{1}{rn}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}x_{mij}\\
\bar{x}_{.j} &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_{ij} = \frac{1}{kn}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{k}x_{mij}\\
\bar{x}_{..} &= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\bar{x}_{.j} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_{ij} = \frac{1}{krn}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{}\sum_{j=1}^{r}x_{mij}
\end{aligned} \tag{5.7.2003}$$

Et rappelons que pour l'ANOVA à deux facteurs fixes sans réplications (et donc sans interactions), toute l'astuce avait consisté à décomposer la variance totale en comparant la moyenne des lignes indexées avec $i = 1 \ldots k$ et des colonnes indexées avec $j = 1 \ldots r$ par rapport à la moyenne totale.

L'idée va maintenant être à peu près la même à la différence que nous allons comparer l'espérance des lignes indexées avec $i = 1 \ldots k$ et des colonnes indexées avec $j = 1 \ldots r$ non seulement par rapport à la moyenne totale mais aussi à celle de chaque ligne et de chaque colonne.

Pour cela nous repartons de ce que nous avions obtenu pour l'ANOVA à deux facteurs sans

réplication :

$$Q_T = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{ij} (x_i - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{ij} (x_j - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})^2 \quad (5.7.2004)$$

mais dont la notation sera juste adaptée au contexte :

$$Q_T = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 = r\sum_{i} (x_{i.} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 + k\sum_{j} (x_{.j} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 + \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}}_{..})^2 \quad (5.7.2005)$$

Il est évident qu'avec cette écriture l'ANOVA à deux facteurs sans réplication deviendrait :

$$\begin{aligned} Q_T &= \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 \quad \rightarrow \quad Q_T = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 \\ Q_A &= r\sum_{i} (x_i - \bar{\bar{x}})^2 \quad \rightarrow \quad Q_A = r\sum_{i} (x_{i.} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 \\ Q_B &= k\sum_{i} (x_j - \bar{\bar{x}})^2 \quad \rightarrow \quad Q_B = k\sum_{j} (x_{.j} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 \end{aligned} \quad (5.7.2006)$$

Mais dans le cas présent, il nous faut rajouter une sommation pour les réplications et adapter la notation pour les mesures. Donc, sans refaire tous les développements (c'est un peu culotté mais bon...), nous obtenons déjà directement :

$$Q_T = \sum_{mij} (x_{mij} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 = nr\sum_{i} (x_{i.} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 + nk\sum_{j} (x_{.j} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 + \sum_{ijm} (x_{mij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}}_{..})^2 \quad (5.7.2007)$$

où dans l'ordre, m est la réplication de l'échantillon i du facteur A et de l'échantillon j du facteur B.

Il vient alors bien évidemment les variances interclasses pour les facteurs A et B qui sont immédiates :

$$\begin{aligned} Q_A &= nr\sum_{i} (x_{i.} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 \\ Q_B &= nk\sum_{j} (x_{.j} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 \end{aligned} \quad (5.7.2008)$$

où Q_A, Q_B sont bien évidemment encore une fois associées aux effets principaux (comparaisons des moyennes marginales avec la moyenne totale).

Maintenant, nous allons jouer un peu en introduisant sous la somme, en plus et en moins, dans le dernier terme :

$$\sum_{ijm} (x_{mij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}}_{..})^2 \quad (5.7.2009)$$

la moyenne des réplications :

$$\bar{x}_{ij} \quad (5.7.2010)$$

En cours de traduction de l'anglais

que nous retrouverons in fine dans la somme des carrés totale :

$$\begin{aligned}
&\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{\bar{x}}_{..})^2=\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{\bar{x}}_{..}+\bar{x}_{ij}-\bar{x}_{ij})^2\\
&=\sum_{mij}((\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})+(x_{mij}-\bar{x}_{ij}))^2=\sum_{mij}(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})^2\\
&+2\sum_{mij}(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})(x_{mij}-\bar{x}_{ij})+\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{ij})^2\\
&=n\sum_{ij}(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})^2+2\sum_{mij}(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})(x_{mij}-\bar{x}_{ij})+\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{ij})^2
\end{aligned} \tag{5.7.2011}$$

Bien entendu, nous reconnaissons assez vite la variance intra-classes (appelée aussi souvent "erreur résiduelle" ou simplement dans le cas particulier de l'ANOVA à deux facteurs avec répétition "erreur de répétabilité") :

$$Q_R=\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{ij})^2 \tag{5.7.2012}$$

et le terme que nous pouvons interpréter (par comparaison avec l'ANOVA à deux facteurs sans répétitions) comme étant la variance d'interaction :

$$Q_{A\times B}=Q_{A,B}=n\sum_{ij}(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})^2=n\sum_{ij}(\bar{x}_{ij}-\bar{\bar{x}}) \tag{5.7.2013}$$

Mais si notre hypothèse est vérifiée (c'est-à-dire que l'ANOVA est balancée), le terme :

$$2\sum_{mij}(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}}_{..})(x_{mij}-\bar{x}_{ij}) \tag{5.7.2014}$$

doit s'annuler. Vérifions cela :

$$\begin{aligned}
\sum_{mij}(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})(x_{mij}-\bar{x}_{ij})&=\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{ij})(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})\\
&=\sum_i\sum_j\sum_m(x_{mij}-\bar{x}_{ij})(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})
\end{aligned} \tag{5.7.2015}$$

et donc pour i et j fixés il vient :

$$(\bar{x}_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+\bar{\bar{x}})\underbrace{\sum_m(x_{mij}-\bar{x}_{ij})}_{=0}=0 \tag{5.7.2016}$$

Et donc la sommation sur tous les i et j sera aussi nulle par extension. Ceux qui ont un doute quant à l'annulation des deux termes du développement ci-dessus, pourront peut-être se rassurer en faisant une application numérique.

Donc au final :

$$\begin{aligned}
Q_T&=\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{\bar{x}}_{..})^2\\
&=\underbrace{nk\sum_j(x_{.j}-\bar{\bar{x}}_{..})^2}_{Q_A}+\underbrace{nr\sum_i(x_{i.}-\bar{\bar{x}}_{..})^2}_{Q_B}+\underbrace{n\sum_{ij}(x_{mij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{\bar{x}}_{..})^2}_{Q_{A\times B}}+\underbrace{\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{ij})^2}_{Q_R}
\end{aligned} \tag{5.7.2017}$$

En cours de traduction de l'anglais

où pour rappel, n est donc le nombre de réplications, r le nombre d'échantillons du facteur A et k le nombre d'échantillons du facteur B (ces deux derniers paramètres sont souvent confondus par ceux qui font les calculs à la main). Résultat qui est parfois noté sous la forme suivante dans la littérature :

$$\begin{aligned}Q_T &= \sum_{mij} (x_{mij} - \bar{x}_{...})^2 \\ &= nk\sum_j (x_{.j} - \bar{x}_{...})^2 + nr\sum_i (x_{i.} - \bar{x}_{...})^2 + n\sum_{ij} (x_{mij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{...})^2 + \sum_{mij} (x_{mij} - \bar{\bar{x}}_{ij})^2\end{aligned} \tag{5.7.2018}$$

Donc en comparaison à l'ANOVA à deux facteurs sans réplications, nous avons un terme supplémentaire pour la variance totale.

Dans l'ordre il est évident que la première somme des écarts par rapport au premier facteur colonne :

$$\sum_j (x_{.j} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 \tag{5.7.2019}$$

aura au même titre que l'ANOVA à un facteur et l'ANOVA à deux facteurs sans répétition $k-1$ degrés de liberté. C'est-à-dire que sous les mêmes hypothèses que ces deux ANOVA, nous avons :

$$\frac{\sum_j (x_{.j} - \bar{\bar{x}}_{..})^2}{\sigma^2} = \chi^2_{k-1} \tag{5.7.2020}$$

La deuxième somme des écarts par rapport au deuxième facteur ligne :

$$\sum_i (x_{i.} - \bar{\bar{x}}_{..})^2 \tag{5.7.2021}$$

aura sous les mêmes hypothèses la propriété :

$$\frac{\sum_i (x_{i.} - \bar{\bar{x}}_{..})^2}{\sigma^2} = \chi^2_{r-1} \tag{5.7.2022}$$

Grâce au raisonnement effectué à l'aide de l'ANOVA à deux facteurs sans répétition, nous savons que pour le terme d'interaction :

$$\sum_{ij} (x_{mij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}}_{..})^2 \tag{5.7.2023}$$

Nous avons :

$$\frac{\sum_{ij} (x_{mij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}}_{..})^2}{\sigma^2} = \chi^2_{(k-1)(r-1)} \tag{5.7.2024}$$

Il reste à déterminer le nombre de degrés de liberté du dernier terme :

$$\sum_{mij} (x_{mij} - \bar{\bar{x}}_{ij})^2 \tag{5.7.2025}$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour ce faire, nous procédons de la même manière qu'avec l'ANOVA à deux facteurs sans répétitions. Nous savons de par notre étude de l'ANOVA à un facteur que la somme des degrés de liberté de chaque terme doit être égale au nombre total de degrés de liberté. En d'autres termes, nous devons avoir pour l'ANOVA à deux facteurs :

$$\text{ddl}_T = N-1 = nkr-1 = (k-1)+(r-1)+(k-1)(r-1)+??? \tag{5.7.2026}$$

Donc il manque bien évidemment :

$$\begin{aligned}??? &= nkr-1-[(k-1)+(r-1)+(k-1)(r-1)] = nkr-1-k+1-r+1-(kr-k-r+1)\\ &= nkr-1-k+1-r+1-kr+k+r-1 = nkr-kr = N-kr = kr(n-1)\end{aligned} \tag{5.7.2027}$$

Ainsi :

$$\frac{\sum\limits_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{ij})^2}{\sigma^2} = \chi^2_{N-kr} \tag{5.7.2028}$$

Nous avons alors le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll}
Q_T = \sum\limits_{mij}(x_{mij}-\bar{\bar{x}}_{..})^2 & \text{ddl}_T = N-1 = nkr-1 & \text{V}_T = \dfrac{Q_T}{\text{ddl}_T}\\
Q_A = nk\sum\limits_{j}(\bar{x}_{.j}-\bar{\bar{x}}_{..})^2 & \text{ddl}_A = k-1 & \text{V}_A = \dfrac{Q_A}{\text{ddl}_A}\\
Q_B = nr\sum\limits_{i}(\bar{x}_{i.}-\bar{\bar{x}}_{..})^2 & \text{ddl}_B = r-1 & \text{V}_B = \dfrac{Q_B}{\text{ddl}_B}\\
Q_{A\times B} = n\sum\limits_{ij}(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{\bar{x}}_{..})^2 & \text{ddl}_{A\times B} = (k-1)(r-1) & \text{V}_{A\times B} = \dfrac{Q_{A\times B}}{\text{ddl}_{A\times B}}\\
Q_R = \sum\limits_{mij}(x_{mij}-\bar{\bar{x}}_{..})^2 & \text{ddl}_R = N-kr & \text{V}_R = \dfrac{Q_R}{\text{ddl}_R}
\end{array} \tag{5.7.2029}$$

En cours de traduction de l'anglais

Enfin, le reste est exactement le même que pour l'ANOVA à deux facteurs sans réplication simplement que nous avons trois tests à effecteur cette fois-ci qui sont :

$$F_{k-1,N-kr} = \frac{\dfrac{Q_A}{k-1}}{\dfrac{Q_R}{N-kr}} \quad F_{r-1,N-kr} = \frac{\dfrac{Q_B}{r-1}}{\dfrac{Q_R}{N-kr}} \quad F_{(k-1)(r-1),N-kr} = \frac{\dfrac{Q_{A\times B}}{(k-1)(r-1)}}{\dfrac{Q_R}{N-kr}} \tag{5.7.2030}$$

Là encore le choix des ratios est relativement intuitif !

Tous les calculs que nous avons faits précédemment sont très souvent représentés dans les logiciels sous la forme d'une table standardisée dont voici la forme et le contenu (c'est ainsi que le présente Microsoft Excel 11.8346 ou Minitab 15.1.1 par exemple) :

Somme des carrés (SCE)	χ^2 ddl	Moyenne des carrés	F	Valeur critique F
$Q_A = nk\sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}}_{..})^2$	$k-1$	$\text{MCk}A = \dfrac{Q_A}{k-1}$	$\dfrac{\text{MCk}A}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{k-1,Nk-r})$
$Q_B = nr\sum_i (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}}_{..})^2$	$r-1$	$\text{MCk}B = \dfrac{Q_B}{r-1}$	$\dfrac{\text{MCk}B}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{r-1,N-kr})$
$Q_{A\times B} = \sum_{mij} (\bar{x}_{mij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{\bar{x}}_{..})^2$	$(k-1)(r-1)$	$\text{MCk}AB = \dfrac{Q_{A\times B}}{(k-1)(n-1)}$	$\dfrac{\text{MCk}AB}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{(k-1)(n-1),N-kr})$
$Q_R = \sum_{mij} (\bar{x}_{mij} - \bar{x}_{ij})^2$	$N-kr$	$\text{MCE} = \dfrac{Q_R}{N-kr}$		
$Q_T = \sum_{mij} (x_{mij} - \bar{\bar{x}}_{..})^2$	$N-1$	$\text{MCT} = \dfrac{Q_T}{N-1}$		

TAB. 5.62 – **Terminologie et paramètres traditionnels d'un Tableau ANOVA (TAV) à deux facteurs avec répétition**

et la condition d'acception de l'hypothèse d'égalité des moyennes pour chaque facteur est la même que pour l'ANOVA à un facteur (voir le serveur d'exercice pour un exemple pratique et détaillé avec Microsoft Excel 11.8346).

Nous avons donc trois tests de Fisher permettant chacun de savoir si le facteur A (respectivement B ou l'interaction AB) ont une influence significative ou pas sur les mesures.

Évidemment, dans les développements ci-dessus, les facteurs A et B sont interchangeables dans les développements par symétrie !

de l'anglais

Remarque

Le modèle d'effet de facteur correspondant est (notez que le modèle n'est pas purement additif !) :

$$x_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (5.7.2031)$$

avec $i = 1\ldots a$, $j = 1\ldots b$, $k = 1\ldots n$ où μ est la moyenne globale, τ_i est l'effet sur le i-ème traitement de A, β_j est l'effet du j-ème niveau de traitement de B (effets principaux), $(\tau\beta)_{ij}$ est l'effet de l'interaction entre τ_i et β_j, et ε_{ijk} est l'habituelle erreur aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,\sigma_\varepsilon^2)$.

Les suppositions sur les termes d'effets sont $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$, $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$, $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = 0$ pour $j = 1\ldots b$ et $\sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij} = 0$ pour $i = 1\ldots a$.

Les hypothès d'intérêt sont quant à elles $H_0:\ \tau_i = 0$, $H_0:\ \beta_j = 0$ or $H_0:\ (\tau\beta)_{ij} = 0$.

En

5.7.13.5.4 ANOVA multifactorielle à mesures répétées

"L'ANOVA multifactorielle à mesures répétées" ou appelée aussi "ANOVA multifactorielle à variables catégorielles et mesures répétées" (et très rarement "ANOVA équilibrée") est simplement le nom sous lequel les spécialistes désignent les ANOVA suivantes :

- ANOVA à trois facteurs (fixes) avec ou sans répétition
- ANOVA à quatre facteurs (fixes) avec ou sans répétition
- ANOVA à cinq facteurs (fixes) avec ou sans répétition
- etc.

Évidemment, les ANOVA à un et deux facteurs (fixes) font aussi partie de la famille de l'ANOVA multifactorielle mais elles sont rarement signalées en tant que tel dans les logiciels de statistiques et sont souvent disponibles de façon explicite dans les menus de ces mêmes logiciels (car ce sont les deux plus utilisées dans les écoles). Il faut savoir aussi que la majorité des logiciels de statistiques gèrent des ANOVA multifactorielles jusqu'à 15 facteurs fixes (variables catégorielles) à condition que le plan soit équilibré (c'est à dire que pour chaque niveau de chaque facteur, il y ait un nombre identique de mesures). Un tableur (comme Microsoft Excel) gère le plus souvent les ANOVA jusqu'à un maximum deux facteurs (fixes).

Bon maintenant le lecteur risque d'être déçu (bon je suis aussi déçu de n'avoir qu'une seule vie...) car franchement je ne souhaite pas refaire les développements vus plus haut pour les ANOVA à un facteur et deux facteurs (fixes) pour 3, 4 et ce jusqu'à 15 facteurs car cela prendrait plus de 100 pages A4 sous une forme pédagogique et claire et en plus c'est basé toujours sur la même mécanique de développement (la théorie généralisée de l'ANOVA bien qu'étant beaucoup plus courte, elle est à mon goût indigeste).

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le praticien (et le lecteur) doit éviter à tout prix de faire la confusion entre L'ANOVA "multifactorielle" qui se réfère à des cas où nous avons plus d'un facteur (ie, variable explicative catégorielle) et l'ANOVA multivariée qui est aussi appelée MANOVA (notez le M initial) qui fait référence aux cas où nous avez plusieurs variables dépendantes / réponses (nous étudierons cette dernière plus loin à la page 1067).

5.7.13.5.4.1 Interlude sur les PCR, PRB, PCRB, PBI, PBBI...

Jusqu'à présent, nous avons vu des ANOVA très courantes. Mais il est temps de discuter de la manière de faire les expériences avant d'aller plus loin. Mais avant il serait utile de faire d'abord un rappel entre deux grands types d'expériences scientifiques !

quote 5.7:1030.#41

> *Consulter le statisticien après la fin d'une expérience, cela revient souvent à lui demander seulement une autopsie. Il peut peut-être dire de quoi l'expérience est morte...*
>
> Ronald Fisher

Définition (#5.7.148) : Les "études observationelles" sont définies comme suit :

- Recueillir des données d'une manière qui n'interfère pas directement avec la façon dont les données sont générées, c'est-à-dire simplement "observer
- Sur la base d'une étude observationnelle, nous ne pouvons établir qu'une **association**, autrement dit une "**corrélation**", entre les variables explicatives et de réponse
- Si une étude observationnelle utilise des données du passé, elle est nommée "étude rétrospective", alors que si les données sont collectées tout au long de l'étude, elle est nommée "étude prospective".

Définition (#5.7.149) : Une "étude expérimentale" est définie comme suit :

- Attribuer au hasard les sujets (individus) à divers traitements
- Peut établir des connexions **causales** entre les variables explicatives et de réponse !

Comme exemple compagnon, considérons que nous voulons évaluer la relation entre un entraînement gymnastique régulier et le niveau d'énergie. Nous pouvons concevoir l'étude comme une étude observationnelle ou une expérience :

- Dans une étude observationnelle, nous échantillonnons deux types de personnes de la population, celles qui choisissent de s'entraîner régulièrement et celles qui ne le font pas. Ensuite, nous trouvons le niveau d'énergie moyen (dans le cas d'une analyse naive !) pour les deux groupes de personnes et comparons.
- Dans une expérience, nous échantillonnons un groupe de personnes de la population et nous répartissons au hasard (dans un cas simple et naif !) ces personnes en deux groupes : ceux qui s'entraîneront régulièrement à la gymnastique tout au long de l'étude et ceux qui ne le feront pas. La différence est que la décision de s'entraîner ou non n'est pas laissée aux sujets comme dans l'étude observationnelle, mais plutôt imposée par le chercheur. À la fin, nous comparons le niveau d'énergie des deux groupes.

En cours de traduction de l'anglais

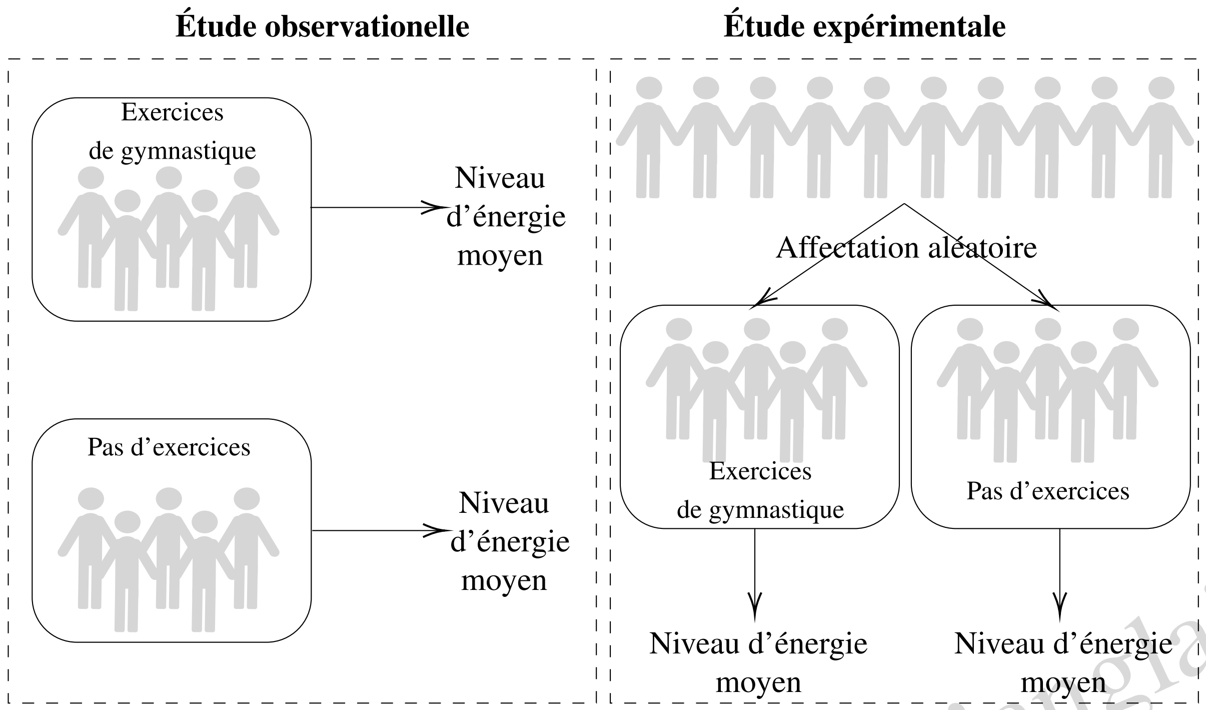
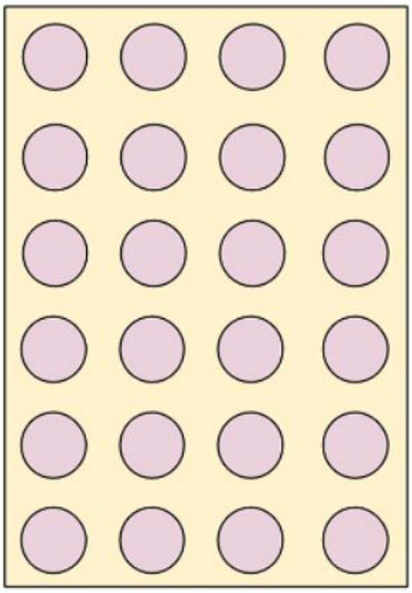


FIG. 5.193 – **Étude expérimentale vs observationnelle**

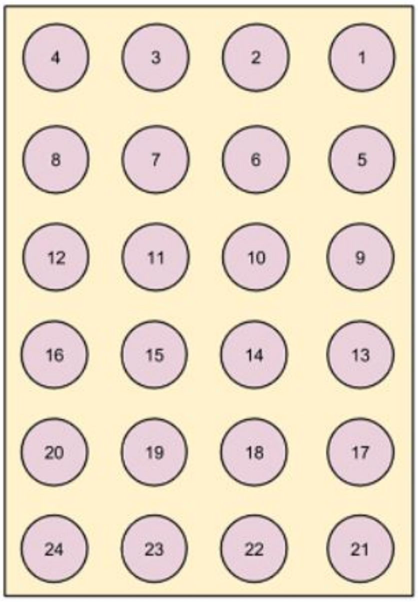
Sur la base de l'étude observationnelle, même si nous trouvons une différence entre les niveaux d'énergie de ces deux groupes de personnes, nous ne pouvons vraiment pas attribuer cette différence uniquement à la pratique de la gymnastique, car il peut y avoir d'autres variables que nous n'avons pas contrôlées (variables de confusion) dans cette étude qui contribuent à la différence observée. Par exemple, les personnes en meilleure forme peuvent être plus susceptibles de s'entraîner régulièrement et ont également des niveaux d'énergie plus élevés. Cependant, dans l'expérience, les variables qui pourraient également contribuer au résultat sont probablement représentées de manière égale dans les deux groupes en raison de l'assignation aléatoire. Par conséquent, si nous trouvons une différence entre les deux moyennes, nous pouvons effectivement faire une déclaration probablement causale attribuant cette différence à l'élaboration.

Dans la pratique, à partir du montage expérimental suivant (une unité expérimentale, 24 unités d'observation) :

En cours de traduction de l'anglais



que nous numérotons comme suit :



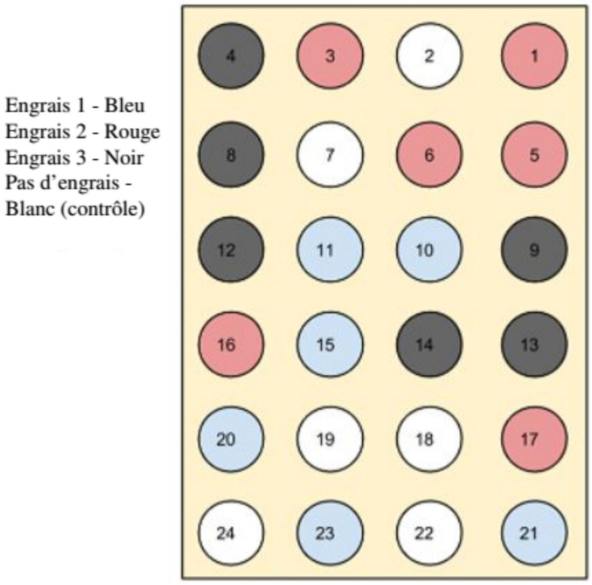
En cours de ... n de l' anglais

nous différencions les configurations suivantes [59] de type de plan d'expérience le plus courant au type le plus rare ou avancé :

- "Plan complétement randomisé" (PCR) :

  Les ANOVA à un facteur (mais pas seulement) sont généralement associées aux PCR car l'idée sous-jacente est de faire des mesures sur des unités expérimentales randomisées pour chaque niveau du facteur, afin d'éviter un biais possible (confusion). Une configuration correspondante typique sera :

[59]Sans tenir compte du fait que pour chacune, il existe une version pour les plans exérimentaux équilibrées et non équilibrées et aussi une version pour les valeurs manquantes

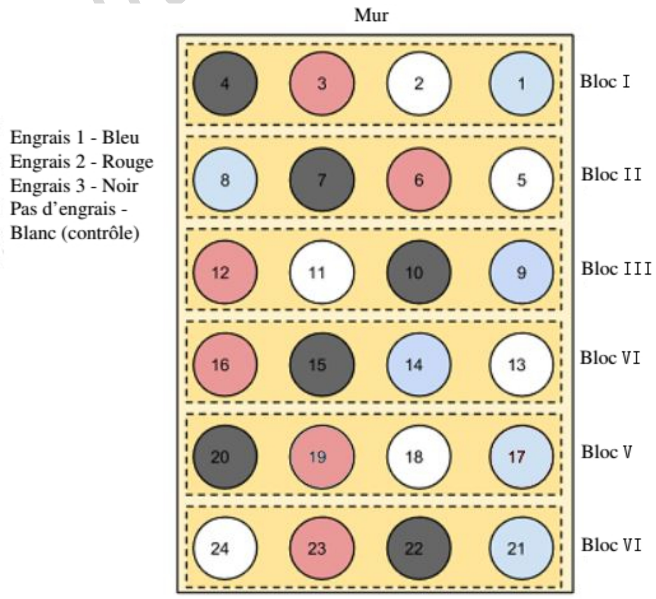


- "Plan randomisé par blocs" (PRB) :

  Lorsqu'un facteur est maintenu fixe, alors que nous varierons les autres, il sera nommé "facteur de blocage[60]" et les autres seront nommés "facteurs de traitement" (certains auteurs désignent l'ANOVA à deux facteurs fixes sans interactions par le nom "plan randomisé par blocs").

  Dans la figure ci-dessous, nous voyons quelques blocs (correspondant généralement à des facteurs difficiles à modifier tels que les jours de la semaine, les observateurs, les terrains, etc.) :

En cours de traduction de l'anglais



En pratique nous allons faire en sorte que la randomisation dans les blocs ne soit pas toujours effectuée dans le même ordre pour éliminer l'inertie potentielle lors du passage d'un traitement aux autres effets (le lecteur peut voir que sur la figure précédente que les

[60] Plus formellement, un bloc est un groupe d'individus appariés qui sont similaires ou identiques sur une variable nuisible.

deux blocs I et V ont la même randomisation). Cela nous a conduit au prochain type de conception.

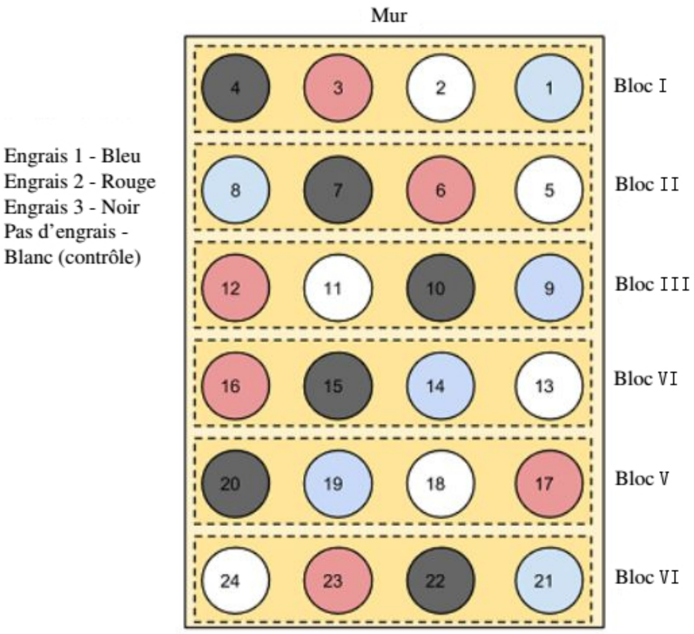
- "Plan complétement randomisé par blocs" (PCRB) :

  Les plans complétement randomisés par blocs (PCRB) utilisent également un schéma de randomisation restreint dans le but de réduire les erreurs qui expliquent les différences entre les observations au sein de chaque traitement. Dans chaque bloc (par exemple les localisations), les traitements sont randomisés dans les unités expérimentales (par exemple, des parcelles de terrain). Cela crée une différence entre les blocs et rend l'observation au sein d'un bloc plus similaire.

  La plan a le terme "complétement" parce que nous voyons l'ensemble complet des traitements dans chaque bloc et qu'il n'y aucun bloc randomisé de manière identique (nous en apprendrons également plus tard sur les conceptions de blocs incomplets où ce n'est plus le cas). Notez que le blocage existe déjà au moment de la randomisation (et pas seulement au moment de l'analyse).

  L'analyse de plans complétement randomisés par blocs est simple. Nous traitons le facteur de blocage comme "un autre" facteur dans notre modèle[61] et il s'agit alors simplement d'une ANOVA à deux facteurs.

  Parce que dans le PCR précédent les blocs I et V avaient une randomisation identique, nous avons maintenant en configuration PCRB :



En cour ... on de l'anglais

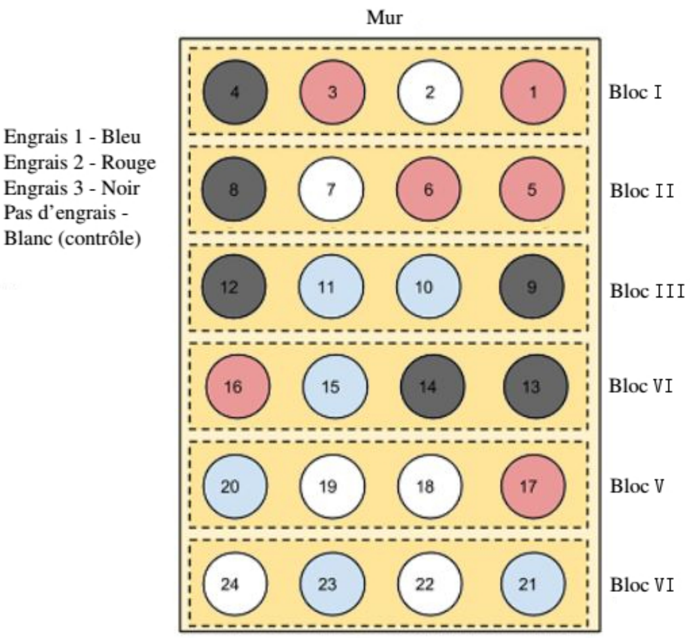
  Donc, si vous êtes en mesure de maintenir les conditions homogènes/ constantes tout au long de vos expériences, le PCR convient parfaitement pour les expériences en laboratoire (les expériences en laboratoire sont généralement menées dans des conditions contrôlées, le test PCR est donc généralement utilisé). Mais si vous avez des ressources comme du temps, de l'espace et des fonds et que vous êtes suffisamment confiant pour neutraliser la variation (erreur) en utilisant une technique de blocs appropriée, optez pour le PCRD pour réduire l'erreur expérimentale.

[61] Nous pouvons également bloquer sur plus d'un facteur. Un cas particulier est le soi-disant Plan Carré Latin

- "Plan par blocs incomplets" (PBI) :

  Certaines expériences peuvent consister en un grand nombre de traitements et il peut ne pas être possible d'exécuter tous les traitements dans tous les blocs. Les plans où seuls certains des traitements apparaissent dans chaque bloc sont donc appelés plans par blocs incomplets.

  Voici un exemple où nous pouvons voir que dans certains blocs, certains traitements n'apparaissent jamais :

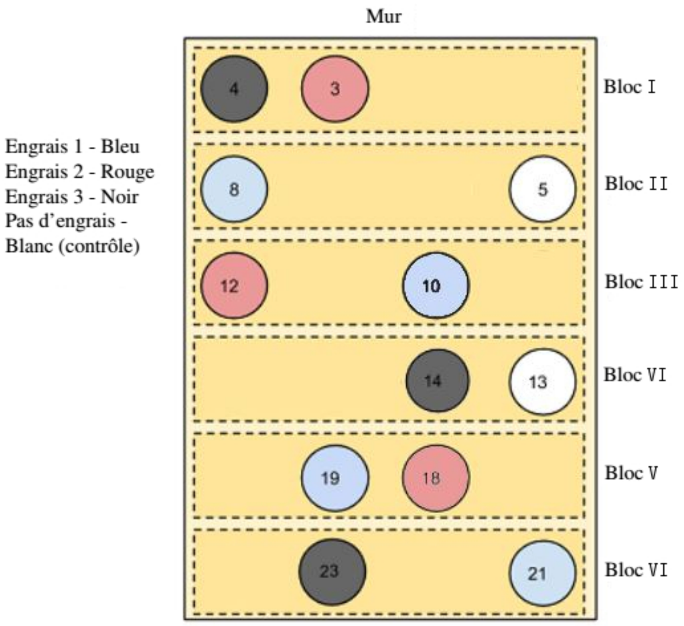


- "Plan par blocs balancés" (PBB) :

  Dans une telle configuration, chaque bloc est sélectionné de manière équilibrée de sorte que toute paire de traitements se produise ensemble le même nombre de fois que toutes les autres paires.

  En considérant les quatre traitements de notre exemple précédent, il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons d'en choisir trois parmi quatre :

En cours de traduction anglais



- "Plan randomisé par blocs généralisé" (PRBG) :

  Comme une plan complétement randomisé par blocs (PCRB), un PRBG est randomisé. Au sein de chaque bloc, les traitements sont assignés aléatoirement aux unités expérimentales : cette randomisation est également indépendante entre les blocs. Dans un PCRB (classique), cependant, il n'y a pas de réplication des traitements au sein des blocs. Cette réplication permet l'estimation et le test d'un terme d'interaction dans le modèle linéaire associé.

- Et d'autres comme les PIPB (plans incomplets partiellement balancés), PICB (plans incomplets cycliques balancés), PICBG (plans incomplets cycliques balancés généralisés), etc.

L'assignation aléatoire pure garantit relativement bien que les groupes de traitement et de contrôle auront en moyenne des caractéristiques identiques, mais dans toute allocation aléatoire particulière, les deux groupes différeront sur certaines aspects ! Les méthodes utilisées pour rechercher une meilleure balance comprennent la stratification, l'appariement par paires et la re-randomisation. Malheureusement, certains chercheurs ne contrôlent pas la méthode de randomisation dans leur analyse, ce qui conduit à des tests avec une taille d'échantillon incorrecte et peut entraîner une puissance inférieure à celle d'un tirage au sort pur.

Une façon de contrôler la balance est simplement de faire ce que nous appelons un "test de randomisation". Un test de randomisation est en réalité une famille de tests que nous avons déjà étudié auparavant comme :

- Une série de tests T de Student (voir page 850) de deux groupes pour comparer les moyennes du groupe de traitement et du groupe témoin variable par variable (au moins celles connues...) et vérifier que la conclusion de l'étude reste la même ou non.

- Une série de tests T de Student appariés (voir page **??**) de deux groupes pour comparer les moyennes du groupe de traitement et du groupe témoin sachant qu'ils sont corrélés et

En cours de traduction de l'anglais

faire cela variable par variable (au moins les connues...) et vérifier que la conclusion de l'étude reste la même ou non.

- Une série de tests de la médiane (voir page 868) de deux groupes pour comparer les médianes du groupe de traitement et du groupe témoin variable par variable (au moins celles connues...) et vérifier que la conclusion de l'étude demeure pareil ou pas.
- Une série d'ANOVA factorielles avec ou sans mesures répétées (voir page 978) pour comparer les moyennes du groupe de traitement et du groupe témoin par ensemble de variables (au moins celles connues...) et vérifier que la conclusion de l'étude reste la même ou non (rappelez-vous que cela équivaut à une régression du type $y = a + b \cdot \text{Treat.} + \varepsilon$ et de tester si $b = 0$).
- ...

Ensuite, nous faisons cela pour 20 variables (toujours celles connues...), trouvons qu'une ou deux sont significatives à un seuil donné, puis disons «*C'est à peu près ce à quoi nous pouvions nous attendre par la chance, il semble donc que la randomisation ait réussi assez bien à générer une balance*». Mais que se passe-t-il si nous constatons 3 ou 4 différences significatives sur un ensemble 20 différences ? Ou que se passe-t-il si aucune n'est significative individuellement, mais que les différences vont toutes dans la même direction ?

Une approche alternative ou complémentaire consiste à tester l'orthogonalité jointe. Pour ce faire, prenons un ensemble X de variables $(x_1, x_2, \ldots, x_{20})$ et exécutons ce qui suit :

$$\text{Trait.} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_{20} x_{20} + \varepsilon$$

Et puis nous testons l'hypothèse jointe $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_{20} = 0$. Nous verrons plus tard dans la section Méthodes Numériques que cela peut être exécuté comme une régression linéaire, avec un test F (voir page **??**) ; ou en probit (voir page **??**), avec un test du χ^2.

Si nous avons plusieurs groupes de traitement, nous pouvons alors exécuter une régression multinomiale logistique (voir page **??**) ou toute autre spécification préférée et tester l'orthogonalité jointe dans ce cadre !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.5.4.2 Interlude sur les ANOVA de Type I, Type II et Type III

Le but de cet interlude est de clarifier la signification des différents types de sommes de carrés (et les idées sous-jacentes) que l'on retrouve dans la plupart des logiciels statistiques dans le contexte de l'analyse de la variance (ANOVA). Pour cela, nous nous placerons dans le cadre de l'ANOVA avec deux facteurs fixes.

En effet, lorsque les données sont déséquilibrées, il existe différentes manières de calculer les sommes des carrés pour l'ANOVA. Il existe au moins 3 approches, communément appelées sommes des carrés de type I, II et III (également appelées "carrés pondérés des moyennes de Yates"). Ces noms semblent avoir été introduits dans le monde des statistiques à partir du progiciel SAS, mais sont depuis des décennies assez répandus. Le type à utiliser a conduit à une controverse permanente. Cependant, il s'agit essentiellement de tester différentes hypothèses sur les données.

Pour introduire ces trois types, considérons donc un modèle d'analyse de la variance à deux facteurs fixes dans lequel :

- Le premier facteur que nous noterons F_1, a J niveaux ($J \geq 2$) qui seront indexés avec la lettre j
- Le deuxième facteur que nous noterons F_2, a K niveaux ($K \geq 2$) qui seront indexés avec la lettre k
- A l'intersection du niveau j de F_1 et du niveau k de F_2, nous réalisons n_{jk} observations ($n_{jk} \geq 1$) d'une variable aléatoire y (et nous supposons cette fois que le plan expérimental n'est pas nécessairement balancé)
- Chaque observation est notée y_{ijk} (avec $i = 1, \ldots, n_{jk}$ et $j = 1, \ldots, J$ et $k = 1, \ldots, K$)
- Nous posons :
  - $n_{j+} = \sum_{k=1}^{K} n_{jk}$ comme la taille marginale de l'échantillon du niveau j de F_1
  - $n_{+k} = \sum_{j=1}^{J} n_{jk}$ comme la taille marginale de l'échantillon du niveau k of F_2
  - $n = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} n_{jk}$ comme le nombre total d'observations (mesures)

En cours de traduction de l'anglais

Introduisons les différentes moyennes partielles empiriques d'observations y_{ijk} :

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{.jk} &= \frac{1}{n_{jk}} \sum_{i=1}^{n_{jk}} y_{ijk} \\
\bar{y}_{.j.} &= \frac{1}{n_{j+}} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_{jk}} y_{ijk} \\
\bar{y}_{..k} &= \frac{1}{n_{+k}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{n_{jk}} y_{ijk} \\
\bar{y}_{...} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_{jk}} y_{ijk}
\end{aligned} \tag{5.7.2032}$$

Considérons maintenant le total de la somme des carrés du modèle, quantité avec comme on le sait $n-1$ degrés de liberté :

$$\text{TSC} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n_{jk}} (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2033}$$

Nous allons tout d'abord à nouveau expliciter la décomposition de la quantité TSC. Pour cela, remarquons d'abord l'égalité suivante :

$$y_{ijk} - \bar{y}_{...} = (y_{ijk} - \bar{y}_{.jk}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}) \tag{5.7.2034}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
(a+b+c+d)^2 &= a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \sum_{l}^{6} \text{DP}_l(abc)
\end{aligned} \tag{5.7.2035}$$

où DP signifie implicitement "(termes) avec double produits". Donc avec notre problème nous avons :

$$(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2=(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})^2+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2+(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})^2+\sum_{l}^{6}\text{DP}_l(ijk) \tag{5.7.2036}$$

Par triple sommation, on obtient :

$$\begin{aligned}\text{TSC}=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2&=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})^2+\sum_{j=1}^{J}n_{j+}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+\sum_{k=1}^{K}n_{+k}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\&+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{jk}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})^2+\sum_{l}^{6}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}\text{DP}_l(ijk)\end{aligned} \tag{5.7.2037}$$

Pour détailler les doubles produits DP_l, rappelons d'abord que si les quantités x_{jk} sont des réels indépendants de i, nous pouvons écrire :

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}x_{jk}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}x_{jk}\left[\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})\right] \tag{5.7.2038}$$

Mais nous savons aussi que :

$$\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})=0 \tag{5.7.2039}$$

Dès lors :

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}x_{jk}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}x_{jk}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})}_{=0}\right]=0 \tag{5.7.2040}$$

Il s'ensuit que les sommes des trois premiers produits doubles (ceux dans lesquels la quantité $(y_{ijk}-y_{jk})$ est en facteur) sont nulles (c'est-à-dire $2ab$, $2ac$, $2ad$). Par contre, les trois autres (c'est-à-dire $2bc$, $2bd$, $2cd$) sont, en général, différents de zéro. Le quatrième ($2bc$) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}\text{DP}_4(ijk)=2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{jk}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...}) \tag{5.7.2041}$$

produit double que nous noterons SDP_1. Les sommes des deux derniers produits doubles ($2bd$ et $2cd$ donc $2d(b+c)$) seront regroupées dans l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\text{DP}_5(ijk)+\text{DP}_6(ijk))&=2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})\left((\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})\right)\\&=2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-2\bar{y}_{...})\end{aligned} \tag{5.7.2042}$$

somme de produits double que nous noterons SDP_2.

Explicitons maintenant les sommes des carrés en introduisant les grandeurs suivantes (nous connaissons les degrés de liberté grâce à notre étude de l'ANOVA à deux facteurs fixes pour rappel !) :

En cours de traduction de l' anglais

- Somme des carrés due au facteur F_1 (quantité à $J-1$ degrés de liberté) :

$$\text{SC}F_1 = \sum_{j=1}^{J} n_{j+}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2043}$$

- Somme des carrés due au facteur F_2 (quantité à $K-1$ degrés de liberté) :

$$\text{SC}F_2 = \sum_{k=1}^{K} n_{+k}(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2044}$$

- Somme des carrés due au facteur due aux interactions des facteurs (quantité à $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté) :

$$\text{SC}F_{1*2} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{jk}(\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2045}$$

- Somme des carrés due aux erreurs (ou résidus, quantité à $n-JK$ degrés de liberté) :

$$\text{SCE} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{ijk}} (y_{ijk} - \bar{y}_{.jk})^2 \tag{5.7.2046}$$

On peut enfin réécrire le total de la somme des carrés sous la forme :

$$\text{TSC} = \text{SC}F_1 + \text{SC}F_2 + \text{SC}F_{1*2} + \text{SCE} + \text{SDP}_1 + \text{SDP}_2 \tag{5.7.2047}$$

Mais le plus souvent écrit :

$$\text{TSC} = \text{SC}F_A + \text{SC}F_B + \text{SC}F_{A*B} + \text{SCE} + \text{SDP}_A + \text{SDP}_B \tag{5.7.2048}$$

Ou explicitement :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 &= \sum_{j=1}^{J} n_{j+}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + \sum_{k=1}^{K} n_{+k}(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{jk}(\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{ijk}}(y_{ijk} - \bar{y}_{.jk})^2 + 2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{jk}(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}) \\ &+ 2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{..k} - 2\bar{y}_{...})\end{aligned} \tag{5.7.2049}$$

Nous savons déjà, à partir de notre dérivation de la somme des carrés de l'ANOVA équilibrée à deux facteurs fixes, que dans le cas équilibré :

$$\text{SDP}_A = \text{SDP}_B = 0 \tag{5.7.2050}$$

En cours de traduction de l'anglais

La décomposition du TSC est alors d'interprétation évidente. En revanche, ce n'est pas le cas des plans déséquilibrés ANOVA pour lesquels ces deux grandeurs sont en général non nulles.

Lorsque les quantités SDP_A et SDP_B sont non nulles, il n'est pas possible de les affecter à une seule source de variation (F_A, F_B ou $F_A \times F_B$). Ceci explique les difficultés rencontrées pour spécifier les sources de variation dans un modèle relatif à un plan déséquilibré. Pour cette raison, un autre raisonnement est utilisé pour préciser ces sources, ce qui explique l'existence de plusieurs types de sommes de carrés, selon la philosophie choisie.

Remarque

Rappelez-vous que évidemment les trois types de somme de carrés que nous allons voir maintenant sont toujours égaux, et surtout égaux à zéro comme nous le savons déjà !

Représentons maintenant le modèle complet par $\text{SC}(A,B,AB)$, soit :

$$\begin{aligned}\text{SC}(A,B,AB)=&\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2=\sum_{j=1}^{J}n_{j+}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+\sum_{k=1}^{K}n_{+k}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\&+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{jk}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})^2\\&+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{ijk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})^2+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{jk}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})\\&+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-2\bar{y}_{...})\end{aligned}\qquad(5.7.2051)$$

D'autres modèles sont représentés similairement par :

$$\begin{aligned}\text{SC}(A,B)=&\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2=\sum_{j=1}^{J}n_{j+}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+\sum_{k=1}^{K}n_{+k}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\&+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{ijk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})^2+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{jk}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})\\&+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-2\bar{y}_{...})\end{aligned}\qquad(5.7.2052)$$

En cours de traduction de l'anglais

indique le modèle sans interaction. Le prochain :

$$\begin{aligned}\text{SC}(B,AB)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 &= \sum_{k=1}^{K} n_{+k}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\ &+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{jk}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})^2\\ &+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{ijk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})^2+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{jk}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})\\ &+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-2\bar{y}_{...})\end{aligned} \tag{5.7.2053}$$

indique le modèle qui ne tient pas compte des principaux effets du facteur A. Nous avons également :

$$\begin{aligned}\text{SC}(A)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 &= \sum_{j=1}^{J} n_{j+}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2\\ &+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{ijk}}(y_{ijk}-\bar{y}_{.jk})^2+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{jk}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})\\ &+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_{jk}}(\bar{y}_{.jk}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-2\bar{y}_{...})\end{aligned} \tag{5.7.2054}$$

et ainsi de suite.

En cours de traduction de l'anglais

L'influence de facteurs particuliers (y compris les interactions) peut être testée en examinant les différences entre les modèles. Par exemple, pour déterminer la présence d'un effet d'interaction, un test F de Fisher des modèles SC(A,B,AB) et le modèle sans interactions SC(A,B) serait effectuée. Il est pratique de définir des sommes incrémentielles de carrés pour représenter ces différences. Comme :

$$\begin{aligned}\text{SC}(AB|A,B)&=\text{SC}(A,B,AB)-\text{SC}(A,B)\\ \text{SC}(A|B,AB)&=\text{SC}(A,B,AB)-\text{SC}(B,AB)\\ \text{SC}(A|B)&=\text{SC}(A,B)-\text{SC}(B)\\ \text{SC}(B|A)&=\text{SC}(A,B)-\text{SC}(A)\end{aligned} \tag{5.7.2055}$$

La notation montre les différences incrémentielles dans les sommes des carrés, par exemple SC$(AB|A,B)$ représente la somme des carrés pour l'interaction après la suppression des effets principaux, et SC$(A|B)$ est la somme des carrés de l'effet principal est la somme des carrés de l'effet principal A après la suppression de l'effet principal B et en ignorant les interactions. Les différents types de sommes de carrés apparaissent alors en fonction du stade de réduction du modèle auquel ils sont effectués. En particulier :

- Les "ANOVA de type I", aussi appelées "somme des carrés séquentielle", sont calculées en utilisant SC(A) pour le facteur A. SC$(B|A)$ pour le facteur B. SC$(AB|B,A)$ pour

l'interaction AB. Ceci teste l'effet principal du facteur A, suivi par l'effet principal du facteur B après l'effet principal A, suivi par l'effet de l'interaction AB après les effets principaux. En raison de la nature séquentielle et du fait que les deux facteurs principaux sont testés dans un ordre particulier, ce type de sommes de carrés donnera des résultats différents pour des données non équilibrées en fonction de l'effet principal considéré en premier [62]. C'est pourquoi les sommes de carrés de type I, dans les plans non-balancés, sont réservées aux modèles dans lesquels il existe un ordre naturel entre les facteurs. Notez que pour le type I, l'effet SC individuel totalise l'effet total SC comme suit :

$$\begin{aligned}\text{SC}(A)+\text{SC}(B|A)+\text{SC}(AB|B,A) &= \text{SC}(A)+[\text{SC}(A,B)-\text{SC}(A)]+[\text{SC}(A,B,AB)-\text{SC}(A,B)]\\ &= \text{SC}(A,B,AB)=\text{TSC}\end{aligned}\tag{5.7.2056}$$

Par conséquent, l'ANOVA de type I est donc sensible à l'ordre des termes. Oubliez ce fait et votre étude est vouée à l'échec ! Mais elle gère les interactions, respecte le principe de marginalité et est assez simple. Il s'agit de l'ANOVA par défaut dans le logiciel statistique R.

- Les "ANOVA de type II" Le sont calculé en utilisant $\text{SC}(A|B)$ pour le facteur A. $\text{SC}(B|A)$ pour le facteur B. Ce type teste chaque effet principal après l'autre effet principal. Notez qu'aucune interaction significative n'est supposée (en d'autres termes, nous devons d'abord tester l'interaction ($\text{SC}(AB|A,B)$ et seulement si AB n'est pas significatif, nous continuons avec l'analyse pour les effets principaux). S'il n'y a effectivement aucune interaction, alors le type II est statistiquement plus puissant que le type III (voir ci-dessous). Notez la propriété importante que le type II est indépendant de l'ordre à l'opposé des autres types. Notez que pour le type II, il est évident que l'effet individuel de la SC ne correspond pas à l'effet total de la CS à l'opposé du type I. En effet :

$$\begin{aligned}\text{SC}(A|B)+\text{SC}(B|A) &= [\text{SC}(A,B)-\text{SC}(B)]+[\text{SC}(A,B)-\text{SC}(A)]\\ &= 2\text{SC}(A,B)-\text{SC}(A)-\text{SC}(B)\\ &= \text{SC}(A)+\text{SC}(B)\neq\text{TSC}\end{aligned}\tag{5.7.2057}$$

  Par conséquent, l'ANOVA de type II est insensible à l'ordre, mais ne prend pas en charge les interactions. Il s'agit de la valeur par défaut du logiciel statistique SAS™.

- Les "ANOVA de type III", aussi appelées "somme marginale des carrés", sont calculées en utilisant $\text{SC}(A|B,AB)$ pour le facteur A. $\text{SC}(B|A,AB)$ pour le facteur B. Ce type teste la présence d'un effet principal après l'autre effet principal et l'interaction. Cette approche est donc valable en présence d'interactions significatives. Cependant, il n'est souvent pas intéressant d'interpréter un effet principal si des interactions sont présentes (d'une manière générale, si une interaction significative est présente, les effets principaux ne doivent pas être analysés ultérieurement). Si les interactions ne sont pas significatives, le type II donne un test plus puissant. Notez également que comme pour le type II, il est évident que l'effet individuel de la SC ne se résume pas à l'effet total de la SC :

$$\begin{aligned}\text{SC}(A|B,AB)+\text{SC}(B|A,AB) &= [\text{SC}(A,B,AB)-\text{SC}(B,AB)]+[\text{SC}(A,B,AB)-\text{SC}(A,AB)]\\ &= 2\text{SC}(A,B,AB)-\text{SC}(B,AB)-\text{SC}(A,AB)\\ &= 2\text{SC}(A,B,AB)-[\text{SC}(B)+\text{SC}(AB)]-[\text{SC}(A)+\text{SC}(AB)]\\ &= \text{SC}(A)+\text{SC}(B)\neq\text{TSC}\end{aligned}\tag{5.7.2058}$$

[62] Cependant dans le cas des plans balancés, le résultat sera le même et nous retombons sur l'ANOVA classique à deux facteurs fixes

En cours de traduction de l'anglais

Par conséquent, l'ANOVA de type III est donc insensible à l'ordre des termes et très flexible, mais peut tout aussi induire en erreur en présence d'interactions disordinales (et parfois ordinales également). Il s'agit de la valeur par défaut du logiciel statistique SAS™.

Remarques

R1. Lorsque les données sont balancées, comme déjà montré ci-dessus, les facteurs sont orthogonaux et les types I, II et III donnent tous les mêmes résultats !

R2. Au début du 21e siècle, les logiciels SAS et SPSS utilisent la SC de type III par défaut, tandis que les fonctions livrées avec le package de base du logiciel R utilisent le type I par défaut. Cela peut conduire à des résultats différents lors de l'analyse des mêmes données avec différents packages de statistiques.

En résumé, l'hypothèse qui nous intéresse porte généralement sur l'importance d'un facteur tout en contrôlant le niveau des autres facteurs. Cela équivaut à utiliser des SC de type II ou III. En général, s'il n'y a pas d'effet d'interaction significatif, alors le type II est plus puissant et suit le principe de marginalité. En cas d'interaction, le type II est inapproprié alors que le type III peut encore être utilisé, mais les résultats doivent être interprétés avec prudence (en présence d'interactions, les principaux effets sont rarement interprétables).

Le sujet est assez controversé depuis des décennies. C'est pourquoi, lorsque cela est possible, il vaudrait mieux éviter les plans non-balancés ou au besoin faire des analyses en comparant les résultat avec les trois types de SC !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.5.5 ANOVA (imbriquée) Hiérarchique (HANOVA)

"L'ANOVA hiérarchique à facteurs fixes" (HANOVA) ou "ANOVA imbriquée avec facteurs fixes", plus souvent appelée "plan imbriqué en deux étapes", consiste à analyser des échantillons où l'un des facteurs de contrôle n'est pas indépendant mais dépend d'un autre facteur de contrôle (c'est pourquoi souvent les débutants hésitent parfois quelque peu dans la pratique entre une ANOVA à deux facteurs et une ANOVA hiérarchique à deux facteurs).

Considérons pour introduire le concept le cas historique de l'ANOVA hiérarchique (agriculture !), deux surfaces complètement indépendantes : la surface d'étude A et la surface d'étude B. Chacune de ces surfaces (nommées traditionnellement "parcelles entières" ou "effet de bloc") est séparée en 4 carrés d'étude distincts (nommés "split-plots" ou "sous-parcelles" ou encore "sous-facteurs") avec 5 répliques pour chacun des carré. Nous avons donc un total de 2 parcelles entières, avec 8 sous-parcelles (surfaces de test) pour un total de 40 individus [63] :

[63] Afin de mieux comprendre la structure des plans split-plot (PSP), il est avantageux de des les visualiser en superposant un PCRB (pour les traitements en split-plot) sur un autre PCRB (pour l'ensemble des traitements). Nous référons à ce type de plan par PSP(PCRB, PCRB). Des variantes de cette forme de plans split-plot sont possibles en utilisant une autre option que les deux PCRB.

Surface d'Étude A

$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$S_4(A)$
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X

Study d'Étude B

$S_1(B)$	$S_2(B)$	$S_3(B)$	$S_4(B)$
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X

TAB. 5.63 – **Illustration d'une ANOVA hiérarchique**

Nous sommes donc dans la situation particulière où les effets des niveaux du facteur du deuxième niveau (carrés) n'ont pas de signification concrète. Par exemple, ces carrés dépendent du niveau du facteur *Surface* considéré et une étude des principaux effets du facteur *Carré* n'est ici pas pertinente !

On peut considérer, par exemple, que le facteur de la parcelle entière représente les fournisseurs, les types de lot d'objet le facteur de la sous-parcelle, et donc pour chaque fournisseur un niveau donné de la sous-parcelle représentera physiquement un lot spécifique pour chaque fournisseur et donc non interchangeable.

Ou un exemple plus courant est le "l'étude gage R&R (Répétabilité et Reproductabilité)". En effet, "l'analyse des systèmes de mesure" (ASM) sont essentiels au succès de toute analyse de données. Si vous ne pouvez pas vous fier à l'outil que vous utilisez pour prendre des mesures, pourquoi vous embêter à collecter des données pour commencer ? Ce serait comme essayer de perdre du poids tout en comptant sur une balance qui ne fonctionne pas. Quel est l'intérêt alors de se peser (même si comme on le sait il est préférable d'avoir de piètres données que pas de données du tout) ?

Dans les études ASM pour des mesures continues (par ex. poids, longueur, volume) utilisant des tests non destructifs, chaque pièce peut être mesurée à plusieurs reprises. Dans ce cas, nous pouvons utiliser la "l'étude gage croisée". Cependant, nous devons parfois effectuer une ASM où le test requis pour prendre la mesure détruit l'objet ou modifie physiquement la caractéristique mesurée.

Supposons à nouveau que nous menions une étude gage R&R pour un test destructif avec 3 opérateurs et 2 répliques par pièce. Mais supposons qu'il ne soit pas possible d'obtenir 6 spécimens qui soient suffisamment similaires pour être considérés comme la même pièce, plutôt que seulement 2 spécimens. Alors, dans ce cas, nous devons utiliser une "étude gage imbriquée".

Donc gardons à l'esprit que :

- Les études R&R croisées sont liées à des mesures non destructives (comme expliqué ci-dessus)
- Les études R&R imbriquées sont liées aux mesures destructives (comme expliqué ci-dessus)

Chaque opérateur mesure un ensemble différent de pièces. Par conséquent, chaque partie est dite "imbriquée" dans l'opérateur plutôt que "croisée" puisque chaque partie est unique à un

En cours de traduction de l'anglais

opérateur. Observons le schéma suivant pour une autre perspective des études croisées par rapport aux études imbriquées :

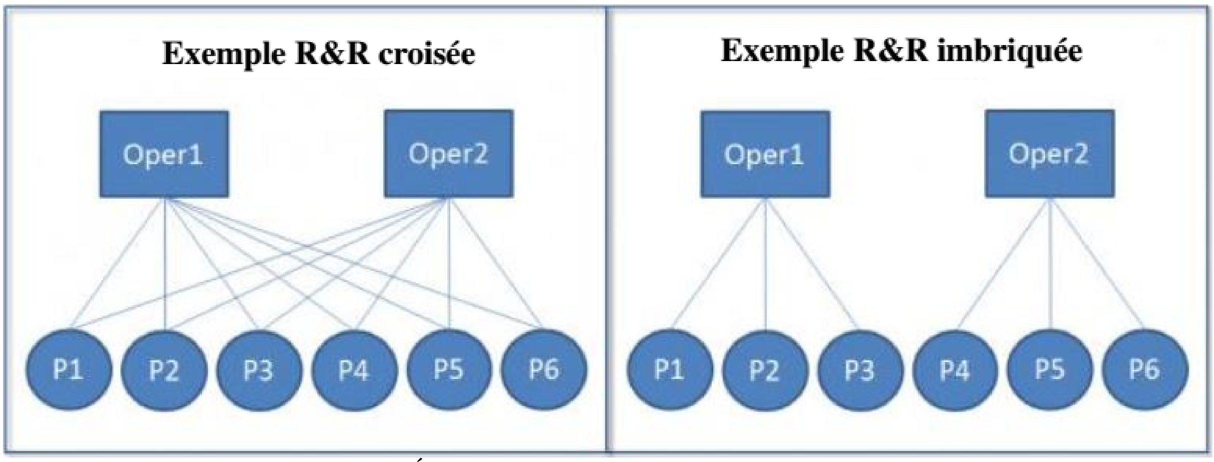


FIG. 5.194 – **Étude gage R&R croisée vs imbriquée (source : Minitab)**

L'étude de gage croisée est associée à une ANOVA à facteur fixe normal, ou à une ANOVA carré latin si les mesures ne sont pas répétées (voir plus bas page 1052) alors que l'étude de gage imbriquée est associée à une ANOVA imbriquée !

Il est habituel de dire que nous avons une "ANOVA splipt-plot à deux facteurs" ou "ANOVA hiérarchique à deux facteurs" car le comportement des carrés n'est pas indépendant de celui des surfaces.

Remarques

R1. Pour différencier facilement une ANOVA à deux facteurs fixes avec une ANOVA imbriquée à deux facteurs fixes, il suffit de noter que physiquement un niveau donné du premier facteur fixe représente le même objet pour chacun des niveaux du second facteur tandis que pour l-ANOVA hiérarchique c'est à chaque fois un objet différent spécifique au facteur sous lequel il se trouve !

R2. Nous avons donné ci-dessus deux exemples avec un seul niveau imbriqué, mais il est possible de développer la théorie pour plusieurs niveaux d'imbrication (un niveau, dans un niveau qui est lui-même dans un niveau, etc.). On parle alors "d'ANOVA hiérarchique multiple".

Une expérience hiérarchique (imbriquée) et l'analyse correspondante doivent d'abord pouvoir nous dire s'il y a une différence significative entre les "parcelles entières" (facteurs contrôlés) et aussi s'il existe une différence significative entre les "sous-parcelles".

Il est important de se rappeler que dans ce type de structure comme chaque niveau d'un facteur n'est présent qu'une seule fois au niveau d'un autre facteur, nous ne pouvons pas estimer les interactions entre les deux. En effet, si l'on considère que le facteur *Surface* est un pays et le carré (sous-parcelle) un lac ... il est alors difficile de déplacer le lac dans un autre pays ... En reprenant notre exemple ci-dessus avec les surfaces ce n'est pas non plus forcément très trivial pour déplacer un carré sur une autre surface...

Remarque

Nous ne pouvons pas utiliser un modèle où les facteurs sont imbriqués sauf si nous avons des répétitions. Dans le cas inverse où les tests ne seraient pas répétés, l'effet dû au facteur imbriqué ne pourra être étudié et le modèle que nous devrons utiliser pour analyser les données sera l'un de ceux exposés dans notre étude de l'analyse de la variance à une voie.

Dans le cas particulier où l'étude statistique de l'ANOVA hiérarchique ne nous permet pas de de mettre en évidence une différence significative entre les carrés (sous-parcelles) de deux surface (parcelles entières), mais en revanche a réussi à mettre en évidence une différence significative entre les deux surface (parcelles entières) cela devrait nous conduire à conclure à une influence environnementale particulière.

En notant $i=1\ldots M$ le nombre de niveaux du facteur principal A, par $j=i\ldots m$ le nombre de niveaux du facteur imbriqué B et par $k=1\ldots n$ le nombre de mesures répétées (donc un total de mesures égal à $M\cdot m\cdot n$) et les moyennes :

$$\begin{aligned}\bar{x}_{...}&=\frac{1}{Mmn}\sum_{ijk}x_{ijk}=\frac{1}{N}\sum_{ijk}x_{ijk}\\ \bar{x}_{i..}&=\frac{1}{mn}\sum_{jk}x_{ijk}\\ \bar{x}_{ij.}&=\frac{1}{Mmn}\sum_{k}x_{ijk}\end{aligned}\tag{5.7.2059}$$

En cours de traduction de l' anglais

et sous les mêmes hypothèses d'utilisation que les ANOVA à une voie ou ou à deux vois vue plus haut (indépendance des erreurs ε_{ijk}, les erreurs ont la même variance, les erreurs suivent une loi Normale), nous écrivons la décomposition de la variance sous la forme :

$$\begin{aligned}Q_T&=\sum_{ijk}(x_{ijk}-\bar{x}_{...})^2=\sum_{ijk}(x_{ijk}-\bar{x}_{...}+\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{i..}+\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{ij.})^2\\ &=\sum_{ijk}((x_{i..}-\bar{x}_{...})+(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.}))^2\\ &=\sum_{ijk}\left((\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2+2(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})\left((\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\right)+((\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.}))^2\right)\\ &=\sum_{ijk}\left(\begin{array}{c}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2+2(x_{i..}-\bar{x}_{...})\left((\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\right)\\ +\left((\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})^2+2(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2\right)\end{array}\right)\\ &=\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2+\sum_{ijk}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})^2+\sum_{ijk}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2\\ &\quad+2\left[\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})\left((\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\right)+\sum_{ijk}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\right]\end{aligned}\tag{5.7.2060}$$

Mais, nous avons :

$$\sum_{ijk}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})=\sum_{ij}\left[(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})\underbrace{\sum_{k}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})}_{=0}\right]=0\tag{5.7.2061}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})\left((\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})+(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\right)&=\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})+\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\\&=\sum_{ik}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})\underbrace{\sum_{j}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})}_{=0}+\sum_{i}\left[(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})\sum_{jk}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})\right]\\&=\sum_{i}\left[(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})\sum_{j}\underbrace{\sum_{k}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})}_{=0}\right]\end{aligned}\tag{5.7.2062}$$

Il reste donc à la fin :

$$\begin{aligned}Q_T&=\sum_{ijk}(x_{ijk}-\bar{x}_{...})^2=\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2+\sum_{ijk}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})^2+\sum_{ijk}(\bar{x}_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2\\&=\underbrace{mn\sum_{i=1}^{M}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2}_{Q_A}+\underbrace{n\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})^2}_{Q_{(A)B}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2}_{Q_R}\end{aligned}\tag{5.7.2063}$$

où les indices de sommation ne sont pas traditionnellement les mêmes que l'ANOVA à deux facteurs avec répétition (mais c'est un détail). Si nous comparons avec la décomposition de la variance de l'ANOVA à deux facteurs (fixes) avec répétition qui était pour le rappel :

$$\begin{aligned}Q_T&=\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{\bar{x}}_{..})^2\\&=\underbrace{nk\sum_{j}(\bar{x}_{.j}-\bar{\bar{x}}_{..})^2}_{Q_A}+\underbrace{nr\sum_{i}(\bar{x}_{i.}-\bar{\bar{x}}_{..})^2}_{Q_B}+\underbrace{n\sum_{ij}(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{\bar{x}}_{..})^2}_{Q_{A\times B}}+\underbrace{\sum_{mij}(x_{mij}-\bar{x}_{ij})^2}_{Q_R}\end{aligned}\tag{5.7.2064}$$

On remarque que la principale différence réside dans le fait qu'on ne s'intéresse pas à la variance de l'interaction des deux facteurs (qui était le but ou disons plutôt une ... contrainte !) et qu'on n'a alors pas eu à la faire apparaître.

Vient maintenant la quête de la détermination des degrés de liberté. Pour Q_T c'est $\text{ddl}_T = Mmn-1$. Pour le terme Q_A (facteur principal), le nombre de degrés de liberté est le même que pour l'ANOVA à une voie ou l'ANOVA à deux facteurs avec/sans répétitions. Soit $\text{ddl}_A = M-1$ degrés de liberté. Pour le terme résiduel, il vient aussi immédiatement que c'est la même chose que l'ANOVA à deux facteurs avec répétitions et donc que $\text{ddl}_R = Mm(n-1) = N - Mm$. Enfin, le terme restant$Q_{(A)B}$ est nouveau, mais on peut facilement déterminer son nombre de degrés de liberté puisqu'il faut avoir :

$$\text{ddl}_T=\text{ddl}_A+\text{ddl}_{(A)B}+\text{ddl}_R\tag{5.7.2065}$$

Dès lors il vient :

$$Mmn-1=(M-1)+\text{ddl}_{(A)B}+Mm(n-1)\tag{5.7.2066}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\text{ddl}_{(A)B}&=(Mmn-1)-(M-1)-Mm(n-1)\\&=Mmn-1-M+1-Mmm+Mm=-M+Mm=M(m-1)\end{aligned}\tag{5.7.2067}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors le tableau suivant pour l'ANOVA hiérarchique (selon la représentation la plus courante dans les logiciels statistiques) que nous commenterons après :

Somme des carrés	χ^2 ddl	Moyennes des carrés	F	F Critique
$Q_A = mn\sum_{i=1}^{M}\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2$ (de la surface/bloc)	$M-1$	$\text{MCk}A=\dfrac{Q_A}{M-1}$	$\dfrac{\text{MCk}A}{\text{MCk}(A)B}$	$P(F>F_{M-1,Mm(n-1)})$
$Q_{(A)B} = n\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})^2$ (de la sous-parcelle dans la parcelle)	$M(m-1)$	$\text{MCk}(A)B=\dfrac{Q_{(A)B}}{M(m-1)}$	$\dfrac{\text{MCk}(A)B}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{M(m-1),Mm(n-1)})$
$Q_R = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2$ (résidus)	$Mm(n-1)$	$\text{MCE}=\dfrac{Q_R}{Mm(n-1)}$		
$Q_T = \sum_{ijk}(x_{ijk}-\bar{x}_{...})^2$ (total)	$Mmn-1$	$\text{MCT}=\dfrac{Q_T}{Mmn-1}$		

TAB. 5.64 – Table de l'ANOVA à facteurs (aléatoires) hiérarchiques

Nous avons donc deux tests de Fisher, tout comme l'ANOVA canonique à deux facteurs fixes ce qui est relativement intuitif. En revanche, ce qui surprend souvent les praticiens, c'est le premier test de Fisher où l'on a :

$$F_{M-1,Mm(n-1)} = \frac{\text{MCk}A}{\text{MCk}(A)B} \tag{5.7.2068}$$

Au lieu de ce que nous aurions pu écrire un peu trop vite :

$$F_{M-1,Mm(n-1)} = \frac{\text{MCk}A}{\text{MCE}} \tag{5.7.2069}$$

Donc ce qu'il faut comprendre ici, c'est qu'il n'y en a pas un qui a raison et l'autre qui est faux ! ! ! ! ! ! ! ! ! Il faut savoir ce qui nous intéresse pour faire le meilleur choix. Ainsi, comparer la variance des blocs avec la variance résiduelle des traitements n'est pas forcément la plus intéressante pour juger de l'égalité des traitements moyens entre eux. C'est pourquoi il vaut mieux comparer la variance des blocs avec la variance des traitements.

Par conséquent, dans la plupart des logiciels statistiques, le tableau ci-dessus est considéré comme le "tableau ANOVA pour les facteurs aléatoires" et le tableau ci-dessous est la version pour les facteurs fixes (au cas où vous auriez vraiment besoin de comparer la variance des blocs avec la variance résiduelle des traitements !) :

Somme des carrés	χ^2 ddl	Moyennes des carrés	F	F critique
$Q_A = mn\sum_{i=1}^{M}\sum_{ijk}(\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{...})^2$ (de la surface/bloc	$M-1$	$\text{MCk}A=\dfrac{Q_A}{M-1}$	$\dfrac{\text{MCk}A}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{M-1,Mm(n-1)})$
$Q_{(A)B} = n\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..})^2$ (de la sous-parcelle dans la parcelle)	$M(m-1)$	$\text{MCk}(A)B=\dfrac{Q_{(A)B}}{M(m-1)}$	$\dfrac{\text{MCk}(A)B}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{M(m-1),Mm(n-1)})$
$Q_R = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2$ (résidus)	$Mm(n-1)$	$\text{MCE}=\dfrac{Q_R}{Mm(n-1)}$		
$Q_T = \sum_{ijk}(x_{ijk}-\bar{x}_{...})^2$ (total)	$Mmn-1$	$\text{MCT}=\dfrac{Q_T}{Mmn-1}$		

TAB. 5.65 – Table de l'ANOVA à facteurs fixes hiérarchiques

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Rappelons que pour une ANOVA à facteurs fixes sans réplications nous avions eu :

$$x_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \tag{5.7.2070}$$

avec $i = 1 \ldots a$, $j = 1 \ldots b$ où μ est la moyenne globale, τ_i est l'effet du $i$ème traitement A, β_j est l'effet du $j$ème niveau de traitement de B (effets principaux) et ε_{ij} est l'erreur aléatoire habituelle qui suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Pour l'ANOVA imbriquée, les β_j seront développés en $\alpha_j + \gamma_{ij}$ et le nouveau modèle peut contenir un terme d'interaction représentant une interaction possible entre le facteur de blocage et les traitements. Ainsi, le modèle d'effet de facteurs peut s'écrire :

$$\boxed{x_{ijk} = \mu + (\alpha_j + \gamma_{ij}) + \tau_k + (\alpha\tau)_{ik} + \varepsilon_{ijl}} \tag{5.7.2071}$$

Maintenant, avant de continuer avec d'autres types majeurs d'ANOVA (en particulier "l'ANOVA avec blocs" et "l'ANOVA en parcelles fractionnées"), donnons sous forme de figure ce que nous avons vu jusqu'à présent et ce que nous verrons juste après :

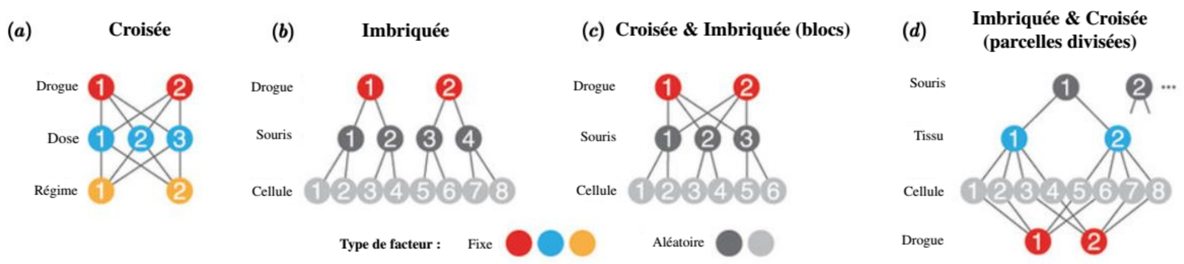


FIG. 5.195 – **Comparaison de différentes structures d'ANOVA majeures**

(*a*) Un plan croisé examine chaque combinaison de niveaux pour chaque facteur fixe

(*b*) Un plan imbriquée peut progressivement sous-répliquer un facteur fixe avec des niveaux imbriqués d'un facteur aléatoire qui sont uniques au niveau dans lequel ils sont imbriqués

(*c*) Si un facteur aléatoire peut être réutilisé pour différents niveaux du traitement, il peut être croisé avec le traitement et modélisé comme un bloc

(*d*) Un plan à parcelles divisées (également appelé "plan mixte") est une structure dans laquelle les effets fixes (tissu, drogue) sont croisés (chaque combinaison de tissu et de drogue sont testés) mais eux-mêmes imbriqués dans des répliques.

Ainsi, dans un modèle ANOVA à plan mixte, un facteur (un facteur à effets fixes) est une variable inter-sujets et l'autre (un facteur à effets aléatoires) est une variable intra-sujets. Ainsi, globalement, le modèle est un type de modèle à effets mixtes.

Remarque

Rappelons que pour une ANOVA à facteurs fixes sans réplications nous avons eu :

$$x_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad (5.7.2072)$$

avec $i = 1 \ldots a$, $j = 1 \ldots b$ où μ est la moyenne globale, τ_i est l'effet du $i$ème traitement A, β_j est l'effet du $j$ème niveau de traitement de B (effet principal) et ε_{ij} et l'erreur alátoire habituelle qui suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Pour les ANOVA imbriquées et croisées, les β_j sont développés en $\alpha_j + \gamma_{ij} + (\alpha\gamma)_{ij}$ ainsi que certains termes d'interactions blocs-traitements. Ainsi, le modèle d'effet de facteurs peut s'écrire :

$$\boxed{x_{ijk} = \mu + (\alpha_j + \gamma_{ij} + (\alpha\gamma)_{ij}) + \tau_k + (\alpha\tau)_{ik} + (\gamma\tau)_{jk} + \varepsilon_{ijl}} \quad (5.7.2073)$$

5.7.13.5.6 ANOVA avec blocs

Avec un "plan randomisé par blocs" (PRB), nous avons une caractéristique des unités d'analyse que nous stratifions (bloquons) puis randomisons dans nos conditions de traitement au sein de chaque bloc. Par exemple, nous pourrions bloquer sur le sexe (homme et femme), puis attribuer au hasard un traitement et une condition de contrôle séparément pour les hommes et les femmes, en assurant l'équilibre entre les blocs dans le nombre attribué à chaque groupe. Dans ce plan, nous avons un facteur (traitement / contrôle) et un bloc (homme / femme). Cette conception contrôle également toute variance associée au bloc (vous ne voudriez utiliser qu'un bloc dont vous avez de bonnes raisons de penser qu'il est associé à la variable dépendante).

Le but du facteur de blocage est de tenir compte d'un facteur de nuisance et/ou de réduire le terme d'erreur utilisé lors de la réalisation du test de significativité de l'effet du traitement. Pour cette raison, la significativité de l'effet de bloc lui-même n'est pas testée, et de multiples comparaisons ne sont pas effectuées entre les blocs fixes. Sinon, une ANOVA bloquée à une voie est analysée comme une ANOVA à deux voies sans interactions et sans réplications. Cela signifie que le tableau ANOVA suivant :

Somme des carrés (SCE)	χ^2 ddl	Moyenne des carrés	F	F Critique
$Q_A = k\sum_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$	$k-1$	$\text{MCk}A = \dfrac{Q_A}{k-1}$	$\dfrac{\text{MCk}A}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{k-1,(k-1)(r-1)})$
$Q_B = r\sum_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$	$r-1$	$\text{MCk}B = \dfrac{Q_B}{r-1}$	$\dfrac{\text{MCk}B}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{r-1,(k-1)(r-1)})$
$Q_R = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})^2$	$(k-1)(r-1)$	$\text{MCE} = \dfrac{Q_R}{(k-1)(n-1)}$		
$Q_T = \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$	$N-1$	$\text{MCT} = \dfrac{Q_T}{N-1}$		

TAB. 5.66 – Table de l'ANOVA à deux facteurs fixes sans répétitions

devient :

En cours de traduction de l'anglais

Sommes des carrés (SCE)	χ^2 ddl	Moyennes des carrés	F	F Critique
$Q_t=k\sum_j(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})^2$ traitements	$k-1$	$\text{MCk}t=\dfrac{Q_t}{k-1}$	$\dfrac{\text{MCk}t}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{k-1,(k-1)(r-1)})$
$Q_b=r\sum_i(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2$ blocks	$r-1$	$\text{MCk}b=\dfrac{Q_b}{r-1}$	$\dfrac{\text{MCk}b}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{r-1,(k-1)(r-1)})$
$Q_R=\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{\bar{x}})^2$	$(k-1)(r-1)$	$\text{MCE}=\dfrac{Q_R}{(k-1)(n-1)}$		
$Q_T=\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2$	$N-1$	$\text{MCT}=\dfrac{Q_T}{N-1}$		

TAB. 5.67 – Table de l'ANOVA à un facteur bloqué

Dans la pratique, il n'est parfois pas facile de décider si les effets de bloc doivent être traités comme des effets aléatoires. Par exemple, les blocs d'une expérience concernant des terrains sont-ils choisis au hasard pour former une population de blocs plus importante ? Ce sont probablement les seuls blocs disponibles pour l'expérience. Si l'expérience est reproduite sur deux ans (mise en place d'un PCRB avec des facteurs de blocage imbriqués), ces années sont-elles sélectionnées au hasard ? Certainement pas, mais le chercheur voudra quand même considérer les années comme "aléatoires". Mais si une année s'avère être une année sèche et l'autre une année pluvieuse, alors nous avons clairement un facteur de blocage intrinsèque à effets fixes. Il existe évidemment de nombreuses variantes de cette discussion et cette question devient donc plutôt philosophique et souvent controversée. Généralement, on préfère faire l'analyse une fois en les considérant comme fixes et une fois comme aléatoires (car c'est très rapide avec un logiciel informatique), et voir si les conclusions sont les mêmes.

En cours de traduction de l'anglais

Pour deux échantillons, une ANOVA bloquée à un facteur équivaut au test T de Student pour deux échantillons appariés !

5.7.13.5.7 ANOVA carré Latin sans répétitions

Une "ANOVA carré latin" est une ANOVA imbriquée à trois facteurs mais avec la subtilité que le troisième facteur imbriqué n'a pas chacun de ses niveaux répétés dans les niveaux des deux premiers mais une seule fois et de telle manière que chacun de ses niveaux n'apparaisse qu'une seule fois à chaque ligne et à chaque colonne du niveau parent :

1	2	3
3	1	2
2	3	1

4	3	1	2
3	4	2	1
1	2	4	3
2	1	3	4

1	2	4	3	5
4	5	2	1	3
3	4	1	5	2
2	3	5	4	1
5	1	3	2	4

FIG. 5.196 – Carrés Latin d'ordre 3, 4 et 5

Le nombre de niveaux de chaque facteur est imposé comme étant en quantité égale, c'est pourquoi il y a le terme "carré" dans les plans "carré latin" ! Le terme "latin" vient du fait qu'aucun terme n'est répété sur la même ligne ou sur la même colonne ! On parle alors logiquement de "plan carré latin équilibré" ou simplement de "plan carré latin" (PCL).

Ainsi, ce plan (attribuée à Leonard Euler en 1783) représente, dans un certain sens, la forme la plus simple d'un plan ligne-colonne car il est utilisée pour comparer K traitements dans K lignes et K colonnes, où les lignes et les colonnes représentent deux facteurs de blocage. Ils ont été proposés comme plan expérimental par Ronald Fisher en 1925, bien que François Cretté De Palluel (1788) ait déjà utilisé l'idée d'un plan de carré latin 4×4 pour une expérience agricole.

Une illustration complète d'un tel plan peut être donnée par l'exemple explicite suivant (typique dans les études croisées Gage R&R sans réplications !) :

	Opérateurs				
Lots	1	2	3	4	5
1	A=24	B=20	C=19	D=24	E=24
2	B=17	C=24	D=30	E=27	A=36
3	C=18	D=38	E=26	A=27	B=21
4	D=26	E=31	A=26	B=23	C=22
5	E=22	A=30	B=20	C=29	D=31

TAB. 5.68 – **Célèbre plan carré latin pour le modèle propulseur de Douglas C.Montgomery**

En cours de traduction de l'anglais

Nous voyons pourquoi les ANOVA carré latin sont relativement rares en pratique car elles supposent que pour chaque objet nous avons le même nombre de combinaisons de tests alors qu'en réalité on pourrait en avoir moins ou plus. De plus, les ANOVA carrés latins sont souvent désignés comme des plans incomplets, ou "plans par blocs incomplets[64]", et donc in extenso économique car si on devait vraiment faire toutes les combinaisons pour un carré latin de dimension n, le nombre de combinaisons totales serait n^3 alors qu'en réalité le carré latin en représente seulement n^2.

Par conséquent, nous pouvons déjà observer que :

1. L'ordre d'exécution des essais est aléatoire
2. Nous avons de nombreux essais (comme l'exemple ci-dessus qui devrait avoir $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ essais s'il était complet)

Notons également que pour une dimension donnée, un carré latin n'est pas unique. En effet le carré latin suivant :

	Cars			
Drivers	1	2	3	4
1	A	B	D	C
2	D	C	A	B
3	B	D	C	A
4	C	A	B	D

est équivalent à celui-là :

[64] Gardez donc à l'esprit qu'il s'agit d'une conception par blocs randomisés dans laquelle chaque traitement n'est pas présent dans chaque bloc

	Voitures			
Conducteurs	1	2	3	4
1	A	B	D	C
2	C	D	B	A
3	B	A	C	D
4	D	C	A	B

L'intérêt réel des ANOVA carré latin est qu'elles sont certes économiques puisqu'elles sont incomplètes mais principalement qu'elles sont orthogonales en ce sens qu'elles contiennent la meilleure façon de faire les tests en minimisant la quantité de ces derniers. En effet, on voit que dans un carré latin que chaque lettre n'apparaît qu'une seule fois dans chaque ligne et chaque colonne (d'où l'origine du nom!) Afin de minimiser l'erreur (mathématiquement il y a donc "orthogonalité").

Il est courant de représenter une ANOVA carré latin de la manière plus générale suivante :

	1er Facteur				
2ème Facteuer	1	2	3	4	Moyennes des lignes
I	y_{111}	y_{122}	y_{134}	y_{143}	$\bar{y}_{1..}$
II	y_{214}	y_{223}	y_{231}	y_{341}	$\bar{y}_{2..}$
III	y_{312}	y_{324}	y_{333}	y_{341}	$\bar{y}_{3..}$
IV	y_{413}	y_{421}	y_{432}	y_{444}	$\bar{y}_{4..}$
Moyennes des colonnes	$\bar{y}_{.1.}$	$\bar{y}_{.2.}$	$\bar{y}_{.3.}$	$\bar{y}_{.4.}$	$\bar{y}_{...}$

Et notons évidemment que le nombre de lignes est (évidemment!) toujours égal au nombre de colonnes et pour de tels plans, on parle aussi de "plans symétriques".

Prouvons que nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_T &= \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2\\
&= \underbrace{K\sum_{i=1}^{K}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2}_{\text{SSE}_{\text{lignes}}}+\underbrace{K\sum_{j=1}^{K}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2}_{\text{SSE}_{\text{colonnes}}}+\underbrace{K\sum_{k=1}^{K}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2}_{\text{SSE}_{\text{traitements}}}\\
&\quad+\underbrace{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})^2}_{\text{SSE}_{\text{résidus}}}\\
&= \mathrm{Q}_R+\mathrm{Q}_C+\mathrm{Q}_{RC}+\mathrm{Q}_r
\end{aligned} \tag{5.7.2074}$$

où R désigne les "lignes", C les "colonnes" et r les "résidus".

En cours de traduction de l'anglais

Eh bien c'est parti dans la joie et la bonne humeur ... ! Nous écrivons d'abord :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 &= \sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i,j,k}(y_{ijk}+\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{i..}+\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\ &= \sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...}+\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}+\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}+\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\ &= \sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})^2+\sum_{i,j,k}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}+\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}+\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\ &+2\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})(\bar{y}_{i..}+\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-3\bar{y}_{...})\end{aligned} \quad (5.7.2075)$$

Mais :

$$\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})(\bar{y}_{i..}+\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-3\bar{y}_{...})=0 \quad (5.7.2076)$$

En effet, commençons par remarquer que :

$$\sum_{i,j,k}y_{ijk}\cdot\bar{y}_{i..}=\sum_{i}\bar{y}_{i..}\sum_{j,k}y_{ijk}=\sum_{i}\bar{y}_{i..}\cdot K\cdot\bar{y}_{i..}=K\sum_{i}(\bar{y}_{i..})^2 \quad (5.7.2077)$$

Les mêmes calculs montrent que :

$$\sum_{i,j,k}y_{ijk}\cdot\bar{y}_{.j.}=K\sum_{j}(\bar{y}_{.j.})^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i,j,k}y_{ijk}\cdot\bar{y}_{..k}=K\sum_{k}(\bar{y}_{..k})^2 \quad (5.7.2078)$$

De plus :

$$\sum_{i,j,k}(-\bar{y}_{i..})\bar{y}_{i..}=-\sum_{i}\sum_{j,k}(\bar{y}_{i..})^2=-K\sum_{i}(\bar{y}_{i..})^2 \quad (5.7.2079)$$

et encore une fois nous avons le même résultat pour les indices j et k. C'est-à-dire :

$$\sum_{i,j,k}(-\bar{y}_{.j.})\bar{y}_{.j.}=-K\sum_{j}(\bar{y}_{.j.})^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i,j,k}(-\bar{y}_{..k})\bar{y}_{..k}=-K\sum_{k}(\bar{y}_{..k})^2 \quad (5.7.2080)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})(\bar{y}_{i..}+\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k}-3\bar{y}_{...})=\\ &\sum_{i,j,k}\left[-3\bar{y}_{...}\cdot y_{ijk}-2\bar{y}_{i..}\bar{y}_{.j.}-2\bar{y}_{i..}\bar{y}_{..k}-2\bar{y}_{.j.}\bar{y}_{..k}+5\bar{y}_{...}(\bar{y}_{i..}+\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{..k})-6(\bar{y}_{...})^2\right]\end{aligned} \quad (5.7.2081)$$

Maintenant, notez que nous avons :

$$\sum_{i,j,k}\bar{y}_{i..}\cdot\bar{y}_{.j.}=\sum_{i}\bar{y}_{i..}\sum_{j,k}\bar{y}_{.j.}=K\bar{y}\sum_{i}\bar{y}_{i..}=K^2(\bar{y})^2 \quad (5.7.2082)$$

étant donné que :

$$\sum_{j,k}\bar{y}_{.j.}=K\bar{y} \quad (5.7.2083)$$

En cours de traduction de l'anglais

Ici encore, nous avons également avec les mêmes calculs :

$$\sum_{i,j,k} \bar{y}_{i..} \cdot \bar{y}_{..k} = K^2 \left(\bar{y}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i,j,k} \bar{y}_{.j.} \cdot \bar{y}_{..k} = K^2 \left(\bar{y}\right)^2 \tag{5.7.2084}$$

De plus :

$$\sum_{i,j,k} (\bar{y}_{...})^2 = K^2 (\bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2085}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k} \left(y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{..k} - 3\bar{y}_{...}\right) = \\ &- 12K^2 (\bar{y}_{...})^2 + \sum_{i,j,k} \left[-3\bar{y}_{...} \cdot y_{ijk} + 5\bar{y}_{...}\left(\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{..k}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.7.2086}$$

Nous avons :

$$\sum_{i,j,k} \bar{y}_{...} \cdot y_{ijk} = \bar{y}_{...} \sum_{i,j,k} y_{ijk} = K^2 (\bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2087}$$

étant donné que :

$$\sum_{i,j,k} y_{ijk} = K\bar{y}_{...} \tag{5.7.2088}$$

De plus :

$$\sum_{i,j,k} \bar{y}_{...}\bar{y}_{i..} = \sum_i \bar{y}_{...} \sum_{j,k} \bar{y}_{i..} = \sum_i \bar{y}_{...}K \cdot \bar{y}_{i..} = K^2 (\bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2089}$$

étant donné que :

$$\sum_i \bar{y}_{i..} = K\bar{y} \tag{5.7.2090}$$

Le même résultat s'applique pour j et k, dès lors :

$$\sum_{i,j,k} \bar{y}_{...}\bar{y}_{.j.} = K^2 (\bar{y}_{...})^2 \qquad \text{et} \quad \sum_{i,j,k} \bar{y}_{...}\bar{y}_{..k} = K^2 (\bar{y}_{...})^2 \tag{5.7.2091}$$

Dès lors :

$$\sum_{i,j,k} \left(y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}_{...}\right)\left(\bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{..k} - 3\bar{y}_{...}\right) = 0 \tag{5.7.2092}$$

Retour au début...

Ensuite, il nous reste :

$$\sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = \sum_{i,j,k} \left(y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}_{...}\right)^2 + \sum_{i,j,k} \left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} + \bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...}\right)^2 \tag{5.7.2093}$$

En cours de traduction de l' anglais

Évaluons les produits doubles dans la dernière somme :

$$\sum_{i,j,k}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})=\sum_{i,j,k}\bar{y}_{i..}\bar{y}_{.j.}-\sum_{i,j,k}\bar{y}_{...}\bar{y}_{i..}-\sum_{i,j,k}\bar{y}_{...}\bar{y}_{.j.}+\sum_{i,j,k}(\bar{y}_{...})^2=0 \quad (5.7.2094)$$

car comme vu précédemment, tout cela vaut $K^2(\bar{y})^2$.

Les autres produits doubles valent également 0 par les mêmes arguments. Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2=&\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})^2\\&+\sum_{i,j,k}(y_{i..}-\bar{y}_{...})^2+\sum_{i,j,k}(y_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+\sum_{i,j,k}(y_{..k}-\bar{y}_{...})^2\end{aligned} \quad (5.7.2095)$$

Pour finir, notons que :

$$\sum_{i,j,k}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2=\sum_{i}\sum_{j,k}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2=K\sum_{i}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 \quad (5.7.2096)$$

et de même pour j et k. Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2=&K\sum_{i}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2+K\sum_{j}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+K\sum_{k}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\&+\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})^2\end{aligned} \quad (5.7.2097)$$

Si nous notons K la dimension d'un carré latin, pour chacun des termes ci-dessus, nous avons les degrés de liberté suivants :

$$K^2-1=(K-1)+(K-1)+(K-1)+(K-1)(K-2) \quad (5.7.2098)$$

Nous avons alors le tableau ANOVA suivant (rappelez-vous que le R est pour les lignes et le C est pour les colonnes !) :

Somme des carrés	χ^2 ddl	Moyenne des carrés	F	F critique
$Q_R=K\sum_i(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2$ (lignes)	$K-1$	MCk$R=\dfrac{Q_R}{K-1}$	$\dfrac{\text{MCk}R}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{K-1,(K-1)(K-2)})$
$Q_C=K\sum_j(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2$ (colonnes)	$K-1$	MCk$C=\dfrac{Q_C}{K-1}$	$\dfrac{\text{MCk}C}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{K-1,(K-1)(K-2)})$
$Q_{RC}=K\sum_k(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2$ (traîtements)	$K-1$	MCk$RC=\dfrac{Q_{RC}}{K-1}$	$\dfrac{\text{MCk}RC}{\text{MCE}}$	$P(F>F_{K-1,(K-1)(K-2)})$
$Q_r=\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})^2$ (résidus)	$(K-1)(K-2)$	MCE $=\dfrac{Q_r}{(K-1)(K-2)}$		
$Q_T=\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2$ (total)	K^2-1	MCT $=\dfrac{Q_T}{K^2-1}$		

TAB. 5.69 – Table de l'ANOVA carré latin

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Le modèle d'effet de facteurs pour ce plan est :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \varepsilon_{ijk} \quad (5.7.2099)$$

où $i, j, k = 1 \ldots N$ et y_{ijk} est l'observation de la $i$ème ligne et $k$ème colonne pour $j$ème traitement, μ est la moyenne globale, α_i est l'effet de la $i$ème ligne, τ_j est l'effet du $j$ème traitement, β_k est l'effet de la $k$ème colonne, et ε_{ijk} et l'erreur aléatoire.

Notez que seuls les trois indices sont nécessaires pour identifier une observation dans le dessin carré latin et que ce modèle est (évidemment) purement additif. Les hypothèses sur les termes d'effet sont $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{N} \tau_j = 0$ et $\sum_{k=1}^{N} \beta_k = 0$.

Nous sommes intéressés (principalement !) par un effet de traitement nul, c'est-à-dire, $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = 0$ versu $H_1 : \tau_j \neq 0$.

Gardons à l'esprit que les avantages des plans carrés latins sont :

- Ils permettent des expériences avec un petit nombre d'essais (plus économique que de croiser tous les facteurs)
- Facile à analyser

Les inconvénients sont :

- Le nombre de niveaux de chaque variable de blocage doit être égal au nombre de niveaux du facteur de traitement
- Ils supposent qu'il n'y a pas d'interactions entre les variables de blocage ou entre la variable de traitement et la variable de blocage (peut être irréaliste)
- On dit que les carrés inférieurs à 4×4 ou 5×5 ont généralement trop peu de réplications pour un niveau de précision souhaitable (faible puissance)
- On peut prouver que les carrés 6×6 sont impossibles (la preuve n'est en fait pas dans ce livre !)

Remarques

R1. Les plans carrés latins font partie de ce que nous appelons aussi parfois "plans à remplissage d'espace" (famille qui contient également les plans sphériques, des plans uniformes avec les plans à potentiel minimum, ou les plans à entropie maximale ou les plans à processus Gaussiens EQMI (erreur quadratique moyenne intégrée)).

R2. Il existe aussi des plans Latins rectangulaires pour information...

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.5.8 ANOVA carré Gréco-Latin

Une "ANOVA carré Gréco-Latin" est une extension d'un carré Latin utilisé lorsque le nombre de blocs est supérieur à 2. Concrètement, une ANOVA carré Gréco-Latin peut contrôler jusqu'à deux facteurs de nuisance et un facteur de traitement (trois sources de variabilité exogènes ...) comme représenté ci-dessous :

	Colonne			
Ligne	1	2	3	4
1	Aα	Bβ	Cγ	Dδ
2	Bδ	Aγ	Dβ	Cα
3	Cβ	Dα	Aδ	Bγ
4	Dγ	Cδ	Bα	Aβ

TAB. 5.70 – **Carré Gréco-Latin d'ordre** 4

L'utilisation de ces plans se traduit par un gain de temps et de moyens assez important, car le nombre total de points de conception a été considérablement réduit car si nous considérions n niveaux pour chacun des trois facteurs, nous n'avons que n^2 points expérimentaux, lorsqu'il y a n^4 (puisqu'il y a quatre facteurs ! ! ! !) points de conception dans le plan factoriel complet. Bien que semblables aux carrés Latins, ces modèles ne peuvent être utilisés que lorsque les interactions sont statistiquement non significatives.

Pour comprendre un carré Gréco-Latin, on considère d'abord un carré latin $K \otimes K$ sur lequel nous avons superposé un autre carré latin $K \otimes K$ qui est cette fois désigné par des lettres grecques. Ensuite dans un second temps lors de la superposition, il faut s'assurer que la propriété suivante est respectée : «chaque ligne et chaque colonne ne peuvent contenir que quelques lettres (latine, grecque) distinctes». Ainsi, si cette propriété est vérifiée (comme le montre le schéma ci-dessous) on dit que les deux carrés latins orthogonaux sont... orthogonaux :

Carré Latin 4 × 4
Lettres latines

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

Carré Latin 4 × 4
Lettres grecques

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ
γ	δ	α	β

Carré Gréco-Latin 4 × 4

	Colonnes			
Lignes	**1**	**2**	**3**	**4**
1	Aα	Bβ	Cγ	Dδ
2	Bδ	Aγ	Dβ	Cα
3	Cβ	Dα	Aδ	Bγ
4	Dγ	Cδ	Bα	Aβ

FIG. 5.197 – **Fusion de deux plans carré Latin**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Les plans carrés Gréco-Latins font également partie de ce que nous appelons aussi parfois les "plans à remplissage d'espace" comme pour les plans carrés latins.

Comme vous pouvez le constater, le plan carrée Gréco-Latin permet l'analyse de 4 facteurs (ligne, colonne, lettre latine, lettre grecque), chaque facteur ayant K niveaux pour seulement $K \otimes K$ ou K^2 combinaisons possibles.

Pour la nécessité de l'analyse de la variance, nous devons définir d'abord certaines variables :

- K le nombre de niveaux de chaque facteur
- $N = K^2$, le nombre total d'observations $y_{i,j,k,l}$ dans le plan carrée Gréco-Latin, où i est le $i$ème niveau de facteur représenté en ligne, j le $j$ème niveau du facteur représenté en colonne, k le $k$ème niveau du facteur représenté par des lettres latines et l le $l$ème niveau du facteur représenté par des lettres grecques.

Ainsi, nous pouvons formuler comme suit :

- La somme et la moyenne des observations :

$$y_{....}=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}y_{ijkl}=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}y_{ij..} \qquad \bar{y}_{....}=\frac{y_{....}}{K^2} \tag{5.7.2100}$$

- La somme et la moyenne de chaque ligne :

$$y_{i...}=\sum_{j=1}^{K}y_{ij..} \qquad \bar{y}_{i...}=\frac{y_{i...}}{K} \tag{5.7.2101}$$

- La somme et la moyenne de chaque colonne :

$$y_{.j..}=\sum_{i=1}^{K}y_{ij..} \qquad \bar{y}_{.j..}=\frac{y_{.j..}}{K} \tag{5.7.2102}$$

- La somme et la moyenne pour chaque lettre latine :

$$y_{..k.}=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}y_{ijk.} \qquad \bar{y}_{..k.}=\frac{y_{..k.}}{K} \tag{5.7.2103}$$

- La somme et la moyenne pour chaque lettre grecque :

$$y_{...l}=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}y_{ij.l} \qquad \bar{y}_{...l}=\frac{y_{...l}}{K} \tag{5.7.2104}$$

En cours de traduction de l' anglais

Pour le développement, nous préférerons cette notation $\sum_{i,j,k,l}^{K}$ à celle-ci $\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}$ afin de simplifier les écritures de ce qui va suivre.

Traitons maintenant de la décomposition de la variance totale ! Prouvons que cette dernière :

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{....})^2=\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{....})^2 \tag{5.7.2105}$$

peut être écrite :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{....})^2=&K\sum_{i}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})^2+K\sum_{j}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})^2+K\sum_{k}^{K}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})^2+K\sum_{l}^{K}(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})^2\end{aligned}$$

Pour cela, posons d'abord :

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{....})^2=\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2 \tag{5.7.2106}$$

Mettons un peu de $\bar{y}_{....}$ dedans comme ceci :

$$\begin{aligned}&=\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}+\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\&=\sum_{i,j,k,l}^{K}[(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})+(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})]^2\end{aligned} \tag{5.7.2107}$$

A ce niveau, nous retombons sur notre fameuse identité remarquable $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Ainsi dans le cadre de notre développement, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}&=\sum_{i,j,k,l}^{K}\Big[(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})^2+(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})\\&\quad+2(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})\Big]\\&=\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\&\quad+2\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})\end{aligned}$$

Considérons maintenant le 3 ème membre de cette expression $2\sum ab$:

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}) \tag{5.7.2108}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et montrons que le résultat de ce dernier est égal à 0. Commençons par le développer comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}&=\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\left(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}\right)^{(a)}\\&+\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{.j..}\left(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}\right)^{(b)}\\&+\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{..k.}\left(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}\right)^{(c)}\\&+\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{...l}\left(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}\right)^{(d)}\\&-4\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{....}\left(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}\right)^{(e)}\end{aligned}$$

Développons le premier terme ci-dessus désigné par l'exposant $^{(a)}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\left(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}\right)&=\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot y_{ijkl}-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{i...}-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{.j..}\\&-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{..k.}-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{...l}+3\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{....}\end{aligned}$$

Évaluons chacun des six termes ci-dessus séparément :

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot y_{ijkl}=\sum_{i}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\sum_{j,k,l}^{K}y_{ijkl}=K\cdot\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{i...}=K\sum_{i}^{K}\left(\bar{y}_{i...}\right)^2\\&-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{i...}=-K\sum_{i}^{K}\left(\bar{y}_{i...}\right)^2\\&-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{.j..}=-\sum_{i}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\sum_{j,k,l}^{K}y_{.j..}=-K\bar{y}_{....}\cdot K\bar{y}_{....}=-K^2\left(\bar{y}_{....}\right)^2\\&-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{..k.}=\ldots=-K^2\left(\bar{y}_{....}\right)^2\\&-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{...l}=\ldots=-K^2\left(\bar{y}_{....}\right)^2\\&+3\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{....}=\ldots=+3K^2\left(\bar{y}_{....}\right)^2\end{aligned}\tag{5.7.2109}$$

Donc, finalement, nous obtenons que le terme original désigné par l'exposant $^{(a)}$:

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\left(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....}\right)\tag{5.7.2110}$$

En cours de traduction de l'anglais

est égal à :

$$\sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{i...} \cdot y_{ijkl} - \sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{i...} \cdot \bar{y}_{i...} - \sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{i...} \cdot \bar{y}_{.j..} - \sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{i...} \cdot \bar{y}_{..k.} - \sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{i...} \cdot \bar{y}_{...l} + 3\sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{i...} \cdot \bar{y}_{....} \quad (5.7.2111)$$

Ce qui donne :

$$K\sum_{i}^{K} (\bar{y}_{i...})^2 - K\sum_{i}^{K} (\bar{y}_{i...})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 + 3K^2(\bar{y}_{....})^2 = 0 \quad (5.7.2112)$$

Ainsi, par le même processus mathématique ennuyeux, nous pouvons prouver que chacun des quatre autres termes restants est également égal à zéro. Donc :

$$(b) \sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{.j..}(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....}) =$$

$$K\sum_{j}^{K} (\bar{y}_{.j..})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K\sum_{j}^{K} (\bar{y}_{.j..})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 + 3K^2(\bar{y}_{....})^2 = 0$$

$$(c) \sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{..k.}(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....}) =$$

$$K\sum_{k}^{K} (\bar{y}_{..k.})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K\sum_{k}^{K} (\bar{y}_{..k.})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 + 3K^2(\bar{y}_{....})^2 = 0$$

$$(d) \sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{...l}(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....}) =$$

$$K\sum_{l}^{K} (\bar{y}_{...l})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K\sum_{l}^{K} (\bar{y}_{...l})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 - K^2(\bar{y}_{....})^2 + 3K^2(\bar{y}_{....})^2 = 0$$

$$(e) -4\sum_{i,j,k,l}^{K} \bar{y}_{....}(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....}) =$$

$$-4K^2(\bar{y}_{....})^2 + 4K^2(\bar{y}_{....})^2 + 4K^2(\bar{y}_{....})^2 + 4K^2(\bar{y}_{....})^2 + 4K^2(\bar{y}_{...l})^2 - 12K^2(\bar{y}_{....})^2 = 0$$

Maintenant que nous avons prouvé que$2\sum ab = 0$, c'est-à-dire :

$$2\sum_{i,j,k,l}^{K} (\bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...l} - 4\bar{y}_{....})(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....}) = 0 \quad (5.7.2113)$$

Revenons au début (...) :

$$\sum_{i,j,k,l}^{K} (y_{ijkl} - \bar{y}_{....})^2$$

$$= \sum_{i,j,k,l}^{K} (y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....})^2 + \sum_{i,j,k,l}^{K} (\bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...l} - 4\bar{y}_{....})^2$$

$$+ 2\sum_{i,j,k,l}^{K} (\bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{...l} - 4\bar{y}_{....})(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....})$$

En cours de traduction de l' anglais

Puisque le 3ème est égal, il ne reste évidemment que :

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})^2 \tag{5.7.2114}$$

Prenons le 2ème terme de l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})^2\\
&=\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....}+\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\
&=\sum_{i,j,k,l}^{K}[(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})+(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})+(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})+(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})]^2\\
&=\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})
\end{aligned}$$

Dans le développement ci-dessus, considérons l'expression suivante :

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....}) \tag{5.7.2115}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et prouvons qu'elle est égale à zéro :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....})\\
&=\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{i...}+\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{.j..}+\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{..k.}\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot\bar{y}_{...l}-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{i...}\cdot 4\bar{y}_{....}-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{....}\cdot\bar{y}_{i...}\\
&-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{....}\cdot\bar{y}_{.j..}-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{....}\cdot\bar{y}_{..k.}-\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{....}\cdot\bar{y}_{...l}+\sum_{i,j,k,l}^{K}\bar{y}_{....}\cdot 4\bar{y}_{....}\\
&=K^2(\bar{y}_{....})^2+K^2(\bar{y}_{....})^2+K^2(\bar{y}_{....})^2+K^2(\bar{y}_{....})^2\\
&-4K^2(\bar{y}_{....})^2-K^2(\bar{y}_{....})^2-K^2(\bar{y}_{....})^2-K^2(\bar{y}_{....})^2\\
&-K^2(\bar{y}_{....})^2+4K^2(\bar{y}_{....})^2\\
&=0
\end{aligned}
$$

Par conséquent, chacune des expressions suivantes :

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....}) \tag{5.7.2116}$$

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....}) \tag{5.7.2117}$$

$$\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})\cdot(\bar{y}_{i...}+\bar{y}_{.j..}+\bar{y}_{..k.}+\bar{y}_{...l}-4\bar{y}_{....}) \tag{5.7.2118}$$

est égale à 0.

Finalement il reste :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{....})^2=&\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{i,j,k,l}^{K}(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})^2\\
=&\sum_{i}^{K}\sum_{j,k,l}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{j}^{K}\sum_{i,k,l}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{k}^{K}\sum_{i,j,l}^{K}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})^2+\sum_{l}^{K}\sum_{i,j,k}^{K}(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})^2\\
=&K\sum_{i}^{K}(\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{....})^2+K\sum_{j}^{K}(\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{....})^2+K\sum_{k}^{K}(\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{....})^2+K\sum_{l}^{K}(\bar{y}_{...l}-\bar{y}_{....})^2\\
&+\sum_{i,j,k,l}^{K}(y_{ijkl}-\bar{y}_{i...}-\bar{y}_{.j..}-\bar{y}_{..k.}-\bar{y}_{...l}+3\bar{y}_{....})^2
\end{aligned}
$$

En cours de traduction de l' anglais

Si nous désignons comme d'habitude par SCE la somme des carrés des écarts, nous pouvons réécrire notre résultat sous cette forme :

$$\text{SCE}_T = \text{SCE}_R + \text{SCE}_C + \text{SCE}_l + \text{SCE}_g + \text{SCE}_r \qquad (5.7.2119)$$

où :

$$\begin{aligned}
\text{SCE}_T &= \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\left(y_{ijkl} - \bar{y}_{....}\right)^2 \\
\text{SCE}_R &= K\sum_{i}^{K}\left(\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....}\right)^2 \\
\text{SCE}_C &= K\sum_{j}^{K}\left(\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....}\right)^2 \\
\text{SCE}_l &= K\sum_{k}^{K}\left(\bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....}\right)^2 \\
\text{SCE}_g &= K\sum_{l}^{K}\left(\bar{y}_{...l} - \bar{y}_{....}\right)^2
\end{aligned} \qquad (5.7.2120)$$

et :

$$\text{SCE}_r = \sum_{i,j,k,l}^{K}\left(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....}\right)^2 = \text{SSE}_T - \text{SSE}_L - \text{SSE}_C - \text{SSE}_l - \text{SSE}_g \qquad (5.7.2121)$$

Avec pour degrés de liberté :

$$\text{ddl}_T = \text{ddl}_R + \text{ddl}_C + \text{ddl}_l + \text{ddl}_g + \text{ddl}_r$$

$$K^2 - 1 = (K-1) + (K-1) + (K-1) + (K-1) + (K-1)(K-3)$$

Le degré de liberté pour les carrés des différences résiduelles est obtenu en posant :

$$K^2 - 1 - \left[(K-1) + (K-1) + (K-1) + (K-1)\right] = (K-1)(K-3)$$

Nous avons alors le tableau ANOVA suivant :

Sommes des carrés (SCE)	χ^2 **ddl**	**Mean squares**	F	F **critique**
$Q_R = K\sum_{i}^{K}\left(\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....}\right)^2$ (lignes)	$K-1$	$\text{MCk}R = \dfrac{Q_R}{K-1}$	$\dfrac{\text{MCk}R}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{K-1,(K-1)(K-3)})$
$Q_C = K\sum_{j}^{K}\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)^2$ (colonnes)	$K-1$	$\text{MCk}C = \dfrac{Q_C}{K-1}$	$\dfrac{\text{MCk}C}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{K-1,(K-1)(K-3)})$
$Q_l = K\sum_{k}^{K}\left(\bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....}\right)^2$ (lettre latine)	$K-1$	$\text{MCk}l = \dfrac{Q_l}{K-1}$	$\dfrac{\text{MCk}l}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{K-1,(K-1)(K-3)})$
$Q_g = K\sum_{l}^{K}\left(\bar{y}_{...l} - \bar{y}_{....}\right)^2$ (lettre grecque)	$K-1$	$\text{MCk}g = \dfrac{Q_l}{K-1}$	$\dfrac{\text{MCk}g}{\text{MCE}}$	$P(F > F_{K-1,(K-1)(K-3)})$
$Q_r = \sum_{i,j,k,l}^{K}\left(y_{ijkl} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{...l} + 3\bar{y}_{....}\right)^2$ (residuals)	$(K-1)(K-3)$	$\text{MCE} = \dfrac{Q_r}{(K-1)(K-3)}$		
$Q_T = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\left(y_{ijkl} - \bar{y}_{....}\right)^2$ (total)	K^2-1	$\text{MCk}T = \dfrac{Q_T}{K^2-1}$		

TAB. 5.71 – **Tableau de l'ANOVA Gréco-Latin**

En cours de traduction de l'anglais

Notez que dans le plan carré gréco-latin comme dans le plan carré latin il est supposé qu'aucune interaction entre les facteurs n'existe. C'est une hypothèse encore plus forte dans le plan carré gréco-latin parce que nous avons un facteur supplémentaire et, par conséquent, plus d'interactions possibles.

Remarque

Le modèle d'effet de facteur pour ce plan (purement additif !) est :

$$y_{ijkl} = \mu + \theta_i + \tau_j + \omega_k + \phi_l + \varepsilon_{ijkl} \quad (5.7.2122)$$

où $i, j, k, l = 1 \ldots N$ et où y_{ijkl} est l'observation de la $i$ème ligne, lettre latine j, lettre grecque k, et $l$ème colonne, μ est la moyennes globale, θ_i est l'effet de la $i$ème ligne, τ_j est l'effet de la lettre latine j, ω_k est l'effet de la lettre grecque k, ϕ_l est l'effet de la $l$ème colonne, et ε_{ijkl} sont les erreurs aléatoires et identiqeuemnt distribuées $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Notons que, comme pour le plan carré latin, deux indices suffisent pour identifier une observation et que les plans Gréco-Latins 6×6 sont impossibles.

Nous sommes (principalement !) intéressés par tester pour les effets nuls de traitement c'est-à-dire, $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_N = 0$ versus $H_1 : \tau_j \neq 0$.

De nombreux logiciels ne renvoient que le premier test de Fisher (celui pour Q_R, c'est-à-dire les traitements) car les blocs du plan Gréco-Latin représentent des restrictions sur la randomisation et que par conséquent les autres tests peuvent ne pas être appropriés.

5.7.13.5.9 ANOVA Multivariée (MANOVA)

"L'ANOVA Multivariée" est une extension de l'ANOVA où nous supposons que les variables catégorielles sont linéairement dépendantes et nous testons s'il y a une différence significative dans les moyennes (variables supposées être de type continues) à travers les différents groupes sous l'interdépendance des variables explicatives catégoriques.

Encore une fois, comme pour l'ANOVA, la MANOVA et les modèles linéaires multivariés sont les deux facettes d'une même pièce et sont les fondements d'un champ de statistiques plus vaste, comme illustré dans le diagramme de flux ci-dessous (en fait, dans le livre, seuls les modèles linéaires généralisés multivariés sont traités en détails dans la section de Méthodes Numériques !) :

En cours de traduction de Magistris

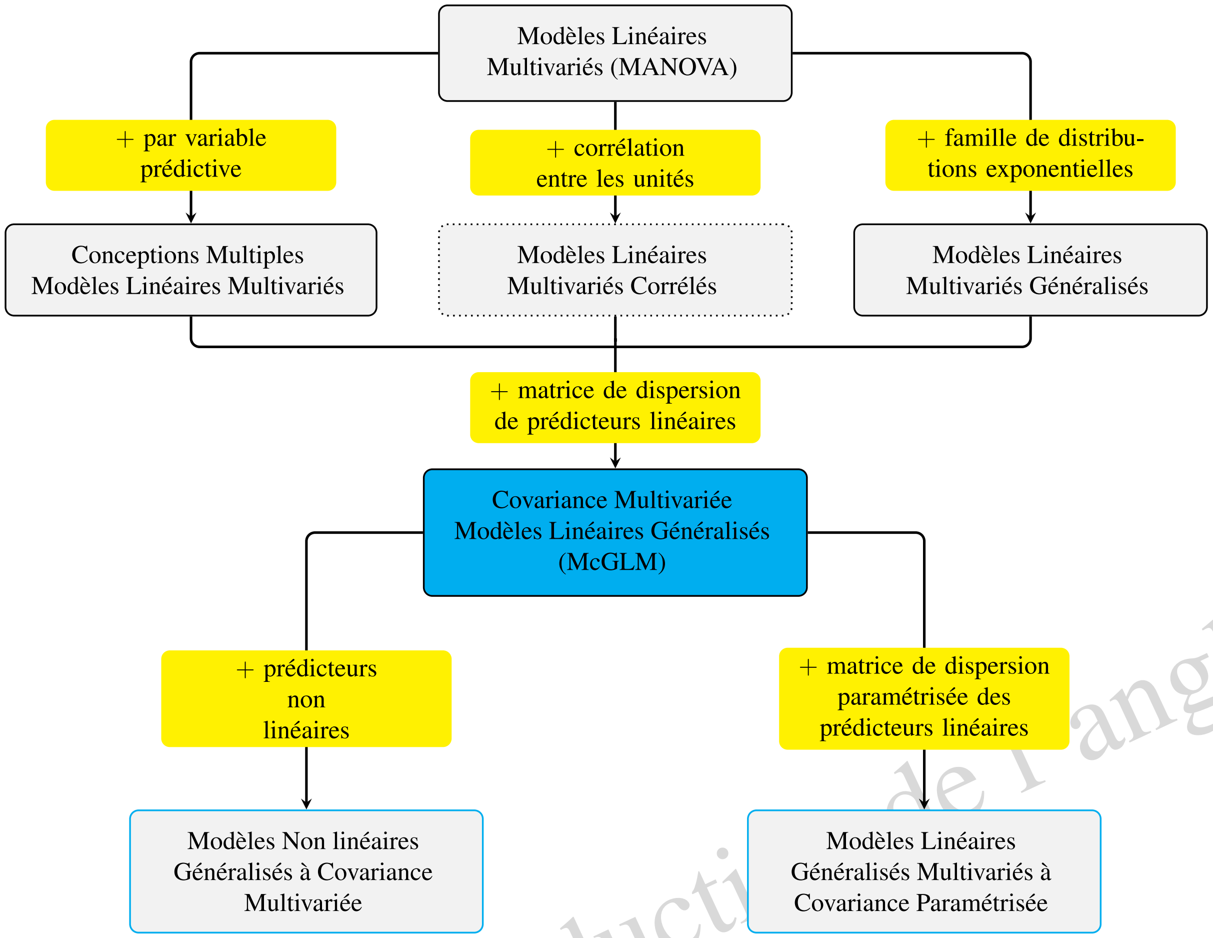


FIG. 5.198 – **Familles de Modèles Linéaires Multivariés**

En cours de traduction de l'anglais

Si ce n'est pas clair (...), la notation mathématique peut être plus explicite pour le lecteur. Rappelons d'abord que dans le cas de l'ANOVA canonique à 1 facteur fixe k niveaux, l'hypothèse nulle était de la forme :

$$H_0 : \ \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_k \tag{5.7.2123}$$

Pour la MANOVA à facteurs fixes, l'hypothèse nulle est :

$$H_0 : \ \vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_3 = \ldots = \vec{\mu}_k \tag{5.7.2124}$$

où nous avons donc des "vecteurs moyens" pour un nombre donné de variables de groupes dépendants en une quantité k.

Ainsi explicitement pour les k groupes et les p variables catégorielles p :

$$H_0 : \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{21} \\ \vdots \\ \bar{x}_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{22} \\ \vdots \\ \bar{x}_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{13} \\ \bar{x}_{23} \\ \vdots \\ \bar{x}_{p3} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} \bar{x}_{1k} \\ \bar{x}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{x}_{pk} \end{pmatrix} \tag{5.7.2125}$$

Comme le lecteur le verra dans les développements ci-dessous, le MANOVA à facteurs fixes repose sur neuf hypothèses :

H1. Nos deux variables dépendantes (ou plus !) doivent être mesurées à un niveau continu (c'est-à-dire qu'il s'agit de variables d'intervalles ou de ratios)

H2. Nos variable indépendantes doivent être constituée d'au moins deux groupes catégoriels, indépendants (non liés)

H3. Nous devrions avoir l'indépendance des observations, ce qui signifie qu'il n'y a pas de relation entre les observations dans chaque groupe ou entre les groupes eux-mêmes

H4. Nous devrions avoir une taille d'échantillon adéquate. Il faut au moins avoir plus de cas (par exemple, participants) dans chaque groupe de la variable indépendante que le nombre de variables dépendantes que nous analysons

H5. Il n'y a pas de valeurs aberrantes univariées ou multivariées. Premièrement, il ne peut y avoir de valeurs aberrantes (univariées) dans chaque groupe de la variable indépendante pour aucune des variables dépendantes

H6. Il y a une Normalité multivariée

H7. Il existe une relation linéaire entre chaque paire de variables dépendantes pour chaque groupe de la variable indépendante

H8. Il existe une homogénéité des matrices de variance-covariance

H9. Il n'y a pas de multicolinéarité

En cours de traduction de l'anglais

Rappelons maintenant que dans l'ANOVA à un facteur, nous calculons la p-valeur du rapport des variances estimées en supposant que les vraies variances sont égales :

$$F_{k-1,N-k}=\frac{\dfrac{Q_A}{k-1}}{\dfrac{Q_R}{N-k}}=\frac{\dfrac{\text{SSB}}{k-1}}{\dfrac{\text{SSA}}{N-k}} \qquad (5.7.2126)$$

La prochaine étape dans la compréhension de MANOVA est de reconnaître le fait que les mathématiciens sont paresseux et font parfois des statistiques d'ingénierie ... Nous simplifions donc d'abord ce ratio en multipliant la gauche et la droite par $(k-1)/(N-1)$. Cela donne ce que nous appelons une "A-statistiques" :

$$A=\frac{k-1}{N-1}F_{k-1,N-k}=\frac{k-1}{N-1}\frac{\dfrac{\text{SSB}}{k-1}}{\dfrac{\text{SSA}}{N-k}}=\frac{\text{SSB}}{\text{SSW}} \qquad (5.7.2127)$$

Mais cela ne suffit pas car nous sommes toujours avec des variables indépendantes ! L'idée est donc d'utiliser la matrice variance-covariance et d'obtenir une expression similaire en tant que ratio, mais en prenant le déterminant au préalable ... Cela nous amène à écrire une multivariée comme le test de Fisher pour les variances (......) :

$$\Lambda=\frac{\det(W)}{\det(T)}=\frac{\det(W)}{\det(B+W)} \qquad (5.7.2128)$$

mieux connue sous la forme suivante :

$$\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|} = \frac{|W|}{|T|} \quad (5.7.2129)$$

où W et T sont respectivement les déterminants des matrices carrées de la somme des carrés des écarts intérieurs (Within : W) et globaux (Total : T). Ce qui signifie que si la partie "intérieur" (Between : B) est vraiment grande, alors Λ tend vers zéro. En revanche, si B est très petit, Λ tend vers 1.

Pour prouver que ce rapport ne dépend pas de la matrice de covariance des variables dépendantes, rappelons qu'en considérant la structure de W et $B+W$ nous pouvons faire une décomposition spectrale (voir plus loin notre étude de l'analyse en composantes principales) sous la forme :

$$\Lambda = \frac{|W|}{|B+W|} = \frac{|S||W||S^T|}{|S||B+W||S^T|} = \frac{|W|}{|B+W|} \quad (5.7.2130)$$

Il peut être démontré avec quelques approximations que Λ suit une distribution nommée "distribution de Wilk" (de "Samuel Stanley Wilks").

Il faut noter que le Λ de Wilk peut être exprimé en fonction des valeurs propres de $W^{-1}B$. De la définition de Λ, il s'ensuit en utilisant les propriétés du déterminant (voir section Algèbre Linéaire page 1935) que :

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{|T|}{|W|} = \left|W^{-1}(W+B)\right| = \left|\mathbb{1}_p + W^{-1}B\right| \quad (5.7.2131)$$

On reconnaît ici le déterminant des "équations aux valeurs propres" (voir section Algèbre Linéaire page 1970) sur $W^{-1}B$ mais avec $\lambda = 1$. En effet :

$$\det(A - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda) \quad (5.7.2132)$$

Donc dans notre cas ici nous avons $\lambda = -1$ donc :

$$\det(A - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + 1) \quad (5.7.2133)$$

Dès lors :

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{|T|}{|W|} = \prod_{i=1}^{k}(1+\lambda_i) \quad (5.7.2134)$$

et par conséquent :

$$\Lambda = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda_i)} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+\lambda_i} \quad (5.7.2135)$$

En cours de traduction de l'anglais

En outre, il s'ensuit que :

$$\ln(\Lambda) = \ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda_i)}\right) = -\sum_{i=1}^{k}(1+\lambda_i) \tag{5.7.2136}$$

Lorsque le Λ de Wilk approche 1, nous avons montré que cela signifie que la différence dans les moyennes est négligeable. C'est le cas lorsque $\ln(\Lambda)$ approche 0. Cependant, lorsque Λ approche 0 ou $\ln(\Lambda)$ approche 1, cela signifie que la différence est grande. Par conséquent, une valeur élevée de $\ln(\Lambda)$ (c'est-à-dire proche de 0) est une indication de l'importance de la différence entre les moyennes.

Remarque

La mauvaise nouvelle est qu'il existe en fait quatre tests multivariés différents qui sont réalisés à partir de la relation ci-dessus. La raison de quatre statistiques différentes et quatre approximations est que les mathématiques de la MANOVA deviennent si compliquées dans certains cas que personne n'a jamais été en mesure de les résoudre à notre connaissance...

Voyons maintenant un exemple compagnon détaillé :

En cours de traduction de ... is

✍**Exemple :**

Nous considérons l'ensemble suivant de deux variables dépendantes sur trois groupes de variables indépendantes :

K_1		K_2		K_3	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
2	3	4	8	7	6
3	4	5	6	8	7
5	4	6	7	10	8
2	5			9	5
				7	6
$\bar{x}_{11}=3$	$\bar{x}_{21}=4$	$\bar{x}_{12}=5$	$\bar{x}_{22}=7$	$\bar{x}_{13}=8.2$	$\bar{x}_{23}=6.4$

avec :

$$\bar{x}_1=\frac{3+5+8.2}{3}=5.4 \qquad \bar{x}_2=\frac{4+7+6.4}{3}=5.8 \tag{5.7.2137}$$

Maintenant nous calculons :

$$W=W_1+W_2+W_3=\begin{bmatrix}\text{SSE}_1 & \text{SSE}_{12}\\ \text{SSE}_{12} & \text{SSE}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{SSE}_1 & \text{SSE}_1\\ \text{SSE}_{22} & \text{SSE}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{SSE}_1 & \text{SSE}_{32}\\ \text{SSE}_{32} & \text{SSE}_2\end{bmatrix} \tag{5.7.2138}$$

Nous avons alors par exemple pour le premier groupe :

$$\begin{gathered}\text{SSE}_i=\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i1})^2 : \begin{cases}\text{SSE}_1=\sum_{j=1}^{n}(x_{1j}-\bar{x}_{11})^2\\ \text{SSE}_2=\sum_{j=1}^{n}(x_{2j}-\bar{x}_{21})^2\end{cases}\\ \text{SSE}_{ij}=\text{SSE}_{ji}=\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{11})(x_{2j}-\bar{x}_{21})\end{gathered} \tag{5.7.2139}$$

Ce qui nous donne dans notre cas (très facile à vérifier avec n'importe quel tableur) :

$$W=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6.8 & 2.6\\ 2.6 & 5.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14.8 & 1.6\\ 1.6 & 9.2\end{bmatrix} \tag{5.7.2140}$$

Et nous avons (nous remarquons que nous supposons que sur tous les x_1 et x_2 le nombre de mesures sont $N_1=N_2=N$) :

$$T=B+W=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}(x_{i1}-\bar{x}_1)^2 & \sum_{i=1}^{N}(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2)\\ \sum_{i=1}^{N}(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2) & \sum_{i=1}^{N}(x_{i2}-\bar{x}_2)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76.72 & 26.00\\ 26.00 & 28.25\end{bmatrix} \tag{5.7.2141}$$

et dès lors :

$$\Lambda = \frac{|W|}{|T|} = \frac{\begin{vmatrix} 14.8 & 1.6 \\ 1.6 & 9.2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 76.72 & 26.00 \\ 26.00 & 28.25 \end{vmatrix}} = 0.0897 \qquad (5.7.2142)$$

Après le calcul de la p-valeur est plus délicat..., nous demanderons au lecteur de se référer aux livres compagnons sur Minitab ou R pour les détails de calcul et la conclusion finale.

Nous pourrions donc utiliser une MANOVA à facteurs fixes pour déterminer si le rappel des faits à court et à long terme d'élèves différait en fonction de trois longueurs de cours différentes (c.-à-d. que les deux variables dépendantes sont «rappel de mémoire à court terme» et «rappel de mémoire à long terme», tandis que la variable indépendante est «durée du cours», qui comporte quatre groupes indépendants : «30 minutes ", «60 minutes», «90 minutes» et «120 minutes»). Alternativement, une MANOVA à facteurs fixes pourrait être utilisée pour déterminer s'il existe une différence de salaire et de primes en fonction du type de diplôme (c'est-à-dire que les deux variables dépendantes sont «salaire» et «primes», tandis que la variable indépendante est «type de degré» , qui comprend cinq groupes : «études commerciales», «psychologie», «sciences biologiques», «ingénierie» et «droit»).

Lorsqu'il existe une différence statistiquement significative entre les groupes de la variable indépendante, il est possible de déterminer quels groupes spécifiques sont significativement différents les uns des autres à l'aide de tests post hoc. Nous devons effectuer ces tests post-hoc car la MANOVA à facteurs fixes est un test statistique omnibus[65] et ne peut donc pas vous dire quels groupes spécifiques sont significativement différents l'un de l'autre ; il vous indique seulement qu'au moins deux groupes étaient différents.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.5.9.1 Test du T carré de Hotelling

Le "test du T carré de Hotelling" (Hotelling, 1931) est le pendant multivarié du test T de Student. Par exemple, disons que nous voulions comparer les performances de deux groupes d'élèves différents à l'école. Nous pourrions comparer des données univariées (par exemple, les scores moyens des tests) avec un test T de Student. Ou, nous pourrions utiliser le T carré de Hotelling pour comparer des données multivariées (par exemple, la moyenne multivariée des scores aux tests, GPA et les notes de classe).

Le test T-carré de Hotelling est basé sur la distribution du T^2 de Hotelling et constitue la base de diverses cartes de contrôle multivariées en Génie Industriel. Comme le lecteur le constatera à la fin du développement présenté ci-dessous, le test T carré de Hotelling est simplement un cas particulier de MANOVA, dans lequel seuls deux lots (groupes) sont comparés !

Plus techniquement, le test T^2 de Hotelling permet d'analyser si les mesures de variables aléatoires censées suivre conjointement une loi Normale multivariée et donc ayant une corrélation possible (matrice de variance-covariance) s'écartent considérablement de la Normalité ou non.

[65]"omnibus" est dérivé du mot latin "pour tous". En langage clair, nous pouvez interpréter un test omnibus ou une statistique omnibus comme un "test global" - il teste un certain nombre de choses à la fois.

Pour introduire ce test, rappelons que nous avons démontré dans la section de Statistiques que la Loi Normale multivariée pouvait s'écrire :

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{(x-\mu)}^T \Sigma^{-1} \overrightarrow{(x-\mu)}\right) \tag{5.7.2143}$$

On voit que le terme suivant entre parenthèses :

$$D = \overrightarrow{(x-\mu)}^T \Sigma^{-1} \overrightarrow{(x-\mu)} \tag{5.7.2144}$$

donnant un scalaire peut être vu comme la variable aléatoire unique de la distribution bivariée (comme nous pouvons le faire avec le carré de la variable aléatoire dans la loi Normale univariée centrée réduite). Donc, pour une valeur donnée de D, nous sommes "à une certaine hauteur" de la distribution gaussienne multidimensionnelle.

Ce qui nous intéressera ici, c'est que lorsque nous travaillons avec une distribution multivariée, certaines variables ont moins de poids que d'autres en raison de leur grand écart-type et les variables corrélées ont tendance à réduire l'amplitude of D.

Par conséquent, un sujet très intéressant en pratique industrielle (carte de contrôle Hotelling et régressions) est alors de savoir qu'elle est la loi de distribution qui décrit :

$$D = \overrightarrow{(x-\mu)}^T \Sigma^{-1} \overrightarrow{(x-\mu)} \tag{5.7.2145}$$

Alors traitons maintenant de ce sujet !

La "distance de Mahalanobis" entre deux points $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est définie comme :

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(\vec{x}-\vec{y})^\top \Sigma^{-1} (\vec{x}-\vec{y})} \tag{5.7.2146}$$

Ainsi, la distance de Mahalanobis au carré d'un vecteur aléatoire $\vec{x} = \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ et le centre $\vec{\mu}$ d'une distribution gaussienne multivariée est défini comme :

$$D = d(\vec{x}, \vec{\mu})^2 = (\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu}) \tag{5.7.2147}$$

où Σ est une matrice de covariance de dimensions $n \times n$ et $\vec{\mu}$ est le vecteur des moyennes. Afin d'obtenir une représentation différente de D, on peut d'abord effectuer une décomposition en valeurs propres sur Σ^{-1} qui est donnée par (voir section Algèbre Linéaire page 1995) :

$$\Sigma^{-1} = U\Lambda^{-1}U^{-1} = U\Lambda^{-1}U^T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \vec{u}_k \vec{u}_k^T \tag{5.7.2148}$$

où pour rappel $\vec{u}_k$ est le k ème vecteur propre de la valeur propre correspondante λ_k. Injecter la relation ci-dessus dans :

$$D = d(\vec{x}, \vec{\mu})^2 = (\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu}) \tag{5.7.2149}$$

nous donne :

$$\begin{aligned} D &= (\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu}) \\ &= (\vec{x}-\vec{\mu})^T \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \vec{u}_k \vec{u}_k^T\right) (\vec{x}-\vec{\mu}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu})^T \vec{u}_k \vec{u}_k^T (\vec{x}-\vec{\mu}) \end{aligned} \tag{5.7.2150}$$

En cours de traduction de l'anglais

En utilisant les propriétés des matrices transposées (voir section Algèbre Linéaire page 1924) nous obtenons :

$$D=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}\left[\vec{u}_k^T(\vec{x}-\vec{\mu})\right]^2=\sum_{k=1}^{n}\left[\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\vec{u}_k^T(\vec{x}-\vec{\mu})\right]^2=\sum_{k=1}^{n}Y_k^2 \quad (5.7.2151)$$

où Y_k est une nouvelle variable aléatoire basée sur une transformation linéaire affine du vecteur aléatoire $\vec{x}$. En effet, nous avons :

$$Z=(\vec{x}-\vec{\mu})=\mathcal{N}(\vec{0},\Sigma) \quad (5.7.2152)$$

Si nous posons :

$$\vec{a}_k^T:=\lambda_k^{-1/2}\vec{u}_k^T \quad (5.7.2153)$$

dès lors nous obtenons :

$$Y_k=\lambda_k^{-\frac{1}{2}}\vec{u}_k^T(\vec{x}-\vec{\mu})=\lambda_k^{-1/2}\vec{u}_k^TZ=\vec{a}_k^TZ \quad (5.7.2154)$$

On peut alors que Y_k est le résultat d'une transformation affine de Z.

Notons que Y_k est maintenant une variable aléatoire tirée d'une distribution Normale univariée $Y_k=\mathcal{N}(0,\sigma_k^2)$, où, selon :

$$\begin{aligned}\Sigma_y&=\mathrm{E}\left\{(\vec{y}-\vec{\mu}_y)(\vec{y}-\vec{\mu}_y)^T\right\}\\&=\mathrm{E}\left\{\left[(A\vec{x}+\vec{b})-\left(A\vec{\mu}_x+\vec{b}\right)\right]\left[(A\vec{x}+\vec{b})-\left(A\vec{\mu}_x+\vec{b}\right)\right]^T\right\}\\&=\mathrm{E}\left\{[A(\vec{x}-\vec{\mu}_x)][A(\vec{x}-\vec{\mu}_x)]^T\right\}=\mathrm{E}\left\{A(\vec{x}-\vec{\mu}_x)(\vec{x}-\vec{\mu}_x)^TA^T\right\}\\&=A\mathrm{E}\left\{(\vec{x}-\vec{\mu}_x)(\vec{x}-\vec{\mu}_x)^T\right\}A^T=A\mathbf{\Sigma}_xA^T\end{aligned} \quad (5.7.2155)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\sigma_k^2=\vec{a}_k^T\Sigma\vec{a}_k=\lambda_k^{-1/2}\vec{u}_k^T\Sigma\lambda_k^{-1/2}\vec{u}_k=\lambda_k^{-1}\vec{u}_k^T\Sigma\vec{u}_k \quad (5.7.2156)$$

Si nous insérons dans cette dernière relation la suivante :

$$\Sigma=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\vec{u}_j\vec{u}_j^T \quad (5.7.2157)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sigma_k^2&=\lambda_k^{-1}\vec{u}_k^T\Sigma\vec{u}_k=\lambda_k^{-1}\vec{u}_k^T\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\vec{u}_j\vec{u}_j^T\right)\vec{u}_k\\&=\sum_{j=1}^{n}\lambda_k^{-1}\vec{u}_k^T\lambda_j\vec{u}_j\vec{u}_j^T\vec{u}_k=\sum_{j=1}^{n}\lambda_k^{-1}\lambda_j\vec{u}_k^T\vec{u}_j\vec{u}_j^T\vec{u}_k\end{aligned} \quad (5.7.2158)$$

En cours de traduction de l'anglais

puisque tous les vecteurs propres $\vec{u}_i$ sont orthonormés par paires, les produits scalairees $\vec{u}_k^T\vec{u}_j$ et $\vec{u}_j^T\vec{u}_k$ sera nul pour $j \neq k$. Uniquement pour le cas $j = k$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_k^2 &= \lambda_k^{-1}\lambda_k\vec{u}_k^T\vec{u}_k\vec{u}_k^T\vec{u}_k\\ &= \lambda_k^{-1}\lambda_k\|\vec{u}_k\|^2\|\vec{u}_k\|^2\\ &= \lambda_k^{-1}\lambda_k\|\vec{u}_k\|^2\|\vec{u}_k\|^2\\ &= 1\end{aligned} \tag{5.7.2159}$$

puisque la norme $\|\vec{u}_k\|$ d'un vecteur propre orthonormé est égale à 1. La distance de Mahalanobis au carré peut alors être exprimée comme suit :

$$D = d(\vec{x},\vec{\mu})^2 = (\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{N}(0,1))^2 \tag{5.7.2160}$$

Maintenant, la distribution du chi carré avec n degrés de liberté est exactement définie comme étant la distribution d'une variable qui est la somme des carrés de n variables aléatoires étant Normalement (loi Normale centrée réduite) distribuées. Par conséquent, D est un chi carré distribué avec n degrés de liberté.

Donc, si les variables aléatoires sont réellement conjointement distribuées Normalement selon une matrice de corrélation Σ nous avons alors :

$$\boxed{T^2 = (\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{N}(0,1))^2 = \chi_n^2} \tag{5.7.2161}$$

qui est alors nommée la "statistique du T^2 de Hotelling".

Dès lors, à un seuil de confiance donné, nous avons :

$$P\left((\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) \leq \chi_{n-1}^2\right) \tag{5.7.2162}$$

c'est-à-dire la probabilité associée à une certaine hauteur (isocline) dans le cas de la distribution Normale bivariée. Ainsi chaque quantile de la loi du χ^2 correspond par exemple dans le cas bivarié à une isocline elliptique dans le cas général (vu de dessus) ou à un cercle lorsque la corrélation est nulle.

Donc ici ce que testons est :

$$H_0 : \begin{pmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{12}\\ \vdots\\ \mu_{1p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_{21}\\ \mu_{22}\\ \vdots\\ \mu_{2p}\end{pmatrix} \text{ contre } H_a : \begin{pmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{12}\\ \vdots\\ \mu_{1p}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\mu_{21}\\ \mu_{22}\\ \vdots\\ \mu_{2p}\end{pmatrix}$$

Ou, en d'autres termes :

$$H_0 : \mu_{11} = \mu_{21} \text{ et } \mu_{12} = \mu_{22} \text{ et } \ldots \text{ et } \mu_{1p} = \mu_{2p}$$

Pour l'hypothèse nulle, cela ne convient que si les moyennes de population sont identiques pour toutes les variables. L'alternative est qu'au moins une paire de ces moyennes est différente. Ceci est exprimé ci-dessous :

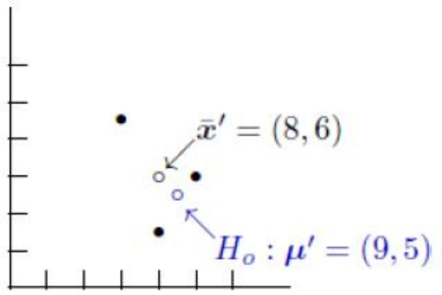
En cours de traduction de l'anglais

$$H_a : \mu_{1k} \neq \mu_{2k} \text{ pour au moins un } k \in \{1, 2, \cdots, p\}$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Considérons le scénario suivant :



Les valeurs sont données par :

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.7.2163}$$

et l'hypothèse nulle sera :

$$H_0 : \quad \vec{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{5.7.2164}$$

En supposant que les données proviennent d'une distribution Normale multivariée et d'observations indépendantes (n'oubliez pas que S est la notation traditionnelle pour l'estimation de Σ) :

$$\vec{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \tag{5.7.2165}$$

Nous avons :

$$S^{-1} = \frac{1}{4(9) - (-3)(-3)} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{pmatrix} \tag{5.7.2166}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} T^2 &= (\vec{\bar{x}} - \vec{\mu}_0)' \, S^{-1} \, (\vec{\bar{x}} - \vec{\mu}_0) \\ &= ((8-9),(6-5)) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (8-9) \\ (6-5) \end{pmatrix} \\ &= (-1,1) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 1/9 & 4/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7/27 \cong 0.259 \end{aligned} \tag{5.7.2167}$$

La valeur dont nous avons besoin pour un seuil de 5% est :

$$\chi^2_{n,1-\alpha} = \chi^2_{2,1-5\%} = \chi^2_{2,95\%} \cong 5.991 \tag{5.7.2168}$$

Nous pouvons comparer notre T^2 au 5.991. Nous voyons déjà que nous ne pouvons pas rejeter H_0 (voyez à quel point $\vec{\bar{x}}$ et $\vec{\mu}$ sont proches dans la figure ci-dessus).

Alternativement, nous pourrions calculer facilement la p-valeur avec n'importe quel tableur. Cela nous conduit alors à une p-valeur de 0.878.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.13.6 Tests d'équivalence

Comme le lecteur l'aura probablement compris à partir des paragraphes précédents, les tests d'hypothèses (NHST) appliqués à la recherche de différences entre groupes ne permettent pas techniquement de conclure une équivalence simplement parce que nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle H_0. Pourtant, nous avons également montré que si la puissance du test était généralement supérieure à 80%, cela ne posait pas de problème de considérer l'hypothèse nulle H_0 comme vraie mais le problème est que pour cela, nous devons la plupart du temps considérer de grands échantillons et en pratique ce n'est pas toujours faisable et cela peut aussi conduire à des absurdités puisque les mathématiques montrent qu'avec de grands échantillons, on rejette presque systématiquement l'hypothèse nulle H_0.

La p-valeur ne peut être utilisée que pour révéler statistiquement a posteriori le rejet de l'hypothèse nulle H_0 dans la grande majorité des cas. Pour résumer ce problème : *Une absence de preuve n'est pas une preuve d'absence*. Exprimé en d'autres termes dans un cas très courant cela donne (exemple particulier !) que le non-rejet de l'hypothèse nulle H_0 d'égalité de deux moyennes (par exemple) n'implique pas l'égalité des moyennes ! ! !

Remarque

Certaines personnes déclarent assez souvent à tort que « *Une absence de preuve n'est pas une preuve d'absence.* » Pourquoi font-ils ça ? Peut-être parce qu'ils ne savent pas mieux ? Et avec la preuve ci-dessous, ils ont la possibilité de savoir avec certitude que "L'absence de preuve EST une preuve d'absence !" et rien d'autre....

Définitions :

D1. A est l'évidence de B : $P(B \mid A) > P(B \mid \neg A)$

D2. Absence d'évidence : $a = \neg A$

D3. Absence $b = \neg B$

$$\begin{array}{ccc} P(B \mid A) > P(B \mid \neg A) & \Leftrightarrow & 1 - P(\neg B \mid A) > 1 - P(\neg B \mid \neg A) \\ & \Downarrow & \\ P(\neg B \mid \neg A) > P(\neg B \mid \neg\neg A) & \Leftrightarrow & P(\neg B \mid A) < P(\neg B \mid \neg A) \\ & \Downarrow & \\ & P(b \mid a) > P(b \mid \neg a) & \end{array} \tag{5.7.2169}$$

■ Q.E.D.

Une absence de preuve peut être une preuve d'absence lorsque nous pouvons raisonnablement nous attendre à ce que des preuves existent !

Avec l'avènement des médicaments génériques des années 11960 (selon calendrier holocène) dans le domaine pharmaceutique, l'importance de mettre en évidence les équivalences (on parle plutôt de "bioéquivalences") a pris une place croissante et des organisations comme la F.D.A. (Federal Drug Administration aux États-Unis), l'EMA (Agence Européenne des Médicaments)

ou l'OMS (Organisation Mondiale de la Santé) ont des directives communes qui mènent à l'approbation de générique seulement si l'équivalence est démontrée sous certaines conditions empiriques mais au moins normalisée selon un consensus d'experts.

Ainsi, le plus souvent les trois conditions suivantes sont requises [66] :

1. Un critère de comparaison est requis
2. Un intervalle de confiance est requis
3. Une limite a priori de bioéquivalence est requise

Voyons un exemple compagnon pour en comprendre le concept :

En cours de traduction de l' anglais

[66] Toujours en respectant les règles de publication scientifique introduites au début de ce livre

Exemple :

Considérons le test T de Student de la différence des moyennes de deux échantillons non appariés {Test, Référence} que nous avions démontré ci-dessus :

$$T_{\alpha/2,n_1+n_2-2} = \frac{(\bar{X}_T - \bar{X}_R) - (\mu_T - \mu_R)}{\hat{\sigma}_D\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \quad (5.7.2170)$$

On connaît alors les deux bornes suivantes de l'intervalle de confiance :

$$\begin{aligned} \text{LCL} &= (\bar{X}_T - \bar{X}_T) - T_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\hat{\sigma}_D\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \\ \text{UCL} &= (\bar{X}_T - \bar{X}_T) + T_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\hat{\sigma}_D\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \end{aligned} \quad (5.7.2171)$$

Remarque

On parle dans ce cas particulier de test "TB" pour "bi-test unilatéral".

Nous supposerons que la F.D.A. exige :

$$\begin{aligned} \text{LSL} &= -0.2\mu_R \\ \text{USL} &= +0.2\mu_R \\ \delta_L &= 80\% \\ \delta_U &= 120\% \end{aligned} \quad (5.7.2172)$$

Considérons que les mesures nous ont donné :

$$\begin{aligned} \bar{X}_T &= 80.272 \\ \bar{X}_R &= 82.559 \\ n_1 &= n_2 = 12 \\ T_{\alpha/2,n_1+n_2-2} &= T_{5\%,22} = 1.717 \\ \hat{\sigma}_D &= 9.145 \end{aligned} \quad (5.7.2173)$$

Par conséquent, nous avons les limites d'équivalence qui seront :

$$\left.\begin{aligned} \text{LSL} &= -0.2\mu_R \\ \text{USL} &= +0.2\mu_R \end{aligned}\right\} = 0.2 \cdot 82.559 \cong \pm 16.61 \qquad (5.7.2174)$$

Les intervalles de confiance sont donnés par :

$$(80.272 - 82.559) \pm 1.717 \cdot 9.145\sqrt{0.167} \qquad (5.7.2175)$$

Dès lors :

$$(\text{LCL}, \text{UCL}) = (-8.698, 4.123) \qquad (5.7.2176)$$

Comme nous avons :

$$(\text{LCL}, \text{UCL}) \subset (\text{LSL}, \text{USL}) \qquad (5.7.2177)$$

L'équivalence est alors considérée par consensus d'experts comme "prouvée".

Revenons maintenant au « *Une absence de preuve n'est pas une preuve d'absence.* » mais en se basant cette fois-ci sur une approche bayésienne.

Il y a une différence entre ne pas regarder et donc ne pas voir un seul X, et regarder et ne pas voir un seul X. Ce dernier est une 'évidence', le premier ne l'est pas.

Donc l'hypothèse testée sera «*Il y a une licorne dans ce champ derrière la colline.*» Alice reste où elle est et ne regarde pas. S'il y a une licorne dans le champ, Alice n'en voit pas. S'il n'y a pas de licorne dans le champ, Alice n'en voit pas. $P(\text{ne voit pas de licorne} \mid \text{une licorne}) = P(\text{ne voit pas de licorne} \mid \text{pas licorne}) = 1$. Lorsque l'hypothèse n'apporte aucune différence à l'observation, la 'preuve' apportée par l'observation à la croyance en l'hypothèse est nulle.

Bob grimpe au sommet de la colline et regarde le champ en contrebas. Il ne voit aucune licorne. S'il y avait une licorne dans le champ, Bob la verrait. S'il n'y avait pas de licorne dans le champ, Bob ne verrait pas de licorne. $P(\text{ne voit pas de licorne} \mid \text{une licorne}) \neq P(\text{ne voit pas de licorne} \mid \text{pas licorne})$. Lorsque l'hypothèse, étant vraie ou fausse, modifie la probabilité de l'observation, une 'preuve' est apportée. Regarder et ne voir aucune licorne dans le champ est une 'preuve' positive de l'absence de licornes dans le champ.

Nous pouvons quantifier l'évidence en utilisant la probabilité bayésienne :

$$\begin{aligned} P(H_1 \mid O) &= \frac{P(O \mid H_1)\, P(H_1)}{P(O)} \\ P(H_2 \mid O) &= \frac{P(O \mid H_2)\, P(H_2)}{P(O)} \end{aligned} \qquad (5.7.2178)$$

où H_1 est « *il n'y a pas de licorne dans ce champ* ». H_2 est « *il y a une licorne dans ce champ* », et O est « *je ne vois pas de licorne* ». Divisons l'un par l'autre :

$$\frac{P(H_1 \mid O)}{P(H_2 \mid O)} = \frac{P(O \mid H_1)\, P(H_1)}{P(O \mid H_2)\, P(H_2)} \qquad (5.7.2179)$$

En cours de traduction de l'anglais

Prenons le logarithmes pour rendre la multiplication additive :

$$\log\left(\frac{P(H_1 \mid O)}{P(H_2 \mid O)}\right) = \log\left(\frac{P(O \mid H_1)}{P(O \mid H_2)}\right) + \log\left(\frac{P(H_1)}{P(H_2)}\right) \quad (5.7.2180)$$

Nous interprétons cela comme signifiant que la vraisemblance bayésienne en faveur de H_1 sur H_2 après l'observation est égale à l'évidence en faveur de H_1 sur H_2 issue de l'observation, plus la vraisemblance bayésienne en faveur de H_1 sur H_2 avant l'observation. L'évidence additive issue de l'expérience est quantifiée comme suit :

$$\log\left(\frac{P(O \mid H_1)}{P(O \mid H_2)}\right) \quad (5.7.2181)$$

Ce dicton repose sur des affirmations telles que l'absence de licornes dans l'univers, fondées sur le simple fait d'en avoir observé une infime partie sans en avoir vu aucune. À proprement parler, il existe des évidences non nulles, mais proches de zéro, car elles sont liées au logarithme du volume d'espace et de temps parcouru divisé par le volume de l'univers dans son entier.

En résumé : l'absence de preuve est la preuve de l'absence, mais la force de cette preuve dépend de la force de votre test (sa probabilité de réussite si la chose existait).

5.7.13.7 Test C de Cochran

Le test C de Cochran a pour but de vérifier l'homogénéité des variances pour plusieurs populations. Il s'agit d'un test préliminaire ou ultérieur (post hoc) utile à faire avant de faire une analyse ANOVA équilibrée (équilibrée) et recommandé par la norme ISO 5725 (comme le test de Tukey que nous verrons bien plus loin) !

Bien que l'idée du test C de Cochran soit empirique, elle est néanmoins intuitive, tout comme les définitions des tests de Dixon et de Grubbs. Pourquoi alors présentons-nous dans ce livre en détail la preuve du test C de Cochran alors que nous avons mentionné que nous ne ferions pas cela pour le test de Grubbs et Dixon car l'approche de ces derniers était également empirique ? La raison est simple en fait : le test de Grubbs et Dixon nécessite, au moins à notre connaissance, des simulations de Monte Carlo pour déterminer les valeurs critiques de rejet ou d'acceptation de l'hypothèse nulle, alors que la valeur critique du test C de Cochran peut être obtenue relativement facilement analytiquement.

Cela dit ... nous définissons le test C de Cochran par le ratio :

$$C_j = \frac{S_j^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} S_i^2} \quad (5.7.2182)$$

où les S_i sont les variances sans biais des N différentes sources de données, chacune composée de n échantillons et l'hypothèse nulle est intuitivement l'égalité des variances par rapport à l'hypothèse alternative que l'une des variances est trop grande (c'est-à-dire : mauvais) et écartée car considérée comme une variance aberrante.

L'ISO 5725 recommande de répéter ce test jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de variance aberrante (donc trop grande ET loin des autres variances).

En cours de traduction de l'anglais

Pour déterminer la valeur critique, inversons la définition du test C de Cochran et faisons quelques manipulations algébriques de base :

$$C_j^{-1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}S_i^2}{S_j^2}=\frac{S_j^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{N}S_i^2-S_j^2\right)}{S_j^2}=1+\frac{\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{N}S_i^2}{S_j^2} \quad (5.7.2183)$$

Nous notons que le deuxième terme de la dernière égalité ressemble à peu près à une loi de Fisher. Comme la loi de Fisher n'est pas stable pour l'addition, nous devrions trouver un moyen de transformer le terme :

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{N}S_i^2 \quad (5.7.2184)$$

en une seule variance. L'idée est alors relativement simple mais comme toujours fallait encore quelqu'un pour y penser ... Nous savons que les S_i sont des équations de variances non biaisées avec un facteur $1/(n-1)$. Donc si les N échantillons (niveaux) sont indépendants, la variance globale est alors par stabilité de la loi Normale et en prenant les notations traditionnelles de l'ANOVA :

$$\begin{aligned}S^2_{\text{global}-j}&=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}S_i^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\frac{Q_i}{n-1}=\frac{1}{(N-1)(n-1)}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}Q_i\\&=\frac{1}{(N-1)(n-1)}Q_{\text{global}-j}=\frac{Q_{\text{global}-j}}{(N-1)(n-1)}\end{aligned} \quad (5.7.2185)$$

Dès lors :

$$C_j^{-1}=1+\frac{\frac{N-1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}S_i^2}{S_j^2}=1+(N-1)\frac{\frac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}S_i^2}{S_j^2}=1+(N-1)\frac{\frac{Q_{\text{global}-j}}{(N-1)(n-1)}}{\frac{Q_j}{n-1}} \quad (5.7.2186)$$

On reconnaît dans la dernière égalité le rapport du carré de deux variances. Nous avons alors identiquement à ce que nous avons prouvé dans notre étude de l'ANOVA à un facteur fixe sans réplications :

$$F_{n-1,(N-1)(n-1)}=\frac{S_j^2}{S^2_{\text{global}-j}}=\frac{\frac{Q_j}{n-1}}{Q_{\text{global}-j}}(N-1)(n-1) \quad (5.7.2187)$$

et alors il vient :

$$C_j^{-1}=1+\frac{N-1}{F_{n-1,(N-1)(n-1)}} \quad (5.7.2188)$$

qui est donc indépendant de j et donc le test C de Cochran unilatéral gauche (puisque par définition le rapport de Cochran doit être le plus petit possible) aura pour valeur critique :

$$C(\alpha,N,n)=\left(1+\frac{N-1}{F_{n-1,(N-1)(n-1)}}\right)^{-1} \quad (5.7.2189)$$

En cours de traduction de l'anglais

Si nous considérons un test avec un niveau de signification de $1-\alpha$ (correspondant donc à la probabilité cumulée de ne pas commettre d'erreur de type I) et nous le réitérons indépendamment une seconde fois. Alors, si les tests sont indépendants, selon l'axiome des probabilités, la probabilité de ne pas commettre d'erreur de type I sera donnée par le produit des probabilités :

$$(1-\alpha)(1-\alpha)=(1-\alpha)^2 \tag{5.7.2190}$$

et ainsi de suite pour n tests. On remarque vite que la probabilité cumulée de ne pas commettre d'erreur de type I diminue très rapidement. Par exemple, pour 10 tests répétés indépendants avec un niveau 5%, alors nous avons :

$$(1-\alpha)^n=(1-5\%)^{10}\cong 59\% \tag{5.7.2191}$$

ce qui est catastrophique ! Donc si l'on veut un niveau de confiance sur des tests répétés d'une certaine valeur que l'on notera α_r, il est clair qu'il faut résoudre l'équation suivante :

$$(1-\alpha)^n=(1-\alpha_r) \tag{5.7.2192}$$

Donc (relation parfois nommée "équation de Šidàk") :

$$\alpha=1-(1-\alpha_r)^{1/n}=1-\frac{1}{(1-\alpha_r)^n} \tag{5.7.2193}$$

et avec une développement de Taylor au second ordre, il vient (voir section Séquences et Séries page 1677) :

$$\alpha=1-(1-\alpha_r)^{1/n}\cong 1-(1-n\alpha_r)=n\alpha_r \tag{5.7.2194}$$

que nous appelons "approximation de Bonferroni" ou parfois aussi "approximation Boole" ou encore "approximation de Dunn".

Erreurs de traduction de l' anglais

Remarque

En statistiques, le "taux d'erreur de groupe" (TER) est la probabilité de faire une ou plusieurs fausses découvertes ou des erreurs de type I lors de l'exécution de plusieurs tests d'hypothèses (généralement pendant les méta-analyses).

Donc au final, nous avons pour le test C de Cochran :

$$C(\alpha,N,n)=\left(1+\frac{N-1}{F_{\alpha/N,n-1,(N-1)(n-1)}}\right)^{-1} \tag{5.7.2195}$$

que nous pouvons calculer avec la version anglaise de Microsoft Excel 14.0.6123 en utilisant la formule suivante :

```
=1/(1+(N-1)/FINV(ALPHA/N,n-1,(N-1)*(n-1)))
```

Remarque

Nous avons avantage ici à supposer que tous les tests sont indépendants les uns des autres. Dans les applications pratiques, ce n'est souvent pas le cas. En fonction de la structure de corrélation des tests, la correction de Bonferroni pourrait être extrêmement conservatrice, conduisant à un taux élevé de faux négatifs ! ! !

5.7.13.8 Taux d'erreur de groupe (p-valeurs ajustées)

Le "taux d'erreur de groupe" (TDEG), parfois aussi appelé "taux d'erreur de famille (ou encore "taux d'erreur par expérience") est la probabilité de commettre des erreurs de type I dans l'ensemble (généralement pendant les méta-analyses).

Le "taux de fausses découvertes" (TDFD) est la proportion attendue de faux rejets parmi tous les rejets (généralement aussi pendant les méta-analyses).

Avant de passer à la partie mathématiques, rappelons le cas célèbre de l'équipe de Nosek qui a invité des chercheurs à participer à un projet d'analyse de données participatives. La configuration était simple. Les participants ont tous reçu le même ensemble de données et le même message : les arbitres de football donnent-ils plus de cartons rouges aux joueurs à la peau foncée qu'aux joueurs à la peau claire ? Il leur a ensuite été demandé de soumettre leur approche analytique aux commentaires des autres équipes avant de plonger dans l'analyse.

Vingt-neuf équipes totalisant 61 analystes ont participé à cette étude. Les chercheurs ont utilisé une grande variété de méthodes, allant - pour ceux d'entre vous intéressés par le gore méthodologique - des simples techniques de régression linéaire aux régressions complexes à plusieurs niveaux et aux approches bayésiennes. Ils ont également pris différentes décisions sur les variables secondaires à utiliser dans leurs analyses.

Malgré l'analyse des mêmes données, les chercheurs ont obtenu une variété de différents résultats. Vingt équipes ont conclu que les arbitres de football donnaient plus de cartons rouges aux joueurs à la peau foncée, et neuf équipes n'ont trouvé aucune relation significative entre la couleur de la peau et les cartons rouges.

En cours de traduction de l'anglais

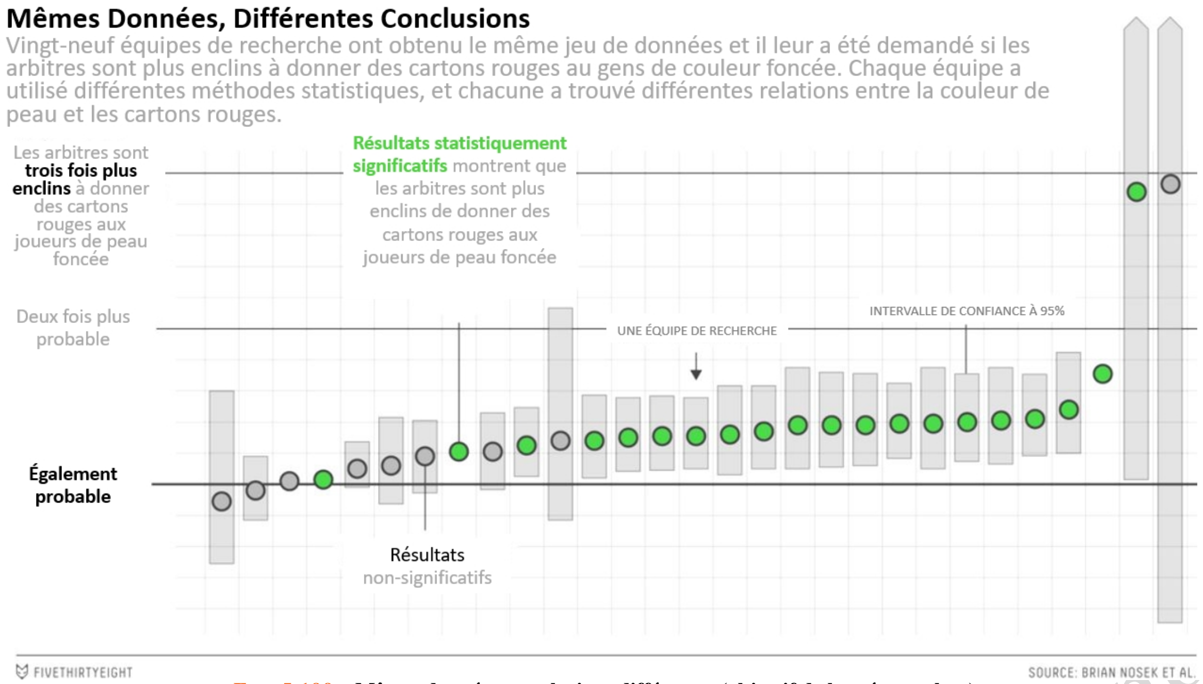


FIG. 5.199 – **Mêmes données, conclusions différentes (objectif de la méta-analyse)**

La variabilité des résultats n'était pas due à une fraude ou à un travail bâclé. Il s'agissait d'analystes hautement compétents, motivés pour trouver la la conclusion la plus vraisemblable, a déclaré Eric Luis Uhlmann, psychologue à l'école de commerce Insead de Singapour et l'un des chefs de projet. Même les chercheurs les plus qualifiés doivent faire des choix subjectifs qui peuvent ont un impact énorme sur le résultat qu'ils trouvent.

C'est pourquoi il est essentiel de savoir comment gérer plusieurs $p$valeurs et surtout lorsque des vies sont concernées par le résultat (rappelez-vous la méta-analyse de l'influence de l'hydroxychloroquine pendant la période du COVID-19 en 2020).

La méthode la plus couramment utilisée qui contrôle le TDEG au niveau α est la méthode de Bonferroni vue juste plus haut. Rappelons cette dernière !

- La probabilité de faire une erreur de Type I en ne traitant qu'un test spécifique est notée $\alpha[\text{PT}]$ (appelée "alpha par test"). Elle est également nommé "alpha d'étendue test".
- La probabilité de faire au moins une erreur de type I pour la globalité d'une famille de tests est notée $\alpha[\text{PF}]$ (appelée "alpha par famille de tests"). Elle est également appelée "alpha d'étendue de famille de tests" ou plus rarement "alpha d'étendue expérimentale".

Lors de notre étude du test C de Cochran précédemment (voir page 1086) nous avons vu que la correction de Bonferroni pour plusieurs tests était notée par (en supposant l'indépendance !) :

$$\alpha[\text{PF}] = 1 - (1 - \alpha[\text{PT}])^n \quad (5.7.2196)$$

où n est le nombre de tests.

En cours de traduction de l'anglais

Également au cours de notre étude du test C de Cochran plus haut, nous avons déduit l'approximation de Taylor du premier ordre suivante :

$$\alpha[\text{PF}] \cong n\alpha[\text{PT}] \tag{5.7.2197}$$

Les équations de Sidak-Bonferonni peuvent être utilisées pour trouver la valeur de $\alpha[\text{PT}]$ lorsque $\alpha[\text{PF}]$ est fixé. Par exemple, supposons que nous voulions effectuer quatre tests indépendants, et que nous voulions limiter le risque de faire au moins une erreur de type I à une valeur globale de $\alpha[\text{PF}] = 0.05$, nous considérerons un test comme significatif si sa probabilité associée est inférieure à (dans le cas de quatre tests associés) :

$$\alpha[\text{PT}] = 1 - (1 - \alpha[\text{PF}])^{1/n} = 1 - (1 - .05)^{1/4} = 0.0127 \tag{5.7.2198}$$

Avec l'approximation de Bonferroni, un test considéré comme significatif si sa probabilité associée est inférieure à :

$$\alpha[\text{PT}] = \frac{\alpha[\text{PF}]}{n} = \frac{0.05}{4} = 0.0125 \tag{5.7.2199}$$

En anglais

Remarque

Parfois, nous pouvons avoir :

$$\alpha[\text{PF}] \cong n\alpha[\text{PT}] > 1 \tag{5.7.2200}$$

C'est pourquoi il n'est pas rare dans la littérature de retrouver cette dernière relation sous la forme :

$$\alpha[\text{PF}] \cong \{n\alpha[\text{PT}], 1\}_1 \tag{5.7.2201}$$

ou :

$$\alpha[\text{PF}] \cong \min\{n\alpha[\text{PT}], 1\} \tag{5.7.2202}$$

Ce qui signifie simplement que si $n\alpha[\text{PT}] > 1$, alors nous remplaçons le résultat par 1.

✍**Exemple :**

Considérons quatre hypothès nulles $H_1, \ldots, H_4$ avec les p-valeurs respectives :

$$p_1 = 0.01, p_2 = 0.04, p_3 = 0.03, p_4 = 0.005 \tag{5.7.2203}$$

à tester au niveau de signification $\alpha = 0.05$. Nous testons d'abord $0.01 \cdot 4 = 0.04 < 0.05$: nous rejetons $H_{0(1)}$. Après avoir testé $0.04 \cdot 4 = 0.16 > 0.05$: nous ne rejetons pas $H_{0(2)}$. Après avoir testé $0.03 \cdot 4 = 0.12 > 0.05$: nous ne rejetons pas $H_{0(3)}$. Enfin, nous testons $0.005 \cdot 4 = 0.02 < 0.05$: nous rejetons $H_{0(4)}$.

La méthode Bonferroni est garantie de contrôler le TDER, mais elle pose un gros problème. Elle réduit considérablement notre capacité à détecter les différences réelles. Par exemple, supposons que la taille de l'effet est de 2 et que nous effectuons un test T de Student, rejetant

l'hypothès nulle pour $p < 0.05$. Avec 10 observations par groupe, la puissance est de 99%. Supposons maintenant que nous ayons $1'000$ tests et que nous utilisions la méthode Bonferroni. Cela signifie que pour rejeter l'hypothès nulle, nous avons besoin de $p < 0000005$. La puissance n'est plus que de 29%. Si nous avons $10'000$ tests (ce qui est petit pour les études génomiques), la puissance n'est que de 10%.

5.7.13.8.1 Correction de Holm-Bonferroni

La méthode de "correction de Holm-Bonferroni" est la suivante :

- Soit $H_1, \ldots, H_m$ une famille (groupe) de m hypothèses nulles et $p_1, \ldots, p_m$ les p-valeurs correspondantes.
- Nous commençons par classer les p-valeurs (de la plus petit à la plus grande) $p_{(1)} \ldots p_{(m)}$ et nous laissons les hypothèses associées être $H_{(1)}, \ldots, H_{(m)}$.
- Pour un niveau de signification donné α, soit k l'indice minimal tel que $p_{(k)} > \frac{\alpha}{m+1-k}$.
- Nous rejetons $H_{(1)}, \ldots, H_{(k-1)}$ et ne rejetons pas $H_{(k)}, \ldots, H_{(m)}$.
- Si $k = 1$ alors nous ne rejetons aucune des hypothèses nulles et si aucun k n'existe alors nous rejetons toutes les hypothèses nulles.

Cette méthode garantit que le TDEG $\leq \alpha$, où pour rappel TDEG est le taux d'erreur de groupe.

Démonstration 5.46.6. Holm-Bonferroni contrôle le TDEG comme suit : Soit $H_{(1)}, \ldots, H_{(m)}$ une famille d'hypothèses, et $p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \ldots \leq p_{(m)}$ les p-valeurs triées. Soit I_0 l'ensemble des indices correspondant aux vraies (inconnues) hypothèses nulles, ayant m_0 membres.

Supposons que nous rejetions à tort une hypothèse vraie. Nous devons prouver que la probabilité de cet événement est au plus de α.

Soit h la première hypothèse vraie rejetée (la première dans l'ordre donné par le test de Holm-Bonferroni). Alors $h-1 \leq m-m_0$ sont toutes de fausses hypothèses rejetées et $h-1 \leq m-m_0$. De là, on obtient :

$$\frac{1}{m-h+1} \leq \frac{1}{m_0} \tag{5.7.2204}$$

étant donné que h est rejeté nous avons :

$$p_{(h)} \leq \frac{\alpha}{m-h+1} \tag{5.7.2205}$$

par définition du test. En utilisant la relation précédente, le côté droit est au plus α/m_0. Ainsi, si nous rejetons à tort une hypothèse vraie, il doit y avoir une hypothèse vraie avec une p-valeur au plus égale à α/m_0.

Définissons donc la variable aléatoire $A = \left\{P_i \leq \frac{\alpha}{m_0} \text{ pour } i \in I_0\right\}$. Quel que soit l'ensemble (inconnu) d'hypothèses vraies I_0, nous avons $P(A) \leq \alpha$ (par les inégalités de Bonferroni). Par conséquent, la probabilité de rejeter une hypothèse vraie est au plus α.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

✍**Exemple :**

Considérons quatre hypothèses nulles $H_1, \ldots, H_4$ avec p-valeurs :

$$p_1 = 0.01, p_2 = 0.04, p_3 = 0.03, p_4 = 0.005 \tag{5.7.2206}$$

à tester au niveau de signification $\alpha = 0.05$. Puisque la procédure est progressive (step-down), nous testons d'abord $H_4 = H_{(1)}$, qui a la plus petite p-valeur$p_4 = p_{(1)} = 0.005$. La p-valeur est comparée à :

$$\frac{\alpha}{m+1-k} = \frac{\alpha}{4+1-1} = \frac{0.05}{4} = 0.0125 \tag{5.7.2207}$$

l'hypothèse nulle est rejetée et nous passons à la suivante. Puisque $p_1 = p_{(2)} = 0.01$ et :

$$\frac{\alpha}{m+1-k} = \frac{\alpha}{4+1-2} = \frac{0.05}{3} = 0.0167 \tag{5.7.2208}$$

nous rejetons $H_1 = H_{(2)}$ ainsi que $0.01 < 0.167$ et continuons. L'hypothèse suivante H_3 n'est pas rejetée puisque $p_3 = p_{(3)} = 0.03$ et :

$$\frac{\alpha}{m+1-k} = \frac{\alpha}{4+1-3} = \frac{0.05}{2} = 0.025 \tag{5.7.2209}$$

alors $0.03 > 0.025$. Nous avons notre k qui est égal à $k = 3$. Nous arrêtons de tester et concluons que H_1 et H_4 sont rejetés et que H_2 et H_3 ne sont pas rejetés lors du contrôle du taux d'erreur de groupe au niveau $\alpha = 0.05$. Notez que bien que $p_2 = p_{(4)} = 0.04 < 0.05 = \alpha$ s'applique, H_2 n'est pas rejeté. En effet, la procédure de test s'arrête une fois qu'un échec de rejet se produit.

En cours ... is

5.7.13.8.2 Correction de Holm–Šidák

Comme nous le savons, la correction de Bonferroni vue plus haut n'est qu'une approximation (série de Taylor du premier ordre) de la correction de Šidák.

Il est donc possible de remplacer :

$$\frac{\alpha}{m}, \frac{\alpha}{m-1}, \ldots, \frac{\alpha}{1} \tag{5.7.2210}$$

avec :

$$1-(1-\alpha)^{1/m}, 1-(1-\alpha)^{1/(m-1)}, \ldots, 1-(1-\alpha)^{1} \tag{5.7.2211}$$

résultant en un test légèrement plus puissant et nommé la "Correction de Holm–Šidák".

5.7.13.9 Tests d'adéquation (tests de qualité d'ajustement)

La qualité de l'ajustement (QdA) d'un modèle statistique décrit dans quelle mesure il s'adapte à un ensemble d'observations. Les mesures de qualité de l'ajustement résument généralement l'écart entre les valeurs observées et les valeurs attendues dans le modèle en question. De telles mesures peuvent être utilisées dans le test d'hypothèses statistiques, par ex. pour tester la Normalité des résidus, pour tester si deux échantillons sont tirés de distributions identiques (voir le test de Kolmogorov - Smirnov plus loin), ou si les fréquences des résultats suivent une distribution spécifiée (voir le test du chi carré de Pearson ci-dessous).

5.7.13.9.1 Test de QdA du khi-carré de Pearson

Nous étudierons ici notre premier test non paramétrique de QdA, certainement l'un des plus connus et des plus simples (qui ne s'applique qu'aux données non censurées à notre connaissance).

Pour introduire ce test, supposons qu'une variable aléatoire suit une distribution de probabilité P. Si l'on tire un échantillon de la population correspondant à cette loi, la distribution observée, nommée "distribution d'échantillonnage", s'écarte toujours plus ou moins de la distribution théorique, compte tenu des fluctuations d'échantillonnage.

Généralement, on ne connaît pas la forme de la loi P, ni la valeur de ses paramètres. C'est la nature du phénomène étudié et l'analyse de la distribution observée qui permettent de choisir une loi susceptible d'être adéquate et ensuite d'estimer les paramètres.

Les différences entre la loi théorique et la distribution observée peuvent être attribuées soit aux fluctuations d'échantillonnage, soit au fait que le phénomène ne suit pas, en réalité, la loi supposée.

Fondamentalement, si les écarts sont suffisamment petits, nous supposerons qu'ils sont dus à des fluctuations aléatoires et nous accepterons (nous ne rejeterons pas en fait !) la loi supposée. Au contraire, si les écarts sont trop importants, on en concluera qu'ils ne peuvent pas être expliqués uniquement par les fluctuations et que le phénomène ne suit pas la loi supposée (nous rejeterons l'hypothèse nulle).

Pour évaluer ces lacunes et prendre une décision, nous avons besoin de :

1. Définir la mesure de la distance entre la distribution empirique et le théorique résultant de la loi de retenue.
2. Déterminer la loi de probabilité suivie de la variable aléatoire étant donnée la distance (en fait malheureusement pas rejeter l'hypothèse nulle).
3. Énoncer une règle de décision pour dire à partir de la distribution observée, si la loi choisie est acceptable ou non.

Dans un premier temps, nous aurons besoin à cet effet du théorème central limite et en second

En cours de traduction de l'anglais

lieu rappelons que lors de la construction de la loi normale, nous avons prouvé que la variable :

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad (5.7.2212)$$

suit une distribution Normale centrée réduite lorsque n s'approche de l'infini (condition de Laplace) et que la probabilité p était très petite.

En pratique, l'approximation est tout à fait acceptable.,. dans certaines entreprises ... et quand $np > 5$ et $p \leq 0.5$ alors (c'était l'un des termes qu'il devait tendre vers zéro quand on avait fait la preuve) :

$$\frac{q}{\sqrt{npq}} \cong 0.3 \qquad (5.7.2213)$$

Par exemple dans les deux figures ci-dessous où nous avons représenté les lois binomiales approchées par les lois Normales associées, nous avons à gauche $n = 60, p = 1/6, np = 10$ et à droite $n = 40, p = 0.05, np = 2$:

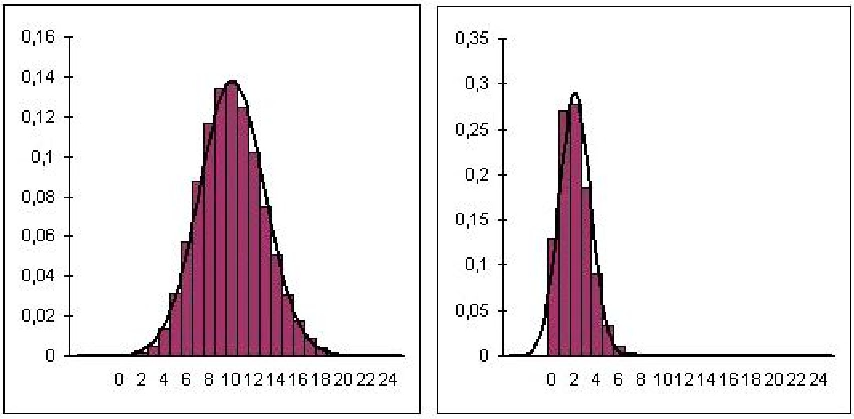


FIG. 5.200 – Approche des fonctions binomiales par les fonctions Normales associées

En cours ... nglais

Enfin, rappelez-vous que nous avons prouvé que la somme des carrés de n variables aléatoires linéairement indépendante et distribuées selon une Normale centrée réduite suivait alors une loi de chi-carré avec n degrés de liberté noté $\chi^2(n)$.

Considérons maintenant une variable aléatoire X qui suit une fonction de distribution théorique (continue ou discrète) P et tirons un échantillon de taille n dans la population correspondant à cette loi P.

Les n observations sont distribuées le long de k termes (valeurs de classe) $C_1, C_2, \ldots, C_k$, dont les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont déterminées par la fonction de distribution P (reportez-vous à l'exemple avec la ligne droite Henry page 714).

Pour chaque modalité C_i, la taille de l'échantillon empirique est une variable aléatoire binomiale k_i de paramètres :

$$\beta(n, p_i) \qquad (5.7.2214)$$

Ce nombre k_i correspond en effet au nombre d'événements réussis : "résultat égal à la modalité C_i" de probabilité p_i, obtenu lors de l'échantillonnage sur n éléments du lot expérimental (et non dans la population de la loi théorique comme avant !).

Nous avons prouvé plus haut au cours de notre étude de la loi binomiale que son espérance était :

$$\mathrm{E}(k_i) = np_i \tag{5.7.2215}$$

et représente pour le coup la taille théorique d'échantillon de la modalité C_i et que sa variance était donnée par (lorsque n est très grand et p_i très petite) :

$$\mathrm{V}(k_i) = np_iq_i = np_i(1-p_i) \cong np_i \tag{5.7.2216}$$

Son écart-type est donc :

$$\sigma_{k_i} = \sqrt{np_i} \tag{5.7.2217}$$

Dans ces conditions, à condition que la modalité C_i ait une taille np_i au moins égale à 5, la variable centrée réduite :

$$E_i = \frac{k_i - np_i}{\sqrt{np_i}} = \frac{k_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{5.7.2218}$$

entre la taille de l'échantillon empirique et théorique peut être approximativement considérée comme une variable Normale centrée réduite comme nous l'avons prouvé plus haut. Cette relation est également nommée "résiduel de Pearson" pour la valeur i, et elle compare les dénombrements observés aux dénombrements attendus. Le signe (positif ou négatif) indique si la fréquence observée k_i est supérieure ou inférieure à la valeur ajustée sous le modèle, et la magnitude indique le degré d'écart. Lorsque les données ne correspondent pas à un modèle, l'examen des résidus de Pearson aide souvent à diagnostiquer où le modèle a échoué.

Nous définissons maintenant la variable :

$$D = \sum_{i=1}^{N} E_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i} \tag{5.7.2219}$$

où k_i est souvent nommé la "fréquence expérimentale" et np_i la "fréquence théorique".

Si nous prenons le carré, c'est que dans une simple somme certains termes s'annuleraient par des effets opposés et masqueraient ainsi les différences, si nous prenons la somme des valeurs absolues, le tableau statistique de D serait difficile à construire et le test ne serait pas très robuste en raison de la faible écart des distances. Le carré permet non seulement d'avoir un tableau statistique utilisable de D qui est simple puisqu'il est basé sur une loi avec un seul paramètre, comme nous le verrons, et le carré augmente aussi suffisamment la robustesse du test.

Notez que cette variable est aussi parfois (un peu malheureusement) désignée par :

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \tag{5.7.2220}$$

ou plus souvent (le E_i ci-dessous n'est pas le même que le précédent E_i juste au-dessus ! ! !) :

$$\boxed{D = \sum_{i=1}^{N} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}} \tag{5.7.2221}$$

En cours de traduction de l'anglais

où :

$$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{5.7.2222}$$

est communément appelé, comme déjà mentionné ci-dessus, un "résidu de Pearson".

Cette variable D, somme des variables E_i au carré, fournit une mesure d'une «distance» entre la distribution empirique et théorique et la distribution empirique. Notons cependant qu'il ne s'agit pas d'une distance au sens mathématique habituel (topologique).

Rappelons que D peut donc aussi s'écrire :

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(k_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \tag{5.7.2223}$$

D est donc la somme des carrés de N variables aléatoires Normales centrées réduites liées par la relation linéaire simple :

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_N = n \tag{5.7.2224}$$

où n est la taille de l'échantillon. Donc D suit une distribution chi-carré, mais avec $N-1$ degrés de liberté, donc un degré de moins à cause de la relation linéaire unique entre eux ! En effet, rappelons que le degré de liberté est le nombre de variables indépendantes dans la somme et pas seulement le nombre de termes additionnés !

Dès lors :

$$D = \chi^2(N-1) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i} \tag{5.7.2225}$$

Nous appelons ce test le "test non paramétrique du chi carré" ou "test du chi carré de Pearson" ou "test d'ajustement du chi carré" ou "test de Karl Pearson" ou encore "test de qualité de l'ajustement du chi carré"...

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Il existe de nombreux tests statistiques contenant le mot "chi-carré". Par exemple :

- Test de qualité de l'ajustement du chi-carré (nous permet de déterminer si une distribution de population spécifiée est valide)
- Test du chi carré d'association / indépendance (nous permet de déterminer si la distribution d'une variable a été influencée par une autre variable)
- Test d'homogénéité du chi-carré (nous permet de comparer deux ou plusieurs proportions de population)
- Test du chi carré pour les valeurs aberrantes (nous permet de détecter s'il existe au moins une valeur aberrante en comparaison d'une distribution spécifique)
- Test du chi carré pour la différence de deux données de comptage (cas particulier

du test d'homogénéité avec une seule catégorie !)

Même si tous ces tests ont des objectifs différents, leur cadre mathématique et leur procédure sont EXACTEMENT les mêmes et donc l'un de ces quatre tests peut être exécuté pour obtenir en même temps les quatre conclusions avec les mêmes p-valeurs et la même valeur du chi-carré critique ! ! !

On voit aussi par ailleurs que le résidu de Pearson au carré est la contribution individuelle à la statistique du χ^2 de Pearson.

Ensuite, la traditions est de déterminer la valeur de la distribution du chi-carré avec $N-1$ degrés de liberté avec une probabilité 5% d'être dépassée. Ainsi, dans l'hypothèse que le phénomène étudié suit la distribution théorique P, il y a donc une probabilité cumulative de 95% que la variable D prenne une valeur inférieure à celle donnée par la distribution du khi-deux.

Si la valeur de la loi du khi-carré obtenue à partir de l'échantillon est inférieure à celle correspondant à 95% de probabilité cumulée, on ne rejette pas l'hypothèse nulle que le phénomène suit la loi P.

Remarques

R1. Rappelons que le fait que l'hypothèse de la loi P soit acceptée ne signifie pas que cette hypothèse est vraie, mais simplement que les informations données par l'échantillon ne permettent pas de la rejeter. De même, le fait que l'hypothèse de la loi P soit rejetée ne signifie pas nécessairement que cette hypothèse est fausse mais que les informations fournies par l'échantillon conduisent plutôt à la conclusion que l'inadéquation d'une telle loi.

R2. Pour que la variable D suive une loi du khi-deux, il faut que les valeurs théoriques np_i des différentes modalités C_i soient au moins égales à 5, que l'échantillon ait été tiré au hasard (pas de corrélation) et que les probabilités p_i ne soient pas proches de zéro.

Ce test de qualité d'ajustement souffre cependant d'un problème majeur : il nécessite de regrouper les mesures en classes C_i et en pratique il n'y a pas de théorème absolu (du moins à ce que l'on sache) pour choisir le nombre de classes sauf la règle de Sturge prouvée plus tôt. C'est pour cette raison que le test d'adéquation du Khi-2 est réservé aux distributions discrètes où le problème du choix des classes ne se pose pas.

Cependant, nous devrons créer des tests de qualité d'ajustement qui ne nécessitent pas l'utilisation de classes et nous verrons juste après des outils ad hoc à cet effet (Kolmogorov-Smirnov ou Anderson-Darling pour ne citer que les plus importants).

✍**Exemple :**

Supposons que les naissances dans un hôpital pendant un certain temps soient les suivantes :

Jour	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**D**	**Total**
Observations	120	130	125	128	80	70	75	728

On note qu'il y a eu un total de 728 naissances. Nous posons alors la question suivante : combien devrait-il y avoir de naissances, en théorie, chaque jour s'il n'y avait pas de différence entre les jours ? Cela représente l'hypothèse nulle H_0. En fait, l'hypothèse nulle stipule que les différences entre les fréquences observées et les fréquences conceptuelles sont relativement faibles. Nous tenons pour acquis que s'il n'y a pas de différence, il devrait y avoir le même nombre de naissances chaque jour. Puisqu'il y a un total de 728 de naissances pour 7 de jours en théorie, il devrait y avoir $728/7 = 104$ de naissances chaque jour. Alors maintenant, nous avons le tableau suivant :

Jour	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**D**	**Total**
Observations	120	130	125	128	80	70	75	728
Attendu	104	104	104	104	104	104	104	104

Le total des fréquences observées est égal au total des fréquences attendues. Le but est donc d'examiner la différence entre les fréquences observées et attendues (supposées suivre une loi uniforme dans ce cas particulier) en utilisant la relation Chi-carré. En d'autres termes, nous faisons un test d'ajustement entre une fonction de distribution empirique (observée) et la fonction de distribution uniforme. Ensuite nous avons :

$$\begin{aligned}
\chi^2(N-1) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \\
&= \frac{(120-104)^2}{104} + \frac{(130-104)^2}{104} + \frac{(125-104)}{104^2} + \frac{(128-104)^2}{104} \\
&+ \frac{(80-104)^2}{104} + \frac{(70-104)^2}{104} + \frac{(75-104)^2}{104} \\
&= \frac{16^2}{104} + \frac{26^2}{104} + \frac{21^2}{104} + \frac{24^2}{104} + \frac{(-24)^2}{104} + \frac{(-34)^2}{104} + \frac{(-29)^2}{104} \\
&= \frac{256}{104} + \frac{676}{104} + \frac{441}{104} + \frac{576}{104} + \frac{576}{104} + \frac{1156}{104} + \frac{841}{104} \\
&= 2.46 + 6.5 + 4.24 + 5.54 + 5.54 + 11.12 + 8.09 = 43.49
\end{aligned} \tag{5.7.2226}$$

Le χ^2 est donc de 43.49. En tant que tel, ce nombre signifie peu. Ce résultat doit être interprété à l'aide de la table des valeurs critiques du χ^2_6. Sans utiliser le tableau, nous comprenons qu'il est très peu probable que la fréquence observée et la fréquence théorique soient identiques. On admet qu'il peut y avoir une différence (on rejette donc l'hypothèse nulle H_0 au profit des hypothèses alternatives H_A).

N'oubliez donc pas que ce test ne s'applique qu'aux données non censurées, c'est-à-dire dont les intervalles sont fermés !

Remarque

Le test ci-dessus est également utilisé comme technique de sélection de caractéristiques dans le Machine Learning et est alors nommé "sélection de caractéristiques du χ^2". L'idée est que si nous avons un ensemble de données avec trop de colonnes (catégorielles ou continues), nous devons en éliminer certaines en investiguant si elles sont statistiquement dépendantes (alors nous pouvons en éliminer une) ou indépendantes (alors nous ne pouvons pas éliminer n'importe laquelle d'entre elles). Notez que pour exécuter cette technique sur des variables continues (colonnes), nous pouvons simplement les regrouper dans des groupes !

5.7.13.9.2 Test de QdA G (G-test)

Nous utilisons le "test de qualité d'ajustement G" ou également nommé plus simplement "test du G^2" (c'est un cas particulier du "test du rapport de vraisemblance" ou du "test du rapport des log-vraisemblance" comme nous le verrons plus loin à la page 1131) quand nous avons une variable nominale et que nous voulons voir si le nombre d'observations dans chaque catégorie correspond à une attente théorique, et la taille de l'échantillon est grande et le total observé des dénombrements et le total attendu des dénombrements est égal !

L'hypothèse statistique nulle est que le nombre d'observations dans chaque catégorie est égal à celui prédit par une théorie, et l'hypothèse alternative est que les nombres observés sont différents de ceux attendus. L'hypothèse nulle est généralement une hypothèse extrinsèque, dans laquelle nous connaissons les proportions attendues avant de faire l'expérience.

La statistique du test G est proportionnelle à la divergence de Kullback–Leibler (voir section Mécanique Statistique page ??) de la distribution théorique de la distri

$$G=2\sum_i O_i\cdot\ln\left(\frac{O_i}{E_i}\right)=2\sum_i No_i\cdot\ln\left(\frac{No_i}{Ne_i}\right)=2N\sum_i o_i\cdot\ln\left(\frac{o_i}{e_i}\right)=2N\,D_{\text{KL}}(o\|e) \tag{5.7.2227}$$

Posons maintenant :

$$O_i=E_i+\delta_i \tag{5.7.2228}$$

avec la contrainte que :

$$\sum_i \delta_i \tag{5.7.2229}$$

tel que le nombre total de comptages reste le même (ie $\sum_i O_i=\sum_i E_i=N$). Le test-G est alors :

$$G=2\sum_i(E_i+\delta_i)\log\left(\frac{E_i+\delta_i}{E_i}\right)=2\sum_i(E_i+\delta_i)\log\left(1+\frac{\delta_i}{E_i}\right) \tag{5.7.2230}$$

Si nous développons en série de Taylor cela autour de :

$$\frac{\delta_i}{E_i}\cong 0 \tag{5.7.2231}$$

En cours de traduction de l'anglais

remarquant que cela suppose $E_i \gg \delta_i$ et donc $E_i \gg 0$ (comme pour le test d'adéquation du chi-carré vu juste plus haut), alors nous savons que pour le logarithme (voir section Séquences et Séries page 1683) :

$$\log(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} \tag{5.7.2232}$$

Dès lors nous obtenons :

$$\begin{aligned}G &= 2\sum_i (E_i+\delta_i)\log\left(1+\frac{\delta_i}{E_i}\right) \cong 2\sum_i (E_i+\delta_i)\left(\frac{\delta_i}{E_i}-\frac{1}{2}\frac{\delta_i^2}{E_i^2}\right)\\ &= 2\sum_i\left(\delta_i - \frac{1}{2}\frac{\delta_i^2}{E_i}+\frac{\delta_i^2}{E_i}-\frac{1}{2}\frac{\delta_i^3}{E_i^2}\right) = 2\sum_i\left(\delta_i+\frac{1}{2}\frac{\delta_i^2}{E_i}+\frac{1}{2}\frac{\delta_i^3}{E_i^2}\right)\\ &\cong 2\sum_i\left(\delta_i+\frac{1}{2}\frac{\delta_i^2}{E_i}\right) = 2\sum_i\left(\frac{2E_i\delta_i+\delta_i}{2E_i}\right) = \sum_i\left(\frac{2E_i\delta_i+\delta_i^2}{E_i}\right) = \sum_i\left(\frac{(E_i+\delta_i)^2-E_i^2}{E_i}\right)\\ &= \sum_i\left(\frac{O_i^2-E_i^2}{E_i}\right)\end{aligned} \tag{5.7.2233}$$

et alors, nous voyons que $G=\chi^2$ quand :

- O_i est proche de E_i
- $\sum_i E_i = \sum_i O_i = N$
- $E_i \gg \delta_i$ ie $E_i \gg 0$

Cependant, plus O_i et E_i sont différents, moins cette approximation fonctionnera bien, et le χ^2 aura tendance à calculer des réponses erronées. Les effets d'une seule valeur aberrante dans un petit ensemble d'échantillons seront plus prononcés, ce qui explique pourquoi le χ^2 échoue souvent dans des situations avec peu de données.

Puisque la valeur χ^2 n'est qu'une approximation de la valeur G, la valeur G peut également être utilisée dans le test de probabilité du chi carré. Il semble qu'actuellement la p-valeur du test G doit être calculée en utilisant les techniques de Monte Carlo.

Remarque

Si le nombre attendu d'observations dans une catégorie est trop petit, le test G peut donner des résultats inexacts, et nous devrions utiliser un test exact à la place (test exact de Fisher en cas d'indépendance comme vu à la page 1235, Test de McNemar en cas de dépendance comme vu à la page 1244). En pratique, c'est une bonne idée de calculer à la fois le χ^2 et le G pour voir s'ils conduisent à des résultats similaires. Si les p-valeurs résultantes sont proches, alors nous pouvons être assez sûrs que l'approximation pour grand échantillon fonctionne bien. De toute évidence, le test de qualité d'ajustement G suppose l'indépendance !

En cours de traduction de l' anglais

5.7.13.9.3 Test de QdA de Kolmogorov-Smirnov

En statistique, le test de Kolmogorov-Smirnov est également un test de qualité d'ajustement (souvent connu comme test de normalité) basé sur une distance empirique utilisée pour déterminer si la distribution d'un échantillon suit une loi bien connue donnée par une fonction de distribution continue (ou pour comparer deux échantillons et vérifier s'ils sont dépendants ou pas ou similaires ou pas). Ce test, ainsi que celui du test QdA du khi-carré n'est valable que pour les données non censurées (du moins pas sans correction obtenue par des simulations numériques).

Pour introduire ce test, nous avons choisi l'approche de Lilliefors qui permet d'éviter des calculs complexes. De plus, les logiciels qui fournissent le "test QdA de Lilliefors" n'offrent pas le test Kolmogorov-Smirnov puisque ce dernier n'est correct qu'asymptotiquement (ce qui est le cas du logiciel Tanagra 4.14).

Imaginons que nous voulions construire un test QdA non paramétrique qui fonctionne à la fois pour les lois discrètes et continues sans subir le même problème que le test de QdA du khi-carré (regroupement en classes).

Pour construire ce test, nous partons de la fonction de distribution empirique déjà définie au début de cette section et donnée pour rappel par :

$$\hat{F}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1_{x_i\leq x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i\leq x}=\frac{\#(i:x_i\leq x)}{n} \quad (5.7.2234)$$

qui appartiennent évidemment à l'intervalle $[0,1]$.

Notons maintenant $F(x)$, la vraie loi supposée dont l'expression analytique est connue et avec laquelle on voudrait comparer $\hat{F}(x)$ et construire la distance :

$$D_n(x)=\hat{F}_n(x)-F(x) \quad (5.7.2235)$$

La distribution de référence peut cependant également provenir d'un autre échantillon de mesure. L'idée est alors simplement de comparer deux distributions empiriques. On parle alors de "test de Kolmogorov-Smirnov pour 2 échantillons indépendants". Certains logiciels gèrent également empiriquement le cas où les deux échantillons n'ont pas la même taille.

Le problème avec ce choix de distance est ... quel x devrions-nous alors choisir pour faire un test ? Eh bien pour répondre il est simple de voir qu'il serait insensé de prendre un x pour lequel cette distance est minime, car avoir un D_n qui peut être presque nul n'ajoute pas beaucoup d'informations (et ce n'est pas très robuste par la même occasion)... Par conséquent, nous nous reportons plutôt vers la plus grande déviation absolue. Ce qui nous amène à redéfinir la distance D_n comme suit :

$$D_n(x)=\sup\left|\hat{F}_n(x)-F(x)\right|=\sup\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1_{x_i\leq x}-F(x)\right| \quad (5.7.2236)$$

où D_n est nommé "distribution empirique de Kolmogorov-Smirnov" (bien sûr, nous devons prouver rigoureusement qu'il s'agit bien d'une distribution ... mais pour l'instant c'est trop

En cours de traduction de l'anglais

complexe en termes du contenu de ce livre mais cela peut être vérifié par des simulations numériques !). Avant d'aller plus loin par rapport à la théorie, regardons un exemple pratique (parce que l'exemple est long on ne le mettra pas dans la case conventionnelle qui représente les exemples habituellement dans ce livre).

Supposons que nous mesurions les cinq valeurs suivantes :

$$-1.2, 0.2, -0.6, 0.8, -1.0 \tag{5.7.2237}$$

c'est-à-dire une fois ordonnées :

$$x_1 = -1.2, x_2 = -1.0, x_3 = -0.6, x_4 = 0.2, x_5 = 0.8 \tag{5.7.2238}$$

Nous voulons tester l'hypothèse nulle suivante :

$$H_0 : \hat{F}(x) = \Phi(x) \tag{5.7.2239}$$

où $\Phi(x)$ est comme d'habitude la fonction de distribution (cumulative) de la distribution Normale centrée réduite.

La fonction de distribution empirique sera donnée par :

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 = \dfrac{0}{n} = \dfrac{0}{5} & \text{pour} \quad x < -1.2 \\ 0.2 = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{5} & \text{pour} \quad -1.2 < x < -1 \\ 0.4 = \dfrac{2}{n} = \dfrac{2}{5} & \text{pour} \quad -1.0 < x < -0.6 \\ 0.6 = \dfrac{3}{n} = \dfrac{3}{5} & \text{pour} \quad -0.6 < x < +0.2 \\ 0.8 = \dfrac{4}{n} = \dfrac{4}{5} & \text{pour} \quad +0.2 < x < +0.8 \\ 1 = \dfrac{5}{n} = \dfrac{5}{5} & \text{pour} \quad x > +0.8 \end{cases} \tag{5.7.2240}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ensuite, nous construisons traditionnellement le tableau suivant :

x	$\hat{F}(x)$	$\Phi(x)$	$\lvert\hat{F}(x) - \Phi(x)\rvert$
-1.2^-	0	0.115	0.115
-1.2	0.2	0.115	0.085
-1.0^-	0.2	0.159	0.041
-1.0	0.4	0.159	0.241
-0.6^-	0.4	0.274	0.126
-0.6	0.6	0.274	**0.326**
$+0.2^-$	0.6	0.580	0.020
$+0.2$	0.8	0.580	0.220
$+0.8^-$	0.8	0.788	0.012
$+0.8$	1	0.788	0.212

Souvent associé au graphique suivant comparant les distributions empiriques (en rouge) et théoriques (en bleu) :

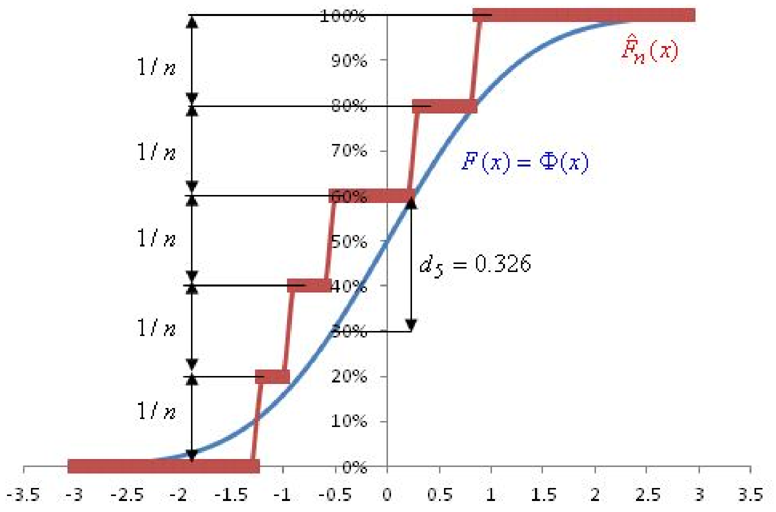


FIG. 5.201 – Représentation de l'approche du test de QdA de Kolmogorov-Smirnov

Nous observons alors que l'écart maximal est de 0.326. Nous noterons cela pour après :

$$d_5 = 0.326 \qquad (5.7.2241)$$

que certains logiciels tels que Minitab ou R désignent par l'abréviation : KS.

Le lecteur aura remarqué que le plus grand écart au-dessus de la courbe se mesure par :

$$D_n^+ = \sup_{i=1}^{n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i) \right\} = \sup_{i=1}^{n} \left\{ \frac{i}{n} - y_i \right\} \qquad (5.7.2242)$$

La plus grande déviation sous la courbe est mesurée par :

$$D_n^+ = \sup_{i=1}^{n} \left\{ F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right\} = \sup_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \frac{i-1}{n} \right\} \qquad (5.7.2243)$$

Le plus grand écart est alors :

$$D_n = \sup_{i=1}^{n} \left\{ D_n^-, D_n^+ \right\} = \sup_{i=1}^{n} \left\{ \frac{i}{n} - y_i, y_i - \frac{i-1}{n} \right\} \qquad (5.7.2244)$$

Mais que pouvons-nous faire avec cette valeur ? À quoi pouvons-nous le comparer ? Eh bien, l'idée est relativement simple et consiste à générer des valeurs n (donc 5 dans notre exemple) à partir de la loi de distribution $F(x)$ de l'hypothèse nulle H_0 et de les comparer à elles-mêmes. En d'autres termes, faire une simulation de Monte Carlo (voir section de Méthodes Numériques page ??).

Ainsi, dans notre exemple, nous générons 5 valeurs aléatoires de $\mathcal{N}(0,1)$ ce qui nous donne par exemple avec Microsoft Excel 11.8346 :

```
=LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(0,1000000)/1000000)
```

On obtient alors 5 valeurs de Z (rappelez-vous que c'est la notation traditionnelle d'une variable aléatoire d'une distribution Normale réduite centrée !) qui ordonnées donneront par exemple :

$$-1.427, 0.082, 0.162, 0.294, 1.292 \qquad (5.7.2245)$$

En cours de traduction de l'anglais

et nous répétons le même tableau que précédemment :

x	$\hat{F}(x)$	$\Phi(x)$	$\lvert\hat{F}(x)-\Phi(x)\rvert$
-1.427^-	0	0.077	0.115
-1.427	0.2	0.077	0.085
$+0.082^-$	0.2	0.533	0.041
$+0.082$	0.4	0.533	0.241
$+0.162^-$	0.4	0.564	0.126
$+0.162$	0.6	0.564	**0.326**
$+0.294^-$	0.6	0.616	0.020
$+0.294$	0.8	0.616	0.220
$+1.292^-$	0.8	0.902	0.012
$+1.292$	1	0.902	0.212

Et donc, nous avons l'écart maximal qui est de 0.333. Soit avec Microsoft Excel 14.0.6123 :

	A	B	C	D	E
1	i/n	Valeurs aléatoires de Z	Valeurs de Z triées	Normale $\Phi(x)$	Delta
2	0	1.292	-1.426	0.077	0.077
3	0.2	1.292	-1.426	0.077	0.123
4	0.2	0.082	0.082	0.533	0.333
5	0.4	0.082	0.082	0.533	0.133
6	0.4	-1.427	0.162	0.564	0.164
7	0.6	-1.427	0.162	0.564	0.036
8	0.6	0.162	0.294	0.616	0.016
9	0.8	0.162	0.294	0.616	0.184
10	0.8	0.294	1.292	0.902	0.102
11	1	0.294	1.292	0.902	0.098
12				Max	0.332677

FIG. 5.202 – **Calculs avec Microsoft Excel 14.0.6123**

avec les formules explicites :

	A	B	C	D	E
1	i/n	Valeurs aléatoires de Z	Valeurs de Z triées	Normale $\Phi(x)$	Delta
2	0	=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(0;1000000)/1000000)		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C2;1)	=ABS(D2-A2)
3	0.2	=B2		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C3;1)	=ABS(D3-A3)
4	0.2	=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(0;1000000)/1000000)		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C4;1)	=ABS(D4-A4)
5	0.4	=B4		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C5;1)	=ABS(D5-A5)
6	0.4	=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(0;1000000)/1000000)		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C6;1)	=ABS(D6-A6)
7	0.6	=B6		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C7;1)	=ABS(D7-A7)
8	0.6	=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(0;1000000)/1000000)		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C8;1)	=ABS(D8-A8)
9	0.8	=B8		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C9;1)	=ABS(D9-A9)
10	0.8	=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(0;1000000)/1000000)		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C10;1)	=ABS(D10-A10)
11	1	=B10		=LOI.NORMALE.STANDARD.N(C11;1)	=ABS(D11-A11)
12				Max	=MAX(E2:E11)

FIG. 5.203 – **Calculs explicites avec Microsoft Excel 14.0.6123**

avec la petite routine VBA correspondante vite fait mal fait qui prendra le nombre d'itérations requises dans la cellule K1 et mettra la distribution empirique de Kolmogorov-Smirnov dans la colonne G de la feuille active :

```
Sub simulNormal()

Application.ScreenUpdating = False
For i = 1 To Cells(1, 11)
    Calculate
    Range("B2:B11").Select
    Selection.Copy
    Range("C2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    ActiveWorkbook.Worksheets("Normale").Sort.SortFields.Clear
    ActiveWorkbook.Worksheets("Normale").Sort.SortFields.Add Key:=Range("C2"), _
        SortOn:=xlSortOnValues, Order:=xlAscending, DataOption:=xlSortNormal
    With ActiveWorkbook.Worksheets("Normale").Sort
        .SetRange Range("C2:C11")
        .Header = xlGuess
        .MatchCase = False
        .Orientation = xlTopToBottom
        .SortMethod = xlPinYin
        .Apply
    End With
    Range("A1").Select
    Cells(i, 7).Value = Cells(12, 5)
Next i
Application.ScreenUpdating = True
Columns("G:G").Select
ActiveWorkbook.Worksheets("Normale").Sort.SortFields.Clear
ActiveWorkbook.Worksheets("Normale").Sort.SortFields.Add Key:=Range("G1"), _
    SortOn:=xlSortOnValues, Order:=xlAscending, DataOption:=xlSortNormal
With ActiveWorkbook.Worksheets("Normale").Sort
    .SetRange Range("G1:G2000")
    .Header = xlNo
    .MatchCase = False
    .Orientation = xlTopToBottom
    .SortMethod = xlPinYin
    .Apply
End With
End Sub
```

FIG. 5.204 – **Petit script VBA (MS Excel) pour le test QdA de K-S**

En cours ... glais

Nous réitérons donc la procédure plusieurs milliers de fois et nous obtenons la fonction de distribution suivante (obtenue simplement en faisant un graphique de type nuage de points dans Microsoft Excel 14.0.6123 avec des $2'000$ simulations) :

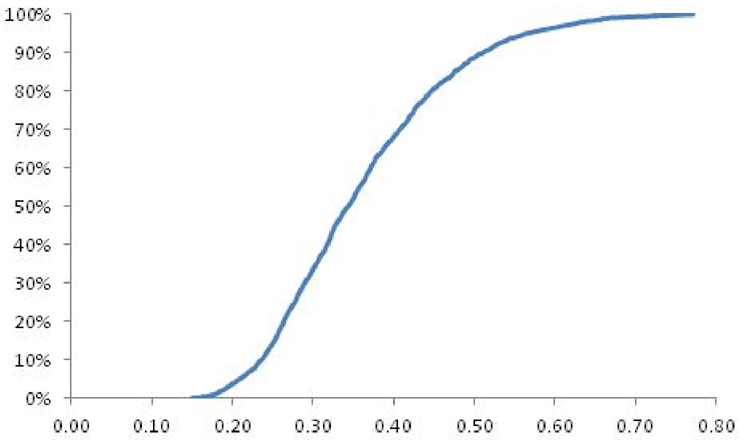


FIG. 5.205 – **Simulation de distribution pour le QdA de K-S**

et en appliquant un test unilatéral avec un seuil $\alpha = 5\%$ nous obtenons pour le 95ème centile :

$$D_{5,\alpha} \cong 0.564 \tag{5.7.2246}$$

Le lecteur trouvera la même valeur dans les tables de Kolmogorov-Smirnov disponibles dans de nombreux ouvrages universitaires. Quelques milliers de simulations sont alors suffisantes pour retrouver les valeurs des tables de réference !

Et maintenant nous comparons :

$$(D_{5,\alpha} \cong 0.564) > (d_0 \cong 0.326) \tag{5.7.2247}$$

et donc nous ne rejetons malheureusement pas l'hypothèse nulle.

Mais... nous devons quand même faire attention car avec seulement cinq valeurs, il est vraisemblable que l'hypothèse nulle H_0 ne soit pas non plus rejetée pour d'autres lois que la loi Normale !

Ainsi, comme le lecteur l'aura peut-être remarqué, pour chaque hypothèse nulle H_0 associée à une loi de distribution particulière, nous devons tabluler la distribution empirique de Kolmogorov-Smirnov pour différentes valeurs de n et α en utilisant des méthodes numériques. Dans la majorité des livres universitaires dédiés au tests de Kolmogorov-Smirnov il y a un théorème puissant qui montre qu'en réalité, les valeurs critiques seront les mêmes !

Remarque

Kolmogorov et Smirnov ont prouvé que quand n devient grand et que la loi de l'hypothèse nulle est continue, il n'est plus nécessaire de tabuler les valeurs de Kolmogorov et Smirnov pour chaque loi parce que nous avons alors :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} P\left(\sqrt{n}D_n \leq x\right) = 1 - 2\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}e^{-2i^2x^2} \tag{5.7.2248}$$

dès lors D_n est indépendant de la loi de distribution de l'hypothèse nulle H_0. En faisant des simulations avec la méthode de Monte Carlo, nous observons une convergence quand n atteint la centaine. Mais dans la pratique, la grande majorité du temps, il est inconcevable d'avoir une telle quantité de mesures. D'où le fait que ce résultat théorique et d'usage rare dans la pratique et justifie donc l'absence de la démonstration mathématique dans le présent ouvrage.

Pour conclure sur le test QdA de K-S, indiquons aussi au lecteur que nous trouverons la preuve mathématique du test QdA de Anderson-Darling plus bas.

En cours de traduction de l'anglais

TEST UNILATÉRAL DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

n	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
1	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950
2	0.6838	0.7764	0.8419	0.9000	0.9293
3	0.5648	0.6360	0.7076	0.7846	0.8290
4	0.4927	0.5652	0.6239	0.6889	0.7342
5	0.4470	0.5094	0.5633	0.6272	0.6685
6	0.4104	0.4680	0.5193	0.5774	0.6166
7	0.3815	0.4361	0.4834	0.5384	0.5758
8	0.3583	0.4096	0.4543	0.5065	0.5418
9	0.3391	0.3875	0.4300	0.4796	0.5133
10	0.3226	0.3687	0.4092	0.4566	0.4889
11	0.3083	0.3524	0.3912	0.4367	0.4677
12	0.2958	0.3382	0.3754	0.4192	0.4490
13	0.2847	0.3255	0.3614	0.4036	0.4325
14	0.2748	0.3142	0.3489	0.3897	0.4176
15	0.2659	0.3040	0.3376	0.3771	0.4042
16	0.2578	0.2947	0.3273	0.3657	0.3920
17	0.2504	0.2863	0.3180	0.3553	0.3809
18	0.2436	0.2785	0.3094	0.3457	0.3706
19	0.2373	0.2714	0.3014	0.3369	0.3612
20	0.2316	0.2647	0.2941	0.3287	0.3524
21	0.2262	0.2586	0.2872	0.3210	0.3443
22	0.2212	0.2528	0.2809	0.3139	0.3367
23	0.2165	0.2475	0.2749	0.3073	0.3295
24	0.2120	0.2424	0.2693	0.3010	0.3229
25	0.2079	0.2377	0.2640	0.2952	0.3166
26	0.2040	0.2332	0.2591	0.2896	0.3106
27	0.2003	0.2290	0.2544	0.2844	0.3050
28	0.1968	0.2250	0.2499	0.2794	0.2997
29	0.1935	0.2212	0.2457	0.2747	0.2947
30	0.1903	0.2176	0.2417	0.2702	0.2899
31	0.1873	0.2141	0.2379	0.2660	0.2853
32	0.1844	0.2108	0.2342	0.2619	0.2809
33	0.1817	0.2077	0.2308	0.2580	0.2768
34	0.1791	0.2047	0.2274	0.2543	0.2728
35	0.1766	0.2018	0.2242	0.2507	0.2690
36	0.1742	0.1991	0.2212	0.2473	0.2653
37	0.1719	0.1965	0.2183	0.2440	0.2618
38	0.1697	0.1939	0.2154	0.2409	0.2584
39	0.1675	0.1915	0.2127	0.2379	0.2552
40	0.1655	0.1891	0.2101	0.2349	0.2521
> 40	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

En cours de traduction de l'anglais

Attention ! Rappelons-nous la réponse des tests de normalité : *Existe-t-il une évidence convaincante d'un écart par rapport à l'idéal gaussien ?* Avec des ensembles de données réelles modérément volumineux, la réponse est presque toujours oui.

La question à laquelle les ingénieurs et les scientifiques s'attendent souvent à ce que le test de normalité réponde est : *Les données s'écartent-elles suffisamment de l'idéal gaussien pour "interdire" l'utilisation d'un test qui suppose une distribution gaussienne ?* Les scientifiques et les ingénieurs veulent souvent que le test de normalité soit l'arbitre qui décide quand abandonner les tests conventionnels (ANOVA, etc.) et analyser à la place les données transformées ou utiliser un test non paramétrique basé sur le rang ou une approche de rééchantillonnage ou de bootstrap. À cette fin, les tests de normalité ne sont pas très utiles car nombre de ces tests sont robustes à certaines formes de non-normalité.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.13.9.4 Test de QdA de Ryan-Joiner

Considérons une variable aléatoire X dont nous connaissons la distribution d'échantillonnage et pour laquelle nous aimerions vérifier la Normalité ou non et considérons une variable aléatoire ordonnée Y générée par une distribution Normale centrée réduite centrée (raison pour laquelle le test de Ryan-Joiner est connu dans la pratique comme un test de normalité) connu comme test de normalité). Pour comparer X et Y, nous centrerons X et classerons ses valeurs par ordre croissant.

Pour une même taille d'échantillon donnée, si les valeurs ordonnées de X et Y prises par paires suivent la même loi, une régression linéaire basée sur l'autre devrait donner un coefficient de corrélation assez proche de 1. En prenant la définition du coefficient de corrélation de Pearson au carré, nous avons alors :

$$\rho^2_{X,Y}=\left(\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{V}(X)\text{V}(Y)}}\right)^2 \tag{5.7.2249}$$

On suppose que Y suit une distribution Normale centrée réduite. Il vient alors :

$$\rho^2_{X,Y}=\left(\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{V}(X)\text{V}(Y)}}\right)^2=\left(\frac{\text{E}(XY)-\text{E}(X)\text{E}(Y)}{\sqrt{\text{V}(X)\text{V}(Y)}}\right)^2=\left(\frac{\text{E}(XY)}{\sqrt{\text{V}(X)}}\right)^2=\frac{(\text{E}(XY))^2}{\text{V}(X)} \tag{5.7.2250}$$

et si l'on prend l'estimateur du coefficient de corrélation :

$$R^2_{X,Y}=\frac{\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{n=1}^{n}x_i^2} \tag{5.7.2251}$$

Donc après simplification :

$$R^2_{X,Y}=\frac{\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{n=1}^{n}x_i^2}=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n}x_i^2}=\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_i}{\sqrt{n}}\right)x_i\right)^2}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n}x_i^2}=\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n}x_i^2} \tag{5.7.2252}$$

Il s'agit de l'approche Ryan-Joiner (implémentée dans Minitab par exemple) du test Shapiro-Wilk. Les résultats des deux tests sont très similaires. Les coefficients a_i peuvent être facilement obtenus à l'aide de n'importe quel tableur en utilisant une simulation de Monte Carlo (voir section Méthodes Numériques page ??). Sur demande des lecteurs, nous pouvons détailler comment obtenir les coefficients a_i avec Microsoft Excel pour un n donné.

✍**Exemple :**

Considérez les 10 mesures suivantes de la colonne `A` déjà triées par ordre croissant :

	A	B	C	D
1	Mesures	Rang (i)	NormalScore exact a_i	ZScore X_i
2	0.1685	1.00	-1.5414	-1.947246
3	0.1705	2.00	-1.0008	-0.927745
4	0.1708	3.00	-0.6536	-0.77482
5	0.1713	4.00	-0.3809	-0.519945
6	0.1728	5.00	-0.1261	0.2446801
7	0.1732	6.00	0.1205	0.4485802
8	0.1735	7.00	0.3699	0.6015052
9	0.1739	8.00	0.6501	0.8054053
10	0.1740	9.00	1.0033	0.8563803
11	0.1747	10.00	1.5340	1.2132054

FIG. 5.206 – **Exemple de mesures ordonnées, rangs, coefficient de RJ et score Z**

En cours lais

Les formules correspondantes sont :

	A	B	C	D
1	Mesures	Rang (i)	NormalScore exact a_i	ZScore X_i
2	0.1685	1	=Coeff_MonteCarlo!K1	=(A2-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
3	0.1705	2	=Coeff_MonteCarlo!L1	=(A3-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
4	0.1708	3	=Coeff_MonteCarlo!M1	=(A4-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
5	0.1713	4	=Coeff_MonteCarlo!N1	=(A5-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
6	0.1728	5	=Coeff_MonteCarlo!O1	=(A6-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
7	0.1732	6	=Coeff_MonteCarlo!P1	=(A7-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
8	0.1735	7	=Coeff_MonteCarlo!Q1	=(A8-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
9	0.1739	8	=Coeff_MonteCarlo!R1	=(A9-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
10	0.174	9	=Coeff_MonteCarlo!S1	=(A10-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
11	0.1747	10	=Coeff_MonteCarlo!T1	=(A11-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)

FIG. 5.207 – Formules dans Microsoft Excel 14.0.6123 de la capture d'écran précédente

et donc nous avons dans une feuille nommée *CoeffMonteCarlo* des simulations Monte Carlo pour déterminer les 10 coefficients a_i traditionnellement notés dans le cas des 10 mesures dans les tableaux comme suit : $\left\{a_{1/10}, a_{2/10}, \ldots, a_{10/10}\right\}$. Tout d'abord, nous devons créer 10 colonnes avec des variables Normales centrées réduites sur près de $10,000$ de lignes avec la formule Microsoft Excel suivante :

	A	B	C	D
1	Mesures	Rang (i)	NormalScore exact a_i	ZScore X_i
2	0.1685	1	=Coeff_MonteCarlo!K1	=(A2-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
3	0.1705	2	=Coeff_MonteCarlo!L1	=(A3-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
4	0.1708	3	=Coeff_MonteCarlo!M1	=(A4-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
5	0.1713	4	=Coeff_MonteCarlo!N1	=(A5-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
6	0.1728	5	=Coeff_MonteCarlo!O1	=(A6-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
7	0.1732	6	=Coeff_MonteCarlo!P1	=(A7-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
8	0.1735	7	=Coeff_MonteCarlo!Q1	=(A8-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
9	0.1739	8	=Coeff_MonteCarlo!R1	=(A9-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
10	0.174	9	=Coeff_MonteCarlo!S1	=(A10-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)
11	0.1747	10	=Coeff_MonteCarlo!T1	=(A11-AVERAGE($A$2:$A$11))/STDEV($A$2:$A$11)

FIG. 5.208 – Variables normales centrées réduites pour les coefficients RJ

et ensuite nous devons construire les rangs de toutes ces valeurs ligne par ligne telles que (donnée en anglais) :

```
=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(RANDBETWEEN(1;99999999)/100000000)
```

et ensuite nous devons construire les rangs (ordre croissant) de toutes ces valeurs ligne par ligne telles que :

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	-1.53725	-1.0033	-0.65264	-0.36952	-0.11389	0.13027	0.38655	0.66225	1.00802	1.54256
2	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10
3	-0.99129	-0.68052	-0.52315	-0.16533	0.1755	0.67829	0.68284	0.76374	1.61827	1.78189
4	-1.74979	-1.74906	-0.51966	-0.27863	0.69305	0.79935	0.89753	0.92486	1.21639	1.35076
5	-1.1254	-0.35126	-0.26234	0.26191	0.41169	0.56416	0.88903	1.0938	1.22103	1.7695
6	-1.21058	-1.17486	-1.1672	-1.06516	-0.49696	-0.09223	-0.02356	1.30528	1.52495	1.61374
7	-1.10717	-0.31205	0.13311	0.30108	0.33521	0.39329	0.60102	0.87667	0.96475	1.01134
8	-1.39583	-1.20593	-1.09298	-0.88378	-0.12637	-0.09561	0.2952	0.41839	0.56708	0.78012
9	-1.14361	-0.5367	-0.51951	-0.4606	-0.03046	0.5296	0.6153	1.16186	1.65168	1.8186
10	-1.56543	-1.27954	-0.52029	-0.50671	-0.18526	-0.08476	-0.06454	0.61259	0.6199	0.90698
11	-0.70509	-0.69865	-0.58029	-0.49299	-0.19304	-0.07783	0.49944	0.56007	0.62723	0.95785
12	-1.5678	-0.08925	-0.07208	0.07032	0.11992	0.38524	0.57066	0.95499	1.73946	2.53707
13	-1.37429	-1.24438	-1.02048	-0.53446	-0.53362	0.27698	0.29341	0.62274	0.86534	2.26824
14	-1.38338	-0.98731	-0.81831	-0.76082	-0.74337	-0.58063	-0.33038	0.33377	0.56882	0.75053
15	-1.03691	-0.86295	-0.14088	0.15149	0.30748	0.33037	0.74692	0.85939	1.04967	1.27588

FIG. 5.209 – Tri croissant ligne par ligne des simulations pour déterminer les coefficients de RJ

avec les formules suivantes (données seulement pour les 4 premiers i faute de place dans la capture d'écran) :

	K	L	M	N
1	=AVERAGE(K3:K10000)	=AVERAGE(L3:L10000)	=AVERAGE(M3:M10000)	=AVERAGE(N3:N10000)
2	O1	O2	O3	O4
3	=SMALL($A3:$J3;1)	=SMALL($A3:$J3;2)	=SMALL($A3:$J3;3)	=SMALL($A3:$J3;4)
4	=SMALL($A4:$J4;1)	=SMALL($A4:$J4;2)	=SMALL($A4:$J4;3)	=SMALL($A4:$J4;4)
5	=SMALL($A5:$J5;1)	=SMALL($A5:$J5;2)	=SMALL($A5:$J5;3)	=SMALL($A5:$J5;4)
6	=SMALL($A6:$J6;1)	=SMALL($A6:$J6;2)	=SMALL($A6:$J6;3)	=SMALL($A6:$J6;4)
7	=SMALL($A7:$J7;1)	=SMALL($A7:$J7;2)	=SMALL($A7:$J7;3)	=SMALL($A7:$J7;4)
8	=SMALL($A8:$J8;1)	=SMALL($A8:$J8;2)	=SMALL($A8:$J8;3)	=SMALL($A8:$J8;4)
9	=SMALL($A9:$J9;1)	=SMALL($A9:$J9;2)	=SMALL($A9:$J9;3)	=SMALL($A9:$J9;4)
10	=SMALL($A10:$J10;1)	=SMALL($A10:$J10;2)	=SMALL($A10:$J10;3)	=SMALL($A10:$J10;4)
11	=SMALL($A11:$J11;1)	=SMALL($A11:$J11;2)	=SMALL($A11:$J11;3)	=SMALL($A11:$J11;4)
12	=SMALL($A12:$J12;1)	=SMALL($A12:$J12;2)	=SMALL($A12:$J12;3)	=SMALL($A12:$J12;4)
13	=SMALL($A13:$J13;1)	=SMALL($A13:$J13;2)	=SMALL($A13:$J13;3)	=SMALL($A13:$J13;4)
14	=SMALL($A14:$J14;1)	=SMALL($A14:$J14;2)	=SMALL($A14:$J14;3)	=SMALL($A14:$J14;4)
15	=SMALL($A15:$J15;1)	=SMALL($A15:$J15;2)	=SMALL($A15:$J15;3)	=SMALL($A15:$J15;4)

FIG. 5.210 – **Microsoft Excel 14.0.6123 formules de la précédente capture d'écran**

Pour finir, il n'y a plus qu'à calculer le coefficient de corrélation entre les colonnes C et D de la première capture d'écran :

	F
1	Coefficient de Corrélation Ryan-Joiner (RJ):
2	=CORREL(C2:C11;D2:D11)

FIG. 5.211 – **Calcul final du coefficient de corrélation de RJ avec Microsoft Excel 14.0.6123**

Ce qui donne :

	G
3	Coefficient de Corrélation Ryan-Joiner (RJ):
4	0.963285023

où le carré de cette valeur est très très proche du test de Shapiro-Wilk.

Ensuite, pour savoir si on peut accepter ou rejeter l'hypothèse nulle H_0 de Normalité, il faudrait refaire la procédure avec en lieu et place mesures, des valeurs générées aussi aléatoires à partir d'une loi Normale et déterminer la valeur critique d'acceptation/rejet (normalement c'est très simple à faire mais on peut détailler sur demande).

Après des calculs dans ce cas particulier, nous ne rejetons malheureusement pas l'hypothèse nulle.

5.7.13.9.5 Test de QdA de Anderson-Darling

Il est surprenant qu'un test raisonnablement puissant (robuste) comme l'est le test de Kolmogorov-Smirnov puisse être conçu en ne s'appuyant que sur une unique observation et ce un seul point de la fonction de répartition candidate. Il semblerait, avec du recul, plus efficient de mesurer la différence entre les deux fonctions de répartition en comparant ces fonctions sur l'intégralité de leur domaine, c'est-à-dire de $-\infty$ à $+\infty$.

Il existe une famille de tests dont les statistiques sont basées sur l'intégrale du carré de la différence (ces tests sont souvent considérés comme non paramétriques mais selon moi à tort et ce au même titre que le test de Kolmogorov-Smirnov est lui aussi considéré comme non paramétrique) :

$$\left(\hat{F}_n(x) - F_n(x)\right)^2 \quad (5.7.2253)$$

entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition de référence. La plus simple de ces statistiques est :

$$S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{F}_n(x) - F_n(x)\right)^2 \mathrm{d}x \quad (5.7.2254)$$

En cours de traduction de l' anglais

qui est simplement la surface comprise entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition de référence. Soit, en reprenant le graphique utilisé plus haut lors de notre étude du test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov :

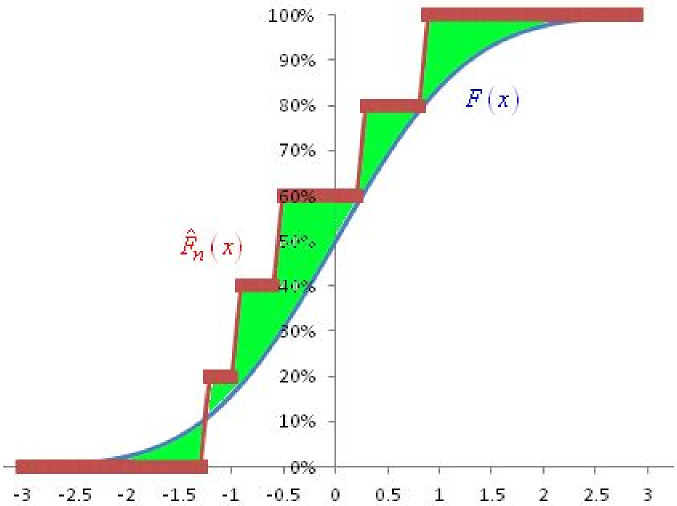


FIG. 5.212 – **Représentation de l'approche du test d'ajustement d'Anderson-Darling**

Cependant, arbitrairement, nous pouvons choisir autre chose que la mesure x pour l'intégrale. Ainsi, un choix classique est de prendre la fonction de répartition théorique elle-même comme mesure de base de l'intégrale. Il vient ainsi :

$$W^2 = n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{F}_n(x) - F_n(x)\right)^2 \mathrm{d}F(x) \quad (5.7.2255)$$

La statistique résultant de cet ajout s'appelle la "statistique de Cramér-von Mises". Cependant elle souffre d'un gros défaut de robustesse lorsque des points de mesures se trouvent sur les queues de la distribution.

Il a alors été proposé la mesure suivante qui est un peu moins sensible aux points de mesures se trouvant sur les queues :

$$\frac{1}{n}W^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\hat{F}_n(x) - F_n(x)\right)^2}{F(x)(1-F(x))} \mathrm{d}F(x) \tag{5.7.2256}$$

appelée "statistique d'Anderson-Darling" qui a été la plus utilisée dans la fin du 20ème siècle et reste dominante au début du 21ème aussi (du moins tant que l'échantillon est d'une taille acceptable !). Elle est par construction plus robuste que les statistiques de Cramér-von Mises et de Kolmogorov-Smirnov mais des études par simulations ont montré qu'elle était moins robuste que le test de Shapiro-Wilk ou Ryan-Joiner.

En se rappelant que la définition de la distribution empirique $\hat{F}_n(x)$ lors de notre étude du test d'ajustement (adéquation) de Kolmogorov-Smirnov implique que :

$$\hat{F}_n(x) = 0 \tag{5.7.2257}$$

si $x \in [-\infty, x_1]$ et :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{n}{k} \tag{5.7.2258}$$

si $x \in [x_k, x_{k+1}]$ et :

$$\hat{F}_n(x) = 1 \tag{5.7.2259}$$

si $x \in [x_n, x_{+\infty}]$. Nous avons alors en supposant en plus que F est continue :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}W^2 &= n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\hat{F}_n(x) - F_n(x)\right)^2}{F(x)(1-F(x))} \mathrm{d}F(x)\\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{F(x)^2}{F(x)(1-F(x))}\mathrm{d}F(x) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\left(\frac{1}{n} - F(x)\right)^2}{F(x)(1-F(x))}\mathrm{d}F(x) + \int_{x_2}^{x_3} \frac{\left(\frac{2}{n} - F(x)\right)^2}{F(x)(1-F(x))}\mathrm{d}F(x) +\\ &\ldots + \int_{x_n}^{+\infty} \frac{(1-F(x))^2}{F(x)(1-F(x))}\mathrm{d}F(x)\end{aligned} \tag{5.7.2260}$$

Ensuite, nous faisons le changement de variable $u = F(x)$ et donc :

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}F(x) \tag{5.7.2261}$$

et sans oublier les changement de bornes des intégrales puisque :

$$F(-\infty) = 0 \quad \text{et} \quad F(+\infty) = 1 \tag{5.7.2262}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}W^2 &= \int\limits_0^{u_1}\frac{u^2}{u(1-u)}\mathrm{d}u+\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\left(\dfrac{1}{n}-u\right)^2}{u(1-u)}\mathrm{d}u+\int\limits_{u_2}^{u_3}\frac{\left(\dfrac{2}{n}-u\right)^2}{u(1-u)}\mathrm{d}u+\\ &\quad \ldots+\int\limits_{u}^{1}\frac{(1-u)^2}{u(1-u)}\mathrm{d}u\\ &= \int\limits_0^{u_1}\frac{}{u(1-u)}\mathrm{d}u+\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\left(\dfrac{1}{n}-u\right)^2}{u(1-u)}\mathrm{d}u+\int\limits_{u_2}^{u_3}\frac{\left(\dfrac{2}{n}-u\right)^2}{u(1-u)}\mathrm{d}u+\ldots+\int\limits_{u}^{1}\frac{1-u}{u}\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{5.7.2263}$$

où nous avons bien évidemment posé :

$$u_j=F(x_j) \tag{5.7.2264}$$

Il faut à présent calculer ces intégrales. Nous cherchons donc la primitive d'une fonction du type :

$$\frac{(a-u)^2}{u(1-u)}=\frac{a^2-2au+u^2}{u(1-u)}=\frac{a^2}{u(1-u)}-\frac{2a}{1-u}+\frac{u}{1-u} \tag{5.7.2265}$$

Les primitives des deux expressions suivantes :

$$\frac{1}{u(1-u)} \qquad \frac{1}{1-u} \tag{5.7.2266}$$

ont été démontrées sous leur forme générale dans le chapitre de Calcul Différentiel Et Intégral et valent respectivement :

$$\begin{aligned}&a^2\int\frac{1}{u(1-u)}\mathrm{d}u=a^2\ln\left|\frac{u}{1-u}\right|=a^2\ln|u|-a^2\ln|1-u|=a^2\ln(u)-a^2\ln(1-u)\\ &2a\int\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u=-2a\ln(1-u)\end{aligned} \tag{5.7.2267}$$

car au vu des valeurs que peut prendre u, il est alors inutile d'indiquer les valeurs absolues.

Il nous reste donc qu'à calculer la primitive de :

$$\frac{u}{1-u} \tag{5.7.2268}$$

où un changement de variable évident (si jamais vous souhaitez les détails n'hésitez pas à demander) nous donne la primitive sans la constante :

$$\int\frac{u}{1-u}\mathrm{d}u=-u-\ln(1-u) \tag{5.7.2269}$$

Nous avons alors au final :

$$\begin{aligned}\int\frac{(a-u)^2}{u(1-u)^2}\mathrm{d}u&=\frac{a^2}{u(1-u)}-\frac{2a}{1-u}+\frac{u}{1-u}\\ &=a^2\ln(u)-a^2\ln(1-u)-(-2a\ln(1-u))-u-\ln(1-u)\\ &=-u+a^2\ln(u)-(a-1)^2\ln(1-u)\end{aligned} \tag{5.7.2270}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}W_n^2=\int\limits_0^{u_1}\frac{u}{1-u}\mathrm{d}u+\sum_{j=1}^{n-1}\left(-u+\left(\frac{j}{n}\right)^2\ln(u)-\left(\frac{j}{n}-1\right)^2\ln(1-u)\right)\Bigg|_{u_j}^{u_{j+1}}+\int\limits_{u_n}^{1}\frac{1-u}{u}\mathrm{d}u\\&=-u_1-\ln(1-u_1)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(-u+\left(\frac{j}{n}\right)^2\ln(u)-\left(\frac{j}{n}-1\right)^2\ln(1-u)\right)\Bigg|_{u_j}^{u_{j+1}}-1+u_n-\ln(u_n)\\&=-u_1-\ln(1-u_1)-1+u_n-\ln(u_n)\\&+\sum_{j=1}^{n-1}\left(-u_{j+1}+u_j+\left(\frac{j}{n}\right)^2\ln(u_{j+1})-\left(\frac{j}{n}\right)^2\ln(u_j)-\left(\frac{j}{n}-1\right)^2\ln(1-u_{j+1})+\left(\frac{j}{n}-1\right)^2\ln(1-u_j)\right)\end{aligned}\tag{5.7.2271}$$

Nous pouvons déjà remarquer que dans la dernière égalité :

$$-u_1+u_n+\sum_{j=1}^{n-1}(-u_{j+1}+u_j)=0\tag{5.7.2272}$$

Il reste alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}W_n^2&=-\ln(1-u_1)-1-\ln(u_n)\\&+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\frac{j}{n}\right)^2\ln(u_{j+1})-\left(\frac{j}{n}\right)^2\ln(u_j)-\left(\frac{j}{n}-1\right)^2\ln(1-u_{j+1})+\left(\frac{j}{n}-1\right)^2\ln(1-u_j)\right)\\&=-\ln(1-u_1)-1-\ln(u_n)+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}j^2\ln(u_{j+1})-\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}j^2\ln(u_j)\\&-\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}(j-n)^2\ln(1-u_{j+1})\\&+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}(j-n)^2\ln(1-u_j)\end{aligned}\tag{5.7.2273}$$

Nous allons procéder maintenant à quelques manipulations algébrique astucieuses (mais simples) pour condenser l'écriture de cette dernière égalité.

D'abord, remarquons que nous pouvons récrire la première somme ainsi (le lecteur pourra vérifier en développement les deux sommes pour une petite valeur de n) :

$$\sum_{j=1}^{n-1}j^2\ln(u_{j+1})=\sum_{j=1}^{n}(j-1)^2\left(\ln(u_j)\right)\tag{5.7.2274}$$

ce qui équivaut donc à poser $j=j-1$.

Nous transformons aussi la deuxième somme :

$$\sum_{j=1}^{n-1}j^2\ln(u_j)=\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\ln(u_j)\right)-n^2\ln(u_n)\tag{5.7.2275}$$

En cours de traduction de l'anglais

et le lecteur pourra vérifier que l'égalité ci-dessous pour la troisième somme est vérifiée :

$$\sum_{j=1}^{n-1}(j-n)^2\ln(1-u_{j+1})=-n^2\ln(1-u_1)-\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1-n)^2\ln(1-u_j)\right) \quad (5.7.2276)$$

qui équivaut aussi à poser $j=j-1$.

Enfin, nous transformons la quatrième somme (puisque de toute façon lorsque j vaut n le terme de la somme est nul...) :

$$\sum_{j=1}^{n-1}(j-n)^2\ln(1-u_j)=\sum_{j=1}^{n}(j-n)^2\ln(1-u_j) \quad (5.7.2277)$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}W_n^2=&-\ln(1-u_1)-1-\ln(u_n)+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-1)^2\left(\ln(u_j)\right)-\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\ln(u_j)\right)-n^2\ln(u_n)\right]\\&-\frac{1}{n^2}\left[-n^2\ln(1-u_1)-\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1-n)^2\ln(1-u_j)\right)\right]+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-n)^2\ln(1-u_j)\end{aligned} \quad (5.7.2278)$$

Soit en éliminant les termes qui s'annulent :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}W_n^2=&-1+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-1)^2\left(\ln(u_j)\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}j^2\ln(u_j)+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-1-n)^2\ln(1-u_j)\\&+\frac{1}{n^2}(j-n)^2\ln(1-u_j)\end{aligned} \quad (5.7.2279)$$

Et en regroupant les termes ayant la même forme de logarithme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}W_n^2&=-1-\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\ln(u_j)+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(2j-2n-1)\ln(1-u_j)\\&=-1-\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[(2j-1)\ln(u_j)+(2(j-n)-1)\ln(1-u_j)\right]\end{aligned} \quad (5.7.2280)$$

Soit :

$$W_n^2=-n-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[(2j-1)\ln(u_j)+(2(j-n)-1)\ln(1-u_j)\right] \quad (5.7.2281)$$

Il s'agit d'un des formes du test d'Anderson-Darling et qui dans le cadre d'une loi Normale (raison pour laquelle ce test est très connu comme test de normalité) s'écrit par tradition sous la forme suivante :

$$\boxed{A_n^2=-n-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[(2j-1)\ln(\Phi(Y_j))+(2(j-n)-1)\ln(1-\Phi(Y_j))\right]} \quad (5.7.2282)$$

En cours de traduction de l'anglais

Mais il existe une autre expression simplifiée très courante. Pour l'établir, nous repartons de l'expression :

$$W_n^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[(2j-1)\ln(u_j) + (2(j-n)-1)\ln(1-u_j)\right] \tag{5.7.2283}$$

En faisant le changement de variable $j = 1+n-i$ dans la dernière somme, l'expression :

$$(2(j-n)-1)\ln(1-u_j) \tag{5.7.2284}$$

devient :

$$(1-2i)\ln(1-u_{1+n-i}) \tag{5.7.2285}$$

et les bornes de la somme deviennent :

$$\begin{aligned} i &= 1+n-j \underset{j=1}{\Rightarrow} i = n \\ i &= 1+n-j \Rightarrow i = 1 \end{aligned} \tag{5.7.2286}$$

et dès lors :

$$\sum_{j=1}^{n} = \sum_{i=n}^{1} = \sum_{i=1}^{n} \tag{5.7.2287}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}W_n^2 &= -1 - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\ln(u_j) + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(1-2i)\ln(u_{1+n-i}) \\ &= -1 - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\ln(u_j) + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(1-2j)\ln(u_{1+n-j}) \\ &= -1 - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left[\ln(u_j) + \ln(u_{1+n-j})\right] \end{aligned} \tag{5.7.2288}$$

Enfin :

$$\boxed{W_n^2 = \text{AD} = -n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left[\ln(u_j) + \ln(u_{1+n-j})\right] = -n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}S_j} \tag{5.7.2289}$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Supposons que nous ayons mesuré les cinq valeurs suivantes :

$$-1.2, 0.2, -0.6, 0.8, -1.0$$

soient ordonnées :

$$x_1 = -1.2, x_2 = -1.0, x_3 = -0.6, x_4 = 0.2, x_5 = 0.8$$

Nous voulons tester l'hypothèse nulle suivante :

$$H_0 : \text{CDF}(x_i) = \Phi(x_i) \tag{5.7.2290}$$

où $\Phi(x)$ représente pour rappel la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour mettre en place le calcul de l'indice AD dans un logiciel comme la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 nous créons d'abord :

	A	B	C	D	E	F
1	x	j	Normal $\Phi(x_j)$	1-$\Phi(x_j)$	1-$\Phi(x_{n-j+1})$	S_j
2	-1.2	1	0.1151	0.8849	0.2119	-3.71
3	-1	2	0.1587	0.8413	0.4207	-8.12
4	-0.6	3	0.2743	0.7257	0.7257	-8.07
5	0.2	4	0.5793	0.4207	0.8413	-5.03
6	0.8	5	0.7881	0.2119	0.8849	-3.24

FIG. 5.213 – **Valeurs à tester avec colonnes habituelles dans le tableur**

Soit explicitement :

C	D	E	F
Normale $\Phi(x_j)$	1-$\Phi(x_j)$	1-$\Phi(x_{n-j+1})$	S_j
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A2;1)	=1-C2	=1-INDEX($C$2:$C$6;NB($C$2:$C$6)-B2+1)	=(2*B2-1)*(LN(C2)+LN(E2))
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A3;1)	=1-C3	=1-INDEX($C$2:$C$6;NB($C$2:$C$6)-B3+1)	=(2*B3-1)*(LN(C3)+LN(E3))
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A4;1)	=1-C4	=1-INDEX($C$2:$C$6;NB($C$2:$C$6)-B4+1)	=(2*B4-1)*(LN(C4)+LN(E4))
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A5;1)	=1-C5	=1-INDEX($C$2:$C$6;NB($C$2:$C$6)-B5+1)	=(2*B5-1)*(LN(C5)+LN(E5))
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(A6;1)	=1-C6	=1-INDEX($C$2:$C$6;NB($C$2:$C$6)-B6+1)	=(2*B6-1)*(LN(C6)+LN(E6))

FIG. 5.214 – **Formules explicites du tableau principal de la figure précédente**

Nous obtenons donc la même valeur de l'indicateur AD que les logiciels de statistiques qui permettent de choisir la loi à comparer (et donc les paramètres y relatifs). Cependant pour de très petits échantillons les logiciels de statistiques utilisent la correction suivante (qui nous été impossible de réobtenir par simulation...) :

$$\text{AD}^* = \text{AD}\left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right) \tag{5.7.2291}$$

soit dans notre cas AD* vaut environ 0.789 avec $\text{AD} = 0.636$.

Ensuite pour calculer la p-valeur nous devons investiguer une curiosité... Effectivement si nous la déterminons en faisant une simulation de Monte Carlo comme nous l'avons fait lors de notre démonstration du test de Kolmogorov-Smirnov en changeant d'abord le contenu de la colonne A en y mettant des valeurs dynamiques triées :

	A
1	*x*
2	=GRANDE.VALEUR($O$2:$O$6;6-B2)
3	=GRANDE.VALEUR($O$2:$O$6;6-B3)
4	=GRANDE.VALEUR($O$2:$O$6;6-B4)
5	=GRANDE.VALEUR($O$2:$O$6;6-B5)
6	=GRANDE.VALEUR($O$2:$O$6;6-B6)

FIG. 5.215 – **Formules pour trier les valeurs simulées par Monte Carlo**

Valeurs provenant donc de la colonne O où nous avons mis :

	O	P	Q
1	Valeurs simulées		
2	=LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(1;99999)/100000;$Q$10;$Q$11)		
3	=LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(1;99999)/100000;$Q$10;$Q$11)		
4	=LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(1;99999)/100000;$Q$10;$Q$11)		
5	=LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(1;99999)/100000;$Q$10;$Q$11)		
6	=LOI.NORMALE.INVERSE.N(ALEA.ENTRE.BORNES(1;99999)/100000;$Q$10;$Q$11)		
7			
8	*i*		0
9			
10	Moyenne		0
11	Ecart-Type		1

FIG. 5.216 – **Formules génératrices d'une loi Normale pour l'application de Monte Carlo**

Le lecteur remarquera donc que cela revient finalement à comparer l'échantillon avec une distribution uniforme ! ! !

En ayant ensuite préparé les colonnes suivantes H, I qui contiendront les valeurs simulées reportées par le code VBA donné un peu plus loin et les colonnes L, M qui nous permettent d'avoir la répartition des valeurs de AD et AD* pour en calculer le centile :

	H	I	J	K	L	M
1	Valeurs AD	Valeurs AD*		Centiles	Valeur AD	Valeurs AD*
2				0.05	=CENTILE(H:H;K2)	=CENTILE(I:I;K2)
3				0.1	=CENTILE(H:H;K3)	=CENTILE(I:I;K3)
4				0.15	=CENTILE(H:H;K4)	=CENTILE(I:I;K4)
5				0.2	=CENTILE(H:H;K5)	=CENTILE(I:I;K5)
6				0.25	=CENTILE(H:H;K6)	=CENTILE(I:I;K6)
7				0.3	=CENTILE(H:H;K7)	=CENTILE(I:I;K7)
8				0.35	=CENTILE(H:H;K8)	=CENTILE(I:I;K8)
9				0.4	=CENTILE(H:H;K9)	=CENTILE(I:I;K9)
10				0.45	=CENTILE(H:H;K10)	=CENTILE(I:I;K10)
11				0.5	=CENTILE(H:H;K11)	=CENTILE(I:I;K11)
12				0.55	=CENTILE(H:H;K12)	=CENTILE(I:I;K12)
13				0.6	=CENTILE(H:H;K13)	=CENTILE(I:I;K13)
14				0.65	=CENTILE(H:H;K14)	=CENTILE(I:I;K14)
15				0.7	=CENTILE(H:H;K15)	=CENTILE(I:I;K15)
16				0.75	=CENTILE(H:H;K16)	=CENTILE(I:I;K16)
17				0.8	=CENTILE(H:H;K17)	=CENTILE(I:I;K17)
18				0.85	=CENTILE(H:H;K18)	=CENTILE(I:I;K18)
19				0.9	=CENTILE(H:H;K19)	=CENTILE(I:I;K19)
20				0.95	=CENTILE(H:H;K20)	=CENTILE(I:I;K20)
21				1	=CENTILE(H:H;K21)	=CENTILE(I:I;K21)

FIG. 5.217 – **Colonnes pour le reports du VBA et pour les différents centiles de AD/AD***

avec le petit code VBA ci-dessous vite fait mal fait :

Listing 5.1 – **Code VBA du test d'AD de QdA**

```
Sub SimulAndersonDarling()

        Const intSimulations As Integer = 1000
        Dim i As Integer

        For i=1 To intSimulations
                Calculate
                Cells(i+1, 8).Value = Cells(9, 2).Value
                Cells(i+1, 9).Value = Cells(10, 2).Value
                Cells(8, 17).Value = i
        Next i
End Sub
```

nous avons alors avec $10'000$ simulations la répartition suivante des valeurs de AD et AD* :

K	L	M
Centiles	Valeur *AD*	Valeurs *AD**
5%	0.283604823	0.347177088
10%	0.339097561	0.4257353
15%	0.389624499	0.490954256
20%	0.435871029	0.553839391
25%	0.481858038	0.608377952
30%	0.527825455	0.668221449
35%	0.578017005	0.72857605
40%	0.633444644	0.796205526
45%	0.693171118	0.868642976
50%	0.754138952	0.951063285
55%	0.820708106	1.038099253
60%	0.901522191	1.137878963
65%	0.994293293	1.250770902
70%	1.106609937	1.387107322
75%	1.246858162	1.549800675
80%	1.408822672	1.742562195
85%	1.639358739	2.027134853
90%	1.943766918	2.42711241
95%	2.582112187	3.179143436
100%	8.088591014	10.10247375

FIG. 5.218 – **Centiles du test de QdA d'Anderson-Darling**

Donc que ce soit pour AD ou AD* la p-valeur est approximativement égale à $1-40\%=60\%$ ce qui correspond aux valeurs tabulées par Peter A. W. Lewis chez IBM (1961).

Ce qui est curieux et qu'il nous faut justement investiguer c'est que la grande majorité des logiciels utilisent les formules suivantes (R.B. D'Augostino et M.A. Stephens, Eds., 1986, Goodness-of-Fit Techniques, Marcel Dekker) permettant d'éviter les simulations de Monte-Carlo :

$$\begin{aligned}
&\text{AD}^* \geq 0.6 \Rightarrow p\text{-valeurs} \cong e^{1.2937-5.709\text{AD}^*+0.0186\text{AD}^{*2}}\\
&0.34 \leq \text{AD}^* < 0.6 \Rightarrow p\text{-valeurs} \cong e^{0.9177-4.279\text{AD}^*-1.38\text{AD}^{*2}}\\
&0.2 \leq \text{AD}^* < 0.34 \Rightarrow p\text{-valeurs} \cong 1-e^{-8.318+42.796\text{AD}^*-59.938\text{AD}^{*2}}\\
&\text{AD}^* \leq 0.2 \Rightarrow p\text{-valeurs} \cong 1-e^{-13.436+101.14\text{AD}^*-223.73\text{AD}^{*2}}
\end{aligned} \tag{5.7.2292}$$

et dans notre cas, l'application de ces formules donnent une p-valeurs d'environ 9% ! ! ! Valeur que donnent effectivement les logiciels statistiques ! Affaire à suivre pour trouver d'où vient cette énorme différence... Nous avons demandé au support technique d'un éditeur de progiciel statistique américain de nous expliquer la raison de la différence entre les valeurs tabulées Peter A.W. Lewis et celles R.B. D'Augostino et M.A. Stephens mais ils n'ont pas été capables de répondre. Nous avons également contacté M.A. Stephens lui-même pour qu'il nous communique comment il avait obtenu ces formules mais nous n'avons jamais eu de réponses...

5.7.13.9.6 Test de QdA de Cramér–von Mises

En statistiques, le test QdA de Cramér–von Mises (considéré par beaucoup comme un test non paramétrique) est utilisé pour juger de la qualité de l'ajustement d'une fonction de distribution cumulative F^* par rapport à une fonction de distribution empirique donnée F_n, ou pour comparer deux distributions empiriques (le critère est nommé d'après Harald Cramér et Richard Edler von Mises qui l'ont proposé pour la première fois en 1928–1930). Il est également utilisé dans le cadre d'autres algorithmes, tels que l'estimation de la distance minimale. Il est généralement défini comme suit (comme nous l'avons déjà introduit juste plus haut) :

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F^*(x))^2 \, \mathrm{d}F^*(x) \tag{5.7.2293}$$

mais devrait mieux être écrit comme suit :

$$W^2 = \int \left(\hat{F}_n(t) - F_0(t)\right)^2 \mathrm{d}F_0(t) \tag{5.7.2294}$$

Dans les applications à un échantillon, F^* est la distribution théorique et F_n est la distribution observée empiriquement. Les deux distributions peuvent également être toutes deux estimées empiriquement ; c'est ce qu'on appelle le "cas à deux échantillons".

Nous voulons dé,pmtrer la statistique du test de Cramér–von Mises (dit à n-degrés de liberté) :

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(U_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 \tag{5.7.2295}$$

où $U_i = F_0(X_{i:n})$ est la statistique d'ordre théorique de l'original (c'est pourquoi c'est un test paramétrique ! Nous devons estimer les paramètres de la distribution d'origine) :

$$\frac{W^2}{n} := C_n = \int \left(\hat{F}_n(t) - F_0(t)\right)^2 \mathrm{d}F_0(t) \tag{5.7.2296}$$

Notez que cette statistique est tabulée [67] contre l'hypothèse nulle H_0 que $\hat{F}_n(t) = F_0(t)$.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de taille n tiré de $f(x)$. Le fonction cumulée empirique est :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{1:n} \\ i/n & \text{si } X_{i:n} \leq x < X_{i+1:n} \\ 1 & \text{si} X_{n:n} \leq x \end{cases} \tag{5.7.2297}$$

[67] Principalement et malheureusement uniquement pour la distribution Normale et ce également dans certains des logiciels statistiques les plus importants.

En cours de traduction de l'anglais

Soit $U_i = F_0(X_{i:n})$, alors (le lecteur va voir qu'il y a des simplifications assez malignes...) :

$$\begin{aligned}
C_n &\triangleq \int \left[\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right]^2 \mathrm{d}F_0(x)\\
&= \int\limits_{-\infty}^{X_{1:n}} [-F_0(x)]^2 \,\mathrm{d}F_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{X_{i:n}}^{X_{i+1:n}} \left[\frac{i}{n} - F_0(x)\right]^2 \mathrm{d}F_0(x) + \int\limits_{X_{n:n}}^{+\infty} [1 - F_0(x)]^2 \,\mathrm{d}F_0(x)\\
&= \frac{1}{3}U_1^3 + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(U_{i+1} - \frac{i}{n}\right)^3 - \left(U_i - \frac{i}{n}\right)^3\right] - \frac{1}{3}(U_n - 1)^3\\
&= \frac{1}{3}U_1^3 + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1}\left[U_{i+1}^3 - U_i^3 + \frac{3i^2}{n^2}(U_{i+1} - U_i) - \frac{3i}{n}(U_{i+1}^2 - U_i^2)\right] - \frac{1}{3}(U_n - 1)^3
\end{aligned} \tag{5.7.2298}$$

Maintenant nous utilisons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} i^2(U_{i+1} - U_i) &= \sum_{i=2}^{n}(i-1)^2 U_i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 U_i = (n-1)^2 U_n - U_1 - \sum_{i=2}^{n-1}(2i-1)U_i\\
&= n^2 U_n - \sum_{i=1}^{n}(2i-1)U_i
\end{aligned} \tag{5.7.2299}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
C_n &\triangleq \frac{1}{3}U_1^3 + \frac{1}{3}U_n^3 - \frac{1}{3}U_1^3 + \left(U_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}U_i\right) - \left(U_n^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}U_i^2\right) - \frac{1}{3}(U_n - 1)^3\\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i^2 - \frac{2i-1}{n}U_i\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2\\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 - \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2\\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 - \frac{1}{4n^2}\frac{1}{3}n(4n^2-1)\\
&= \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2
\end{aligned} \tag{5.7.2300}$$

Dès lors :

$$W^2 = nC_n = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 \tag{5.7.2301}$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Considérons que nous avons les paramètres suivants d'un échantillon :

$$\bar{X} = 6.4034 \qquad \text{et} \qquad \sigma_X = 3.299319 \tag{5.7.2302}$$

En supposant une distribution Normale $\mathcal{N}(\bar{X}, \sigma_X)$, nous obtenons pour chacune des valeurs de l'échantillon :

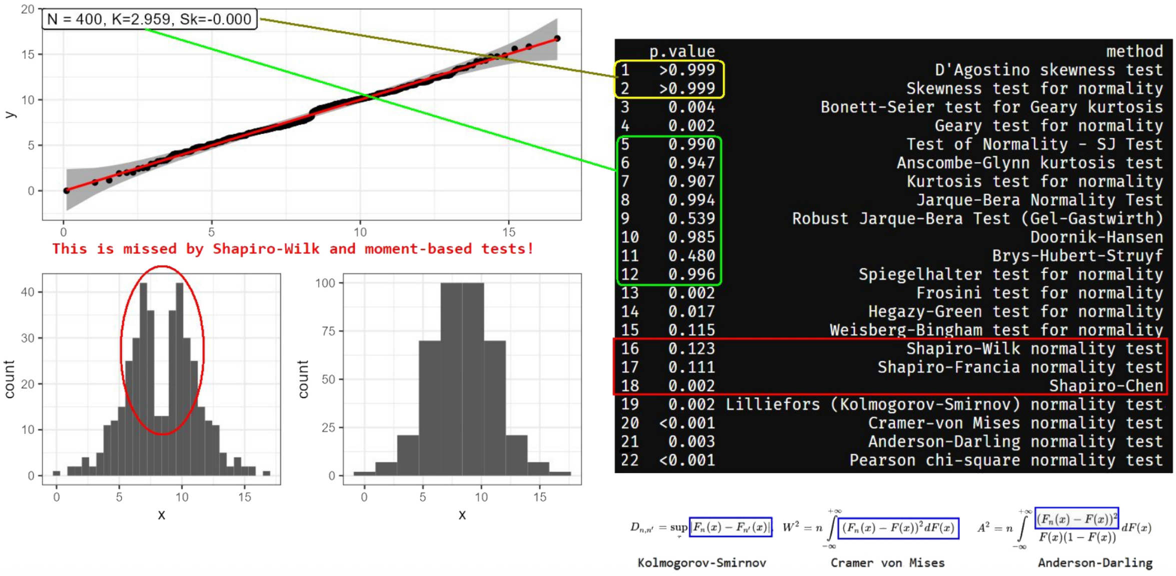
$$F_0(X) = (0.04943849, 0.05925460, 0.06477221, 0.07101753, 0.13526439, 0.25218337, 0.31746223, 0.38651837, 0.48830421, 0.67550752, 0.68425558, 0.69965168, 0.78797818, 0.79458401, 0.79661282, 0.83025028, 0.83051069, 0.83202204, 0.83609969, 0.84033359)$$

Calculons maintenant la statistique de Cramér-von Mises en utilisant :

$$\begin{aligned} W^2 &= \frac{1}{12 \cdot 20} + \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{F(x_i) - (2 \cdot i - 1)}{20 \cdot 20} \right)^2 \\ &= \frac{1}{240} + \left(\frac{0.04943849 - (2-1)}{40} \right)^2 + \cdots \left(\frac{0.84033359 - (40-1)}{40} \right)^2 \\ &= \frac{1}{240} + (0.005972399 + 0.0002479177 + 0.003627386 + \cdots + 0.01813504) \\ &= 0.04166667 + 0.1861175 = 0.1902842 \end{aligned}$$

Nous obtenons ici $W^2 = 0.1902842$ que l'on reporte dans la table de Cramér-von Mises pour 20 degrés de liberté, ce qui donne une p-valeur de $0.006 < 5\%$. Par conséquent, nous rejetons H_0 et nous concluons que la fonction de distribution de X n'est très probablement pas tirée d'une distribution Normale.

Il existe près d'une demi-centaine de tests d'adéquation et comme ils ont tous des hypothèses différentes, ils ne conduisent pas aux mêmes résultats, comme illustré ci-dessous avec une distribution quasi-gaussienne bimodale :



En cours

5.7.13.10 Estimation par densité de noyau

En statistique, "l'estimation par densité du noyau" (EDN) ou "lissage par noyau" est un moyen non paramétrique d'estimer la fonction de densité de probabilité d'un variable aléatoire, mais aussi pour faire des régressions spéciales (voir la section Méthodes Numériques page ??). L'estimation par densité du noyau est un problème fondamental de lissage des données dans les affaires (business) et la science où des inférences sur la population sont faites, sur la base d'un échantillon de données fini. Dans certains domaines tels que le traitement du signal et l'économétrie, elle est également appelée "méthode de la fenêtre de Parzen–Rosenblatt", d'après Emanuel Parzen et Murray Rosenblatt, qui sont généralement crédités pour l'avoir crée indépendamment dans sa forme actuelle.

L'estimation non paramétrique d'une fonction de densité de probabilité est très importante dans tous les domaines utilisant des statistiques ! On sait déjà que la technique utilisant les histogrammes est très délicate et discutable car il faut choisir la bonne largeur d'intervalle pour chacune des barres, ce qui est très subjectif et la règle de Sturges que nous avons vue précédemment peut être discutée !

Pour introduire le sujet nous rappelons tout d'abord que nous avons dans le cas univarié :

$$F(x-h<X<x+h)=P(x-h<X<x+h)=\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \tag{5.7.2303}$$

Ou ce qui s'écrit parfois plus élégamment :

$$F(x\in I_j)=P(x\in I_j)=\int\limits_{I_j} f(t)\mathrm{d}t \tag{5.7.2304}$$

Sur la base de la méthode d'intégration numérique avec des rectangles (voir section Méthodes Numériques page ??), nous pouvons écrire :

$$P(x-h<X<x+h)=\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \cong 2hf(x) \tag{5.7.2305}$$

Par conséquent, nous avons :

$$f(x)\cong \frac{1}{2h}P(x-h<X<x+h) \tag{5.7.2306}$$

La probabilité ci-dessus peut être estimée par la fréquence relative des observations :

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{2h}\frac{\#\text{ observations dans l'intervalle }]x-h,x+h[}{n} \tag{5.7.2307}$$

Ce qui est parfois écrit :

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{2h}\frac{\#\{x_i\in I_j\}}{n} \tag{5.7.2308}$$

En cours de traduction de l'anglais

Une écriture alternative non triviale (et égale en valeur numérique !) est :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x - x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(t, h) \tag{5.7.2309}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les valeurs observées et :

$$w(x - x_i, h) = w(t, h) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & |t| < h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.7.2310}$$

est appelée la fonction "poids du noyau" ou "fonction de noyau de Rosenblatt univariée". La relation précédente est également souvent notée :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \tag{5.7.2311}$$

Avec (notation un peu malheureuse à mon avis ...) :

$$K(x) = K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x - x_i| < h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.7.2312}$$

et où h est nommé la "largeur de bande".

En général, une "fonction noyau" $K(x)$ est une fonction qui doit satisfaire les propriétés suivantes :

P1. La fonction du noyau est supérieure ou égale à zéro $K(x) \geq 0$

P2. La fonction noyau est maximale en $x = 0$

P3. La fonction noyau est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par $x = 0$

P4. La fonction noyau tend vers zéro loin de $x = 0$ tel que $\lim_{|x| \to +\infty} K(x) = 0$

P5. La fonction noyau est une fonction de densité de probabilité

La propriété P1 est évidente à contrôler et elle ne nécessite aucune preuve même dans des cas plus compliqués que la fonction noyau prise comme exemple précédemment.

La propriété P2 est plus une contrainte d'implémentation qu'une propriété. Pour être satisfaiet, il faut simplement centrer les valeurs (mesures) avec lesquelles on travaille et supposer que la distribution est unimodale.

La propriété P3 est également plus une contrainte d'implémentation qu'une propriété. Il nous sera utile pour simplifier certains calculs comme le biais de la moyenne attendue ou de l'écart type (voir plus bas).

La propriété P4 s'applique par bon sens et découle de la propriété P2. Dans le cas des fonctions de densité de probabilité unimodales (raison pour laquelle cette propriété est souvent omise des énoncés).

Pour vérifier la propriété P5, il suffit de montrer que la probabilité cumulée est unitaire.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 5.46.7. On sait par construction de la fonction noyau précédente que sur chaque point est placé un rectangle de hauteur $1/2h$ et de largeur $2h$. Ensuite, l'idée est simplement d'écrire :

$$\begin{aligned}\sum_i \hat{f}(x_i)2h &= \sum_i \left[\frac{1}{nh}K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right]2h = \sum_i \frac{1}{2h}\frac{\#\{x_i\in[x_i-h,x_i+h]\}}{n}2h\\ &= \sum_i \frac{\#\{x_i\in[x_i-h,x_i+h]\}}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1\end{aligned} \tag{5.7.2313}$$

■ Q.E.D.

Quelques exemples de fonctions du noyau qui satisfont ces propriétés sont (les plus importantes ont déjà été disséquées dans les sous-sections précédentes) à une constante de normalisation près :

- Le noyau gaussien :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{5.7.2314}$$

- Le noyau de Cauchy :

$$K(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \tag{5.7.2315}$$

- Le noyau de Picard :

$$K(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \tag{5.7.2316}$$

- Le noyau d'Epanechnikov :

$$K(x) = \begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2) & \text{quand } t\in[-1,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{5.7.2317}$$

En cours de traduction de l' anglais

Considérons maintenant quelques propriétés importantes de la fonction de densité empirique.

Calculons son espérance (comme il s'agit de calculer l'espérance de la fonction de densité elle-même, cela nous donnera finalement le biais de l'espérance) :

$$\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh}K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) \tag{5.7.2318}$$

Par exemple, pour un noyau gaussien, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int x\hat{f}(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{nh}K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\mathrm{d}x = \int\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{nh\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.7.2319}$$

À partir de ce moment, la variable dont nous prenons l'espérance, c'est-à-dire $\mathrm{E}\left(K\left(\dfrac{x-x_i}{h}\right)\right)$, n'est plus une fonction de densité de probabilité mais une simple variable aléatoire transformée. Nous allons donc l'étendre au cas continu et le multiplier par sa vraie probabilité. L'idée très maligne étant que si le biais est nul, nous devrions trouver :

$$\mathrm{E}(\hat{f}(x)) = \mathrm{E}(f(x)) = f(x) \tag{5.7.2320}$$

et si on ne retombe pas sur ce résultat. La différence nous donnera le biais que nous recherchons !

Vérifions cela :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{f}(x)) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(K\left(\frac{x-t}{h}\right)\right) f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{nh}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{nh}n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.7.2321}$$

Posons pour simplifier les développements ultérieurs :

$$z = \frac{x-t}{h} \Leftrightarrow t = x - hz \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{h} \tag{5.7.2322}$$

et dès lors :

$$\mathrm{E}(\hat{f}(x)) = \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(z)f(x-hz)(-h)\mathrm{d}z = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(z)f(x-hz)\mathrm{d}z \tag{5.7.2323}$$

Développons la fonction $f(x-hz)$ comme un développement de série de Taylor (voir section Séquences et Séries page 1677) sur $z=0$:

$$\begin{aligned}f(x-hz) &\cong f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)\left((x-hz)-x\right) + \frac{1}{2!}f'(x)\left((x-hz)-x\right)^2 + \mathcal{O}(h^2) \\ &= f(x) + f'(x)(-hz) + \frac{1}{2!}f''(x)(-hz)^2 + \mathcal{O}(h^2) \\ &= f(x) - hzf'(x) + \frac{1}{2!}(hz)^2 f''(x) + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned} \tag{5.7.2324}$$

Dès lors nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{f}(x)) &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(z)f(x-hz)\mathrm{d}z \cong -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[f(x) + hzf'(x) + \frac{(hz)^2}{2}f''(x)\right]\mathrm{d}z \\ &= -f(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(z)\mathrm{d}z + hf'(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zK(z)\mathrm{d}z + \frac{h^2}{2}f''(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2K(z)\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{5.7.2325}$$

Mais, nous savons que si la fonction du noyau est symétrique et maximale à zéro (unimodale), alors nous pouvons inverser le signe de la première intégrale :

$$\mathrm{E}(\hat{f}(x)) = f(x)\int\limits_{+\infty}^{-\infty} K(z)\mathrm{d}z + hf'(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zK(z)\mathrm{d}z + \frac{h^2}{2}f''(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2K(z)\mathrm{d}z \tag{5.7.2326}$$

En cours de traduction de l'anglais

La première intégrale est égale à 1 puisque la fonction noyau est une fonction de densité de probabilité. Ensuite, il reste :

$$\mathrm{E}(\hat{f}(x)) = f(x) + hf'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} zK(z)\mathrm{d}z + \frac{h^2}{2}f''(x)\int_{-\infty}^{+\infty} z^2K(z)\mathrm{d}z \tag{5.7.2327}$$

La deuxième intégrale calcule l'espérance. Or, puisque la fonction noyau est supposée être symétrique et maximale en zéro, il s'ensuit que son espérance est nulle et donc qu'il reste :

$$\mathrm{E}(\hat{f}(x)) = f(x) + \frac{h^2}{2}f''(x)\int_{-\infty}^{+\infty} z^2K(z)\mathrm{d}z = f(x) + \frac{h^2}{2}f''(x)\sigma^2 \tag{5.7.2328}$$

Et donc le biais de la moyenne attendue est :

$$\text{Bias}\left(\mathrm{E}(\hat{f}(x))\right) \cong \frac{h^2}{2}f''(x)\sigma^2 \tag{5.7.2329}$$

Ainsi le biais diminue si on diminue h (mais on va immédiatement montrer que c'est le contraire pour la variance).

Calculons maintenant la variance :

$$\mathrm{V}\left(\hat{f}(x)\right) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh}K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) = \frac{1}{n^2h^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}\left(K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) \tag{5.7.2330}$$

Parce que les x_i, $i=1,2,\ldots,n$, sont distribués indépendamment. Maintenant en utilisant le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right) &= \mathrm{E}\left(K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2\right) - \left(\mathrm{E}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right)^2\\ &= \int K\left(\frac{x-t}{h}\right)^2 f(t)\mathrm{d}t - \left(\int K\left(\frac{x-t}{h}\right)f(t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{5.7.2331}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{f}(x)) &= \frac{1}{n}\int\frac{1}{h^2}K\left(\frac{x-t}{h}\right)^2 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{h}\int K\left(\frac{x-t}{h}\right)f(t)\mathrm{d}t\right)^2\\ &= \frac{1}{n}\int\frac{1}{h^2}K\left(\frac{x-t}{h}\right)^2 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\left(f(x) + \text{Bias}\left(\hat{f}(x)\right)\right)\end{aligned} \tag{5.7.2332}$$

Substitutant $z = \dfrac{x-t}{h}$ nous obtenons :

$$\mathrm{V}(\hat{f}(x)) = \frac{1}{nh}\int K(z)^2 f(x-hz)\mathrm{d}z - \frac{1}{n}\left(f(x) + \mathcal{O}(h^2)\right) \tag{5.7.2333}$$

Appliquer à nouveau une approximation de Taylor donne :

$$\mathrm{V}(\hat{f}(x)) \cong \frac{1}{nh}\int K(z)^2\left(f(x) - hzf'(x) + \mathcal{O}(h)\right) - \frac{1}{n}\left(f(x) + \mathcal{O}(h^2)\right)^2 \tag{5.7.2334}$$

En cours de traduction de l'anglais

Notez que si n devient grand et h devient petit alors l'expression ci-dessus devient approximativement :

$$\text{V}(\hat{f}(x)) \cong \frac{1}{nh} f(x) \int K^2(z)\mathrm{d}z \qquad (5.7.2335)$$

nous remarquons que la variance diminue à mesure que h augmente.

La sélection de la bande passante h de l'estimateur de noyau est un sujet de recherche considérable. Il existent plus d'une méthode heuristique populaire mais au moins ils sont tous plus robustes que la règle de Sturge !

Voici quelques exemples sans le script d'un lissage du noyau :

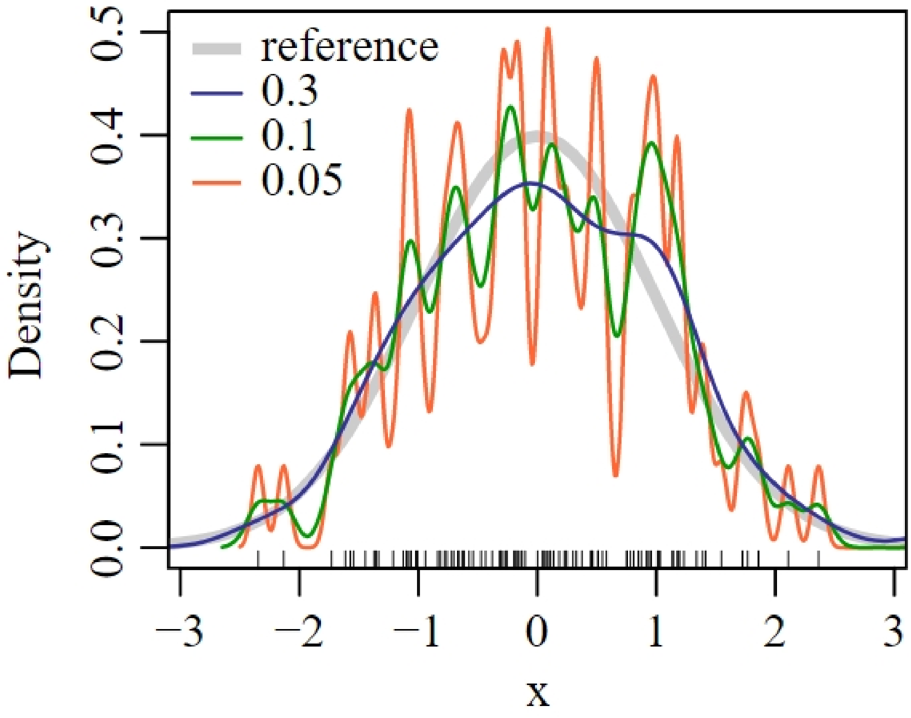


FIG. 5.219 – Estimation par densité du noyau de 100 nombres aléatoires normalement distribués en utilisant différentes largeurs de bandes de lissage (source : Wikipédia)

En cours anglais

et une comparaison entre un histogramme et un lissage par noyau :

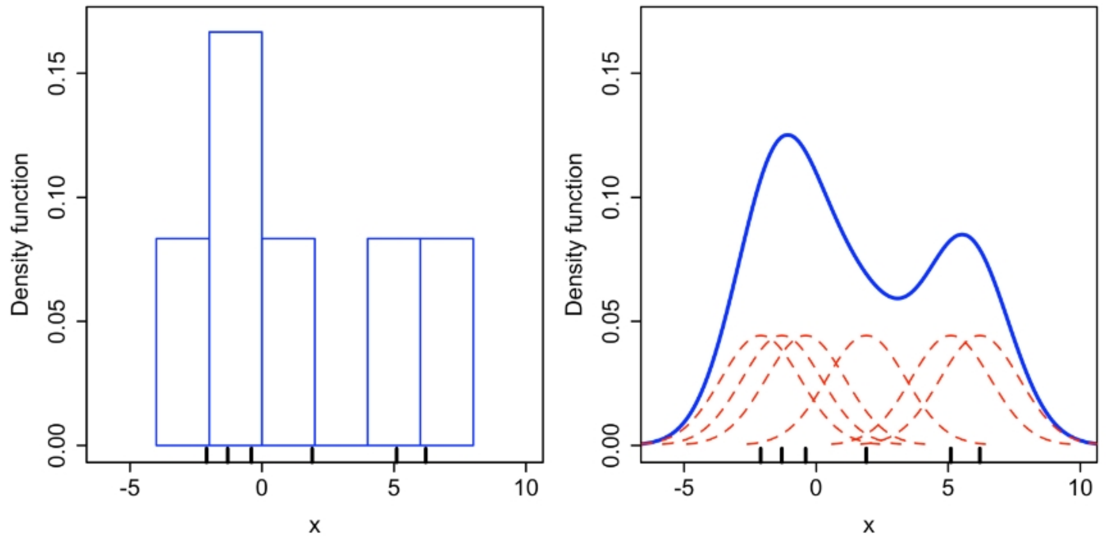


FIG. 5.220 – **Comparaison de l'histogramme (à gauche) et de l'estimation de la densité du noyau (à droite) construits à partir des mêmes données. Les noyaux individuels 6 sont les courbes en pointillés rouges, la densité du noyau estime les courbes bleues. Les points de données sont les petits tracé sur l'axe horizontal (source : Wikipédia)**

Et une autre figure intéressante qui met en évidence le problème des histogrammes [479] :

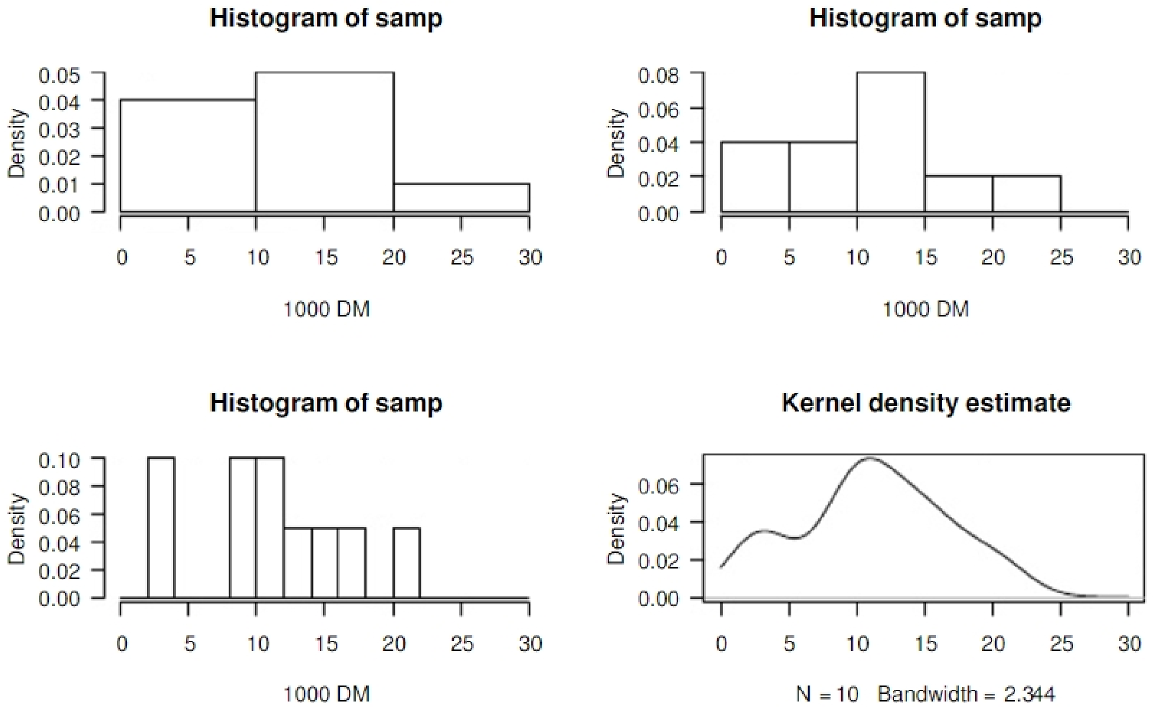


FIG. 5.221 – **Histogrammes avec différentes largeurs de bandes et une estimation par noyaux de $f(x)$ pour le même échantillon**

Le lecteur intéressé peut consulter nos livres compagnons sur R et MATLAB™ pour obtenir les détails sur la façon d'exécuter un lissage par densité de noyaux avec des logiciels scientifiques.

5.7.13.11 Tests de rapports des vraisemblances

De nombreux logiciels de statistiques retournent, en complément des résultats statistiques classiques, une sortie qui est parfois nommée "test de vraisemblance maximale" ou "test du rapport de vraisemblance maximale"(TRV) pour un test dont le résultat est déjà donné. Ce test du maximum de vraisemblance est aussi parfois le résultat unique car les méthodes classiques ne fournissent pas de sortie calculable ou précise (c'est le cas du test G et du test de Poisson des moyennes). Comme nous le verrons ci-dessous, le principe est fondamentalement ... extrêmement simple !

Rappelons que nous avons prouvé que pour une loi normale lors de notre étude des estimateurs de vraisemblance que :

$$\ln\left(L(\mu,\sigma^2)\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \tag{5.7.2336}$$

Par exemple, si nous connaissons l'écart type mais que nous essayons d'estimer la moyenne, alors cette dernière relation peut s'écrire :

$$\ln\left(L(\hat{\mu})\right) = \left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{\sigma^2}\right) + c^{te} \tag{5.7.2337}$$

Alors rien ne nous empêche d'écrire :

$$\ln\left(L(\mu)\right) - \ln\left(L(\hat{\mu})\right) = \left[\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right) + c^{te}\right] - \left[\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{\sigma^2}\right) + c^{te}\right] \tag{5.7.2338}$$

Donc après quelques très petites manipulations élémentaires d'algèbre et d'arithmétique :

$$-2\ln\left(\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})^2-(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \tag{5.7.2339}$$

Dans le cas de l'hypothèse suivante (test T de Student en bilatéral) avec l'hypothèse d'homoscédasticité :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \hat{\mu} \\ H_1 &: \mu \neq \hat{\mu} \end{aligned} \tag{5.7.2340}$$

Nous avons :

$$\frac{(x_i-\hat{\mu})^2-(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \left(\mathcal{N}(0,1)\right)^2 \tag{5.7.2341}$$

Donc sous l'hypothèse nulle :

$$-2\ln\left(\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})^2-(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}Z_i^2 = \chi^2_{n-1} \tag{5.7.2342}$$

Ce qui est souvent noté :

$$\boxed{\Lambda = -2\ln\left(\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})}\right) = -2\left(\ln(\vec{\theta}) - \ln(\hat{\vec{\theta}})\right) = \chi^2_{n-1}} \tag{5.7.2343}$$

et est le "test du rapport de vraisemblance pour la comparaison des moyennes d'une loi Normale" ou "test du maximum de vraisemblance de la qualité d'ajustement pour la Normalité"..

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Certains logiciels utilisent pour des raisons que j'ai été incapables de prouver une distribution chi carré χ^2_{nd-1}, où d est le nombre de paramètres de la loi de distribution supposée implicite ($d=1$ pour une loi de Poisson ou $d=2$ pour une loi Normale, etc.).

Nous voyons donc déjà, avant de continuer, qu'un test de rapport de vraisemblance est un test statistique utilisé pour comparer la qualité d'ajustement de deux modèles, dont l'un (le modèle nul) est un cas particulier de l'autre (le modèle alternatif). Le test est basé sur le rapport de vraisemblance, qui exprime le nombre de fois que les données sous un modèle soient plus vraisemblable par rapport à à un autre. Ce rapport de vraisemblance, ou de manière équivalente son logarithme, peut alors être utilisé évidemment pour calculer une p-valeur, ou comparé à une valeur critique pour décider de rejeter le modèle nul en faveur du modèle alternatif. Lorsque le logarithme du rapport de vraisemblance est utilisé, la statistique est appelée "statistique du rapport de vraisemblance logarithmique", et la distribution de probabilité de cette statistique de test, en supposant que la valeur nulle modèle est vraie, peut être approximé en utilisant "théorème de Wilks" (approximation par une distribution chi-carré).

Remarque

Dans le cas de la distinction entre deux modèles, dont chacun n'a pas de paramètres inconnus, l'utilisation du test du rapport de vraisemblance peut être justifiée par le lemme de Neyman–Pearson, qui démontre qu'un tel test a la puissance la plus élevée parmi tous les concurrents. Mais cela sort du cadre de ce livre (du moins pour l'instant...).

En pratique on retrouve plus souvent le test du rapport du maximum de vraisemblance avec la loi de Poisson. Nous rappelons que pour ces derniers nous avons également prouvé lors de notre étude des estimateurs de vraisemblance :

$$\ln\left(L(\mu)\right)=\ln(\mu)\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)-\mu n \tag{5.7.2344}$$

Dès lors :

$$\ln\left(L(\mu)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\ln(\mu)-\mu\right)+c^{te} \tag{5.7.2345}$$

Comme pour le cas de la loi Normale, on peut écrire :

$$\ln\left(L(\mu)\right)-\ln\left(L(\hat{\mu})\right)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\ln(\mu)-\mu\right)+c^{te}\right]-\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\ln(\hat{\mu})-\hat{\mu}\right)+c^{te}\right] \tag{5.7.2346}$$

Dès lors :

$$\ln\left(\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\ln\left(\frac{\mu}{\hat{\mu}}\right)-\mu+\hat{\mu}\right] \tag{5.7.2347}$$

Ce qu'il est coutume d'écrire :

$$-2\ln\left(\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})}\right)=-2\sum_{i=1}^{n}\left[n_i\ln\left(\frac{\mu}{\hat{\mu}}\right)-\mu+\hat{\mu}\right] \tag{5.7.2348}$$

En cours de traduction anglais

Supposons que nous voulions tester le fait que nos mesures ne s'écartent pas trop de la véritable attente, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \hat{\mu} \\ H_1 &: \mu \neq \hat{\mu} \end{aligned} \tag{5.7.2349}$$

Nous avons sous l'hypothèse nulle :

$$\Lambda = -2\ln\left(\frac{L(\mu)}{L(\hat{\mu})}\right) = 0 \tag{5.7.2350}$$

Alors ... arrrrgh. Nous ne pouvons pas faire de déduction sur un tel résultat. C'est donc très ennuyeux de faire face à un tel ratio de vraisemblance ... Heureusement on sait que dans le cas où :

$$\sigma^2 = \mu \qquad \mu \to +\infty \tag{5.7.2351}$$

la loi de Poisson tend vers une loi Normale (si μ est supérieur à environ 10, alors la distribution Normale est une bonne approximation si une correction de continuité appropriée est effectuée). Ensuite, dans ces conditions, nous utilisons le résultat précédent de la loi Normale !

Plus généralement, nous pouvons (malheureusement) trouver les relations finales ci-dessus sous les formes suivantes dans divers manuels universitaires :

$$\Lambda(x) = \frac{L(\theta_0 \,|\, x)}{L(\theta_1 \,|\, x)} = \frac{f(\bigcup_i x_i \,|\, \theta_0)}{f(\bigcup_i x_i \,|\, \theta_1)} = \frac{L(\theta_0 \,|\, x)}{\sup\{\, L(\theta \,|\, x) : \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}\}} \tag{5.7.2352}$$

De nombreuses statistiques de test courantes telles que le test Z, le test F de Fisher, le test T de Student, le test du chi carré de Pearson et le test G sont des tests pour des modèles imbriqués et peuvent être formulés sous forme de rapports de vraisemblance logarithmique ou d'approximations de ceux-ci.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Certains logiciels proposent un autre test d'adéquation pour la distribution discrète, appelé "estimation minimale du chi carré de qualité de l'ajustement". L'idée est assez simple et nous l'illustrerons avec une distribution de Poisson. Prenons l'exemple suivant ($n = 8$ pour une taille d'échantillon totale égale à 20) :

Valeur	**Fréquence**
0	1
1	2
2	4
3	5
4	3
5	3
6	1
7	0
8	1

L'estimation du chi carré minimum de la population du paramètre λ, est la valeur λ qui

minimise :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(\text{Observé}-\text{Attendu})^2}{\text{Attendu}}=\sum_{k=0}^{8}\frac{\left((\text{comptage dans cellule } k)-20\left(\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right)\right)^2}{20\left(\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right)} \tag{5.7.2353}$$

Le calcul numérique montre que la valeur de λ qui minimise la statistique du chi carré est d'environ 3.5242. C'est l'estimation minimale du chi carré de λ. Pour cette valeur de λ, la statistique du chi carré est d'environ 3.062764. Il y a 10 cellules. Si l'hypothèse nulle avait spécifié une seule distribution, plutôt que d'exiger l'estimation de λ, alors la distribution de l'hypothèse nulle de la statistique de test serait une distribution du chi carré avec $10-1=9$ degrés de liberté.

5.7.14 Robustesse et Statistiques non paramétriques

Dans le domaine des statistiques inférentielles et des tests d'hypothèses, la robustesse est un concept récurrent (les banques sont obligées de faire des stress tests / crash tests de leurs modèles de risque par exemple). Nous avons déjà mentionné ce fait précédemment.

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#5.7.150) :

D1. Un test est qualifié de "test robuste" s'il reste valide alors que les hypothèses de l'application ne sont pas toutes satisfaites. Cela peut être une taille d'échantillon quelque peu faible ou une distribution de probabilité (distribution Normale pour les tests paramétriques) qui n'est pas très bien satisfaite, ou les valeurs aberrantes qui influencent trop le résultat du test. Par exemple, l'ANOVA est robuste par rapport à l'hypothèse de Normalité mais pas comparée à celle de l'homoscédasticité.

D2. Un indicateur est nommé "indicateur robuste" s'il n'est pas très sensible à la présence de valeurs aberrantes (le coefficient de corrélation ou la moyenne, par exemple, ne sont pas des indicateurs très robustes).

D3. Plus généralement, un modèle est nommé "modèle robuste " lorsqu'il permet une extension des résultats (en temps ou pour une population). La robustesse est également applicable à une régression multiple, à des tests statistiques ou à un tableau de bord, ou à une planification de projets.

Par conséquent, à moins d'être uniquement descriptif, vos analyses statistiques devront respecter certaines règles afin que leurs résultats soient généralisables.

Première condition d'une bonne robustesse : les données ! Intuitivement, nous savons tous que nous ne transformons pas un cas particulier en généralité (ce qui ne relèverait pas du domaine de la statistique mais des discussions de comptoir). Des données suffisantes créent des modèles fiables et solides. Par exemple, les prévisions dérivées d'une série chronologique montrant la saisonnalité nécessitent au moins trois ou quatre ans d'historique.

Cependant, la quantité n'est pas suffisant, il faut aussi la qualité (pour la plupart des managers, la qualité est un concept très difficile à appréhender) ! ! En effet, il vaut mieux éviter de faire une étude sur des informations peu fiables qui peuvent conduire à des décisions coûteuses. De plus, il est recommandé d'être très prudent avec la manipulation des valeurs aberrantes. Si cela n'est pas possible, nous nous tournons vers des méthodes plus appropriées, telles que celles qui utilisent la médiane plutôt que la moyenne, les classent plutôt que les valeurs ou les techniques de filtrage.

Définition (#5.7.151) : La "Statistique non paramétriques" est la branche des statistiques qui ne repose pas uniquement sur des familles paramétrées de distributions de probabilités (des exemples courants de paramètres sont la moyenne et la variance).

Le terme "statistiques non paramétriques" a été défini de manière imprécise des deux manières suivantes (entre autres ...) :

1. Ils ne reposent pas sur des hypothèses selon lesquelles les données sont tirées d'une distribution de probabilité donnée. Nous disons alors qu'il s'agit de "méthodes libre de distributions".

2. Ils ne reposent sur aucune opération arithmétique de toutes les données individuelles (comme les "rangs" ou les "étendues" par exemple !)

En cours de traduction de l'anglais

Comme nous le verrons plus loin et comme nous l'avons déjà vu avec quelques cas particuliers plus haut, il existe pas mal de statistiques non paramétriques et de tests non paramétriques (gardez à l'esprit que même s'ils ne sont pas basés sur des familles de distributions paramétrées, ils ont d'autres hypothèses qui ne sont visibles que lorsque vous étudiez leur preeuve mathématique ! ! !). Plutôt que de les énumérer tous ici, nous voulons plutôt la réponse la plus courante à la question de nombreux praticiens qui est d'avoir une liste non exhaustive des équivalents non paramétriques à certains tests et statistiques paramétriques. Voici donc un tableau qui répond pour la part la plus importante à cette question :

Tests Paramétriques	Tests Non-paramétriques	Caractéristiques principales
Tests T ou Z à 1 échantillon	Test du signe à 1 échantillon	Test sur la médiane de données d'une distribution non-symétrique
	Test de Wilcoxon à 1 échantillon	Test sur la médiane de données d'une distribution symétrique
Test T à 2 échantillons	test de Mann-Withney	Test sur deux médianes en utilisant les rangs des données échantillonnées
ANOVA à une voie	Test de Kruskal-Wallis	Test sur l'égalité des médianes de deux populations ou plus. Plus puissant que le test de la médiane de Mood, mais moins robuste aux valeurs aberrantes
	Test de la médiane de Mood	Test sur l'égalité des médianes de deux populations ou plus. Plus robuste aux valeurs aberrantes que le test de Kruskal-Wallis, mais moins puissant.
ANOVA à deux voies randomisée par blocs	Test de Friedman	Test sur les médianes, utilisant des expériences randomisées par blocs
Coefficient de corrélation de Pearson	Coefficient de corrélation de Spearman	Mesure la dépendance statistique entre deux variables utilisant les rangs
Test de QdA d'Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov	Tests Mann–Whitney U ou Somme des rangs de Wilcoxon	Teste si deux échantillons sont tirés de la même distribution, par rapport à une hypothèse alternative donnée.

TAB. 5.72 – **Quelques tests / statistiques paramétriques et leur équivalent non paramétrique**

Pour une liste beaucoup plus exhaustive des tests paramétriques et non paramétriques, le lecteur peut se référer à la carte mentale de la science des données à la page **??**.

Ou pour ceux qui préfèrent un arbre de décision :

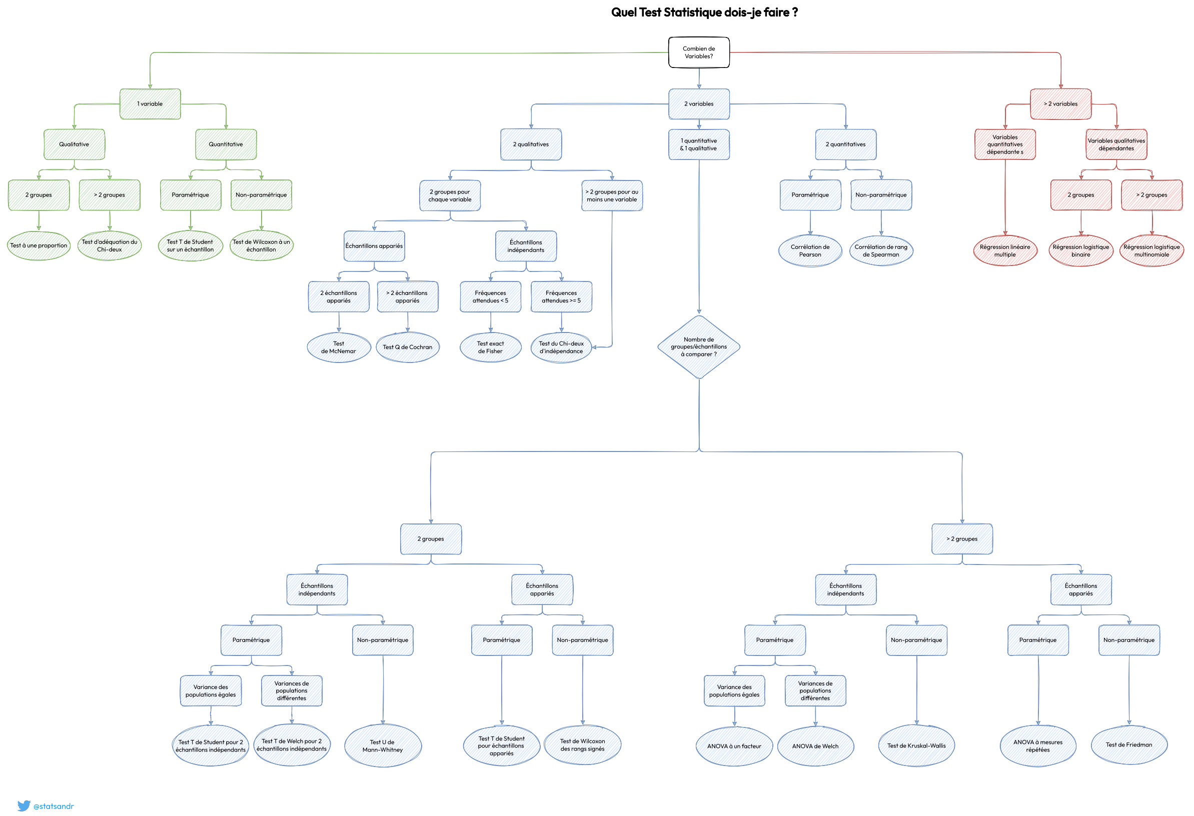


FIG. 5.222 – **Arbre de décision pour les tests statistiques naïfs (auteur : Antoine Soetewey)**

En cours de traduction en anglais

5.7.14.1 Statistiques de Rangs

Définition (#5.7.152) : Les Statistiques de Rangs, également nommées "statistiques d'ordre" sont définies comme l'ensemble des techniques de calculs statistiques et d'inférence statistique qui ont pour objectif principal de se débarrasser de la connaissance d'une distribution paramétrique et d'utiliser uniquement les rangs (ordre) des mesures. C'est un outil très puissant et beaucoup utilisé pour les statistiques non paramétriques !

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous parlons de tests paramétriques lorsque nous stipulons que les données proviennent d'une distribution connue donnée. Dans ce cas, les caractéristiques des données peuvent être résumées à l'aide des paramètres estimés sur l'échantillon, la procédure de test ultérieure se concentrant alors uniquement sur ces paramètres.

Remarque

Nous renovoyons le lecteur intéressé à en savoir plus mais sans détails mathématiques à l'excellent livre de Gopal K. Kanji qui contient une présentation sommaire de plus de 100 tests paramétriques et non paramétriques avec pour chacun un petit exemple pratique. Malheureusement, ce livre devrait être publié dans une nouvelle édition avec les 200 tests statistiques les plus utilisés pour être presque complet et parfait.

Les tests non paramétriques (comme les tests du chi carré déjà vus) éliminent l'étape nécessaire consistant à estimer les paramètres de la distribution avant de faire le test d'hypothèse. En général, les conclusions tirées des tests non paramétriques ne sont pas aussi puissantes que les conclusions paramétriques. Cependant, comme les tests non paramétriques font moins d'hypothèses, ils sont plus flexibles, plus robustes et applicables aux données non quantitatives.

Lorsque les données sont quantitatives, les tests non paramétriques les plus courants transforment les valeurs en rangs. Le nom "tests de rangs" est alors souvent rencontré. Lorsque les données sont qualitatives, seuls les tests non paramétriques peuvent être utilisés.

En cours de traduction de ... is

5.7.14.1.1 L-Statistiques

Avant d'aborder les distributions et tests non paramétriques, donnons quelques définitions que le lecteur peut trouver dans la littérature hyperspécialisée et dont nous avons évité l'utilisation du moins jusqu'à présent...

La médiane, la moyenne et l'étendue suggèrent l'utilisation de combinaisons linéaires des composantes du vecteur statistique d'ordre.

Définition (#5.7.153) : Ainsi, désignons par $X_{(1)} \geq X_{(2)}, \ldots, \geq X_{(n)}$, les statistiques d'ordre (valeurs ordonnées par ordre décroissant par leur rang et numérotées). On définit alors lA "L-statistique" par :

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} X_{(i)} \quad (5.7.2354)$$

Le plus connu des "L-estimateurs" est la moyenne arithmétique pour laquelle :

$$a_{i,n}=\frac{1}{n} \tag{5.7.2355}$$

Le deuxième L-estimateur le plus connu est la médiane pour laquelle nous avons lorsque n est impair :

$$a_{i,n}=\begin{cases}1 & i=\dfrac{n+1}{2}\\ 0 & i\neq\dfrac{n+1}{2}\end{cases} \tag{5.7.2356}$$

et quand n est pair :

$$a_{i,n}=\begin{cases}1 & i=\dfrac{n}{2},\dfrac{n}{2}+1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{5.7.2357}$$

Le troisième L-estimateur le plus connu est l'étendue pour laquelle nous avons :

$$a_{i,n}=\begin{cases}+1 & i=1\\ -1 & i=n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{5.7.2358}$$

Il existe d'autres L-estimateur empiriques mais nous nous arrêterons ici car la liste est assez longue.

En cours de traduction de l' anglais

5.7.14.1.2 Lois de distributions de rangs

La statistique d'ordre k est la k-ème plus petite valeur d'un échantillon de taille n d'une distribution aléatoire $F(x)$. Soit les variables aléatoires $X_1,X_2,\ldots,X_n$ indépendantes et identiquement distribuées. Étiquetons la plus petite valeur $X_{(1)}$, la plus petite suivante $X_{(2)}$ et ainsi de suite jusqu'à $X_{(n)}$. Alors la valeur de la statistique d'ordre k est $X_(k)$, pour$1\leq k\leq n$.

Soit $F(x)$ la fonction de distribution des X_i et $f(x)$ la fonction de densité. Déterminons d'abord la distribution de la statistique d'ordre k, c'est-à-dire :

$$P(X_{(k)}\leq x) \tag{5.7.2359}$$

Pour avoir $X_{(k)}\leq x$, nous devons avoir au moins k des n X_i inférieurs ou égaux à x. Chacun des n essais indépendants a une probabilité $F(x)$ d'être inférieur ou égal à x, donc le nombre d'essais inférieur ou égal à x a une distribution binomiale avec n essais et probabilité $F(x)$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}P(X_{(k)}\leq x)&=P\left(\text{au moins } k \text{ succès d'une distribution } \mathcal{B}(n,F(x))\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}P(j\text{ succès})\\&=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(F(x))^j(1-F(x))^{n-j}\end{aligned} \tag{5.7.2360}$$

Pour trouver la fonction de densité, nous prenons la dérivée par rapport à x :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(X_{(k)}\leq x)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(F(x))^j(1-F(x))^{n-j}\right)\\
&=\sum_{j=k}^{n-1}\binom{n}{j}\left[j(F(x))^{j-1}f(x)(1-F(x))^{n-1}-(n-j)(F(x))^j(1-F(x))^{n-j-1}f(x)\right]\\
&+nf(x)(F(x))^{n-1}\\
&=nf(x)\sum_{j=k}^{n-1}\left[\binom{n-1}{j-1}(F(x))^{j-1}(1-F(x))^{n-1}-\binom{n-1}{j}(F(x))^j(1-F(x))^{n-j-1}\right]\\
&+nf(x)(F(x))^{n-1}\\
&=nf(x)\left(\sum_{j=k-1}^{n-2}\binom{n-1}{j}(F(x))^j(1-F(x))^{n-j-1}-\sum_{j=k}^{n-1}(F(x))^j(1-F(x))^{n-j-1}\right)\\
&+nf(x)(F(x))^{n-1}\\
&=nf(x)\binom{n-1}{k-1}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-(k-1)-1}-nf(x)\binom{n-1}{n-1}(F(x))^{n-1}(1-F(x))^{n-(n-1)-1}\\
&+nf(x)(F(x))^{n-1}\\
&=nf(x)\binom{n-1}{k-1}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-(k-1)-1}-nf(x)(F(x))^{n-1}+nf(x)(F(x))^{n-1}\\
&=nf(x)\binom{n-1}{k-1}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-(k-1)-1}
\end{aligned}\tag{5.7.2361}$$

Rédigé sous cette forme, il est évident que la majorité des termes s'annulent. Cela laisse :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(X_{(k)}\leq x)=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}\tag{5.7.2362}$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.14.1.3 Intervalles de confiance pour les centiles libre de toute distribution

Plus tôt, nous avons appris (parmi beaucoup d'autres choses) comment calculer un centile d'échantillon comme une estimation ponctuelle d'un centile de population (ou de répartition). Tout comme il est judicieux de calculer les intervalles de confiance pour d'autres paramètres de population, tels que les moyennes et les variances, il est plus que judicieux d'apprendre à calculer un intervalle de confiance pour les centiles d'une population. C'est sur quoi nous allons travailler ci-dessous. Comme le suggère le titre du sujet, nous ne ferons aucune hypothèse sur la distribution des données, excepté sur le fait que la distribution doit être continue !

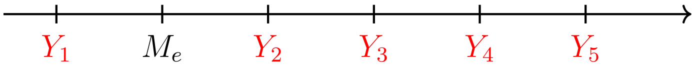
Comme c'est généralement le cas, motivons la méthode de calcul d'un intervalle de confiance pour la médiane M_e d'une population au moyen d'un exemple concret [68]. Supposons que $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4<Y_5$ sont les statistiques d'ordre d'un échantillon aléatoire de taille $n=5$

[68] C'est un exemple bien connu que vous pouvez trouver dans de nombreux manuels universitaire et sites Internet dont l'auteur original semble impossible déterminer.

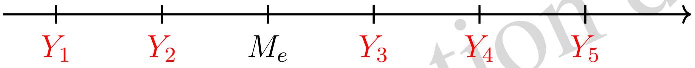
à partir d'une distribution continue. Ce que nous avons étudié plus haut nous dit que Y_3 sert de bon estimateur ponctuel de la médiane M_e. Voyons ce que nous pouvons construire comme intervalle de confiance étant donné que nous avons ces statistiques de rangs à notre disposition. Eh bien, supposons que nous suggerons un intervalle contraint par les statistiques du premier et du cinquième ordre, c'est-à-dire $[Y_1,Y_5]$, et qui servirait de bon intervalle. Dans quelle mesure pouvons-nous être sûrs que cet intervalle $[Y_1,Y_5]$ contiendrait la médiane de population inconnue M_e ? Pour répondre à cette question, il suffit de calculer la probabilité suivante :

$$P(Y_1 < M_e < Y_5) \tag{5.7.2363}$$

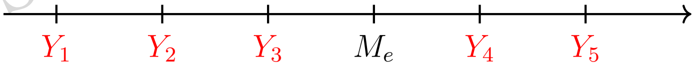
Le calcul de la probabilité se réduit à un simple calcul binomial une fois que nous avons compris toutes les façons dont la médiane de population M_e est prise en sandwich entre Y_1 et Y_5. Eh bien, la médiane de population M_e est prise en sandwich entre Y_1 et Y_5, si la statistique de premier ordre est la seule statistique d'ordre inférieure à la médiane M_e :



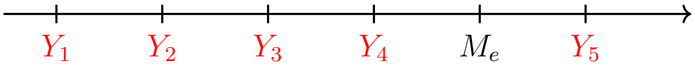
La médiane M_e de la population est prise en sandwich entre Y_1 et Y_5, si les deux premières statistiques d'ordre sont les seules statistiques de commande inférieures à la médiane M_e :



La médiane M_e de la population est prise en sandwich entre Y_1 et Y_5, si les trois premières statistiques d'ordre sont inférieures à la médiane M_e, et les statistiques de quatrième et cinquième ordre sont supérieures à M_e :



Et, la médiane M_e de la population est prise en sandwich entre Y_1 et Y_5, si la statistique de cinquième ordre est la seule statistique d'ordre supérieure à la médiane M_e :



Cela signifie que pour calculer la probabilité $P(Y_1 \leq M_e \leq Y_5)$, nous devons calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessus. Maintenant, si nous désigner par W le nombre de $X_i < M_e$, alors W est une variable aléatoire binomiale avec n essais mutuellement indépendants et probabilité de succès $p = P(X_i < M_e) = 0.5$ Et, en examinant les événements décrits ci-dessus, la probabilité souhaitée est calculée comme suit :

$$P(Y_1 \leq M_e \leq Y_5) = P(W=1)+P(W=2)+P(W=3)+P(W=4) \tag{5.7.2364}$$

En cours de traduction de l'anglais

La fonction de masse de probabilité binomiale (ou, alternativement, la table binomiale) rend le calcul simple :

$$P(Y_1 \leq M_e \leq Y_5) = \sum_{k=1}^{4} P(W=k) = \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k} (0.5)^k (0.5)^{5-k} = 0.9376 \quad (5.7.2365)$$

Ainsi, la probabilité que l'intervalle aléatoire $[Y1, Y5]$ contienne la médiane M_e est de 0.9376. Nous n'avons pas toujours autant de chance d'arriver à un coefficient de confiance décent dès notre premier essai. Parfois, nous devons réessayer en visant à obtenir un coefficient de confiance d'au moins 90%, mais aussi proche de 95% que possible. Dans ce cas, le coefficient de confiance pour l'intervalle $[Y2, Y4]$ est :

$$P(Y_2 \leq M_e \leq Y_4) = \sum_{k=2}^{3} P(W=k) = \sum_{k=2}^{3} \binom{5}{k} (0.5)^k (0.5)^{5-k} = 0.6250 \quad (5.7.2366)$$

De toute évidence, nous ferions mieux de nous en tenir à l'intervalle $[Y_1, Y_5]$ dans ce cas.

Notez qu'en général nous avons alors :

$$P(Y_i \leq M_e \leq Y_j) = \sum_{k=i}^{j-1} P(W=k) = \sum_{k=i}^{j-1} \binom{n}{k} (0.5)^k (0.5)^{n-k} \quad (5.7.2367)$$

La méthode que nous avons apprise pour trouver un intervalle de confiance pour la médiane d'une distribution continue peut être facilement étendue afin que nous puissions trouver un intervalle de confiance pour tout centile π_p. La seule chose que nous devons changer est la probabilité de succès, c'est-à-dire que X_i est inférieur à π_p :

$$p = P(X_i < \pi_p) \quad (5.7.2368)$$

Ensuite, le coefficient de confiance exact est calculé comme avant en utilisant la distribution binomiale avec les paramètres n et p :

$$P(Y_i \leq \pi_p \leq Y_j) = \sum_{k=i}^{j-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (5.7.2369)$$

En cours de traduction de l'anglais

5.7.14.1.4 Test de la somme des rangs de Wilcoxon

L'idée du "test de la somme des rangs de Wilcoxon" est la suivante : si nous collectons deux échantillons de mesure, et que nous stockons les valeurs dans l'ordre, l'alternance des X_i (de taille n_x) et Y_i (de taille n_y) devrait être assez stable si les deux lois de distribution F et G d'échantillons suivent respectivement la même distribution de probabilité. C'est donc comme un "contrôle d'adéquation".

Cela revient en fait à dire que l'hypothèse nulle est : *La distribution des rangs dans les deux groupes est égale*.

Formellement :

$$H_0 : P(X_A > X_B) = 0.5; H_A : P(X_A > X_B) \neq 0.5 \quad (5.7.2370)$$

En langage clair, l'hypothèse nulle est que la probabilité qu'une observation aléatoire du groupe A dépasse l'observation appariée tirée du groupe B est de moitié (c'est-à-dire qu'une observation aléatoire du groupe A a autant de probabilité d'être supérieure que comme étant inférieure à son observation appariée dans le groupe B).

La valeur pratique de ceci est difficile à voir, et donc dans de nombreux endroits, y compris les manuels de référence universitaire, l'hypothèse nulle est présentée comme les « deux populations ont des médianes égales ». L'hypothèse nulle actuelle peut être exprimée comme l'hypothèse mentionnée avec la médiane, mais seulement sous l'hypothèse supplémentaire que les formes des distributions sont identiques dans chaque groupe !

En d'autres termes, notre interprétation du test comme la comparaison des médianes des distributions exige le déplacement du paramètre de localisation uniquement. Comme cela est rarement vrai et jamais évalué, nous devrions probablement faire preuve d'une extrême prudence dans l'utilisation, et en particulier dans l'interprétation, du test de la somme des rangs de Wilcoxon.

Il n'est donc pas comme le test d'adéquation du chi-carré de comparer des mesures à une loi théorique, mais à d'autres mesures d'une même loi hypothétique.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le test de la somme des rangs de Wilcoxon est un test non paramétrique, utilisé donc pour les "Tests de signification d'hypothèse nulle non paramétriques", car nous n'avons besoin d'aucune mesure de dispersion (ie variance) ou de localisation (ie moyenne) des variables aléatoires. De plus, il s'agit d'un test dit "robuste" dans le sens où il ne suppose pas la Normalité des données.

Prenons un exemple avant d'aborder l'aspect théorique. Voici deux échantillons de taille 10 ($n_x = n_y$) de variables quantitatives :

$$5.7, 3.2, 8.4, 4.1, 6.9, 5.3, 1.7, 3.2, 2.5, 7.4 \tag{5.7.2371}$$

$$8.1, 5.5, 3.4, 7.9, 4.6, 1.6, 8.5, 7.1, 8.7, 5.7 \tag{5.7.2372}$$

Remarque

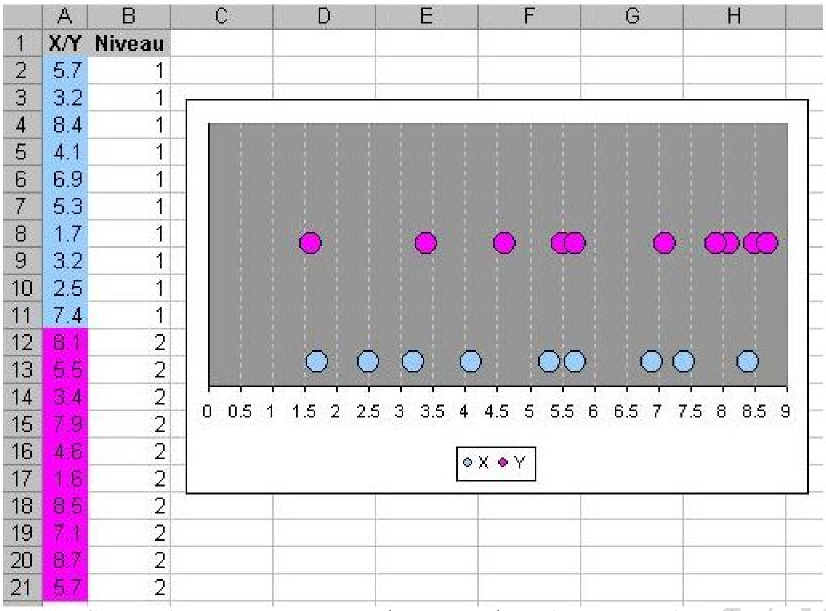
Le test de la somme des rangs de Wilcoxon peut très bien être utilisé pour les variables ordinales (mais seulement tant qu'elles sont dans un nombre acceptable). En règle générale, le test de la somme des rangs de Wilcoxon est également utilisé pour analyser les réponses aux enquêtes auprès des entreprises en utilisant une échelle de Likert en 7 points.

Voici les statistiques d'ordre de l'échantillon de taille 20 ($N = n_x + n_y$) regroupés et ordonnés (les 10 valeurs du premier échantillon sont soulignées) :

$$1.6, \underline{1.7}, \underline{2.5}, \underline{3.2}, \underline{3.2}, 3.4, \underline{4.1}, 4.6, \underline{5.3}, 5.5, \underline{5.7}, 5.7, \underline{6.9}, 7.1, \underline{7.4}, 7.9, 8.1, \underline{8.4}, 8.5, 8.7$$

Les valeurs du premier échantillon X (nommé "valeurs de traitement") dans cet exemple semblent être plus petites que celles du deuxième échantillon Y (nommé "valeurs de contrôle")

que nous représentons souvent dans un diagramme comme suit (en trichant un peu avec Microsoft Excel 11.8346) :



	A	B
1	X/Y	Niveau
2	5.7	1
3	3.2	1
4	8.4	1
5	4.1	1
6	6.9	1
7	5.3	1
8	1.7	1
9	3.2	1
10	2.5	1
11	7.4	1
12	8.1	2
13	5.5	2
14	3.4	2
15	7.9	2
16	4.6	2
17	1.6	2
18	8.5	2
19	7.1	2
20	8.7	2
21	5.7	2

FIG. 5.223 – Comparaison des valeurs ordonnées de deux échantillons dans Microsoft Excel 11.8346

Remarque

Vous devez faire attention au test de Wilcoxon que nous étudions ici et au test de Kruskal-Wallis que nous verrons plus tard. En effet, beaucoup de gens pensent que parce qu'ils ne sont pas paramétriques, ils n'ont aucune hypothèse ... Cependant, comme nous le savons, c'est faux ! ! ! Un test non paramétrique est en effet indépendant des paramètres de distribution mais il peut y avoir d'autres hypothèses. Dans le cas du test de Wilcoxon et du test de Kruskal-Wallis, l'hypothèse est (bien évidemment ...) que les paramètres d'échelle entre les deux échantillons sont égaux (sinon ce serait un non-sens de comparer deux choses que l'on sait déjà comme n'étant pas comparables !).

L'idée est alors de savoir si cette tendance est statistiquement significative ? C'est-à-dire si nous avons une différence du genre $F < G$ entre leurs lois de distribution respectives :

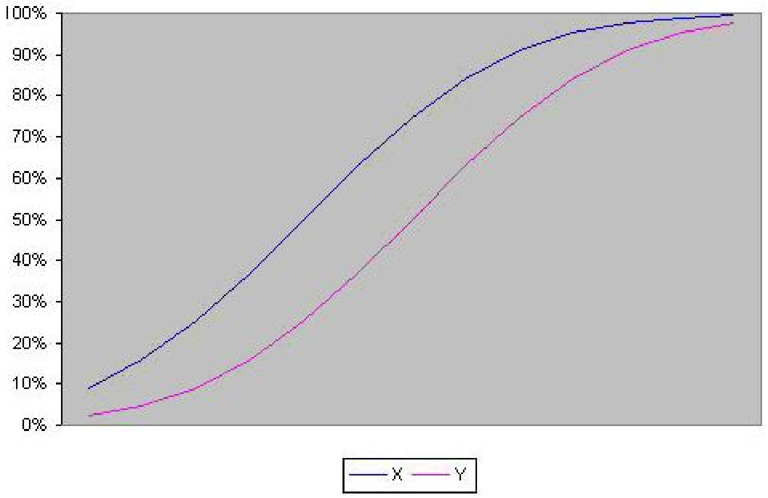


FIG. 5.224 – Exemple générique de comparaison de deux distributions dans Microsoft Excel 11.8346

ou si elles peuvent être considérés comme identiques. Pour cela, nous devons examiner le concept de "rang" :

Définition (#5.7.154) : Étant donné un échantillon aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de taille n de toute loi statistique continue, nous notons R_i le rang des X_i ordonnés dans un échantillon de population. Le rang i est un entier non nul strictement positif et compris entre 1 et n.

✍**Exemple :**

Dans :

$$1.6, \underline{1.7}, \underline{2.5}, \underline{3.2}, \underline{3.2}, 3.4, \underline{4.1}, 4.6, \underline{5.3}, 5.5, \underline{5.7}, 5.7, \underline{6.9}, 7.1, \underline{7.4}, 7.9, 8.1, \underline{8.4}, 8.5, 8.7$$

Nous avons respectivement les "statistiques d'ordre" suivantes :

$$\begin{gathered} X: \; R_2 = 1.7, R_3 = 2.5, R_4 = 3.2, R_5 = 3.2, R_7 = 4.1, \ldots \\ Y: \; R_1 = 1.6, R_6 = 3.4, R_8 = 4.6, R_{10} = 5.5, R_{11} = 5.7, \ldots \end{gathered}$$

Une fois le concept de "rang" défini et calculé, regardons la somme dans le cadre de notre exemple avec deux échantillons :

$$1.6, \underline{1.7}, \underline{2.5}, \underline{3.2}, \underline{3.2}, 3.4, \underline{4.1}, 4.6, \underline{5.3}, 5.5, \underline{5.7}, 5.7, \underline{6.9}, 7.1, \underline{7.4}, 7.9, 8.1, \underline{8.4}, 8.5, 8.7$$

Le somme des rangs notée traditionnellement W_x (W pour Wilcoxon) pour le premier échantillon est donc :

$$W_x = 2+3+4+5+7+9+12+13+15+18 = 88 \tag{5.7.2373}$$

et pour le deuxième échantillon :

$$W_y = 1+6+8+10+11+14+16+17+19+20 = 122 \tag{5.7.2374}$$

Les valeurs W_x, W_y sont nommées "statistiques de Wilcoxon".

On voit donc déjà qu'il existe bien une différence qui semble a priori significative en termes de classement entre les deux échantillons. Le problème reste de construire un outil mathématique rigoureux pour inférer un fait avec une certaine certitude.

Pour cela, introduisons d'abord la moyenne des rangs en utilisant le résultat présenté dans la section Séquences et Séries en ne considérant qu'un seul échantillon :

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} \tag{5.7.2375}$$

En calculant cela, nous remarquons rapidement qu'il s'agit de l'espérance la la distribution discrète uniforme que nous avions étudié plus haut dans cette section pour une variable aléatoire discrète avec des valeurs comprises entre 1 et n, ce qui est exactement la définition du rang ! Ainsi, nous avons le rang qui aura comme valeur pour la moyenne et la variance pour l'ensemble

de la population :

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{R} = \frac{n+1}{2} \\ \mathrm{V}(R) &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned} \tag{5.7.2376}$$

Pour ceux qui trouvent cette analogie discutable, nous donnons juste en dessous la preuve de la variance en utilisant la relation de Huygens et la somme des carrés d'entiers positifs prouvée dans la section Séquences et Séries :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(R) &= \mathrm{E}(R^2) - \mathrm{E}(R)^2 = \sum_{i=1}^{n} p(R_i) R_i^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(2n+1)(n+1) - 3(n^2+n+1)}{12} \\ &= \frac{2(2n^2+2n+n+1) - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{4n^2+4n+2n+2-3n^2-6n-3}{12} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned} \tag{5.7.2377}$$

Mais évidemment pour un seul échantillon cela n'a aucun intérêt ! Reprenons nos deux séries X_i, Y_i respectivement de taille égale $n_x = 10, n_y = 10$ sans distinction :

$$1.6, 1.7, 2.5, 3.2, 3.2, 3.4, 4.1, 4.6, 5.3, 5.5, 5.7, 5.7, 6.9, 7.1, 7.4, 7.9, 8.1, 8.4, 8.5, 8.7$$

Nous avons alors les indicateurs statistiques de rangs sans distinction (il faut se rappeler que l'on ne sait toujours pas à ce niveau du développement mathématique si cela sera utile ou non) :

$$\begin{aligned} W_{x,y} &= \sum_{i=1}^{n_x+n_y} R_i = \sum_{i=1}^{n_x+n_y} i = \frac{(n_x+n_y)(n_x+n_y+1)}{2} = 210 \\ \mu_{x,y} &= \bar{R}_{x,y} = \frac{(n_x+n_y)+1}{2} = 10.5 \\ \mathrm{V}(R_{x,y}) &= \frac{(n_x+n_y)^2-1}{12} = 33.25 \end{aligned} \tag{5.7.2378}$$

et les indicateurs statistiques des rangs mais cette fois avec distinction :

$$1.6, \underline{1.7}, \underline{2.5}, \underline{3.2}, \underline{3.2}, 3.4, \underline{4.1}, 4.6, \underline{5.3}, 5.5, \underline{5.7}, 5.7, \underline{6.9}, 7.1, \underline{7.4}, 7.9, 8.1, \underline{8.4}, 8.5, 8.7$$

Nous avons alors les indicateurs statistiques de localisation suivants :

$$\begin{aligned} W_x &= \sum R_{x,i} = 2+3+4+5+7+9+12+13+15+18 = 88 \\ W_y &= \sum R_{y,i} = 1+6+8+10+11+14+16+17+19+20 = 122 \\ \bar{R}_x &= \frac{1}{n}\sum R_{x,i} = \frac{2+3+4+5+7+9+12+13+15+18}{10} = 8.8 \\ \bar{R}_y &= \frac{1}{n}\sum R_{y,i} = \frac{1+6+8+10+11+14+16+17+19+20}{10} = 12.2 \\ \mathrm{V}(R_x) &= \frac{1}{n_x}\sum (R_{x,i} - \bar{R}_x)^2 = 27.16 \\ \mathrm{V}(R_x) &= \frac{1}{n_y}\sum (R_{y,i} - \bar{R}_y)^2 = 33.56 \end{aligned} \tag{5.7.2379}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ces calculs maintenant effectués, nous n'avons rien de concret encore rigoureux concernant le test de la somme des rangs de Wilcoxon qui a pour but, pour rappel, de vérifier si les deux échantillons suivent la même loi ou non (et ont donc les mêmes moments tels l'espérance, la variance, la médiane, etc.).

Pour avancer, considérons les n_x valeurs de l'échantillon X. On sait (voir section Probabilités page 521) alors qu'il y a :

$$C_{n_x}^{n_x+n_y}=\binom{n_x+n_y}{n_x}=\frac{(n_x+n_y)!}{n_x!((n_x+n_y)-n_x)!}=\frac{(n_x+n_y)!}{n_x!n_y!} \quad (5.7.2380)$$

nombre d'arrangements possibles des X_i dans la population des échantillons et si le test de la somme des rangs de Wilcoxon est vérifié (c'est-à-dire que les lois de probabilité sont les mêmes pour les deux échantillons), les divers arrangements devraient être également probables.

Par exemple, si nous prenons 2 échantillons avec respectivement chacun 2 mesures (2 variables aléatoires de traitement et 2 variables aléatoires de contrôle), nous avons :

$$(n_x+n_y)!=4!=24 \quad (5.7.2381)$$

arrangements tous différents :

$$\begin{array}{cccc}
(1,2,3,4) & (2,1,3,4) & (3,1,2,4) & (4,1,2,3)\\
(1,2,4,3) & (2,1,4,3) & (3,1,4,2) & (4,1,3,2)\\
(1,3,2,4) & (2,3,1,4) & (3,2,1,4) & (4,2,1,3)\\
(1,3,4,2) & (2,3,4,1) & (3,2,4,1) & (4,2,3,1)\\
(1,4,2,3) & (2,4,1,3) & (3,4,1,2) & (4,3,1,2)\\
(1,4,3,2) & (2,4,3,1) & (3,4,2,1) & (4,3,2,1)
\end{array} \quad (5.7.2382)$$

Mais ... malheureusement ... ce n'est pas ce que nous voulons dans notre cas car nous aimerions déjà pouvoir distinguer les deux échantillons et aussi ne pas prendre en compte les arrangements qui consistent uniquement en une permutation des variables du même échantillon. Nous avons alors (voir section Probabilités page 521) :

$$C_{n_x}^{n_x+n_y}=\binom{n_x+n_y}{n_x}=\frac{4!}{2!2!}=6 \quad (5.7.2383)$$

combinaisons possibles ! En effet, avec deux échantillons ayant deux variables de traitement (X) et deux variables de contrôle (Y), nous avons (W_S est la somme des rangs de la dernière colonne) :

Rangs possibles (contrôles)	Rangs possibles (traitements)	W_S
1, 2	3, 4	7
1, 3	2, 4	6
1, 4	2, 3	5
2, 3	1, 4	4
2, 4	1, 3	4
3, 4	1, 2	3

TAB. 5.73 – **Représentation par rangs de 2 variables de traitement et de contrôle**

En cours de traduction de l'anglais

Si l'hypothèse nulle du test de la somme des rangs de Wilcoxon n'est pas rejetée, les classements des 6 sont également probables. Nous concluons le tableau suivant :

Valeur de W_S	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Cumul	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

TAB. 5.74 – Probabilités associées au test de la somme des rangs de Wilcoxon

Ce tableau étant construit, supposons que l'on observe pour la somme des rangs des variables de traitement : $W_S=7$. Le seuil d'un test unilatéral donnerait alors conformément au tableau ci-dessus :

$$P(W_S \geq 7)=\frac{1}{6}\cong 17\% \tag{5.7.2384}$$

ou si nous obtenons $W_S=3$:

$$P(W_S \geq 3)=\frac{5}{6}\cong 83\% \tag{5.7.2385}$$

On rejetterait donc l'hypothèse nulle d'une distribution identique entre les deux échantillons à toute limite supérieure (ou inférieure, respectivement) fixée à l'avance par la politique du laboratoire ... en test unilatéral ou bilatéral (raison pour laquelle certains logiciels statistiques donnent des valeurs de test unilatérales + valeurs de test bilatérales en même temps).

Deux choses très importantes que vous devez noter pour ce qui va suivre sont les suivantes :

1. D'abord dans la construction du tableau ci-dessus (où nous reprenons la première partie ici) :

Valeurs de W_S	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

on voit qu'il y a une symétrie à la valeur 5, ce qui signifie que la loi W_S est symétrique dans ce cas particulier. Mais si nous prenons un autre exemple avec deux échantillons comprenant respectivement deux variables de contrôle et trois de traitements (deux variables aléatoires) nous aurions :

Valeurs de W_S	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

le lecteur peut vérifier que quel que soit le nombre d'échantillons et le nombre de variables et de traitement de contrôle, le tableau de probabilité ci-dessus est toujours équilibré (enfin il y a une preuve mathématique de cela mais je la trouve inélégante...). Mais en fait c'est assez intuitif, comme les combinaisons $C_{n_x}^{n_x+n_y}$ sont indépendantes du fait que les rangs sont triés par ordre croissant ou décroissant, il faut donc qu'il y ait une symétrie.

En cours de traduction de l'anglais

2. Deuxièmement, les valeurs des variables mesurées n'entrent pas en compte dans cette statistique paramétrique mais uniquement les valeurs tabulées des rangs avec leurs probabilités associées. En effet, comme vous l'avez peut-être remarqué, nous n'avions pas besoin de valeurs explicites des variables aléatoires pour construire le tableau ci-dessus !

Maintenant, sachant que la loi W_S est symétrique et discrète nous aimerions calculer son espérance.

La plus petite valeur possible de W_S suppose qu'elle se trouve dans l'échantillon X (les algorithmes informatiques déterminent automatiquement dans quel échantillon mais de toute façon en pratique, les échantillons ont presque toujours la même taille) :

$$W_{S,\min} = 1 + \ldots + n_x = \frac{1}{2}n_x(n_x+1) \quad (5.7.2386)$$

La plus grande valeur possible est naturellement (rappelons que $N = n_x + n_y$) :

$$W_{S,\max} = \frac{1}{2}N(N+1) - \frac{1}{2}n_y(n_y+1) \quad (5.7.2387)$$

L'espérance de la somme des rangs de l'un des deux échantillons est alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(W_S) &= W_{S,\min} + \frac{W_{S,\max} - W_{S,\min}}{2} = W_{S,\max} - \frac{W_{S,\max} - W_{S,\min}}{2} \\
&= \frac{1}{2}n_x(n_x+1) + \frac{\frac{1}{2}N(N+1) - \frac{1}{2}n_y(n_y+1) - \frac{1}{2}n_x(n_x+1)}{2} \\
&= \frac{2n_x(n_x+1) + N(N+1) - n_y(n_y+1) - n_x(n_x+1)}{4} \\
&= \frac{n_x(n_x+1) + N(N+1) - n_y(n_y+1)}{4} = \frac{n_x^2 + n_x + N^2 + N - n_y^2 - n_y}{4} \\
&= \frac{n_x^2 + n_x + N^2 + N - n_y^2 - (N - n_x)}{4} = \frac{n_x^2 + 2n_x + N^2 - (N-n_x)^2}{4} \\
&= \frac{n_x^2 + 2n_x + N^2 - (N^2 - 2Nn_x + n_x^2)}{4} = \frac{2n_x + 2Nn_x}{4} = \frac{n_x + Nn_x}{2} \\
&= \frac{1}{2}n_x(N+1)
\end{aligned} \quad (5.7.2388)$$

Alors finalement :

$$\mathrm{E}(W_S) = \frac{1}{2}n_x(N+1) \quad (5.7.2389)$$

Pour calculer la variance, qui nous sera utile pour faire si nécessaire une approximation que nous verrons plus loin, apparaît (malheureusement) la covariance car la connaissance des rangs donne des informations partielles sur les autres rangs. Nous avons donc :

$$\mathrm{V}(W_S) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n_x} R_i\right) = \sum_{i=1}^{n_x} \mathrm{V}(R_i) + \sum_i \sum_{i \neq j} \mathrm{cov}(R_i, R_j) \quad (5.7.2390)$$

Nous savons déjà avec ce que nous venons de prouver ci-dessus que :

$$\sum_{i=1}^{n_x} \mathrm{V}(R_i) = \sum_{i=1}^{n_x} \frac{N^2-1}{12} = \frac{n_x(N^2-1)}{12} = \frac{n_x\left((n_x+n_y)^2 - 1\right)}{12} \quad (5.7.2391)$$

En cours de traduction de l'anglais

Le problème reste le terme avec la covariance. Pour son calcul il existe des techniques rigoureuses en plusieurs pages et ... et aussi... un astuce bien plus courte. L'astuce consiste à utiliser la variable de classement global que nous notons T_i avec $i=1\ldots n+m$. Comme la somme des T_i est une constante, alors nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n_x+n_y} T_i\right) &= \mathrm{V}\left(\frac{N(N+1)}{2}\right) = \mathrm{V}\left(\frac{(n_x+n_y)(n_x+n_y+1)}{2}\right)\\ &= 0 = \sum_{i=1}^{n_x+n_y} \mathrm{V}(T_i) + \sum_{i=1}^{n_x+n_y}\sum_{i=1,j\neq i}^{n_x+n_y} \mathrm{cov}(T_i,T_j)\\ &= (n_x+n_y)\frac{(n_x+n_y)^2-1}{12} + (n_x+n_y)(n_x+n_y-1)\mathrm{cov}(T_i,T_j)\end{aligned} \tag{5.7.2392}$$

Il vient alors :

$$\mathrm{cov}(T_i,T_j) = -\frac{(n_x+n_y)^2-1}{12(n_x+n_y-1)} = -\frac{n_x+n_y+1}{12} \tag{5.7.2393}$$

On peut alors reprendre le calcul initial en remplaçant les covariances par leur expression, la dernière relation obtenue pour les covariances calculées sur le T_i s'appliquant aussi (ce qui n'est pas forcément intuitif ... mais l'astuce fonctionne) aux R_i :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n_x} R_i\right) &= \frac{n_x((n_x+n_y)^2-1)}{12} + n_x(n_x-1)\left(-\frac{n_x+n_y+1}{12}\right)\\ &= \frac{1}{12}\left[n_x((n_x+n_y)^2-1) - n_x(n_x-1)(n_x+n_y+1)\right]\\ &= \frac{1}{12}\left[n_x(n_x^2+2n_xn_y+n_y^2-1) - (n_x^2-n_x)(n_x+n_y+1)\right]\\ &= \frac{1}{12}\left[n_x^3+2n_x^2n_y+n_xn_y^2-n_x-n_x^2(n_x+n_y+1)+n_x(n_x+n_y+1)\right]\\ &= \frac{1}{12}\left[n_x^3+2n_x^2n_y+n_xn_y^2-n_x-n_x^3-n_x^2n_y-n_x^2+n_x^2+n_xn_y+n_x\right]\\ &= \frac{1}{12}\left(n_x^2n_y+n_xn_y^2+n_xn_y\right) = \frac{n_xn_y(n_x+n_y+1)}{12}\end{aligned} \tag{5.7.2394}$$

Finalement :

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n_x} R_i\right) = \frac{n_xn_y(n_x+n_y+1)}{12} \tag{5.7.2395}$$

C'est le même résultat que la méthodologie rigoureuse que l'on retrouve dans quelques rares manuels de référence.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Passons à un cas pratique pour le cas exact. Considérons donc 2 échantillons ayant 2 variables de traitements (X) et 2 variables de contrôle (Y) (c'est un peu simpliste et absurde comme exemple mais cela facilite l'aspect pédagogique ...) nous avons :

$$X: 5.7, 3.2$$
$$Y: 8.1, 5.5$$

Ainsi (la variable de traitement a donc les rangs 1 et 3 ce qui fait une somme des rang de 4) :

$$\underline{3.2}, 5.5, \underline{5.7}, 8.1$$

Dès lors :

$$X: R_1 = 3.2,\ R_3 = 5.7$$
$$Y: R_2 = 5.5,\ R_4 = 8.1$$

Nous avons le tableau suivant comme nous l'avons montré ci-dessus :

Valeurs de W_S	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

avec dans le cas présent :

$$W_S = 1 + 3 = 4 \qquad (5.7.2396)$$
$$\text{E}(W_S) = \frac{1}{2} n_x (N+1) = \frac{1}{2} 2(4+1) = 5 \qquad (5.7.2397)$$

Si nous choisissons le seuil de confiance traditionnel à 5% en bilatéral, nous avons selon le tableau ci-dessus que :

$$P(W_S \geq 7) = \frac{1}{6} \cong 17\% \qquad (5.7.2398)$$
$$P(W_S \leq 3) = \frac{1}{6} \cong 17\% \qquad (5.7.2399)$$

Donc en d'autres termes nous voyons qu'il y a :

$$100\% - 2\frac{1}{6} = 66.\bar{6}\% \quad (5.7.2400)$$

de probabilité cumulée que equationsoit compris entre 3 et 7 (la barre au-dessus du 6 signifie pour rappel que ce chiffre se répète à l'infini). Donc forcément 4 est compris dans l'intervalle bilatéral du 95%... et nous pouvons accepter l'hypothèse comme quoi les deux échantillons ne sont pas différents. La p-valeur correspondante en bilatéral est donc la moitié de $33.\bar{3}\%$.

Remarque

Au fait si nous voulions faire un exemple calculatoire manuel intéressant en jouant avec un seuil bilatéral de 5% (soit de 2.5% de chaque côté) il faudrait au moins 2 échantillons avec 4 variables aléatoires, soit 70 combinaisons de rangs possibles. En-dessous de 4 variables aléatoires par échantillons, il est évident que le test bilatéral à seuil de 95% sera tel qu'on ne rejettera jamais l'hypothèse d'égalité...

Si la taille des deux échantillons est assez grande (la majorité des praticiens considérent que chaque échantillon doit avoir au moins 20 individus), il a été montré par simulations que nous pouvons faire l'approximation (utilisée par beaucoup de logiciels de statistiques) :

$$\mathcal{N}(0,1) \cong \frac{W_S - \dfrac{1}{2}n_x(N+1)}{\sqrt{\dfrac{n_x n_y (N+1)}{12}}} \quad (5.7.2401)$$

bien évidemment en déterminant ensuite toujours la p-valeur en bilatéral. Avec l'exemple précédent (n'ayant que 4 individus au total), nous avons donc :

$$\mathcal{N}(0,1) \cong \frac{W_S - \dfrac{1}{2}n_x(N+1)}{\sqrt{\dfrac{n_x n_y (N+1)}{12}}} = \frac{4-5}{\sqrt{1.291}} \cong -0.7746 \quad (5.7.2402)$$

Ce qui correspondant à une probabilité cumulée de 21.93%. Donc la p-valeur correspondante en bilatéral est d'environ $(1-22\%)/2 \cong 34\%$ (à comparer à la valeur d'environ 33% avec le cas exact).

5.7.14.1.5 Test de la somme des rangs de Mann-Whitney

Le "test de la somme des rangs de Mann-Withney" est au fait un test d'ajustement non-paramétrique très simple qui se déduit du test de la somme des rangs de Wilcoxon. Par ailleurs il en est inspiré à un tel point que nous l'appelons parfois dans l'industrie le test de Wilcoxon-Mann-Withney" ou "test d'ajustement de Wilcoxon-Mann-Withney" ou encore "Mtest MWW" (sans spécifier à chaque fois qu'il repose sur la somme des rangs).

Le but de ce test, identiquement au test de la somme des rangs de Wilcoxon, est de trouver un moyen de vérifier que deux échantillons indépendants non nécessairement de même taille sont

En cours de traduction de l'anglais

issus d'une même loi ou non (in extenso sont issus d'une même population ou non) mais avec une approche différente !

Remarque

Au même titre que le test de la somme des rangs de Wilcoxon, le test de la somme des rangs de Mann-Withney peut tout à fait être utilisé pour des variables ordinales (donc catégorielles mais à condition qu'elles soient en un nombre acceptable).

Certains logiciels par ailleurs portent les choses à confusion car ils proposent le test de la somme des rangs de Wilcoxon sous le nom de test de de Mann-Withney... et inversement... et de plus n'indiquent pas ou ne proposent pas toujours le choix entre la version exacte ou approximative... Et en plus le test de la somme des rangs de Wilcoxon et celui de la somme des rangs signés que nous verrons plus loin n'est pas différencié.... donc attention ! C'est typiquement un problème dont la source est l'absence d'une norme ISO définissant la terminologie et les options qui doivent être disponibles...

Pour voir en quoi ce test consiste, construisons le tableau de rangs utilisant deux échantillons comprenant deux variables de contrôle et trois variables de traitement, nous avons alors :

Rangs possibles (Contrôles)	Rangs possibles (Traitements)	W_S
$1,2$	$3,4,5$	12
$1,3$	$2,4,5$	11
$1,4$	$2,3,5$	10
$1,5$	$2,3,4$	9
$2,3$	$1,4,5$	10
$2,4$	$1,3,5$	9
$2,5$	$1,3,4$	8
$3,4$	$1,2,5$	8
$3,5$	$1,2,4$	7
$4,5$	$1,2,3$	6

TAB. 5.75 – **Représentation des rangs de 3 variables de traitement et 2 de contrôle**

Dont nous déduisons le tableau suivant :

Valeurs de W_S	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{10}$

Maintenant imaginons que nous ayons une autre expérience à analyser utilisant deux échantillons comprenant 3 variables de contrôle et 2 variables de traitement (le symétrique du précédent donc !), nous avons alors :

En cours de traduction de l'anglais

Rangs possibles (Contrôles)	Rangs possibles (Traitements)	W_S
$3,4,5$	$1,2$	3
$2,4,5$	$1,3$	4
$2,3,5$	$1,4$	5
$2,3,4$	$1,5$	6
$1,4,5$	$2,3$	5
$1,3,5$	$2,4$	6
$1,3,4$	$2,5$	7
$1,2,5$	$3,4$	7
$1,2,4$	$3,5$	8
$1,2,3$	$4,5$	9

TAB. 5.76 – Représentation des rangs de 2 variables de traitement et 3 de contrôle

Dont nous déduisons le tableau suivant (le lecteur remarquera que c'est exactement le même que le précédent en ce qui concerne les probabilités ! !) :

Valeurs de W_S	3	4	5	6	7	8	9
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Eh bien l'idée du test de Mann-Withney est très simple. Plutôt que de tabuler des situations symétriques, il suffit de soustraire à chaque valeur de W_S, la valeur $W_{S,\text{min}}$ afin que chaque tableau soit identique et qu'un des deux seul soit utile. Voyons cela d'abord avec le premier tableau :

Rangs possibles (Contrôles)	Rangs possibles (Traitements)	$W_s - \frac{1}{2}n_x(n_x+1)$
$1,2$	$3,4,5$	6
$1,3$	$2,4,5$	5
$1,4$	$2,3,5$	4
$1,5$	$2,3,4$	3
$2,3$	$1,4,5$	4
$2,4$	$1,3,5$	3
$2,5$	$1,3,4$	2
$3,4$	$1,2,5$	2
$3,5$	$1,2,4$	1
$4,5$	$1,2,3$	0

TAB. 5.77 – Symétrisation (2 contrôles/3 traitements)

Dont nous déduisons le tableau suivant :

Valeurs de W_{XY}	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant imaginons que nous ayons une autre expérience à analyser utilisant deux échantillons comprenant 3 variables de contrôle et 2 variables de traitement (le symétrique du précédent donc !), nous avons alors :

Rangs possibles (Contrôles)	**Rangs possibles (Traitements)**	$W_s - \frac{1}{2}n_x(n_x+1)$
$3,4,5$	$1,2$	0
$2,4,5$	$1,3$	1
$2,3,5$	$1,4$	2
$2,3,4$	$1,5$	3
$1,4,5$	$2,3$	2
$1,3,5$	$2,4$	3
$1,3,4$	$2,5$	4
$1,2,5$	$3,4$	4
$1,2,4$	$3,5$	5
$1,2,3$	$4,5$	6

TAB. 5.78 – **Symétrisation (2 contrôles/2 traitements)**

Dont nous déduisons cette fois-ci exactement le même tableau que précédemment :

Valeurs de W_{YX}	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

raison pour laquelle la littérature mentionne qu'on peut prendre celui que l'on veut !

Donc pour résumer, la variante de Mann-Whitney (dans le cas concret ici présent il s'agit de la variante dite "variante exacte de Mann-Whitney") consiste à tabuler pour les situations symétriques une variable notée W_{XY} définie naturellement par :

$$W_{XY} = W_S - \frac{1}{2}n_x(n_x+1) \quad (5.7.2403)$$

Notée aussi très souvent dans la littérature :

$$U_1 = R_1 - \frac{1}{2}n_1(n_1+1) \quad (5.7.2404)$$

car alors $W_{XY} \in \{0,1,2,\ldots\}$ et donc :

$$P(W_{XY}=k|n_x,n_y) = P(W_{XY}=k|n_y,n_x) \quad (5.7.2405)$$

Dans les tables que l'on peut trouver dans les livres, les probabilités sont données avec la valeur normalisée de U. Ainsi, si nous reprenons notre exemple précédent mais avec les notations d'usage dans la pratique (U au lieu de W_{YX}) :

Valeurs de U	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

En cours de traduction de l'anglais

Nous voyons que la probabilité cumulée que $U=2$ est de 0.4. La table précédente se trouve dans la littérature parfois sous la forme suivante :

Facteur $n_2=3$			
U/n_1	1	2	3
0	0.250	0.100	0.050
1	0.500	0.200	0.100
2	0.750	**0.400**	0.200
3	1	0.600	0.350
4		0.800	0.500
5		0.900	0.650
6		1	...

TAB. 5.79 – **Représentation classique du test de Mann-Whitney**

où nous avons mis en rouge la colonne correspondant à notre exemple ($U=2, n_1=2, n_2=3$).

Ensuite il convient au praticien de choisir avec ces tableaux s'il souhaite faire un test bilatéral ou unilatéral.

En ... l'anglais

Remarques

R1. Il est important de se rappeler que nous avons démontré par l'exemple que nous pouvons aussi bien prendre :

$$W_{XY}=W_S-\frac{1}{2}n_x(n_x+1) \quad (5.7.2406)$$

que :

$$W_{YY}=W_S-\frac{1}{2}n_y(n_y+1) \quad (5.7.2407)$$

puisqu'ils génèrent les mêmes tableaux !

R2. W_{XY} est traditionnellement noté U par les praticiens comme nous l'avons vu, d'où le fait que l'on retrouve dans la littérature ce test sous le nom de "test U de Mann-Withney" avec les tables de probabilités associées sous le même nom. Cependant attention à ne pas confondre avec le "test U de Wilcoxon" appelé parfois "test d'inversion de Wilcoxon" qui se base sur les alternances d'apparition des valeurs des échantillons lorsque regroupés (test qui ne sera pas développé ici).

Pour voir la version approximative (asymptotique) du test U de Mann-Withney nous avons besoin de l'espérance et de la variance. Pour cela, rappelons que nous avons donc vu que la somme des rangs normalisés était donnée par :

$$U_1=R_1-\frac{1}{2}n_1(n_1+1) \quad (5.7.2408)$$

Mais nous pouvons aussi utiliser comme nous l'avons vu :

$$U_2=R_2-\frac{1}{2}n_2(n_2+1) \quad (5.7.2409)$$

et puisque :

$$R_1 + R_2 = \frac{N(N+1)}{2} \tag{5.7.2410}$$

avec pour rappel :

$$N = n_1 + n_2 \tag{5.7.2411}$$

nous avons donc :

$$\begin{aligned}U_1 + U_2 &= \left(R_1 - \frac{n_1(n_1+)}{2}\right) + \left(R_2 - \frac{n_2(n_2+)}{2}\right)\\ &= \frac{N(N+1)}{2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \frac{n_2(n_2+1)}{2} = \frac{(n_1+n_2)(N+1)}{2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \frac{n_2(n_2+1)}{2}\\ &= \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2} + \frac{n_2(n_1+n_2+1)}{2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \frac{n_2(n_2+1)}{2}\\ &= \frac{n_1n_1 + n_1n_2 + n_1 + n_2n_1 + n_2n_2 + n_2 - n_1n_1 - n_1 - n_2n_2 - n_2}{2} = n_1n_2\end{aligned} \tag{5.7.2412}$$

La moyenne des deux U est donc la moyenne arithmétique de la somme. Nous avons donc :

$$m_U = \frac{n_1n_2}{2} \tag{5.7.2413}$$

Ce qui signifie que U_1 ou U_2 doit être suffisemment différent de cette dernière moyenne pour que l'on rejette l'hypothèse nulle H_0 comme quoi les deux échantillons proviennet d'une même loi de distribution. Mais pour déterminer la p-valeur, nous avons qu'il nous faut aussi l'écart-type. Donc cherchons-le !

L'écart-type est le même que pour le test de la somme des rangs de Wilcoxon (puisque le deuxième terme dans l'expression des U est une constante dont la variance est nulle. Ainsi, il ne reste plus que la variance de la somme des rangs et nous avons déjà démontré plus haut qu'elle valait :

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1n_2(N+1)}{12}} \tag{5.7.2414}$$

✍**Exemple :**

Reprenons l'exemple fait avec le test de la somme des rangs de Wilcoxon mais un peu modifié (pour que l'exemple soit plus parlant) c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}X &: 5.7, 3.2\\ Y &: 8.1, 5.5, 1.2\end{aligned}$$

Soit groupé et ordonné :

$$\underline{1.2}, 3.2, \underline{5.5}, 5.7, \underline{8.1}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors :

$$U_1 = (2+4) - \frac{1}{2}2(2+1) = 3$$
$$U_2 = (1+3+5) - \frac{1}{2}3(3+1) = 3 \qquad (5.7.2415)$$

Donc nous pouvons choisir n'importe lequel pour le test vu que les deux U sont égaux. Si nous regardons le tableau créé plus haut, avec $(U=3, n_1=2, n_2=3)$, nous avons donc une probabilité cumulée de 60% que U soit égal à 3. Donc nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle (en unilatéral) comme quoi les deux échantillons proviennent de la même distribution.

L'approximation en loi Normale donne alors :

$$Z = \frac{U - m_U}{\sigma_U} = \frac{3 - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (N+1)}{12}}} = \frac{3 - \frac{3 \cdot 2}{2}}{\sqrt{\frac{3 \cdot 2(5+1)}{12}}} = 0 \qquad (5.7.2416)$$

Donc la probabilité cumulée est de 50% avec l'approximation Normale ce qui correspondant à une p-valeur de 50%. Là encore nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle H_0.

En cours de traduction ... is

5.7.14.1.5.1 Traitement des rangs égaux dans les tests basés sur les rangs

Lorsque nous procédons à un test de la somme des rangs de type Wilcoxon-Mann-Withney ou autre, des égalités de rangs peuvent se produire.

Reprenons pour l'exemple :

$$N = n_x + n_y = 2 + 3 = 5 \qquad (5.7.2417)$$

avec les données suivantes :

Data	17	17	17	19	21
Rank	?	?	?	4	5

TAB. 5.80 – **Exemple de problème en cas d'égalités**

Une solution conventionnelle consiste à attribuer à chaque " ?" le rang moyen. Donc dans le cas présent, nous avons :

$$? = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2 \qquad (5.7.2418)$$

Le tableau :

Rangs possibles (Contrôles)	Rangs possibles (Traitements)	W_S
$1,2$	$3,4,5$	12
$1,3$	$2,4,5$	11
$1,4$	$2,3,5$	10
$1,5$	$2,3,4$	9
$2,3$	$1,4,5$	10
$2,4$	$1,3,5$	9
$2,5$	$1,3,4$	8
$3,4$	$1,2,5$	8
$3,5$	$1,2,4$	7
$4,5$	$1,2,3$	6

TAB. 5.81 – **Représentation des rangs de 3 variables de traitement et 2 de contrôle**

devient alors dans ce cas particulier :

Rangs possibles (Contrôles)	Rangs possibles (Traitements)	W_S^*
$2,2$	$2,4,5$	11
$2,2$	$2,4,5$	11
$2,4$	$2,2,5$	9
$2,5$	$2,2,4$	8
$2,2$	$2,4,5$	11
$2,4$	$2,2,5$	9
$2,5$	$2,2,4$	8
$2,4$	$2,2,5$	9
$2,5$	$2,2,4$	8
$4,5$	$2,2,2$	6

TAB. 5.82 – **Représentation des rangs de 3 variables de traitement et 2 de contrôle**

En cours de traduction de l' anglais

où W_S^* (remarquez la petite * en haut à droite !) représente la statistique de Wilcoxon lorsque nous sommes en présence d'égalités statistiques. La loi de W_S^* peut être plus ou moins différente de celle de W_S. Effectivement :

Statistique de Wilcsoxon	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité de W_S	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
Probabilité de W_S^*	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	0

Attention ! À partir de la dérivation mathématique que nous avons vue plus haut, nous pouvons affirmer qu'à l'opposé de la légende urbaine, le test de Mann-Whitney compare les rangs moyens - il ne compare pas les médianes ni ne compare pas les distributions (c'est-à-dire la dominance stochastique/supériorité stochastique) ! ! ! Plus généralement, ce test répond à cette question : Quelle est la probabilité qu'une valeur sélectionnée au hasard dans la population avec le rang moyen le plus élevé soit supérieure à une valeur sélectionnée au hasard dans l'autre population ? Cependant si les distributions comparées sont indépendantes et identiquement distribuées et symétriques, alors OUI c'est équivalent à comparer évidemment deux médianes ! Il est possible, bien que peu courant, que des groupes aient des sommes des rangs différentes et pourtant des médianes égales ou presque égales (par conséquent, le test de Mann-Whitney sera significatif même si les médianes sont égales).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.14.1.6 Test de la somme des rangs signés de Wilcoxon à un échantillon

Le but du test de la "somme des rangs signés de Wilcoxon", appelé aussi parfois "test de la médiane de Wilcoxon", est d'utiliser une technique non paramétrique pour vérifier la symétrie ou non d'une distribution et donc in extenso faire une hypothèse sur la valeur de la médiane. L'idée est à la fois simple et subtile.

Le principe et que si nous comparons les différences D_i des individus d'un échantillon par rapport à la médiane, nous savons que si nous avons (par exemple) un nombre impair d'individus tous différents (non égaux), alors nous aurons 50% des données au-dessus et en-dessous de la médiane. Ensuite, pour contrôler que la distribution des valeurs des individus vérifie une certaine symétrie, l'idée (simple mais astucieuse) consiste ensuite à :

1. Calculer les différences en valeur absolue $|D_i|$ par rapport à la médiane.
2. Ranger ces différences absolues par ordre croissant et leur assigner leur rang respectif.
3. Calculer la somme des rangs des différences D_i qui à la base sont négatives.
4. Calculer la somme des rangs des différences D_i qui à la base sont positives.

et si l'échantillon a une distribution symétrique (donc la médiane est confondue alors avec la moyenne), il devrait y avoir une somme des rangs négatifs S_- qui n'est pas statistiquement significativement différente de la sommes des rangs positifs S^+.

Au passage nous remarquons donc qu'une hypothèse du test pour qu'il fonctionne est que la distribution statistique soit donc symétrique ! !

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Pour rappel, lors de notre étude des tests pour échantillons indépendants de Wilcoxon ou Mann-Withney vus plus haut (qui n'ont pas obligatoirement la même taille), nous ordonnons ensemble les valeurs des deux échantillons et nous faisons un calcul sur les rangs de ces valeurs. Dans les tests pour échantillons appariés (donc de même taille), nous ordonnons les différences de valeurs (pas les valeurs !) et nous travaille sur les rangs des <u>différences</u> ! ! !

Selon l'idée (principe) exposé plus haut, la somme des rangs qui portent le signe $-$ vaut alors en moyenne :

$$\mu_- = \bar{R}_- = \mathrm{E}(R_-) = \mathrm{E}(1X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n) = \sum_{i=1}^{n} i\mathrm{E}(X_n) \tag{5.7.2419}$$

Or, nous avons déjà démontré que l'espérance de la loi binomiale est :

$$\mathrm{E}(X_n) = Np \tag{5.7.2420}$$

Et comme dans notre cas N vaut 1 (une seule valeur...) et p vaut $1/2$ (une chance sur deux d'avoir un signe négatif), il vient immédiatement en utilisant les démonstrations du chapitre de

Suites Et Séries :

$$\mu_- = \bar{R}_- = \mathrm{E}(R_-) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4} \quad (5.7.2421)$$

et pour la variance en utilisant aussi les résultats du chapitre Suites Et Séries :

$$\mathrm{V}(R_-) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(iX_i) = \sum_{i=1}^{n} i^2\mathrm{V}(X_i) \quad (5.7.2422)$$

et à nouveau en utilisant la variance de la loi binomiale et les résultats du chapitre Suites Et Séries :

$$\mathrm{V}(R_-) = \sum_{i=1}^{n} i^2\mathrm{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} i^2\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \quad (5.7.2423)$$

Évidemment la somme des rangs des différences négatives (respectivement positif) sera au minimum nul et vaudra au maximum $n(n+1)/2$. Donc l'espérance dans le cas d'un test bilatéral ne doit pas être trop proche d'une de ces deux valeurs extrêmes.

Dans le cas où n est assez grand (supérieur à une trentaine), nous pouvons utiliser l'approximation de la loi Normale centrée réduite pour la variable :

$$\mathcal{N}(0,1) = \frac{S_- - \dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \quad (5.7.2424)$$

où S_- est donc la somme des rangs de signe négatifs.

Enfin signalons qu'empiriquement si des différences par rapport à la médiane sont nulles, elles ne seront pas prises en compte dans les rangs. Si des différences sont égales nous prendrons un rang moyen...

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Commençons avec le cas à un échantillon comparé à sa médiane expérimentale (à l'opposé de la comparaison à une médiane hypothétisée lorsque nous considérons a priori la distribution symétrique et unimodale). Considérons que nous avons mesuré les valeurs suivantes pour le diamètre d'une pièce :

$$39, 20.2, 40, 32.2, 30.5, 26.5, 42.1, 45.6, 42.1, 45.6, 42.1, 29.9, 40.9$$

Nous souhaitons donc savoir si la médiane expérimentale calculée (valant 40 dans le cas présent) de cet échantillon peut ne pas être rejeté comme indicateur central à un niveau de confidence de 5% en bilatéral (ce qui sera le cas si le nombre de différences positifs et négatifs est assez équilibré). Nous construisons alors le tableau suivant :

Mesures	Différences	Valeurs absolues	Rang	R_+	R_-
39	-1	1	2		2
20.2	-19.8	19.8	11		11
40	0	0			
32.2	-7.8	7.8	6		6
30.5	-9.5	9.5	8		9
26.5	-13.5	13.5	10		10
42.1	2.1	2.1	4		4
45.6	5.6	5.6	6.5		6.5
42.1	2.1	2.1	4	4	
45.6	5.6	5.6	6.5	6.5	
42.1	2.1	2.1	4	4	
45.6	5.6	5.6	6.5	6.5	
42.1	2.1	2.1	4	4	
29.9	-10.1	10.1	9		9
40.9	0.9	0.9	1	1	
		Somme :		26	46

A vue de nez l'égalité des rangs de ne s'annonce pas très bien mais allons quand même un peu plus loin...

Remarque

Suivant certains manuels universitaires la somme des rangs ne donne pas la même valeur car il y a plusieurs techniques pour calculer des rangs de valeurs qui sont identiques... Nous avons cependant choisi celle utilisée par le logiciel Minitab qui est d'usage dans la communauté scientifique et qui correspond à celle dont nous avons déjà dictée les règles plus haut.

Si nous considérons que le nombre d'individus est suffisant..., nous utilisons l'approximation (même si dans le cas présent les conditions ne sont pas satisfaites) :

$$\mathcal{N}(0,1)=\frac{S_{+,-}-\dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \tag{5.7.2425}$$

Soit dans le cas présent :

$$\mathcal{N}(0,1)=\frac{S_{+}-\dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}\cong\frac{26-33}{12.747}\cong -0.549 \tag{5.7.2426}$$

et respectivement :

$$\mathcal{N}(0,1)=\frac{S_- - \dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}\cong\frac{46-33}{12.747}\cong 1.02 \quad (5.7.2427)$$

Le premier cas correspond dans l'approximation à une loi Normale à une probabilité cumulée de 29.13% obtenue avec la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 à l'aide de la fonction :

```
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(-0.549,VRAI)
```

et donne une p-valeur en bilatéral d'environ $2\cdot 29.13\%\cong 58.26\%$.

Le deuxième cas correspond dans l'approximation à une loi Normale à une probabilité cumulée à 84.62% obtenue avec avec la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 à l'aide de la fonction :

```
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(1.02,VRAI)
```

ce qui correspond à une p-valeur d'environ $2\cdot(1-0.8462)/2=30.76\%$ en bilatéral (un logiciel comme Minitab donne une p-valeur en bilatéral de 32% puisqu'il ne fait pas l'approximation en loi Normale).

Pour le deuxième cas nous sommes à la limite mais au seuil choisi plus haut nous ne pouvons malheureusement pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 comme quoi 40 est dans l'intervalle de confiance de la médiane (par ailleurs le test des signes amène à la même conclusion).

Remarque

Un logiciel comme Minitab bien que proposant le test de Wilcoxon à 1 échantillon de la médiane donne pour médiane la valeur de 36.5 et donne pour intervalle de confiance de la médiane les valeurs 31.1 et 42.1. Si nous appliquons la méthode de boostrapping présentée en détails dans la section de Méthodes Numériques nous obtenons comme médiane estimée 40 (pour moyenne 38.733) et comme intervalle 30.50 et 42.10... Bon dans tous les cas nous arrivons de toute façon à ne pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 mais quand même...

5.7.14.1.7 Test de la somme des rangs signés de Wilcoxon pour deux échantillons appariés

Le "test de la somme des rangs signés de Wilcoxon pour deux échantillons appariés", ou appelé plus simplement "test de la somme des rangs signés de Wilcoxon", est basé à 100% sur le principe du test à 1 échantillon. La seule différence est que l'hypothèse nulle ou alternative est basée sur la différence de la médiane des données prises deux à deux de chacun des échantillons. Dans la majorité des cas, l'hypothèse nulle H_0 est que la médiane des différences est nulle contre l'hypothèse alternative H_A qu'elle est statistiquement significativement différente de zéro.

Comme le test T pour les échantillons appariés, le test de la somme des rangs de Wilcoxon s'applique aux plans à deux échantillons impliquant des mesures répétées, des paires appariées ou des mesures «avant» et «après» ! !

Comme les développements mathématiques sont les mêmes que pour le test à 1 échantillon, attaquons directement par un exemple.

D'abord insistons juste que par extension, qu'une hypothèse du test pour qu'il fonctionne est que la distribution statistique des différences soit donc symétrique ! !

De nombreux textes introductifs motivent le test de la somme des rangs signés comme un test de différence des médianes, ou plus rarement selon notre expérience, de différence des moyennes, sans mentionner que deux hypothèses assez strictes sont nécessaires pour cette interprétation :

- La distribution des deux groupes doit avoir la même forme.
- La variance des deux groupes doit être égale.

Si ces deux hypothèses sont vraies, alors le test des rangs signés peut être valablement interprété comme ayant une hypothèse nulle des médianes égales (ou des moyennes égales).

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Notez que dans de nombreux logiciels statistiques, R_+ (voir l'exemple ci-dessous) est désigné par la lettre V.

✍**Exemple :**

Nous avons deux logiciels ($L1$, $L2$) différents à comparer que nous voulons soumettre à 12 tâches ($T1, T2, T3, \ldots, T12$) de calculs spécifiques mais identiques pour chacun des logiciels. Nous souhaiterions savoir si les logiciels ont un temps de traitement statistiquement significativement différent ou non et si oui lequel est le plus performant (il s'agit des mêmes algorithmes mais le second logiciel a subi une modifiction par rapport au premier) !

Nous avons alors le tableau suivant où le temps est en minutes et où les différences $x_i - y_i$ sont notées d_i :

Tâche	$L1$	$L2$	d_i	$\lvert d_i\rvert$	**Rang**	R_+	R_-
$T1$	24.0	23.1	0.9	0.9	1	1	
$T2$	16.7	20.4	−3.7	3.7	4		4
$T3$	21.6	17.7	3.9	3.9	5	5	
$T4$	23.7	20.7	3.0	3.0	2.5	2.5	
$T5$	37.5	42.1	−4.6	4.6	6		6
$T6$	31.4	36.1	−4.7	4.7	7		7
$T7$	14.9	21.8	−6.9	6.9	10		10
$T8$	37.3	40.3	−3.0	3.0	2.5		2.5
$T9$	17.9	26.0	−8.1	8.1	11		11
$T10$	15.5	15.5	0.0	0.0	–		
$T11$	29.0	35.4	−6.4	6.4	9		9
$T12$	19.9	25.5	−5.6	5.6	8		8
					Somme :	8.5	57.5

Nous voyons déjà que le logiciel $L1$ est globalement plus rapide que $L2$ et sans utiliser les tables exactes du test des signes de Wilcoxon, nous pouvons présenter que la différence est statistiquement significative.

Si nous considérons que le nombre d'individus est suffisant..., nous utilisons l'approximation (même si dans le cas présent les conditions ne sont pas satisfaites) :

$$\mathcal{N}(0,1)=\frac{S_{+,-}-\dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \tag{5.7.2428}$$

Soit dans le cas présent :

$$\mathcal{N}(0,1)=\frac{S_{+}-\dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}\cong\frac{8.5-39}{12.747}\cong -2.392 \qquad (5.7.2429)$$

et respectivement :

$$\mathcal{N}(0,1)=\frac{S_{-}-\dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}\cong\frac{57.5-39}{12.747}\cong 1.453 \qquad (5.7.2430)$$

Le premier cas correspond dans l'approximation à une loi Normale à une probabilité cumulée de 0.836% obtenue avec avec la versions française de Microsoft Excel 14.0.6123 à l'aide de la fonction :

```
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(-2.392,VRAI)
```

et donc à un p-valEUR d'environ $2\cdot 0.836\%\cong 1.68\%$ en bilatéral.

Le deuxième cas correspond dans l'approximation à une loi Normale à une probabilité cumulée à 92.68% obtenue avec avec la versions française de Microsoft Excel 14.0.6123 à l'aide de la fonction :

```
=LOI.NORMALE.STANDARD.N(1.453,VRAI)
```

ce qui correspond à une p-valeur d'environ $2\cdot(1-0.9268)\%\cong 14.452\%$ en bilatéral. Avec un logiciel comme Minitab 15.1.2 qui ne propose pas le test de Wilcoxon pour échantillons appariés mais pour lequel il existe une astuce pour l'exécuter quand même, nous obtenons un p-valeur de 3.3% (même résultat qu'avec le logiciel statistique R qui lui a par contre ce test apparié de Wilcoxon implémenté !). D'autres logiciels donnent une p-valeur toujours inférieure à 5% (mais les valeurs diffèrent d'un logiciel à l'autre...).

Par conséquent, avec les calculs manuels et en utilisant l'approximation Normale, nous rejeterions l'hypothèse nulle H_0 au seuil de 5% (si on se concentre que sur le premier résultat). Il en est de même avec les logiciels R et Minitab, nous rejeterions aussi l'hypothèse nulle H_0 au seuil de 5% !

Remarque

Pour autant que nous le sachions, il existe au moins deux manières différentes de calculer la variance du test de la somme des rangs signés de Wilcoxon pour deux échantillons appariés (sans compter la correction de continuité qui rajoute un $+0.5$ au numérateur). C'est pourquoi la plupart du temps, les résultats diffèrent entre les logiciels statistiques.

5.7.14.1.8 Test de Kruskal-Wallis

Le test de Kruskal-Wallis un test non paramétrique souvent assimilé (un peu rapidement...) à une ANOVA non paramétrique à une voie pour comparer si deux populations ou plus ont même médiane (hypothèse nulle) à la différence qu'il ne nécessite donc pas les hypothèses nécessaires au fonctionnement de l'ANOVA. Quand plusieurs populations comparées passent à travers ce test, ce dernier ne dit pas quelle population est statistiquement significativement différente mais uniquement qu'il y en a au moins une qui l'est. En réalité, comme nous allons le démontrer, le test de Kruskal-Wallis n'est qu'une extension du test U de Mann-Whitney vu plus haut pour un nombre de populations supérieur ou égal à trois.

Pour étudier ce test, nous allons supposer que nous n'avons que deux populations et nous allons en faire une généralisation intuitive. Cette démarche est celle qu'aurait utilisée Wilcoxon avant que Kruskal et Wallis n'en fassent la démonstration générale rigoureuse.

> Attention ! Les tests de Mann-Whitney et de Kruskal-Wall échouent la plupart du temps en tant que tests de médianes. En effet, c'est parce que comme déjà mentionné plus haut, ils testent quelque chose de plus complexe qui se réduit à la médiane uniquement sous une hypothèse FORTE ! N'oubliez pas qu'ils testent "l'égalité stochastique" $H_0: F_1(x)=F_2(x)$ (hypothèse nulle) vs la "supériorité stochastique" $H_1: F_1(x)<F_2(x)$ (hypothèse alternative). Leur résultat est exprimé en pseudo-médiane des différences si et seulement si les deux échantillons ont la même variance et la même forme (asymétrie). Cela se réduit aux médianes si les distributions de groupe sont également symétriques.

Pour étudier ce test, rappelons d'abord que (relations dont l'origine et in extenso la démonstration ont déjà expliquées lors de notre étude du test de Mann-Withney vu plus haut) la moyenne de la somme des rangs et l'écart-type de la somme des rangs sont donnés par :

$$\mu_R=\bar{R}=\frac{N+1}{2} \quad (5.7.2431)$$

$$\text{V}(R)=\sigma_R^2=\frac{N^2-1}{12} \quad (5.7.2432)$$

dans le cas où il n'y pas de valeurs doubles. Sous cette hypothèse, rappelons que $\bar{R}$ peut être assimilé au rang de la valeur médiane (dans le cas d'un nombre impair de mesures).

Rappelons que la moyenne des tirages de n valeurs sans remplacement parmi N sera proche d'une loi Normale, et nous avons déjà démontré tout au début de ce chapitre que :

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.7.2433)$$

et que si la population n'est pas très grande, la variance doit être corrigée par le facteur de correction sur population finie que nous avions déjà aussi démontré :

$$\text{fcp}=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (5.7.2434)$$

Dès lors, il vient :

$$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \Leftrightarrow \sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1} \quad (5.7.2435)$$

Nous avons alors dans le cas qui nous concerne avec les rangs (la variance des rangs étant la variance vraie : il n'y a pas d'estimateur !) :

$$\sigma_{\bar{R}}^2 = \frac{\sigma_R^2}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{\left(\dfrac{N^2-1}{12}\right)}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{(N-1)(N+1)}{12n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N-n)}{12n} \quad (5.7.2436)$$

Maintenant, de manière à former un variable Normale centrée réduite Z nous pouvons centrer et réduire la variable aléatoire $\hat{\bar{R}}$ obtenue par échantillonnage en écrivant :

$$Z \cong \frac{\hat{\bar{R}}-\bar{R}}{\sigma_{\bar{R}}} = \frac{\hat{\bar{R}}-\dfrac{N+1}{2}}{\sqrt{\dfrac{(N+1)(N-n)}{12n}}} \quad (5.7.2437)$$

où $\hat{\bar{R}}$ est donc la moyenne de la somme des rangs d'un échantillon de la population. Et au fait toute l'idée astucieuse du test de Kruskal-Wallis se trouve ici : la distribution statistique de la moyenne de la somme des rangs d'un grand nombre d'échantillons de N valeurs suit approximativement une loi Normale (revoir notre étude des limites des tirages sans remise) !

Prenons le carré :

$$Z^2 \cong \frac{12}{(N+1)(N-n)}n\left(\hat{\bar{R}}-\frac{N+1}{2}\right) \cong \chi^2(1) \quad (5.7.2438)$$

L'approximation par la loi du Khi-deux n'étant valable que si n est assez grand comme nous en avons déjà parlé en détails lors de notre étude du test d'ajustement du Khi-deux.

Et donc la parenthèse de la première égalité est égale au carré de l'écart du rang de la médiane. Raison pour laquelle on dit souvent qu'il s'agit d'un test de la médiane (mais c'est un raccourci abusif).

Avant de continuer, insistons bien sur le fait que le scénario dans lequel nous nous trouvons est celui d'un tirage d'un échantillon n parmi N, ce qui est équivalent à se retrouver avec deux échantillons (un de taille n et l'autre de taille $N-n$) de même loi (provenant in extenso d'une même population). Il vient alors que (relations que nous allons utiliser un peu plus loin) :

$$n_i + n_j = n_1 + n_2 = n + (N-n) = N \quad (5.7.2439)$$

et par extension du cas à un échantillon, si nous notons R_i la somme des rangs des nombres de l'échantillon i, nous avons aussi :

$$n_i\bar{R}_i + n_j\bar{R}_j = n_1\bar{R}_1 + n_2\bar{R}_2 = n\bar{R}_1 + (N-n)\bar{R}_2 = N\bar{R} = N\frac{N+1}{2} = \frac{1}{2}N(N+1) \quad (5.7.2440)$$

Il s'ensuit que si nous notons pour la suite :

$$\bar{R}_1 = \hat{\bar{R}} = \frac{R}{n} \quad (5.7.2441)$$

où R est donc la somme des rangs de l'échantillon $i=1$, nous avons :

$$\bar{R}_2 = \frac{\frac{1}{2}N(N+1) - n\hat{\bar{R}}}{N-n} = \frac{\frac{1}{2}N(N+1) - R}{N-n} \quad (5.7.2442)$$

En cours de traduction de l'anglais

Si nous écrivons maintenant la relation démontrée plus haut :

$$\frac{12}{(N+1)(N-n)}n\left(\hat{\bar{R}}-\frac{N+1}{2}\right)=\frac{12}{(N+1)(N-n)}n\left(\hat{\bar{R}}-\bar{R}\right)\cong\chi^2(1) \qquad (5.7.2443)$$

sous la forme suivante (il s'agit d'un développement astucieux en marche arrière... à partir de la troisième ligne) :

$$\begin{aligned}
&\frac{12}{(N+1)(N-n)}n\left(\hat{\bar{R}}-\frac{N+1}{2}\right)=\frac{\hat{\bar{R}}^2-(N+1)\hat{\bar{R}}+\frac{1}{4}(N+1)^2}{\frac{(N+1)(N-n)}{12n}}=\frac{\frac{R^2}{n^2}-(N+1)\frac{R}{n}+\frac{1}{4}(N+1)^2}{\frac{(N+1)(N-n)}{12n}}\\
&=\frac{12\frac{R^2}{n}-12(N+1)R+3n(N+1)^2}{(N+1)(N-n)}=\frac{12NR^2-12Nn(N+1)R+3(N+1)^2Nn^2}{N(N+1)n(N-n)}\\
&=\frac{12NR^2-12Nn(N+1)R+3N^2(N+1)^2n}{N(N+1)n(N-n)}-\frac{3(N+1)N(N+1)n(N-n)}{N(N+1)n(N-n)}\\
&=\frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{(N-n)R^2+\frac{1}{4}N^2(N+1)^2n-Nn(N+1)R+nR^2}{n(N-n)}\right)-3(N+1) \qquad (5.7.2444)\\
&=\frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{R^2}{n}+\frac{\left(\frac{1}{2}N(N+1)-R\right)^2}{N-n}\right)-3(N+1)=\frac{12}{N(N+1)}\left(\frac{\bar{R}_1^2}{n_1}+\frac{\bar{R}_2^2}{n_2}\right)-3(N+1)\\
&=\frac{12}{N(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\bar{R}_i^2}{n_i}\right)-3(N+1)
\end{aligned}$$

et nous retrouvons donc à la fin le fait que nous travaillions depuis le début avec deux échantillons, un de taille n et donc l'autre (in extenso par tirage) de taille $N-n$.

Le résultat précédent (qui était celui recherché depuis le début) peut être généralisé sous la forme suivante appelée "test H de Kruskal-Wallis" à un niveau de confiance donné en unilatéral (parfois cette relation est écrite sans les parenthèses pour la sommation ce qui peut prêter à une mauvaise lecture) :

$$H=\frac{12}{N(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{c}\frac{\bar{R}_i^2}{n_i}\right)-3(N+1)\cong\chi^2(c-1) \qquad (5.7.2445)$$

et si tous les n_i sont égaux, nous retrouvons cette relation sous la forme fréquente :

$$H=\frac{12}{nN(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{c}\bar{R}_i\right)-3(N+1)\cong\chi^2(c-1) \qquad (5.7.2446)$$

L'approximation suivant une loi du Khi-deux est cependant délicate lorsque la taille des échantillons (c) est petite (se référer à notre étude de la loi du Khi-deux).

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Reprenons l'exemple de l'article original de Kruskal-Wallis. Nous considérons que nous avons trois machines à l'origine identiques mais dont deux ont subi quelques modifications. Nous avons mesuré la production journalière un certain nombre de fois et avons obtenu le tableau suivant :

Tâche	Standard	Rang	Modifiée 1	Rang	Modifiée 2	Rang
340	5	339	4	347	10	
345	9	333	2	343	7	
330	1	344	8	349	11	
342	6			355	12	
338	3					
		- - - - - - - - - - -	- - - - - - - - - - -			
n	5		3		4	12
R	24		14		40	78
R^2/n	11.5		65.33		400	580.53

TAB. 5.83 – **Tableau d'exemple pour le test de Kruskal-Wallis**

Nous avons alors bien :

$$\sum n_i = N = 12$$
$$\sum R_i = \frac{1}{2}N(N+1) = 78 \qquad (5.7.2447)$$

et :

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\bar{R}_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1) = \frac{12}{12\cdot 13}580.83 - 3.13 \cong \chi^2(2) \qquad (5.7.2448)$$

Or, nous avons :

$$P\left(\chi^2(2) \geq 5.656\right) \cong 0.059 \qquad (5.7.2449)$$

Cela peut être obtenu facilement avec la version française Microsoft Excel 14.0.7166 avec la fonction :

```
=1-LOI.KHIDEUX.N(5.656,2,VRAI)
```

Dans le cas présent, à un niveau de 5%, nous sommes donc à la limite avec l'approximation par une loi de Khi-deux. Comme l'ont montré Kruskal et Wallis, une simulation par Monte-Carlo donne une p-valeur de 0.049.

Bref, dans cette situation il conviendrait plutôt de rejeter l'hypothèse nulle comme quoi les productions sont similaires. Et donc privilégier le fait que celles-ci soient plutôt différentes. Une recommandation et de refaire le test par paire des mesures pour voir ce qui est statistiquement significativement différent deux par deux.

5.7.14.1.9 Test de Friedman

Le test de Friedman, recommandé par la norme NF ISO 8587 pour l'analyse sensorielle (test de classement), considère une expérience avec deux facteurs (le premier étant considéré comme le traitement et le second comme les blocs de tests au même titre que l'ANOVA à deux facteurs contrôlés sans répétition) que l'on analyse à l'aide des rangs car les valeurs des mesures ne satisfont pas les conditions d'application d'ANOVA. Cependant, au contraire de l'ANOVA, le test de Friedman s'applique à des données appariées comme nous allons le voir de suite.

Associons, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, la théorie à un exemple en partant du tableau suivant où 8 sujets (blocs) B sous hypnose ont été soumis à 4 émotions (traitements) T. Leur potentiel électrique épidermique a été mesuré (en millivolts) dans chaque cas (et l'ordre des traitements a été randomisé) :

	Sujets (B)							
Émotions (T)	1	2	3	4	5	6	7	8
Peur	23.1	57.6	10.5	23.6	11.9	54.6	21.0	20.3
Joie	23.1	57.6	10.5	23.6	11.9	54.6	21.0	20.3
Tristesse	22.5	53.7	10.8	21.1	13.7	39.2	13.7	16.3
Calme	22.6	53.1	8.3	21.6	13.3	37.0	14.8	14.8

TAB. 5.84 – **Tableau d'exemple des mesures pour le test de Friedman**

En cours de traduction de l'anglais

L'idée centrale et subtile est de ne pas affecter un rang à l'ensemble de la population des mesures comme c'est le cas pour le test de Kruskal-Wallis (on perdrait alors le concept des blocs : in extenso du deuxième facteur) mais bien bloc par bloc tous supposés donc indépendants les uns des autres.

Remarque

Nous ne traiterons pas (au même titre que lors de notre étude du test de Kruskal-Wallis) de la situation où des mesures sont à égalité avec d'autres dans un même bloc, les démonstrations actuelles n'étant pas vraiment convaincantes de notre point de vue subjectif.

Donc, à chaque valeur $\{x_{tb}\}_{T\times B}$ du tableau nous allons maintenant associer le rang $\{r_{tb}\}_{T\times B}$ correspondant à chaque traitement. Ce qui donnera :

	Sujets (B)							
Émotions (T)	1	2	3	4	5	6	7	8
Peur	4	4	3	4	1	4	4	3
Joie	3	2	2	1	4	3	1	4
Tristesse	1	3	4	2	3	2	2	2
Calme	2	1	1	3	2	1	3	1

Bon maintenant que nous avons construit une sorte tableau d'ANOVA à deux facteurs contrôlés sans répétition non paramétrique que faisons-nous ? Quelle est l'idée ? Eh ben l'idée de base est la même que le test de Kruskal-Wallis : nous allons utiliser la propriété de la moyenne de la

somme des rangs mais tout en ayant en tête que cette fois-ci la numérotation ne s'est pas faite sur l'ensemble des mesures du tableau mais bloc par bloc.

Dans le cadre de notre exemple particulier nous avons donc :

	Sujets (B)									
Émotions (T)	1	2	3	4	5	6	7	8		
Peur	4	4	3	4	1	4	4	3	$R_1 = 27$	$\bar{R}_1 = 3.375$
Joie	3	2	2	1	4	3	1	4	$R_2 = 20$	$\bar{R}_2 = 2.50$
Tristesse	1	3	4	2	3	2	2	2	$R_3 = 19$	$\bar{R}_3 = 2.375$
Calme	2	1	1	3	2	1	3	1	$R_4 = 14$	$\bar{R}_4 = 1.75$

et en cas de non influence des traitements, nous nous attendons à avoir :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_t \tag{5.7.2450}$$

ou aussi (c'est équivalent) :

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = \bar{R}_3 = \bar{R}_4 = \bar{R}_t \tag{5.7.2451}$$

S'il y a non influence des traitements ces quatre dernières valeurs devraient être égales et fluctuer autour de :

$$\mu_R = \bar{R} = \frac{T+1}{2} = \frac{4+1}{2} = 2.5 \tag{5.7.2452}$$

Nous pouvons pressentir que la fluctuation des $\bar{R}_t$ autour de μ_R doit suivre une loi Normale centrée s'il y a vraiment non influence (il existe une démonstration de cela dans l'article original de Friedman mais elle comporte des lacunes par moments et donc nous nous abstiendrons de la présenter). Nous pouvons également réduire la loi Normale telle que :

$$Z \cong \frac{\bar{R}_r - \bar{R}}{\sigma_{\bar{R}}} = \frac{\bar{R}_r - \bar{R}}{\dfrac{\sigma_R}{\sqrt{B}}} = \frac{\bar{R}_r - \bar{R}}{\dfrac{\sqrt{\dfrac{T^2-1}{12}}}{\sqrt{B}}} \tag{5.7.2453}$$

Il n'est pas toujours intuitif que l'erreur standard soit obtenue par la division de la racine de B (du nombre de blocs) car la majorité des praticiens ont pour intuition de diviser par la racine T du nombre de traitements lorsqu'ils étudient l'aspect théorique du test de Friedman. Mais cela peut se vérifier avec une application numérique soit en se rappelant que le calcul de la variance σ_R se fait à partir des B rangs d'un traitement donné, rangs dont les valeurs (dans l'exemple ci-dessus ces valeurs sont comprises 8 fois entre 1 et 4) sont bien évidemment supposées pour un traitement donné indépendantes et identiquement distribuées.

Donce nous avons :

$$Z^2 = \frac{(\bar{R}_t - \bar{R})^2}{\sigma^2_{\bar{R}}} = \frac{(\bar{R}_t - \bar{R})^2}{\dfrac{\sigma^2_R}{B}} \tag{5.7.2454}$$

En cours de traduction de l'anglais

Contrairement au test de Kruskal-Wallis, nous ne faisons pas d'échantillonnage, donc nous ne devons pas corriger l'écart-type à l'aide du facteur de correction sur population finie (fcp) pour diminuer sa valeur.

L'idée de Friedmann (du moins c'est ainsi que nous allons le présenter) est de dire que l'écart-type de la somme des rangs des traitements obtenue de façon identique que lors du test de Kruskal-Wallis (dont l'origine a été détaillée lors de notre étude du test de Mann-Withney) :

$$\hat{\sigma}_R^2 = \frac{T^2-1}{12} \quad (5.7.2455)$$

n'est cette fois-ci qu'un estimateur de l'écart-type vrai et qu'il faut utiliser la relation entre l'estimateur non biaisé et biaisé pour corriger cette estimation (relation démontrée lors de notre étude des estimateurs) :

$$\hat{\sigma}_R^2 = \frac{T}{T-1}\hat{\sigma}_R^2 = \frac{T}{T-1}\frac{T^2-1}{12} \quad (5.7.2456)$$

Dès lors :

$$\sum_{t=1}^{T} Z_t^2 = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{R}_t - \frac{T+1}{2}\right)^2}{\displaystyle\frac{T}{T-1}\frac{\hat{\sigma}_R^2}{B}} = \frac{T-1}{T}\frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{R}_t - \frac{T+1}{2}\right)^2}{\displaystyle\frac{\frac{T^2-1}{12}}{B}} \quad (5.7.2457)$$

où nous avons retiré un degré de liberté au Khi-deux pour la raison déjà rencontrée maintes fois dans le présent chapitre.

Soit après quelques simplifications élémentaires nous obtenons le "test Q de Friedman" (qui est donc un test non paramétrique) :

$$Q = \frac{12B}{T(T+1)}\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{R}_t - \frac{T+1}{2}\right)^2 \cong \chi^2(T-1) \quad (5.7.2458)$$

✍**Exemple :**

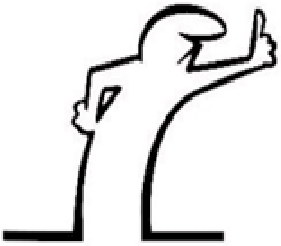
Pour en revenir à notre exemple il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{12B}{T(T+1)}\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{R}_t - \frac{T+1}{2}\right)^2 &= \frac{12\cdot 8}{4(4+1)}\sum_{t=1}^{4}\left(\bar{R}_t - \frac{4+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{24}{5}\left[\left(3.375-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(2.50-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(2.375-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(1.75-\frac{5}{2}\right)^2\right] = 6.45\end{aligned} \quad (5.7.2459)$$

La valeur critique de $\chi^2(T-1)$ au seuil de 5% est de 7.81. Donc nous ne rejetons malheureusement pas l'hypothèse null comme quoi les traitements n'ont aucune influence (absence de différence entre les traitements). La probabilité cumulée correspondant à 6.45 (donc la p-valeur) est de 90%.

En cours de traduction de l'anglais

Et gardez à l'esprit cet excellent meme créé par Adrian Olszewski :



- Transformation de variables

Box-Cox, Logarithm, Johnson, Manly, etc.

⊳ Change BEAUCOUP de choses

- Méthodes basées sur les rangs

Mann-Whitney, Kruskal-Wallis, Friedman, etc.

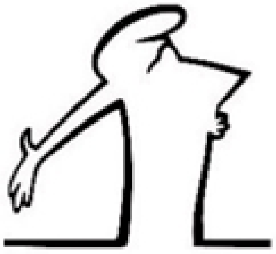
⊳ Change totalement H_0 ; interprétation complexe, peut vous tromper sur les médianes

---

- Méthodes (semi-) paramétriques plus générales

GLM, GLS, [G]LMM, GEE

⊳ Conservent les hypothèses nulles, gérent l'hétéroscédasticité, les dépendances et la non-normalité



- Tests informatiques intensifs

Tests de permutations, rééchantillonnage Bootstrap & Jackknife

⊳ Conservent les hypothèses nulles, gérent l'hétéroscédasticité, les dépendances, la non-normalité et partiellement les valeurs aberrantes

En cours de traduction de l'anglais

Ou ce tableau également d'Adrian Olszewski :

Sujet de comparaisons H_0 vs H_1	1 facteur				2 facteurs + interactions		
	2 niveaux		k niveaux		de k niveaux	+ numérique covariables	+ données répétées
	non appariés	données répétées	non appariés	données répétées			
équivalence stochastique vs supériorité stochastique	• Mann-Whitney (Wilcoxon) • Brunner-Munzel	Rangs signés (Wilcoxon)	Kruskal-Wallis	• Friedman • Skillings-Mack RM-ANOVA • Statistiques de type ANOVA (ATS) • Statistiques de type Wald (WTS) • ANOVA des rangs alignés transformés (ART)	• ATS • WTS pérmutée • ANOVA ART • Brunner-Dette-Munk	Régression logistique ordinale = Cotes proportionnelles Modèle + Wald ou Likelihood Test des ratios (LRT) inférence	Ajustement GEE Équations Estimées Généralisées Régression Ordinale Logistique avec structure de corrélation appropriée
moyennes égales vs moyennes inégales	• Permutation de Welch T • Permutation de Yuen-Welch T (valeurs aberrantes)		• Van der Waerden • Permutation ANOVA à une voie • Ajustement GEE Modèle Linéaire Généralisé	Ajustement GEE Modèle Linéaire Généralisé structure de corrélation appropriée	• Modèle Linéaire Généralisé GEE + inférence de Wald • Ajustement GEE Régression Ordinale Logistique + travail supplémentaire estimer l'eCDF • Modèle mixte linéaire robuste (hubérisé) + Wald/LRT Pour distributions non-gaussiennes connues • Modèle Linéaire Généralisé/Additif Mixed + Wald/LRT • GEE/Modèle Linéaire Généralisé + Wald		
médianes égales vs médianes inégales	• Brown-Mood's • MW(W) sous échantillons identiques	Wilcoxon sur échantillons symétriques	• Régression quantile (avec effets aléatoires) + Wald ou inférence bootstrap • Test de Khmaladze pour déplacement de localisation pur				

TAB. 5.85 – **Tests non-paramétriques flexibles & robustes communs pour données numériques (auteur : Adrian Olszewski)**

5.7.14.1.10 Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, noté R_S est le coefficient de corrélation de la séquence $(R(i), S(i))\,, i = 1 \ldots n$, des rangs naturellement inspirés du coefficient de corrélation linéaire de Pearson que nous avons vu au début de cette section :

$$R_S = \frac{\mathrm{E}\left[(R_i - \bar{R})(S_i \bar{S})\right]}{\sqrt{\mathrm{V}(R)\mathrm{V}(S)}} = \frac{\mathrm{E}(R \cdot S) - \mathrm{E}(R)\mathrm{E}(S)}{\sqrt{(\mathrm{E}(R^2) - \mathrm{E}(R)^2)\,(\mathrm{E}(S^2) - \mathrm{E}(S)^2)}} \tag{5.7.2460}$$

Prenons également un exemple avant d'aborder l'aspect théorique. Considérez que la mesure d'un échantillon de taille 10 (nous avons pris les mêmes valeurs que celles prises pour les études des tests de rangs non-paramétriques précédentes) :

X	Y
5.7	8.1
3.2	5.5
8.4	3.4
4.1	7.9
6.9	4.6
5.3	1.6
1.7	8.5
3.2	7.1
2.5	8.7
7.4	5.7

En cours de traduction de l' anglais

avec leurs rangs respectifs conformément à l'idée d'approche de Kendall (idée simple mais qu'il fallait trouver !) :

X	$R(i)$	Y	$S(i)$
5.7	7	8.1	8
3.2	3	5.5	4
8.4	10	3.4	2
4.1	5	7.9	7
6.9	8	4.6	3
5.3	6	1.6	1
1.7	1	8.5	9
3.2	4	7.1	6
2.5	2	8.7	10
7.4	9	5.7	5

Maintenant, montrons que la relation donnée ci-dessus est considérablement simplifiée car les valeurs de R, telles que celles de S, parcourent les premiers n entiers. Pour cela, rappelez-vous que nous avons prouvé dans la section Séquences et Séries, que :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.7.2461}$$

Dès lors :

$$\mathrm{E}(R)=\mathrm{E}(S)=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2} \quad (5.7.2462)$$

Ainsi :

$$R_S=\frac{\mathrm{E}(R\cdot S)-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(\mathrm{E}(R^2)-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2\right)\left(\mathrm{E}(S^2)-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2\right)}} \quad (5.7.2463)$$

Nous avons également prouvé dans la section Séquences et Séries que :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (5.7.2464)$$

dès lors :

$$\mathrm{E}(R^2)=\mathrm{E}(S^2)=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \quad (5.7.2465)$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
R_S&=\frac{\mathrm{E}(R\cdot S)-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2}{\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2}=\frac{12\mathrm{E}(R\cdot S)-12\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2}{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}\\
&=\frac{12\mathrm{E}(R\cdot S)-3(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)-3(n^2+2n+1)}=\frac{12\mathrm{E}(R\cdot S)-3(n^2+2n+1)}{4n^2+2n+4n+2-3n^2-6n-3}\\
&=\frac{12\mathrm{E}(R\cdot S)-3n^2-6n-3}{n^2-1}=\frac{12\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}R_iS_i-3n^2-6n-3}{n^2-1}\\
&=\frac{12\displaystyle\sum_{i=1}^{n}R_iS_i}{n^3-n}-\frac{3n^2+6n+3}{n^2-1}=\frac{12\displaystyle\sum_{i=1}^{n}R_iS_i}{n^3-n}-\frac{3(n+1)^2}{n^2-1}=\frac{12\displaystyle\sum_{i=1}^{n}R_iS_i}{n^3-n}-\frac{3(n+1)^2}{(n+1)(n-1)}\\
&=\frac{12\displaystyle\sum_{i=1}^{n}R_iS_i}{n(n^2-1)}-\frac{3(n+1)}{n-1}=\frac{6\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2R_iS_i}{n(n^2-1)}-\frac{3(n+1)}{n-1}
\end{aligned} \quad (5.7.2466)$$

Maintenant, jouons un peu plus pour obtenir une expression plus simplifiée en observant que :

$$\mathrm{E}(R_i-S_i)^2=\sum_{i=1}^{n}R_i^2-2R_iS_i+S_i^2=\sum_{i=1}^{n}R_i^2-2\sum_{i=1}^{n}R_iS_i+\sum_{i=1}^{n}S_i^2 \quad (5.7.2467)$$

Dès lors il vient :

$$2\sum_{i=1}^{n}R_iS_i=\sum_{i=1}^{n}R_i^2+\sum_{i=1}^{n}S_i^2-\sum_{i=1}^{n}(R_i-S_i)^2=\sum_{i=1}^{n}R_i^2+\sum_{i=1}^{n}S_i^2-\sum_{i=1}^{n}d_i^2 \quad (5.7.2468)$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons alors :

$$R_S=\frac{6\sum_{i=1}^{n}2R_iS_i}{n(n^2-1)}-\frac{3(n+1)}{n-1}=\frac{6\left(\sum_{i=1}^{n}R_i^2+\sum_{i=1}^{n}S_i^2-\sum_{i=1}^{n}d_i^2\right)}{n(n^2-1)}\frac{3(n+1)}{n-1}$$
$$=\frac{6\left(\sum_{i=1}^{n}R_i^2+\sum_{i=1}^{n}S_i^2\right)}{n(n^2-1)}-\frac{3(n+1)}{n-1}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)} \tag{5.7.2469}$$

Mais nous avions prouvé que :

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\sum_{i=1}^{n}R_i^2=\sum_{i=1}^{n}S_i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{5.7.2470}$$

Dès lors :

$$R_S=\frac{6\left(\sum_{i=1}^{n}R_i^2+\sum_{i=1}^{n}S_i^2\right)}{n(n^2-1)}-\frac{3(n+1)}{n-1}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}$$
$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{n(n^2-1)}-\frac{3(n+1)}{n-1}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}=\frac{2(n+1)(2n+1)}{n^2-1}-\frac{3(n+1)(n+1)}{(n-1)(n+1)}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}$$
$$=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)(n+1)}{(n-1)(n+1)}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)} \tag{5.7.2471}$$
$$=\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{n-1}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}=\frac{4n+2-3n-3}{n-1}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}$$
$$=\frac{n-1}{n-1}-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}$$

En cours de traduction de l'anglais

On retrouve ainsi la fameuse relation disponible dans tous les (bons) livres de statistiques :

$$\boxed{R_S=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}} \tag{5.7.2472}$$

Le coefficient de Spearman a les mêmes propriétés essentielles que le coefficient de Pearson à savoir que :

$$-1\leq R_S\leq +1 \tag{5.7.2473}$$

et est égal à 0 lorsque les variables sont corrélées (sans oublier les subtilités importantes déjà évoquées dans notre étude du coefficient de Pearson ! ! !).

Notez que ce coefficient semble être défini uniquement pour une paire de variables (je n'ai jamais vu de généralisation à un cas multivarié à ce jour).

5.7.14.1.11 Coefficient de corrélation Tau de Kendall

Le "coefficient de corrélation tau-b de Kendall ", τ_b, est une mesure d'association non paramétrique (statistiques de rang) basée sur le nombre de concordances et de discordances par paires d'observations.

Il est utilisé dans de nombreux domaines de la sociologie, de l'ingénierie et de la finance quantitative (pour un exemple en finance quantitative voir la référence [313]) et souvent comparé ou communiqué en même temps avec le coefficient de corrélation de Pearson et le coefficient de corrélation de Spearman !

Supposons deux observations (X_i, Y_i) et (X_j, Y_j). Ils sont dits *concordants* s'ils sont dans le même ordre par rapport à chaque variable. Autrement dit, si :

(1) $X_i < X_j$ et $Y_i < Y_j$, ou si

(2) $X_i > X_j$ et $Y_i > Y_j$

Ils sont *discordants* s'ils sont dans l'ordre inverse pour X et Y, ou si les valeurs sont disposées dans des directions opposées. Autrement dit, si :

(1) $X_i < X_j$ et $Y_i > Y_j$, ou si

(2) $X_i > X_j$ et $Y_i < Y_j$

Les deux observations sont liées si $X_i = X_j$ et / ou $Y_i = Y_j$.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le tau-c τ_c de Kendall ignorent les liens. Nous ne discuterons pas du tau-c de Kendall ici car il n'est plus souvent utilisé à notre connaissance. En l'absence de liens, les deux formules donnent des résultats identiques de tout façon.

Le nombre total de paires qui peuvent être construites pour un échantillon de taille n est :

$$N = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (5.7.2474)$$

N peuvent être décomposées en ces cinq quantités :

$$N = P + Q + X_0 + Y_0 + (XY)_0 \quad (5.7.2475)$$

où P est le nombre de paires concordantes, Q est le nombre de paires discordantes, X_0 est le nombre de paires liées uniquement sur la variable X, Y_0 est le nombre de paires liées uniquement sur la variable Y et $(XY)_0$ est le nombre de paires liées à la fois sur X et Y.

Le Kendall tau-b pour mesurer l'association d'ordre entre les variables X et Y est donné par la formule suivante :

$$\tau_b = \frac{P-Q}{\sqrt{(P+Q+X_0)(P+Q+Y_0)}} \quad (5.7.2476)$$

S'il n'y a pas de liaisons $X_0 = Y_0 = 0$ alors on retombe sur une expression courante que l'on retrouve dans de nombreux manuels du Kendall tau-b :

$$\tau_b = \frac{P-Q}{\sqrt{(P+Q)(P+Q)}} = \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{P-Q}{\frac{1}{2}n(n-1)} \quad (5.7.2477)$$

Si nous utilisons la distance de différence symétrique (voir le premier exemple ci-dessous), cette dernière relation peut s'écrire :

$$\tau_b = \frac{P-Q}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1) - d_\Delta}{\frac{1}{2}n(n-1)} = 1 - \frac{2d_\Delta}{n(n-1)} \quad (5.7.2478)$$

Cette valeur est alors mise à l'échelle et varie entre -1 (relation monotone négative parfaite entre deux variables : un score plus faible sur la variable X est toujours associé à un score plus élevé sur la variable Y) et $+1$ (relation monotone positive parfaite entre deux variables : un score inférieur sur la variable X est toujours associé à un score inférieur sur la variable Y).

Contrairement au coefficient de corrélation des rangs de Spearman, le tau-b de Kendall estime la variance de population comme suit :

$$\tau_b \text{ est l'estimateur échantillonal de } \tau_b = P[\text{concordant}] - P[\text{non-concordant}] \quad (5.7.2479)$$

De plus, si deux variables sont indépendantes, $\tau_b = 0$ mais l'inverse n'est pas toujours vrai : une relation curviligne ou autre non monotone peut encore exister.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Supposons que deux experts commandent quatre vins notés $\{a,b,c,d\}$. Le premier expert donne ses préférences : $E_1 = [a,c,b,d]$, qui correspond aux rangs suivants $R_1 = [1,3,2,4]$ et le deuxième expert a comme préférences $E_2 = [a,c,d,b]$ ce qui correspond aux rangs suivants $R_2 = [1,4,2,3]$. L'ordre donné par le premier expert est composé des 6 paires ordonnées suivantes :

$$\mathrm{P}_1 = \{[a,c],[a,b],[a,d],[c,b],[c,d],[b,d]\}$$

L'ordre donné par le deuxième expert est composé des 6 paires ordonnées suivantes :

$$\mathrm{P}_2 = \{[a,c],[a,b],[a,d],[c,b],[c,d],[d,b]\}$$

L'ensemble des paires qui sont dans un seul ensemble de paires ordonnées est :

$$\{[b,d][d,b]\}$$

ce qui donne une valeur de $d_\Delta(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2) = 2$. Avec cette valeur de la différence symétrique, nous calculons la valeur du coefficient de corrélation des rangs de Kendall entre l'ordre donné par ces deux experts comme :

$$\tau_b = 1 - \frac{2d_\Delta(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)}{n(n-1)} = 1 - \frac{2\cdot 2}{12} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cong 0.67$$

Notez que le résultat est égal à :

$$\tau_b = \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \cong 0.67$$

E2. Deux intervieweurs ont classé 12 candidats (de A à L) pour un poste. Les résultats du plus préféré au moins préféré sont :

- Intervieweur 1 : ABCDEFGHIJKL
- Intervieweur 2 : ABDCFEHGJILK

nous voulons calculer le τ_b.

Pour cela, nous faisons un tableau des classements. La première colonne, *Candidat* est facultative et est présente à titre de référence uniquement. Le classement pour *Intervieweur 1* doit être dans l'ordre croissant (du moins au plus préféré des candidats) :

Candidat	**Intervieweur 1**	**Intervieweur 2**
A	1	1
B	2	2
C	3	4
D	4	3
E	5	6
F	6	5
G	7	8
H	8	7
I	9	10
J	10	9
K	11	12
L	12	11

Après nous comptons le nombre de paires concordantes, en utilisant la deuxième colonne. Les paires concordantes correspondent au nombre de rangs plus importants inférieurs à un certain rang. Par exemple, le premier rang dans la deuxième colonne de l'intervieweur est un 1, donc tous les 11 rangs en dessous sont plus grands :

Candidat	Intervieweur 1	Intervieweur 2	Concordant	Discordant
A	1	1	11	
B	2	2		
C	3	4		
D	4	3		
E	5	6		
F	6	5		
G	7	8		
H	8	7		
I	9	10		
J	10	9		
K	11	12		
L	12	11		

Cependant, en descendant la liste jusqu'à la troisième ligne (un rang de 4), le rang immédiatement inférieur (3) est plus petit, donc il ne compte en tant que paire concordante :

Candidat	Intervieweur 1	Intervieweur 2	Concordant	Discordant
A	1	1	11	
B	2	2	10	
C	3	4	8	
D	4	~~3~~		
E	5	6		
F	6	5		
G	7	8		
H	8	7		
I	9	10		
J	10	9		
K	11	12		
L	12	11		

Lorsque toutes les paires concordantes ont été comptées, cela ressemble à ceci :

Candidat	Intervieweur 1	Intervieweur 2	Concordant	Discordant
A	1	1	11	
B	2	2	10	
C	3	4	8	
D	4	4	8	
E	5	6	6	
F	6	5	6	
G	7	8	4	
H	8	7	4	
I	9	10	2	
J	10	9	2	
K	11	12	0	
L	12	11		

En is

Maintenant, nous comptons le nombre de paires discordantes et les insérons dans la colonne suivante. Le nombre de paires discordantes est similaire aux étapes précédentes, seulement nous recherchons des rangs plus petits, pas des plus grands :

Candidat	**Intervieweur 1**	**Intervieweur 2**	**Concordant**	**Discordant**
A	1	1	11	0
B	2	2	10	0
C	3	4	8	1
D	4	4	8	0
E	5	6	6	1
F	6	5	6	0
G	7	8	4	1
H	8	7	4	0
I	9	10	2	1
J	10	9	2	0
K	11	12	0	1
L	12	11		

Et nous additionnons ces deux nouvelles colonnes :

Candidat	**Intervieweur 1**	**Intervieweur 2**	**Concordant**	**Discordant**
A	1	1	11	0
B	2	2	10	0
C	3	4	8	1
D	4	4	8	0
E	5	6	6	1
F	6	5	6	0
G	7	8	4	1
H	8	7	4	0
I	9	10	2	1
J	10	9	2	0
K	11	12	0	1
L	12	11		
		Total :	61	5

Et, en insérant les totaux dans la formule, nous obtenons :

$$\tau_b = \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{61-5}{61+5} = \frac{56}{66} = 0.85 \qquad (5.7.2480)$$

Nous n'avons pas besoin d'avoir deux juges pour se comparer. Par exemple, dans l'analyse de sensibilité, nous pouvons considérer qu'une entreprise souhaite mettre un nouveau produit alimentaire sur le marché. Les clients potentiels dégustent 10 versions de ce produit qui ont différents niveaux de lipides. Les clients évaluent ensuite chaque variante. Une fois agrégées sur l'ensemble des dégustateurs, ces notes ne sont pas étudiées en tant que telles mais sont classées de manière à obtenir un ordre global de préférences. Nous voulons savoir si cette classification peut être liée au taux de lipides :

Concentration de lipide	Préférences
13	10
14	7
15	9
16	8
17	5
18	6
19	4
20	3
21	1
22	2

Ensuite, nous appliquons la même procédure que ci-dessus en comparant les deux colonnes et nous obtenons $\tau_b = -0.822$.

Remarque

Notez que alors que le coefficient de corrélation des rangs de Spearman peut être considéré comme le coefficient de corrélation de Pearson habituel calculé à partir des rangs, le Kendall tau représente plutôt une probabilité. Plus précisément, il s'agit de la différence entre la probabilité que les données observées soient dans le même ordre pour les deux variables contre la probabilité que les données observées soient dans des ordres différents pour les deux variables.

En cours de traduction Opera Magistris

Le coefficient de corrélation de Kendall ne dépend que de l'ordre des paires, et il peut toujours être calculé en supposant que l'un des rangs sert de point de référence (par exemple avec $N=4$ éléments nous supposons arbitrairement que le premier ordre est égal à 1234). Par conséquent, avec deux ordres de classement fournis sur n objets, il y a $n!$ différents résultats possibles (chacun correspondant à un ordre possible donné) à considérer pour calculer la distribution d'échantillonnage de τ_b. On peut calculer la probabilité p associée à chaque valeur possible de τ_b. Par exemple, nous trouvons que la valeur p associée à un test unilatéral pour une valeur de $\tau_b = \frac{2}{3}$ est égale à :

$$p = P\left(\tau_b \geq \frac{2}{3}\right) = \frac{\text{Nombre de } \tau \geq \frac{2}{3}}{\text{Nombre total de } \tau} = \frac{4}{24} = 0.17 \qquad (5.7.2481)$$

Par conséquent, pour notre exemple des vins ci-dessus, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle, et nous ne pouvons pas conclure que les experts (juges) aient un désaccord significatif dans leur classiement des vins.

Le calcul de la distribution d'échantillonnage est toujours théoriquement possible car fini. Mais cela nécessite de calculer $n!$ coefficients de corrélation, et il devient donc pratiquement impossible d'implémenter ces calculs pour des valeurs même modérément grandes de n. Ce problème n'est cependant pas aussi drastique qu'il n'y paraît car la distribution d'échantillonnage de τ_b converge vers une distribution Normale (la convergence est satisfaisante pour des valeurs de n

supérieures à 10), avec une moyenne de 0 et une variance égale à [69] :

$$\sigma_{\tau_b}^2 = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)} \tag{5.7.2482}$$

Par conséquent, pour n supérieur à 10, un test d'hypothèse nulle peut être effectué en transformant τ_b en une valeur Z comme :

$$Z_{\tau_b} \cong \frac{\hat{\tau}_b}{\sigma_{\tau_b}} = \frac{\hat{\tau}_b}{\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}} \tag{5.7.2483}$$

Cette valeur Z est Normalement distribuée avec une moyenne de 0 et un écart type de 1.

5.7.14.2 Statistiques de rangs

La "statistique de rangs" est un outil très important en finance et en ingénierie qualité (pour ne citer que les deux exemples les plus connus). Comme le lecteur le verra dans ce qui suit ci-dessous, ces statistiques sont par construction un sous-domaine des statistiques d'ordre et le résultat que nous obtiendrons ici nous sera absolument utile dans le cadre des cartes de contrôle qualité (voir section Ingénierie page ??) et donc aussi dans les signaux de trading en finance.

Étant donné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ supposées être variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à partir d'une loi de distribution F et de densité f. Rappelons que nous définissons la statistique d'ordre $X_{(i)}$ par :

$$X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(i)} \leq \ldots \leq X_{(n)} \tag{5.7.2484}$$

En notant :

$$W_n = \min(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}) \tag{5.7.2485}$$

$$M_n = \max(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}) \tag{5.7.2486}$$

Les variables W_n et M_n définissent les statistiques d'ordre extrêmes et leur différence :

$$D_n = M_n - W_n \tag{5.7.2487}$$

s'appelle la "déviation extrême"

Pour ce qui va suivre, nous considérerons comme évidente la relation :

$$\min\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right) = \max\left(-X_{(1)}, -X_{(2)}, \ldots, -X_{(n)}\right) \tag{5.7.2488}$$

Déterminons maintenant la fonction de distribution du maximum M_n :

$$F_M(x) = P\left(\{M_n \leq x\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_{(i)} \leq x)\right) \tag{5.7.2489}$$

[69]Nous sommes allés aussi loin que possible (1933) pour trouver la preuve détaillée originale de cette variance, mais nous n'avons pas été en mesure de la trouver. Malheureusement, nous n'avons ni le temps ni le plaisir de réécrire la preuve par nous-mêmes ... Donc sans preuve - comme toujours en science (!) - utilisez cette relation à vos risques et périls !

En cours de traduction de l'anglais

car écrore que $M_n \leq$ équivaut à dire que pour chaque $X_{(i)}$ nous avons $X_{(i)} \leq n$ (pas facile à deviner qu'il faut avoir cette approche...).

Nous avons alors puisque les variables sont indépendantes (voir section de Probabilités page 479) :

$$F_M(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_{(i)} \leq x)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_{(i)} \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F(x) = [F(x)]^n \tag{5.7.2490}$$

et par suite nous avons évidemment la fonction de distribution :

$$f_M(x) = nf(x)\,[F(x)]^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}F_M(x) = \frac{\partial}{\partial x}[F(x)]^n \tag{5.7.2491}$$

Respectivement en se basant sur la même idée :

$$\begin{aligned}F_W(x) &= P(\{W_n \leq x\}) = 1 - P(\{W_n > x\}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_{(i)} > x)\right)\\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(X_{(i)} > x\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P\left(X_{(i)} < x\right)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F(x))\\ &= 1 - (1 - F(x))^n\end{aligned} \tag{5.7.2492}$$

et par suite nous avons évidemment la fonction de distribution :

$$f_W(x) = nf(x)\,[1 - F(x)]^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}F_W(x) = \frac{\partial}{\partial x}(1 - (1 - F(x))^n) \tag{5.7.2493}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\text{E}(R) &= \text{E}(M_n - W_n) = \text{E}(M_n) - \text{E}(W_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_M(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} x f_W(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,(f_M(x) - f_W(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_D(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[[F(x)]^n - (1 - [1 - F(x)]^n)\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.7.2494}$$

en ayant utilisé la linéarité de l'espérance et le fait que pour les deux fonctions de distribution nous travaillons sur la même variable aléatoire.

En faisant une intégration par parties (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1511) :

$$\begin{aligned}\text{E}(R) = \bar{R} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[[F(x)]^n - (1 - [1 - F(x)]^n)\right]\mathrm{d}x\\ &= x\left[[F(x)]^n - (1 - [1 - F(x)]^n)\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left[[F(x)]^n - (1 - [1 - F(x)]^n)\right]\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - [F(x)]^n - [1 - F(x)]^n\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.7.2495}$$

En cours de traduction de l'anglais

en n'oubliant pas que $F(-\infty)$ et $F(+\infty)=1$.

Maintenant considérons le cas particulier où la fonction de répartition suit une loi Normale centrée réduite :

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (5.7.2496)$$

Nous avons alors :

$$\bar{R}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-[F(x)]^n-[1-F(x)]^n\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^n-\left[1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^n\right)\mathrm{d}x \quad (5.7.2497)$$

Faisons un changement de variables :

$$y=\frac{x-\mu}{\sigma}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sigma}\Rightarrow\mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}y \quad (5.7.2498)$$

Nous avons alors :

$$\bar{R}=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\Phi(y)^n-[1-\Phi(y)]^n\right)\mathrm{d}y \quad (5.7.2499)$$

et nous trouvons alors la relation donnée (99% du temps sans démonstration) dans les livres de statistiques des procédés (SPC) :

$$d_2(n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\Phi(y)^n-[1-\Phi(y)]^n\right)\mathrm{d}y \quad (5.7.2500)$$

appelée "constante de Hartley" et donc :

$$\boxed{\bar{R}=\sigma d_2(n)} \quad (5.7.2501)$$

Cette constante est impossible à ce jour et à notre connaissance à calculer formellement. Soit il faut passer par des approximations en série de Taylor des termes de l'intégrale, ce qui devient un cauchemar pour n grand, soit par un calcul utilisant la méthode de Monte-Carlo (voir section Méthodes Numériques page ??). Comme c'est relativement long à implémenter dans un tableur, les ingénieurs qualité préfèrent utiliser des tables dans lesquelles nous trouvons par exemple :

Valeurs de n	Valeurs de $d_2(n)$ pour une distribution Normale
2	1.128
3	1.693
4	2.059
5	2.326
6	2.534
7	2.704
8	2.847
9	2.970
10	3.078
...	...

TAB. 5.86 – **Valeurs tabuleés de la constante de Hartley $d_2(n)$**

En cours de traduction de l' anglais

Voyons maintenant la variance de l'étendue en utilisant toujours le théorème de Huygens :

$$\mathrm{V}(R)=\mathrm{E}(R^2)-\mathrm{E}(R)^2=\mathrm{E}(R^2)-\sigma^2 d_2^2(n) \tag{5.7.2502}$$

Le calcul de $\mathrm{E}(R^2)$ n'est vraiment pas sympa (du moins je n'ai rien trouvé qui satisfasse le but pédagogique de ce livre), la plus petite preuve complète tient sur $3-4$ pages A4 et formellement n'apporte pass grand chose car on finit par une intégrale qui ne se calcule pas à la main (par contre si quelqu'un a une preuve simple, élégante et détaillée n'hésitez pas à nous la faire parvenir !). C'est pour cette raison qu'après avoir écrit :

$$W=\frac{R}{\sigma} \tag{5.7.2503}$$

si nous écrivons maintenant comme le font de nombreux livres techniques :

$$\mathrm{V}(R)=\left[\mathrm{E}(W^2)-d_2^2(n)\right]\sigma^2 \tag{5.7.2504}$$

Nous avons alors :

$$\sigma_R=\sigma\sqrt{\mathrm{E}(W^2)-d_2^2(n)}=\sigma d_3(n) \tag{5.7.2505}$$

Mais comme nous ne connaissons pas l'estimateur sans biais du maximum de vraisemblance de l'écart type σ, nous utiliserons la relation prouvée :

$$\bar{R}=\sigma d_2(n) \tag{5.7.2506}$$

Pour enfin avoir un estimateur biaisé de la variance de l'étendue :

$$\hat{\sigma}_R=\frac{d_3(n)\bar{R}}{d_2(n)}=\frac{d_3\bar{R}}{d_2} \tag{5.7.2507}$$

Voici quelques valeurs tabulées de $d_3(n)$:

Valeurs de n	Valeurs de $d_3(n)$ pour une distribution Normale
2	0.852
3	0.888
4	0.879
5	0.864
6	0.848
7	0.833
8	0.819
9	0.807
10	0.797
...	...

TAB. 5.87 – **Valeurs tabulées de la constante $d_3(n)$**

En cours de traduction de l'anglais

5.7.14.2.1 Test (de l'étendue) de Tukey

Supposons que nous avons Z_k variables aléatoires centrées réduites et indépendantes. Et notons U une variable aléatoire suivant une loi du Khi-deux à v degrés de liberté.

Définissons maintenant pour des raisons qui paraîtront évidentes un peu plus loin, "l'étendue Studentisée" (l'origine du nom provient de sa ressemblance avec la définition de la loi de Student) par :

$$Q_{k,v} = \frac{\max(Z_i) - \min(Z_i)}{\sqrt{U/v}} = \frac{R_Z}{\sqrt{U/v}} \tag{5.7.2508}$$

et tentons de déterminer si cette relation suit une loi connue et une application possible (nous retrouvons au numérateur ce que nous avions défini plus haut comme étant la "déviation extrême" mais avec une autre notation).

Pour cela, montrons que nous tombons sur la définition ci-dessus en considérant un cas un peu plus général où nous avons X_i variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et avec l'écart type :

$$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \tag{5.7.2509}$$

Et étudions le ratio :

$$\frac{\max(Z_i) - \min(Z_i)}{S_*} = \frac{R_X}{S_*} \tag{5.7.2510}$$

Maintenant, procédons aux transformations classiques déjà vues et démontrées et utilisées maintes fois depuis le début de ce chapitre :

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \tag{5.7.2511}$$

$$U = \chi_v^2 = \frac{vS_*^2}{\sigma^2} \tag{5.7.2512}$$

Et nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{\max(Z_i) - \min(Z_i)}{S_*} &= \frac{\max\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right) - \min\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sqrt{\dfrac{U}{v\sigma^2}}}\\ &= \frac{\max\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right) - \min\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{U}{v}}} = \frac{1}{\sigma}\frac{\max(X_i) - \min(X_i)}{\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{U}{v}}} = \frac{\max(X_i) - \min(X_i)}{\sqrt{\dfrac{U}{v}}}) = Q_{k,v}\end{aligned} \tag{5.7.2513}$$

Donc voilà déjà pour la première étape. Pour l'instant, même si nous ne savons toujours pas si cette définition loi suit une distribution connue, nous pouvons déjà poser la définition très intéressante suivante (le terme de gauche est toujours positif) :

$$\max(X_i) - \min(X_i) = Q_{k,v,1-\alpha}S_* \tag{5.7.2514}$$

En cours de traduction de l'anglais

ou autrement écrite :

$$R_X = Q_{k,v,1-\alpha} S_* \quad (5.7.2515)$$

et donc nous pouvons calculer quelle est la probabilité cumulée d'une étendue obtenue par mesures comparée à une étendue critique $R_{X,\text{crit}}$ correspondant directement à un seuil α imposé. Ce qui nous amène à pouvoir écrire que :

$$P\left(R_X \leq R_{X,\text{crit}}\right) = 1-\alpha \quad (5.7.2516)$$

Maintenant, rappelons que nous avons vu plus haut que la fonction de distribution de la déviation extrême était donnée par une relation à notre connaissance non calculable analytiquement :

$$f_R(x) = \partial_x \left[[F(x)]^2 - (1-[1-F(x)]^n)\right] \quad (5.7.2517)$$

Donc la fonction de distribution $Q_{k,v,1-\alpha}$ n'est par conséquence pas assimilable à une loi connue quand $F(x)$ est une loi quelconque. Il faut donc malheureusement tabuler cette distribution par la méthode de Monte Carlo (voir section Méthodes Numériques page ??) ou se réferer à des tables déjà existantes.

Maintenant pour continuer, nous faisons un crochet par l'ANOVA à un facteur contrôlé que nous avions étudié. Rappelons d'abord que nous avons démontré que que pour des variables aléatoires Normales indépendantes et identiquement distribuées nous avions :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.7.2518)$$

et puisque l'ANOVA un facteur contrôlé est aussi basé sur l'hypothèse que :

$$\sigma_R^2 = \sigma_A^2 = \sigma_T^2 = \sigma^2 \quad (5.7.2519)$$

cela implique qu'asymptotiquement les estimateurs ont la même propriété :

$$S_R^2 = S_A^2 = \sigma_T^2 = S^2 \quad (5.7.2520)$$

Nous savons aussi que l'écart-type de la moyenne d'un échantillon de l'ANOVA un facteur contrôlé est donc donné la cadre et les hypothèses de l'ANOVA à un facteur contrôlé par :

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.7.2521)$$

Mais dans le cadre de l'ANOVA à un facteur contrôlé, nous avons aussi montré que sous les hypothèses imposées, nous avions :

$$S^2 = \text{MSE} = \frac{\sum_{ij}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{N-k} \quad (5.7.2522)$$

Il vient alors que :

$$S_i = \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} \quad (5.7.2523)$$

est un estimateur de :

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.7.2524)$$

En cours de traduction de l'anglais

Et comme nous avions démontré que :

$$\frac{(N-k)\text{MSE}}{\sigma^2} = \chi^2_{N-k} \quad (5.7.2525)$$

Il vient alors que :

$$\frac{(N-k)\dfrac{\text{MSE}}{k}}{\dfrac{\sigma^2}{k}} = \chi^2_{N-k} \quad (5.7.2526)$$

Dès lors, nous sommes naturellement amenés à constater que la relation que nous avons définie plus haut :

$$\max(X_i) - \min(X_i) \leq Q_{k,v,1-\alpha} S_* \quad (5.7.2527)$$

peut-être utilisée dans l'étude de l'ANOVA à un facteur contrôlé sous la forme :

$$\max(\bar{x}_i) - \min(\bar{x}_i) \leq Q_{k,N-k,1-\alpha}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} \quad (5.7.2528)$$

pour faire un test préalable ou postérieur (post hoc) à une ANOVA à un facteur contrôlé pour vérifier l'hypothèse d'égalité des moyennes et identifier quelles sont les moyennes aberrantes (test de comparaisons multiples). Donc le test de Tukey est souvent accompagné du test C de Cochran que nous avons déjà étudié plus haut lorsque nous faisons une ANOVA à un facteur contrôlé.

En cours de traduction de l'anglais

Soit, dans le cadre de l'ANOVA, nous devrions rejeter l'hypothèse d'égalité des moyennes des échantillons si :

$$\boxed{\max(\bar{x}_i) - \min(\bar{x}_i) \geq Q_{k,N-k,1-\alpha}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}} \quad (5.7.2529)$$

ou autrement écrit :

$$\max(\bar{x}_i) - \min(\bar{x}_i) \geq R_{\mu,\text{crit}} \quad (5.7.2530)$$

Dans ce cas, il est alors quasi immédiat que nous pouvons construire l'intervalle de confiance suivant :

$$\boxed{(\bar{x}_i - \bar{x}_j) - R_{\mu,\text{crit}} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\bar{x}_i - \bar{x}_j) + R_{\mu,\text{crit}}} \quad (5.7.2531)$$

Il s'agit du "test de Tukey de l'étendue" ou simplement nommé "test de Tukey".

Il faut savoir maintenant qu'il existe un test post-hoc de l'ANOVA à un facteur qui lors de l'application de :

$$\max(\bar{x}_i) - \min(\bar{x}_i) \geq Q_{k,N-k,1-\alpha}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} \quad (5.7.2532)$$

ne va pas prendre les deux moyennes les plus extrêmes mais va comparer toutes les moyennes deux à deux (et pourquoi pas après tout !) avec la plus grande moyenne (bon on pourrait aussi

s'amuser à faire toutes les combinaisons possibles comme le font certains logiciels de statistiques). Dans ce cas la relation à utiliser sera la même que ci-dessus à la différence que si nous avons par exemple une ANOVA à un facteur avec 4 niveaux nous aurons alors 3 comparaisons deux à deux (les différences des moyennes doivent toujours être positives). Ainsi, en imaginant que la troisième moyenne est la plus grande et que dans l'ordre décroissant les moyennes les plus grandes sont la 4ème, 2ème et 1ère (donc la 1ère est la plus petite) il vient alors :

$$\bar{x}_3 - \bar{x}_1 \geq Q_{4,N-4,1-\alpha}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} \tag{5.7.2533}$$

$$\bar{x}_3 - \bar{x}_2 \geq Q_{3,N-4,1-\alpha}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} \tag{5.7.2534}$$

$$\bar{x}_3 - \bar{x}_4 \geq Q_{2,N-4,1-\alpha}\sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} \tag{5.7.2535}$$

Cette façon de faire (d'étendre le prinicipe de base du test de Tukey), s'appelle le "test de Newman-keuls" ou encore "test de Student–Newman–Keuls" (SNK).

En cours de traduction de l' anglais

5.7.14.3 Théorie des Valeurs Extrêmes

La "théorie des valeurs extrêmes" ou "analyse des valeurs extrêmes" (AVE) est une branche de la statistique traitant des écarts extrêmes par rapport à la médiane de distributions de probabilité. Elle cherche à évaluer, à partir d'un échantillon ordonné donné d'une variable aléatoire donnée, la probabilité d'événements plus extrêmes que tout autre observé précédemment. L'analyse des valeurs extrêmes est largement utilisée dans de nombreuses disciplines, telles que l'ingénierie structurelle, la finance, les sciences de la terre, la prévision du trafic et l'ingénierie géologique. Par exemple, l'AVE pourrait être utilisé dans le domaine de l'hydrologie pour estimer la probabilité d'un événement d'inondation inhabituellement important, comme l'inondation de 100 ans. De même, pour la conception d'un brise-lames, un ingénieur côtier chercherait à estimer la vague de 50 ans et à concevoir la structure en conséquence.

À finir en fonction des dons

En cours de traduction de l' anglais

5.7.15 Statistiques Multivariées

De toute évidence, les statistiques multivariées sont une subdivision des statistiques englobant l'observation et l'analyse simultanées de plus d'une variable aléatoire.

Avant de continuer, rappelez-vous que nous avons déjà démontré l'origine de deux distributions multivariées plus haut ! La distribution multivariée Normale (voir page 708) et la distribution multivariée canonique de T de Student (voir page 776). Nous avons également déjà introduit l'ANOVA multivariée (i.e. MANOVA) plus haut ci-dessus à la page 1067.

Remarque

Certains types de problèmes impliquant des données multivariées, par exemple la régression linéaire simple et la régression multiple que nous avons vu plus haut, ne sont généralement pas considérés comme des cas particuliers de statistiques multivariées car l'analyse est traitée en considérant la distribution conditionnelle (univariée) d'une seule variable résultat compte tenu des autres variables.

Il existe de nombreux modèles différents, chacun avec son propre type d'analyse que nous tenterons d'aborder dans ce livre comme toujours avec un maximum de détails et de manière le plus accessible possible (avec des exemples appliqués utilisant des logiciels de statistiques dans les livres compagnons bien sûr !) :

1. L'Analyse en Composantes Principales (ACP) qui crée un nouvel ensemble de variables orthogonales contenant les mêmes informations que l'ensemble d'origine. Il fait pivoter les axes de variation pour donner un nouvel ensemble d'axes orthogonaux, ordonnés de manière à résumer les proportions décroissantes de la variation.

2. L'Analyse Factorielle (AF) est similaire à l'ACP mais permet à l'utilisateur d'extraire un nombre spécifié de variables synthétiques, inférieur à l'ensemble d'origine, laissant la variation inexpliquée restante comme une erreur. Les variables extraites sont appelées variables ou facteurs latents ; chacun peut être supposé tenir compte de la covariation dans un groupe de variables observées.

3. L'Analyse Canonique de la Corrélation (ACC) qui trouve des relations linéaires entre deux ensembles de variables ; c'est la version généralisée (c'est-à-dire canonique) de la corrélation bivariée.

4. L'Analyse des Correspondances (AC), ou moyenne réciproque, qui trouve (comme l'ACP) un ensemble de variables synthétiques qui résument l'ensemble d'origine. Le modèle sous-jacent suppose des différences du chi-deux entre les observations.

5. L'Analyse de Correspondance Canonique (ou «contrainte») (ACC) pour résumer la variation conjointe dans deux ensembles de variables ; combinaison d'analyse de correspondance et d'analyse de régression multivariée. Le modèle sous-jacent suppose des différences du chi-deux entre les observations..

6. Le Positionnement Multidimensionnel comprend divers algorithmes pour déterminer un ensemble de variables synthétiques qui représentent le mieux les distances par paires

En cours de traduction de l'anglais

entre les enregistrements. La méthode originale est l'Analyse en Coordonnées Principales (ACoP basé sur l'ACP).

7. L'Analyse Discriminante (linéaire ou quadratique) (AD), ou l'Analyse Canonique des Variables (ACD), tente de déterminer si un ensemble de variables peut être utilisé pour distinguer deux ou plusieurs groupes d'observations.

8. Les Modèles d'Équations Simultanées impliquent plus d'une équation de régression, avec différentes variables dépendantes, estimées ensemble.

9. L'Analyse Multivariée de la Variance (MANOVA) qui étend l'analyse de la variance pour couvrir les cas où il y a plus d'une variable dépendante à analyser simultanément.

10. L'Analyse Multivariée de la Covariance (MANCOVA) qui est une extension des méthodes d'analyse de la covariance (ANCOVA) pour couvrir les cas où il y a plus d'une variable dépendante et où le contrôle des variables indépendantes continues concomitantes (covariables) est nécessaire.

11. Les Modèles Mixtes contenant à la fois des effets fixes et des effets aléatoires. Ces modèles sont utiles dans une grande variété de disciplines des sciences physiques, biologiques et sociales. Ils sont particulièrement utiles dans les contextes où des mesures répétées sont effectuées sur les mêmes unités statistiques (étude longitudinale).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.15.1 Analyse en Composantes Principales

L'analyse en composantes principales (A.C.P.) est une méthode mathématique d'analyse graphique de données qui consiste à rechercher des directions dans l'espace qui représentent le mieux les corrélations entre des variables aléatoires n (supposées avoir des relations linéaires entre elles). En d'autres termes, il s'agit d'un processus de réduction de dimension (comme pour le processus de décomposition en valeurs singulières - SVD - prouvé dans la section d'Algèbre Linéaire ou l'Analyse Discriminante Linéaire prouvée dans la section de Méthodes Numériques parmi tant d'autres techniques comme visibles sur la carte mentale de Data Science **??**) car il donne la possibilité à l'analyste de choisir quelles sont les variables d'un modèle qui expliquent le mieux la variabilité.

Simplement dit, une A.C.P. permet par exemple de trouver dans un jeu de données des similitudes de comportement d'achat entre des classes observées.

Même si l'A.C.P. est principalement utilisée pour visualiser des données, il ne faut pas oublier que c'est aussi un moyen de :

- De décorréler ces données. Dans la nouvelle base, constituée des nouveaux axes, les points ont une corrélation nulle (nous le démontrerons).

- De classifier ces données en amas (clusters) corrélés (dans l'industrie c'est surtout cette possibilité qui est intéressante !).

Remarques

R1. Il existe plusieurs versions de l'A.C.P. connues sous le nom de "transformée de Karhunen-Loève" ou de "transformée de Hotelling" et qui peuvent aussi bien être appliquées sans programmation V.B.A. dans Microsoft Excel que dans des logiciels spécialisés (où le temps de calcul sera par contre plus bref... et les résultats plus précis aussi...).

R2. Selon les auteurs et le point de vue l'A.C.P appartient au domaine des statistiques nommé "Statistiques Exploratoires".

Lorsque nous ne considérons que deux effets, il est usuel de caractériser leur effet conjoint via le coefficient de corrélation. Lorsque l'on se place en dimension deux, les points disponibles (l'échantillon de points tirés suivant la loi conjointe) peuvent être représentés dans un plan. Le résultat d'une A.C.P. dans ce plan consiste en la détermination des deux axes qui expliquent le mieux la dispersion des points disponibles.

Lorsqu'il y a plus de deux effets, par exemple trois effets, il y a trois coefficients de corrélations à prendre en compte. La question qui a donné naissance à l'A.C.P. est : comment avoir une intuition rapide des effets conjoints ?

En dimension plus grande que deux, une A.C.P. va toujours déterminer les axes qui expliquent le mieux la dispersion du nuage des points disponibles.

L'objectif de l'A.C.P. est de décrire graphiquement un tableau de données d'individus avec leurs variables quantitatives de grande taille :

Individus/Variables	**var**$_1, \ldots,$ **var**$_j, \ldots,$ **var**$_n$
ind$_1$ $\vdots$ ind$_i$ $\vdots$ ind$_n$	x_{ij}

TAB. 5.88 – **Représentation-type d'un tableau A.C.P.**

Afin de ne pas alourdir l'exposé de cette méthode et de permettre au lecteur de refaire complètement les calculs, nous travaillerons sur un exemple.

Considérons pour l'exemple une étude d'un botaniste qui a mesuré les dimensions de 15 fleurs d'iris (l'A.C.P. est aussi très utilisée en finance pour déterminer les éléments qui influencent le plus la volatilité d'un portefeuille). Les trois variables ($p = 3$) mesurées sont :

- x_1 : longueur du sépale
- x_2 : largeur du sépale
- x_3 : longueur du pétale

En cours de traduction de l'anglais

Les données sont les suivantes :

Fleur n°	x_1	x_2	x_3
1	5.1	3.5	1.4
2	4.9	3.0	1.4
3	4.7	3.2	1.3
4	4.6	3.1	1.5
5	5.0	3.6	1.4
6	7.0	3.2	4.7
7	6.4	3.2	4.5
8	6.9	3.1	4.9
9	5.5	2.3	4.0
10	6.5	2.8	4.6
11	6.3	3.3	6.0
12	5.8	2.7	5.1
13	7.1	3.0	5.9
14	6.3	2.9	5.6
15	6.5	3.0	5.8

TAB. 5.89 – Exemple pratique de données tabulaires A.C.P.

Pour nous un tel tableau de données sera tout simplement une matrice réelle à n lignes (les individus) et à p colonnes (les variables) :

$$X = (x_{ij})_{\substack{i=1\ldots n\\ \text{æ}=1\ldots p}} \tag{5.7.2536}$$

Par la suite l'indice i correspondra à l'indice ligne et donc aux individus. Nous identifierons donc l'individu i avec le point ligne $x_{i.} = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})$ qui sera considéré comme un point dans un espace affine (voir section Calcul Vectoriel page 1793) de dimension p. L'indice j correspondra à l'indice colonne donc aux variables. Nous identifierons la variable j avec le vecteur-colonne :

$$\vec{x}_{.j} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \tag{5.7.2537}$$

c'est donc un vecteur dans l'espace vectoriel de dimension n dans $\mathbb{R}^n$.

Nous nous placerons dans la suite suivant deux points de vue : soit nous prendrons le tableau de données comme n points dans un espace affine de dimension p, soit nous prendrons ce tableau comme p points d'un espace vectoriel de dimension n. Nous verrons qu'il y a des dualités entre ces deux points de vue.

L'outil mathématique que nous allons utiliser ici est l'algèbre linéaire (voir section Algèbre Linéaire page 1898), avec les notions de produit scalaire, de norme euclidienne et de distance euclidienne.

Afin de simplifier la présentation, nous allons dans un premier temps considérer que chaque individu, comme chaque variable, a la même importance, le même poids. Nous ne considérerons aussi que le cas de la distance euclidienne.

En cours de traduction de l' anglais

Nous allons commencer en centrant les données, c'est-à-dire mettre l'origine du système d'axes au centre de gravité du nuage de points. Ceci ne modifie pas l'aspect du nuage, mais permet d'avoir les coordonnées du point M égales aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GM}$ et donc de se placer dans l'espace vectoriel pour pouvoir y faire les calculs ! Comme nous supposons dans toute la suite que les poids des individus sont identiques, nous prendrons donc $m_i = 1/n$ avec $i = 1 \ldots n$.

Nous considérons le repère orthonormé $(\text{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ de $\mathbb{R}^p$. Soit donc G le centre de gravité du nuage de points. Comme chaque variable ou chaque individu est supposé avoir le même poids, G a alors pour coordonnées dans le repère $(\text{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$:

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{.1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{.j} \\ \vdots \\ \bar{x}_{.p} \end{pmatrix} \quad (5.7.2538)$$

avec :

$$\bar{x}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad (5.7.2539)$$

Nous avons alors pour l'instant sous forme graphique :

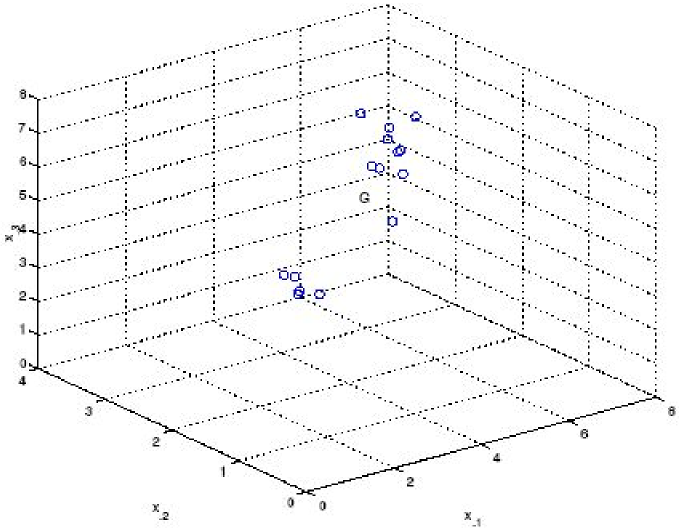


FIG. 5.225 – **Points de mesures et centre de gravité**

Nous appelons "matrice centrée" la matrice :

$$X_c = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_{.1} & \cdots & x_{1j} - \bar{x}_{.j} & \cdots & x_{1p} - \bar{x}_{.p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} - \bar{x}_{.1} & \cdots & x_{ij} - \bar{x}_{.j} & \cdots & x_{ip} - \bar{x}_{.p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} - \bar{x}_{.1} & \cdots & x_{nj} - \bar{x}_{.j} & \cdots & x_{np} - \bar{x}_{.p} \end{bmatrix} \quad (5.7.2540)$$

En cours ... ction de l' anglais

Remarque

La matrice des données centrées contient les coordonnées centrées (que nous noterons xc_{ij}) des individus dans le repère $(G, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$. Nous nous placerons dans la suite toujours dans ce repère pour le nuage de points des individus et nous prendrons $\text{O} = G$.

Pour notre exemple, nous avons :

$$G = \vec{x} = (5.91, 3.06, 3.87) \tag{5.7.2541}$$

et pour la matrice centrée :

$$X_c = \begin{bmatrix} -0.8067 & 0.440 & -2.4733 \\ -1.0067 & -0.0600 & -2.4733 \\ -1.2067 & 0.1400 & -2.5733 \\ -1.3067 & 0.0400 & -2.3733 \\ -0.9067 & 0.1400 & -2.4733 \\ 1.0933 & 0.5400 & 0.8267 \\ 0.4933 & 0.1400 & 0.6257 \\ 0.933 & 0.0400 & 1.0267 \\ -0.4067 & -0.7600 & 0.1267 \\ 0.5933 & -0.2600 & 0.7267 \\ 0.3933 & 0.2400 & 2.1267 \\ -0.1067 & -0.3600 & 1.2267 \\ 1.1933 & -0.0600 & 2.0267 \\ 0.3933 & -0.1600 & 1.7267 \\ 0.5933 & -0.0600 & 1.9267 \end{bmatrix} \tag{5.7.2542}$$

En cours de traduction de l'anglais

et sous forme graphique :

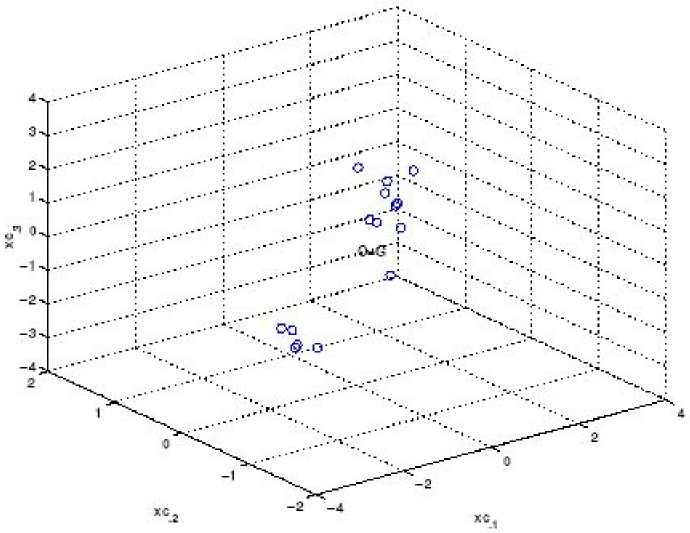


FIG. 5.226 – **Points de mesures centrés**

Pour donner une importance identique à chaque variable afin que le type d'unités des mesures n'influence pas l'analyse (et aussi comme nous l'avons prouvé page 612 que la matrice de

corrélation est égale à la matrice de variance-covariance !), nous travaillerons avec les données centrées réduites (voir section Statistiques page 585). Pour cela, nous noterons d'abord :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2 = \frac{1}{n}\|\vec{c}_{.j}\|^2 \qquad (5.7.2543)$$

où le lecteur aura remarqué que nous avons pris la variance biaisée. Mais dans la réalité on prendraévidemment l'estimateur de la variance et donc on divisera par $n-1$ plutôt que par n.

La variance d'échantillon de la variable centrée est donc égale à un facteur $1/n$ près à la norme de cette même variable mais centrée. La matrice des données centrées réduites (sans dimensions) est alors :

$$Y = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{11}-\bar{x}_{.1}}{\sigma_1} & \cdots & \dfrac{x_{1j}-\bar{x}_{.j}}{\sigma_j} & \cdots & \dfrac{x_{1p}-\bar{x}_{.p}}{\sigma_p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{x_{i1}-\bar{x}_{.1}}{\sigma_1} & \cdots & \dfrac{x_{ij}-\bar{x}_{.j}}{\sigma_j} & \cdots & \dfrac{x_{ip}-\bar{x}_{.p}}{\sigma_p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{x_{n1}-\bar{x}_{.1}}{\sigma_1} & \cdots & \dfrac{x_{nj}-\bar{x}_{.j}}{\sigma_j} & \cdots & \dfrac{x_{np}-\bar{x}_{.p}}{\sigma_p} \end{bmatrix} \qquad (5.7.2544)$$

Si nous notons $D_{1/\sigma}$ la matrice diagonale suivante :

$$D_{1/\sigma} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\sigma_p \end{bmatrix} \qquad (5.7.2545)$$

Nous avons alors :

$$Y = X_c D_{1/\sigma} \qquad (5.7.2546)$$

Remarque

Chaque composante de la matrice Y est donc de moyenne nulle et de variance unitaire (ce qui revient à dire que la norme de la variable centrée réduite est unitaire comme nous allons de suite le démontrer).

Nous définissons la "matrice des données centrées normées" par (nous parlons alors de "A.C.P. normée" ce qui n'est pas obligatoire mais simplifie l'interprétation) :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{n}}Y \qquad (5.7.2547)$$

Soit encore (il s'agit simplement de l'erreur quadratique moyenne que nous avions introduite plus haut dans cette section) :

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}-\bar{x}_{.j}}{\sqrt{n}\sigma_j} \qquad (5.7.2548)$$

En cours de traduction de l'anglais

La terminologie vient bien évidemment du fait que la somme des carrées des composantes de chaque colonne de la matrice Z est de norme unitaire. En effet :

$$\|\vec{z}_{.j}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{ij}-\bar{x}_{.j}}{\sqrt{n}\sigma_j}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_j^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2 = 1 \quad (5.7.2549)$$

Ce qui donne :

$$Z = \begin{bmatrix} -0.2383 & 0.3572 & -0.3375 \\ -0.2974 & -0.0487 & -0.3375 \\ -0.3565 & 0.1136 & -0.3512 \\ -0.3861 & 0.0324 & -0.3239 \\ -0.2679 & 0.4384 & -0.3375 \\ 0.3230 & 0.1136 & 0.1128 \\ 0.1457 & 0.1136 & 0.0855 \\ 0.2935 & 0.0324 & 0.1401 \\ -0.1201 & -0.6170 & 0.0172 \\ 0.1753 & -0.2110 & 0.0991 \\ 0.1162 & 0.1948 & 0.2902 \\ -0.0315 & -0.2922 & 0.1674 \\ 0.3526 & -0.0487 & 0.2765 \\ 0.1161 & -0.1298 & 0.2356 \\ 0.1753 & -0.0487 & 0.2629 \end{bmatrix} \quad (5.7.2550)$$

Nous avons graphiquement :

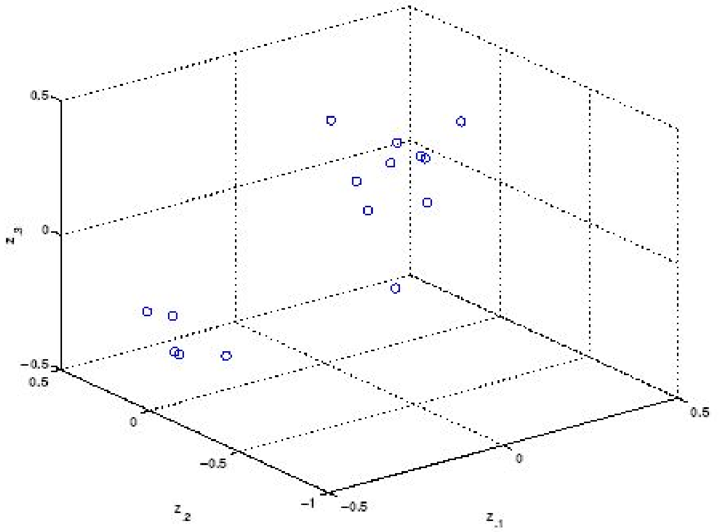


FIG. 5.227 – Points de mesures centrés et réduits

Représenter le nuage de points des données centrées réduites ou centrées normées ne modifie rien à la forme de celui-ci. En effet, la différence entre les deux n'est qu'un changement d'échelle.

L'information intéressante pour les individus est la distance entre les points ! En effet plus cette distance sera grande entre deux individus equation et equation plus les deux individus seront

En cours de traduction de l'anglais

différents et mieux on pourra les caractériser. Mais il faut d'abord choisir une distance. Nous prendrons la distance euclidienne (voir section Topologie page 2427) :

$$d^2(z_{i.}, z_{i'.}) = ||\overrightarrow{z_{i.}z_{i'.}}||^2 = \sum_{j=1}^{p}(z_{ij} - z_{i'j})^2 \quad (5.7.2551)$$

Les figures suivantes montrent les projections orthogonales dans l'espace de ce nuage de points respectivement dans les plans $(\mathrm{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(\mathrm{O}, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et enfin dans $(\mathrm{O}, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$ qui est la meilleure projection, appelée "plan factoriel" (ou parfois "diagramme des scores"), dans le sens où elle respecte le mieux les distances entre les individus (in extenso, elle déforme moins le nuage de points dans l'espace). L'objectif de l'A.C.P. est de déterminer ce meilleur plan et nous démontrerons comment.

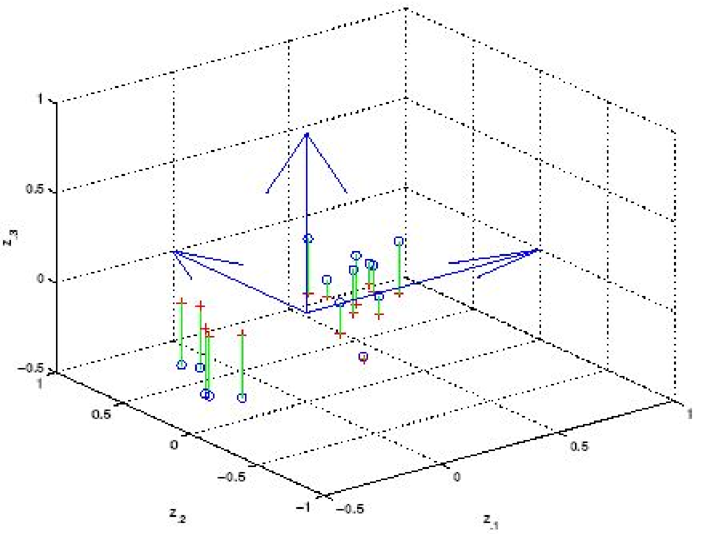


FIG. 5.228 – **Projection des points sur le plan horizontal du repère centré**

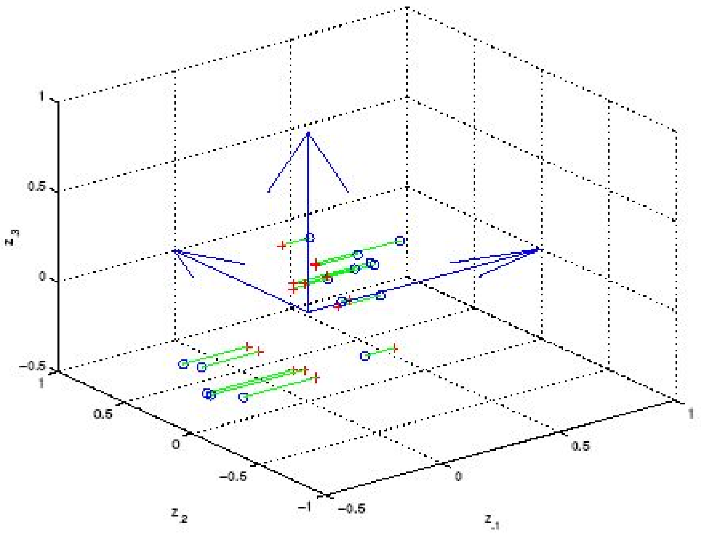


FIG. 5.229 – **Projection des points sur le plan vertical du repère centré**

En cours de ... anglais

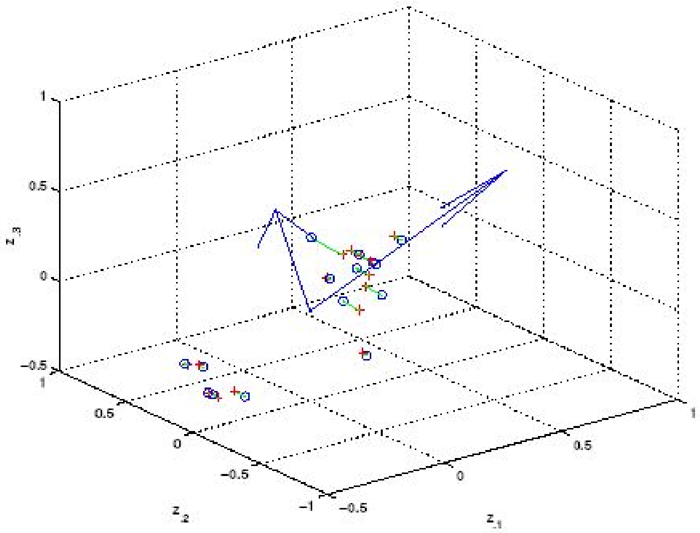
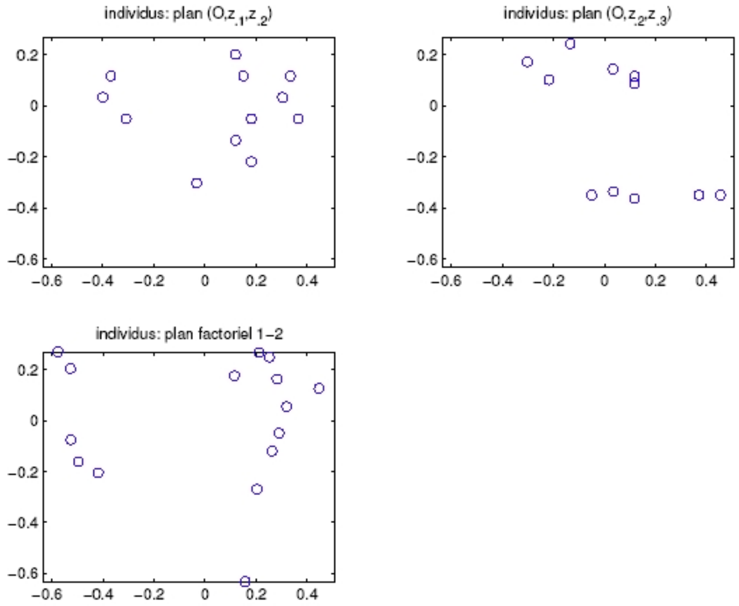


FIG. 5.230 – **Projection des points sur le plan factoriel**

Et la vue plane de chacune des projections :

l' anglais



En cour

FIG. 5.231 – **Vue plane de chacune des projections**

Avant de déterminer le plan factoriel, nous allons maintenant chercher à détecter les liens possibles entre les variables.

Nous rappelons (voir section Statistiques page 587) que la covariance entre deux variables $x_{.j}$ et $x_{.j'}$ est donnée par :

$$\text{cov}(x_j, x_{.j'}) = \text{E}\left[(x_{.j} - \bar{x}_{.j})(x_{.j'} - \bar{x}_{.j'})\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})(x_{ij'} - .\bar{j}') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}c_{ij'} \quad (5.7.2552)$$

et que le coefficient de corrélation linéaire (voir section Statistiques page 605) est :

$$R(x_{.j}, x_{.j'}) = \frac{\text{cov}(x_{.j}, x_{.j'})}{\sigma_j \sigma_{j'}} \quad (5.7.2553)$$

Nous noterons par la suite :

$$c_{j,j'} = \text{cov}(x_{.j}, x_{.j'}) \qquad \text{et} \qquad r_{j,j'} = R(x_{.j}, x_{.j'}) \tag{5.7.2554}$$

les matrices des variances-covariances et de corrélations carrées (toutes deux étant pour rappel des matrices carrées et symétriques) avec $j = 1 \ldots p, j' = 1 \ldots p$.

Nous voyons relativement facilement que la matrice des variances-covariances est au coefficient $1/n$ près, la matrice des produits scalaires canoniques des vecteurs de la matrice des données centrées X_c (en d'autres termes, chaque composante de la matrice des variances-covariances est égale au produit scalaire des variables centrées). Nous en déduisons la relation suivante :

$$c_{j,j'} = \frac{1}{n} X_c^T X_c \tag{5.7.2555}$$

Remarque

Pour une matrice A donnée, l'expression $A^T A$ joue un rôle important dans les statistiques. Par exemple, c'est une expression importante de la solution analytique de la méthode des moindres carrés ordinaires. Ou, pour l'A.C.P., ses vecteurs propres sont les composantes principales des données. Géométriquement, la matrice $A^T A$ est nommée "matrice des produits scalaires" (car elle contient tous les produits scalaires de toutes les colonnes dans A). Algébriquement, elle s'appelle "matrice de la somme des carrés et des produits croisés" (MSCPC). En divisant la matrice MSCPC par n, la taille de l'échantillon ou le nombre de lignes de A, nous obtenons ce que l'on appelle communément la matrice MCPC (moyenne-carré-et-produit-croisé). Si nous centrons les colonnes de A, $A^T A/(n-1)$ est la matrice de covariance. Si nous Z-standardisons les colonnes de A, $A^T A/(n-1)$ est alors la matrice de corrélation de Pearson.

En cours de fra... is

La matrice des variances-covariances (puisque comme nous l'avons vu dans le chapitre de Statistiques, la diagonale contient les variances... pour rappel !) est un outil connu d'interprétation sur ce site. Par contre, ce qui est nouveau et va nous être très utile pour déterminer le plan factoriel est la matrice des corrélations linéaires qui peut aussi être écrite sous la forme suivante :

$$R = r_{j,j'} = \frac{1}{m} Y^T Y = Z^T Z \tag{5.7.2556}$$

Ce qui donne pour notre exemple où nous avons trois variables (très facile à calculer avec un tableur comme Microsoft Excel), la matrice carrée suivante (que les données soient centrées ou non les composantes de la matrice sont identiques) :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0.1609 & 0.8854 \\ -0.1609 & 1 & -0.3818 \\ 0.8854 & -0.3818 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.7.2557}$$

Pour continuer, toujours dans le but de déterminer le plan factoriel, définissons le concept d'inertie d'un nuage de points.

Définition (#5.7.155) : Nous appelons "inertie d'un nuage de points" la quantité :

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d^2(G, M_i) \tag{5.7.2558}$$

où G est le centre de gravité du nuage de points et M_i un point de $\mathbb{R}^p$ de coordonnées x_i^T.

Remarque

Le carré de la distance est pris par anticipation des développements qui vont suivre.

Ensuite, démontrons que nous avons la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} d^2(M_i, {M'}_i) = 2nI \qquad (5.7.2559)$$

Démonstration 5.46.8.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} d^2(M_i, {M'}_i) &= \sum_{i,i'} \|\overrightarrow{M_iM_{i'}}\|^2 = \sum_{i,i'} \|\overrightarrow{M_iG} + \overrightarrow{GM_{i'}}\|^2 \\
&= \sum_{i,i'} \left(\sum_i \|\overrightarrow{M_iG}\|^2 + \|\overrightarrow{GM_{i'}}\|^2 + 2\overrightarrow{M_iG}\cdot\overrightarrow{GM_{i'}} \right) \\
&= \sum_{i'} \left(\sum_i d^2(M_i, G) \right) + \sum_i \left(\sum_{i'} d^2(G, M_{i'}) \right) + 2\sum_i \left(\overrightarrow{M_iG}\cdot\vec{0} \right) \qquad (5.7.2560) \\
&= \sum_{i'} nI + \sum_i nI + 1 + 0 \\
&= 2nI
\end{aligned}$$

■ Q.E.D.

Nous allons dans toute la suite travailler avec les données centrées normées, in extenso avec la matrice Z. Les points M_i auront donc ici comme coordonnées z_i^T.

Le problème est maintenant de trouver le meilleur espace affine de dimension p dans le sens où il respecte au mieux les distances entre les points. Pour cela, nous allons rechercher la meilleure droite vectorielle $\Delta_{\vec{u}}$ qui est parfaitement déterminée par le vecteur $\vec{u}$. Appelons H_i la projection orthogonale de M_i sur la droite Δ_u. Alors notre problème est de trouver la droite (in extenso le vecteur $\vec{u}$) qui fasse que la somme des carrés des distances entre les points H_i soit maximale. Nous écrirons le problème sous la forme d'un problème de programmation quadratique (voir section Méthodes Numériques page ??) :

$$\begin{aligned}
\underset{\vec{u}}{\text{maximiser}} \quad & \sum_{i,i'} d^2(H_i, {H'}_i) \\
\text{sujet à} \quad & \vec{u} \in \mathbb{R}^p \\
& \|\vec{u}\| = 1
\end{aligned} \qquad (5.7.2561)$$

Or ici, nous avons :

$$\sum_{i,i'} d^2(H_i, {H'}_i) = 2nI \qquad (5.7.2562)$$

En effet, le centre de gravité du nuage de points projetés est aussi l'origine. Par suite, notre problème peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\underset{\vec{u}}{\text{maximiser}} \quad & I \\
\text{sujet à} \quad & \vec{u} \in \mathbb{R}^p \\
& \|\vec{u}\| = 1
\end{aligned} \qquad (5.7.2563)$$

En cours de traduction de l'anglais

Lui-même équivalant donc à :

$$\begin{aligned} \underset{\vec{u}}{\text{maximiser}} \quad & \sum_{i,i'} d^2(\text{O}, H_i,) \\ \text{sujet à} \quad & \vec{u} \in \mathbb{R}^p \\ & \|\vec{u}\| = 1 \end{aligned} \tag{5.7.2564}$$

Résolvons donc ce problème :

Tout d'abord, puisque H_i est la projection orthogonale du point M_i sur $\Delta_{\vec{u}}$ nous avons $\overrightarrow{\text{O}H}_i = \alpha_i \vec{u}$ pour tout i avec $\alpha_i = \overrightarrow{\text{O}M}_i \circ \vec{u}$. Par suite les coordonnées des points H_i sur la droite $\Delta_{\vec{u}}$ sont :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = Z\vec{u} \tag{5.7.2565}$$

Par suite, nous avons :

$$\sum_i d^2(\text{O}, H_i) = \sum_i \alpha_i^2 = ||Z\vec{u}||^2 = Z\vec{u} \circ Z\vec{u} \tag{5.7.2566}$$

Ici nous cherchons le vecteur unitaire $\vec{u}$. La matrice Z nous est parfaitement connue. Or, nous avons :

$$(Z\vec{u}) \circ (Z\vec{u}) = (Z^T Z\vec{u}) \circ \vec{u} = (R\vec{u}) \circ \vec{u} \tag{5.7.2567}$$

La matrice de corrélation R est symétrique donc, selon le théorème spectral vu dans la section d'Algèbre Linéaire 1976, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Ainsi, nous avions démontré dans le théorème spectral que :

$$\Lambda = S^{-1} R S \tag{5.7.2568}$$

est diagonale (libre à nous d'en choisir le contenu) si R est symétrique et S orthogonale (qui est donc dans notre exemple une matrice carrée 3×3 !). Alors nous en déduisons la relation suivante qu'il est d'usage d'appeler la "décomposition spectrale" de R :

$$R = S^{-1} \Lambda S \tag{5.7.2569}$$

et comme S avait été démontrée comme étant orthogonale (et qu'il existe une famille de vecteurs propres pour cela !), nous avons voir section Algèbre Linéaire page 1927) :

$$S^{-1} = S^T \tag{5.7.2570}$$

Donc :

$$R = S \Lambda S^T \tag{5.7.2571}$$

où nous choisissons pour Λ la matrice diagonale des valeurs propres rangées en ordre décroissant : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$.

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons donc :

$$(R\vec{u})\circ\vec{u}=(S\Lambda S^T\vec{u})\circ\vec{u}=(\Lambda S^T\vec{u})\circ S^T\vec{u})=(\Lambda\vec{w})\circ\vec{w}=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j w_j^2 \quad (5.7.2572)$$

Dans la littérature, cette somme est souvent notée de la manière suivante (très souvent mentionée dans les logiciels statistiques sous le nom de "décomposition spectrale") :

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j w_j^2=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}w_1 & \sqrt{\lambda_2}w_2 & \ldots & \sqrt{\lambda_p}w_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}w_1\\ \sqrt{\lambda_2}w_2\\ \vdots\\ \sqrt{\lambda_p}w_p\end{pmatrix} \quad (5.7.2573)$$

Mais S étant orthogonale, nous avons par conséquent :

$$\left\{\vec{w}=S^T\vec{u}|\vec{u}\in\mathbb{R}^p \quad \|\vec{u}\|=1\right\}\Rightarrow\{\vec{w}\in\mathbb{R}^p \quad \|\vec{w}\|=1\} \quad (5.7.2574)$$

et ceci provient du fait que la matrice orthogonale est comme nous l'avions démontré dans la section d'Algèbre Linéaire une isométrie (elle conserve donc la norme !).

Comme les valeurs propres sont dans l'ordre décroissant, nous écrirons :

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j w_j^2=\lambda_1\left(w_1^2+\sum_{j=2}^{p}\frac{\lambda_j}{\lambda_1}w_j^2\right) \quad (5.7.2575)$$

Or le terme entre parenthèses est strictement inférieur ou égal à 1 de par l'implication précédente. Donc :

$$\lambda_1\left(w_1^2+\sum_{j=2}^{p}\frac{\lambda_j}{\lambda_1}w_j^2\right)\leq\lambda_1 \quad (5.7.2576)$$

Soit :

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j w_j^2\leq\lambda_1 \quad (5.7.2577)$$

Or rappelons que notre objectif est de maximiser cette inégalité. En d'autres termes de chercher w_1 tel que l'égalité soit respectée. Nous voyons assez vite qu'il en sera ainsi si $w_1=1$ et que les autres termes soient nuls. Ainsi, une solution triviale de notre problème de maximisation est donc :

$$\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \quad (5.7.2578)$$

soit puisque :

$$\vec{w}=S^T\vec{u}=S^{-1}\vec{u}\Rightarrow=S\vec{w} \quad (5.7.2579)$$

En cours de traduction de l'anglais

qui est alors le premier vecteur propre de R (puisque R se diagonalise dans cette base) associé à la plus grande valeur propre λ_1. D'où le fait que cette solution soit souvent notée sous la forme :

$$\vec{u}_1 = S\vec{w}_1 \tag{5.7.2580}$$

toujours avec $\Lambda = S^{-1}RS$ (il est donc relativement aisé de déterminer S avec des logiciels lorsque R et Λ sont connus).

Une fois que nous avons trouvé la première droite vectorielle, nous cherchons une deuxième droite dans le sous-espace vectoriel orthogonal à la droite vectorielle qui maximise l'inertie du nuage de points projetés. Nous démontrons, et devinons, que la solution est donnée par la droite vectorielle dirigée par le vecteur propre associé à la deuxième valeur propre de la matrice de corrélation et ainsi de suite...

Ainsi, nous obtenons une nouvelle base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ dont un des plans constitue le plan factoriel. Cependant, il nous faut connaître les composantes de Z dans cette base. Comme cette base a été construite sous la condition que R y est diagonalisable via la matrice S alors cette dernière matrice est l'application linéaire qui va nous permettre d'exprimer Z dans la base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ via la relation :

$$\Psi = ZS \tag{5.7.2581}$$

Ainsi, dans notre exemple les trois valeurs propres de la matrice de corrélation R sont (voir section Algèbre Linéaire page 1969) :

$$\lambda_1 = 2.0303 \qquad \lambda_2 = 0.8846 \qquad \lambda_3 = 0.0853 \tag{5.7.2582}$$

et donc :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2.0303 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8846 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0853 \end{pmatrix} \tag{5.7.2583}$$

Remarque

Certains logiciels indiquent les poids en % respectifs et cumulés pour chacune des valeurs propres. Ainsi, nous avons dans le cas présent les poids respectifs suivants en % du total :

$$P_{\lambda_1} = \frac{2.0303}{\sum\limits_i \lambda_i} = 66.67\% \quad P_{\lambda_2} = \frac{0.8846}{\sum\limits_i \lambda_i} = 29.48\% \quad P_{\lambda_3} = \frac{0.0853}{\sum\limits_i \lambda_i} = 2.84\% \tag{5.7.2584}$$

Donc la première composante explique 66.67% de l'effet. Les deux premières composantes en expliquent 96.15%, etc. C'est ainsi par exemple en finance que l'on va prendre parmi une dizaine ou plus de composantes, seulement celles qui mènent à "expliquer" le 95%.

En ayant les trois valeurs propres, pour déterminer les trois vecteurs propres $(\vec{u}, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ qui forment la base principale, il nous faut donc résoudre le système de trois équations à trois inconnues (voir section Algèbre Linéaire page 1902) suivant pour chaque valeur propre :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1-\lambda_i & -0.1609 & 0.8854 \\ -0.1609 & 1-\lambda_i & -0.3818 \\ 0.8854 & -0.3818 & 1-\lambda_i \end{bmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \\ u_{3,i} \end{pmatrix}}_{\vec{u}_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.7.2585}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce qui donne donc (nous nous passerons de ce calcul élémentaire qui peut être fait à la main ou avec un simple tableur) la matrice des vecteurs propres :

$$S=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)=\begin{bmatrix} 0.6410 & 0.3803 & -0.6666 \\ -0.3527 & 0.9174 & 0.1841 \\ 0.6816 & 0.1171 & 0.7222 \end{bmatrix} \tag{5.7.2586}$$

qui vérifie donc :

$$R=S\Lambda S^T \tag{5.7.2587}$$

ou autrement écrit (suite à la remarque d'un lecteur qui a voulu vérifier les calculs et qui s'est fait piéger) :

$$R=S(\Lambda S^T) \tag{5.7.2588}$$

Nous avons alors comme coordonnées des points M_i dans la base $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ en utilisant :

$$\Psi=ZS \tag{5.7.2589}$$

la matrice suivante :

$$\Psi=\begin{bmatrix} -0.5268 & 0.2045 & -0.0198 \\ -0.4178 & -0.2043 & -0.564 \\ -0.5259 & -0.0750 & 0.0052 \\ -0.4966 & -0.1604 & 0.0305 \\ -0.5760 & 0.2699 & 0.0161 \\ 0.2525 & 0.2488 & -0.1169 \\ 0.1156 & 0.1757 & -0.0150 \\ 0.2818 & 0.1634 & -0.0916 \\ 0.1578 & -0.6311 & -0.0218 \\ 0.2634 & -0.1194 & -0.0871 \\ 0.2108 & 0.2660 & 0.1739 \\ 0.2039 & -0.2697 & 0.0912 \\ 0.4469 & 0.1261 & -0.459 \\ 0.2908 & -0.0490 & 0.0712 \\ 0.3196 & 0.0546 & 0.0663 \end{bmatrix} \tag{5.7.2590}$$

En cours de traduction de l'anglais

Les coordonnées des projections du nuage de points dans le meilleur plan défini par les vecteurs $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ sont donc les deux premières colonnes de la matrice précédente (correspondant donc à la longueur du sépale et la largeur du sépale).

Effectivement, nous voyons immédiatement que ce sont ces deux colonnes qui maximiseront la somme des normes dans le plan donné :

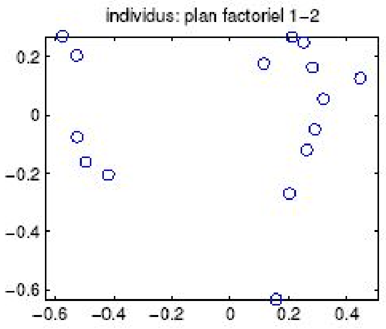
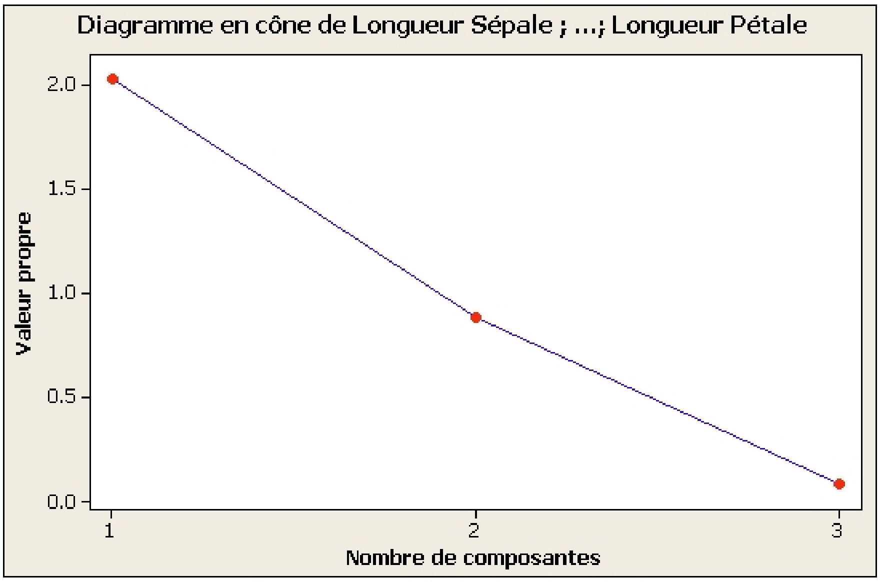


FIG. 5.232 – **Plan factoriel déjà montré plus haut...**

Un logiciel comme Minitab 15.1 (référence dans l'industrie de la gestion de la qualité) donne les informations suivantes pour les valeurs propres (info pas très utile sous forme graphique... à mon avis) :



Valeur propre	2.0302	0.8846	0.0853
Proportion	0.677	0.295	0.028
Cumulatif	0.677	0.972	1.000

FIG. 5.233 – **Valeurs propres pour l'ACP données par Minitab 15.1 ("scree plot")**

et le plan factoriel suivant (resterait à savoir comment les valeurs sont calculées car elles ne sont pas identiques à celles que nous avons obtenues ici... mais la forme graphique est bien juste et c'est le principal !) :

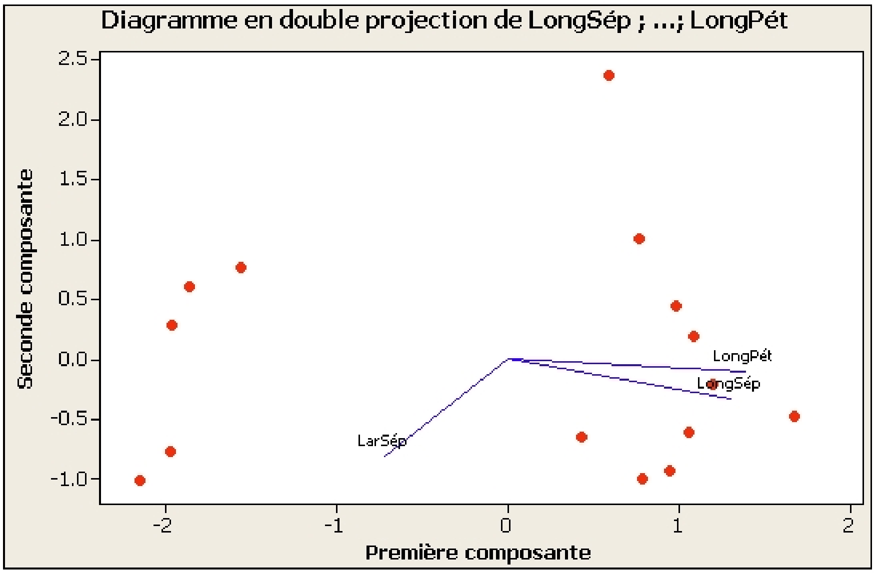


FIG. 5.234 – **Plan factoriel donné par Minitab 15.1**

En cours de traduction de l'anglais

Si le lecteur a suivi attentivement toutes les étapes que nous avons faites jusqu'à présent, il a peut-être remarqué que nous avons fait :

1. Centrage des données à zéro (normalisation par la moyenne)

2. Réduction des données

3. Décorrélation des données en :

   (a) Calculant la matrice des covariances

   (b) Calculant les vecteurs propres de la matrice des covariances

   (c) Appliquant la matrice des vecteurs propres aux données (cela appliquera la rotation)

De plus, certains logiciels et praticiens mettent à l'échelle la matrice non corrélée afin d'obtenir une matrice de covariance correspondant à la matrice identité (des 1 sur la diagonale et des 0 sur les autres cellules). Pour ce faire, nous mettons à l'échelle les données décorrélées en divisant chaque dimension par la racine carrée de sa valeur propre correspondante.

Toutes les 7 étapes énumérées ci-dessus sont nommées parfois "blanchiment de l'ACP" ou simplement "blanchiment" (parfois aussi "sphérisation des données"). Donc "blanchir" les données signifie que nous voulons les transformer de manière à avoir une matrice des covariances qui est la matrice identité (1 dans la diagonale et 0 pour les autres cellules) et cette procédure est nommé "blanchiment" en référence au "bruit blanc".

Pour clore ce sujet, signalons que de nombreux logiciels utilisent le fait que les vecteurs $z_{.j}$ sont unitaires pour faire le produit scalaire qui correspond alors dans ce cas particulier simplement au cosinus entre les différents vecteurs tel que :

$$z_{.j} \circ z_{.i} = ||z_{.j}|| \cdot ||z_{.i}|| \cos(\widehat{z_{.j} z_{.i}}) = \cos(\widehat{z_{.j} z_{.i}}) \quad (5.7.2591)$$

et comme nous avons démontré plus haut que :

$$R = r_{j,j'} = \frac{1}{n} Y^T Y = Z^T Z \quad (5.7.2592)$$

Il vient alors :

$$R = r_{j,j'} = \cos(\widehat{z_{.j} z_{.i}}) \quad (5.7.2593)$$

et comme dans notre exemple, nous avons 3 vecteurs $z_{.j}$, il y a donc 3 produits scalaires possibles si nous omettons les produits scalaires des vecteurs avec eux-mêmes. Donc la matrice :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0.1609 & 0.8854 \\ -0.1609 & 1 & -0.3818 \\ 0.8854 & -0.3818 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.2594)$$

contient aussi les angles entre les vecteurs $z_{.j}$.

Enfin, signalons que l'A.C.P. étant sensible aux données aberrantes, il vaut mieux parfois transformer les valeurs du tableau d'origine en leurs rangs respectifs (voir notre étude des statistiques de rangs plus haut !) et appliquer exactement le même algorithme. Nous parlons alors d'une A.C.P. de rangs".

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Un logiciel convivial comme XL-Stats propose automatiquement dans le menu ACP cinq "types différents" d'Analyse en Composantes Principales qui sont respectivement : Pearson (n), Pearson $(n-1)$, Spearman, Kendall, Covariance. Évidemment, la même chose peut être faite avec d'autres logiciels de statistiques, mais en réalité, ce n'est pas des choix visuellement simples disponibles (nous devons écrire un peu de code).

Il existe également un groupe de méthodes ACP robustes qui ont été développées et qui sont mieux adaptées pour traiter des données de grande dimension dans une situation où la taille de l'échantillon est inférieure à la dimension. Ces méthodes sont : ACP robuste par projection-poursuite (PP-ACP), ACP sphérique (ACPS), ACP robuste (ACPRBO), ACP clairsemée robuste (ACPROC).

Nous pouvons également calculer la variance de l'ACP en utilisant des techniques de bootstrapping (voir section Méthodes Numériques page ??) comme pour toute analyse statistique !

En cours de traduction de l'anglais

5.7.15.1.1 DVS et ACP

Nous allons maintenant prouver un théorème important qui n'est pas tout à fait évident.

Théorème 5.47. L'ACP ci-dessus (utilisant le théorème spectral, c'est-à-dire la décomposition en valeurs propres) est un cas particulier de la DVS - décomposition en valeurs singulières (cette dernière est donc moins restrictive) ! ! !

Démonstration 5.47.1. Nous avons prouvé juste plus haut que :

$$R = Z^T Z \tag{5.7.2595}$$

En utilisant les propriétés des matrices transposées (voir section Algèbre Linéaire page 1924) :

$$R = ZZ^T \tag{5.7.2596}$$

Et que :

$$R = ZZ^T = S\Lambda S^T \tag{5.7.2597}$$

Et nous avons construit dans la section d'Algèbre Linéaire la décomposition de valeurs singulières (voir section Algèbre Linéaire page 1976) :

$$M = UDV^T \tag{5.7.2598}$$

C'est-à-dire dans notre cas ici cela s'écrira :

$$R = UDV^T \tag{5.7.2599}$$

Dès lors :

$$RR^T = (UDV^T)(UDV^T)^T = (UDV^T)(VDU^T) \tag{5.7.2600}$$

et comme V est une matrice orthogonale ($V^TV = \mathbb{1}$) :

$$R = UD^2U^T \quad (5.7.2601)$$

Donc si nous comparons :

$$R = UD^2U^T \qquad \text{et} \qquad R = UDV^T \quad (5.7.2602)$$

la correspondance est assez facile à voir !

Cela signifie donc que pour que le théorème spectral de R soit égal à sa DVS, nous avons besoin que R ait :

- Des vecteurs propres orthonormés (ce qui signifie que tout ce qu'il fait est de mettre à l'échelle son entrée le long de n directions orthogonales, où R est $n \times n$)
- Des valeurs propres positives (familièrement, cela doit être une matrice réelle et ne pas "retourner" quoi que ce soit)

Il s'avère que les conditions ci-dessus sont équivalentes aux suivantes :

- R doit être une matrice réelle symétrique (cela équivaut à R ayant des valeurs propres réelles et des vecteurs propres orthonormés)
- Les valeurs propres (réelles) de R doivent être positives

Donc, nous disons : les deux sont égaux quand R est symétrique semi-positive définie (voir section Algèbre Linéaire page 1930) ! Cela peut être désigné techniquement par $R \succeq 0 \ \wedge \ R^{\dagger} = R$.

En fait, l'utilisation de la DVS pour effectuer l'ACP est beaucoup plus logique numériquement que la formation de la matrice de covariance pour commencer, car la construction de ZZ^T peut entraîner une perte de précision. En effet dans certains cas leÁCP peut diverger très rapidement et donner des résultats inexacts ! C'est pourquoi de nombreux logiciels statistiques offrent la possibilité d'exécuter une ACP basée sur la DVS (théorème de décomposition en valeurs singulières) ou sur le théorème spectral.

■ Q.E.D.

Une question courante sur les forums Internet est : *Intuitivement, quelle est la différence entre le théorème spectral (décomposition en valeurs propres) et la décomposition en valeurs singulières ?*. Également, si : *L'un d'eux est-il plus général que l'autre ? Est-ce que l'un ou l'autre est un cas particulier de l'autre ?*

Premièrement, d'après ce qui a été écrit précédemment, il devrait être tout à fait évident que la décomposition en valeurs propres résulte de la question de savoir dans quelles directions

En cours de traduction de l'anglais

une forme quadratique a le plus grand impact, lorsque la DVS par construction émerge de la demande dans quelles directions une transformation linéaire[70] a le plus grand impact !

Maintenant, le lecteur doit garder à l'esprit que le théorème spectral décrit l'effet d'une matrice A sur un vecteur comme le processus suivant en 3-étapes $A = Q\Lambda Q^{-1}$:

1. Une transformation linéaire inversible (Q^{-1}, donc Q doit être inversible, c'est-à-dire carré !)
2. Une mise à l'échelle (Λ avec $\Lambda = \text{diag}(\vec{\lambda})$)
3. L'inverse de la transformation initiale (Q)

Cette décomposition n'existe pas toujours, mais le théorème spectral décrit les conditions dans lesquelles une telle décomposition existe.

Quand pour la DVS, nous avons le processus suivant en 3 étapes $A = U\Sigma V^T$:

1. Une première rotation dans l'espace d'entrée (V est une matrice de rotation étant donné que $V^TV = \mathbb{1}$)
2. Une simple mise à l'échelle positive qui prend un vecteur dans l'espace d'entrée vers l'espace de sortie (Σ diagonale avec entrées positives !)
3. Et une autre rotation dans l'espace de sortie (U est une matrice de rotation étant donné que $U^TU = \mathbb{1}$)

Le théorème fondamental de l'algèbre linéaire dit qu'une telle décomposition existe toujours (surtout parce qu'aucun inverse n'est impliqué et ne s'applique donc pas uniquement aux matrices carrées).

En cours de traduction de l'anglais

[70]D'où le fait que l'ACP produise des transformations linéaires, capturant ainsi les relations linéaires entre les variables d'origine afin que nous puissions perdre des informations prédictives non linéaires !

5.7.15.2 Analyse Factorielle des Correspondances du Khi-deux (AFCK2)

L'analyse factorielle des correspondances du khi-deux, en abrégé AFCK2, est une méthode d'analyse largement utilisée en biostatistique et en analyse d'enquêtes. La technique AFCK2 est principalement utilisée pour les grands tableaux pour comparer toutes les données (si possible toutes exprimées dans la même unité, comme une devise, une dimension, une fréquence ou toute autre grandeur mesurable). Elle peut notamment permettre l'étude de tableaux de contingence (ou tableaux croisés de cooccurrence) et décrire le lien entre deux variables. Elle sert à identifier et prioriser toutes les dépendances entre les lignes et les colonnes de la table.

Si plus de deux variables doivent être prises en considération, nous parlons alors d'analyse des correspondances multiples du khi-deux (ACMK2).

Abordons maintenant directement la théorie avec un exemple. Pour cela, nous considérons le tableau suivant (à deux variables) des superficies des types d'arbres qui se trouvent en Picardie (France) en 1984 en hectares :

	Feuillus	**Résineux**	**Mixtes**	**Total par dép.**
L'Aisne (A)	$106,500$	$3,380$	$1,470$	$111,350$
L'Oise (O)	$101,700$	$310,000$	0	$111,700$
La Somme (S)	$45,200$	$4,350$	50	$49,600$
Total	$253,400$	$17,730$	$1,520$	$272,650$

TAB. 5.90 – **Tableau de contingences (tableau croisé) de l'A.F.C.**

En cours de traduction de l'anglais

Les spécialistes du domaine appellent parfois les totaux des lignes et des colonnes respectivement les "marges de ligne" et "marges de colonne". Lorsque l'ensemble du tableau est mis sous forme de pourcentage, par rapport au total des totaux, on parle de "représentation en fréquences conjointes" :

	Feuillus	**Résineux**	**Mixtes**	**Total par dép.**
L'Aisne (A)	39.06%	1.24%	0.54%	40.84%
L'Oise (O)	37.30%	3.67%	0%	40.97%
La Somme (S)	16.58%	1.60%	0.02%	18.19%
Total	92.93%	6.50%	0.56%	100%

TAB. 5.91 – **Tableau des fréquences conjointes de l'A.F.C**

Nous souhaitons analyser s'il existe les degrés de ressemblance et de différence entre les variables. Remarquons, que nous ne cherchons pas à comparer l'égalité des moyennes ou des variances donc les outils statistiques vus dans le chapitre du même nom ne sont pas adaptés à ce genre d'analyse.

Si nous choisissons la distance euclidienne (voir section Calcul Vectoriel page 1796) :

$$d^2(x_i, x_{i'}) = \left|\left|\overrightarrow{(x_i x_{i'})}\right|\right|^2 = \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - x_{i'j})^2 \qquad (5.7.2603)$$

sur les données brutes pour mesurer ces différences entre départements, nous obtenons les écarts suivants :

$$\begin{aligned} d^2(A,O) &= \sum_{j=1}^{3}(x_{1j}-x_{2j})^2 = (106,500-101,700)^2+(3,380-10,000)^2+(1,470-0)^2 \\ &= 69,025,300 \Rightarrow d(A,O) = \sqrt{69,025,300} = 8,308.1\;[\text{ha}] \end{aligned} \quad (5.7.2604)$$

et ainsi de suite pour les autres régions. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} d(A,O) &= 8,308.1\;[\text{ha}] \\ d(A,S) &= 61,324.1\;[\text{ha}] \\ d(O,S) &= 56,781.8\;[\text{ha}] \end{aligned} \quad (5.7.2605)$$

Nous voyons en regardant le tableau et avant tout calcul que les départements de l'Aisne et l'Oise se ressemblent alors que le département de la Somme se diffère nettement. Les distances obtenues mettent en évidence cette observation.

Mais dans le tableau ci-dessus les profils de l'Oise et de la Somme, avec une forêt mixte très faible, sont pourtant très proches en proportion.

Dans ce contexte, nous voyons que la distance euclidienne transcrit les différences de masse entre les départements. En d'autres termes, l'Aisne et l'Oise se ressemblent car leurs superficies sont proches. Pour éliminer l'artefact lié aux ordres de grandeur, il nous faut transformer les données en pourcentage (pourcentages des régions). Nous obtenons alors :

	Feuillus	**Résineux**	**Mixtes**	**% Région**
L'Aisne (A)	95.6%	3.0%	1.3%	40.8%
L'Oise (O)	91.0%	9.0%	0.0%	41.0%
La Somme (S)	91.1%	8.8%	0.1%	18.2%

TAB. 5.92 – **Transformation du tableau de contingences en pourcents**

En cours de traduction de l'anglais

où les spécialistes du domaine appellent parfois la colonne en pourcents des régions "mprofil marginal des lignes" ou "masse" (et respectivement quand ils indiquent la ligne des pourcents des arbres).

Si nous choisissons la distance euclidienne sur les proportions (données relatives), nous obtenons :

$$d^2(p_i,p_{i'}) = ||\overrightarrow{p_ip_{i'}}||^2 = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{x_{ij}}{x_{i.}}-\frac{x_{i'j}}{x_{i'.}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{x_{ij}}{\sum\limits_j x_{ij}}-\frac{x_{i'j}}{\sum\limits_j x_{i'j}}\right)^2 \quad (5.7.2606)$$

soit :

$$\begin{aligned} d(A,O) &= 7.6\% \\ d(A,S) &= 7.4\% \\ d(O,S) &= 0.2\% \end{aligned} \quad (5.7.2607)$$

Cette fois, l'Oise et la Somme apparaissent bien comme se ressemblant le plus avec leurs forêts. Nous voyons que travailler avec les données relatives semble donc plus pertinent dans ce cas !

Maintenant, nous allons emprunter une idée aux économistes qui, lorsqu'ils ont des tableaux du même genre que le précédent, calculent ce qu'ils appellent "index" ou "élasticité" (souvent appelé "index de spécificité en statistiques et qui est donné par le rapport entre la fréquence conjointe et la fréquence marginale :

$$I=\frac{\dfrac{x_{ij}}{x_{i.}}}{\dfrac{x_{.j}}{x_{..}}}=\frac{\dfrac{x_{ij}}{x_{j.}}}{\dfrac{x_{i.}}{x_{..}}} \qquad (5.7.2608)$$

Voici un exemple obtenu avec les tableaux croisés dynamiques de Microsoft Excel 11.8346 qui inclut la fonction Index. D'abord le tableau de départ :

Sum	Region			
Item	Alberta	Ontario	Quebec	Total
Binder	1'279.36	5'762.63	2'535.66	9'577.65
Desk	825.00	875.00		1'700.00
Pen	151.24	539.73	1'354.25	2'045.22
Pen Set		2'421.39	1'748.48	4'169.87
Pencil	231.12	1'540.32	363.70	2'135.14
Total	2'486.72	11'139.07	6'002.09	19'627.88

FIG. 5.235 – Tableau croisé dynamique Microsoft Excel 11.8346 de départ

En cours de traduc... l' anglais

et en activant la fonction Index :

Index	Region		
Item	Alberta	Ontario	Quebec
Binder	1.05	1.06	0.87
Desk	3.83	0.91	-
Pen	0.58	0.47	2.17
Pen Set	-	1.02	1.37
Pencil	0.85	1.27	0.56

FIG. 5.236 – Tableau croisé dynamique Microsoft Excel 11.8346 avec la fonction Index

Pour voir d'où viennent ces valeurs, regardons par exemple l'article *Desk* dans la région *Alberta*. Il a un rendement (fréquence conjointe) de :

$$\frac{x_{21}}{x_{2.}}=\frac{825}{1700}\cong 48.52\% \qquad (5.7.2609)$$

par rapport à toutes les régions ce qui est au-dessus de la valeur de 33.33% qu'aurait comme rendement cet article toutes régions confondues s'il n'y avait pas de préférences de région !

La région *Alberta* a elle un rendement (fréquence marginale) de :

$$\frac{x_{1}}{x_{..}}=\frac{2486.72}{19627.88}\cong 12.66\% \qquad (5.7.2610)$$

par rapport à toutes les régions ce qui est en-dessous des 33.33% de rendement qu'elle aurait s'il n'y avait pas de préférences de région. Ainsi, ce tableau d'index permet de savoir si les différences sont qualitativement significatives ! !

Le rapport donne donc :

$$I = \frac{\dfrac{x_{21}}{x_{2.}}}{\dfrac{x_{.1}}{x_{..}}} \cong 3.83 \qquad (5.7.2611)$$

ce qui montre un fort décalage entre la valeur obtenue et la valeur que nous aurions si les proportions étaient respectées (surreprésentation de 283%).

C'est donc une sorte de calcul de conformité : si le rapport valait 1, c'est que le rendement régional des ventes de cet article particulier serait conforme par rapport à toutes les ventes de cette région relativement à un marché national. Il n'y aurait alors pas d'anomalies. Voyons cela par exemple pour nos arbres où nous avions les effectifs observés :

	Feuillus	**Résineux**	**Mixtes**	**Total par dép.**
L'Aisne (A)	$106,500$	$3,380$	$1,470$	$111,350$
L'Oise (O)	$101,700$	$10,000$	0	$111,700$
La Somme (S)	$45,200$	$4,350$	50	$49,600$
Total	$253,400$	$17,730$	$1,520$	$272,650$

TAB. 5.93 – **Tableau de contingences (tableau croisé) de l'A.F.C.**

En cours de traduction de l'anglais

et pour lequel nous obtenons le tableau croisé dynamique des index effectifs observés suivant dans Microsoft Excel 11.8346 :

Index	Arbre		
Région	Feuillus	Résineux	Mixtes
La Somme (S)	0.98	1.35	0.18
L'Aisne (A)	1.03	0.47	2.37
L'Oise (O)	0.98	1.38	-

FIG. 5.237 – **Tableau croisé dynamique Microsoft Excel 11.8346 avec l'analyse d'Index**

et nous voyons encore clairement à l'aide de ce tableau que ce sont l'Oise et la Somme qui se ressemblent le plus !

Avant de continuer, nous pourrions nous poser la question extrêmement importante suivante : Quels seraient les effectifs théoriques qui auraient été obtenus si les proportions des arbres dans les régions étaient rigoureusement équivalentes à la proportion d'ensemble (soit de telle manière à ce que les index soient tous unitaires) ?

Eh bien simplement en faisant le calcul suivant (il s'agit simplement d'une règle de trois calculée dans chaque cellule) dont il faut bien - si possible - comprendre le sens sans l'appliquer bêtement :

	Feuillus	**Résineux**	**Mixtes**
L'Aisne (A)	$=(253,400/272,650)*111'350$ $=103,488$	$=(17,730/272,650)*111,350$ $=7,241$	$=(1,520/272,650)*111,350$ $=621$
L'Oise (O)	$=(253,400/272,650)*111'700$ $=103,813$	$=(17,730/272,650)*111'700$ $=7,264$	$=(1,520/272,650)*111'700$ $=623$
La Somme (S)	$=(253,400/272,650)*49'600$ $=46,098$	$=(17,730/272,650)*49'600$ $=3,225$	$=(17,730/272,650)*49'600$ $=276$
Total	$253,400$	$17,730$	$1,520$

TAB. 5.94 – **Respect des proportions de l'A.F.C.**

Ou de manière plus lisible :

	Feuillus	**Résineux**	**Mixtes**	**Total par région**
L'Aisne (A)	$E_{11}=103,488$	$E_{12}=7,241$	$E_{13}=621$	$r_1=111,350$
L'Oise (O)	$E_{21}=103,813$	$E_{22}=7,264$	$E_{23}=623$	$r_2=111,700$
La Somme (S)	$E_{31}=46,098$	$E_{32}=3,225$	$E_{33}=276$	$r_3=49,600$
Total	$c_1=253,400$	$c_2=17,730$	$c_3=1,520$	$N=272,650$

Notez que dans le tableau ci-dessus, chaque cellule (notée E_{ij}), est obtenue en calculant :

$$E_{ij}=\frac{c_j\cdot r_i}{N} \tag{5.7.2612}$$

Remarque

Notez que si les cellules doivent être données en pourcentage, plutôt qu'en nombre, nous devrions alors calculer à la place : $p_{ij}=E_{ij}/N=(c_j\cdot r_i)/N^2$. D'où évidemment : $E_{ij}=Np_{ij}$.

Et nous obtenons avec ces nouvelles valeurs le tableau des index des effectifs théoriques suivant dans Microsoft Excel 11.8346 :

Index	Arbre		
Région	Feuillus	Résineux	Mixtes
La Somme (S)	1.00	1.00	1.00
L'Aisne (A)	1.00	1.00	1.00
L'Oise (O)	1.00	1.00	1.00

FIG. 5.238 – **Tableau croisé dynamique Microsoft Excel 11.8346 de l'index des effectifs théoriques**

ce qui montre que les proportions sont maintenant respectées ! Parenthèse fermée (mais sur laquelle nous reviendrons un peu plus loin) !

Eh bien quand nous voulons faire de l'analyse factorielle des correspondances, notre relation :

$$d^2(x_i,x_{i'})=\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{x_{ij}}{x_{i.}-\dfrac{x_{i'j}}{x_{i'.}}}\right)^2 \tag{5.7.2613}$$

En cours d... tion de l'anglais

devient alors :

$$d^2(x_i, x_{i'}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\left(\dfrac{x_{ij}}{x_{i.} - \dfrac{x_{i'j}}{x_{i'.}}} \right)^2}{\dfrac{x_{.j}}{x_{..}}} \tag{5.7.2614}$$

soit :

$$\begin{aligned} d(A, O) &= 0.30 \\ d(A, S) &= 0.39 \\ d(O, S) &= 0.02 \end{aligned} \tag{5.7.2615}$$

Cette fois encore, l'Oise et la Somme apparaissent bien comme se ressemblant le plus.

La distance ci-dessus se nomme la "métrique du Khi-deux" car elle ressemble (mais c'est tout !) à la distance utilisée dans le test d'ajustement du même nom (voir page 1219) mais ici, elle permet seulement de mettre en place une hiérarchie dans le cadre d'un tableau de contingences et d'observer les variables similaires de manière plus aisée ! !

Remarque

Il existe une autre manière de calculer une AFC en se basant sur une distance euclidienne mais en ayant pris soin au préalable de transformer les données du tableau de contingences de manière particulière et ce pour que le calcul soit identique qu'en lorsqu'on utilise la métrique du Khi-deux.

5.7.15.3 Test d'indépendance du khi-deux

Le test du χ^2 est appliqué lorsque vous avez deux variables catégorielles d'une seule population. Il est utilisé pour déterminer s'il existe une association significative entre les deux variables.

Par exemple, dans une enquête électorale, les électeurs peuvent être classés par sexe (homme ou femme) et préférence de vote (démocrate, républicain ou indépendant). Nous pourrions utiliser un test du chi carré d'indépendance pour déterminer si le sexe est lié à la préférence de vote.

Supposons qu'une variable catégorielle A a r niveaux et qu'une autre variable catégorielle B a c des niveaux. L'hypothèse nulle H_0 assume que connaître le niveau de la variable A ne nous aide pas à prédire le niveau de la variable B. Autrement dit, les variables sont indépendantes.

$$\begin{aligned} &H_0 : \text{Variable } A \text{ et variable } B \text{ sont indépendantes} \\ &H_1 : \text{Variable } A \text{ et variable } B \text{ ne sont pas indépendantes} \end{aligned} \tag{5.7.2616}$$

Nous présenterons ce test avec un exemple d'accompagnement car nous savons par expérience qu'il est plus efficace pour l'apprentissage et la compréhension.

Rappelons que lors de l'introduction de la méthode précédente pour comparer des effectifs (valeurs) et détecter lesquels étaient les plus proches, nous avons donné le tableau des effectifs observés :

En cours de traduction de l'anglais

	Feuillus	Résineux	Mixtes	Total par dép.
L'Aisne (A)	$106,500$	$3,380$	$1,470$	$111,350$
L'Oise (O)	$101,700$	$3,380$	$1,470$	$111,700$
La Somme (S)	$45,200$	$4,350$	50	$49,600$
Total	$253,400$	$17,730$	$1,520$	$272,650$

TAB. 5.95 – **Tableau de contingences pour l'analyse du χ^2**

et nous avons montré comment trouver le tableau des effectifs théoriques (arrondis à l'entier le plus proche) dans les cas où les proportions auraient dû éventuellement être respectées :

	Feuillus	Résineux	Mixtes	Total par dép.
L'Aisne (A)	$103,488$	$7,241$	621	$111,350$
L'Oise (O)	$103,813$	$7,264$	623	$111,700$
La Somme (S)	$46,098$	$3,225$	276	$49,600$
Total	$253,400$	$17,730$	$1,520$	$272,650$

TAB. 5.96 – **Tableau de contingences avec effectifs théoriques pour l'analyse du χ^2**

En cours de traduction de l' anglais

La construction du dernier tableau ci-dessus présuppose par exemple que les trois régions sont dans des conditions identiques pour tout ce qui concerne la croissance et la multiplication des arbres et que le nombre d'arbres est en relation de cause à effet directe ! ! ! ! avec les régions et qu'il n'y a pas d'autres causes intermédiaires... ce qui est une hypothèse forte !

Mais sous cette hypothèse, supposons que nous souhaiterions savoir si les différences observées entre le nombre d'arbres et les régions sont statistiquement significatives ou purement aléatoires à cause de l'échantillon expérimental ? En d'autres termes, nous voulons savoir si le nombre d'arbres dépend réellement des régions dans lesquelles ils poussent ou si ces valeurs ne sont que dues au hasard de l'échantillon ? Raison pour laquelle ce test s'appelle le "test d'indépendance du Khi-deux".

Gardez donc à l'esprit que dans le test d'indépendance du chi carré, tous les sujets / unités sont collectés au hasard dans une population et deux variables catégorielles sont observées pour chaque unité.

Remarque

Le test d'indépendance du chi carré est recommandé en analyse sensorielle par la norme ISO 8588-1987 sous le nom de "test A-Non A".

Pour répondre à cette question il faut d'abord une référence. Et cette référence est justement l'hypothèse de lien causal direct (proportions respectées) que nous avons donnée juste précédemment.

Si nous considérons que chaque case du tableau des effectifs observés correspond à l'issue d'une variable aléatoire de loi inconnue et que chaque case du tableau théorique (du moins la classe d'effectifs) est considérée comme issue d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale (et

asymptotique d'une loi Normale) alors nous pouvons utiliser le test d'ajustement du Khi-deux :

$$D=\sum_{i=1}^{N}E_i^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{(k_i-np_i)^2}{np_i} \tag{5.7.2617}$$

pour avoir une bonne idée (mais qui reste quand même très approximative au vu des hypothèses !) si les différences entre les valeurs des effectifs observés sont dues au hasard ou sont réelles. Or, si D est petit, la probabilité que ce soit dû au hasard est grande mais si D est grand alors nous avons une différence réelle (donc nous utilisons le test d'ajustement du Khi-deux mais dans le sens inverse !).

Reste à déterminer le nombre de degrés de liberté de la loi du χ^2 que suit cette somme dans ce type de configuration !

Dans le cas particulier (mais facilement généralisable par récurrence) d'une table à deux entrées avec deux variables catégorisées X avec l niveaux et Y avec c niveaux nous aurons respectivement l lignes et c colonnes.

Ainsi, la table aura bien évidemment $l\cdot c$ cellules. Dans la table des effectifs théoriques (dont chaque cellule est considérée comme une variable aléatoire) chaque cellule sera entièrement déterminée par la somme des autres de telle sorte que le nombre de degrés de liberté sera alors en toute logique comme nous l'avons vu lors de notre étude des degrés de liberté :

$$N-1=l\cdot c-1 \tag{5.7.2618}$$

Ainsi, en prenant notre exemple des forêts, c'est le total des totaux de $272,650$ qui nous permet d'écrire cette dernière relation et ainsi de déterminer la valeur d'une cellule éventuellement vide, toutes les autres étant données !

Un test du Khi-deux sur ce type de table teste l'hypothèse d'indépendance contre l'hypothèse alternative de dépendance. Sous l'hypothèse d'indépendance nous estimons qu'il y a besoin de seulement :

$$(l-1)+(c-1) \tag{5.7.2619}$$

valeurs sur les N pour pouvoir en déterminer la totalité (en supposant implicitement connues les sommes par ligne et par colonne).

Ainsi, si vous avez une table de 2 lignes par 2 colonnes, il vous suffit si vous connaissez les totaux des lignes et des colonnes, d'avoir 2 valeurs (soit $(2-1)+(2-1)$) pour déterminer les 2 manquantes. Le raisonnement s'applique aussi pour une table de 3 lignes par 3 colonnes où il vous suffit d'avoir au moins 4 valeurs (soit $(3-1)+(3-1)$) pour déterminer les 5 manquantes.

Les degrés de liberté pour le Khi-deux sont alors :

$$\text{df}=(lc-1)-[(l-1)+(c-1)]=lc-1-l+1-c+1=lc-l-c+1=(l-1)(c-1) \tag{5.7.2620}$$

C'est cette relation qui nous dit (trivialement !) que si dans un tableau de 2 lignes par 2 colonnes comprenant donc 4 cellules (totaux des lignes et colonnes étant aussi connus !) qu'étant donnée une seule des valeurs (ddl valant 1), nous pouvons déterminer les 3 autres valeurs manquantes.

En cours de traduction de l'anglais

Voici donc une définition possible du nombre de degrés de liberté : C'est le nombre maximum de valeurs du modèle telles qu'aucune d'entre elles n'est calculable à partir des autres.

De même, pour un tableau de 3 lignes par 3 colonnes comprenant 9 cellules comme c'est le cas de notre exemple dans ce chapitre avec les forêts, la connaissance de 4 cellules seules permet grâce aux totaux en ligne et colonnes de déterminer les 5 autres qui seraient éventuellement non connues.

D'où la relation dans le cadre de l'application du Khi-deux de la relation finale :

$$\chi^2((l-1)(c-1)) = \chi^2_{(l-1)(c-1)} = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \tag{5.7.2621}$$

en faisant usage des notations utilisées dans l'industrie. Le terme :

$$\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \tag{5.7.2622}$$

est souvent appelé "carré du résidu standardisé". Et le rapport :

$$\frac{\dfrac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}}{\displaystyle\sum_{i,j} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}} \tag{5.7.2623}$$

est souvent appelé "contribution au Khi-deux d'indépendance".

traduction de l'anglais

Remarque

Pour utiliser ce test à bon escient, il faudrait donc vérifier d'abord que les différences (numérateur) suivent une loi Normale ou que l'ensemble des termes de la somme forment une loi du Khi-deux ou approximativement (asymptotiquement) une loi Normale centrée réduite et les effectifs de chaque cellule doit être supérieur à 5 sinon des simulations de Monte Carlo doivent être utilisées pour déterminer la p-valeur.

E

Dans notre exemple nous avons :

$$D = \sum_{i,j} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \cong 5,602.35 \tag{5.7.2624}$$

et la p-valeur de cette valeur avec la loi du Khi-deux à quatre degrés de liberté :

$$\chi^2((l-1)(c-1)) = \chi^2(4) = \chi^2_4 \tag{5.7.2625}$$

est tellement proche de zéro (non statistiquement significatif) que nous n'avons aucune chance de nous tromper en affirmant que les différences observées dans le tableau sont statistiquement significatives entre les 3 forêts et donc qu'il y a très probablement indépendance.

Remarque

Rappelons qu'il existe de nombreux tests statistiques dont le nom contient "khi-carré". Par exemple :

- Test de qualité de l'ajustement du khi-carré (nous permet de déterminer si une distribution de population spécifiée est valide)
- Test du khi-carré d'association / indépendance (nous permet de déterminer si la distribution d'une variable a été influencée par une autre variable)
- Test d'homogénéité du khi-carré (nous permet de comparer deux ou plusieurs proportions de population) aussi appelé test d'hétérogénéité du khi-carré
- Test du khi-carré pour les valeurs aberrantes (nous permet de détecter s'il existe au moins une valeur aberrante en comparaison d'une distribution spécifique)
- Test du khi-carré pour la différence de deux données de comptage (cas particulier du test d'homogénéité avec une seule catégorie !)

Même si tous ces tests ont des objectifs différents, leur cadre mathématique et leur procédure sont EXACTEMENT les mêmes et donc l'un de ces cinq tests peut être exécuté pour obtenir en même temps les cinq conclusions avec les mêmes p-valeurs et les mêmes valeurs critiques du khi-carré ! ! !

En cours de traduction

5.7.15.3.1 Équivalence du test Z et test χ^2 pour les poportions

Nous avons mentionné lors de notre étude du test Z pour la comparaison de deux proportions que des logiciels comme R utilisent le test du χ^2 pour comparer les proportions plutôt que le test Z. Il est temps maintenant de voir pourquoi il existe une équivalence entre la statistique Z de Wald à 2 échantillons pour comparer les proportions avec les variances groupées et le test du χ^2 (indépendance) de Pearson pour un tableau de contingence 2×2 !

Disons maintenant que nous avons une étude de deux variables catégorielles chacune avec seulement deux niveaux. L'un des niveaux de réponse est considéré comme la réponse *Succès* et l'autre la réponse *Échec* (typique d'un test A/B tel qu'utilisé en analyse de sensibilité et particulièrement bien connu en webdesign...). Un tableau général 2×2 des comptages observés serait le suivant :

	Succès	**Échecs**	**Total**
Groupe 1	$A\,(O_{11})$	$B\,(O_{12})$	$n_1 = A + B$
Groupe 2	$C\,(O_{21})$	$D\,(O_{22})$	$n_2 = C + D$

Les dénombrements observés dans ce tableau représentent les proportions suivantes :

	Succès	**Échecs**
Groupe 1	$\hat{p}_1 = \frac{A}{A+B} = \frac{A}{n_1}$	$1 - \hat{p}_1$
Groupe 2	$\hat{p}_2 = \frac{C}{C+D} = \frac{C}{n_2}$	$1 - \hat{p}_2$

Ce qui est aussi souvent noté dans ce cas particulier :

	Succès	**Échecs**	**Total**
Groupe 1	p_1	q_1	100%
Groupe 2	p_2	q_2	100%
Total	p	q	100%

Utilisons maintenant aveuglément le tableau ci-dessus comme notre tableau de "contingence" en remarquant que si nous prenons le tableau ci-dessus comme référence, alors $N=100\%=1$.

Le χ^2 habituel de ce tableau écrit après avoir remplacé les proportions au lieu des fréquences dans sa formule, ressemble à ceci (comme $N=100\%=1$ et le total des lignes est également égal à 100% cela simplifie pas mal) :

$$\begin{aligned}\chi_1^2 &= \sum_{i,j}^{n} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}\\ &= \frac{(n_1p_1-n_1p/100\%)^2}{n_1p/100\%}+\frac{(n_2p_2-n_2p/100\%)^2}{n_2p/100\%}+\frac{(n_1q_1-n_1q/100\%)^2}{n_1q/100\%}+\frac{(n_2q_2-n_2q/100\%)^2}{n_2q/100\%}\\ &= \frac{(n_1p_1-n_1p)^2}{n_1p}+\frac{(n_2p_2-n_2p)^2}{n_2p}+\frac{(n_1q_1-n_1q)^2}{n_1q}+\frac{(n_2q_2-n_2q)^2}{n_2q}\end{aligned} \quad (5.7.2626)$$

Mais cela peut être simplifié encore plus. En effet, si vous vous souvenez comment nous calculons les p_{ij}, ce sont la multiplication du total de la ligne et du total de la colonne dans le cas ci-dessus. Mais dans notre cas particulier ci-dessus (avec un tableau contenant uniquement des proportions !), les lignes sont toujours égales à $100\%=1$. Par conséquent, seuls les termes totaux de la colonne doivent être considérés. Cela nous amène à écrire :

$$\begin{aligned}\chi_1^2 &= \frac{(O_{11}-p\cdot 100\%)^2}{p\cdot 100\%}+\frac{(O_{21}-p\cdot 100\%)^2}{p\cdot 100\%}+\frac{(O_{12}-q\cdot 100\%)^2}{q\cdot 100\%}+\frac{(O_{22}-q\cdot 100\%)^2}{q\cdot 100\%}\\ &= \frac{(O_{11}-p)^2}{p}+\frac{(O_{21}-p)^2}{p}+\frac{(O_{12}-q)^2}{q}+\frac{(O_{22}-q)^2}{q}\\ &= n_1\frac{(p_1-p)^2}{p}+n_2\frac{(p_2-p)^2}{p}+n_1\frac{(q_1-q)^2}{q}+n_2\frac{(q_2-q)^2}{q}\end{aligned} \quad (5.7.2627)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvoons simplifier cela encore plus :

$$\begin{aligned}
\chi_1^2 &= n_1\frac{(p_1-p)^2}{p}+n_1\frac{(q_1-q)^2}{q}+n_2\frac{(p_2-p)^2}{p}+n_2\frac{(q_2-q)^2}{q}\\
&= n_1\left[\frac{(p_1-p)^2}{p}+\frac{(q_1-q)^2}{q}\right]+n_2\left[\frac{(p_2-p)^2}{p}+\frac{(q_2-q)^2}{q}\right]\\
&= \frac{n_1(p_1-p)^2q}{pq}+\frac{n_1(q_1-q)^2p}{pq}+\frac{n_2(p_2-p)^2q}{pq}+\frac{n_2(q_2-q)^2p}{pq}\\
&= \frac{n_1(p_1-p)^2(1-p)+n_1(1-p_1-1+p)^2p+n_2(p_2-p)^2(1-p)+n_2(1-p_2-1+p)^2p}{pq}\\
&= \frac{n_1(p_1-p)^2(1-p)+n_1(p-p_1)^2p+n_2(p_2-p)^2(1-p)+n_2(p-p_2)^2p}{pq}\\
&= \frac{[n_1(p_1-p)^2][(1-p)+p]+[n_2(p_2-p)^2][(1-p)+p]}{pq}\\
&= \frac{n_1(p_1-p)^2+n_2(p_2-p)^2}{pq}
\end{aligned} \tag{5.7.2628}$$

Rappelons-nous que :

$$p=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2} \tag{5.7.2629}$$

En injectant cette relation dans le numérateur de la relation ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\chi_1^2 &= \frac{n_1\left(p_1-p\right)^2+n_2\left(p_2-p\right)^2}{pq}\\
&= \frac{n_1\left(p_1-\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}\right)^2+n_2\left(p_2-\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}\right)^2}{pq}\\
&= \frac{n_1\left(p_1(n_1+n_2)-(n_1p_1+n_2p_2)\right)^2+n_2\left(p_2(n_1+n_2)-(n_1p_1+n_2p_2)\right)^2}{pq(n_1^2+n_2^2)}\\
&= \frac{n_1\left(p_1n_2-n_2p_2\right)^2+n_2\left(p_2n_1-n_1p_1\right)^2}{pq(n_1^2+n_2^2)}\\
&= \frac{n_1\left(p_1^2n_2^2-2p_1n_2n_2p_2+n_2^2p_2^2\right)+n_2\left(p_2^2n_1^2-2p_2n_1n_1p_1+n_1^2p_1^2\right)}{pq(n_1^2+n_2^2)}\\
&= \frac{n_1p_1^2n_2^2-2n_1p_1n_2n_2p_2+n_1n_2^2p_2^2+n_2p_2^2n_1^2-2n_2p_2n_1n_1p_1+n_2n_1^2p_1^2}{pq(n_1^2+n_2^2)}\\
&= \frac{p_1^2(n_1n_2^2+n_2n_1^2)+p_2^2(n_1n_2^2+n_2n_1^2)-2p_1p_2(n_1n_2^2+n_2n_1^2)}{pq(n_1^2+n_2^2)}\\
&= \frac{(p_1-p_2)^2(n_1n_2^2+n_2n_1^2)}{pq(n_1^2+n_2^2)}
\end{aligned} \tag{5.7.2630}$$

Nous divisons le numérateur et le dénominateur par $(n_1n_2^2+n_2n_1^2)$ et obtenons :

$$\begin{aligned}
\chi_1^2 &= \frac{(n_1n_2^2+n_2n_1^2)}{(n_1n_2^2+n_2n_1^2)}\frac{(p_1-p_2)^2(n_1n_2^2+n_2n_1^2)}{pq(n_1^2+n_2^2)}=\frac{(p_1-p_2)^2}{pq\dfrac{(n_1^2+n_2^2)}{n_1n_2^2+n_2n_1^2}}\\
&= \frac{(p_1-p_2)^2}{pq\dfrac{(n_1+n_2)(n_1-n_2)}{n_1n_2(n_1+n_2)}}=\frac{(p_1-p_2)^2}{pq\dfrac{n_1-n_2}{n_1n_2}}=\frac{(p_1-p_2)^2}{pq\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}
\end{aligned} \tag{5.7.2631}$$

En cours de traduction de l' anglais

et comme le χ_1^2 est égal à Z^2 cela nous amène à :

$$Z^2 = \frac{(p_1 - p_2)^2}{pq\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)} \tag{5.7.2632}$$

c'est la statistique Z au carré du test Z des proportions (version groupée de la variance telle qu'elle apparaît à la page 864) pour la réponse *Succès* ! !

Ainsi, la statistique (et le test) du khi carré d'homogénéité 2×2 est équivalente au test Z de deux proportions. Les fréquences dites attendues calculées dans le test du chi carré dans une colonne donnée sont le profil vertical moyen pondéré (par le groupe n) (c'est-à-dire le profil du "groupe moyen") multiplié par les n de ce groupe. Ainsi, il ressort que le khi carré teste l'écart de chacun des profils des deux groupes par rapport à ce profil moyen de groupe, - ce qui revient à tester la différence des profils des groupes entre eux, qui est le test Z des proportions. C'est pourquoi un pourcentage assez important de concepteurs de sites Web se réfèrent au test des proportions A/B en tant que test Z ou test χ^2 car ils sont tout simplement identiques (cependant, nous devons toujours mentionner rigoureusement si nous utilisons la version groupée ou non groupée du test et la variante avec ou sans correction de Yates...).

Il s'agit d'une démonstration d'un lien entre une mesure d'association de variables (χ^2) et une mesure de différence de groupe (Z-test statistique). Les associations d'attributs et les différences de groupe sont (souvent) les deux facettes d'une même chose.

Ce résultat démontre donc un lien entre la mesure d'association de variables (χ^2) et une mesure de différence de groupe (Z-test statistique). Les associations d'attributs et les différences de groupe sont (souvent) les deux facettes d'une même chose.

Rappelons-nous de notre test Z de deux proportions que notre hypothèse nulle est que les deux proportions de population, p_1 et p_2, étaient supposées égales alors que l'hypothèse alternative bilatérale était qu'elles étaient inégales.

Cette hypothèse nulle serait analogue à l'indépendance des deux groupes. De plus, si les deux proportions de succès sont égales, les deux proportions d'échecs seraient également égales.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Pour un exemple pratique (c'est-à-dire numérique) de l'équivalent entre le test de proportions groupées Z et le test de contingence 2×2 groupé du χ^2, le lecteur peut se référer à notre livre d'accompagnement sur le logiciel `R` où nous montrerons qu'en fait `R` utilise toujours la version χ^2 quelle que soit la fonction utilisée (fonction `prop.test()` ou `chisq.test()` qui utilisent toutes deux le χ^2 !).

5.7.15.3.2 V de Cramér

Le "V de Cramér" (parfois appelé "phi de Cramér" et noté φ_c) est une mesure d'association entre deux variables nominales, donnant une valeur comprise entre 0 et $+1$ (inclus). Il est basé sur la statistique du khi-carré de Pearson et a été publié par Harald Cramér en 1946.

Comme nous allons le prouver, φ_c est l'intercorrélation de deux variables discrètes et peut être utilisé avec des variables ayant deux niveaux ou plus. φ_c est une mesure symétrique, peu importe quelle variable nous plaçons dans les colonnes et laquelle dans les lignes. De plus, l'ordre des lignes / colonnes n'a pas d'importance, donc φ_c peut être utilisé avec des types de données nominales, ordonnées, numériques ou autres...

Nous avons vu plus haut que le test d'indépendance du khi-deux peut être utilisé pour mesurer le degré d'association de deux variables catégorielles dans une table de contingences de l lignes et c colonnes :

$$D=\sum_{ij}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \tag{5.7.2633}$$

et que cette distance suit une loi du khi-deux à $(l-1)(c-1)$ degrés de liberté. Nous allons démontrer de façon intuitive que la valeur maximum de la distance D est donnée par :

$$D_{\max}=N\left(\min(l,c)-1\right) \tag{5.7.2634}$$

et que cette valeur maximale n'est atteinte que si et seulement si chaque ligne ou chaque colonne contient une et une seule valeur non nulle. Sous cette dernière condition, nous pouvons toujours réarranger le tableau de contingences de façon à avoir tous les termes non nuls sur la diagonale du tableau.

Évidemment, si le tableau n'est pas carré comme ci-dessous :

Ligne/Colonne	c_1	c_2	c_3	c_4	Total
l_1	a_1	0	0	0	a_1
l_2	0	a_2	0	0	a_2
l_3	0	0	a_3	0	a_3
l_4	0	0	0	a_4	a_4
l_5	0	0	0	0	0
Total	a_1	a_2	a_3	a_4	N

TAB. 5.97 – Tableau de contingences rectangulaire

Le cas qui maximise D impose donc des termes en diagonale sur la dimension la plus petite en ligne ou colonne notée traditionnellement q. Dans le cas présent, nous avons donc :

$$q=\min(l,c)=c=4 \tag{5.7.2635}$$

Dans ce cas extrême et bien évidemment théorique, les lignes ou colonnes qui n'ont que des zéros peuvent être mises de côté et dès lors tout tableau peut se résumer à :

En cours de traduction de l'anglais

Ligne/Colonne	c_1	c_2	c_3	c_4	**Total**
l_1	a_1	0	0	0	a_1
l_2	0	a_2	0	0	a_2
l_3	0	0	a_3	0	a_3
...	...	...	...	...	...
l_q	0	0	0	a_q	a_q
Total	a_1	a_2	...	a_q	N

TAB. 5.98 – **Tableau de contingences rectangulaire transformé en carré**

Évidemment, faire abstraction des lignes ou colonnes qui n'ont que des valeurs nulles suppose que dans la distance D du Khi-deux nous posions que :

$$\frac{(0-0)^2}{0}=0 \tag{5.7.2636}$$

ce qui est tout à fait discutable... Pour la suite, nous allons avoir besoin des relations suivantes :

$$N=\sum_{i=1}^{q} a_i \tag{5.7.2637}$$

et :

$$N^2=\left(\sum_{i=1}^{q} a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{q} a_i\sum_{j=1}^{q} a_j=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} a_ia_j=\sum_{i=1}^{q} a_i^2+\sum_{i\neq j}^{q} a_ia_j \tag{5.7.2638}$$

Dès lors, il vient : :

$$\begin{aligned}
D_{\max}&=\sum_{ij}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}=\sum_{i}^{q}\frac{\left(a_i-\frac{a_i^2}{N}\right)^2}{\frac{a_i^2}{N}}+\sum_{i\neq j}^{q}\frac{\left(0-\frac{a_ia_j}{N}\right)^2}{\frac{a_ia_j}{N}}=\sum_{i}^{q}\frac{\left(\frac{Na_i-a_i^2}{N}\right)^2}{\frac{a_i^2}{N}}+\sum_{i\neq j}^{q}\frac{a_ia_j}{N}\\
&=\sum_{i}^{q}\frac{(a_i(N-a_i))^2}{a_i^2N}+\frac{1}{N}\left(\sum_{i\neq j}^{q}a_ia_j+\sum_{i}^{q}a_i^2\right)-\frac{1}{N}a_i^2\\
&=\sum_{i}^{q}\frac{(N-a_i)^2}{N}+\frac{1}{N}N^2-\frac{1}{N}\sum_{i}^{q}a_i^2=\frac{1}{N}\sum_{i}^{q}(N-a_i)^2-\frac{1}{N}\sum_{i}^{q}a_i^2+\frac{1}{N}N^2\\
&=\frac{1}{N}\left[\sum_{i}^{q}(N-a_i)^2-\sum_{i}^{q}a_i^2\right]+N=\frac{1}{N}\sum_{i}^{q}\left((N-a_i)^2-a_i^2\right)+N=\sum_{i}^{q}\frac{\left((N-a_i)^2-a_i^2\right)}{N}+N\\
&=\sum_{i}^{q}\frac{N^2-2Na_i+a_i^2-a_i^2}{N}+N=\sum_{i}^{q}\frac{N^2-2Na_i}{N}+N=\sum_{i}^{q}(N-2a_i)+N\\
&=qN-2\sum_{i}^{q}a_i+N=qN-2N+N=N(q-1)=N(\min(l,c)-1)
\end{aligned} \tag{5.7.2639}$$

Nous définissons alors la valeur suivante :

$$\boxed{V=\sqrt{V^2}=\sqrt{\frac{\chi^2(l-1)(c-1)}{N(q-1)}}=\sqrt{\frac{\chi^2_{(l-1)(c-1)}}{N(q-1)}}} \tag{5.7.2640}$$

En cours de traduction de l' anglais

comme étant le "coefficient V de Cramér" (la majorité des logiciels donnent cependant la valeur de V au carré). Ce dernier est tel qu'il ne dépasse jamais 1 et permet une interprétation plus intuitive du degré d'association dans un tableau de contingences.

Dans le cas où le tableau est de dimension 2 en ligne et 2 en colonne, la relation précédente se réduit alors immédiatement à :

$$V=\sqrt{\frac{\chi_1^2}{N}} \tag{5.7.2641}$$

Relation qu'il est de tradition de noter dans ce cas particulier sous la forme suivante :

$$\varphi=\sqrt{\frac{\chi_1^2}{N}} \tag{5.7.2642}$$

et de nommer "phi de Cramér" ou "coefficient phi".

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Considérons le tableau suivant (même si les conditions ne sont pas satisfaites pour un test d'indépendance du Khi-deux) :

Projets	**Certifiés Responsables de projets**	**Non-Certifiés Responsables de projets**	**Total**
Délais respectés	8	1	9
Délais non-respectés	4	5	9
Total	12	6	18

TAB. 5.99 – **Exemple de tableau de contingences pour le calcul du V de Cramér**

avec les effectifs théoriques :

Projets	**Certifiés Responsables de projets**	**Non-Certifiés Responsables de projets**	**Total**
Délais respectés	$(12/18)\cdot 9 = 6$	$(6/18)\cdot 9 = 3$	9
Délais non-respectés	$(12/18)\cdot 9 = 6$	$(6/18)\cdot 9 = 3$	9
Total	12	6	18

TAB. 5.100 – **Tableau de contingences de l'exemple avec effectifs théoriques**

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} D &= \chi^2_{(l-1)(c-1)} = \chi^2_1 = \sum_{ij} \frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \\ &= \frac{(8-6)^2}{6} + \frac{(4-6)^2}{6} + \frac{(1-3)^2}{3} + \frac{(5-3)^2}{3} \\ &= 0.\bar{6} + 0.\bar{6} + 1.\bar{3} + 1.\bar{3} = 4 \end{aligned} \quad (5.7.2643)$$

Et à un niveau de 95%, nous obtenons avec la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 :

$$\chi^2_{95\%}(1) = \texttt{=LOI.KHIDEUX.INVERSE(0.95,1)} = 3.841 \quad (5.7.2644)$$

ou avec la p-valeur :

$$= \texttt{1-LOI.KHIDEUX.N(4,1,VRAI)} = 0.045 \quad (5.7.2645)$$

Il vient alors immédiatement :

$$V = \sqrt{V^2} = \sqrt{\frac{\chi^2_{(l-1)(c-1)}}{N(q-1)}} = \sqrt{\frac{4}{18(2-1)}} = \sqrt{0.\bar{2}} \cong 0.4714 \quad (5.7.2646)$$

Nous sommes un peu limite ici... étant donné que la p-valeur est toute proche du seuil de 0.05. Cependant, prendre une décision dans le cas présent alors que de toute façon les effectifs sont si faibles reviendrait à conclure n'importe quoi et ce d'autant plus que l'outil est construit sur une cumulation d'approximations.

5.7.15.4 Coefficient phi de Pearson

En statistiques, le "coefficient phi de Pearson" est une autre mesure d'association pour deux variables binaires. Introduite par Karl Pearson, cette mesure est similaire au coefficient de corrélation de Pearson dans son interprétation. En réalité, un coefficient de corrélation de Pearson estimé pour deux variables binaires (variables de Bernoulli) donne mathématiquement le coefficient phi de Pearson comme nous allons le démontrer.

Pour introduire ce coefficient et démontrer qu'il n'est qu'un cas particulier du coefficient de corrélation classique de Pearson, considérons la table suivante :

		Y		
		$Y=1$	$Y=0$	**Total**
X	$X=1$	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
	$X=0$	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
	Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

TAB. 5.101 – **Exemple dichotomique d'une table de contingences**

ou écrit autrement :

		Y		
		$Y=1$	$Y=0$	**Total**
X	$X=1$	a	b	$a+b$
	$X=0$	c	d	$c+d$
	Total	$a+c$	$b+d$	1

Maintenant rappelons que le coefficient de corrélation de Pearson est donné par :

$$\rho_{X,Y}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\rho_{X,Y}=\frac{\text{E}[XY]-\text{E}[X]\,\text{E}[Y]}{\sqrt{\text{E}[X^2]-[\text{E}[X]]^2}\sqrt{\text{E}[Y^2]-[\text{E}[Y]]^2}} \tag{5.7.2647}$$

Maintenant laissons X et Y être des variables de Bernoulli (voir page 641). Nous ne supposons pas une distribution identique des deux variables ni indépendance, mais nous supposons que les 4 probabilités suivant sont non-nulles.

Soit :

$$a:=P[X=1,Y=1],b:=P[X=1,Y=0],c:=P[X=0,Y=1],d:=P[X=0,Y=0] \tag{5.7.2648}$$

Nous avons alors dans un premier temps :

$$\text{E}[X]=a+b=p \tag{5.7.2649}$$
$$\text{E}[Y]=a+c=q \tag{5.7.2650}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\text{V}(X)&=\text{E}[(X-\text{E}[X])^2]=\text{E}[(X-p)^2]=p(1-p)^2+(1-p)(-p)^2\\&=p(1-2p+p^2)+p^2-p^3=p-2p^2+p^3+p^2-p^3\\&=p-p^2=p(1-p)\end{aligned} \tag{5.7.2651}$$

En cours de traduction de l'anglais

et :

$$\sigma_X = \sqrt{\text{V}(X)} = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{(a+b)(1-(a+b))} \tag{5.7.2652}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\text{V}(Y)} = \sqrt{q(1-q)} = \sqrt{(a+c)(1-(a+c))} \tag{5.7.2653}$$

et :

$$\text{cov}(X,Y) = \text{E}[XY] - \text{E}[X]\text{E}[Y] = a - pq = a - (a+b)(a+c) \tag{5.7.2654}$$

Enfin, par substitution dans l'équation pour ρ_{XY} :

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &= \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\ &= \frac{a-(a+b)(a+c)}{\sqrt{(a+b)(1-(a+b))}\sqrt{(a+c)(1-(a+c))}} \\ &= \frac{a-(a+b)(a+c)}{\sqrt{(a+b)(1-(a+b))(a+c)(1-(a+c))}}\end{aligned} \tag{5.7.2655}$$

Faisant les bonnes substitutions, cela nous conduit à :

$$\boxed{\phi = \frac{nn_{11} - n_{1.}n_{.1}}{\sqrt{n_{1.}(n-n_{1.})n_{.1}(n-n_{.1})}}} \tag{5.7.2656}$$

Si nous remplaçons n par $n_{11}+n_{12}+n_{22}+n_{21}$ et $n_{1.}$ par $n_{11}+n_{12}$ et $n_{.1}$ par$n_{11}+n_{21}$ alors nous obtenons après quelques simplifications très simples :

$$\phi = \frac{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}{\sqrt{(n_{11}+n_{12})(n_{21}+n_{22})(n_{11}+n_{21})(n_{12}+n_{22})}} \tag{5.7.2657}$$

L'interprétation du coefficient phi est similaire au coefficient de corrélation de Pearson. La plage va de -1 à $+1$, où :

- 0 signifie aucune corrélation
- $+1$ est une corrélation positive parfaite : la majorité des données sont des les cellules diagonales
- -1 est une corrélation négative parfaite : la majorité des données sont en-dehors des cellules diagonales

Le Département de Sciences Politiques de l'Université Quinnipiac a publié cette liste utile de la signification des coefficients de corrélation de Pearson. Les mêmes règles empiriques peuvent être utilisées pour le coefficient ϕ. Notez que ce sont des estimations brutes pour interpréter les forces des relations :

En cours de traduction de l' anglais

Intervalle	Interprétation
$0.7 \leq \varphi \leq 1$	Very strong positive relationship
$0.4 \leq \varphi < 0.70$	Strong positive relationship
$0.3 \leq \varphi < 0.4$	Moderate positive relationship
$0.2 \leq \varphi < 0.3$	Weak positive relationship
$0.0 < \varphi < 0.2$	No or negligible positive relationship
$\varphi = 0$	No relationship
$0.0 > \varphi > -0.2$	No or negligible negative relationship
$-0.2 > \varphi > -0.3$	Weak negative relationship
$-0.3 > \varphi > -0.4$	Moderate negative relationship
$-0.4 > \varphi > -0.70$	Strong negative relationship
$-0.7 > \varphi \geq 1$	Very strong negative relationship

TAB. 5.102 – **Interprétations coefficient φ de Pearson**

Bien que le coefficient de corrélation de Pearson se ramène au coefficient phi de Pearson dans le cas 2×2, ils ne sont généralement pas les mêmes. Le coefficient de corrélation de Pearson va de -1 à $+1$, où $pm1$ indique un accord ou un désaccord parfait, et 0 indique aucune relation. Le coefficient phi a une valeur maximale qui est déterminée par la distribution des deux variables si une ou les deux variables peuvent prendre plus de deux valeurs.

En cours de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérez le tableau suivant (même si les conditions ne sont pas remplies pour un test d'indépendance du chi carré) :

Projets	**Certifiés Responsables de projets**	**Non-Certifiés Responsables de projets**	**Total**
Échéances non respectées	8	1	9
Échéances respectées	4	5	9
Total	12	6	18

TAB. 5.103 – **Table de contingence carrée**

Nous avons alors :

$$\phi = \frac{nn_{11} - n_{1.}n_{.1}}{\sqrt{n_{1.}(n-n_{1.})n_{.1}(n-n_{.1})}} = \frac{18 \cdot 8 - 9 \cdot 12}{\sqrt{9(18-9) \cdot 12(18-12)}} \cong 0.471 \quad (5.7.2658)$$

On peut prouver que le coefficient phi de Pearson est égal au coefficient phi de Cramèr vu juste avant (c'est d'ailleurs pour ça que la notation est la même !) et qui est donné pour rappel :

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi_1^2}{N}} \quad (5.7.2659)$$

Pour simplifier la notation, posons :

$$n_{11} = a, n_{12} = b, n_{21} = c, n_{22} = d \quad (5.7.2660)$$

Nous avons alors pour un tableau de contingence de taille 2×2 :

$$\chi^2=\sum_{l=1}^{2}\sum_{c=1}^{2}\frac{(n_{lc}-e_{lc})^2}{e_{lc}}=\frac{(a-e_{11})^2}{e_{11}}+\frac{(b-e_{12})^2}{e_{12}}+\frac{(c-e_{21})^2}{e_{21}}+\frac{(d-e_{22})^2}{e_{22}} \tag{5.7.2661}$$

Avec de manière identique que pour notre étude du coefficient V de Cramèr :

$$e_{11}=\frac{(a+b)(a+c)}{n},e_{12}=\frac{(a+b)(b+d)}{n},e_{21}=\frac{(a+c)(c+d)}{n},e_{22}=\frac{(b+d)(c+d)}{n} \tag{5.7.2662}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}\chi^2&=\frac{\left(a-\dfrac{(a+b)(a+c)}{n}\right)^2}{\dfrac{(a+b)(a+c)}{n}}+\frac{\left(b-\dfrac{(a+b)(b+d)}{n}\right)^2}{\dfrac{(a+b)(b+d)}{n}}+\frac{\left(c-\dfrac{(a+c)(c+d)}{n}\right)^2}{\dfrac{(a+c)(c+d)}{n}}+\frac{\left(d-\dfrac{(b+d)(c+d)}{n}\right)^2}{\dfrac{(b+d)(c+d)}{n}}\\&=\frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n}}\left[\frac{(na-(a+b)(a+c))^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(nb-(a+b)(b+d))^2}{(a+b)(b+d)}+\frac{(nc-(a+c)(c+d))^2}{(a+c)(c+d)}+\frac{nd-(b+d)(c+d))^2}{(b+d)(c+d)}\right]\end{aligned} \tag{5.7.2663}$$

Mais nous avons :

$$\begin{aligned}na-(a+b)(a+c)&=(a+b+c+d)a-(a+b)(a+c)\\&=a^2+ab+ac+ad-a^2-ac-ba-bc=ad-bc\end{aligned} \tag{5.7.2664}$$

et :

$$\begin{aligned}nb-(a+b)(b+d)&=(a+b+c+d)b-(a+b)(b+d)\\&=ab+b^2+bc+bd-ab-ad-b^2-bd=bc-ad\end{aligned} \tag{5.7.2665}$$

et :

$$\begin{aligned}nc-(a+c)(c+d)&=(a+b+c+d)c-(a+c)(c+d)\\&=ac+bc+c^2+cd-ac-ad-c^2-cd=bc-ad\end{aligned} \tag{5.7.2666}$$

et :

$$\begin{aligned}nd-(b+d)(c+d)&=(a+b+c+d)d-(b+d)(c+d)\\&=ad+bd+dc+d^2-bc-bd-dc-d^2=ad-bd\end{aligned} \tag{5.7.2667}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\chi^2&=\frac{1}{n}\left[\frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(bc-ad)^2}{(a+b)(b+d)}+\frac{(bc-ad)^2}{(a+c)(c+d)}+\frac{(ad-bc)^2}{(b+d)(c+d)}\right]\\&=\frac{(ad-bc)^2}{n}\left[\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+b)(b+d)}+\frac{1}{(a+c)(c+d)}+\frac{1}{(b+d)(c+d)}\right]\\&=\frac{(ad-bc)^2}{n}\frac{(b+d)(c+d)+(a+c)(c+d)+(a+b)(b+d)+(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)(b+d)(c+d)}\end{aligned} \tag{5.7.2668}$$

Notez que :

$$\begin{aligned}&(b+d)(c+d)+(a+c)(c+d)+(a+b)(b+d)+(a+c)(a+b)\\&\quad=dc+d^2+ac+ad+c^2+cd+ab+ad+b^2+bd+a^2+ab+ca+bc\\&\quad=a^2+b^2+c^2+d^2+2bc+2bd+2dc+2ac+2ab+2ad\\&\quad=(a+b+c+d)^2=n^2\end{aligned} \tag{5.7.2669}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ce dernier résultat nous amène à :

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2}{n}\frac{n^2}{(a+c)(a+b)(b+d)(c+d)} = n\frac{(ad-bc)^2}{(a+c)(a+b)(b+d)(c+d} \\ = n\varphi^2 \quad (5.7.2670)$$

Dès lors :

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} \quad (5.7.2671)$$

Le coefficient phi de Pearson est la source d'inspiration du "coefficient de corrélation de Matthews" (M.C.C.) qui est utilisé en apprentissage automatique (machine learning) comme mesure de la qualité des classifications binaires (à deux classes). Seul le vocabulaire diffère. En effet, il est défini comme :

$$\text{MCC} = \frac{\text{TP}\cdot\text{TN}-\text{FP}\cdot\text{FN}}{\sqrt{(\text{TP}+\text{FP})(\text{TP}+\text{FN})(\text{TN}+\text{FP})(\text{TN}+\text{FN})}} \quad (5.7.2672)$$

Même s'il n'y a pas de manière parfaite de décrire la matrice de confusion $\mathcal{C}$ des vrais et faux positifs et négatifs par un seul nombre (nous verrons dans le chapitre des Méthodes Numériques ce que sont les "matrices de confusion" !), Le coefficient de corrélation Matthews est généralement considéré comme l'une des meilleures mesures de ce type en ce début du 21e siècle.

Dans cette relation, TP est le nombre de vrais positifs, TN le nombre de vrais négatifs, FP le nombre de faux positifs et FN le nombre de faux négatifs. Si l'une des quatre sommes du dénominateur est nulle, le dénominateur peut être arbitrairement fixé à un; il en résulte un coefficient de corrélation Matthews de zéro, qui peut être démontré comme étant la valeur limite correcte.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.15.5 Test exact de Fisher

Lorsque les effectifs dans la table de contingences sont trop petits ou que les valeurs sont vraiment trop irrégulières, l'utilisation du Khi-deux (test de Pearson) n'est plus possible car les conditions d'application ne sont plus valables. Nous allons voir que le test exact de Fisher peut être formalisé analytiquement dans des tableaux de contingences de 2 lignes par 2 colonnes (la majorité des logiciels de statistiques ne gèrent que ce scénario particulier pour le test exact de Fisher) sinon quoi il faut recourir à des simulations de Monte-Carlo.

Le principe du "test exact de Fisher" (utilisable aussi bien en unilatéral qu'en bilatéral même si ce dernier est largement plus courant dans la pratique), basé donc sur la fréquence de croisement, est de déterminer si la configuration observée dans le tableau de contingence est une situation extrême par rapport aux situations possibles. Comme nous allons le démontrer, ce test a pour propriété particulière que n'importe quelle case du tableau peut servir de référence pour le test car les distributions sous-jacentes (lois marginales) de probabilité sont équivalentes.

Pour étudier ce test, comme souvent dans ce chapitre, passons directement par un exemple.

Considérons le tableau de contingence suivant (qui maintenant nous est connu...) :

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	8	1	9
Échéances non-respectées	4	5	9
Total	12	6	18

TAB. 5.104 – **Tableau de contingences de départ pour l'étude du test exact de Fisher**

qui est donc en réalité pas adapté pour un test d'indépendance du Khi-deux puisque le contenu des cellules est inférieur à 10 unités et le nombre de degrés de liberté serait lui égal à l'unité.

Ce même tableau en pourcentages donnera (même si c'est inutile pour le test que nous étudions il arrive souvent que les logiciels de statistiques communiquent ces valeurs) :

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	88.88%	11.12%	50%
Échéances non-respectées	44.44%	55.56%	50%
Total	66.66%	33.34%	100%

Les effectifs théoriques sont donnés par (même si c'est aussi inutile pour le test que nous étudions il arrive souvent que les logiciels de statistiques communiquent ces valeurs) :

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	$(12/18)\cdot 9=6$	$(6/18)\cdot 9=3$	9
Échéances non-respectées	$(12/18)\cdot 9=6$	$(6/18)\cdot 9=3$	9
Total	12	6	18

En traduction de l'anglais

La question que nous allons commencer par nous poser est la suivante : connaissant les totaux pour chaque ligne et chaque colonne, quelle est la probabilité d'avoir les valeurs présentes actuellement dans chacune des cases ?!

Cette question peut être formalisée si nous changeons le tableau sous la forme générique suivante :

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	$a=k$	b	$a+b=m$
Échéances non-respectées	c	d	$c+d$
Total	$a+c=p$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

Explicitement et relativement à notre exemple en adoptant la notation d'usage de la loi hypergéométrique, la question est de savoir quelle était la probabilité d'avoir 8 ($a = k$) projets parmi les 18 (n) dont les délais ont été respectés par des chefs de projets certifiés sachant qu'il y a 9 projets (m) au total dont les délais ont été respectés et 12 projets (p) au total gérés par des chefs de projets certifiés.

Nous avons alors vu plus haut que dans ce cas il s'agit d'un tirage exhaustif, il faut donc utiliser la loi hypergéométrique donnée par :

$$P(n,p,m,k) = \mathcal{H}(k) = \frac{C_k^m C_{p-k}^{n-m}}{C_p^n} = \frac{\dfrac{m!}{k!(m-k)!}\dfrac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}} \quad (5.7.2673)$$

Soit avec la version française de Microsoft Excel 11.8346 :

```
=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(k,p,m,n,FAUX)
=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(8,12,9,18,FAUX)=0.06108597
```

En cours de traduction de l'anglais

où pour rappel, k est le nombre de succès dans l'échantillon, p est la taille de l'échantillon, m le nombre de succès dans la population et n la taille de la population.

Au fait les probabilités sont toutes égales quelle que soit la cellule choisie du tableau de contingences ! ! Cela peut se vérifier numériquement pour les sceptiques avec à nouveau un tableur comme la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 en créant la structure suivante :

	A	B	C
1	**Tableau de contingence:**		
2	=ALEA.ENTRE.BORNES(0;15)	=ALEA.ENTRE.BORNES(0;15)	=SOMME(A2:B2)
3	=ALEA.ENTRE.BORNES(0;15)	=ALEA.ENTRE.BORNES(0;15)	=SOMME(A3:B3)
4	=SOMME(A2:A3)	=SOMME(B2:B3)	=SOMME(A4:B4)
5			
6	**Contrôle:**		
7	= LOI.HYPERGEOMETRIQUE(A2;A4;C2;C4)	= LOI.HYPERGEOMETRIQUE(B2;B4;C2;C4)	
8	= LOI.HYPERGEOMETRIQUE(A3;A4;C3;C4)	= LOI.HYPERGEOMETRIQUE(B3;B4;C3;C4)	

FIG. 5.239 – **Test exact de Fisher pour la symétrie avec Microsoft Excel 14.0.6123**

et donc à chaque fois que le lecteur appuiera sur la touche F9 de son clavier il pourra constater que toutes les probabilités sont toujours égales.

Cela peut se vérifier aussi formellement en choisissant une cellule du tableau et en écrivant :

$$P(n,p,m,k) = \frac{C_k^m C_{p-k}^{n-m}}{C_p^n} = \frac{\dfrac{m!}{k!(m-k)!}\dfrac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}} \quad (5.7.2674)$$

et pour une autre cellule de la même colonne, nous aurons :

$$P(n,p,n-m,p-k)=\frac{\dfrac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}\dfrac{(n-(n-m))!}{(p-(p-k))!((n-(n-m))-(p-(p-k)))!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$$
$$=\frac{\dfrac{(n-m)!}{(p-k)!((n-m)-(p-k))!}\dfrac{m!}{k!(m-k)!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}} \quad (5.7.2675)$$

et donc :

$$P(n,p,m,k)=P(n,p,n-m,p-k) \quad (5.7.2676)$$

et ainsi de suite...

Bref, ceci étant dit, nous avons donc dans la case supérieure gauche la valeur 8 alors que l'effectif théorique est de 6. La première chose à laquelle nous pouvons répondre est de savoir si cette valeur de 8 est anormalement grande ou pas par rapport à l'effectif théorique. Pour cela, nous calculons par exemple en unilatéral la probabilité cumulée d'être inférieur ou égal à 8. Nous avons alors avec la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 et ultérieur (le dernier paramètre à 1 - équivalent à `VRAI` - de la fonction permettant d'indiquer au logiciel que nous voulons la probabilité cumulée) :

```
=LOI.HYPERGEOMETRIQUE.N(8,12,9,18,1)=0.995475113
```

Il apparaît donc avec un seuil de 5% en unilatéral que cette valeur est anormalement grande. Nous sommes donc dans une situation extrême.

Par contre, même si les probabilités sont égales pour toutes les cases, la probabilité cumulée elle ne l'est pas ! Ainsi, nous avons par exemple pour la valeur de la case inférieure gauche (afin de vérifier si elle est anormalement petite par rapport à l'effectif théorique de 6) :

```
=LOI.HYPERGEOMETRIQUE.N(4,12,9,18,1)=0.06561086
```

Donc c'est une valeur qui n'est pas anormalement petite. Cependant, nous souhaiterions avoir un test permettant de conclure si l'ensemble du tableau est dans une configuration extrême ou pas. Or, en faisant le calcul case par case, nous n'allons pas arriver à grand-chose...

L'idée consiste alors à construire tous les tableaux dont les fréquences marginales sont de $9;9$ et $12;6$ et de calculer la probabilité d'une case donnée (l'avantage de cette technique est que la conclusion sera la même quelle que soit la case prise pour référence du calcul) :

Projets	**Certifiés Responsables de projets**	**Non-Certifiés Responsables de projets**	**Total**
Échéances respectées	9	0	9
Échéances non-respectées	3	6	9
Total	12	6	18

En cours de traduction de l'anglais

=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(9,12,9,18)=0.004524887

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	8	1	9
Échéances non-respectées	4	5	9
Total	12	6	18

=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(8,12,9,18)=0.06108597

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	7	2	9
Échéances non-respectées	5	4	9
Total	12	6	18

En cours de traduction de l'anglais

=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(7,12,9,18)=0.244343891

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	6	3	9
Échéances non-respectées	6	3	9
Total	12	6	18

=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(6,12,9,18)=0.380090498

Projets	Certifiés Responsables de projets	Non-Certifiés Responsables de projets	Total
Échéances respectées	5	4	9
Échéances non-respectées	7	2	9
Total	12	6	18

=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(5,12,9,18)=0.244343891

Projets	**Certifiés Responsables de projets**	**Non-Certifiés Responsables de projets**	**Total**
Échéances respectées	4	5	9
Échéances non-respectées	8	1	9
Total	12	6	18

`=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(4,12,9,18)=0.061085973`

Projets	**Certifiés Responsables de projets**	**Non-Certifiés Responsables de projets**	**Total**
Échéances respectées	3	6	9
Échéances non-respectées	9	0	9
Total	12	6	18

`=LOI.HYPERGEOMETRIQUE(3,12,9,18)=0.004524887`

Soit pour résumer avec les valeurs de k (correspondantes à la cellule supérieure gauche) :

k	**Probabilité**
9	0.00452489
8	0.06108597
7	0.24434389
6	0.3800905
5	0.24434389
4	0.06108597
3	0.00452489
Somme :	1

TAB. 5.105 – **Probabilités de la loi Hypergéométrique correspondantes à la combinaison**

Comme dans la colonne du tableau original avec laquelle nous venons de travailler la plus petite valeur est 4 et la plus grande 8, nous allons prendre les probabilités de queues pour savoir quelle est la p-valeur d'être au-dessus ou égal à 8 et en-dessous ou égal 4 (donc il s'agit d'un test en bilatéral). Nous avons alors :

En cours de traduction de l'anglais

k	**Probabilité**
9	0.00452489
8	0.06108597
4	0.06108597
3	0.00452489
Sum :	0.131221719

TAB. 5.106 – **Sélection des valeurs d'intérêt**

Donc la p-valeur est de 13.12%. Nous ne pouvons dès lors pas dire que notre tableau d'origine est dans une configuration extrême si par exemple nous choisissons un seuil de 5%. De nombreux logiciels ne donnent que la p-valeur.

Remarque

Le choix des bornes est discutable avec ce test car si nous choisissons par exemple de nous concentrer sur la probabilité cumulée d'être dans l'intervalle borné fermé de 4 à 8 (donc inclus !), nous aurions un résultat de 99.09% et donc il faudrait considérer que nous sommes dans une configuration extrême à un seuil de 5%. Donc le choix des bornes avec une loi discrète est toujours délicat dans un test contrairement à un test basé sur une loi continue qui ne souffre absolument pas de ce problème. La majorité des logiciels de statistiques que nous connaissons prennent un intervalle borné ouvert pour l'intervalle (ce qui correspond alors premier calcul que nous avons effectué avec la p-valeur de 13.12%).

Enfin, pour clore, le lecteur pourra vérifier qu'il tombera sur le même résultat quelle que soit la case qu'il choisit comme référence.

Indiquons que le test exact de Fisher peut bien évidemment être utilisé en machine learning pour mesurer la performance de classification binaire !

En cours de traduction

5.7.15.6 Kappa d'agrément de Cohen

Si nos jugements reflètent notre pensée, ils sont plus rarement en accord avec ceux d'autrui.

Cette variabilité interindividuelle bénéfique pour l'Homme, est cependant pénalisante dans de nombreuses disciplines scientifiques, où il est souvent nécessaire d'évaluer et d'améliorer l'accord entre des informations de même nature appliquées au même objet dans une exigence de contrôle de la qualité ou d'assurance qualité ou encore d'analyse sensorielle.

Le test non paramétrique kappa de Cohen permet par exemple de chiffrer l'accord binaire (dichotomique) entre deux ou plusieurs observateurs ou techniciens lorsque les jugements sont qualitatifs.

Cette statistique kappa est fréquemment utilisée pour tester la "concordance inter-juges". L'importance de la concordance inter-juges réside dans le fait qu'elle représente la mesure de la manière dont les données collectées dans une étude sont des représentations correctes des variables mesurées. La manière avec laquelle les collecteurs de données (évaluateurs) attribuent

le même score à la même variable est donc appelée "concordance inter-juges". Bien qu'il existe une variété de méthodes pour mesurer la fiabilité inter-juges (ou "inter-évaluateurs"), elle était traditionnellement mesurée en pourcentage de concordance, calculé comme le nombre de scores de concordance divisé par le nombre total de scores. En 1960, Jacob Cohen a critiqué l'utilisation du pourcentage de concordance en raison de son incapacité à rendre compte de l'accord fortuit. Il a alors présenté le kappa de Cohen, développé pour tenir compte de la possibilité que les évaluateurs devinent réellement au moins certaines variables en raison de l'incertitude. Comme la plupart des statistiques de corrélation, le kappa peut aller de -1 à $+1$. Bien que le kappa soit l'une des statistiques les plus couramment utilisées pour tester la fiabilité inter-juges, il présente des limites. Les jugements sur le niveau de kappa qui devrait être acceptable pour la recherche en santé sont remis en question. L'interprétation suggérée par Cohen peut être trop indulgente pour les études liées à la santé, car elle implique qu'un score aussi bas que 0.41 pourrait être acceptable. Le kappa et le pourcentage de concordance sont comparés, et les niveaux de kappa et de pourcentage de concordance qui devraient être exigés dans les études de santé sont suggérés.

De nombreuses situations dans le secteur de la santé dépendent de plusieurs personnes pour collecter des données de recherche ou de laboratoire clinique. La question de la concordance ou de l'accord entre les individus collectant des données se pose immédiatement en raison de la variabilité parmi les observateurs humains. Des études de recherche bien conçues doivent donc inclure des procédures qui mesurent l'accord entre les différents collecteurs de données. La fiabilité inter-juges est une préoccupation à un degré ou à un autre dans la plupart des grandes études en raison du fait que plusieurs personnes collectant des données peuvent expérimenter et interpréter les phénomènes d'intérêt différemment !

En traduction de l'anglais

Remarque

Il existe un certain nombre de statistiques qui ont été utilisées pour mesurer la fiabilité inter-juges et intra-juges. Une liste partielle comprend le pourcentage de concordance, le kappa de Cohen (pour deux évaluateurs), le Fleiss kappa (adaptation du kappa de Cohen pour trois évaluateurs ou plus) le coefficient de contingence, le Pearson R et le Spearman rho, le coefficient de corrélation intra-classe, le coefficient de corrélation de concordance et l'alpha de Krippendorff (utile lorsqu'il y a plusieurs évaluateurs et plusieurs évaluations possibles). L'utilisation de coefficients de corrélation tels que le R de Pearson peut être un mauvais reflet du degré d'accord entre les évaluateurs, entraînant une surestimation ou une sous-estimation extrêmes du niveau réel d'accord des évaluateurs.

Prenons le cas dans le domaine médical où deux ou plusieurs praticiens examinant le même patient proposent des diagnostics différents ou des décisions thérapeutiques différentes. En l'absence d'une référence, cette multiplication des avis n'apporte pas la sécurité attendue d'un parfait accord diagnostique ou thérapeutique pour le médecin traitant et le patient. Il est donc important que l'accord dans une équipe de travail ou entre plusieurs équipes soit le meilleur possible pour garantir la qualité et la continuité des soins.

Une solution consiste ici à réaliser une séance de "mise en concordance" entre les médecins pour estimer leur taux d'accord par le coefficient kappa et d'étudier leurs désaccords pour y remédier.

Pour illustrer le principe, considérons le cas très important où deux responsables qualité ont

analysé 11 pièces pour les rejeter ou les accepter. Ils ont obtenu :

		Bob		
		Rejeté	**Accepté**	**Total**
Alice	**Rejeté**	3	2	5
	Accepté	1	5	6
	Total	4	7	11

TAB. 5.107 – **Tableau de contingences dichotomique d'exemple**

Les fréquences théoriques étant obtenues par une règle de trois (même calcul de règle de trois que pour le test d'indépendance du Khi-deux et le test exact de Fisher vus plus haut) :

		Bob		
		Rejeté	**Accepté**	**Total**
Alice	**Rejeté**	$(4/11)\cdot 5 = 1.82$	$(7/11)\cdot 5 = 3.18$	5
	Accepté	$(4/11)\cdot 6 = 2.18$	$(7/11)\cdot 6 = 3.82$	6
	Total	4	7	11

TAB. 5.108 – **Fréquences théoriques**

En cours de traduction de l'anglais

Le Kappa de Cohen est défini par le rapport :

$$\kappa_C = \frac{\text{Observés}_{\text{Accords}} - \text{Attendus}_{\text{Accords}}}{\text{Essais} - \text{Attendus}_{\text{Accords}}} \tag{5.7.2677}$$

Dès lors avec notre exemple :

$$\kappa_C = \frac{(3+5)-(1.82+3.82)}{11-(1.82+3.82)} = 0.441 \tag{5.7.2678}$$

Cette valeur de 0.441 indique un accord modéré entre les deux responsables.

Si plutôt que d'avoir des fréquences, nous travaillons en pourcents (proportions) du total, le Kappa s'écrit alors :

$$\kappa_C = \frac{\%\text{Observés}_{\text{Accords}} - \%\text{Attendus}_{\text{Accords}}}{1 - \text{Essais}_{\text{Accords}}} = \frac{p_{o,a} - p_{e,a}}{1 - p_{e,a}} \tag{5.7.2679}$$

Ce qui donnera avec notre exemple :

$$\kappa_C = \frac{\dfrac{3+5}{11} - \dfrac{1}{11^2}(4\cdot 5 + 7\cdot 6)}{1 - \dfrac{1}{11^2}(4\cdot 5 + 7\cdot 6)} = 0.441 \tag{5.7.2680}$$

Ce qu'il est aussi d'usage d'écrire de manière plus condensée sous la forme :

$$\kappa_C = \frac{\sum_i p_{ii} - \sum_i p_{i+}p_{i+}}{1 - \sum_i p_{i+}p_{i+}} = \frac{(p_{00}+p_{11}) - (p_{0+}p_{0+} + p_{1+}p_{1+})}{1 - (p_{0+}p_{0+} + p_{1+}p_{1+})} \tag{5.7.2681}$$

avec :

$$-1 \leq \kappa_C \leq +1 \quad (5.7.2682)$$

où $+1$ correspond à un accord parfait et -1 à un désaccord parfait. Évidemment, pour qu'il y ait accord parfait, il faut que les cellules (Rejeté, Rejeté) et (Accepté, Accepté) soient égales et que les autres soient nulles.

L'interprétation suivante est d'usage pour la partie positive de κ_C (la négative ayant aucun intérêt) :

Intervalle	Interprétation
$0.8 \leq \kappa \leq 1$	Très bon accord
$0.6 \leq \kappa < 0.8$	Bon accord
$0.4 \leq \kappa < 0.6$	Accord modéré
$0.2 \leq \kappa < 0.4$	Accord faible
$0.0 \leq \kappa < 0.2$	Accord nul

TAB. 5.109 – κ_C **Interprétations d'usage**

Il faut cependant être très critique (comme toujours !) en utilisant ce type d'outil. Comprendre sa construction permet aussi d'en identifier les faiblesses et hypothèses qui sont tout à fait discutables.

Indiquons que le Kappa de Cohen peut bien évidemment être utilisé en machine learning pour mesurer la performance de classification binaire !

5.7.15.7 Test de McNemar

Le test de McNemar pourrait très bien se calculer en même temps que le Kappa de Cohen (le premier étant un test d'hypothèse statistiques et le deuxième un uniquement un estimateur ponctuel empirique de concordance). L'idée est que sous l'hypothèse nulle H_0 (appelée dans ce cas particulier "hypothèse de symétrie"), l'une des diagonales du tableau devrait avoir des valeurs égales. En d'autres termes sous la forme des proportions et en ne nous concentrant que sur une des deux diagonales :

$$H_0 : p_{11} = p_{22} \quad (5.7.2683)$$

ou de fréquences :

$$H_0 : n_{11} = n_{22} \quad (5.7.2684)$$

Sachant que :

$$n_{11} + n_{22} = n \quad (5.7.2685)$$

et sous la condition que n est suffisamment grand, nous pouvons écrire en nous basant sur une loi Binomiale dont le comportement est asymptotiquement Normal :

$$Z = \frac{\dfrac{n_{11}}{n} - 0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5(1-0.5)}{n}}} \quad (5.7.2686)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons nous rendre compte que cela équivaut à écrire :

$$Z=\frac{\dfrac{n_{11}}{n}-\dfrac{1}{2}\dfrac{n_{11}+n_{22}}{n}}{\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{n_{11}+n_{22}}{4n}\right)}{n}}}=\frac{n_{11}-\left(\dfrac{n_{11}+n_{22}}{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{n_{11}+n_{22}}}{2}} \tag{5.7.2687}$$

Dans la littérature spécialisée, nous retrouvons souvent cette dernière relation sous la forme :

$$Z=\frac{b-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{b+c}}{2}}=\frac{b-c}{\sqrt{b+c}} \tag{5.7.2688}$$

Pour en revenir à notre relation initiale, certains en prennent le carré et approximent alors le carré de Z comme une loi du Khi-deux à un degré de liberté (mais bon dans la réalité approximer une loi Normale centrée réduite par une loi du Khi-deux à un degré de liberté c'est un peu n'importe quoi...) :

$$Z^2=\frac{\left(\dfrac{n_{11}}{n}-0.5\right)^2}{\dfrac{0.5(1-0.5)}{n}}=\frac{(b-c)^2}{b+c}\cong\chi_1^2 \tag{5.7.2689}$$

qui est souvent la relation définie dans les livres (sans démonstration...) comme étant le "test de McNemar".

Le test est normalement effectué en bilatéral. L'avantage du test de McNemar est la facilité avec laquelle nous pouvons construire un intervalle de confiance de la différence de la diagonale. Effectivement, partons de l'estimateur de la différence :

$$\hat{d}=p_{11}-p_{22}=\frac{n_{11}}{n}-\frac{n_{22}}{n} \tag{5.7.2690}$$

Dès lors en utilisant aussi la variance (et la covariance) démontrée lors de notre étude de la loi multinomiale à la page 654, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{d})&=\mathrm{V}\left(\frac{n_{11}}{n}-\frac{n_{22}}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(n_{11}-n_{22})=\frac{1}{n^2}\left[\mathrm{V}(n_{11})+\mathrm{V}(n_{22})-2\mathrm{cov}(n_{11},n_{22})\right]\\&=\frac{1}{n^2}\left[np_{11}(1-p_{11})+np_{22}(1-p_{22})-2(-np_{11}p_{22})\right]\\&=\frac{1}{n}\left[p_{11}(1-p_{11})+p_{22}(1-p_{22})+2p_{11}p_{22}\right]\\&=\frac{1}{n}\left[\frac{n_{11}}{n}\left(1-\frac{n_{11}}{n}\right)+\frac{n_{22}}{n}\left(1-\frac{n_{22}}{n}\right)+\frac{n_{11}}{n}\frac{n_{22}}{n}\right]\end{aligned} \tag{5.7.2691}$$

et donc nous pouvons faire un intervalle de confiance approximatif si les conditions habituelles sont respectées sous la forme :

$$\hat{d}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{V}(\hat{d})}\leq d\leq\hat{d}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{V}(\hat{d})} \tag{5.7.2692}$$

En cours de traduction de l'anglais

C'est-à-dire un petit plus explicitement :

$$\left(\frac{\hat{n}_{11}}{n}-\frac{\hat{n}_{22}}{n}\right)-Z_{\alpha/2}\sqrt{\text{V}(\hat{d})}\leq\frac{n_{11}}{n}-\frac{n_{22}}{n}\leq\left(\frac{\hat{n}_{11}}{n}-\frac{\hat{n}_{22}}{n}\right)+Z_{\alpha/2}\sqrt{\text{V}(\hat{d})} \tag{5.7.2693}$$

avec comme nous venons de le prouver :

$$\text{V}(\hat{d})=\frac{1}{n}\left[\frac{n_{11}}{n}\left(1-\frac{n_{11}}{n}\right)+\frac{n_{22}}{n}\left(1-\frac{n_{22}}{n}\right)+\frac{n_{11}}{n}\frac{n_{22}}{n}\right] \tag{5.7.2694}$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Lors d'un audit social, un sondage est mené sur 200 salariées à propose de l'organisation du travail. Après des réaménagements, la même question est posée. Peut-on considérer qu'il y a eu de réels changements ?

	Oui (avant)	**Non (avant)**
Oui (après)	55	38
Non (après)	38	82

TAB. 5.110 – Sondage avant/après (apparié)

Nous avons alors en prenant arbitrairement la diagonale $(25, 38)$ pour l'analyse :

$$Z^2 = \frac{\left(\frac{n_{11}}{n} - 0.5\right)^2}{\frac{0.5(1-0.5)}{n}} = \frac{(b-c)^2}{b+c} = 2.684$$

La majorité des logiciels de statistique ne vous donneront pas 2.683 car ils appliquent une correction empirique à cause de l'approximation grossière qu'est la loi de Khi-deux. Vous aurez alors sur l'écran des logiciels la valeur de 2.285. pour Z^2.

La p-valeur sera elle donnée (sans la correction) avec un logiciel comme la version française de Microsoft Excel 14.0.6123 par :

`= 1-LOI.KHIDEUX.N(2.683, 1, VRAI)` $= 10.14\%$

et avec la correction elle donnerait environ 13%. Donc dans les deux cas la p-valeur étant supérieure au seuil de 5%, on ne peut alors rejetter l'hypothèse nulle H_0 comme quoi la différence des deux valeurs est grande.

Nous ne calculerons pas dans l'exemple ici présent l'intervalle de confiance de l'écart car les logiciels de statistiques ont presque tous des méthodes différentes de calcul pour cette valeur.

Enfin, pour clore le sujet concernant le test de McNemar, signalons un indicateur empirique souvent utilisé est qui s'appelle le "coefficient de Yule" ou "Q de Yule" défini par :

$$Q = \frac{P\,(X \text{ et } Y \text{ sont concordants}) - P\,(X \text{ et } Y \text{ sont discordants})}{P\,(X \text{ et } Y \text{ sont concordants}) + P\,(X \text{ et } Y \text{ sont discordants})} = \frac{ad-bc}{ad+bc}$$

où a, b, c, d doivent être des entiers positifs non nuls correspondant aux valeurs de position des tables de contingence similaires à :

	Oui	**Non**
Positif	a	b
Négatif	c	d

Remarque

Le Q de Yule est juste la version a 2×2 du coefficient gamma de Goodman et Kruskal. On peut aussi évidemment calculer un rapport de cotes (RC) en utilisant $(a \cdot d)/(b \cdot c)$ (puis calculer son intervalle de confiance en accord avec la démonstration disponible à la page **??**). Nous pouvons également convertir ce rapport de cotes en une indice allant de -1 à $+1$ en utilisant $(\text{RC}-1)/(\text{RC}+1)$.

Le Q de Yule est toujours un nombre compris entre -1 et $+1$. Voici un tableau donnant un interprétation des valeurs des Q de Yule :

Intervalle	Interprétation
$Q=0$	Aucune association entre les variables
$0 \leq \lvert Q\rvert \leq 0.29$	Une association négligeable ou très petite
$0.30 \leq \lvert Q\rvert \leq 0.49$	Une association modérée entre les variables
$0.50 \leq \lvert Q\rvert \leq 0.69$	Une association substantielle entre les variables
$0.70 \leq \lvert Q\rvert < 1$	Une association très forte
$\lvert Q\rvert = 1$	Une association parfaite entre les événements

TAB. 5.111 – **Table d'interprétation de l'utilisation du Q de Yule**

En cours de traduction de l'anglais

Le "test de Cochran-Armitage pour la tendance" (voir juste ci-dessous), également nommé "test du chi carré pour la tendance" dans de nombreux logiciels statistiques, est utilisé dans l'analyse de données catégorielles lorsque le but est d'évaluer la présence d'une association entre une variable avec 2 catégories et une variable avec k catégories. Il modifie le test du chi carré de Pearson pour incorporer un effet d'ordre possible dans les effets des k catégories de la deuxième variable. Par exemple, les doses d'un traitement peuvent être ordonnées comme étant 'faibles', 'moyennes' et 'élevées', et nous pouvons soupçonner que le bénéfice du traitement ne peut pas diminuer à mesure que la dose augmente. Le test de tendance est souvent utilisé comme test basé sur le génotype pour les études d'association génétique groupe test/groupe contrôle.

5.7.15.7.1 Dérivation du test de Cochran-Armitage de tendance pour les tables génotypes 2×3

Nous allons dériver ici un cas particulier car le cas général est hors du cadre de ce livre. Considérez pour cela que nous avons échantillonné R cas et S contrôles :

	Nombre d'allèles malades			
	0	1	2	**Totaux**
Groupe Test	r_0	r_1	r_2	R
Groupe Contrôle	s_0	s_1	s_2	S
Totaux	n_0	n_1	n_2	N

Nous voulons tester H_0 contre H_1. L'idée est :

- H_0 : Toutes les entrées du tableau sont proportionnelles, vs.

- H_1 : Dans une colonne, la valeur absolue de la différence entre la probabilité qu'une observation soit classée comme "Groupe Test" ou "Groupe Témoin" augmente de façon monotone dans le tableau.

Nous allons travailler avec la différence entre les valeurs de la colonne afin de normaliser d'abord les lignes pour avoir les mêmes sommes :

	Nombre d'allèles malades			
	0	1	2	**Totals**
Groupe Test	$S\cdot r_0$	$S\cdot r_1$	$S\cdot r_2$	$R\cdot S$
Groupe Contrôle	$R\cdot s_0$	$R\cdot s_1$	$R\cdot s_2$	$R\cdot S$

Nous choisissons un ensemble de scores x_1, x_2 et x_3 et formons les statistiques du test :

$$U=\sum_{i=0}^{2} x_i(Sr_i-Rs_i) \quad (5.7.2695)$$

En cours de traduction de l'anglais

Sous H_0 :

$$P(\text{Test}|\text{Comptage}=i)=P(\text{Contrle}|\text{Comptage}=i)=\frac{n_i}{N} \qquad \text{et} \qquad \text{E}(U)=0 \quad (5.7.2696)$$

En posant $S=N-R$, $s_i=n_i-r_i$, et en choisissant les sccores $x_0=0$, $x_1=1$, et $x_2=2$, la statistique du test devient :

$$U=N(r_1+2r_2)-R(n_1+2n_2) \quad (5.7.2697)$$

En revenant aux scores génériques x_i, nous calculons la variance de U comme suit :

$$\begin{aligned}\text{V}(U)=&\text{V}\left(\sum_{i=0}^{2} x_i(Sr_i-Rs_i)\right)=\text{V}\left(S\sum_{i=0}^{2} x_ir_i-R\sum_{i=0}^{2} x_is_i\right)\\ =&S^2\text{V}\left(S\sum_{i=0}^{2} x_ir_i\right)+R^2\text{V}\left(\sum_{i=0}^{2} x_is_i\right)\\ =&S^2\left[\sum_{i=0}^{2} x_i^2\text{V}(r_i)+2\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} x_ix_j\text{cov}(r_i,r_j)\right]+R^2\left[\sum_{i=0}^{2} x_i^2\text{V}(s_i)+2\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} x_ix_j\text{cov}(s_i,s_j)\right]\end{aligned} \quad (5.7.2698)$$

Sous H_0 (nous utilisons la variance et covariance de la distribution hypergéométrique[71] en igno-

[71]Si le lecteur n'est pas en mesure de trouver où est la preuve de cette covariance, vous pouvez la trouver ici à la page 654

rant le facteur de correction de la population) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(U) &\cong S^2\left[\sum_{i=0}^{2} x_i^2 R\left(\frac{n_i}{N}\right)\left(\frac{N-n_i}{N}\right) - 2\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} x_i x_j R\left(\frac{n_i}{N}\right)\left(\frac{n_j}{N}\right)\right]\\
&+R^2\left[\sum_{i=0}^{2} x_i^2 S\left(\frac{n_i}{N}\right)\left(\frac{N-n_i}{N}\right) - 2\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} x_i x_j S\left(\frac{n_i}{N}\right)\left(\frac{n_j}{N}\right)\right]\\
&=\frac{S}{N^2}\left[\sum_{i=0}^{2} x_i^2 SRn_i(N-n_i) - 2\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} x_i x_j SRn_i n_j\right]\\
&+\frac{R}{N^2}\left[\sum_{i=0}^{2} x_i^2 SRn_i(N-n_i) - 2\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} x_i x_j SRn_i n_j\right]\\
&=\frac{SR}{N}\left[\sum_{i=0}^{2} x_i^2 n_i(N-n_i) - 2\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} x_i x_j n_i n_j\right]
\end{aligned} \tag{5.7.2699}$$

Posons $S = N - R$. Choisissons les scores $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $x_2 = 2$ et la relation précédente se réduit alors à :

$$\mathrm{V}(U) \cong \frac{(N-R)R}{N}\left[N(n_1+4n_2)-(n_1+2n_2)^2\right] \tag{5.7.2700}$$

Pour N large (cela justifie le fait que nous avons ignoré le facteur de correction de population finie plus tôt), nous avons alors :

$$\frac{U}{\sigma_U} \cong \frac{N(r_1+2r_2)-R(n_1+2n_2)}{\sqrt{\dfrac{(N-R)R}{N}\left[N(n_1+4n_2)-(n_1+2n_2)^2\right]}} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{5.7.2701}$$

Donc, en utilisant la notation de Sasieni (1997) :

$$\boxed{\chi_G^2 = \frac{N\left[N(r_1+2r_2)-R(n_1+2n_2)\right]^2}{(N-R)R\left[N(n_1+4n_2)-(n_1+2n_2)^2\right]} \sim \chi_1^2} \tag{5.7.2702}$$

Encore une fois, nous remarquons que le test de Cochran-Armitage pour la tendance utilise une statistqiue de Wald et appartient donc à la famille des tests de Wald.

Remarque

Pour un exemple pratique et la mise en œuvre de ce test, notre lecteur peut se référer au livre compagnon sur R.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.16 Statistiques de survie

L'analyse de survie est une branche des statistiques permettant d'analyser la durée attendue jusqu'à ce qu'un ou plusieurs événements se produisent, tels que la mort d'organismes biologiques, une défaillance des systèmes mécaniques, le délai de réapprovisionnement des clients, etc.

Ce sujet est nommé "théorie de la fiabilité" ou "analyse de fiabilité" dans le domaine de l'ingénierie (voir section Génie Industriel page ??), "analyse de la durée" ou "modélisation de la durée" dans le domaine de l'économie, et "analyse de l'historique des événements" dans le domaine de la sociologie. L'analyse de survie tente de répondre à des questions telles que : quelle est la proportion d'une population qui survivra au-delà d'un certain temps ? Parmi ceux qui survivent, à quelle vitesse mourront-ils ou échoueront-ils ? Peut-on prendre en compte plusieurs causes de décès ou d'échec ? Comment des circonstances ou des caractéristiques particulières augmentent-elles ou diminuent-elles la probabilité de survie ?

Pour répondre à ces questions, il est nécessaire de définir la "durée de vie". Dans le cas de la survie biologique, la mort est sans ambiguïté, mais pour la fiabilité mécanique, la défaillance peut ne pas être bien définie, car il peut bien y avoir des systèmes mécaniques dans lesquels la défaillance est partielle, ou non localisée dans le temps. Même dans les problèmes biologiques, certains événements (par exemple, une crise cardiaque ou une autre défaillance d'organe) peuvent avoir la même ambiguïté. La théorie exposée ci-dessous suppose des événements bien définis à des moments précis ; d'autres cas peuvent être mieux traités par des modèles qui prennent explicitement en compte les événements ambigus.

En cours de traduction de l'anglais

Plus généralement, l'analyse de survie implique la modélisation des données temporelles d'événements ; dans ce contexte, la mort ou l'échec (rechute) est considéré comme un "événement" dans la littérature d'analyse de survie - traditionnellement, un seul événement se produit pour chaque sujet, après quoi l'organisme ou le mécanisme est mort ou brisé.

Dans la pratique nous considérons :

- Les tables de mortalité (voir section Dynamique des populations page ??) pour décrire les temps de survie des membres d'un groupe.
- La méthode Kaplan-Meier permet également de décrire les temps de survie des membres d'un groupe (voir ci-dessous).
- Le test Cochran-Mantel-Haenszel (test Log-Rank) pour comparer les temps de survie de deux ou plusieurs groupes (voir ci-dessous
- Le modèle de risque proportionnel de Cox (régression de Cox) pour décrire l'effet des variables qualitatives ou quantitatives sur la survie (voir ci-dessous).

Voici une taxonomie plus exhaustive (c'est-à-dire encore incomplète) des méthodes d'analyse des survie :

FIG. 5.240 – **Taxonomie des méthodes développées pour l'analyse de survie (source : ACM Computing Surveys, Vol.1, n ° 1, article 1, avril 2018)**

5.7.16.1 Taux de survie de Kaplan-Meier

OK ... nous n'aimons pas faire ça dans ce livre ! ! ! Mais pour le confort de nos lecteurs et à cause des commentaires des lecteurs, copions / collons ici la théorie sur le taux de survie de Kaplan-Meier telle qu'introduite initialement dans la section de Génie Industriel à la page **??** !

Dans des domaines comme l'industrie, la médecine ou en biologie, nous intéressons souvent aux :

1. Durée de survie après un événement grave
2. Durée de rémission après un traitement ou une opération
3. Durée d'un symptôme après une anomalie
4. Durée d'une infection sans symptôme

Nous cherchons très souvent à distinguer au moins "l'événement d'intérêt" :

1. Arrêt du système après l'événement grave
2. Fin de la rémission
3. Fin d'un symptôme après anomalie
4. Début d'un symptôme lors d'une infection

de la variable a expliquer "durée avant l'apparition de l'événement d'intérêt" :

1. Temps écoulé avant l'arrêt du système
2. Temps écoulé avant la fin de la rémission
3. Temps écoulé avant la fin du symptôme
4. Temps écoulé sans symptôme

Définitions (#5.7.156) :

D1. Nous appelons "rémission", la diminution d'une maladie ou d'un dysfonctionnement de façon temporaire.

D2. La "durée de survie" ou "durée de vie" T désigne le temps qui s'écoule depuis un instant initial (début d'un traitement, diagnostic, panne, etc.) jusqu'à la survenue d'un événement d'intérêt final (décès du patient, rechute, rémission, guérison, réparation, etc.). Nous disons que l'objet de l'étude "survit au temps t" si, à cet instant l'évènement d'intérêt final n'a pas encore eu lieu.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Bien que ce type d'étude puisse être associé à la maintenance préventive (voir section Génie Industriel page ??), les statisticiens l'associent plutôt au domaine de "l'analyse de la survie".

Nous nous intéresserons dans le ce livre à un cadre particulier mais qui peut être facilement généralisé :

- Cohorte/Essai clinique où nous étudions la durée de survie de chaque patient (machine).
- Tous les patients (machines) n'ont pas la même durée d'observation (instants différents d'entrée dans l'étude).
- Nous avons des informations sur le temps de survie de chaque patient (machine) mais nous ne savons pas quand il arrive exactement.

Des deux derniers points, nous concluons que le temps de survie peut être censuré. Donc les techniques statistiques habituelles ne s'appliquent pas directement car les données censurées demandent un traitement particulier (bien évidemment, nous enlevons les données censurées nous perdons de l'information). Il va sans dire que ce type de situation est extrêmement fréquent et donc l'étude de l'estimation de Kaplan-Meier est très importante.

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#5.7.157) : La durée T est dite censurée si la durée n'est pas intégralement observée. Les différents types de censures sont :

- La censure de type I : fixée à droite. Dans cette situation, la durée n'est pas observable au-delà d'une durée maximale, fixe appelée "censure fixe" et imposée. Donc, soit nous avons l'opportunité d'observer la vraie durée de l'événement d'intérêt pour l'élément s'il a lieu avant la censure fixe, soit nous nous contenterons de la durée de la censure fixe s'il l'événement d'intérêt n'a pas eu lieu avant.
- La censure de type I : fixée à gauche. Dans cette situation, la durée d'étude n'est pas observable avant une date connue appelée "censure d'attente" et imposée. Donc soit, l'événement d'intérêt a lieu au moment de la censure d'attente, soit après. S'il y a lieu après, nous considérerons la durée entre la date de la censure et la date de l'événement d'intérêt.
- La censure de type II : attente. Dans cette situation, nous observons les durées de vie de n individus jusqu'à ce que $m \leq n$ individus aient vu l'évènement se produire (décédés). La durée considérée est donc celle du début de l'expérience jusqu'à l'événement d'intérêt pour le m-ème.
- La censure de type III : aléatoire à gauche. Dans cette situation, nous ne connaissons pas quand l'événement d'intérêt a eu lieu (car nous avons commencé à observer le sujet d'étude trop tard). Nous ne pouvons alors pas traiter des "durées" dans le sens mesurable du terme et il nous faudra nous limiter à un simple comptage.
- La censure de type III : aléatoire à droite. Dans cette situation, nous ne connaissons pas quand l'événement aura lieu (car nous avons arrêté d'observer le sujet avant qu'il y ait

lieu pour une raison quelconque). Nous ne pouvons alors pas traiter des "durées" dans le sens mesurable du terme et il nous faudra nous limiter à un simple comptage.

- La censure de type IV : aléatoire par intervalle. Dans cette situation, nous avons un mélange de la censure aléatoire à gauche et à droite. C'est-à-dire que pour certains sujets d'étude, nous ne savons pas quand l'événement d'intérêt a commencé, et pour d'autres, nous ne savons pas quand il aura lieu (s'il a lieu...).

Dans l'industrie des machines, nous savons souvent affaire à la censure de type I : fixée droite. Dans le domaine médical, lors d'essais cliniques, nous avons souvent affaire à une censure de type III aléatoire à droite. Dans le cas des pandémies, nous avons affaire à des censure de type III aléatoire à gauche.

Pour introduire ce sujet, plutôt que de faire de la théorie obscure, comme toujours dans ce livre, nous préférons une approche pragmatique. Supposons que l'étude soit un essai clinique impliquant deux groupes de patients recevant deux types de traitements. Deux questions importantes se posent aux médecins lors d'un essai clinique de phase II (la phase I concerne l'approbation de non-toxicité pour l'homme et la phase 0 pour les animaux) :

Q1. L'un des deux traitements est-il plus efficace que l'autre en matière d'amélioration de la survie des patients ?

Q2. Peut-on mettre en évidence des facteurs prognostiques, c'est-à-dire qui améliorent/détériorent la survie ?

En cours de traduction de l'anglais

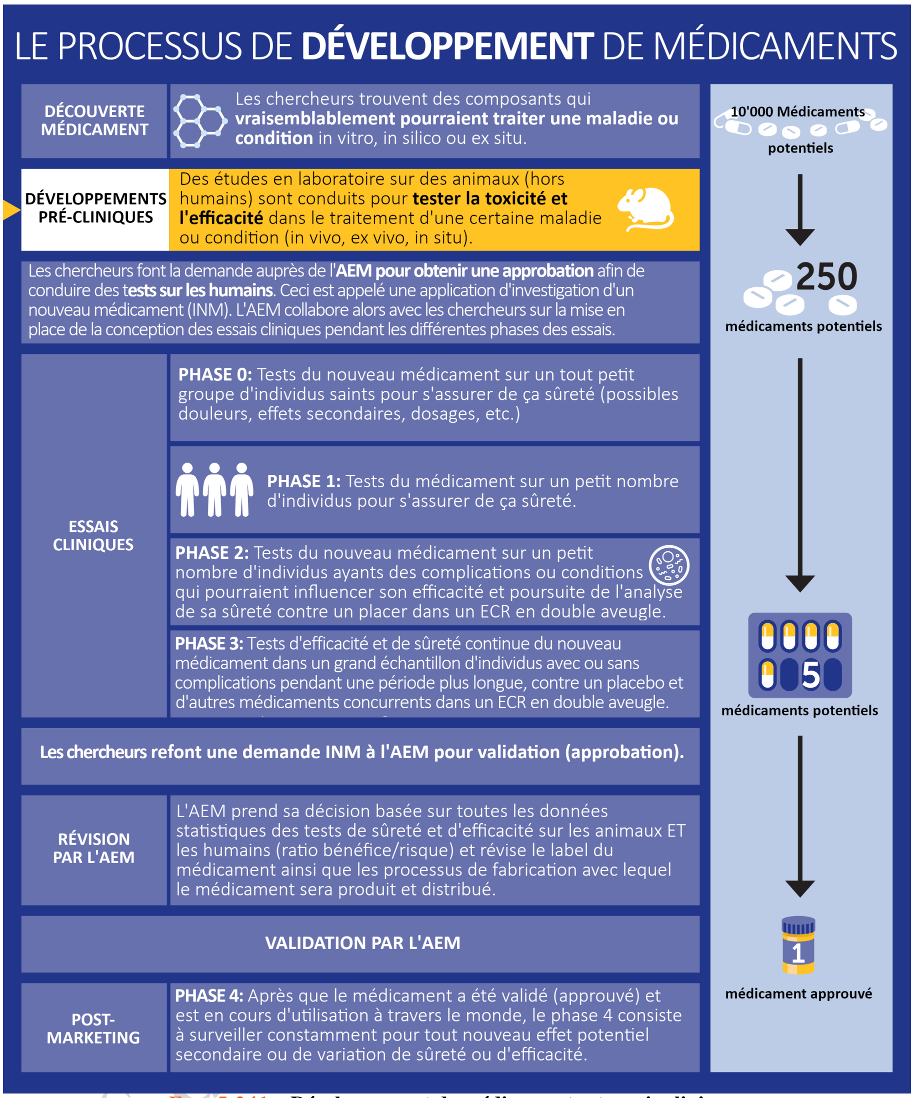


FIG. 5.241 – **Développement de médicaments et essais cliniques**

En cours anglais

Pour répondre à la question Q1 nous pouvons mettre en place des méthodes statistiques qui vont permettre de comparer les deux groupes de patients qui reçoivent les deux types de traitement.

Pour répondre à la question Q2 nous pouvons proposer un modèle qui relie la durée de survie des patients à des variables explicatives et mettre en évidence des facteurs pronostiques.

Accompagnons la théorie directement d'un exemple et considérons le tableau suivant où deux cohortes de patients (nous passons de l'ingénierie mécanique à l'ingénierie humaine...) de même taille initiale atteints de leucémie aiguë testent un médicament (6-MP) contre un placeboo[72] bien évidemment en double aveugle.

Nous avons les durées de rémission suivantes pour 21 patients (le tableau de 21 lignes indique donc le nombre de semaines pendant lesquelles un patient est considéré comme guéri après traitement avant de rechuter) :

[72] Rappelons que dans la science des médicaments, un "placebo pur" est un traitement sans aucune substance active ; un "placebo impur" est un produit pharmacologiquement actif mais sans effet sur la pathologie traitée, ou dont l'efficacité n'a pas été suffisamment mise en évidence.

Groupe 6-mercaptopurine (6-MP)	Groupe Placebo
6	1
6	1
6	2
6+	2
7	3
9+	4
10	4
10+	5
11+	5
13	8
16	8
17+	8
19+	8
20+	11
22	11
23	12
25	12
32+	15
32+	17
34+	22
35+	23

TAB. 5.112 – **Analyse de survie de deux cohortes avec censure à droite**

En cours de traduction de l'anglais

Le signe "+" correspond à des patients qui ont quitté l'étude à la semaine considérée. Ils sont donc censurés. Par exemple, le 4ème patient est perdu de vue pour une raison quelconque au bout de 6 semaines de traitement avec le 6-MP : il a donc une durée de rémission supérieure à 6 semaines. Donc dans l'étude 6-MP, il y a 21 patients avec et 12 données censurées.

Remarque

Le modèle théorique suppose que la censure est indépendant du temps de survie (censure non informative). Mais si la censure est du à l'arrêt du traitement, l'hypothèse d'indépendance n'est pas valide.

Pour le groupe placebo il est simple de faire une courbe de survie. Il suffit de produire le tableau suivant (pour les semaines omises, on impose bien évidemment le nombre de rémission comme constantes) :

Semaine i	Nombre # de rémissions à la semaine i	Proportion (probabilité) de rémission à la semaine i
0	21	100%
1	19	$19/21 = 90\%$
2	17	$17/21 = 81\%$
3	16	$16/21 = 76\%$
4	14	$14/21 = 67\%$
5	12	$12/21 = 57\%$
8	8	$8/21 = 38\%$
11	6	$6/21 = 29\%$
12	4	$4/21 = 19\%$
15	3	$3/21 = 14\%$
17	2	$2/21 = 10\%$
22	1	$1/20 = 0.05\%$
23	0	0%

TAB. 5.113 – **Analyse de survie de deux cohortes avec censure à droite**

Donc si les données ne sont pas censurées, la survie $S(t)$ peut être estimée par la proportion d'individus ayant survécu à l'instant t, qu'il est d'usage d'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\hat{S}_k(t) = P_k(T_k > t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} 1_{T_i > t} \tag{5.7.2703}$$

L'idée est donc d'estimer :

$$P(T > t) = P(\text{probabilité de survivre jusqu'au temps } t) \tag{5.7.2704}$$

par la proportion de patients ayant survécu jusqu'au temps t.

Si les données sont censurées, l'estimation de la fonction de survie nécessite des outils spécifiques. Kaplan et Meier ont proposé dans ce cas particulier le calcul suivant :

$$\begin{aligned} &P(\text{être en rémission à la } i\text{-ème semaine}) \\ &= P(\text{ne pas rechuter à la } i\text{-ème semaine}) \cdot P(\text{être en rémission à la } i-1\text{-ème semaine}) \end{aligned} \tag{5.7.2705}$$

Voyons cela sous une forme un peu plus mathématique. Si nous notons $X(1) \leq X(2) \leq \ldots \leq X(n)$ les instants (ordonnées) où un évènement s'est produit (décès ou censure), nous avons alors :

$$P(T > X(k)) = P(T > X(k) | T > X(k-1)) P(T > X(k-1)) \tag{5.7.2706}$$

Avec bien évidemment :

$$P(T > 0) = 1 \tag{5.7.2707}$$

Nous estimons :

$$\hat{P}_k = \left(1 - \frac{d_k}{R_k}\right) \tag{5.7.2708}$$

où d_k est le nombre de décès observé au temps correspondant à l'événement $X(k)$ et R_k est le nombre d'individus à risque (exposés au risque de décès) juste avant $X(k)$.

En cours de traduction de l' anglais

Nous définissons "l'estimateur de Kaplan-Meier" pour tout $X(0) \leq t < X(k)$ par :

$$\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{k=1}^{n} \hat{P}_k = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{d_k}{R_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \hat{\lambda}_k\right) \quad (5.7.2709)$$

où $\hat{\lambda}_k$ est le hasard discret (i.e. probabilité conditionnelle de décès).

Remarque

Il existe un estimateur beaucoup plus simple nommé "estimateur de Nelson-Aalen" et simplement défini par :

$$\hat{S}_{\text{NA}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \quad (5.7.2710)$$

Ce dernier estimateur n'est qu'une somme des temps de survie observés.

Par conséquent, nous faisons maintenant pour le groupe 6-MP (pas le groupe placebo ! ! ! ! !) ce qui suit :

Durée de rémission (non censurées) observées	**Sujets en rémission au début de k**	**Probabilité de ne pas rechuter à k sachant qu'on est en rémission à $k-1$ ($\hat{P}_k$)**	**Probabilité de survie de Kaplan-Meier**
0	21	$21/21 = 100\%$	100%
6	21	$18/21 = 1 - 3/21 = 85.7\%$	$100\% \cdot 85.7\% = 85.7\%$
7	17	$16/17 = 1 - 1/17 = 94.1\%$	$85.7\% \cdot 94.1\% = 80.7\%$
10	15	$14/15 = 1 - 1/15 = 93.3\%$	$80.7\% \cdot 93.3\% = 75.3\%$
13	12	$11/12 = 1 - 1/12 = 91.7\%$	$75.3\% \cdot 91.7\% = 69\%$
16	11	$10/11 = 1 - 1/11 = 90.9\%$	$69\% \cdot 90.9\% = 62.7\%$
22	7	$6/7 = 1 - 1/7 = 85.7\%$	$62.7\% \cdot 85.7\% = 53.8\%$
23	6	$5/6 = 1 - 1/6 = 83.3\%$	$53.8\% \cdot 83.3\% = 44.8\%$

TAB. 5.114 – **6-MP analyse de survie**

En cours de traduction de l'anglais

Avec les courbes de survie correspondantes (y compris l'intervalle de confiance) :

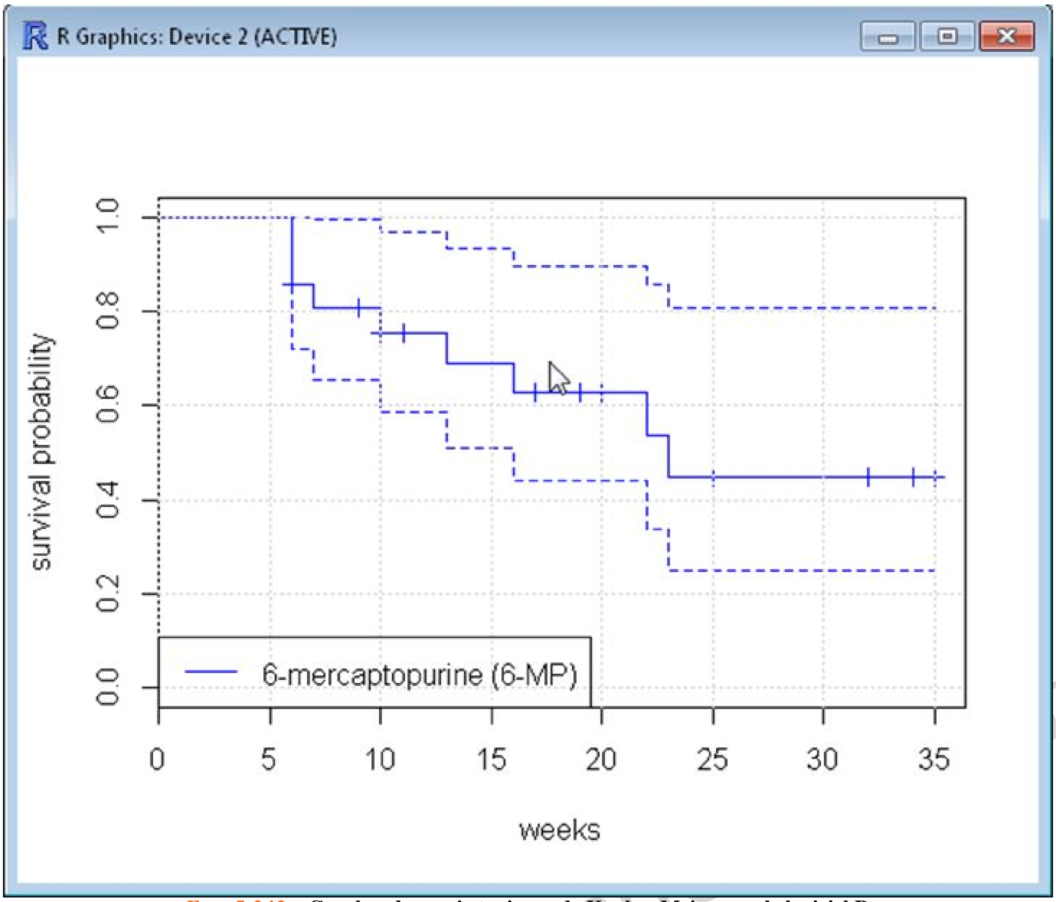


FIG. 5.242 – **Courbes de survie typiques de Kaplan-Meier avec le logiciel R**

En cours de traduction anglais

On retrouve ainsi les mêmes valeurs que celles données par exemple par Minitab 15.1.1 et R (voir les livres compagnons correspondats sur Minitab ou R pour les détails).

Si nous supposons que les $\hat{\lambda}_k$ ne sont que des proportions binomiales étant donnés les R_k, nous avons la moyenne et variance normalisées suivantes de la variable aléatoire binomiale (voir page 651) :

$$\mathrm{E}(\hat{\lambda}_k) = \hat{\lambda}_k \qquad \mathrm{V}(\hat{\lambda}_k) = \frac{\hat{\lambda}_k(1-\hat{\lambda}_k)}{R_k} \tag{5.7.2711}$$

Remarque

Malheureusement, c'est une tradition dans l'analyse de survie de désigner la variance normalisée de $\hat{\lambda}_k$ par $\mathrm{V}(\hat{\lambda}_k)$ à la place de $\mathrm{V}(\hat{\lambda}_k/r_k)$...

Et nous supposerons aussi que les $\hat{\lambda}_k$ sont asymptotiquement indépendants (...).

Puisque $\hat{S}_{\text{KM}}(t)$ est une fonction des $\hat{\lambda}_k$, nous pouvons estimer sa variance en utilisant la méthode Delta (voir section Méthodes Numériques page ??) qui a comme résultat important pour rappel :

$$g(X_n) \underset{n\to+\infty}{\cong} \mathcal{N}\left(0, g'(\mu)^2\sigma^2\right) \tag{5.7.2712}$$

avec :

$$\mathrm{V}(g(X_n)) \cong g'(\mu)^2\sigma^2 \tag{5.7.2713}$$

Par conséquent, au lieu de traiter directement $\hat{S}_{\text{KM}}(t)$, nous allons regarder son logarithme naturel :

$$\ln(\hat{S}_{\text{KM}}(t)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-\hat{\lambda}_k) \tag{5.7.2714}$$

Ainsi, par l'indépendance approximative des $\hat{\lambda}_k$ et en gardant à l'esprit que nous venons de choisir $g()$ comme logarithme naturel et en utilisant la méthode delta :

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{V}}\left[\ln(\hat{S}_{\text{KM}}(t))\right] &\cong \sum_{k=1}^{n} \hat{\mathrm{V}}\left[\ln(1-\hat{\lambda}_k)\right] \underset{\text{delta method}}{\cong} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\hat{\lambda}_k}\right)^2 \hat{\mathrm{V}}(\hat{\lambda}_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\hat{\lambda}_k}\right)^2 \frac{\hat{\lambda}_k(1-\hat{\lambda}_k)}{R_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\hat{\lambda}_k}{(1-\hat{\lambda}_k)R_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}\end{aligned} \tag{5.7.2715}$$

Et en y appliquant la méthode delta :

$$\mathrm{V}(g(X_n)) \cong g'(\mu)^2\sigma^2 = g'(\mu)^2\mathrm{V}(X_n) \Rightarrow \mathrm{V}\left(\ln(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right) \cong \frac{1}{\hat{S}^2_{\text{KM}}(t)}\hat{\mathrm{V}}\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right) \tag{5.7.2716}$$

puis en réorganisant et en injectant le résultat précédent, nous obtenons :

$$\hat{\mathrm{V}}\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right) \cong \hat{S}^2_{\text{KM}}(t)\mathrm{V}\left(\ln(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right) = \hat{S}^2_{\text{KM}}(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k} \tag{5.7.2717}$$

L'approximation suivante :

$$\boxed{\hat{\mathrm{V}}\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right) \cong \hat{S}^2_{\text{KM}}(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}} \tag{5.7.2718}$$

est nommée "relation de Greenwood". Si nous prenons la racine carrée alors le résultat est associé à l'erreur standard (à cause de la division par R_k) :

$$\mathrm{SE}\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right) \cong \hat{S}_{\text{KM}}(t)\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}} = \hat{S}_{\text{KM}}(t)\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)}}}{\sqrt{R_k}} = \hat{S}_{\text{KM}}(t)\frac{\sigma_{\hat{S}_{\text{KM}}(t)}}{\sqrt{R_k}} \tag{5.7.2719}$$

Afin de construire une barre d'erreur pour $\hat{S}_{\text{KM}}(t)$, nous devons faire une sorte d'hypothèse de distribution. Le plus simple est de supposer que $\hat{S}_{\text{KM}}(t)$ est Normalement distribué de telle sorte que nous puissions écrire :

$$\hat{S}_{\text{KM}}(t) \pm Z_{\alpha/2}\mathrm{SE}\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right) \tag{5.7.2720}$$

Ou plus explicitement :

$$\boxed{\hat{S}_{\text{KM}}(t) - Z_{\alpha/2}\hat{S}_{\text{KM}}(t)\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}} \leq S_{\text{KM}}(t) \leq \hat{S}_{\text{KM}}(t) + Z_{\alpha/2}\hat{S}_{\text{KM}}(t)\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}}} \tag{5.7.2721}$$

En cours de traduction de l'anglais

Un hic avec ceci, bien sûr, est que la distribution de $\hat{S}_{\text{KM}}(t)$ n'est pas vraiment Normale. Des problèmes surviennent lorsque $\hat{S}_{\text{KM}}(t)$ est proche de 0 ou 1 car en effet l'intervalle de confiance peut donner des valeurs à >1 ou <0. Une approche empirique courante (entre autres !) Consiste alors à prendre pour l'intervalle de confiance la transformation log-log complémentaire :

$$\hat{W}(t)=\ln\left(-\ln\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right)\right) \qquad (5.7.2722)$$

Étant donné que cette quantité n'est pas limitée, l'intervalle de confiance sera dans la bonne plage lorsque nous referons la transformation inverse :

$$\hat{S}_{\text{KM}}(t)=e^{-e^{\hat{W}(t)}} \qquad (5.7.2723)$$

Pour voir pourquoi cela fonctionne :

$$0\leq\hat{S}_{\text{KM}}(t)\leq 1 \qquad (5.7.2724)$$
$$-\infty\leq\ln\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right)\leq 0 \qquad (5.7.2725)$$
$$0\leq-\ln\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right)\leq+\infty \qquad (5.7.2726)$$
$$-\infty\leq\ln\left(-\ln\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right)\right)\leq+\infty \qquad (5.7.2727)$$

Pour obtenir un intervalle de confiance, nous devons maintenant aussi trouver l'erreur standard correspondant à cette transformation log-log, et pour cela nous devons calculer :

$$\hat{\text{V}}(\hat{W}(t))=\hat{\text{V}}\left(\ln\left(-\ln\left(\hat{S}(t)\right)\right)\right) \qquad (5.7.2728)$$

De nos calculs précédents, nous savons :

$$\hat{\text{V}}\left[\ln(\hat{S}_{\text{KM}}(t))\right]\cong\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k} \qquad (5.7.2729)$$

En appliquant à nouveau la méthode delta, nous obtenons :

$$\hat{\text{V}}(\hat{W}(t))=\hat{\text{V}}\left(\ln\left(-\ln\left(\hat{S}(t)\right)\right)\right)\cong\frac{1}{\left[\ln\left(\hat{S}(t)\right)\right]^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k} \qquad (5.7.2730)$$

Nous prenons la racine carrée de ce qui précède pour obtenir l'erreur standard :

$$\text{SE}(\hat{W}(t))\cong\frac{1}{\ln\left(\hat{S}(t)\right)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}} \qquad (5.7.2731)$$

Et donc nous avons :

$$\hat{W}(t)-Z_{\alpha/2}\frac{1}{\ln\left(\hat{S}(t)\right)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}}\leq W(t)\leq\hat{W}(t)+Z_{\alpha/2}\frac{1}{\ln\left(\hat{S}(t)\right)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}} \qquad (5.7.2732)$$

En cours de traduction de l' anglais

Puisque $\hat{S}_{\text{KM}}(t) = e^{-e^{\hat{W}(t)}}$, les limites de confiance ("modernes") pour l'intervalle de confiance of $\hat{S}_{\text{KM}}(t)$ sont finalement (notez que la limite supérieure et inférieure commutent !) :

$$\exp\left\{-e^{\hat{W}(t)+Z_{\alpha/2}\frac{1}{\ln\left(\hat{S}(t)\right)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}}}\right\} \leq S_{\text{KM}}(t) \leq \exp\left\{-e^{\hat{W}(t)-Z_{\alpha/2}\frac{1}{\ln\left(\hat{S}(t)\right)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}}}\right\} \quad (5.7.2733)$$

En remplaçant $\hat{W}(t) = \ln\left(-\left(\hat{S}_{\text{KM}}(t)\right)\right)$ à nouveau dans les limites ci-dessus, nous obtenir la relation "moderne" définitive pour la borne de confiance de l'estimateur de Kaplan-Meier :

$$\hat{S}_{\text{KM}}(t)\exp\left\{e^{Z_{\alpha/2}\frac{1}{\ln\left(\hat{S}(t)\right)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}}}\right\} \leq S_{\text{KM}}(t) \leq \hat{S}_{\text{KM}}(t)\exp\left\{e^{-Z_{\alpha/2}\frac{1}{\ln\left(\hat{S}(t)\right)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(R_k-d_k)R_k}}}\right\} \quad (5.7.2734)$$

5.7.16.2 Tests de Cochran–Mantel–Haenszel

En statistique, les tests Cochran–Mantel–Haenszel sont un ensemble de statistiques de test utilisées dans l'analyse de données catégorielles stratifiées. L'une de ces statistiques de test est le "test de Cochran–Mantel–Haenszel test" (test (CMH)), qui permet la comparaison de deux groupes sur une réponse dichotomique / catégorielle.

Ce test, également nommé "test logarithmique des ranks" ou "test de Cochran-Mantel(-Haenszel) avec temps stratifié" ou encore "test de Mantel-Cox", ou "Test du Khi carré de Cochran-Mantel-Haenszel" ou encore (...) "test de proportions multi-strates" ... a pour objectif principal en pratique de tester l'hypothèse nulle H_0 comme quoi deux courbes de survie (groupe témoin par rapport au groupe test[73]), tels que ceux visibles dans la figure ci-dessous (où la population survivante a été normalisée sur l'axe y), sont significativement différents ou pas sous les hypothèses que :

H1. Chaque strate (couche) est indépendante de la précédente.

H2. Pour chaque strate, on s'attend à ce que la proportion attendue de survivants / décès soit la même toutes choses égales par ailleurs ... ou « *ceteris paribus* » pour ceux qui préfèrent le latin (voir ci-dessous si ce n'est pas clair).

H3. Chaque strate est distribuée selon la loi hypergéométrique.

H4. La distribution hypergéométrique peut être approchée par une distribution Normale (ce qui pour rappel, ne peut se faire que sous certaines conditions ! ! !).

En cours de traduction de l' anglais

[73] L'ironie avec les antivaxistes disant qu'ils ne veulent pas faire partie d'une expérience c'est qu'ils ne se rendent pas compte qu'ils font partie du groupe de contrôle...

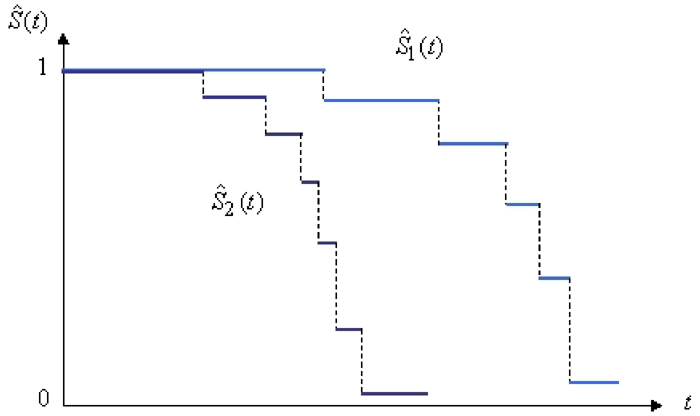


FIG. 5.243 – **Courbes de survie typiques de Cox**

Dans le test CMH, les données sont organisées dans une série de tables de contingence 2×2 associées, l'hypothèse nulle est que la réponse observée est indépendante du traitement utilisé dans toute table de contingence 2×2. L'utilisation par le test CMH de tables de contingence 2×2 associées augmente la capacité du test à détecter des associations (la puissance du test est augmentée).

En d'autres termes, l'hypothèse nulle H_0 du test est que le traitement (médical, mécanique ou autre) n'a aucune influence entre le groupe témoin et le groupe test dans une ou plusieurs strates (correspondant à différents hôpitaux, cohortes, laboratoires, etc. .), cela s'écrit :

$$H_0: \quad S_1(t) = S_2(t) = \ldots = S_n(t) \qquad 0 < t < +\infty \tag{5.7.2735}$$

Pour introduire ce test, nous créons une table de contingence 2×2 pour chaque strate, qui peut correspondre à un intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ où $i = 1, 2, \ldots, n$ et qui peut être également être assimilés à un hôpital / laboratoire différent pour une même étude clinique / de fiabilité, qui ont généralement la structure suivante :

	Décès Observés	**Survivants Observés**	**Total**
Groupe I (contrôle)	a_i	b_i	L_{1i}
Groupe II (test)	c_i	d_i	L_{2i}
Total	C_{1i}	C_{2i}	n_i

TAB. 5.115 – **Table de contingence typique 2×2 pour le test CMH**

Nous parlons alors de "table stratifiée générale $2 \times 2 \times n$" ou de "table de contingence en trois dimensions"...

Remarque

Rappelons que si nous avons un seul tableau et que nous ne voulons comparer que la proportion de survivants ou de décès pour les deux groupes, un test des différences de proportions sera appliqué comme vu précédemment. Nous pouvons également faire un test du chi carré si nous n'avons toujours qu'une seule table (voir aussi plus haut) et que les conditions ad hoc sont remplies ou également un test exact de Fisher si les conditions du test du chi carré ne sont pas remplies. C'est pourquoi dans un bon logiciel statistique

En cours de traduction de l'anglais

(comme Minitab par exemple), ces trois tests sont disponibles côte à côte.

Ainsi, sous l'hypothèse que toutes choses restent égales par ailleurs (H2), et c'est le coeur de ce test (! ! ! !), le nombre attendu E d'individus pour chaque cellule de la période i sera comme pour le test exact de Fisher ou le coefficient d'accord kappa de Cohen être égal à [74] :

$$\begin{aligned}
E_{a,i} &= L_{1i}\frac{C_{1i}}{n_i} = \frac{(a_i+b_i)(a_i+c_i)}{n_i}\\
E_{c,i} &= L_{2i}\frac{C_{1i}}{n_i} = \frac{(c_i+d_i)(a_i+c_i)}{n_i}\\
E_{b,i} &= L_{1i}\frac{C_{2i}}{n_i} = \frac{(a_i+b_i)(b_i+d_i)}{n_i}\\
E_{d,i} &= L_{2i}\frac{C_{2i}}{n_i} = \frac{(c_i+d_i)(b_i+d_i)}{n_i}
\end{aligned} \tag{5.7.2736}$$

Il faut donc bien comprendre que, par exemple, $E_{a,i}$ représente alors le nombre attendu d'individus morts du groupe témoin s'il se comportait comme tous les individus des groupes Contrôle + Test. Ainsi, si les deux groupes (ou courbes de survie) se comportent de manière identique, la valeur attendue doit être égale à la valeur observée. Pour être sûr que le lecteur comprenne, illustrons ce concept par un exemple précis :

✍**Exemple :**

Nous considérons les valeurs observées suivantes :

	Décès Observés	Survivants Observés	Total
Groupe I (contrôle)	200	800	1000
Groupe II (test)	280	1120	1400
Total	480	1920	2400

TAB. 5.116 – **Cas particulier de valeurs observées pour le test CMH**

Ici, les valeurs attendues donnent :

	Décès Observés	Survivants Observés	Total
Groupe I (contrôle)	200	800	1000
Groupe II (test)	280	1120	1400
Total	480	1920	2400

On voit dans ce cas particulier ci-dessus, les valeurs attendues sont égales à celle observée (simplement pour la raison que les ratios $800/1'000$ et $1'120/1'400$ représentent dans le tableau le même pourcentage - la même proportion - de 80%). Évidemment, si les proportions de survivants observées pour les deux groupes sont toutes choses égales par ailleurs, il doit en être de même pour les morts observées. Donc ce que le lecteur doit comprendre lorsque nous faisons un test MCH, c'est que nous sommes libres de choisir la colonne à analyser (car finalement c'est la même chose !)

[74] L désigne la "Ligne" et C la "Colonne"

Maintenant, nous pouvons remarquer que chacune des relations :

$$E_{a,i}=L_{1i}\frac{C_{1i}}{n_i} \qquad E_{c,i}=L_{2i}\frac{C_{1i}}{n_i} \qquad E_{b,i}=L_{1i}\frac{C_{2i}}{n_i} \qquad E_{d,i}=L_{2i}\frac{C_{2i}}{n_i} \tag{5.7.2737}$$

représente en fait la moyenne d'une distribution binomiale ou hypergéométrique (voir les preuves ci-dessus lors de notre étude des lois correspondantes) puisque les deux lois ont la même expression pour la moyenne. Cependant, comme la taille des individus dans les cellules pouvait être significative par rapport au total des lignes ou des colonnes, l'échantillonnage ne peut pas être indépendant. Ensuite, il faut revenir sur la loi hypergéométrique (c'est-à-dire la troisième hypothèse énumérée précédemment).

On voit aussi que par symétrie de la relation ci-dessus, que la variable d'intérêt soit l'attribut colonne ou l'attribut ligne ne change rien en réalité au résultat du calcul comme (par exemple) :

$$E_{a,i}=L_{1i}\frac{C_{1i}}{n_i}=C_{1i}\frac{L_{1i}}{n_i} \tag{5.7.2738}$$

La variance pour chaque cellule sera celle de la loi hypergéométrique que nous avons déjà prouvée lors de son étude et qui a était donnée par :

$$\mathrm{V}(X)=kpq\frac{n-k}{n-1}=k\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{s}{n}\right)\frac{n-k}{n-1}=\frac{krs(n-k)}{n^2(n-1)}=\frac{klrs}{n^2(n-1)} \tag{5.7.2739}$$

avec pour rappel $l=n-k$.

Si nous adaptons la notation de la relation précédente à celle de notre tableau ci-dessus, cela nous fournit pour toutes les cellules (par la forme analytique de la variance de la loi hypergéométrique la variance a la même expression pour chaque cellule !) :

$$\mathrm{V}_i=L_{1i}\frac{L_{2i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i-1)}=L_{2i}\frac{L_{1i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i-1)} \tag{5.7.2740}$$

avec respectivement (pour ceux qui veulent faire l'analogie avec notre étude détaillée de la loi hypergéométrique) :

$$n=n_i \qquad r=C_{2i} \qquad s=C_{1i} \qquad k=L_{1i} \qquad l=n-k=n_i-L_{1i}=L_{2i} \tag{5.7.2741}$$

Là encore, on voit que qu'il s'agisse de la variable d'intérêt en ligne ou en colonne, la valeur calculée de la variance reste la même ! ! !

Remarque

Une question courante qui se pose fréquemment pour ceux qui étudient ce test est de savoir pourquoi on ne peut pas simplement faire la somme de toutes les strates (couches) dans un seul tableau (car ce serait bien plus facile, bien sûr ...) Bon on ne peut pas rassembler les tableaux en un seul car ils ne suivent pas forcément la même loi (pas distribués à l'identique dans le sens où la loi hypergéométrique a des réglages différents d'une table à l'autre) et malheureusement, la distribution hypergéométrique n'est pas stable par l'addition !

Et alors... ? ? ? Comment cela nous aidera-t-il à comparer si les deux courbes de survie sont identiques dans le temps (ou entre différents hôpitaux / laboratoires s'il s'agit d'un test clinique / de fiabilité) ? !

En cours de traduction de l' anglais

Eh bien... prenons comme exemple compagnon le tableau avec les valeurs observées suivantes :

	Décès Observés	**Survivants Observés**	**Total**
Groupe I (contrôle)	200	900	1100
Groupe II (test)	280	1120	1400
Total	480	2020	2500

TAB. 5.117 – **Cas particulier des valeurs observées pour le test CMH**

On obtient alors les valeurs attendues :

	Décès Observés	**Survivants Observés**	**Total**
Groupe I (contrôle)	211.2	888.8	1100
Groupe II (test)	280	1120	1400
Total	268.8	$1'131.2$	2500

TAB. 5.118 – **Valeurs attendues du tableau précédent**

Dès lors les différences :

	Décès Observés	**Survivants Observés**
Groupe I (contrôle)	-11.2	11.2
Groupe II (test)	11.2	-11.2

TAB. 5.119 – **Différence entre les valeurs attendues et les valeurs observées**

En cours de traduction de l'anglais

Nous comprenons alors mieux pourquoi le choix d'une cellule particulière n'a aucune influence pour faire test. On prend simplement celle qui nous arrange le plus (en fonction de ce qui va suivre ...).

Prenant donc au hasard (puisque le choix n'affecte pas - du moins pour l'instant .... - le résultat du test comme nous l'avons montré dans nos calculs précédents) la colonne Survivants et en particulier le groupe observé Test. Sa valeur attendue est alors :

	Survivants Observés
Groupe II (test)	$E_{d,1}=\dfrac{L_{21}C_{21}}{n_1}=\dfrac{1400\cdot 2020}{2500}=1131.2$

TAB. 5.120 – **Valeur attendue de la cellule Test-Survivants**

La différence entre observé et attendu donne :

$$1120-1131.2=-11.2 \quad (5.7.2742)$$

Cette différence sera évidemment nulle si l'observé était égal à l'attendu ! Avec pour variance :

$$\text{V}_1=\frac{L_{1i}L_{2i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i-1)}=\frac{480\cdot 2020\cdot 1100\cdot 1400}{2500^2(2500-1)}\cong 95.602 \quad (5.7.2743)$$

Maintenant, sous les conditions :

$$L_{2i}>9\left(\frac{n_i-C_{2i}}{C_{2i}}\right) \qquad L_{2i}>9\left(\frac{C_{2i}}{n_iC_{2i}}\right) \qquad L_{2i}>\frac{n_i}{10} \quad (5.7.2744)$$

comme on l'a vu lors de notre étude de la loi hypergéométrique, nous pouvons l'approcher par une loi Normale (hypothèse H4).

Donc dans notre cas, cette approximation n'est pas acceptable (la troisième condition est disqualifiante) et donc le test ne peut pas être effectué (on utilise généralement le tableau la colonne et la ligne qui permettent cette approximation puisque le choix n'influence pas sur la valeur du test mais sur l'autorisation d'utiliser l'approximation mentionnée !). Mais si tel avait été le cas, nous pourrions approximer la distribution hypergéométrique par une distribution Normale telle que :

$$\mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i)=\left(L_{2i}\frac{C_{2i}}{n_i},\sqrt{\frac{L_{2i}L_{1i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i-1)}}\right) \qquad (5.7.2745)$$

Ce qui peut évidemment se réduire à une distribution Normale réduite centrée si l'on prend pour la cellule de notre tableau :

$$\frac{d_i-L_{2i}\dfrac{C_{2i}}{n_i}}{\sqrt{\dfrac{L_{2i}L_{1i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i-1)}}}\cong\mathcal{N}(0,1) \qquad (5.7.2746)$$

Et donc il suffit qu'une strate (couche) i pour savoir si nous sommes en dehors de l'intervalle de confiance que nous avons fixé. Mais ... nous avons plusieurs strates (couches) ! L'idée est alors de faire la somme sur les strates indépendantes T (alors on retombe sur l'hypothèse H1) telle que :

$$\sum_{i=1}^{T}\frac{d_i-L_{2i}\dfrac{C_{2i}}{n_i}}{\sqrt{\dfrac{L_{2i}L_{1i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i-1)}}}\cong\sum_{i=1}^{T}\mathcal{N}(0,1)=\mathcal{N}\left(0,\sqrt{T}\right) \qquad (5.7.2747)$$

ce qui n'était pas tout à fait pratique à l'époque où tout le monde n'avait pas un ordinateur car seules les tables de $\mathcal{N}(0,1)$ étaient disponibles. C'est pourquoi nous préférons faire la somme suivante :

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{T}\left(d_i-L_{2i}\dfrac{C_{2i}}{n_i}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{T}\dfrac{L_{2i}L_{1i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i-1)}}}\cong\mathcal{N}(0,1) \qquad (5.7.2748)$$

Ou sous forme condensée (là encore quel que soit le choix de la cellule !) :

$$\frac{\sum\limits_{i}(d_i-E_{d,i})}{\sqrt{\sum\limits_{i}V_i}}\cong\mathcal{N}(0,1) \qquad (5.7.2749)$$

Et si les différences entre observées et attendues ne sont pas trop importantes dans toutes les strates, la valeur de cette expression se trouve bien dans un certain intervalle de confiance de

En cours de traduction de l'anglais

la distribution Normale. S'il est à l'extérieur, l'hypothèse d'égalité des deux courbes de survie sera rejetée.

Cependant, la plupart des logiciels statistiques prennent le carré de cette relation !

Il vient alors que le carré suit une loi du khi-2 avec un degré de liberté (nous l'avons prouvé plus haut dans cette section) de telle sorte que nous retombons sur la forme finale du test du log-rank que l'on retrouve dans de nombreux livres :

$$\frac{\left(\sum_i (d_i - E_{d,i})\right)^2}{\sum_i V_i} \cong \chi^2(1) \tag{5.7.2750}$$

Il s'agit donc d'une statistique Wald (voir plus haut) et donc le test CMH appartient à la famille des tests de Wald !

Pour des raisons pratiques, nous ajoutons un terme de 0.5 à la somme, ce qui fournit une meilleure approximation de la distribution Normale. On peut donc voir parfois dans les livres :

$$\frac{\left(\sum_i (d_i - E_{d,i}) + 0.5\right)^2}{\sum_i V_i} \cong \chi^2(1) \tag{5.7.2751}$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons les valeurs observées suivantes de deux hôpitaux A et B pour un essai clinique :

A	**Décès Observés**	**Survivants Observés**	**Total**
Groupe I (contrôle)	288	4	292
Groupe II (test)	400	50	450
Total	688	54	742

B	**Décès Observés**	**Survivants Observés**	**Total**
Groupe I (contrôle)	300	10	310
Groupe II (test)	450	40	490
Total	750	50	800

Nous ne voulons pas savoir si les deux hôpitaux sont différents ou non (ce n'est pas le but !), mais si les différences entre le groupe contrôle et le groupe test dans tous les hôpitaux sont significativement différentes ou non !

Eh bien, nous devinons déjà intuitivement le résultat lorsque nous voyons les valeurs ... mais faisons quand même les calculs.

On voit déjà que pour l'hôpital A, la colonne Survivants remplit les trois conditions d'approximation par une distribution Normale (ce qui n'est pas le cas pour la colonne des Décès) :

$$54 > 9\left(\frac{742-450}{742}\right) \qquad 54 > 9\left(\frac{742}{742-450}\right) \qquad 54 < \frac{742}{10} \tag{5.7.2752}$$

De même pour l'hôpital B (et c'est heureux car une fois une colonne sélectionnée dans une strate, il faut que la condition d'approximation soit applicable à la même colonne de toutes les autres strates ! ! !) :

$$50 > 9\left(\frac{800-490}{800}\right) \qquad 50 > 9\left(\frac{800}{800-490}\right) \qquad 50 < \frac{80}{10} \tag{5.7.2753}$$

A	Survivants Observés	Total
Groupe I (contrôle)	21.25	292
Groupe II (test)	32.75	450
Total	54	742

B	Survivants Observés	Total
Groupe I (contrôle)	19.38	310
Groupe II (test)	30.62	490
Total	50	800

Ce qui donne pour les différences :

A	Survivants Observés
Groupe I (contrôle)	−17.25
Groupe II (test)	17.25

B	Survivants Observés
Groupe I (contrôle)	−9.38
Groupe II (test)	9.38

On voit alors vite pourquoi une fois la colonne choisie, le choix de la ligne n'a plus d'importance (soit une somme de valeurs négatives, soit une somme de valeurs positives et comme on prend le carré de la somme, ça ne change rien finalement !). Choisissons arbitrairement la deuxième ligne. Ensuite nous avons :

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{2}(d_i - E_{d,i})\right)^2}{\sum_{i=1}^{2} V_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(d_i - \frac{L_{2i}C_{2i}}{n_i}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{2}\frac{L_{2i}L_{1i}C_{1i}C_{2i}}{n_i^2(n_i 1)}} \tag{5.7.2754}$$

$$= \frac{(17.25+9.38)^2}{\frac{292\cdot 450\cdot 688\cdot 54}{742^2(742-1)} + \frac{310\cdot 490\cdot 750\cdot 50}{258^2(258-1)}} \cong \frac{736}{11.966+11.139} \cong 31.845$$

Et nous avons avec un tableur comme Microsoft Excel 14.0.6123 en unilatéral gauche avec un seuil de risque de 5% :

$\chi^2_{95\%}(1)$=`LOI.KHIDEUX.INVERSE(95%,1)`$\cong 3.841$

Ainsi, sur le cumul des deux hôpitaux (strates), le groupe témoin est significativement différent du groupe test. La p-valeur du test est généralement donnée avec Microsoft Excel 14.0.6123 par :

`=1-LOI.KHIDEUX.N(31.845,1,1)`$\cong 0.000002\%$

Citons maintenant une situation célèbre[75] :

«Un jour, alors que j'étais étudiant en médecine, un chirurgien très important de Boston visita l'école et prononça un grand traité sur un grand nombre de patients qui avaient subi avec succès des opérations de reconstruction vasculaire.

À la fin de la conférence, un jeune étudiant au fond de la salle a timidement demandé : "*Aviez-vous un groupe contrôle ?*" Eh bien, le grand chirurgien s'est redressé de toute sa hauteur, a frappé le bureau et a dit , "*Voulez-vous dire que je n'ai pas opéré la moitié des patients ?*". La salle devint alors très silencieuse. La voix au fond de la salle répondit avec hésitation : "*Oui, c'est ce que j'avais en tête.*". Puis le poing du visiteur s'abattit vraiment en tonnant : "*Bien sûr que non ! Cela aurait condamné la moitié d'entre eux à leur mort.* "

Dieu que c'était calme alors et on entendait à peine la petite voix demander : "*Quelle moitié ?*"»

En cours de traduction de

5.7.16.3 Modèle de hasard proportionnel de Cox

Le "modèle de hasard proportionnel de Cox" (à ne pas confondre avec les "transformations Box-Cox") en temps continu, également connu sous le nom de "odèle semi-paramétrique à risques proportionnels" ou en version abrégée "HPM Cox" ou encore "modèle de régression de Cox" (RCM), est un modèle d'analyse du ratio de risque. Il exprime le rapport du risque instantané, le "taux de hasard", pour connaître l'événement (risqué) étudié après une durée d'exposition donnée selon une combinaison linéaire de facteurs explicatifs. Ce modèle est largement utilisé dans les études cliniques, ainsi que dans la maintenance préventive et le risque de crédits bancaires.

[75] Dr. E. E. Peacock, Jr., cité dans Medical World News (1er septembre 1972), p. 45, cité dans le livre de Tufte de 11974 (calendrier holocène) *Data Analysis for Politics and Policy*.

Ce modèle appartient comme le modèle de Kaplan-Meier aux "modèles de durée" ou "modèles de survie" et fait appel à certains des résultats démontrés dans la section Génie Industriel dans le cadre de l'étude de la maintenance préventive (voir page **??**).

Remarque

Le modèle de Kaplan-Meier permet de comparer plusieurs courbes de survie, le modèle de Cox permet non seulement de faire de même mais aussi de pouvoir le faire sur la base de multiples facteurs et aussi de faire des prédictions pour des valeurs non observées lors de l'expérience.

Dans un souci de simplification et essentiellement pédagogique, nous ne nous intéresserons ici que dans le cas où les données sont non censurées, les covariables sans interactions et elles-mêmes indépendantes du temps (par exemple, la covariable "âge" serait indépendante ... dans le temps...). Nous rendrons la présentation plus complexe au fur et à mesure que ce livre évoluera.

Il faut tout d'abord savoir que le modèle de régression de Cox est, comme l'un de ses autres noms l'indique, basé sur le taux de hasard instantané (risque) $h(t)$! Pourquoi ce choix alors qu'on pourrait reprendre les fonctions de survie ou de fiabilité ??? Tout simplement parce que les fonctions de survie $R(t)$ et de fiabilité $F(t)$ ont des contraintes qui compliqueraient la construction du modèle de régression. Alors que la seule chose que nous imposons au taux de risque est qu'il soit compris entre $[0,+\infty[$.

L'objectif du modèle de Cox est de pouvoir quantifier et tester les effets de caractéristiques individuelles telles que le sexe, le niveau d'éducation, la classe sociale, la nationalité, l'expérience passée, la vaccination, etc. sur les risques de transition (vie / décès ou malade / non malade, etc.).

L'idée de base est de pouvoir dire « le taux de risque d'un tel groupe est X fois supérieur au taux de risque de l'autre groupe » ou en d'autres termes « le risque d'un tel groupe est dans une proportion X par rapport à un tel autre groupe » et une première approche naïve et mathématiquement simple pour gérer cela est de dire que le taux de risque est de la forme (dans le cas univarié [76]) :

$$h(x)=\beta_0+\beta_1 x \qquad (5.7.2755)$$

où x est une variable explicative le plus souvent catégorique (et plutôt de type binaire) et où β_0 est donc in extenso le taux de risque correspondant à $x=0$.

Contrairement au "risque relatif" (ie ratio de risque) ou au "ratio des cotes", c'est un modèle plus prédictif et adapté à plus de deux variables (et pas seulement binaires !).

Cependant, c'est une mauvaise conception pour le moment pour la simple raison que le domaine de définition de $h(x)$ n'est en fait pas limité à $[0,+\infty[$. Une idée serait de faire comme pour le modèle logistique, prendre l'exponentielle tel que :

$$h(x)=e^{\beta_0+\beta_1 x}=e^{\beta_0}e^{\beta_1 x}=h_0 e^{\beta_1 x}>0 \qquad (5.7.2756)$$

[76] Donc, une première hypothèse est que nous supposons que les covariables continues ont une forme linéaire et cela doit toujours être vérifié !

En cours de traduction de l'anglais

Évidemment, nous pouvons avoir plus d'une variable explicative. Dès lors, comme nous le savons déjà, le modèle s'écrirait :

$$h(\vec{x}) = h_0 e^{\vec{\beta}^T \vec{x}} \quad (5.7.2757)$$

où h_0 est évidemment le risque de base lorsque toutes les covariables sont nulles. En pratique, nous verrons un peu plus loin que la détermination de ce risque de base n'a aucun intérêt car il est éliminé. Cette dernière relation s'écrit parfois sous la forme suivante pour mettre en évidence la part de risque des facteurs caractéristiques des individus étudiés :

$$h(\vec{x}) = h_0 e^{\vec{\beta}^T \vec{x}} = h_0 r(x) \quad (5.7.2758)$$

Cependant, nous devons considérer que le taux de risque est dépendant du temps, comme nous l'avons vu précédemment dans notre étude des techniques de maintenance, de sorte qu'il faut définir le "risque instantané" :

$$\boxed{h(t, \vec{x}) = h_0(t, \vec{\alpha}) e^{\vec{\beta}^T \vec{x}}} \quad (5.7.2759)$$

Remarque

Par conséquent, la situation standard de l'application de cette méthode de survie dans les projets de recherche clinique suppose qu'une population homogène est étudiée lorsqu'elle est soumise dans des conditions différentes (par exemple, traitement expérimental et traitement standard). Le modèle de survie suppose alors que les données de survie des différents patients sont indépendantes les unes des autres et que la distribution individuelle des temps de survie de chaque patient est la même (temps d'échec indépendants et répartis de manière identique) !

Cependant, dans le domaine des essais cliniques, on observe dans la majorité des situations pratiques que les patients diffèrent considérablement. L'effet d'un médicament, d'un traitement ou l'influence de diverses variables explicatives peuvent différer considérablement entre les sous-groupes de patients. Pour tenir compte de cette hétérogénéité non observée dans la population étudiée, Vaupel et al. (1979) ont introduit les "modèles de fragilité univariés" dans l'analyse de survie (disponible dans le logiciel R). L'idée clé est que les individus possèdent des fragilités différentes et que les patients les plus fragiles mourront plus tôt que les autres. Par conséquent, une sélection systématique d'individus robustes (c'est-à-dire des patients à faible fragilité) a lieu. Nous n'introduirons pas ce modèle mathématique dans ce livre !

Il est important de noter que dans un cas simple, nous avons :

$$h_0(t, \vec{\alpha}) = h_0(t) e^{\beta_0} \quad (5.7.2760)$$

c'est pourquoi le modèle de Cox a toujours l'ordonnée à l'origine de y (ie β_0) qui est nulle car elle est intégré dans le hasard fondamental $h_0(t, \vec{\alpha})$.

En réalité, si l'on prend du recul, on pourrait voir dans l'expression précédente une analogie avec l'approche par la méthode de séparation des variables telle qu'elle se fait assez souvent lors de la résolution de certaines équations différentielles où la solution est construite de telle sorte que chaque facteur dépend uniquement sur certains paramètres.

En anglais

Ce qui est particulièrement apprécié par les praticiens de ce modèle empirique et qui expliquent l'origine de son nom, c'est qu'on n'a pas besoin de connaître $h_0(t,\vec{\alpha})$. En effet, si l'on considère le ratio du même modèle mais pour différentes valeurs de covariables en même temps, nous avons le "ratio de hasard" :

$$\text{H.R.}=\frac{h(t,\vec{x}_i)}{h(t,\vec{x}_j)}=\frac{h_0(t,\vec{\alpha})e^{\vec{\beta}^T\vec{x}_i}}{h_0(t,\vec{\alpha})e^{\vec{\beta}^T\vec{x}_j}}=e^{\vec{\beta}^T\vec{x}_i-\vec{\beta}^T\vec{x}_j}=e^{\vec{\beta}^T(\vec{x}_i-\vec{x}_j)} \tag{5.7.2761}$$

La plupart du temps, le ratio est du type suivant :

$$\text{H.R.}=\frac{h(t,\vec{x}_i)}{h(t,\vec{x}_j)}=\frac{\text{Hasard dans le groupe test}}{\text{Hasard dans le groupe témoin}} \tag{5.7.2762}$$

On voit donc qu'une hypothèse de cette approche est que les deux modèles sont supposés avoir les mêmes propriétés initiales (hypothèse souvent cachée dans les études cliniques) ! !

✍**Exemples :**

E1. Pour une covariable dichotomique unique, disons avec des valeurs 0 et 1, le rapport de risque est :

$$\text{H.R.}=\frac{h(t,x=1)}{h(t,x=0)}=\frac{h_0(t)e^{\beta\cdot 1}}{h_0(t)e^{\beta\cdot 0}}=\frac{e^{\beta}}{e^0}=e^{\beta} \tag{5.7.2763}$$

Ainsi, le risque relatif de deux individus avec des valeurs de covariables différentes devrait être indépendant du temps ou constant à tout moment. Il s'agit d'une hypothèse inhérente au modèle de Cox (et à tout autre modèle à risques proportionnels).

E2. Avec deux covariables, nous avons :

$$\text{H.R.}=\frac{h(t,\vec{x})}{h(t,\vec{x}')}=\frac{h_0(t)e^{\vec{\beta}^T\vec{x}}}{h_0(t)e^{\vec{\beta}^T\vec{x}'}}=e^{\vec{\beta}^T(\vec{x}-\vec{x}')}=e^{\beta_1(x_1-x_1')+\beta_2(x_2-x_2')} \tag{5.7.2764}$$

Considérons maintenant par exemple que nous gardons x_1 fixe tel que $x_1'=x_1$ et que nous prenons $x_2'=x_2+1$ (x_2 peut être une valeur entière comme l'âge arrondi du patient par exemple). Ensuite, la relation précédente s'écrira :

$$\text{H.R.}=e^{\beta_1(x_1-x_1')+\beta_2(x_2-x_2')}=e^{\beta_1\cdot 0+\beta_2\cdot 1}=e^{\beta_2} \tag{5.7.2765}$$

Et notez que quelle que soit la valeur de x_2 (et en gardant fixes les autres covariables), chaque incrémentation de cette covariable par $+1$ multipliera le risque instantané par un facteur e^{β} (cette valeur est souvent écrite en pourcentage évidemment).

Le consensus est de lire les valeurs du rapport de risque comme suit :

- Si $\text{H.R.}=0.5$: À un moment donné, la moitié des patients du groupe de test subissent un événement par rapport au groupe témoin.
- Si $\text{H.R.}=1.0$: À un moment donné, les taux d'événements sont les mêmes dans les deux groupes.

- Si H.R. $=2.0$: À un moment donné, deux fois plus de patients dans le groupe de test subissent un événement que dans le groupe témoin.

En supposant que l'hypothèse précédente soit satisfaite, il est donc très intéressant dans la pratique du « s'amuser » à varier les caractéristiques des individus afin de calculer comment la différence $(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$ augmente ou diminue le ratio de risque en pourcentages (c'est là que réside le pouvoir d'investigation et le plaisir du modèle Cox !).

Donc non seulement le risque de base est éliminé quand on regarde le risque relatif (c'est par hypothèse ! ! !), mais aussi la dépendance au temps !

Donc l'hypothèse fondamentale du modèle de Cox, comme déjà mentionné, est que nous supposons pour différents groupes que le hasard de base est égal ! ! ! Cette hypothèse de proportionnalité est trivialement visible lorsque nous utilisons des graphiques de survie qualitatifs comme ceux présentés plus avec deux groupes [77] (c'est-à-dire deux strates) et nous voyons qu'elles commencent au même point à $t=0$.

Donc, pour rappel, les hypothèses jusqu'à présent sont :

H1. Le modèle est multiplicatif (ie le lien entre $h(t)$ et $h_0(t)$ doit être de la forme $h(t)=c^{te}h_0(t)$)

H2. Nous supposons que les covariables continues ont une forme linéaire

H3. Nous supposons que les covariables sont indépendantes du temps (les hasards proportionnels doivent donc tenir !)

H4. Nous supposons que le taux de risque (hasard de base) initial est égal

En cours de traduction de l'anglais

Un test classique d'indépendance temporelle consiste à transformer les courbes de survie en prenant :

$$-\ln\left(-\ln\left(\hat{S}(t,\vec{x})\right)\right) \tag{5.7.2766}$$

et de vérifier si les deux courbes linéarisées résultantes sont parallèles. En effet, rappelons que nous avons [78] (voir la section Génie Industriel page ??) :

$$S(t,\vec{x})=e^{-\int\limits_0^t h(u,\vec{x})\mathrm{d}u} \tag{5.7.2767}$$

Et l'hypothèse de Cox est :

$$h(t,\vec{x})=h_0(t)e^{\vec{\beta}^T\vec{x}}=h_0(t)e^{\sum_{j=1}^p \beta_j\vec{x}_j} \tag{5.7.2768}$$

Par conséquent :

$$S(t,\vec{x})=e^{-\int\limits_0^t h_0(u)e^{\sum_{j=1}^p \beta_j x_j}\mathrm{d}u}=\left(e^{-\int\limits_0^t h_0(u)\mathrm{d}u}\right)^{e^{\sum_{j=1}^p \beta_j x_j}}=S_0(t)^{e^{\sum_{j=1}^p \beta_j x_j}} \tag{5.7.2769}$$

[77] La population à l'étude est considérée comme constituée de deux sous-populations avec des risques différents.

[78] On change juste la notation pour la faire correspondre aux usagse dans le domaine médical, avec $S(t)=R(t)$ et $h(u)=\lambda(u)$

Prenant le logarithme naturel :

$$-\ln\left(S(t,\vec{x})\right)=-\ln(S_0(t))e^{\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_j} \quad (5.7.2770)$$

et encore une fois :

$$-\ln\left(-\ln\left(S(t,\vec{x})\right)\right)=-\ln\left(-\ln(S_0(t))\right)-\sum_{j=1}^{p}\beta_j x_j \quad (5.7.2771)$$

Donc pour deux séries d'observations :

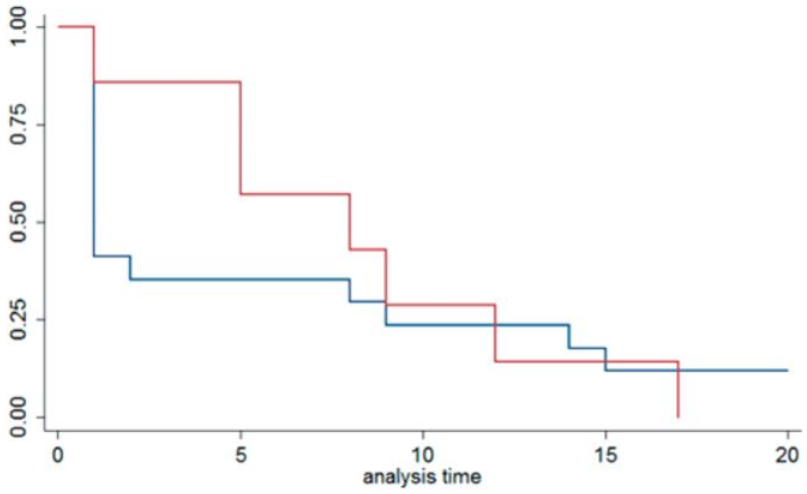
$$-\ln\left(S(t,\vec{x}_2)\right)-\ln\left(S(t,\vec{x}_1)\right)=\sum_{j=1}^{p}\beta_j\left(x_{2,j}-x_{1,j}\right)=\vec{\beta}^T\left(\vec{x}_2-\vec{x}_1\right) \quad (5.7.2772)$$

Ensuite, l'espace entre le logarithme naturel des deux courbes doit être constant dans le temps !

Remarque

En pratique, un test courant pour vérifier l'hypothèse de proportionnalité consiste à utiliser les "résidus de Schoenfeld" par rapport au temps transformé.

Voyons donc un exemple de deux strates de régression du modèle Cox à PH pour faire un jugement qualitatif basé sur les graphiques :

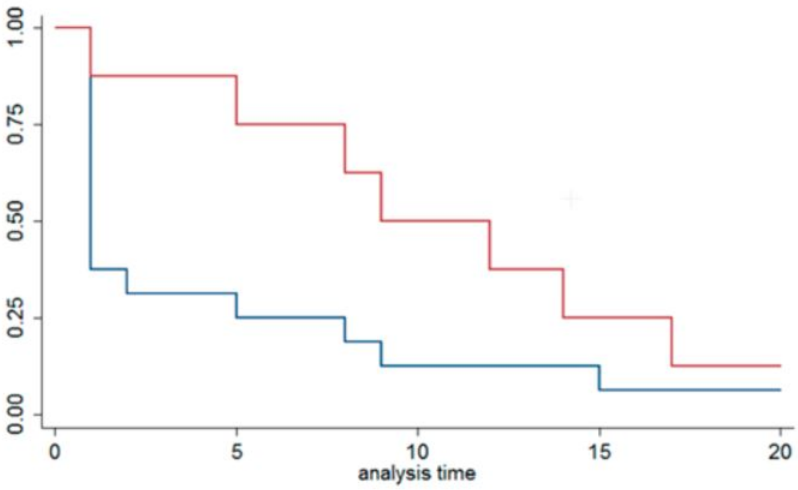


Le graphique ci-dessus (régression) enfreint les hypothèses suivantes :

1. La distance entre les courbes n'est sûrement pas constante lorsque les courbes se croisent
2. Nous ne pouvons pas juger de la Normalité sous-jacente des données
3. La courbe bleue ne semble pas être basée sur un modèle linéaire (que l'on prenne le logarithme naturel ou pas !)
4. Sûrement le ratio de risque de hasard est égal au début (c'est assez mauvais) mais même pire ... il semble sur le long terme ne pas avoir de hazard risk ratio asymptotique constant

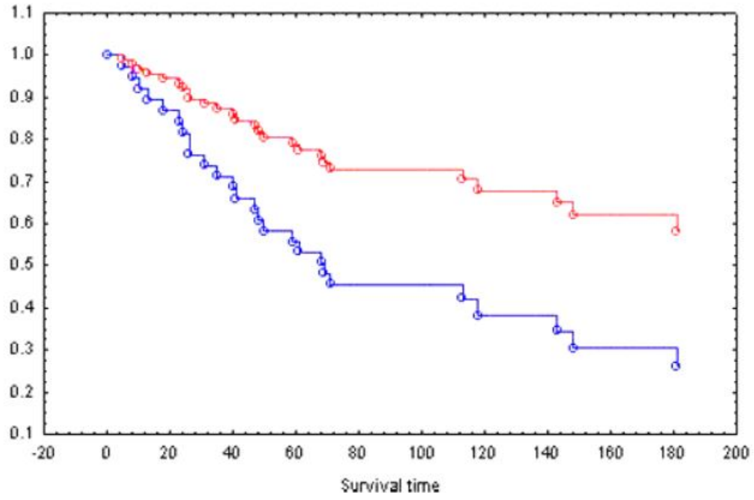
En cours de traduction de l'anglais

Le graphique ci-dessous est un peu meilleur par rapport au respect de l'hypothèse du modèle :



En effet, les courbes ne se croisent plus. Mais malheureusement, la distance ne semble pas constante.

La régression suivante est meilleure que les deux précédentes (semble avoir une distance asymptotique constante[79]) :



En cours de rédaction de l'anglais

Bon c'est bien de pouvoir comparer logiquement le ratio du taux de hasard à un même instant temporel et pour différentes valeurs de covariables mais comment déterminer les coefficients du modèle ? ? ? Un premier réflexe serait de prendre le logarithme naturel du modèle pour faire une régression linéaire simple :

$$\ln(h(t,\vec{x}) = \ln\left(h_0(t,\vec{\alpha})e^{\vec{\beta}^T\vec{x}}\right) = \ln(h_0(t,\vec{\alpha})) + \vec{\beta}^T\vec{x} \quad (5.7.2773)$$

Mais on voit tout de suite que la composante temps sera problématique ! Vient ensuite le deuxième réflexe : travailler avec le maximum de vraisemblance (voir plus haut page 805) !

[79]Nous pensons que le lecteur comprend maintenant que si nous pouvons par translation verticale superposer parfaitement les deux régressions dès lors l'hypothèse H3 tient !

Mais alors une question se pose ... : la fonction de hasard n'est pas à proprement parler une probabilité alors que va-t-on maximiser ? ? ?

Eh bien pour cela nous allons utiliser des probabilités conditionnelles (voir plus haut page 484), même si à première vue il n'est pas facile de voir ce qui relie les probabilités conditionnelles à la fonction de hasard[80] mais attendez un peu, en notant x_i le caractère particulier qui identifie une certaine classe d'individus.

Considérons pour cela E, l'ensemble des éléments comprenant les individus qui ont survécu S et $\bar{S}$ l'ensemble de ceux qui n'ont pas survécu. Tel que pour un temps identique donné :

$$\{S(t), \bar{S}(t)\} \in E(t) \tag{5.7.2774}$$

et tel que :

$$S(t) \cup \bar{S}(t) = E(t) \tag{5.7.2775}$$

Ainsi par construction :

$$S(t) \cap \bar{S}(t) = \varnothing \tag{5.7.2776}$$

Puisque l'intersection est vide, il sera difficile de révéler la fonction de hasard à laquelle nous pourrions penser ... Et bien c'est là que vient un truc !

Il est vrai que si l'on prend l'ensemble $\bar{S}$ de ceux qui n'ont pas survécu toujours au même instant que ceux qui ont survécu S les deux ensembles seront toujours disjoints, par exemple en impliquant la variable temps , on a :

$$S(t) \cap \bar{S}(t) = \varnothing \quad \forall t \tag{5.7.2777}$$

Par contre, si on mélange les temps, nous avons par exemple :

$$\bar{S}(t + \Delta t) \cap S(t) \tag{5.7.2778}$$

qui ne sont plus forcément vides puisqu'ils peuvent se chevaucher partiellement pris à des moments différents !

Puisqu'il y a une superposition des deux ensembles, lorsqu'ils sont pris à des moments différents, nous pouvons maintenant écrire de manière astucieuse une probabilité conditionnelle :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t) = \frac{P(\bar{S}_{t+\Delta t} \cap S_t)}{P(S_t)} \tag{5.7.2779}$$

En supposant que le nombre de survivants diminue (...), cette dernière relation peut s'écrire :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t) = \frac{P(\bar{S}_{\Delta t})}{P(S_t)} \tag{5.7.2780}$$

Ou dans le language de tous les jours :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t) = \frac{P(\bar{S}_{\Delta t})}{P(S_t)} = \frac{\text{probabilité qu'un individu n'ait pas survécu entre } [t, \Delta t]}{\text{probabilité qu'un individu ait survécu jusqu'au temps } t} \tag{5.7.2781}$$

[80] Le terme "hazard" fait référence à la source potentielle de préjudice, de danger ou d'événement indésirable, tandis que "probabilité" désigne la probabilité que ce préjudice ou cet événement indésirable se produise.

En cours de traduction de l'anglais

dit autrement :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t)=\frac{P(\bar{S}_{\Delta t})}{P(S_t)}=\frac{\text{proportion des individus qui n'ont pas survécu entre } [t,\Delta t]}{\text{proportion des individus qui ont survécu jusqu'au temps } t} \quad (5.7.2782)$$

Cependant, on reconnaît ici au numérateur, si l'on reprend les notations habituelles de la maintenance préventive (voir section Génie Industriel page ??), $\mathrm{d}F(t)$ la fonction de défaillance cumulée ! Par conséquent :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t)=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\text{proportion des individus qui ont survécu jusqu'au temps } t} \quad (5.7.2783)$$

et on reconnaît $R(t)$, la fonction de fiabilité, au dénominateur tel que :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t)=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)} \quad (5.7.2784)$$

Dès lors :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t)=\frac{\Delta F(t)}{R(t)} \quad (5.7.2785)$$

Et nous reconnaissons ici un ratio que nous avons déjà rencontré de notre étude de la maintenance préventive ! ! ! On peut donc écrire :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t)=\frac{\Delta F(t)}{R(t)}=\lambda(t)\Delta t=h(t)\Delta t \quad (5.7.2786)$$

On pourrait penser qu'il serait possible d'utiliser cette probabilité conditionnelle pour appliquer la technique du maximum de vraisemblance, mais ... le problème est qu'il y a implicitement dans $h(t)$, une fonction dépendant du temps qu'il faut éliminer avant histoire de pouvoir en tirer quelque chose. Dès lors, l'idée est de faire un ratio des fonctions de hasard pour un même instant donné pour que la partie temporelle soit éliminée ! Et qui dit ratio de probabilités, redit probabilité conditionnelle !

Rappelons que nous venons d'obtenir :

$$P(\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t)=\frac{\Delta F(t)}{R(t)} \quad (5.7.2787)$$

Qui est la probabilité conditionnelle qu'un individu sans aucune caractéristique particulière ne survit pas pendant la tranche de temps donnée tandis que tous les autres (n'ayant pas non plus de caractéristiques spéciales) ainsi que lui-même ont survécu jusqu'au temps $t+\Delta t$. Maintenant, si nous introduisons les caractéristiques, alors nous avons la possibilité d'introduire une autre couche de probabilité conditionnelle. Pour cela, prenons le cas particulier mais assez facilement généralisable d'une seule caractéristique (covariable) particulière et d'un événement d'intérêt sur un individu noté i parmi tous les autres individus j (y compris l'individu i) qui sont également suivis avec ces mêmes caractéristiques. La probabilité conditionnelle précédente peut alors s'écrire :

$$P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}\right)=h_i(t,i)\Delta t=h_0(t)h(i)\Delta t \quad (5.7.2788)$$

Maintenant, comparons cette probabilité conditionnelle d'un individu particulier conditionnellement à tous les autres individus (y compris i lui-même pour rappel !) avec toutes les mêmes caractéristiques :

$$\frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i\cap\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)}{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)} \quad (5.7.2789)$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le lecteur attentif aura peut-être remarqué que le modèle tel qu'il est construit pour le moment suppose que les non-survivants sont uniques pour une valeur donnée de la caractéristique. C'est pourquoi nous parlons de : "Modèle de régression à risque proportionnel de Cox à covariables non groupées, non censurées et indépendantes du temps". Cependant, nous verrons ci-dessous comment traiter le cas où deux individus aux caractéristiques différentes ou égales ne survivent pas en même temps.

Mais dans le cas particulier qui nous concerne $\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i \in \{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j$. Nous avons alors :

$$\frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i \cap \{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)}{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)} = \frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i\right)}{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)} \tag{5.7.2790}$$

Mais que nous pouvons aussi écrire plus explicitement (n'oubliez pas qu'ici j représente un ensemble d'individus différents de i) car chaque événement individuel y relatif est supposé comme une probabilité disjointe (voir section Probabilités page 476) :

$$\begin{aligned}\frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i\right)}{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)} &= \frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_k\right)} = \frac{h(t,i)\Delta t}{\sum\limits_{k=1}^{n} h(t,x_i)\Delta t} = \frac{h(t,i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} h(t,i)} \\ &= \frac{h_0(t)h(i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} h_0(t)h(k)} = \frac{h(i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} h(k)}\end{aligned} \tag{5.7.2791}$$

Mais le lecteur doit garder à l'esprit deux choses

1. La flèche du temps est orientée
2. Par conséquent, les événements sont ordonnés !

Qu'est-ce que cela signifie ou quelles en sont les implications ? Juste que l'événement lié à un individu i ne peut se produire qu'avant qu'un autre événement ne se soit produit pour un autre individu avec un indice de rang inférieur à i. Cela signifie que nous devrions écrire à la place :

$$\frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i\right)}{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)} = \frac{h(i)}{\sum\limits_{k\geq i}^{n} h(k)} \tag{5.7.2792}$$

ou plus explicitement :

$$\frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i\right)}{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)} = \frac{h(i)}{\sum\limits_{k\geq i}^{n} h(k)} = \frac{e^{\beta x_i}}{\sum\limits_{k\geq j} e^{\beta x_j}} \tag{5.7.2793}$$

Cette relation est souvent notée comme suit dans les manuels :

$$P([i],t_i) = \frac{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_i\right)}{P\left(\{\bar{S}_{t+\Delta t}/S_t\}_j\right)} = \frac{e^{\beta x_i}}{\sum\limits_{k\geq j} e^{\beta x_j}} = \frac{\phi_i}{\sum\limits_{k\in\mathcal{R}(t_i)} \phi_j} \tag{5.7.2794}$$

En cours de traduction de l'anglais

et est la "probabilité de risque" de l'individu i au point temporel t_i, relativement à la covariable x (covariable unique dansce cas particulier !), où les événements individuels sont disjoints avec un risque initial proportionnel et où $\mathcal{R}(t_i)$ est l'ensemble de tous les individus survivants ou fonctionnant au temps t_i (risque fixé à t_i).

La dernière relation explique la probabilité que nous utiliserons pour maximiser la vraisemblance. Puisque le hasard de base dépendant du temps n'apparaît plus, il est d'usage de parler de "vraisemblance partielle" de n individus[81] :

$$\text{PL}(\beta, x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{\beta x_i}}{\sum\limits_{j \geq i} e^{\beta x_j}} \right) \tag{5.7.2795}$$

Ou dans certains manuels, cela est aussi noté (y compris dans le cas de plusieurs covariables et d'éventuelles données censurées) :

$$L_p(\vec{\beta}, \vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\phi_i}{\sum\limits_{k \in \mathcal{R}(t_i)} \phi_j} \right)^{\delta_i} = \prod_{i=1}^{n} (P([i], t_i))^{\delta_i} \tag{5.7.2796}$$

où la puissance δ_i signifie que les individus ayant les événements (échec / décès) contribuent réellement à la probabilité, mais pas les cas censurés à droite.

Nous pouvons considérer la vraisemblance partielle comme la fonction de densité conjointe pour les rangs des sujets en termes d'ordre des événements, s'il n'y avait pas de censure et pas de temps d'événements liés.

Puisque la vraisemblance ne peut être maximisée qu'avec des méthodes numériques (type méthode de Newton), il est d'usage de ne pas aller plus loin en prenant le logarithme naturel (mais cela ne changerait pas le résultat !). Mais en pratique, le coefficient est cependant estimé en minimisant le négatif de la log-vraisemblance :

$$\ln\left(L_p(\vec{\beta}, \vec{x})\right) = -\delta_i \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{\beta}^T \vec{x} - \ln\left(\sum_{j \geq i} e^{\vec{\beta}^T \vec{x}_j} \right) \right] \tag{5.7.2797}$$

Cette notation n'est toujours pas facile à utiliser et à appréhender dans la pratique. Pour cette raison, nous allons faire un exemple numérique.

[81] Parce que nous supprimons les instants réels des événements même s'ils sont connus, nous utilisons le nom de "vraisemblance partielle"

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Pour voir comment, considérons les données ci-dessous avec une seule covariable (décès dans l'étude clinique dans les semaines après le début du test basé sur l'IMC[a]) :

i	t_i [semaines]	IMC x_i
1	6	31.4
2	98	21.5
3	189	27.1
4	374	22.7

Remarque

Comme il n'y a manifestement pas de variables qualitatives dans ce petit exemple, nous parlons de "modèle de risque proportionnel de Cox dépendant du temps non stratifié".

Il y a donc quatre événements avec les données respectives de l'IMC 31.4, 21.4, 27.1 et 22.7. Comme nous l'avons vu, le temps n'intervient plus mais seulement le rang i, c'est-à-dire l'ordre dans lequel se déroulent les événements d'intérêt.

Il correspond alors quatre probabilités conditionnelles que nous désignerons par souci de simplification par l'écriture P_1, P_2, P_3, P_4.

[a] Indice de Masse Corporel

En cours de traduction de l'anglais

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{e^{\beta x_1}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}} = \frac{e^{\beta \cdot 31.4}}{e^{\beta \cdot 31.4}+e^{\beta \cdot 21.5}+e^{\beta \cdot 27.1}+e^{\beta \cdot 22.7}}\\
P_2 &= \frac{e^{\beta x_2}}{e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}} = \frac{e^{\beta \cdot 21.5}}{e^{\beta \cdot 21.5}+e^{\beta \cdot 27.1}+e^{\beta \cdot 22.7}}\\
P_3 &= \frac{e^{\beta x_3}}{e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}} = \frac{e^{\beta \cdot 27.1}}{e^{\beta \cdot 27.1}+e^{\beta \cdot 22.7}}\\
P_4 &= \frac{e^{\beta x_4}}{e^{\beta x_4}} = \frac{e^{\beta \cdot 22.7}}{e^{\beta \cdot 22.7}}
\end{aligned} \tag{5.7.2798}$$

Nous avons alors la vraisemblance partielle qui est donnée par :

$$\text{PL}(\beta,x) = \frac{e^{\beta \cdot 31.4}}{e^{\beta \cdot 31.4}+e^{\beta \cdot 21.5}+e^{\beta \cdot 27.1}+e^{\beta \cdot 22.7}} \frac{e^{\beta \cdot 21.5}}{e^{\beta \cdot 21.5}+e^{\beta \cdot 27.1}+e^{\beta \cdot 22.7}} \frac{e^{\beta \cdot 27.1}}{e^{\beta \cdot 27.1}+e^{\beta \cdot 22.7}} \frac{e^{\beta \cdot 22.7}}{e^{\beta \cdot 22.7}} \tag{5.7.2799}$$

Et une application numérique qui maximise cela avec le solveur du tableur Microsoft Excel (ou autre feuille de calcul ou outil) donne immédiatement :

$$\hat{\beta} \cong 0.2227 \tag{5.7.2800}$$

Ceci est cohérent avec ce que renvoie des logiciels de statistiques comme MedCalc 12.7.5 ou R (voir dans le livre compagnon correspondant) ! Cela nous donne :

$$h(t,x) \cong h_0(t)e^{0.2227x} \tag{5.7.2801}$$

De là, on peut facilement comparer à un moment donné le rapport de vraisemblance entre deux individus aux caractéristiques différentes.

Nous pouvons également donner le tracé de la courbe de survie correspondante (ici réalisé avec R et incluant l'intervalle de confiance que nous étudierons plus loin) :

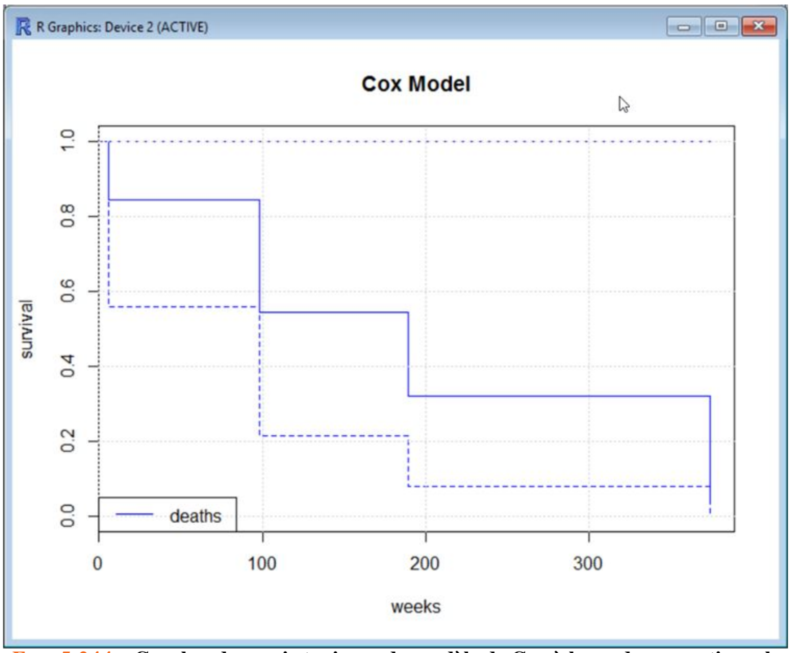


FIG. 5.244 – **Courbes de survie typiques du modèle de Cox à hasards proportionnels**

Nous remarquons après ce bref aperçu qu'à aucun moment nous n'avons eu besoin de connaître ou d'assumer la loi de distribution sous-jacente (Weibull, Exponentielle ou autre) et leurs paramètres associés. Le modèle de Cox est donc une technique non paramétrique.

Il existe (bien qu'à la base ce ne soit pas le but du modèle de Cox), des estimateurs de $h_0(t)$, dont le plus connu est l'estimateur de Breslow, mais il aurait été comme inconsistent) et applicable uniquement pour le taux de risque cumulé et non le taux instantané (donc méfiez-vous des logiciels qui donnent $h_0(t)$...). Et l'intérêt du modèle de Cox est de s'intéresser au ratio de risque et non à estimer le hasard de la fonction survie / fiabilité complète (Kaplan-Meier est alors mieux adapté). Donc, en fait, il n'est pas prévu d'avoir une introduction détaillée de ces estimateurs (et de quelques autres) dans ce livre !

Remarque

Dans le logiciel R, la fonction `basehaz()` utilise par défaut l'estimation de Nelson-Aalen du hasard cumulatif avec une estimation de survie de type Breslow. Alternativement, un estimateur de Kaplan-Meier pour le risque cumulatif peut être sélectionné.

Parlons maintenant un peu des événements simultanés ! En principe, les durées sont supposées être les réalisations d'une variable continue et les covariables aussi (cette variable sous-jacente continue étant évidemment le temps), la probabilité que deux ou plusieurs individus connaissent l'événement au même moment est théoriquement nulle. En pratique, les données sont souvent enregistrées selon une certaine division temporelle (données hebdomadaires, mensuelles, etc.) de sorte qu'il est courant pour une même durée de survie de caractériser plusieurs individus différents.

Fondamentalement, cela ne complique pas sérieusement l'écriture précédente, simplement le nombre de calculs peut devenir tel si l'on utilise la contribution exacte de ces individus à la probabilité partielle que des approximations ont été proposées (disponibles tous les trois les plus fameuses dans le logiciel SAS). Cependant, dans le cadre de ce livre, nous nous concentrerons sur la version exacte !

En cours de traduction de l'anglais

Supposons donc que depuis un certain temps, deux individus aient connu l'intérêt de l'événement et qu'en même temps, trois autres individus soient également à risque. Si nous commençons par traiter le cas du premier individu, alors il y a 5 individus à risque. Quand on traite le cas du deuxième individu, seuls 4 individus sont à risque puisque le premier a déjà été pris en compte. Dans ce cas, la probabilité d'avoir les deux événements simultanément est consistante avec celle de 2 événements non-incompatibles mais indépendants (voir section Probabilités page 476) :

$$\frac{e^{\beta x_1}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}+e^{\beta x_4}}\cdot\frac{e^{\beta x_2}}{e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}+e^{\beta x_4}} \tag{5.7.2802}$$

Naturellement, le fait de commencer par le premier individu est arbitraire puisqu'on peut tout aussi bien admettre de commencer par le second. Au total, la contribution de cette durée de deux individus à la vraisemblance partielle est alors de :

$$\frac{e^{\beta x_1}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}+e^{\beta x_4}}\cdot\frac{e^{\beta x_2}}{e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}+e^{\beta x_4}}+\frac{e^{\beta x_2}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}+e^{\beta x_4}}\cdot\frac{e^{\beta x_1}}{e^{\beta x_2}+e^{\beta x_3}+e^{\beta x_4}+e^{\beta x_4}} \tag{5.7.2803}$$

Notons (pour ceux qui pourraient avoir un doute que c'est toujours plus petit ou égal à l'unité comme l'exige l'axiome des probabilités) que dans le cas où nous avons une population à deux individus cela se réduit à :

$$\frac{e^{\beta x_1}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}}\frac{e^{\beta x_2}}{e^{\beta x_2}}+\frac{e^{\beta x_2}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}}\frac{e^{\beta x_1}}{e^{\beta x_1}}=\frac{e^{\beta x_1}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}}+\frac{e^{\beta x_2}}{e^{\beta x_1}+e^{\beta x_2}}=1 \quad (5.7.2804)$$

ce qui est cohérent avec l'axiome de certains événements dans le domaine des probabilités ! Et lorsque la population est plus importante, il est immédiat que le dénominateur de chaque terme aussi sera aussi plus grand, la probabilité totale est alors encore inférieure ou égale à l'unité !

Si nous répétons la manœuvre avec trois individus simultanément, nous aurons 6 termes qui s'additionneront. Plus généralement, s'il y a k individus parmi n qui vivent l'événement d'intérêt en même temps, le calcul de la contribution fait intervenir $k!$ termes. Le temps de calcul peut donc devenir très pénalisant, par exemple avec k valant 10, nous avons $3,628,800$ termes...

Maintenant, comme pour l'estimateur de survie de Kaplan-Meier, voyons comment nous pouvons construire les intervalles de confiance pour le ratio hasard.

Comme précédemment, nous utiliserons à nouveau la méthode Delta (voir section Méthodes Numériques page ??) pour obtenir l'erreur standard pour $e^{\hat{\beta}}$. Rappelons que cette méthode nous donne que :

$$g(X_n) \underset{n\to+\infty}{\cong} \mathcal{N}\left(0, g'(\mu)^2\sigma^2\right) \quad (5.7.2805)$$

Cela donne immédiatement pour la variance :

$$\hat{\text{V}}\left(e^{\hat{\beta}}\right)=e^{2\hat{\beta}}\hat{\text{V}}\left(\hat{\beta}\right) \quad (5.7.2806)$$

Par conséquent, en supposant que les β sont normalement distribués (et sont un scalaire...) :

$$e^{\hat{\beta}}-Z_{\alpha/2}\sqrt{e^{2\hat{\beta}}\hat{\text{V}}\left(\hat{\beta}\right)}\leq e^{\beta}\leq e^{\hat{\beta}}+Z_{\alpha/2}\sqrt{e^{2\hat{\beta}}\hat{\text{V}}\left(\hat{\beta}\right)} \quad (5.7.2807)$$

Le problème ici est que nous pouvons avoir la borne inférieure de e^{β} qui peut être négative ...

Par conséquent, nous préférons utiliser :

$$e^{\hat{\beta}-Z_{\alpha/2}\text{SE}\left(\hat{\beta}\right)}\leq e^{\beta}\leq e^{\hat{\beta}+Z_{\alpha/2}\text{SE}\left(\hat{\beta}\right)} \quad (5.7.2808)$$

Si nous considérons des individus identiques à l'exception d'une covariable x, le rapport de risque devient comme nous le savons déjà :

$$\frac{h_i}{h_j}=\frac{e^{\beta x_i}}{e^{\beta x_j}}=e^{\beta(x_i-x_j)} \quad (5.7.2809)$$

L'intervalle de confiance du ration de hasard est alors :

$$\boxed{e^{\left(\hat{\beta}-Z_{\alpha/2}\text{SE}\left(\hat{\beta}\right)\right)(x_i-x_j)}\leq \text{H.R.}\leq e^{\left(\hat{\beta}+Z_{\alpha/2}\text{SE}\left(\hat{\beta}\right)\right)(x_i-x_j)}} \quad (5.7.2810)$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Un modèle de risque proportionnel de Cox a été utilisé pour modéliser les temps de survie des patients atteints de cancer. La taille de la tumeur (en [mm]) a été incluse comme covariable, avec le coefficient β. L'estimation du maximum de vraisemblance de β a donné $\hat{\beta} = 0,0176$ avec une erreur standard de 0.004.

Nous voulons calculer une estimation du rapport de risque entre deux individus avec des tumeurs mesurant respectivement 46 [mm] et 37 [mm] qui sont identiques à d'autres égards et construire un intervalle de confiance de 95% pour le ratio de hasard.

Nous avons pour le ratio de hasard :

$$\frac{e^{46\beta}}{e^{37\beta}} = e^{9\beta} \quad (5.7.2811)$$

En utilisant l'estimation :

$$e^{9\hat{\beta}} = e^{0.162} = 1.176 \quad (5.7.2812)$$

L'intervalle de confiance à 95% pour β est alors :

$$0.0176 \pm 1.96 \cdot 0.004 \quad (5.7.2813)$$

C'est-à-dire :

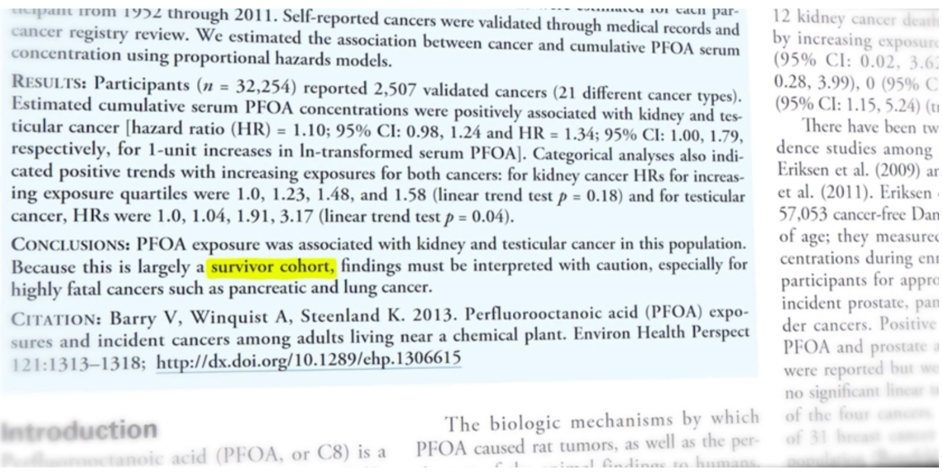
$$0.01016 \leq \beta \leq 0.02584 \quad (5.7.2814)$$

L'intervalle de confiance à 95% pour le ratio de hasard est alors :

$$1.096 \leq e^{9\beta} \leq 1.262 \quad (5.7.2815)$$

Ci-dessous, nous pouvons voir une capture d'écran d'un article scientifique célèbre fournissant des évidences à l'aide du rapport de risque que les produits chimiques éternels comme les PFOA[82] (tous les humains et les animaux du monde entier sont intoxiqués par ces produits chimiques depuis le début du 121e siècle selon le calendrier holocène) sont fortement corrélés à de multiples types de cancers pour les personnes ayant une douzaine ou une centaine de parties pour un million de ces produits chimiques dans leur sang... (cette évidence a coûté des centaines de millions de dollars à leurs fabricants devant un tribunal) :

[82] Les PFOA, ou acide perfluorooctanoïque, sont des produits chimiquse synthétiques classés comme une substance per- et polyfluoroalkylée (PFAS).


...cipant from 1952 through 2011. Self-reported cancers were validated through medical records and cancer registry review. We estimated the association between cancer and cumulative PFOA serum concentration using proportional hazards models.

RESULTS: Participants (n = 32,254) reported 2,507 validated cancers (21 different cancer types). Estimated cumulative serum PFOA concentrations were positively associated with kidney and testicular cancer [hazard ratio (HR) = 1.10; 95% CI: 0.98, 1.24 and HR = 1.34; 95% CI: 1.00, 1.79, respectively, for 1-unit increases in ln-transformed serum PFOA]. Categorical analyses also indicated positive trends with increasing exposures for both cancers: for kidney cancer HRs for increasing exposure quartiles were 1.0, 1.23, 1.48, and 1.58 (linear trend test p = 0.18) and for testicular cancer, HRs were 1.0, 1.04, 1.91, 3.17 (linear trend test p = 0.04).

CONCLUSIONS: PFOA exposure was associated with kidney and testicular cancer in this population. Because this is largely a survivor cohort, findings must be interpreted with caution, especially for highly fatal cancers such as pancreatic and lung cancer.

CITATION: Barry V, Winquist A, Steenland K. 2013. Perfluorooctanoic acid (PFOA) exposures and incident cancers among adults living near a chemical plant. Environ Health Perspect 121:1313–1318; http://dx.doi.org/10.1289/ehp.1306615

Introduction

Perfluorooctanoic acid (PFOA, or C8) is a

The biologic mechanisms by which PFOA caused rat tumors, as well as the per-

12 kidney cancer deaths by increasing exposure (95% CI: 0.02, 3.62 0.28, 3.99), 0 (95% C (95% CI: 1.15, 5.24) (t There have been tw dence studies among Eriksen et al. (2009) ar et al. (2011). Eriksen 57,053 cancer-free Dan of age; they measured centrations during enr participants for appro incident prostate, pan der cancers. Positive PFOA and prostate a were reported but we no significant linear t of the four cancers. of 31 breast cancer

5.7.16.3.1 Modèle de Cox stratifié

Supposons que les observations d'une variable définissent des sous-catégories de la population initiale. Un exemple évident est donné par une covariable de sexe codée 0 ou 1 (dans le cas simple...).

Supposons encore que l'on ne s'intéresse pas à une mesure directe de l'impact de cette variable sur le risque ou que l'on pense que cette variable ne vérifie pas l'hypothèse des risques proportionnels de sorte que l'on refuse son inclusion dans la liste des covariables (autrement dit, à la place de supposer que la covariable binaire *sexe* sur le risque de survie est constante dans le temps et multiplicative sur le risque, on peut supposer que c'est le risque de base qui est différent selon les hommes et les femmes et donc nous avons deux strates différentes !).

Il est cependant possible que l'on veuille prendre en compte un effet du sexe des individus pour mesurer l'impact des autres variables. La solution comme déjà mentionnée dans la parenthèse précédente est alors de stratifier. Dans ce cas les coefficients explicatifs sont contraints d'être identiques dans chacune des strates mais une fonction de vraisemblance partielle est construite séparément sur chacune d'elles, la fonction maximisée pour trouver les estimateurs de paramètres étant le produit de ces vraisemblances partielles. En conséquence, évidemment, le risque de base diffère entre les strates. Par exemple, au lieu d'avoir (cas particulier simple avec deux covariables) :

$$h(t,\vec{x})=h_0(t,\vec{\alpha})e^{\beta_1 x_1+\beta_2 x_2} \tag{5.7.2816}$$

où x_2 serait la covariable *sexe*, nous avons plutôt le système suivant :

$$\begin{aligned}&h(t,\vec{x})=h(t|x_2=0,x_1)=h_{01}(t|x_2=0,x_1)e^{\beta_1 x_1}\\&h(t,\vec{x})=h(t|x_2=1,x_1)=h_{02}(t|x_2=1,x_1)e^{\beta_1 x_1+\beta_2}=h_{02}(t|x_2=1,x_1)e^{\beta_2}e^{\beta_1 x_1}=h'_{02}(t|x_2=1,x_1)e^{\beta_1 x_1}\end{aligned} \tag{5.7.2817}$$

Pour résumé :

$$\begin{aligned}\text{Strate 1}: h(t,\vec{x})&=h_{01}(t|x_2=0,x_1)e^{\beta_1 x_1}\\\text{Strate 2}: h(t,\vec{x})&=h'_{02}(t|x_2=1,x_1)e^{\beta_1 x_1}\end{aligned} \tag{5.7.2818}$$

Ainsi, pour deux individus de la même strate, nous aurons plus de chance d'avoir un risque proportionnel (courbes de survie parallèles) car le rapport annule le hasard de base. En revanche,

En cours de traduction de l'anglais

il est évident que la comparaison de deux individus de strates différentes aura très peu de chance d'être indépendante du temps puisque le rapport des hasards de base ne s'annulera pas.

Cependant, si les deux s'annulent, nous avons une sorte d'évidence qu'ils sont proportionnels et qu'il est raisonnable de modéliser le terme de stratification de manière régulière !

Dès lors les "modèles de Cox stratifiés" :

$$h_k(t,\vec{x})=h_{0k}(t,\vec{\alpha})e^{\vec{\beta}^T\vec{x}} \tag{5.7.2819}$$

où h_{0k} est le hasard de base pour la strate k sont une extension utile des modèles de Cox standard (où pour le rappel h_0 est commun à tous les individus d'une étude) :

$$h(t,\vec{x})=h_0(t,\vec{\alpha})e^{\vec{\beta}^T\vec{x}} \tag{5.7.2820}$$

pour permettre des covariables avec des risques non proportionnels.

La vraisemblance partielle que nous avons introduite plus haut :

$$L_p(\vec{\beta},\vec{x})=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{\vec{\beta}^T\vec{x}_i}}{\sum\limits_{j\geq i}e^{\vec{\beta}^T\vec{x}_j}}\right)^{\delta_i} \tag{5.7.2821}$$

est ensuite calculé pour le modèle stratifié comme :

$$L_{p,\text{St.}}(\vec{\beta},\vec{x})=\prod_{k=1}^{K}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{\vec{\beta}^T\vec{x}_{kj}}}{\sum\limits_{j\geq i}e^{\vec{\beta}^T\vec{x}_{kj}}}\right)^{\delta_i} \tag{5.7.2822}$$

Enfin, dans le cas de la stratification, la variable responsable de la stratification n'étant pas explicitement mesurée, on ne peut pas l'utiliser comme variable explicative.

Alors, que pouvons-nous résumer jusqu'ici ? Nous avons vu trois sortes de modèles avec pour chacun au moins un modèle mathématique particulier (mais il y en a bien plus en réalité quand on devient un expert dans le domaine comme nous l'avons déjà montré dans une figure plus haut résumant toutes les méthodes d'analyse de survie les plus connues !) :

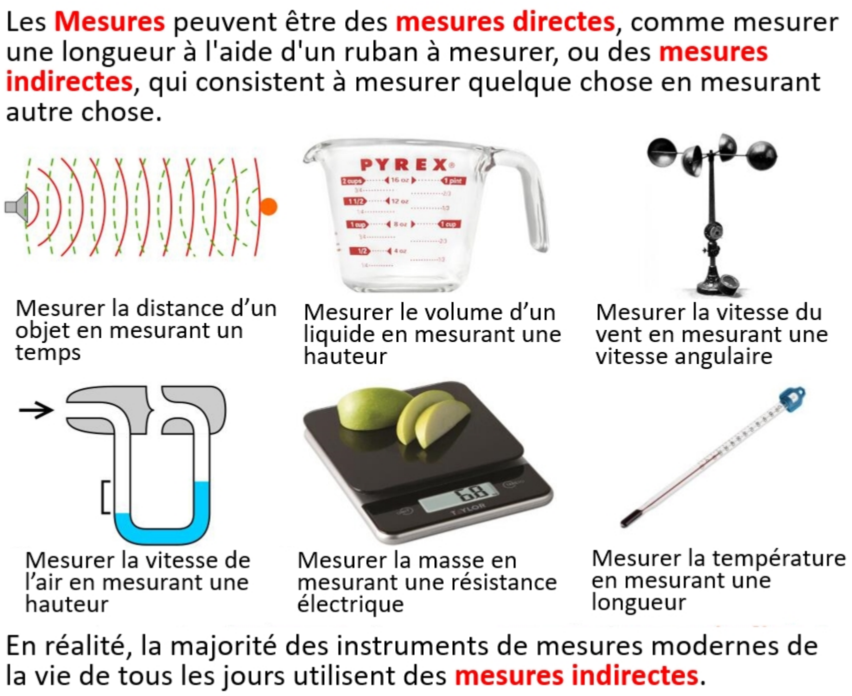
- Modèles paramétriques : où le hasard de base et les covariables sont tous supposés avoir les mêmes distributions (par exemple, les modèles de Weibull ou exponentiels la plupart du temps).
- Modèles non paramétriques : lorsque le hasard de base et les covariables n'ont pas de distribution spécifique supposée (par exemple, modèle de Kaplan-Meier).
- Modèles semi-paramétriques : lorsque le hasard de base n'a pas de distribution spéciale supposée mais que les covariables ont une certaine distribution supposée (par exemple, le modèle de risque proportionnel de Cox).

En cours de traduction de l'anglais

5.7.17 Propagation des Erreurs (analyse d'incertitude expérimentale)

Il est impossible de connaître (mesurer) la valeur exacte d'une grandeur physique expérimentalement, il est donc très important de déterminer son incertitude.

Nous nommons bien évidemment "erreur", la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte. Cependant, comme nous ne connaissons pas la valeur exacte, nous ne pouvons de toute façon pas connaître l'erreur... Le résultat est encore incertain. C'est pourquoi on parle de "incertitude de mesure".



Nous distinguons deux grands types d'incertitudes :

1. Les "erreurs systématiques" : elles affectent le résultat et ce constamment dans le même sens (erreurs des appareils de mesure, limites de précision, etc.). Il faut alors éliminer, ou corriger le résultat, si possible !

2. Les "erreurs accidentelles" (statistique) : nous devons répéter les mesures et calculer l'incertitude moyenne d'estimation à l'aide de techniques statistiques.

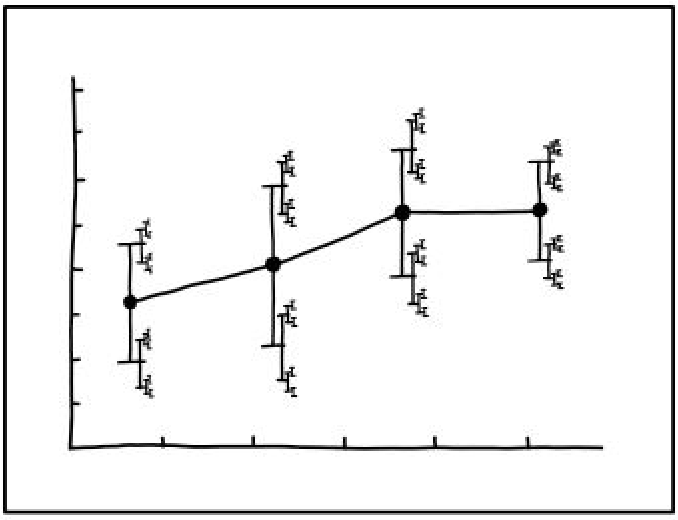


FIG. 5.245 – Propagation des erreurs (source : xkcd)

5.7.17.1 Incertitudes absolues et relatives (calcul direct du biais)

Si la vraie valeur d'une variable est x (théoriquement supposée connue) et la valeur mesurée x_0, alors δx_0 est "l'incertitude absolue" (incertitude due à des appareils de mesure) ou "erreur absolue".

L'intervalle de fluctuation est donc noté :

$$x_0 - \Delta x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x_0 \tag{5.7.2823}$$

ou :

$$x = x_0 \pm \Delta x \tag{5.7.2824}$$

"L'incertitude" ou "erreur relative" est elle-même définie par :

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} \tag{5.7.2825}$$

L'incertitude absolue est utilisée pour trouver une approximation du dernier chiffre significatif de celle-ci. Par contre, lorsque l'on veut comparer deux mesures ayant des incertitudes absolues pour identifier quelle était la plus grande marge d'erreur, on calcule l'incertitude relative de ce nombre en divisant l'incertitude absolue par la mesure elle-même, et on transforme le résultat typiquement en pourcentages.

En d'autres termes, l'incertitude relative donne une idée de la précision de la mesure en %. Si nous faisons une mesure avec une incertitude absolue de 1 [mm], nous ne saurons pas si c'est une bonne mesure ou non. Cela dépend si on mesure la taille d'une pièce de monnaie, de notre voisin, ou de la distance Paris-Marseille de la distance Terre-Lune. Bref, elle dépend de l'incertitude relative (c'est-à-dire du rapport de l'incertitude absolue et de la mesure) !

En cours de traduction de l' anglais

Donc dans le cas d'une loi du type $f(x, y, z, t)$ dont on cherche l'erreur on calculerait (une fois avec tous les termes positifs et une autre fois avec tous les termes négatifs) :

$$\frac{\Delta f(x,y,z,t)}{f(x,y,z,t)}=\frac{f(x\pm\Delta x, y\pm\Delta y, z\pm\Delta y, t\pm\Delta t)}{f(x,y,z,t)} \tag{5.7.2826}$$

Cette méthode est assez ennuyeuse car elle doit être calculée pour chaque valeur (x, y, z, t).

5.7.17.2 Erreurs statistiques

Dans la plupart des mesures, nous pouvons estimer l'erreur due à des phénomènes aléatoires, nommés "erreurs aléatoires", par une série de n mesures $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ et ceci par opposition à "l'erreur systématique" qui est la partie non aléatoire de l'erreur.

L'erreur aléatoire permet d'introduire les concepts de :

- Répétabilité : Elle est définie comme l'étroitesse de l'accord entre les résultats des mesures successives d'un même élément, effectuées avec la même méthode, par le même opérateur avec les mêmes instruments de mesure, dans le même laboratoire (conditions) et dans un intervalle de temps assez court (voir un peu plus loin une définition un peu plus rigoureuse conforme aux normes internationales).
- Reproductibilité (parfois appelée "justesse") : qui est définie comme l'étroitesse de l'accord entre les résultats des mesures successives de la même quantité, dans le cas où des mesures individuelles sont effectuées : par des méthodes différentes, en utilisant des instruments utilisés par différents opérateurs de laboratoires !

Ces deux types d'erreurs sont presque toujours regroupés sous les étiquettes "R&R" ou "étude R&R" dans l'industrie. En général, l'accord est moins bon en matière de reproductibilité.

Remarque

Il existe des logiciels exécutant une ANOVA à facteurs fixse bidirectionnelle avec répétition comme Minitab qui génèrent des rapports très détaillés pour l'analyse R&R.

Ces deux types d'erreurs peuvent être illustrés par le tir à la cible de façon plus générale :

En cours de traduction de l'anglais

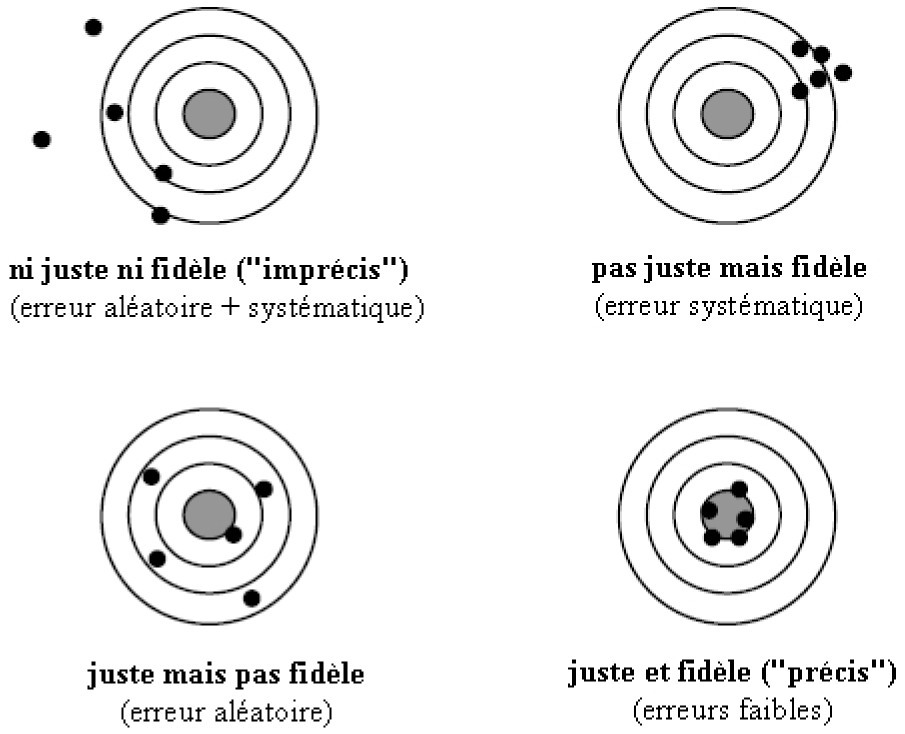
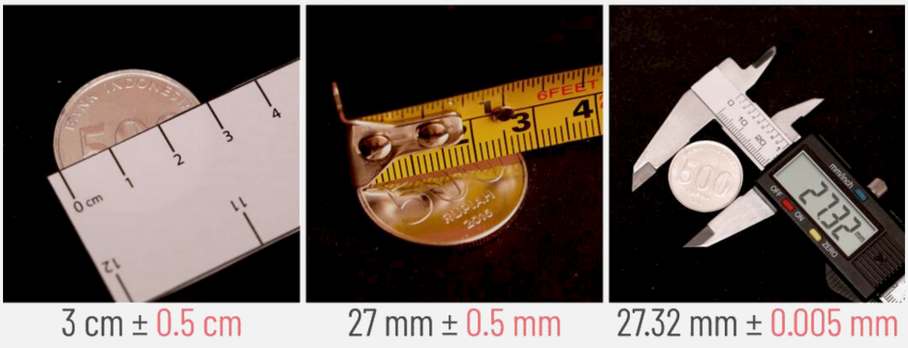


FIG. 5.246 – **Type d'erreurs de mesure**

Remarque

L'erreur de mesure est la différence entre une valeur mesurée et une valeur réelle. L'erreur de mesure n'est pas une "erreur". La variabilité fait partie intégrante de tout processus de mesure et ne peut jamais être éliminée !

Ci-dessous, une illustration de la même pièce indonésienne de 500 Rp utilisant trois appareils de mesure différents :



Comme nous l'avons vu précédemment, la valeur moyenne arithmétique sera dans le cas univarié :

$$\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (5.7.2827)$$

et l'écart-type (estimateur biaisé comme prouvé précédemment) toujours dans le cas univarié

(le $n$ième cas a déjà été prouvé lors de notre étude détaillée de la variance) :

$$\hat{\sigma}^2 = \overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{5.7.2828}$$

et l'écart type non biaisé (comme cela a également été prouvé précédemment) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{5.7.2829}$$

et nous avons prouvé que l'écart type de la moyenne était donné par (sous certaines hypothèses !) :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{5.7.2830}$$

et comme nous l'avons prouvé, après un grand nombre de mesures indépendantes et identiquement distribuées, la distribution des erreurs sur une mesure suit une distribution Normale de sorte qu'on peut écrire pour l'intervalle de fluctuation (si on n'a pas assez de mesure, on utilise alors l'intervalle de fluctuation sur la base de la loi de Student) :

$$\begin{array}{lr} \bar{x}_i - \sigma < x_i < \bar{x}_i + \sigma & 68\% \\ \bar{x}_i - 2\sigma < x_i < \bar{x}_i + 2\sigma & 95,4\% \end{array} \tag{5.7.2831}$$

Bref, on peut utiliser tous les outils statistiques vus jusqu'à présent dans le domaine de la mesure en laboratoire ou ailleurs !

Le résultat d'une mesure (ou d'une estimation et ce même dans le domaine de la gestion de projets ! ! !) doit comporter rigoureusement au moins quatre éléments. Par exemple pour une erreur symétrique :

$$\underbrace{125.3}_{1}\ \underbrace{[\text{kg}]}_{2} \pm \underbrace{1.7}_{3}\ [\text{kg}]\ \underbrace{(k=2)}_{4} \tag{5.7.2832}$$

ou pour une asymétrique :

$$125.3^{+1.7}_{-2.1}\ [\text{kg}](k=2) \tag{5.7.2833}$$

Où nous avons :

1. La valeur numérique avec le nombre correct de décimales.
2. Unité de mesure selon le système de mesure international.
3. Incertitude élargie de $k \cdot \sigma$ (intervalle de fluctuation)
4. La valeur entière de k utilisée pour l'intervalle de fluctuation.

En cours de traduction de l'anglais

Cette méthode est bien plus utile que la précédente car nous n'avons pas besoin de la recalculer à chaque fois pour chaque valeur expérimentale. C'est cette méthode qu'utilise par exemple le célèbre CERN (Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire)[83].

Dans les articles d'astrophysique, on retrouve également la notation suivante séparant la partie de la variation de l'outil de mesure et de ce qui est mesuré :

$$125.3^{+1.7}_{-2.1}(k=2)\pm 6\text{ (systematic) [kg]} \tag{5.7.2834}$$

ou (toujours en astrophysique et en cosmologie) nous pouvons également voir des valeurs généralement données comme :

$$0.09\pm 0.25(1\sigma)\pm 0.49(2\sigma) \tag{5.7.2835}$$

Attention ! Il arrive de très nombreuses fois... dans les articles scientifiques et aussi dans les manuels scolaires qu'une mesure soit fournie sans indication de son approximation. Il est alors généralement admis en pratique que l'incertitude absolue n'est pas supérieure à une unité de l'ordre de puissance indiqué par le dernier chiffre.

5.7.17.3 Répétabilité

La répétabilité r, différence vraisemblable de mesure entre deux mesures d'objets similaires dans un même laboratoire dans des conditions opératoires similaires, est définie normativement (dans les normes ISO 5725 :1987 et AFNOR NF X 06-041) dans le cas particulier unidimensionnel (univariée) par :

$$P\left(|X_1-X_2|<r\right)=p \tag{5.7.2836}$$

où p est une probabilité à valeur élevée, généralement égale à 95% et X_1,X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une distribution Normale avec une moyenne inconnue et une variance inconnue $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$. Par la stabilité de la distribution Normale, alors il vient :

$$X_1-X_2=\mathcal{N}(\mu,\sigma)-\mathcal{N}(\mu,\sigma)=\mathcal{N}\left(0,\sqrt{2}\sigma\right) \tag{5.7.2837}$$

Mais, nous avons vu plus haut dans cette section dans le cadre de l'étude de l'intervalle de confiance de la moyenne que :

$$P\left(Y\geq\frac{\delta}{\sigma}\right)=0.025 \tag{5.7.2838}$$

Donc textuellement :

$$P\left(Y\leq\frac{\delta}{\sigma}\right)=0.975 \tag{5.7.2839}$$

[83] Ajoutez à cela la méthodologie de mesure Six Sigma étudiée dans la section Génie Industriel

En cours de traduction de l'anglais

et donc à l'aide des tables (ou logiciels), nous avons :

$$\frac{\delta}{\sigma} \cong 1.96 \tag{5.7.2840}$$

et dès lors :

$$\delta \cong 1.96\sigma \tag{5.7.2841}$$

Soit avec la notation respectant les normes des laboratoires :

$$r \cong 1.96\sigma \tag{5.7.2842}$$

Mais dans le cas présent, nous avons une double variance. Il vient donc :

$$\boxed{r \cong 1.96\sqrt{2}\sigma \cong 2.77\sigma} \tag{5.7.2843}$$

On retombe donc sur la relation disponible dans les normes avec le fameux coefficient de 2.77. Évidemment après il est clair que la valeur de r doit être minimisée !

5.7.17.4 Propagation des erreurs (approximation linéarisée)

Soit une mesure $x+\delta x$ et $y=f(x)$ une fonction de x. Quelle est l'incertitude sur y it si nous ne connaissons que l'incertitude d'un appareil de mesure, mais qui ne serait pas donnée comme un écart type statistique ?

Dans ce type de situation on parle de "mesure indirecte". C'est typiquement le cas si l'on veut mesurer une intensité électrique I en la mesurant indirectement en faisant le rapport de la tension U par la résistance R utilisée pour la mesure comme $I=U/R$. Il est en effet évident que dans cette dernière situation on ne peut pas faire la somme de l'incertitude de tension et de l'incertitude de résistance car le système n'est pas homogène au niveau des unités ! ! !

Lorsque δx est petit, $f(x)$ est remplacé au voisinage de x par sa tangente (c'est simplement la dérivée bien sûr !) :

$$\Delta y = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| \Delta x \tag{5.7.2844}$$

mais si y dépend de plusieurs variables x,z,t mesurées avec les incertitudes $\delta x, \delta z, \delta t$:

$$y=f(x,z,t) \tag{5.7.2845}$$

l'erreur maximale possible est alors la différentielle totale exacte (voir section Calcul Différentiel et Intégral 1449) :

$$\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \mathrm{d}x + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \mathrm{d}z + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \mathrm{d}t \tag{5.7.2846}$$

En utilisant les séries d'expansion de Taylor du premier ordre (voir section Séquences et Séries page 1677) nous pouvons écrire :

$$\Delta y \cong \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \Delta t \tag{5.7.2847}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ce que nous désignons souvent comme la somme des dérivées partielles avec leur incertitude respective :

$$\Delta y \cong \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \tag{5.7.2848}$$

et cela fonctionne très bien tant que les incréments Δx sont suffisamment petits. Même les fonctions très courbées sont presque linéaires sur une région suffisamment petite !

Cette dernière relation est la "loi de propagation" du problème étudié. La dérivée partielle en facteur de l'incertitude est dans la science de la mesure, nommée le "coefficient d'incertitude".

Bien sûr, nous pouvons également écrire pour obtenir l'erreur relative :

$$\frac{\Delta y}{y} \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \tag{5.7.2849}$$

Ce qui nous amène à :

$$\begin{cases} y & = x+z \\ y & = x-z \end{cases} \Rightarrow \Delta y = \Delta x + \Delta z \tag{5.7.2850}$$

et :

$$\begin{cases} y & = xz \Longrightarrow \Delta y = z\Delta x + x\Delta z \\ y & = \dfrac{x}{z} \Longrightarrow \Delta y = \dfrac{z\Delta x + x\Delta z}{z^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta z}{z} \tag{5.7.2851}$$

L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient de valeurs incertaines est donc égale à la somme des incertitudes relatives. Il est donc clair qu'une opération mathématique ne peut pas améliorer l'incertitude des données.

De ce qui précède on en déduit immédiatement :

$$y = x^n \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = |n| \frac{\Delta x}{x} \tag{5.7.2852}$$

et dès lors :

$$g = x^n y^m z^p \ldots \Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = |n|\frac{\Delta x}{x} + |m|\frac{\Delta y}{y} + |p|\frac{\Delta z}{z} + \ldots \tag{5.7.2853}$$

Voici un résumé de cela sous forme de tableau (avec un petit changement dans les notations) :

$z=$	$x+y$	$x-y$	xy	$\dfrac{x}{y}$
$\Delta z=$	$\Delta x + \Delta y$	$\Delta x + \Delta y$	$x\Delta y + y\Delta x$	$\dfrac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$
$\dfrac{\Delta z}{z}=$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y}{x+y}$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y}{x-y}$	$\dfrac{x\Delta y + y\Delta x}{xy} = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$	$\dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$

TAB. 5.121 – **Relations communes d'erreurs absolues et relatives**

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Le résultat d'une multiplication, d'une division, d'une soustraction ou d'une addition est arrondi à autant de chiffres significatifs que la donnée qui en a le plus petit nombre.

Évidemment, cette loi de propagation (linéaire) n'est valable que dans la plage où la fonction peut être approchée comme linéaire. Soyez donc prudent dans son utilisation ! Sinon, nous devons prendre une approximation en série de Taylor d'ordre supérieur.

Si l'incertitude des mesures est donnée sous forme statistique (écart-type), il est donc évident que l'on utilisera les propriétés de variance déjà vues au début de cette section... au moins pour les cas simples !

Encore une fois le point négatif de cette méthode par rapport à la méthode statistique est qu'il faut calculer l'erreur pour chaque mesure...

✍**Exemple :**

On veut calculer l'incertitude de la mesure de la densité d'un cube d'un matériau donné. On sait alors que :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a} \tag{5.7.2854}$$

En cours de traduction Opera Magistris

5.7.17.5 Propagation des erreurs (approche statistique)

Enfin, il y a un point supplémentaire à discuter : supposons que nous mesurions une quantité u plusieurs fois, ou par plusieurs méthodes différentes, et pour chaque mesure u_i nous estimons son incertitude σ_i. Les σ_i ne sont pas nécessairement égaux ; certaines mesures seront meilleures que d'autres, en raison de la plus grande taille des échantillons (plus de répétitions), ou en raison d'autres facteurs, comme un meilleur appareil de mesure. Comment déterminons-nous notre meilleure estimation de u et comment trouvons-nous l'incertitude dans cette estimation ?

Par exemple, supposons qu'une longueur x soit mesurée par une personne n_1 fois et par une autre personne n_2 fois, de sorte que la première personne trouve :

$$u_1 := \bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_k x_k \qquad \text{avec} \qquad \sigma_1^2 = \frac{1}{n_1}\sigma^2 \tag{5.7.2855}$$

tandis que la deuxième personne trouve :

$$u_2 := \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_j x_j \qquad \text{avec} \qquad \sigma_2^2 = \frac{1}{n_2}\sigma^2 \tag{5.7.2856}$$

Ici, σ_1 est l'incertitude de u_1, σ_2 est l'incertitude de u_2 et σ^2 est la variance de population des valeurs de x. Comment u_1 et u_2 doivent-ils être combinés pour obtenir un u global, et quelle est l'incertitude dans ce $\bar{u}$ final ? Puisque $n_1 = \sigma^2/\sigma_1^2$ et $n_2 = \sigma^2/\sigma_2^2$, nous avons :

$$\bar{u} = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_k x_k + \sum_j x_j\right) = \frac{1}{n_1+n_2}(n_1u_1+n_2u_2) = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma_1^2}+\dfrac{1}{\sigma_2^2}}\left(\frac{u_1}{\sigma_1^2}+\frac{u_2}{\sigma_2^2}\right) \tag{5.7.2857}$$

avec par définition :

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma_1^2}+\dfrac{1}{\sigma_2^2}} \tag{5.7.2858}$$

En général, s'il y a n valeurs de u, voici le résultat généralisé, sous une forme qui ne dépend que de chaque u_k et de son incertitude σ_k :

$$\boxed{\bar{u} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{\sigma_k^2}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k^2}} \qquad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k^2}}} \tag{5.7.2859}$$

Notez comment plus de mesures, ou des mesures plus précises, réduisent l'incertitude en augmentant sa réciproque.

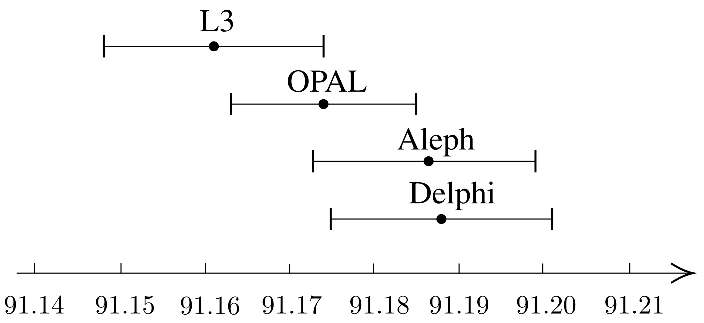
En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Le domaine de la physique des particules offre de nombreuses situations où les relations précédentes ainsi que le χ^2 peuvent être appliqués. Un exemple particulièrement simple[a] implique des mesures de la masse M_Z du boson Z^0 par des groupes expérimentaux au CERN. Les résultats des mesures de M_Z effectuées par quatre détecteurs différents (L3, OPAL, Aleph et Delphi) sont les suivants[b] :

Détecteur	**Masse en GeV/c^2**
L3	91.161 ± 0.013
OPAL	91.174 ± 0.011
Aleph	91.186 ± 0.013
Delphi	91.188 ± 0.013

Les incertitudes répertoriées sont des estimations de σ_i, les écarts-types pour chacune des mesures. La figure ci-dessous montre ces mesures tracées sur une échelle de masse horizontale (tournée verticalement pour plus de clarté) :



M_Z $[\text{GeV} \cdot c^{-2}]$

La question se pose : ces données peuvent-elles être bien décrites par un chiffre unique, à savoir une estimation de M_Z faite en déterminant la moyenne pondérée des quatre mesures ?

Nous savons que nous pouvons calculer la moyenne pondérée $\bar{M}_Z$, et son écart type $\sigma_{\bar{M}_Z}$ comme ceci :

$$\bar{M}_Z = \frac{\sum M_i/\sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\bar{M}_Z}^2 = \frac{1}{\sum 1/\sigma_i^2} \tag{5.7.2860}$$

pour trouver :

$$\bar{M}_Z \pm \sigma_{\bar{M}_Z} = 91.177 \pm 0.006 \tag{5.7.2861}$$

Alors nous pouvons construire le χ^2 :

[a] Cet exemple a été fourni par Patricia Burchat, membre de la faculté de physique de l'UCSC de 1988 à 1994, et maintenant à Stanford

[b] Des mesures plus récentes sont répertoriées sur http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-z-boson.pdf

$$\chi^2 = \sum_{i}^{4} \frac{M_i - \bar{M}_Z}{\sigma_i^2} \cong 2.78 \qquad (5.7.2862)$$

Nous savons que nous devons nous attendre à ce que cette valeur de χ^2 soit tirée d'une distribution du khi-2 3 degrés de liberté.

Cela correspond à une p-valeur de 0.426803. Le résultat n'est pas significatif à $p < 0.05$. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle les quatre mesures de la masse du boson Z^0 sont cohérentes entre elles.

5.7.17.6 Chiffres significatifs

Dans les petites écoles (et parfois aux niveaux supérieurs et dans les entreprises), il est nécessaire de transformer une mesure exprimée dans une certaine unité en une autre unité.

Par exemple, en prenant les tables, on peut avoir la conversion suivante :

$$140\,[\text{lb}] = 140 \cdot 0.45349237\,[\text{kg/lb}] = 63.5029318\,[\text{kg}]$$

Vient ensuite la question (que l'étudiant ou le praticien a peut-être oublié...). En partant d'une mesure avec une précision d'environ 1 [lb] (donc de l'ordre de 0.5 [kg]), une simple conversion d'unité pourrait-elle conduire à une précision de $1/10$ [mg] ? ? ? ?

De cet exemple, il est nécessaire de retenir qu'une marge d'incertitude est associée à toutes les valeurs mesurées et à toutes les valeurs calculées à partir des valeurs mesurées.

Dans les sciences exactes (et aussi les soft skills comme le management), tout raisonnement, toute analyse doit tenir compte de cette incertitude ! ! !

Mais pourquoi certains chiffres sont-ils significatifs et d'autres non ? Car en sciences on ne rapporte que ce qui a été observé objectivement (principe d'objectivité). En conséquence, nous limitons l'écriture d'un nombre aux décimales raisonnablement fiables malgré l'incertitude : les chiffres significatifs ! La précision que pourraient alors sembler apporter des chiffres supplémentaires est alors illusoire.

Il faut alors connaître les arrondis selon quelques règles et conventions :

- Lorsque le chiffre du rang le plus élevé supprimé est supérieur à 5, le dernier chiffre est augmenté de 1 (exemple : $12,66$ s'arrondit à 12.7). Dans la version francophone de Microsoft Excel 11.8346, ceci est faisable avec :

```
=ARRONDI(12.66,1)=12.7
```

- Lorsque le chiffre du rang le plus élevé supprimé est inférieur à 5, le chiffre précédent reste inchangé (exemple : 12.64 s'arrondit à 12.6). Dans la version francophone de Microsoft Excel 11.8346 cela donne :

En cours de traduction de l'anglais

```
=ROUND(12.64,1)=12.6
```

- Lorsque le chiffre du rang le plus élevé supprimé est égal à 5 alors si l'un des chiffres qui suivent n'est pas zéro, le chiffre précédent est augmenté de 1 (exemple : 12.502 arrondit à $12,7$). Dans la version francophone de Microsoft Excel 11.8346, ceci est faisable avec :

```
=ARRONDI(12.6502,1)=12.7
```

- Lorsque le chiffre du rang le plus élevé supprimé est égal à 5 (qui n'est suivi d'aucun nombre !) ou n'est suivi que de zéros, on augmente de 1 le chiffre précédent du nombre arrondi s'il est impair, sinon on le laissez inchangé (exemples : 12.75 arrondit à 12.8 et 12.65 à 12.6). Dans ce dernier cas, le dernier chiffre du nombre arrondi sera toujours un nombre pair. Les tableurs ne respectent pas vraiment cette dernière règle, en fait avec la version francophone de Microsoft Excel 11.8346 nous avons :

```
=ARRONDI(12.75,1)=12.8
=ARRONDI(12.65,1)=12.7
```

En fait, dans la pratique ces règles sont rarement respectées car les logiciels (principalement les logiciels de type tableurs) n'intègrent pas de manière appropriée ces règles. Il est alors d'usage de se contenter d'arrondir à la valeur décimale la plus proche.

Les chiffres significatifs d'une valeur comprennent tous ses chiffres déterminés avec certitude et le premier chiffre qui porte une incertitude (ce dernier significatif occupe le même rang que l'ordre de grandeur de l'incertitude !).

Souvent, les sources de données ne mentionnent pas d'intervalle de fluctuation (c'est-à-dire l'indication $\pm\ldots$). Par exemple, lorsqu'on écrit $m = 25,4$ [kg] on considère classiquement que l'incertitude est du même ordre de grandeur que le rang du dernier chiffre significatif (donc : la décimale incertaine !).

En fait, seule la décimale de l'incertitude est implicite : la marge réelle est indéterminée.

Cependant, des informations supplémentaires sur la précision peuvent être transmises par des notations supplémentaires. Il est souvent utile de savoir à quel point le ou les chiffres finaux sont exacts. Par exemple, la valeur acceptée de l'unité de charge électrique élémentaire peut être correctement exprimée sous la forme $1.602176487(40)\cdot 10^{-19}$ [C], qui est un raccourci pour $1.602176487 \pm 0.000000040 \cdot 10^{-19}$ [C].

En cours de traduction de l'anglais

5.7.18 Statistiques spatiales

Les statistiques descriptives spatiales sont utilisées à diverses fins en géographie, en particulier dans les analyses de données quantitatives impliquant des systèmes d'information géographique (SIG).

5.7.18.1 Modèle de distance spatiale 2D de Poisson

C'est au début des années 11920 (selon calendrier holocène) qu'apparaissent les premières publications scientifiques (par des environnementalistes) concernant des tests statistiques de distribution spatiale aléatoire des organismes (analyse de motifs ponctuels spatiaux). Mais ce type de statistique est également utilisé en Marketing pour déterminer si la répartition des clients est aléatoire ou non ou en Sciences Sociales pour déterminer si les catégories sociales de la population humaine sont bien mélangées ou non.

Définition (#5.7.158) : La "Structure spatiale totalement aléatoire" (SPTA) décrit un processus ponctuel par lequel des événements ponctuels se produisent dans une zone d'étude donnée de manière complètement aléatoire. Elle est synonyme de "processus de Poisson spatial homogène". Un tel processus est modélisé en utilisant un seul paramètre ρ , c'est-à-dire la densité de points dans la zone définie.

Dans les statistiques spatiales et les domaines connexes, un "Processus de Poisson" (également nommé "champ aléatoire ponctuel de Poisson") est un type d'objet mathématique aléatoire qui se compose de points situés au hasard sur un espace mathématique. Ce processus ponctuel a des propriétés mathématiques pratiques, ce qui l'a amené à être fréquemment défini dans l'espace euclidien et utilisé comme modèle mathématique pour des processus apparemment aléatoires dans de nombreuses disciplines.

Les données sous la forme d'un ensemble de points, irrégulièrement répartis dans une région de l'espace, surviennent dans de nombreux contextes différents ; les exemples incluent les emplacements d'arbres dans une forêt, de nids d'oiseaux, de noyaux dans des tissus, de personnes malades dans une population à risque. Nous appelons un tel ensemble de données un "motif de points spatiaux" et appelons les emplacements des "événements", pour les distinguer des points arbitraires de la région en question. L'hypothèse de la structure spatiale totalement aléatoire pour un modèle de points spatial affirme que le nombre d'événements dans n'importe quelle région suit une distribution de Poisson avec un nombre moyen donné par subdivision uniforme. Les événements d'un motif sont répartis indépendamment et uniformément dans l'espace ; en d'autres termes, les événements sont également susceptibles de se produire n'importe où et n'interagissent pas les uns avec les autres !

Les modèles typiques de distances moyennes aléatoires sont basés sur trois hypothèses fondamentales (hypothèse) :

H1. La probabilité qu'un élément se trouve dans une région de surface C incluse dans une zone plus grande S, telle que $C \subset S$, est proportionnelle à la surface C telle que :

$$P(C) \propto \frac{a(C)}{a(S)} \tag{5.7.2863}$$

En cours de traduction de l'anglais

cette hypothèse semble être nommée "principe spatial de Laplace".

H2. La position des éléments dans une surface S n'est pas influencée par ses voisins dans la même surface (pas de corrélation !).

H3. Si la probabilité qu'un élément soit dans la surface C est donnée selon H1 par :

$$P(C=1)=\frac{a(C)}{a(S)}=p \quad (5.7.2864)$$

Alors la probabilité qu'il n'y soit pas est donnée par :

$$P(C=0)=1-\frac{a(C)}{a(S)}=1-p=q \quad (5.7.2865)$$

À partir de ces trois hypothèses, on peut alors affirmer (mais en pratique il faut vérifier que cela est satisfait !) que la probabilité de trouver k éléments dans une surface $C\subset S$ sur un total de n points est alors donnée par une loi binomiale :

$$P\left(N(C)=\frac{k}{n},S\right)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{a(C)}{a(S)}\right)^k\left(1-\frac{a(C)}{a(S)}\right)^{n-k}=C_k^n p^k q^{n-k} \quad (5.7.2866)$$

Dans une population de n éléments inclus dans une surface S avec donc une densité $\rho=n/S$ la distance r_i entre chaque élément et son plus proche voisin est mesurée et on note $\bar{r}$ la distance arithmétique moyenne telle que :

$$\bar{r}=\frac{\sum r_i}{n} \quad (5.7.2867)$$

Théorème 5.48. Nous allons prouver dans ce qui suit que si la distribution des éléments est réellement aléatoire et non corrélée, alors la moyenne attendue (espérance) de la distance est :

$$\mu_r=\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \quad (5.7.2868)$$

Et qu'alors le "critère de ratio de randomisation" :

$$\text{RC}=\frac{\bar{r}}{\mu_r} \quad (5.7.2869)$$

est utilisé comme mesure du degré d'écart de la distribution aléatoire. Si le ratio tend vers 1, alors la distribution sera considérée comme aléatoire et non corrélée. Si les éléments sont très agrégés (corrélés), alors ce ratio tendra vers 0.

Démonstration 5.48.1. Pour cela nous partons de :

$$P\left(N(C)=\frac{k}{n},S\right)=C_k^n p^k q^{n-k} \quad (5.7.2870)$$

Nous rappelons que nous avons prouvé que la distribution binomiale tend vers une distribution de Poisson :

$$P_k=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \quad (5.7.2871)$$

En cours de traduction de l'anglais

avec $\mu=np$ et $n\rightarrow+\infty$ pour de petites valeurs de k.

Si une surface principale S supposée être un disque de rayon R (oui ... en biologie les récipients passés au microscope sont souvent circulaires afin d'éviter les effets de coins) est découpée en D surfaces secondaires égales, alors nous pouvons écrire :

$$\mu=np=\frac{\rho(\phi R^2)}{D} \tag{5.7.2872}$$

Ce qui donne, en analysant les unités, le nombre moyen de points par coupe. Dès lors :

$$P_k=\frac{(\rho\pi R^2D^{-1})^k}{k!}e^{-\rho\pi R^2D^{-1}} \tag{5.7.2873}$$

est la probabilité de trouver k éléments sur une surface aléatoire de dimension πR^2D^{-1}. Si nous posons $k=0$, alors nous avons la probabilité suivante de trouver zéro élément dans une surface aléatoire de dimension πR^2D^{-1} :

$$P_0=\frac{(\rho\pi R^2D^{-1})^0}{0!}e^{-\rho\pi R^2D^{-1}}=e^{-\rho\pi R^2D^{-1}} \tag{5.7.2874}$$

Respectivement si on définit un disque centré sur un élément existant, alors nous avons la probabilité qu'aucun autre élément ne se trouve dans le disque de rayon R qui est égale à :

$$P_0=e^{-\rho\pi R^2D^{-1}} \tag{5.7.2875}$$

En conséquence :

$$1-e^{-\rho\pi^2R^2D^{-1}} \tag{5.7.2876}$$

Est la probabilité qu'un voisin le plus proche se trouve au-delà de la distance R. En prenant la différentielle de cette dernière expression, nous avons alors la probabilité infinitésimale en fonction de la distance d'avoir un plus proche voisin :

$$\mathrm{d}P=2\rho\pi RD^{-1}e^{-\rho\pi^2R^2D^{-1}}\mathrm{d}R \tag{5.7.2877}$$

Par conséquent, la moyenne attendue de la distance au plus proche voisin d'un élément centré dans un disque de rayon R allant de 0 à $+\infty$ est :

$$\mu_r=\mathrm{E}(R)=\int_0^{+\infty}R2\rho\pi RD^{-1}e^{-\rho\pi R^2D^{-1}}\mathrm{d}R=2\int_0^{+\infty}\rho\pi D^{-1}R^2e^{-\rho\pi R^2D^{-1}}\mathrm{d}R \tag{5.7.2878}$$

Posons :

$$x^2=\rho\pi D^{-1}R^2\Rightarrow \mathrm{d}R=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\rho\pi D^{-1}}} \tag{5.7.2879}$$

Nous avons alors :

$$2\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\rho\pi D^{-1}}}=\frac{2}{\sqrt{\rho\pi D^{-1}}}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{5.7.2880}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons déjà calculé cette intégrale lors de notre étude de la loi normale (Gauss-Laplace) et nous avons prouvé en intégrant par parties que :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tag{5.7.2881}$$

et dès lors :

$$\mu_r = \mathrm{E}(R) = \frac{2}{\sqrt{\rho\pi D^{-1}}}\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{\rho}} \tag{5.7.2882}$$

et comme en pratique, nous avons souvent $D = 1$, il vient alors que :

$$\boxed{\mu_r = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}} \tag{5.7.2883}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.19 Sondages

La "méthodologie des sondages" étudie l'échantillonnage d'unités individuelles d'une population et les techniques de collecte de données d'enquête associées, telles que la construction de questionnaires et les méthodes permettant d'améliorer le nombre et la précision des réponses aux enquêtes. La méthodologie d'enquête comprend des instruments ou des procédures qui posent une ou plusieurs questions auxquelles on peut ou non répondre.

Les enquêtes statistiques sont entreprises dans le but de faire des inférences statistiques sur la population étudiée, et cela dépend fortement des questions et techniques d'enquêtes utilisées. Les sondages sur l'opinion publique, les enquêtes de santé publique, les études de marché, les enquêtes gouvernementales et les recensements sont tous des exemples de recherches quantitatives qui utilisent une méthodologie d'enquête contemporaine pour répondre à des questions sur une population. Bien que les recensements ne comprennent pas "d'échantillon", ils incluent d'autres aspects de la méthodologie d'enquête, comme les questionnaires, les enquêteurs et les techniques de suivi des non-réponses. Les enquêtes fournissent des informations importantes pour toutes sortes de domaines d'information publique et de recherche, par exemple, la recherche en marketing, la psychologie, les professionnels de la santé et la sociologie.

Une enquête unique est constituée d'au moins un échantillon (ou de la population complète dans le cas d'un recensement), d'une méthode de collecte de données (par exemple, un questionnaire) et de questions individuelles ou d'éléments qui deviennent des données pouvant être analysées statistiquement. Une seule enquête peut se concentrer sur différents types de sujets tels que les préférences (par exemple, pour un candidat présidentiel), les opinions (par exemple, l'avortement devrait-il être légal ?), le comportement (tabagisme et consommation d'alcool) ou des informations factuelles (par exemple, le revenu), en fonction de son objectif. Étant donné que la recherche par sondage est presque toujours basée sur un échantillon de la population, le succès de la recherche dépend de la représentativité de l'échantillon par rapport à une population cible d'intérêt pour le chercheur. Cette population cible peut aller de la population générale d'un pays donné à des groupes spécifiques de personnes dans ce pays, à une liste de membres d'une organisation professionnelle ou à une liste d'élèves inscrits dans un système scolaire (voir également échantillonnage (statistiques) et échantillonnage d'enquêtes). Les personnes qui répondent à une enquête sont appelées "répondants" et, selon les questions posées, leurs réponses peuvent se présenter en tant qu'individus, leurs ménages, employeurs ou autre organisation qu'ils représentent.

En cours de traduction de l'anglais

La méthodologie d'enquête en tant que domaine scientifique cherche à identifier des principes concernant la conception de l'échantillon, les instruments de collecte de données, l'ajustement statistique des données et le traitement des données, et l'analyse finale des données qui peuvent créer des erreurs d'enquête systématiques et aléatoires. Les erreurs d'enquête sont parfois analysées en lien avec le coût de l'enquête. Les contraintes de coût sont parfois présentées comme l'amélioration de la qualité dans le cadre des contraintes de coût, ou alternativement, la réduction des coûts pour un niveau de qualité fixe. La méthodologie d'enquête est à la fois un domaine scientifique et une profession, ce qui signifie que certains professionnels du domaine se concentrent empiriquement sur les erreurs d'enquête et que d'autres conçoivent des enquêtes pour réduire ces mêmes erreurs. Pour les concepteurs d'enquêtes, la tâche consiste à prendre un grand nombre de décisions concernant des milliers de caractéristiques individuelles d'une enquête afin de l'améliorer.

Les défis méthodologiques les plus importants d'un méthodologiste d'enquête comprennent la prise de décisions sur la façon de :

- Identifier et sélectionner les membres potentiels de l'échantillon
- Contacter les individus échantillonnés et collecter des données auprès de ceux qui sont difficiles à atteindre (ou réticents à répondre)
- Évaluer et tester les questions
- Sélectionnez le mode de formulation des questions et de collecte des réponses
- Former et superviser les enquêteurs (s'ils sont impliqués)
- Vérifiez l'exactitude et la cohérence interne des fichiers de données
- Ajuster les estimations de l'enquête pour corriger les erreurs identifiées

C'est une tendance courante que beaucoup de gens douteraient des résultats d'une enquête, à moins qu'ils ne trouvent la preuve que l'enquête a été réalisée « scientifiquement ». Eh bien, mener une enquête nécessite l'utilisation du processus scientifique, un cheminement qui est essentiellement suivi par toutes les types de recherchse. En gardant cela à l'esprit, une enquête qui a franchi de manière critique les étapes du processus scientifique postule un pourcentage plus élevé de validité et de fiabilité des résultats qu'un micro-troittor ou l'opinion des amis ou collègues au bar PMU, à la cantine ou sur les réseaus sociaux...

En cours de traduction de l'anglais

Toutes les enquêtes ne peuvent pas être menées de manière à ce que chaque membre de la population puisse être étudié, car ce serait une manière très coûteuse et donc peu pratique de faire des recherches par enquête. Lors de l'exécution d'une enquête, le chercheur sélectionnera les participants au moyen d'une technique d'échantillonnage aléatoire particulière, et ces personnes seront les représentants de l'ensemble de la population cible. L'utilisation d'une méthode d'échantillonnage aléatoire ne signifie pas que l'enquête n'est pas scientifique ; au contraire, cela augmente la validité des résultats car le biais dans le choix des participants est éliminé, rendant ainsi le processus scientifique et les résultats valides. Évidemment, il y a toujours des pièges (le plus connu étant qu'un pourcentage important de personnes aiment répondre au hasard et bêtement à des sondages, de 3%30% pour le pire des cas liés à la politique, surtout lorsqu'il s'agit d'extrémisme).

Il existe deux types de questions différentes qui peuvent être utilisées pour collecter des informations. Le premier est nommé "question à réponse structurée ou fixe" et le second est nommé "question non structurée ou ouverte" et fait souvent référence au concept de "témoignage". Il est important de comprendre quand et comment utiliser ces questions lors de la conception d'une enquête.

La validité et la fiabilité sont également souvent discutées dans le domaine de la psychométrie, mais pas tellement dans les études de marché, même si on suppose qu'elles sont présentes.

L'enquête mesure-t-elle ce qui doit être mesuré ? C'est la question à laquelle on ne peut répondre qu'en vérifiant la "validité" de l'enquête. Dans la recherche scientifique, la validité nous

indique la précision de l'enquête en vérifiant la représentativité de l'échantillon et la précision des questions. Il existe quatre types importants de validité de la recherche par sondage :

- Validité apparente : les questions semblent-elles raisonnables pour acquérir les données que vous souhaitez collecter ?
- Validité du contenu : les questions portent-elles uniquement sur le problème et d'autres sujets qui s'y rapportent ?
- Validité interne : les questions impliquent-elles le résultat que vous souhaitez obtenir de l'enquête ?
- Validité externe : les questions suscitent-elles des réponses généralisables (c'est-à-dire reflètent la réponse de l'ensemble de la population cible) ?

Dans la méthodologie d'enquête, la "fiabilité" fait référence au fait que les questions suscitent des informations similaires ou la même caractéristique même si les formulations ou les structures du questionnaire sont modifiées. La fiabilité de l'enquête se rapporte à la cohérence des questions et des déclarations dans un questionnaire.

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#5.7.159) :

D1. Une "population" est un ensemble fini d'objets sur lesquels une étude est effectuée. Ces objets sont nommés "individus / unités statistiques". Une population est notée $U=\{u_1,\ldots,u_N\}$ (l'origine du "U" est celle de "Univers" comme pour les probabilités) où N est le nombre d'individus dans la population et $i\in\{1,\ldots,N\}$ et où u_i est le i-ème individu.

D2. Nous nommons "base du sondage" une liste qui répertorie tous les individus d'une population.

D3. Un "caractère" est une qualité qui est étudiée chez les individus d'une population. Un caractère est noté Y. Pour tout $i\in\{1,\ldots,N\}$, on note y_i la valeur de Y pour l'individu u_i.

D4. Une statistique basée sur l'ensemble de la population est en méthodologie d'enquête notée par exemple $\bar{y}_U$ pour la moyenne, ou σ_U pour l'écart type et ainsi de suite !

Pour calculer/évaluer les paramètres de la population, deux méthodes courantes sont utilisées dans la méthodologie d'enquête :

- Le "recensement" : nous avons accès à tous les individus et nous pouvons mesurer les valeurs de Y pour chacun d'eux. Cependant, cela n'est pas toujours possible pour des raisons de coût, de temps ou à cause de certaines contraintes comme la destruction des individus étudiés.
- Le "sondage" : les valeurs de Y sont étudiées sur un sous-ensemble d'individus de la population.

Définition (#5.7.160) : Un échantillon est un sous-ensemble d'individus d'une population. Un échantillon est noté dans la méthodologie d'enquête ω !

Pour constituer un échantillon représentatif de la population, au moins deux questions se posent :

- Comment procédons-nous ?
- Combien d'individus faut-il choisir ?

Ce qui suit vise à apporter des réponses à ces questions !

En cours de traduction de l' anglais

5.7.19.1 Plans d'enquêtes

Définitions (#5.7.161) :

Un "plan d'enquête" ou plus communément un "plan d'échantillonnage" est une procédure de sélection d'un échantillon dans une population. Un plan d'échantillonnage est dit :

D1. Un "échantillon aléatoire" si chaque individu de la population a une probabilité connue d'être dans l'échantillon.

D2. Un "échantillon simple" si chaque individu a la même probabilité qu'un autre d'être sélectionné. Les probabilités sont alors égales et un tel plan est noté EAPE pour "échantillon aléatoire avec probabilités égales".

D3. Un "échantillon aléatoire sans retirage", abrégé EASR, si un seul individu ne peut apparaître qu'une seule fois dans l'échantillon.

D4. Un "échantillon aléatoire avec retirage", abrégé EAAR, si le même individu peut apparaître plusieurs fois dans l'échantillon et si l'ordre dans lequel les individus apparaissent compte.

Remarque

Les formules d'estimation habituelles dans les méthodologie d'enquête sont associées à un plan d'échantillonnage aléatoire avec retirage (EAAR). Pour simplifier la situation, ils sont généralement utilisés avec le cas sans retirage (EASR) lorsque n est beaucoup plus petit que N. Une convention existante est $N \geq 10n$.

En fait, il y a beaucoup plus de méthodes d'échantillonnage (effet Dunning-Kruger comme toujours...). En voici une vue assez exhaustive :

En cours de l'anglais

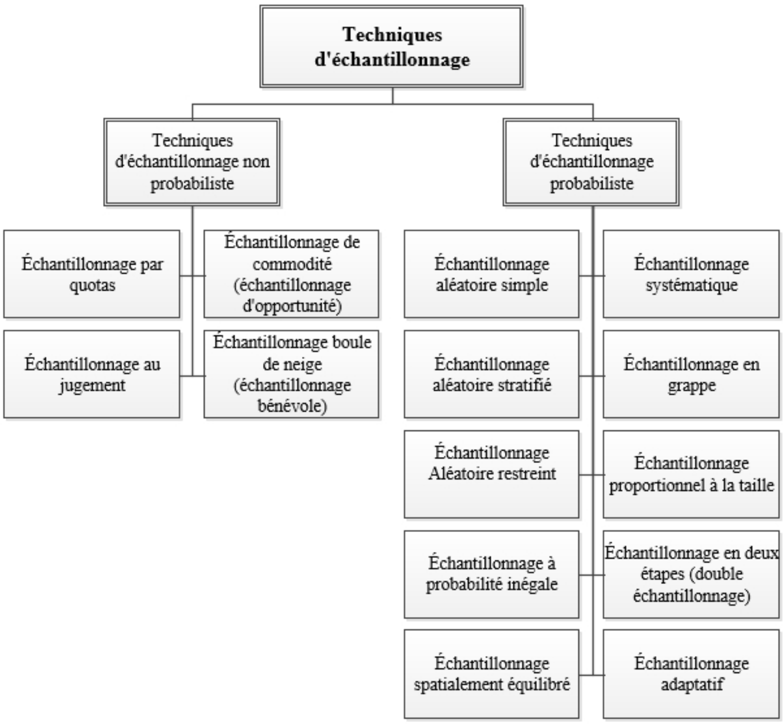


FIG. 5.247 – **Méthodes d'échantillonnage**

En cours de traduction de l'anglais

Plus en détails (ils utilisent presque tous es techniques mathématiques avancées) :

- Techniques d'échantillonnage non probabiliste :
  - "Échantillonnage par quotas" : dans l'échantillonnage par quotas, une population est d'abord segmentée en sous-groupes mutuellement exclusifs. Ensuite, le jugement est utilisé pour sélectionner les sujets ou les unités de chaque segment en fonction d'une proportion spécifiée sans respecter les autres attributs du groupe (propriétés). Ce qui le rend non aléatoire, c'est que c'est l'humain qui sélectionnera les éléments des groupes.
  - "Échantillonnage au jugement" : Dans l'échantillonnage de jugement, un échantillon non aléatoire est sélectionné sur la base de l'opinion d'un expert. Les résultats obtenus à partir d'un échantillon de jugement sont sujets à un certain degré de biais, en raison du fait que la base et la population ne sont pas identiques (en proportion ET en attributs), mais cela peut également être une bonne méthode de double contrôle après un échantillonnage de type aléatoire. Le cadre est une liste de toutes les unités, éléments, personnes, etc., qui définissent la population à étudier. Il est également assimilé à un échantillonnage aléatoire car l'expert essaiera de le rendre aléatoire sans utiliser l'ordinateur, mais en fait l'échantillon sera très différent d'un échantillon aléatoire réel.
  - "Échantillonnage de commodité" : Un échantillonnage de commodité est un type de méthode d'échantillonnage non probabiliste où l'échantillon est tiré d'un groupe de personnes faciles à contacter ou à atteindre. Par exemple, se tenir dans un centre commercial ou une épicerie et demander aux gens de répondre à des questions serait un exemple d'échantillon de commodité. Ce type d'échantillonnage est également connu sous le nom "d'échantillonnage instantané" ou "d'échantillonnage de disponibilité". Il n'y a pas d'autres critères à cette méthode d'échantillonnage si ce n'est

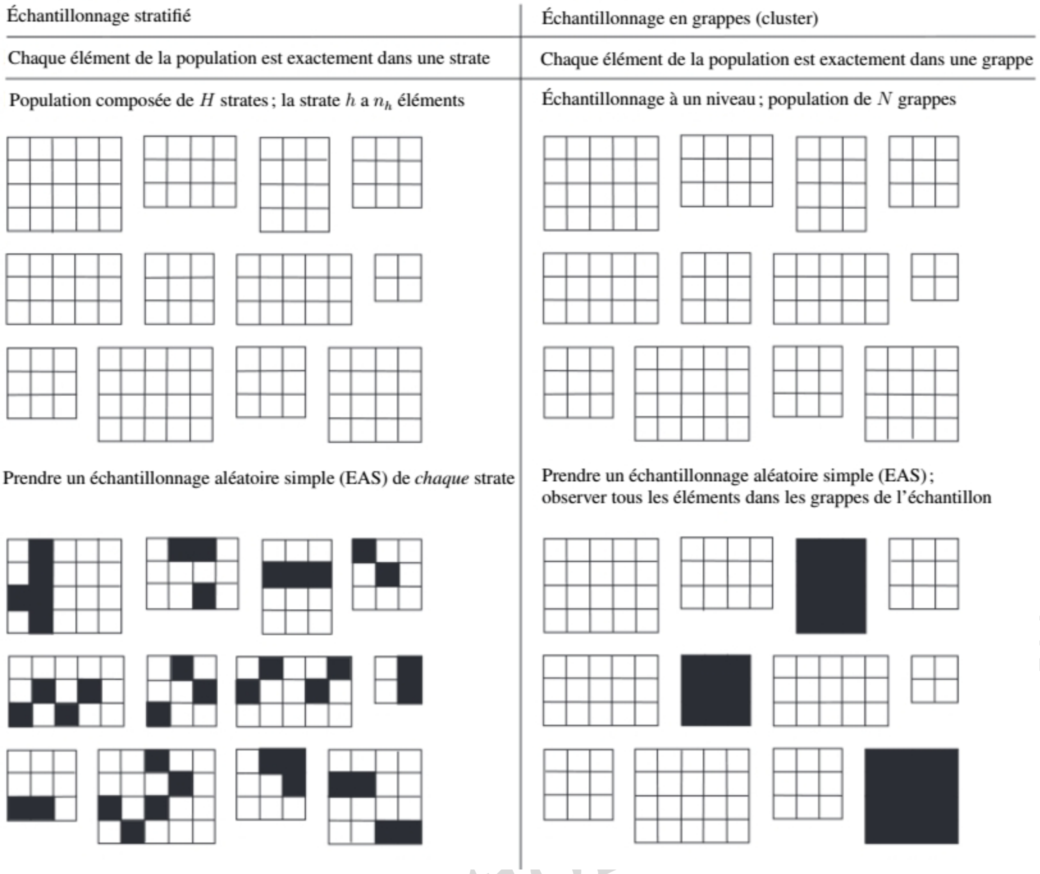
que les gens soient disponibles et disposés à participer. De plus, ce type de méthode d'échantillonnage ne nécessite pas la génération d'un échantillon aléatoire simple, puisque le seul critère est de savoir si les participants acceptent de participer.

- "Échantillonnage boule de neighe" : Un échantillonnage boule de neige est une technique où les sujets d'étude existants recrutent de futurs sujets parmi leurs connaissances. Ainsi, on dit que le groupe échantillon grandit comme une boule de neige roulante. Au fur et à mesure que l'échantillon s'accumule, suffisamment de données sont recueillies pour être utiles à la recherche. Cette technique d'échantillonnage est souvent utilisée dans des populations cachées, comme les toxicomanes ou les professionnel(le)s du sexe, qui sont difficiles d'accès pour les chercheurs. Comme les membres de l'échantillon ne sont pas sélectionnés à partir d'une base de sondage, les échantillons boule de neige sont sujets à de nombreux biais.

• Techniques d'échantillonnage probabiliste :

  - "Échantillonnage aléatoire simple" : Un échantillon aléatoire simple est un sous-ensemble d'individus (un échantillon) choisi dans un ensemble plus large (une population). Chaque individu est choisi au hasard et entièrement par hasard, de sorte que chaque individu a la même probabilité d'être choisi à n'importe quelle étape du processus d'échantillonnage, et chaque sous-ensemble de k individus a la même probabilité d'être choisi pour l'échantillon que n'importe quel autre sous-ensemble de k individus.
  - "Échantillonnage systématique" : L'échantillonnage séquentiel est une technique d'échantillonnage non probabiliste dans laquelle nous choisissons un seul ou un groupe de sujets dans un intervalle de temps donné, nous menons l'étude, analysons les résultats puis choisissons un autre groupe de sujets si nécessaire et ainsi de suite. Il est utilisé par les médecins mais aussi par les ingénieurs qualité industriels (notamment pour les cartes de contrôle).
  - "Échantillonnage aléatoire stratifié" : L'échantillonnage aléatoire stratifié est une méthode d'échantillonnage qui implique la division d'une population en groupes plus petits appelés "strates". Dans l'échantillonnage aléatoire stratifié, les strates sont formées en fonction d'attributs ou de caractéristiques partagés par les membres. Un échantillon aléatoire de chaque strate est prélevé en nombre proportionnel à la taille de la strate par rapport à la population. Ces sous-ensembles de strates sont ensuite regroupés pour former un échantillon aléatoire.
  - "Échantillonnage en grappes" : L'échantillonnage en grappes est un plan d'échantillonnage utilisé lorsque des groupements mutuellement homogènes mais internes hétérogènes sont évidents dans une population statistique. Il est souvent utilisé dans les études de marché. Dans ce plan d'échantillonnage, la population totale est divisée en ces groupes (appelés grappes) et un échantillon aléatoire simple des groupes est sélectionné. Les éléments de chaque grappe sont ensuite échantillonnés. Si tous les éléments de chaque grappe échantillonnée sont échantillonnés, il s'agit alors d'un plan d'échantillonnage en grappe à "un niveau". Si un sous-échantillon aléatoire simple d'éléments est sélectionné dans chacun de ces groupes, on parle de plan d'échantillonnage en grappes à "deux niveaux".

En cours de traduction de l'anglais



- "Échantillonnage aléatoire restreint" : Il n'y a pas de consensus général sur la définition au jour où nous écrivons ces lignes. Mais dans le cadre de ce livre, un échantillonnage aléatoire restreint sera lié à un échantillonnage avec retirage d'une matrice de plan d'expérience où le but est d'éviter les cofacteurs indésirables (variables cachées).
- "Échantillonnage proportionnel à la taille" : Lorsque des informations sur une mesure d'amplitude G existent pour chaque élément de la population et que cette mesure de taille stocke des informations précieuses sur l'importance de l'élément i à inclure dans l'échantillon, nous pouvons utiliser ces informations dans le plan d'échantillonnage. Les plans d'échantillonnage qui utilisent explicitement de telles mesures d'amplitude sont appelés "modèles d'échantillons probabilité proportionnelle à l'amplitude"[84] (PPA). Les plans d'échantillonnage avec PPA sont souvent utilisés dans les enquêtes auprès des entreprises lorsqu'il est important d'inclure les plus grandes entreprises d'une industrie dans l'échantillon, car elles contribuent largement à la production de biens ou de services de l'industrie.
- "Échantillonnage à probabilité non-égale" : L'échantillonnage à probabilités non-égales est davantage une famille de techniques d'échantillonnage. Par exemple, les plans avec PPA sont un échantillonnage à probabilité non-égales, mais aussi un échantillonnage par jugement et un échantillonnage de commodité, etc.
- "Échantillonnage en deux niveaux" : L'échantillonnage à deux niveaux fait également référence à l'échantillonnage en grappes mais dans l'industrie c'est l'idée d'échantillonner un lot une deuxième fois dans l'idée de lui donner une seconde chance si lors du premier échantillonnage il était rejeté.

En cours de traduction ... ais

[84] La probabilité sera alors de $\pi_i^{\text{ppa}} = \frac{G_i}{\sum_i G_i}$

- "Échantillonnage spatialement équilibré" : Spatialement équilibré fait référence à des échantillons uniformément répartis dans une zone d'étude. L'échantillonnage spatialement équilibré est beaucoup plus efficace que l'échantillonnage aléatoire simple si la population échantillonnée est plus ou moins uniformément répartie dans la zone échantillonnée. Bien qu'un plan d'échantillonnage systématique puisse atteindre un équilibre spatial complet, il manque la randomisation qui est souhaitable dans les plans d'échantillonnage statistiques et il est difficile à appliquer lorsque les unités sélectionnées pour l'échantillonnage ne sont pas contiguës dans la zone d'étude (par exemple, la sélection de lacs ou de terres humides à échantillonner). Il existe plusieurs techniques différentes pour créer des plans d'échantillonnage spatialement équilibrés, mais l'une des plus courantes est la conception stratifiée par tessellation aléatoire généralisée (CSTAL) décrite par Stevens et Olsen.
- "Échantillonnage adaptatif" : L'échantillonnage adaptatif fait référence à une technique dans laquelle le plan d'échantillonnage est modifié sur le terrain en fonction des observations faites dans un ensemble d'unités d'échantillonnage présélectionnées. La meilleure façon de décrire l'échantillonnage adaptatif est peut-être d'utiliser un exemple. Considérons l'échantillonnage pour la présence ou l'abondance de plantes rares. Une sélection aléatoire d'unités d'échantillonnage produira de nombreuses unités d'échantillonnage où la plante n'est pas détectée, mais la plante rare est susceptible de se trouver dans des unités d'échantillonnage à proximité des unités où elle a été détectée. Avec l'échantillonnage adaptatif, la détection de la plante rare sur un site déclenche la sélection et l'échantillonnage de sites voisins supplémentaires qui n'ont pas été sélectionnés à l'origine dans le cadre de l'ensemble d'échantillonnage. Ainsi, la plus grande différence entre l'échantillonnage adaptatif et de nombreuses autres techniques de sélection aléatoire est que les conditions observées dans une unité d'échantillonnage influencent la sélection d'autres unités d'échantillonnage.
- "Suréchantillonnage" et "sous-échantillonnage" : Les données déséquilibrées sont parfois un problème dans le domaine du Machine Learning. Avec le sous-échantillonnage, nous sélectionnons au hasard un sous-ensemble d'échantillons de la classe avec plus d'instances pour correspondre au nombre d'échantillons provenant de chaque classe. Avec le suréchantillonnage, nous dupliquons au hasard des échantillons de la classe avec moins d'instances ou nous générons des instances supplémentaires en fonction des données dont nous disposons, afin de faire correspondre le nombre d'échantillons dans chaque classe.

En cours de traduction de l'anglais

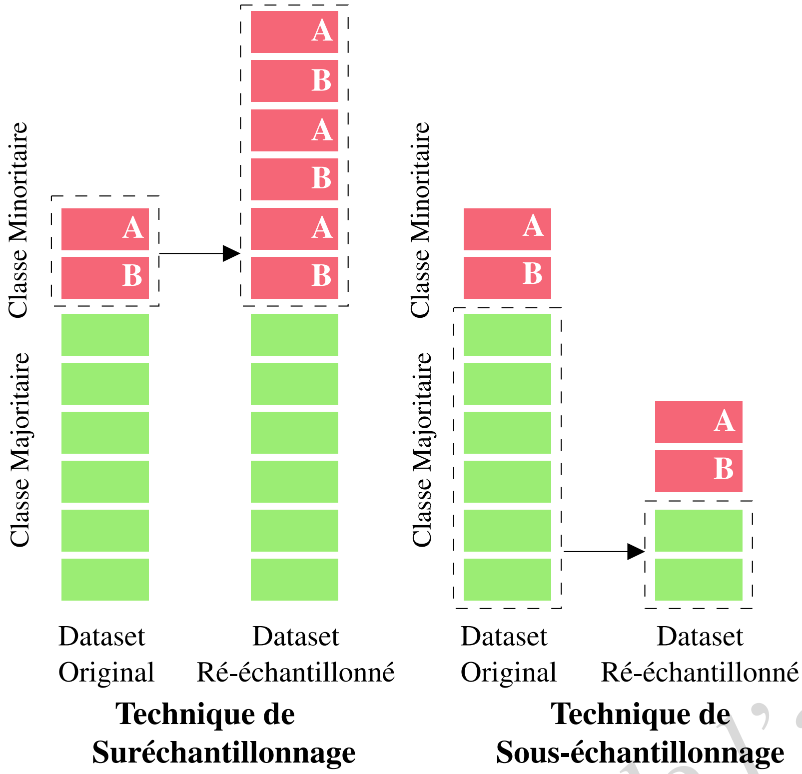


FIG. 5.248 – **Idée sous-jacente du sur et sous-échantillonnage**

En cou… ion de l'anglais

Remarques

Dans l'article *Stop oversampling for Class Imbalance Learning : A critical review*, les auteurs recommandent d'être prudent avec cette méthode. En effet, si nous les citons (après traduction de l'anglais au français) : «*Nos expériences utilisant plus de 70 méthodes de suréchantillonnage et trois ensembles de données déséquilibrées du monde réel révèlent que toutes les méthodes de suréchantillonnage étudiées génèrent des échantillons minoritaires qui sont très probablement majoritaires. Compte tenu des données et des méthodes disponibles, nous soutenons que le suréchantillonnage dans ses formes et méthodologies actuelles n'est pas fiable pour apprendre à partir de données déséquilibrées en classe et devrait être évité dans les applications du monde réel.*»

– Outre le sur- et le sous-échantillonnage, il existe des méthodes hybrides qui combinent le sous-échantillonnage avec la génération de données supplémentaires. Deux des plus populaires sont ROSE (Random Over-Sampling Example) et SMOTe (Synthetic Minority Over-Sampling Technique).

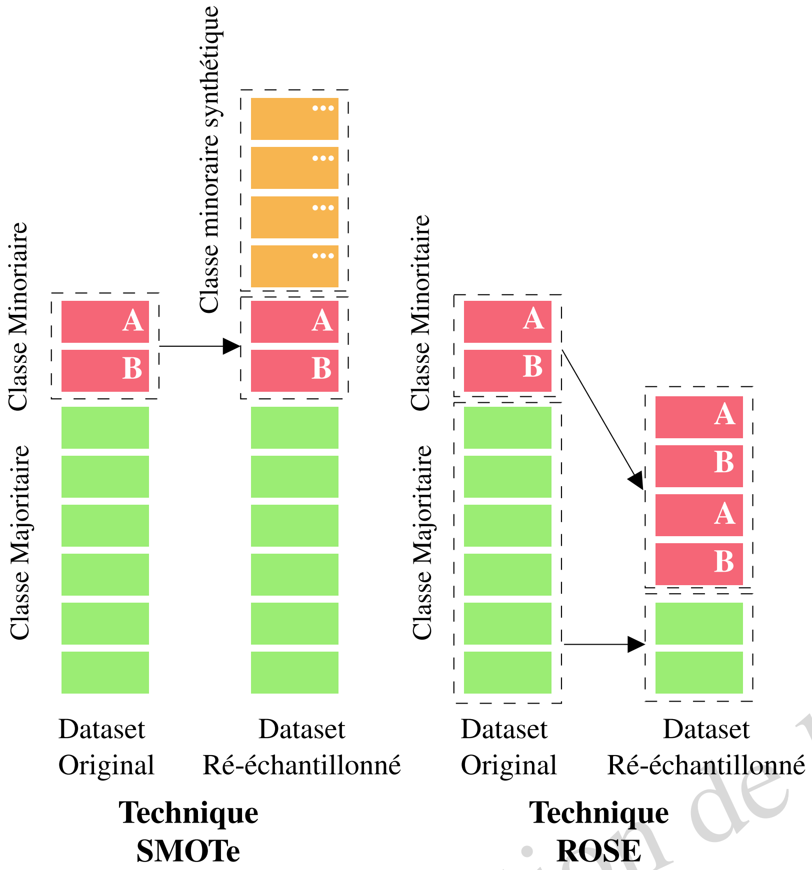


FIG. 5.249 – Idée sous-jacente de l'échantillonnage SMOTe et ROSE

Il existe de très bons manuels théoriques et manuels pratiques sur ces sujets d'échantillonnage de respectivement plus de 600 pages comme [290] et plus de 200 pages comme [293].

En cours de traduction de l' anglais

5.7.19.1.1 Plan d'échantillonnage aléatoire simple sans remise et probabilités égales (EAPER)

Le plan d'échantillonnage aléatoire simple sans remise et probabilités égales est le plus facile à exécuter dans la réalité et le moins cher en termes de temps et de coûts. Cependant il a le problème (que nous devrons résoudre plus tard) de ne pas respecter les proportions originales de la population pour certains caractères (propriétés) que nous connaissons comme étant des variables potentiellement explicatives pour notre résultat d'enquête ! Par conséquent, ce type d'échantillonnage est fréquent dans les cas industriels mais lorsque l'enquête porte sur des sujets sociaux (politique, marketing, etc.), il doit être évité.

Pour un tel plan, nous échantillonnons n individus sans retirage à partir d'une population U avec N individus. Ensuite, l'égalité de probabilité sera notée en fonction du nombre de combinaisons sans retirage (voir section Probabilités page ??) :

$$P(W=\omega)=\frac{1}{C_n^N}=\frac{1}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \tag{5.7.2884}$$

avec $\omega \in W(\Omega)$ où P désigne la probabilité égale et $W(\Omega)$ désigne l'ensemble de tous les échantillons de n individus possibles avec un tel plan.

Nous nommons "taux d'échantillonnage le rapport :

$$f=\frac{n}{N} \tag{5.7.2885}$$

Dans le cas de l'échantillonnage à probabilités égales sans remise, la probabilité que l'individu appartienne à W est évidemment :

$$P(u_i \in W)=\frac{n}{N}=f \tag{5.7.2886}$$

pour tout $i\in\{1,\ldots,N\}$. Par extension, évidemment, si $(i,j)\in\{1,\ldots,N\}^2$ avec $i\neq j$, la probabilité que u_i et u_j appartiennent à W est donc immédiatement donnée par (nous supposons que c'est suffisamment évident pour que nous n'ayons pas besoin de donner la preuve) :

$$P((u_i,u_j)\in W)=\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1} \tag{5.7.2887}$$

Ce qui va suivre maintenant est évident mais nous l'avons écrit pour montrer que la notation est un peu spécifique au domaine de la méthodologie d'enquête.

L'estimateur de la moyenne sur l'échantillon est noté :

$$\bar{y}_W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} y_i \mathbb{1}_{\{u_i\in W\}} \tag{5.7.2888}$$

ou ce qui est aussi parfois noté :

$$\bar{y}_W=\frac{1}{n}\sum_{i\in S} y_i \tag{5.7.2889}$$

où $S=\{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,N\}^n, i_1\neq\ldots\neq i_n; u_{i_1}\in W,\ldots,u_{i_n}\in W\}$.

Nous avons déjà prouvé bien plus tôt dans les textes ci-dessus que $\bar{y}_W$ est l'estimateur sans biais de $\bar{y}_U$.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.19.2 Erreur d'échantillonnage et erreur non due à l'échantillonnag pour les enquêtes

Les élections présidentielles américaines de 2016 et le référendum britannique sur l'Union européenne en 2016 ont rendu les sondages électoraux publics et les ont mis pour le coups sous la lumière des projecteurs. Et avec tant de rapports de sondages faussés, il est temps de parler de ce qui fait que les sondeurs et les agences de sondage font si mal les choses.

Prenons le Brexit comme exemple. Le 23 juin 2006, la Grande-Bretagne a organisé un référendum et les électeurs ont finalement choisi de quitter l'Union européenne. De nombreuses agences de sondage ont prédit à tort que la Grande-Bretagne resterait dans l'UE, tandis que d'autres avaient raison. Pourquoi la disparité ? Que faisaient ces deux groupes différemment ?

L'échantillonnage statistique - par opposition aux devinettes sauvages - fournit une mesure de la certitude de l'agence de sondage à propos de leurs prédictions. Lorsqu'ils font des projections basées sur des sondages, les statisticiens signalent une marge d'erreur afin de pouvoir indiquer un intervalle de confiance de 95% ; un outil utile à part entière. Par exemple, YouGov a estimé que 52% de la Grande-Bretagne voterait pour quitter l'UE, et a donné une marge d'erreur de 2%. Dans ce cas, YouGov disait qu'ils étaient certains à 95% que le vrai pourcentage de personnes votant pour quitter l'UE était de 52%, plus ou moins 2%. Cependant, ces intervalles - y compris la marge d'erreur - sont souvent mal utilisés par les médias de masse et les réseaux sociaux.

Le secret de l'industrie est que la marge d'erreur signalée ne comprend que l'erreur d'échantillonnage (erreur aléatoire), mais ignore ce que l'on appelle commodément l'erreur non due à l'échantillonnage (erreur systématique). Imaginez cinq forces poussant et tirant simultanément l'estimation d'un sondage dans les deux sens – des forces qui ne sont pas signalées par le sondeur. Ces forces systématiques comprennent :

En cours de traduction de l'anglais

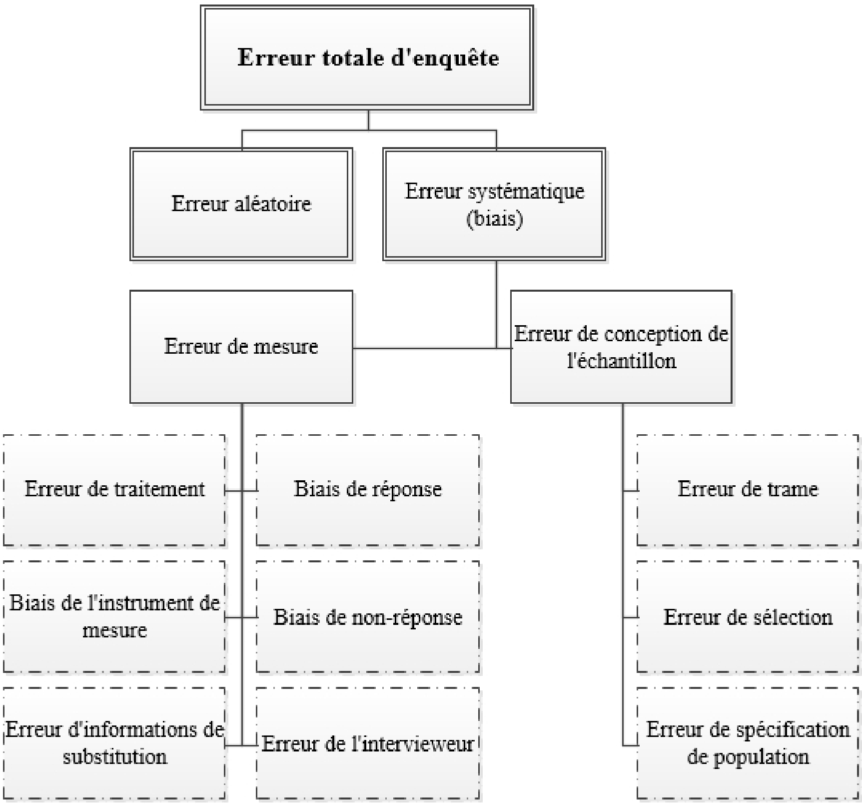


FIG. 5.250 – **Type d'erreurs dans la méthodologie des enquêtes**

- "L'erreur systématique", ou le biais, qui résulte d'erreurs ou de problèmes dans la conception du plan de recherche ou de défauts dans l'exécution de la conception de l'échantillon. Une erreur systématique existe dans les résultats d'un échantillon si ces résultats montrent une tendance constante à varier dans une direction particulière (constamment supérieure ou inférieure) par rapport à la valeur réelle du paramètre de population. L'erreur systématique comprend toutes les sources d'erreur à l'exception de celles introduites par le processus d'échantillonnage aléatoire. Par conséquent, les erreurs systématiques sont parfois nommées "erreurs de non-échantillonnage". Les erreurs non dues à l'échantillonnage qui peuvent systématiquement influencer les réponses à l'enquête peuvent être classées en erreurs de plans d'échantillonnages et erreurs de mesures.

- "L'erreur de conception de l'échantillon" est une erreur systématique qui résulte d'un problème dans la conception de l'échantillon ou les procédures d'échantillonnage. Les types d'erreurs de plan d'échantillonnage comprennent les erreurs de base, les erreurs de spécification de la population et les erreurs de sélection et sont présentés ci-dessous.

- La base (trame) de sondage est la liste des éléments ou membres de la population à partir desquels les unités à échantillonner sont sélectionnées. "L'erreur de trame" résulte de l'utilisation d'une base de sondage incomplète ou inexacte. Le problème est qu'un échantillon tiré d'une liste sujette à une erreur de base peut ne pas être un échantillon représentatif de la population cible. Une source courante d'erreur de base dans la recherche marketing est l'utilisation d'un annuaire téléphonique publié comme base de sondage pour un sondage téléphonique (ou généralement des sondages en ligne sur Internet où un vaste groupe de personnes ayant un intérêt particulier - ou étant particulièrement concerné par le sujet de l'enquête - pourrait partager massivement le lien pour biaiser le résultat de l'enquête). De nombreux ménages ne sont pas répertoriés dans un annuaire téléphonique actuel parce qu'ils ne veulent pas être répertoriés ou ne sont pas répertoriés avec précision parce qu'ils ont récemment déménagé ou changé de numéro de téléphone. La recherche a montré que les personnes qui sont inscrites dans les annuaires téléphoniques sont systématiquement différentes de celles qui ne sont pas inscrites à certains égards importants, tels que les niveaux socio-économiques. Cela signifie que si une étude censée représenter les opinions de tous les ménages dans une zone particulière est basée sur des listes dans l'annuaire téléphonique actuel, elle sera sujette à une erreur de trame.

- "L'erreur de spécification de population" résulte d'une définition incorrecte de la population ou de l'univers à partir duquel l'échantillon doit être sélectionné. Par exemple, supposons qu'un chercheur définisse la population ou l'univers d'une étude comme des personnes de plus de 35 ans. Plus tard, il a été déterminé que les personnes plus jeunes auraient dû être incluses et que la population aurait dû être définie comme des personnes âgées de 20 ans ou plus. Si les jeunes qui ont été exclus sont significativement différents en ce qui concerne les variables d'intérêt, alors les résultats de l'échantillon seront biaisés.

- "L'erreur de sélection" peut se produire même lorsque l'analyste dispose d'un cadre d'échantillonnage approprié et a défini correctement la population. Une erreur de sélection se produit lorsque les procédures d'échantillonnage sont incomplètes ou inappropriées ou lorsque les procédures de sélection appropriées ne sont pas correctement suivies. Par exemple, les enquêteurs en porte-à-porte pourraient décider d'éviter les maisons qui n'ont pas l'air propres et rangées parce qu'ils pensent que les habitants ne seront pas d'accord pour faire une enquête. Si les personnes qui vivent dans des maisons en

En cours de traduction de l'anglais

désordre sont systématiquement différentes de celles qui vivent dans des maisons bien rangées, alors une erreur de sélection sera introduite dans les résultats de l'enquête.

- "L'erreur de mesure" est souvent une menace beaucoup plus sérieuse pour l'exactitude de l'enquête que ne l'est l'erreur aléatoire. Lorsque les résultats des sondages d'opinion sont publiés dans les médias et dans les rapports de recherche marketing professionnels, un chiffre d'erreur est fréquemment signalé (disons, $\pm 5\%$). Le téléspectateur ou l'utilisateur d'une étude marketing a l'impression que ce chiffre se réfère à l'erreur totale d'enquête. Malheureusement, ce n'est pas le cas. Ce chiffre se réfère uniquement à l'erreur d'échantillonnage aléatoire. Il n'inclut pas l'erreur de conception de l'échantillon et ne parle en aucun cas de l'erreur de mesure qui peut exister dans les résultats de la recherche. L'erreur de mesure se produit lorsqu'il existe une variation entre l'information recherchée (valeur vraie) et l'information réellement obtenue par le processus de mesure. Notre principale préoccupation dans ce texte est l'erreur de mesure systématique. Divers types d'erreurs peuvent être causés par de nombreuses déficiences dans le processus de mesure. Ces erreurs comprennent l'erreur d'information de substitution, l'erreur de l'intervieweur, le biais de l'instrument de mesure, l'erreur de traitement, le biais de non-réponse et le biais de réponse que nous décrirons ci-dessous.

- "L'erreur d'informations de substitution" se produit lorsqu'il y a un écart entre les informations réellement requises pour résoudre un problème et les informations recherchées par le chercheur. Elle concerne des problèmes généraux dans la conception de la recherche, en particulier l'incapacité à définir correctement le problème. Il y a quelques années, Kellogg's™ a dépensé des millions pour développer une gamme de 17 céréales pour petit-déjeuner contenant des ingrédients qui aideraient les consommateurs à réduire leur cholestérol. La ligne de produits s'appelait *Ensemble*. Elle a lamentablement échoué sur le marché. Oui, les gens veulent réduire leur cholestérol, mais la vraie question était de savoir s'ils achèteraient une gamme de céréales pour petit-déjeuner pour accomplir cette tâche. Cette question n'a jamais été posée dans la recherche. De plus, le nom « *Ensemble* » fait généralement référence à un orchestre ou à quelque chose que vous portez. Les consommateurs ne comprenaient ni la gamme de produits ni la nécessité de la consommer.

- "L'erreur de l'interviewer", ou "biais de l'interviewer", résulte du fait que l'intervieweur influence un répondant - consciemment ou inconsciemment - à donner des réponses fausses ou inexactes. La tenue vestimentaire, l'âge, le sexe, les expressions faciales, le langage corporel ou le ton de la voix de l'enquêteur peuvent influencer les réponses données par certains ou tous les répondants. Ce type d'erreur est causé par des problèmes de sélection et de formation des enquêteurs ou par le non-respect des instructions par les enquêteurs. Les enquêteurs doivent être correctement formés et supervisés pour paraître neutres en tout temps. Un autre type d'erreur de l'intervieweur se produit lorsqu'une tricherie délibérée a lieu. Cela peut être un problème particulier dans les entretiens porte-à-porte, où les enquêteurs peuvent être tentés de falsifier les entretiens et d'être payés pour un travail qu'ils n'ont pas réellement effectué.

- Le "biais d'insturement de mesure" (parfois nommé "biais de questionnaire") résulte de problèmes avec l'instrument de mesure ou le questionnaire. Des exemples de tels problèmes incluent des questions suggestives ou des éléments de la conception du questionnaire qui rendent l'enregistrement des réponses difficile et sujet à des erreurs d'enregis-

En cours de traduction de l'anglais

trement (l'erreur la plus courante étant le choix manquant "autre..."). Des problèmes de ce type peuvent être évités en accordant une attention particulière aux détails lors de la phase de conception du questionnaire et en utilisant des prétests de questionnaires avant le début des entretiens sur le terrain.

- Les "erreurs de saisies" peuvenet être dues à des erreurs qui se produisent lorsque les informations des documents d'enquête sont saisies dans l'ordinateur. Par exemple, un document peut être mal numérisé. Les personnes qui remplissent des sondages sur un smartphone ou un ordinateur portable peuvent appuyer sur les mauvaises touches.

- Si un échantillon de 400 de personnes est sélectionné dans une population particulière, tous les 400 personnes doivent être interrogées. En pratique, cela n'arrivera jamais. Des taux de réponse de 5% ou moins sont courants dans les sondages par courrier. La question est : « Est-ce que ceux qui ont répondu à l'enquête diffèrent systématiquement d'une manière importante de ceux qui n'ont pas répondu ? » De telles différences conduisent au "biais de non-réponse". Nous avons récemment examiné les résultats d'une étude menée auprès des clients d'une grande association d'épargne et de crédit. Le taux de réponse au questionnaire, inclus dans les relevés mensuels des clients, était légèrement inférieur à 1%. L'analyse des professions des répondants a révélé que le pourcentage de retraités parmi les répondants était 20 fois plus élevé que dans la région métropolitaine locale. Cette surreprésentation des retraités a soulevé de sérieux doutes quant à l'exactitude des résultats.

- S'il y a une tendance pour les gens à répondre à une question particulière d'une certaine manière, alors il y a un "bias de réponse". Le biais de réponse peut résulter d'une falsification délibérée ou d'une fausse déclaration inconsciente. La falsification délibérée se produit lorsque des personnes donnent délibérément des réponses fausses à des questions. Il existe de nombreuses raisons pour lesquelles des personnes peuvent sciemment déformer des informations dans un sondage. Ils peuvent vouloir paraître intelligents, ils peuvent ne pas révéler des informations qu'ils jugent embarrassantes, ou ils peuvent vouloir cacher des informations qu'ils considèrent comme personnelles. Par exemple, dans une enquête sur le comportement d'achat de fast-food, les répondants peuvent avoir une assez bonne idée du nombre de fois qu'ils ont visité un fast-food au cours du mois dernier. Cependant, ils peuvent ne pas se souvenir des restaurants de restauration rapide qu'ils ont visités ou du nombre de fois qu'ils ont visité chaque restaurant. Plutôt que de répondre « Je ne sais pas » en réponse à une question concernant les restaurants qu'ils ont visités, les répondants peuvent simplement deviner. Une fausse déclaration inconsciente se produit lorsqu'un répondant essaie légitimement d'être véridique et précis mais donne une réponse inexacte. Ce type de biais peut se produire en raison du format de la question, du contenu de la question ou de diverses autres raisons.

Par conséquent, la vraie marge d'erreur est incommensurable ; nous l'estimons avec la marge d'erreur d'échantillonnage (borne inférieure). Comme elle est actuellement utilisée par les sondeurs, la marge d'erreur d'échantillonnage est une estimation très libérale de l'exactitude des prévisions.

En cours de traduction de l'anglais

5.7.20 Un monde sans statistiques

Les essais suivants illustrent l'importance des statistiques dans la recherche et la vie quotidienne. Pour ce faire, nous réfléchissons à la question de savoir à quoi ressembleraient les choses dans un monde (entreprise, travail, vie privée) sans statistiques[85] ?

La science serait à peu près Ok sans les statistiques. Isaac Newton n'avait pas besoin de statistiques pour ses théories de la gravité, du mouvement et de la lumière, pas plus qu'Albert Einstein n'avait besoin de statistiques pour la théorie de la relativité. La thermodynamique et la mécanique quantique sont fondamentalement statistiques, mais de nombreux progrès auraient pu être réalisés dans ces domaines sans statistiques. La deuxième loi de la thermodynamique est un fait observable, idem pour l'expérience des deux fentes et divers résultats expérimentaux révélant la nature de l'atome. La bombe A et, presque certainement, la bombe H, n'auraient peut-être jamais été inventées sans statistiques, mais dans l'ensemble, on peut penser que la plupart des gens penseraient que le monde serait un meilleur endroit sans ces développements scientifiques particuliers. Sans statistiques, nous pourrions oublier de découvrir le boson de Higgs etc, mais cela ne semble pas être une telle perte pour l'humanité.

Cependant :

- Les statistiques ont aidé à gagner la Seconde Guerre mondiale, notamment en cassant le code Enigma (voir section Cryptographie page ??)
- Les statistiques aident à évaluer les faits de données d'observation (changement de météo, approbation de nouveaux médicaments, nouvelles méthodes de gestion, nouvelles méthodes agricoles, etc.)
- Les statistiques avec des logiciels automatisés donnent la possibilité aux entreprises d'automatiser les décisions et les analyses et donc d'être plus compétitives et de vendre des services moins chers que les concurrents qui font le travail manuellement.
- Les statistiques aident à rechercher l'optimum en R&D en réduisant le nombre d'expériences qui peuvent être énormes ou très coûteuses dans certains domaines industriels. Par conséquent, ceux qui utilisent des statistiques seront plus compétitifs et rapides à développer de nouveaux traitements.
- Les statistiques aident à constituer des pool d'enquêtes de manière efficace pour minimiser les coûts et maximiser la fiabilité des résultats (cela inclut également l'échantillonnage de qualité pour le rejet de lots dans l'industrie !). Ils aident également à calculer l'intervalle de tolérance (erreur) des enquêtes résultantes.
- Les statistiques sont utilisées en assurance car elles se sont avérées plus efficaces que les critères choisis par l'humain (voir section Techniques de Gestion Quantitatives page ??).
- Les statistiques sont utilisées dans la détection des fraudes (outils d'analyse des valeurs extrêmes) car manuellement l'analyse serait impossible sur des populations de plus de centaines de millions d'individus (voir section Méthodes Numériques page ??)..

[85] Les critiques (biais) de l'énoncé "*les statistiques mentent toujours*" ont déjà été traitées dans l'introduction (et les arguments non constructifs de la haine des statistiques comme "*vos statistiques sont drôles*" ou "*Je vais préparer le repas de mes* 1.2314 *enfants...*" appartient au même biais cognitif !)

En cours de traduction de l'anglais

- Les statistiques sont utilisées dans la finance moderne car automatisées par ordinateur (donc moins chères qu'un courtier humain) et plus fiables et plus performantes sur le long terme (voir section Économie page ??).

- Les statistiques sont utilisées pour la gestion de projets critiques de grande taille pour estimer les erreurs de marge sur la budgétisation et la planification du temps (voir section Technique Quantitative de Gestion page ??). Dans certains projets, le client n'acceptera pas une proposition de durée et de coûts sans méthodes d'estimation modernes (sinon le fournisseur sera suspecté d'être très amateur).

- Les statistiques sont utilisées en Data Mining (fouille de données) et Machine Learning (apprentissage machine) pour anticiper les tendances sur les marchés financiers ou encore sur les comportements sur les réseaux sociaux ou le ciblage publicitaire (voir section Méthodes Numériques page ??).

- Les statistiques permettent de prévoir dans un certaine mesure les événements catastrophiques (tremblements de terre, tsunami, conditions météorologiques extrêmes, pannes de machines, fiabilité de moyens de transports) pour évacuer la population/utilisateurs et aussi pour optimiser les méthodes agricoles et industrielles.

- Les statistiques aident les ordinateurs à comprendre la saisie en langage naturel dans les moteurs de recherche ou également dans la correction des erreurs de frappe.

- Les statistiques auraient aidé à avoir de meilleurs claviers d'ordinateur modernes (car à l'origine les claviers étaient adaptés pour les machines à écrire mécaniques).

- Les statistiques sont utilisées pour automatiser l'analyse de la stabilité (capacité) des méthodes de production et ce pour être plus compétitif et vendre des produits moins chers que les concurrents qui le font manuellement (voir section Génie Industriel page ??).

- Les statistiques sont utilisées en Mécanique Quantique et Mécanique Statistique (voir section Mécanique Statistique page ??) et ont aidé à la possibilité d'imaginer des dispositifs qui n'auraient pas été découverts aussi rapidement sans (LASER, transistor, etc.).

- Les statistiques sont utilisées en génétique dans le cadre de l'analyse des puces à ADN (voir notre livre d'accompagnement R) et permettent de faire découvrir et développer plus rapidement des vaccins parfois très rapidement.

- Les statistiques sont utilisées dans les Réseaux de Neurones, le Deep learning (apprentissage machine profond) et donc l'Intelligence Artificielle (voir section Méthodes Numériques page ??) qui vont changer (ça commence déjà) radicalement le 21ème siècle et au-delà...

- Les statistiques sont utilisées dans certaines décisions de justice lorsque la preuve d'une corrélation improbable semble apparaître (voir l'affaire Lucie de Berk sur Internet par exemple).

- Les statistiques sont utilisées en astronomie pour soutenir statistiquement l'observation de nouvelles planètes ou de nouveaux types d'étoiles.

En cours de traduction de l'anglais

- Les statistiques sont utilisées pour les plans de démonstration des garanties de produits et le calcul de la garantie à vie optimale des produits neufs vendus sur le marché en grande quantité (voir section Génie Industriel page ??).
- Les statistiques sont utilisées dans les pays industrialisés pour prendre des décisions basées sur des évidences présentées par des économistes qui ne peuvent convaincre personne avec des anecdotes mais avec des conclusions dérivées de modèles économétriques ou de modèles de programmation mathématique ou des variantes des deux.
- Les statistiques sont utilisées à l'échelle nationale pour obtenir des informations sur ses habitants : chômage, proportion des sexes, répartition des salaires, tendances de la santé, vieillissement, etc., et il serait impossible de prendre des décisions politiques et de communiquer avec précision sans de telles statistiques dans les pays industrialisés.

Le lecteur doit cependant garder à l'esprit que l'affect, la peur et l'émotion sont nos balises embarquées; toujours avec nous, ils sont opérationnels dans beaucoup de situations. Mais pour d'autres situations, c'est le cerveau rationnel qui devrait prendre le relais. Moyennes, médianes, fréquences, écarts-types, corrélations, expériences aléatoires, etc... ce sont des choses qu'aucun de nos capteurs biologiques n'est conçu pour reconnaître. C'est pourquoi un pourcentage de la population rejette la méthode scientifique et la plupart rejettent les statistiques (ils sont mal à l'aise avec les évidences scientifiques).

De nombreux charlatans et fanatiques rejettent aussi les Analyses/Études Statistiques pour la simple raison qu'ils savent que si leurs pratiques (business) et leurs croyances (la plupart des religions représentent des business qui rapportent des milliers de milliards de dollars) étaient mises à l'épreuve de la Méthode Scientifique, alors cette dernière montrerait que tout cela n'est pas meilleur, et souvent pire, que l'effet placebo (le lecteur peut par exemple trouver sur Internet de nombreuses études scientifiques publiées dans des revues à haut facteur d'impact qui ont montré que les prières ont un petit effet nocebo et que les médecines alternatives ne font pas mieux que l'effet placebo...) !

En cours de traduction de l'anglais

quote 5.7:1324.#42

> *Il est facile de mentir avec les statistiques, mais plus facile de mentir sans elles.*
>
> Fred Mosteller

Le Charlatan	Le Chercheur Professionnel
Se dit aider son prochain en tant que hobby mais facture quand même son aide...	Facture ses services car c'est son métier et sa seule source de revenus
Son efficacité est basée seulement sur des anecdotes car n'investit ni temps ni argent dans une base de données statistique représentative et ne s'intéresse pas à vérifier l'efficacité de sa méthode	Son efficacité est basée sur l'analyse coûteuse de cohortes représentatives afin de maitriser les covariables et un ratio bénéfice risque quantifié est validé par les pairs dans des revues à comité de lecture
Ne fait aucun suivi court, moyen et long terme de ses patients	Fait un suivi court, moyen et long terme des ses patients pour analyser la rémission avec l'analyse de Kaplan-Meier
N'a aucun protocole d'intervention écrit quantifiable et fait ses actes au « doigt mouillé »	À un protocole d'intervention quantifiable, mesurable, répétable, contrôlable de ses actes
Ne publie ni ne partage ses résultats car ne fait pas de suivi et s'en fiche des potentiels impacts négatifs	Publie et partage ses résultats car fait un suivi et communique les potentiels effets secondaires car s'intéresse au bien vivre de ses patients
Refuse de tester et de faire analyser sa méthode en utilisant le groupe de contrôle/groupe test (expérience contrôlée) en double aveugle avec le standard de traitement	Veut et doit tester et faire analyser sa méthode en utilisant le groupe de contrôle/groupe test (expérience contrôlée) en double aveugle avec le standard de traitement
Quand falsifié rejette les faits, s'énerve, attaque en justice mais continue sa méthode	Quand falsifié accepte les faits et arrête la méthode

En cours de traduction de l'anglais

5.7.20.1 Sophismes de données

Jusqu'à présent, nous avons présenté en détail certains problèmes humains communs et problèmes d'interprétation dans les statistiques comme (en plus de la manière déplorable dont les médias de masse communiquent les résultats scientifiques comme vu à la page **??**) le fait que la corrélation n'est pas toujours causalité, une corrélation nulle ne signifie pas une absence de schéma, le paradoxe de Simpson, le quatuor d'Anscombe, l'utilisation de mauvais indicateurs ou tests statistiques, le p-hacking, etc.

Certains d'entre eux peuvent être résumés dans l'affiche suivante (rappelez-vous cette affiche pour le moment où nous étudierons la fouille de données à la page **??**) :

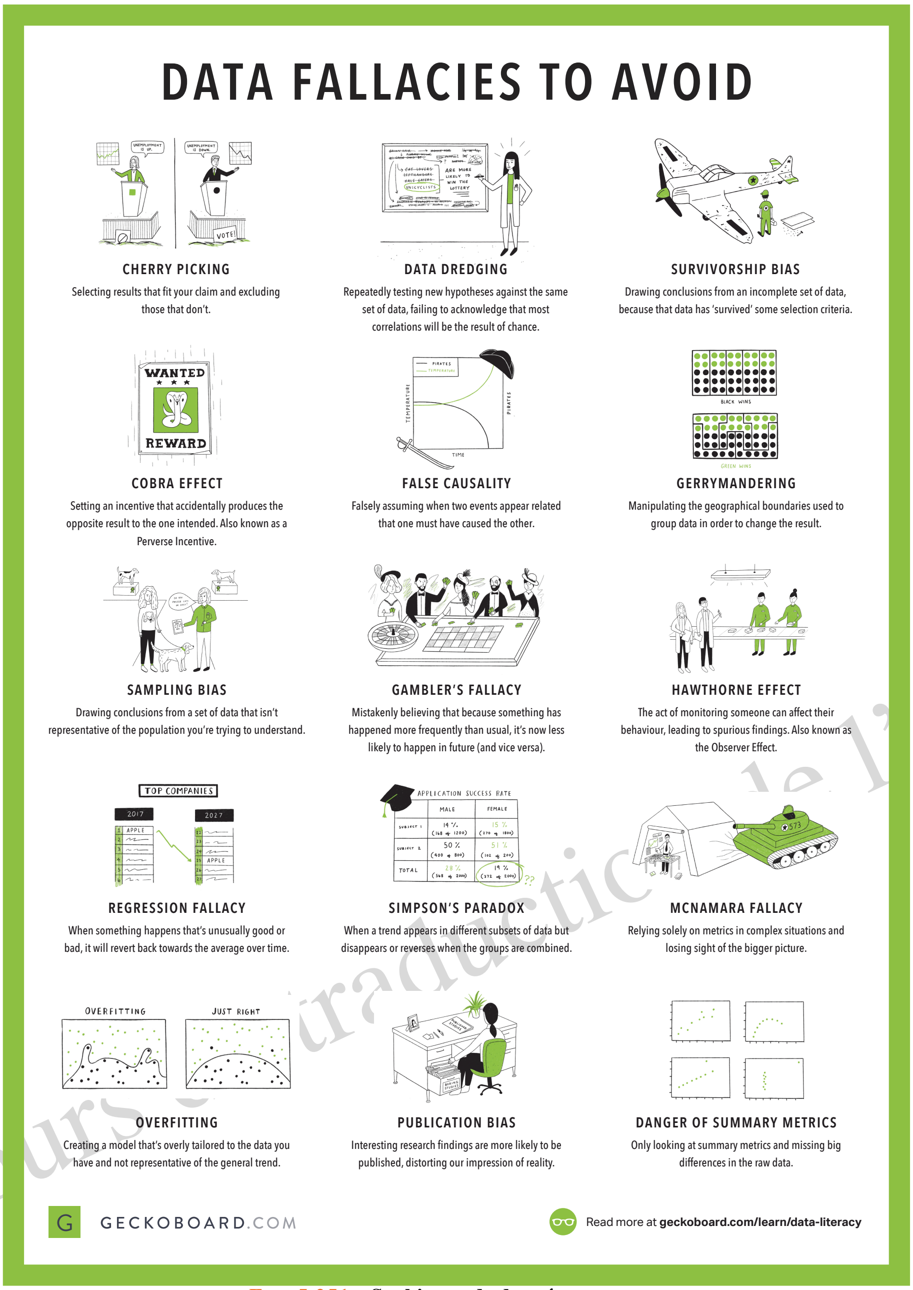


FIG. 5.251 – Sophismes de données communs
(credit : Geckoboard, source : https://www.geckoboard.com/learn/data-literacy/)

quote
5.7:1326.#43

> *Même une estimation approximative, même fausse, vaut mieux que pas d'estimation du tout.*

?

~90 %

★★★☆☆
125 votes, 62.5%

En cours de traduction de l'anglais

6

Algèbre

L'algèbre est la science du calcul des quantités ou des structures représentées par des lettres. (Larousse)

En cours de traduction de l' anglais

Contents

6.1 Calcul Algébrique **1333**
6.1.1 Équations et inéquations 1334
6.1.1.1 Équations 1335
6.1.1.2 Inéquations 1339
6.1.2 Identités remarquables 1345
6.1.3 Polynômes 1351
6.1.3.1 Relations générales entre racines et coefficients 1355
6.1.3.2 Multiplication de polynômes 1356
6.1.3.3 Division Euclidienne de Polynômes 1356
6.1.3.4 Théorème de factorisation des polynômes 1358
6.1.3.5 Équation diophantienne 1359
6.1.3.6 Polynômes et équations univarié du premier ordre 1360
6.1.3.7 Polynômes et équations univarisé d'ordre deux 1363
6.1.3.8 Polynômes et équations univarisé d'ordre trois 1370
6.1.3.9 Polynômes et équations univarisé d'ordre quatre 1374
6.1.3.10 Polynômes trigonométriques 1377
6.1.3.11 Pôlynomes Cyclotomiques 1378
6.1.3.12 Polynômes de Legendre 1381
6.1.3.13 Polynômes de Laguerre 1385
6.2 Algèbre Ensembliste **1398**
6.2.1 Algèbre et Géométrie Corporelle 1398
6.2.1.1 Groupes Cycliques 1399

6.2.1.2 Groupes de Transformations 1402
6.2.1.3 Groupes de Symétries 1411
6.2.1.4 Groupes de Permutations 1416
6.2.2 Théorie de Galois 1426
6.2.2.1 Polynômes élémentaires symétriques et invariants 1427
6.2.2.2 Formules générales de Viète 1431

6.3 Calcul Différentiel et Intégral 1432

6.3.1 Calcul Différentiel 1432
6.3.1.1 Différentielles 1447
6.3.1.2 Dérivée usuelles 1457
6.3.1.3 Dérivation implicite 1473
6.3.1.4 Régularité 1479
6.3.2 Calcul Intégral 1480
6.3.2.1 Intégrale Définie 1480
6.3.2.2 Intégrale Indéfinie 1490
6.3.2.3 Intégrale Double 1498
6.3.2.4 Intégration par changement de variables 1501
6.3.2.5 Intégration par parties 1511
6.3.2.6 Primitives usuelles 1513
6.3.2.7 Règle d'intégration de Leibniz 1539
6.3.2.8 Représentation intégrale de la fonction de Bessel du premier type 1543
6.3.2.9 Fonction de Dirac 1547
6.3.2.10 Fonction Gamma d'Euler 1552
6.3.2.11 Intégrales Curvilignes 1561
6.3.2.12 Intégrales de Surfaces 1566
6.3.2.13 Intégrales impliquant des équations paramétriques 1570
6.3.2.14 Intégrales impropres 1573
6.3.2.15 Intégrales elliptiques 1577
6.3.3 Équations Différentielles 1581
6.3.3.1 Équations différentielles du premier ordre 1583
6.3.3.2 Équations différentielles linéaires 1583
6.3.3.3 Méthodes de résolution d'équations différentielles 1585
6.3.3.4 Classification des équations aux dérivées partielles 1600
6.3.3.5 Systèmes d'équation différentielles 1605
6.3.3.6 Systèmes dynamiques non linéaires 1622
6.3.3.7 Méthode régulière des perturbations 1622

6.4 Suites et Séries 1629

En cours de traduction de l'anglais

6.4.1 Suites . . . 1629
6.4.1.1 Suites arithmétiques . . . 1631
6.4.1.2 Suites harmoniques . . . 1633
6.4.1.3 Suites géométriques . . . 1634
6.4.1.4 Suite de Cauchy . . . 1635
6.4.1.5 Suite de Fibonacci . . . 1640
6.4.1.6 Suites logiques/Suites psychologiques . . . 1642
6.4.2 Séries . . . 1643
6.4.2.1 Séries de Gauss . . . 1645
6.4.2.2 Séries Arithmétiques . . . 1658
6.4.2.3 Séries Géométriques . . . 1659
6.4.2.4 Séries Téléscopiques . . . 1671
6.4.2.5 Séries de Grandi . . . 1672
6.4.2.6 Séries de Taylor et de Maclaurin . . . 1677
6.4.2.7 Séries de Fourier (séries trigonométriques) . . . 1707
6.4.2.8 Séries de Bessel . . . 1748
6.4.3 Critères de convergences . . . 1755
6.4.3.1 Test de l'intégrale . . . 1756
6.4.3.2 Règle D'Alembert . . . 1757
6.4.3.3 Test des séries alternées . . . 1760
6.4.3.4 Théorème du point fixe . . . 1760
6.4.4 Fonctions génératrices . . . 1763
6.4.4.1 Fonctions génératrices ordinaires (transformation d'une séquence en série) . . . 1763
6.4.4.2 Fonctions génératrices multivariées . . . 1769
6.4.4.3 Fonctions génératrices fonctionnelles . . . 1770
6.5 Calcul Vectoriel . . . 1773
6.5.1 Notion de Flèche . . . 1774
6.5.2 Ensemble de Vecteurs . . . 1776
6.5.2.1 Pseudo-Vecteurs . . . 1778
6.5.2.2 Vecteur Normal . . . 1780
6.5.2.3 Multiplication par un scalaire . . . 1781
6.5.3 Espaces Vectoriels . . . 1784
6.5.3.1 Combinaisons Linéaires . . . 1785
6.5.3.2 Sous-espaces vectoriels . . . 1786
6.5.3.3 Famille Génératrices . . . 1786
6.5.3.4 Dépendances et Indépendances linéaires . . . 1786
6.5.3.5 Base d'un espace vectoriel . . . 1788

En cours de traduction de l'anglais

6.5.3.6 Angles Directeurs . . . 1789
6.5.3.7 Dimensions d'un espace vectoriel . . . 1790
6.5.3.8 Prolongement d'une famille libre . . . 1791
6.5.3.9 Rang d'une famille finie . . . 1792
6.5.3.10 Sommes directes . . . 1792
6.5.3.11 Espaces affines . . . 1793
6.5.4 Espaces Vectoriels Euclidiens . . . 1796
6.5.4.1 Produit scalaire . . . 1798
6.5.4.2 Produit Vectoriel . . . 1808
6.5.4.3 Produite Mixte (triple produit) . . . 1815
6.5.5 Espaces Vectoriels Fonctionnels . . . 1817
6.5.6 Espaces Vectoriels Hermitiens . . . 1819
6.5.6.1 Produit hermitien interne . . . 1820
6.5.6.2 Inégalité hermitienne de Cauchy-Schwarz . . . 1821
6.5.6.3 Types d'Espaces Vectoriels . . . 1822
6.5.7 Systèmes de Coordonnées . . . 1823
6.5.7.1 Système de coordonnées cartésiennes (rectangulaires) . . . 1823
6.5.7.2 Système de coordonnées sphériques . . . 1826
6.5.7.3 Système de coordonnées cylindriques . . . 1837
6.5.7.4 Système de coordonnées polaires . . . 1839
6.5.8 Opérateurs Différentiels . . . 1842
6.5.8.1 Gradients d'un champ scalaire . . . 1844
6.5.8.2 Gradients d'un champ de vecteurs . . . 1854
6.5.8.3 Divergences d'un champ de vecteurs . . . 1855
6.5.8.4 Rotationnels d'un champ de vecteurs . . . 1864
6.5.8.5 Laplaciens d'un champ scalaire (opérateur de Laplace) . . . 1876
6.5.8.6 Laplaciens d'un champ vectoriel . . . 1880
6.5.8.7 Identités remarquables . . . 1888
6.5.8.8 Résumé (des identités remarquables) . . . 1894
6.6 Algèbre Linéaire . . . 1898
6.6.1 Systèmes Linéaires . . . 1902
6.6.2 Transformations Linéaires . . . 1907
6.6.3 Matrices . . . 1909
6.6.3.1 Rang d'une matrice . . . 1911
6.6.3.2 Opération sur les Matrices . . . 1918
6.6.3.3 Type de Matrices . . . 1921
6.6.3.4 Déterminants . . . 1935

En cours de traduction de l'anglais

6.6.4 Changements de bases (référentiels) . . . 1966
6.6.5 Valeurs et Vecteurs propres . . . 1969
6.6.5.1 Matrices de rotations et Valeurs propres . . . 1973
6.6.6 Théorème Spectral . . . 1976
6.6.7 Décompositions Matricielles . . . 1983
6.6.7.1 Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) . . . 1983
6.6.7.2 Décomposition LU . . . 1996
6.6.7.3 Décomposition de Cholesky . . . 1999
6.6.7.4 Décomposition QR . . . 2002
6.6.8 Identité matricielle de Woodbury et relation de Sherman-Morrison . . . 2007
6.7 Calcul Tensoriel . . . 2010
6.7.1 Tenseur . . . 2011
6.7.2 Notation Indicielle . . . 2014
6.7.2.1 Sommation sur plusieurs indices . . . 2015
6.7.2.2 Symbole de Kronecker . . . 2015
6.7.2.3 Symbole anti-symétrique (symbole de Levi-Civita) . . . 2016
6.7.3 Métrique et Signature . . . 2022
6.7.4 Déterminant de Gram . . . 2025
6.7.5 Composantes Contravariantes et Covariantes . . . 2030
6.7.6 Opérations dans les Bases . . . 2033
6.7.6.1 Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . 2033
6.7.6.2 Changements de Bases . . . 2037
6.7.6.3 Bases Réciproques (Bases Duales) . . . 2038
6.7.7 Tenseurs Euclidiens (tenseur cartésien) . . . 2042
6.7.7.1 Tenseur Fondamental . . . 2043
6.7.7.2 Produit Tensoriel de deux vecteurs et matrices . . . 2044
6.7.7.3 Espaces Tensoriels . . . 2048
6.7.7.4 Combinaisons linéaires de tenseurs . . . 2052
6.7.7.5 Contraction des indices . . . 2052
6.7.8 Tenseurs spéciaux . . . 2057
6.7.8.1 Tenseur symétrique . . . 2057
6.7.8.2 Tenseur antisymétrique . . . 2060
6.7.8.3 Tenseur Fondamental . . . 2064
6.7.9 Coordonnées Curvilignes . . . 2064
6.7.9.1 Repère naturel en coordonnées sphériques (base curviligne en coordonnées sphériques) . . . 2071
6.7.9.2 Repère naturel en coordonnées polaires (base curviligne en coordonnées polaires) 2072

En cours de traduction de l'anglais

6.7.9.3 Repère naturel en coordonnées cylindriques (base curviligne en coordonnées cylindriques) . . . 2073
6.7.10 Symboles de Christoffel . . . 2077
6.7.11 Théorème de Ricci . . . 2086
6.7.12 Symboles de Riemann-Christoffel . . . 2097
6.7.13 Courbure de Ricci (Ricci tensor) . . . 2102
6.7.14 Tenseur d'Einstein . . . 2115
6.8 Calcul Spinoriel . . . 2119
6.8.1 Spineur Unitaire . . . 2120
6.8.2 Propriétés Géométriques . . . 2126
6.8.2.1 Symétries Planes . . . 2127
6.8.2.2 Rotations . . . 2129
6.8.2.3 Propriétés des matrices de Pauli . . . 2135

En cours de traduction de l'anglais

6.1. Calcul Algébrique

Dans la section d'Arithmétique de ce livre, nous avons beaucoup écrit sur différents théorèmes utilisant les nombres abstraits afin de généraliser l'étendue de la validité de ces derniers. Nous avons cependant peu abordé la façon dont nous devions manipuler ces nombres abstraits. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Comme vous le savez peut-être déjà, le nombre peut être envisagé en faisant abstraction de la nature des objets qui constituent le groupement qu'il caractérise et ainsi qu'à la façon de codifier (chiffre arabe, romain, ou autre système...). Nous disons alors que le nombre est un "nombre abstrait" et lorsque nous manipulons ces types d'objets nous disons que nous faisons du "calcul algébrique" ou encore du "calcul littéral".

Définition (#6.1.162) : Le "calcul littéral" consiste à calculer avec des variables (c'est-à-dire avec des lettres) comme on le ferait avec des nombres.

Pour les mathématiciens il n'est souvent pas avantageux de travailler avec des valeurs numériques $(1, 2, 3\ldots)$ car ils représentent uniquement des cas particuliers. Ce que cherchent les physiciens, ingénieurs ainsi que les mathématiciens, ce sont des relations applicables universellement dans un cadre le plus général possible.

Ces nombres abstraits appelés aujourd'hui communément "variable" sont très souvent représentés par l'alphabet latin (pour lequel les premières lettres de l'alphabet latin $a, b, c, \ldots$ désignent souvent les nombres connus, et les dernières $x, y, z, \ldots$ les nombres inconnus), l'alphabet grec (aussi beaucoup utilisé pour représenter des opérateurs mathématiques plus ou moins complexes) et l'alphabet hébraïque (dans une moindre mesure).

Bien que ces symboles puissent représenter n'importe quel nombre, il en existe cependant quelques-uns aussi bien en physique ou en mathématique qui peuvent représenter des constantes dites "Universelles" telles que la vitesse de la lumière c, la constante gravitationnelle G, la valeur de π, le nombre d'Euler e, etc.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Il semblerait que les lettres pour représenter les nombres ont été employées pour la première fois par Viète au milieu du 116ème siècle (calendrier holocène).

Une variable est donc susceptible de prendre des valeurs numériques différentes. L'ensemble de ces valeurs peut varier suivant le caractère du problème considéré.

Rappels (nous avions déjà défini cela dans le chapitre traitant des Nombres dans la section d'Arithmétique) :

R1. Nous appelons "domaine de définition" d'une variable, l'ensemble des valeurs numériques qu'elle est susceptible de prendre entre deux bornes, ou dans un ensemble (tel que

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$, etc.).

Soit a et b deux nombres tel que $a < b$. Alors :

R2. Nous appelons "intervalle fermé d'extrémités a et b", l'ensemble de tous les nombres x compris entre ces deux valeurs et nous le désignons de la façon suivante :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \tag{6.1.1}$$

R3. Nous appelons "intervalle ouvert d'extrémités a et b", l'ensemble de tous les nombres x compris entre ces deux valeurs non comprises et nous le désignons de la façon suivante :

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} \tag{6.1.2}$$

R4. Nous appelons "intervalle fermé à gauche, ouvert à droite" la relation suivante :

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\} \tag{6.1.3}$$

R5. Nous appelons "intervalle ouvert à gauche, fermé à droite" la relation suivante :

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\} \tag{6.1.4}$$

Remarque

Si la variable x peut prendre toutes les valeurs négatives et positives possibles nous écrirons dès lors : $]-\infty, +\infty[$ où le symbole "∞" signifie "infini". Evidemment il peut y avoir des combinaisons d'intervalles ouvert et infini à droite, fermé et limité à gauche et réciproquement.

Définition (#6.1.163) : Nous appelons "voisinage de a", tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a (c'est un concept simple que nous reprendrons pour définir ce qu'est une fonction continue). Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\tag{6.1.5}$$

est un voisinage de a.

En cours de traduction anglais

6.1.1 Équations et inéquations

L'algèbre élémentaire consiste à partir des définitions de l'addition, soustraction, multiplication, et puissance et de leurs propriétés (associativité, distributivité, commutativité, élément neutre, inverse,...) - ce qui constitue selon l'ensemble sur lequel nous travaillons un corps ou un groupe commutatif abélien ou non (voir section Théorie des Ensembles 413) - à manipuler selon un but fixé des "équations algébriques" mettant en relation des variables et constantes.

Nous allons définir de suite après ce qu'est une équation et une inéquation mais nous souhaitons d'abord définir certaines de leurs propriétés :

$$A > B, A = B, A < B, A \leq B, A \geq B \tag{6.1.6}$$

Vérifient les propriétés suivantes :

P1. Nous pouvons toujours ajouter ou ôter aux deux membres d'une inéquation ou équation un même polynôme en obtenant une inéquation ou équation équivalente (c'est à dire avec les mêmes solutions ou réductions). Nous disons alors que l'égalité ou l'inégalité restent "vraies" par l'opération d'addition ou de soustraction membre à membre.

P2. Si nous multiplions ou si nous divisons les deux membres d'une équation ou inéquation par un même nombre positif nous obtenons également une inéquation ou équation équivalente (nous avons déjà vu cela). Nous disons alors que l'égalité ou l'inégalité reste "vraie" par l'opération de multiplication ou division membre à membre.

P3. Si nous multiplions ou si nous divisons les deux membres d'une inéquation par un même nombre négatif et si nous inversons le sens de l'inégalité, nous obtenons alors une inéquation ou équation équivalente.

6.1.1.1 Équations

Définition (#6.1.164) : Une "équation" est une relation d'égalité entre des valeurs toutes abstraites (autrement dit : deux expressions algébriques) ou non toutes abstraites (dès lors nous parlons d'équations à une inconnue, deux inconnues, trois inconnues, ...) reliées entre elles par des opérateurs divers.

La maîtrise parfaite de l'algèbre élémentaire est fondamentale en physique-mathématique et dans l'industrie ! ! ! Comme il existe une infinité de types d'équations, nous ne les présenterons pas ici. C'est le rôle de l'enseignant/formateur dans les classes d'entraîner le cerveau de son auditoire pendant plusieurs années (2 à 3 ans en moyenne) à résoudre énormément de configurations différentes d'équations algébriques (exposées sous forme de problèmes de tous les jours, géométriques ou purement mathématiques) et ce afin que les élèves manipulent ces dernières sans erreurs en suivant un raisonnement logique et rigoureux (ce n'est qu'en forgeant que l'on devient forgeron...) ! ! !

En d'autres termes : Un professeur/formateur et un établissement ad hoc sont irremplaçables pour acquérir un savoir et avoir un retour d'expérience ! ! !

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Nous avons tenté, ci-dessous, de faire une généralisation simpliste des règles de base de l'algèbre élémentaire. Cette généralisation sera d'autant plus simple à comprendre que le lecteur aura l'habitude de manipuler des quantités abstraites.

Ainsi, soit $a, b, c, d, e, \ldots, x, y$ des nombres abstraits pouvant prendre n'importe quelle valeur numérique (nous restons dans le cadre des nombres classiques scolaires et industriels...).

Soit Ξ la lettre majuscule grecque se prononçant "Xi") représentant un ou plusieurs nombres abstraits (variables) opérants entre eux d'une façon quelconque tel que nous ayons des monômes (un seul nombre abstrait) ou polynômes (poly = plusieurs) algébriques différents distinguables ou non (nous faisons donc ici une sorte d'abstrait de l'abstraction ou si vous préférez une variable de plusieurs variables).

Propriétés (il s'agit en fait plus d'exemples que de propriétés...) :

P1. Nous aurons toujours $\Xi=\Xi$ si et seulement si le terme Ξ à gauche de l'égalité est le même terme Ξ que celui qui est à droite de l'égalité. Si cette condition est satisfaite nous avons alors :

$$\Xi-\Xi=0 \tag{6.1.7}$$

Sinon :

$$\Xi-\Xi=\Xi \tag{6.1.8}$$

où nous excluons donc les cas où tous les Ξ sont identiques entre eux (sinon nous revenons à P1).

P2. Nous avons, si $\Xi\neq 0$:

$$\frac{\Xi}{\Xi}=1\Leftrightarrow 1=1\Leftrightarrow \Xi=\Xi \tag{6.1.9}$$

qui vérifie la symbolique de l'équation $\Xi=\Xi$ dans le cas seulement où les éléments sont identiques entre eux (nous excluons bien évidemment le cas avec dénominateur nul).

P3. Si tous les Ξ sont strictement identiques, alors :

$$\Xi\cdot\Xi\cdot\Xi\cdot\ldots\cdot\Xi=\prod\Xi=\Xi^n \tag{6.1.10}$$

Sinon nous avons :

$$\Xi\cdot\Xi\cdot\Xi\cdot\ldots\cdot\Xi \tag{6.1.11}$$

qui ne peut s'écrire sous forme condensée simple. Il peut aussi arriver que :

$$\Xi\cdot\Xi\cdot\Xi\cdot\ldots\cdot\Xi=\Xi \tag{6.1.12}$$

avec le Ξ à droite de l'égalité identique à aucun, un ou encore plusieurs Ξ du membre gauche de l'égalité.

P4. Nous pouvons avoir :

$$\frac{\Xi^\Xi}{\Xi^\Xi}=1 \tag{6.1.13}$$

sans que nécessairement les exposants du numérateur ou dénominateur soient égaux (nous excluons le dénominateur nul).

Sinon nous pouvons avoir :

$$\frac{\Xi^\Xi}{\Xi^\Xi}=\Xi \quad \text{or} \quad \frac{\Xi^\Xi}{\Xi^\Xi}=\Xi^{\Xi-\Xi} \tag{6.1.14}$$

Mais n'oubliez pas (voir section Opérateurs page 313) que dans le cas général où le numérateur et le dénominateur ne sont pas égaux que :

$$\frac{\Xi^\Xi}{\Xi^\Xi}\neq\frac{\Xi^\Xi+c^{te}}{\Xi^\Xi+c^{te}} \tag{6.1.15}$$

En cours de traduction de l'anglais

P5. On a si tous les dénominateurs sont strictement égaux :

$$\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\cdots}}}}=\frac{\Xi}{\Xi^n}=\Xi^{1-n} \qquad (6.1.16)$$

mais il n'est cependant pas impossible d'avoir :

$$\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\cdots}}}}=\Xi \qquad (6.1.17)$$

avec le Ξ à droite de l'égalité identique à un ou plusieurs membres de gauche de l'égalité ou encore il est tout à fait possible d'avoir :

$$\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\frac{\Xi}{\cdots}}}}=\Xi^{\Xi} \qquad (6.1.18)$$

P6. Laissons $\star$ représenter exclusivement le symbole d'addition ou de soustraction, nous avons alors (à une variation de signe donné) :

$$\Xi\star\Xi\star\ldots\star\Xi=n\cdot\Xi \qquad (6.1.19)$$

si tous les Ξ sont identiques les uns par rapport aux autres ou si la combinaison d'un nombre indéterminé de Ξ est égal aux Ξ sur la droite de l'égalité.

Sinon on aura (c'est-à-dire que le résultat donnera n'importe quel monôme ou polynôme indéterminé) :

$$\star\Xi\star\Xi\star\ldots\star\Xi=\Xi \qquad (6.1.20)$$

P7. On a si tous les Ξ (les bases) levés à la puissance sont strictement identiques :

$$\Xi^{\Xi}\cdot\Xi^{\Xi}\cdot\ldots\cdot\Xi^{\Xi}=\Xi^{\sum\Xi} \qquad (6.1.21)$$

si et seulement si les bases Ξ sont égales (ou pourraient être décomposables pour être égales) et les puissances Ξ ne sont pas nécessairement égales.

À partir de la connaissance des exemples de ces 7 règles/propriétés de base, nous pouvons résoudre, simplifier ou montrer qu'une équation simple a des solutions ou non relativement à un problème ou un énoncé donné.

Ainsi, étant donné un opérande ou une séquence d'opérations quelconques sur une ou plusieurs abstractions d'abstraits et parmi toutes, une (ou plusieurs) dont les valeurs numériques est ou

En cours de traduction de l' anglais

sont inconnues (les autres sont connues), nous pourrions alors être en mesure de prouver qu'une relation (énoncé) comme :

$$\Psi\Xi = \Psi\Xi \tag{6.1.22}$$

a des solutions existantes ou non (c'est-à-dire : est Vrai ou Faux).

Dans le cas d'une équation avec valeur absolue (voir section Opérateurs page 323) du type :

$$|\Psi\Xi| = \Psi\Xi \tag{6.1.23}$$

avec le second membre étant strictement positif (sinon les relations précédentes seraient un non-sens) cela équivaut bien sûr à partir de la définition de la valeur absolue à écrire :

$$\Psi\Xi = \Psi\Xi \quad \text{et} \quad \Psi\Xi = -\Psi\Xi \tag{6.1.24}$$

Remarques

R1. La présence de la valeur absolue dans une équation algébrique dans laquelle on cherche des solutions double souvent le nombre de solutions.

R2. Une équation est nommée "équation conditionnelle" lorsqu'il y a des nombres dans l'ensemble de définition qui ne sont pas des solutions (ce qui est en fait le cas le plus courant). Inversement, si un nombre quelconque de l'ensemble de définition est la solution de l'équation, alors l'équation est nommée "équation d'identité".

Nous devons parfois résoudre un "système d'équations" (voir par exemple les systèmes d'équations linéaires à la page **??**).

- Qu'est-ce que c'est ? : C'est un ensemble d'au moins deux équations à résoudre (la résolution n'est pas toujours équivalente à celle consistant à simplifier une expression !).
- Quelle est la spécificité d'un tel système ? : Toutes les solutions du système sont l'intersection de toutes les solutions des équations à résoudre (pour des exemples détaillés voir les sections Algèbre Linéaire et Méthodes Numériques).
- Quelle sont les applications pratiques ? : C'est sans quasiment infini (voir les différents chapitres du livre), ces systèmes résolvent des problèmes impliquant des applications des mathématiques à d'autres domaines (finance, ingénierie, recherche opérationnelle, etc.).

En raison de la variété illimitée des applications, il est difficile d'établir des règles générales précises pour les solutions et les procédures existantes à suivre ne seront certainement utiles que si le problème peut être formulé en équations et les procédures suivantes peuvent aider un peu au moins à éviter certaines erreurs :

1. Si nous avons un l'énoncé d'un problème déjà sous forme écrite, nous le relisons plusieurs fois attentivement et nous considérons les faits donnés et la quantité d'inconnues à trouver et leur domaine de définition (résumer l'énoncé sur une feuille de papier ou ailleurs est souvent utile pour les gros problèmes !).

En cours de traduction de l'anglais

2. Sélectionnez les lettres qui représentent les quantités inconnues. C'est une des étapes décisives dans la recherche de solutions. Les phrases contenant des mots tels que : trouver, quoi, comment, où, quand devraient vous aider à identifier la quantité inconnue.

3. Faites un dessin (dans votre tête ou sur papier) avec des légendes. C'est à coup sûr possible la plupart du temps uniquement avec des problèmes ayant 1, 2 ou 3 inconnues.

4. Énumérez les faits connus et les relations concernant les quantités inconnues. Une relation peut être décrite par une équation dans laquelle apparaissent dans un ou les deux côtés du signe égale des déclarations (affirmations) écrites avec des phrases normales.

5. Après l'étape précédente, écrivez une ou plusieurs équations qui décrivent avec précision ce qui a été dit avec des phrases.

6. Résoudre l'équation ou le système d'équations formulés dans les étapes précédentes en utilisant les multiples techniques heuristiques existantes.

7. Vérifier les solutions obtenues à l'étape précédente en se référant à l'énoncé initial du problème (vérifier que la solution est cohérente avec les conditions de l'énoncé).

Certaines méthodes de résolutions de systèmes d'équations sont traitées en détail dans la section de Méthodes Numériques et également dans la section Algèbre Linéaire (vous y comprendrez donc mieux la procédure ci-dessus).

En cours de traduction de l'anglais

6.1.1.2 Inéquations

Précédemment nous avons vu qu'une équation était composée d'une égalité de divers calculs avec des termes différents (avec au moins une "inconnue" ou un "nombre abstrait") et que :

1. "Résoudre une équation" est un processus consistant à calculer la valeur de l'inconnue pour satisfaire l'égalité (quand une solution existe !)

2. "Simplifier une équation" est le processus consistant à minimiser mathématiquement le nombre de termes (factoriser ou éliminer...)

3. "Développer une équation" est le processus consistant à distribuer tous les termes.

Pourquoi faut-il rappeler la définition d'une équation ? Tout simplement parce que pour l'inégalité, c'est presque le même processus intellectuel ! La différence ? Si l'équation est une égalité, l'inégalité est une inégalité (...) : Comme l'équation, l'inégalité est composée de divers calculs avec des termes différents interconnectés par des opérateurs quelconques avec au moins une inconnue.

Principales différences entre les équations d'égalité et d'inégalité :

1. Égalité : Symbolisée par le symbole $=$

2. Inégalité : Symbolisée par les relations d'ordre $<, \leq, \geq, >$

Lorsque nous résolvons une inégalité, notre inconnue peut avoir une plage de valeurs qui satisfont l'inégalité. On dit alors que la solution de l'inégalité est un "ensemble de valeurs". C'est la différence fondamentale entre l'égalité (plusieurs solutions) et l'inégalité (plage de solutions) !

Faisons un rafraichissement sur les signes que l'on peut rencontrer dans une inégalité :

- $<$: Doit être lu "strictement inférieur à" ou "strictement plus petit que". Dans ce cas, la valeur numérique cible n'est pas incluse dans la plage et nous pouvons alors représenter la plage (intervalle) avec un crochet gauche ouvert $]\ldots$ ou un crochet droit ouvert $\ldots[$ à côté de la valeur cible.

> ✍**Exemple :**
>
> Écrire $x < 5$ signifie $x \in]-\infty, 5[$ et $x < -5$ signifie $x \in]-\infty, -5[$.

- $>$: Doit être lu "strictement supérieur à" ou "strictement plus grand que". Dans ce cas, la valeur cible numérique n'est pas non plus incluse dans la plage (intervalle) et nous pouvons alors représenter la plage avec un crochet gauche ouvert $]\ldots$ ou un crochet droit $\ldots[$ à côté de la valeur cible.

> ✍**Exemple :**
>
> Écrire $x > 5$ signifie $x \in]5, +\infty[$ et $x > -5$ signifie $x \in]-5, +\infty[$.

- $\leq$: Doit être lu "inférieur ou égal à" ou "plus petit ou égal à". Dans ce cas, la valeur cible numérique est dans la plage (intervalle) et nous pouvons alors représenter la plage avec un crochet gauche fermé $[\ldots$ ou crochet droit $\ldots]$.

> ✍**Exemple :**
>
> Écrire $x \leq 5$ signifie $x \in]-\infty, 5]$ et $x < -5$ signifie $x \in]-\infty, -5]$.

- $\geq$: Doit être lu "supérieur ou égal à" ou "plus grand ou égal à". Dans ce cas, la valeur cible numérique est dans la plage (intervalle) et nous pouvons alors représenter la plage avec un crochet gauche fermé $[\ldots$ ou crochet droit $\ldots]$.

> ✍**Exemple :**
>
> Écrire $x \geq 5$ signifie $x \in [5, +\infty[$ et $x > -5$ signifie $x \in [-5, +\infty[$.

L'objectif des inégalités est la plupart du temps (hors but esthétique) d'avoir au moins une valeur numérique qui définit le domaine de solution (de tous les termes abstraits - variables - de l'inégalité) qui satisfait l'inégalité.

En cours de rédaction de l'anglais

Il existe de nombreuses façons de représenter les domaines de définition des variables qui satisfont une inégalité. Nous allons voir à travers de petits exemples quelles sont quelques-unes des possibilités les plus courantes :

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Soit une inégalité linéaire (du premier degré) sur x avec une seule inconnue à laquelle on impose une contrainte particulière arbitraire par exemple (bien entendu, l'expression peut contenir plus de termes...) :

$$x < 2 \quad (6.1.25)$$

où nous imaginons que cette inéquation résulte déjà d'une simplification de termes qui étaient superflus. Résoudre l'inégalité revient à rechercher les valeurs de x inférieures à 2. Bien sûr, il n'y a pas qu'une solution dans $\mathbb{R}$ mais un ensemble (intervalle) de solutions et c'est le principe des inégalités !

Pour résoudre l'inégalité, on observe d'abord le type d'inégalité imposé ("strict" ou "égal"). Ensuite, dans les classes de lycées (et pas seulement parfois...) on représente l'ensemble $\mathbb{R}$ traditionnellement par un tableau tel que :

$-\infty$	0	$+\infty$
....	.......|.......	....

TAB. 6.1 – **Tableau de résolution des inégalités**

Nous savons intuitivement que la solution de notre inégalité comprend toutes les valeurs inférieures à 2 (2 étant lui-même exclu des solutions) jusqu'à $-\infty$. Ensuite, nous écrivons cet intervalle ou domaine comme suit :

$$S =]-\infty, 2[\quad (6.1.26)$$

On peut alors représenter sous forme de tableau l'ensemble des solutions (cela aide à comprendre et prépare l'étudiant à la résolution de systèmes d'équations et d'inéquations et à l'étude des variations de fonctions). Pour cela, on reprend le gabarit du tableau précédent et on y place notre valeur cible (on n'en a qu'une dans cet exemple particulier mais parfois il peut y en avoir plusieurs car il y a une singularité ou des racines pour certaines valeurs du domaine de définition), soit la valeur 2 :

$-\infty$	0	2	$+\infty$
....	.......|.......	.......[.......	....

TAB. 6.2 – **Table augmentée pour la résolution des inégalités**

et enfin, on délimite avec de la couleur (...) l'ensemble des solutions de $-\infty$ à $+2$ exclus :

$-\infty$	0	2	$+\infty$
....	.......|.......	.......[.......	....

TAB. 6.3 – **Tableau en surbrillance pour la résolution des inégalités**

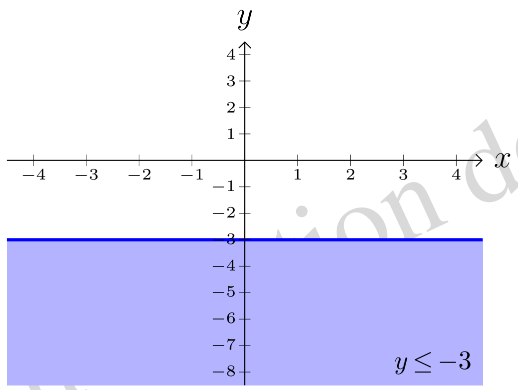
A la valeur 2, on n'oublie pas de marquer le signe $\ldots[$ pour montrer que cette valeur est exclue des solutions. Et c'est tout, et le concept peut être extrapolé à des inégalités beaucoup plus complexes !

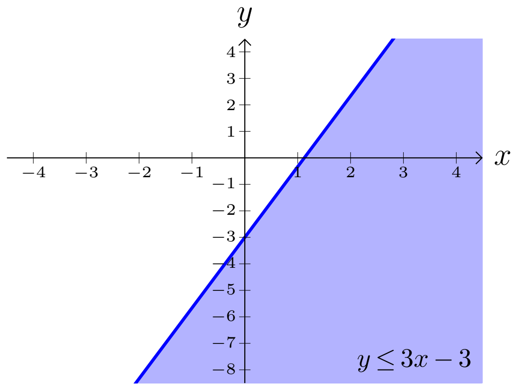
Remarques

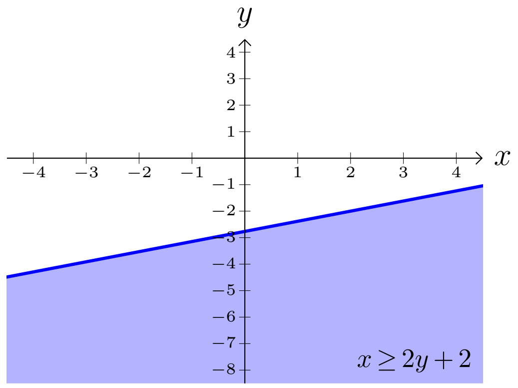
R1. Parfois au lieu de représenter des tableaux comme nous l'avons fait plus haut, certains professeurs (c'est un choix tout à fait artistique) demandent à leurs élèves d'ombrer les cases du tableau et de dessiner des petits cercles à l'intérieur..., ou ils utilisent aussi de petites flèches, ou dessinent le graphique de l'inégalité (cette dernière méthode est certes esthétique mais prend du temps dans des cas complexes mais un exemple est donné plus bas...).

R2. Dans le cadre des inégalités de degré supérieur à 1, il faut (voir plus loin ce que cela veut dire exactement) d'abord aussi déterminer les racines de l'inégalité qui déterminent les intervalles puis par tâtonnements, déterminer quels intervalles sont à rejeter ou à conserver.

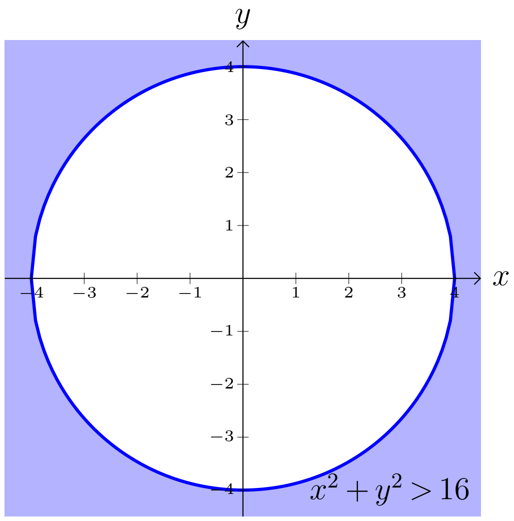
Voici quelques exemples graphiques de quelques inégalités univariées très simples :

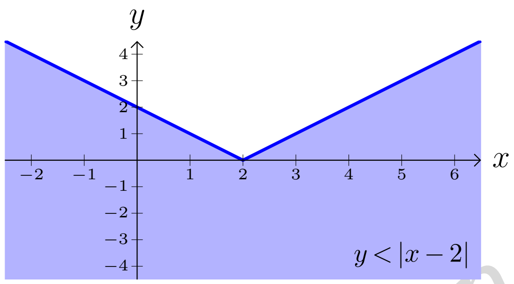






En cours de traduction de l' anglais





On peut aussi (tout comme les équations) parfois avoir à résoudre un "système d'inéquations". Qu'est-ce que c'est ? : C'est un ensemble d'au moins deux inégalités à résoudre. La particularité du système ? : L'ensemble des solutions du système est l'intersection de toutes les solutions de chaque inégalité.

En cours de traduction de l' anglais

Par exemple le système suivant de trois inégalités :

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2 &\leq 3 \\ 2x_1-x_2 &\leq 5 \\ x_1+x_2 &\geq 3 \end{aligned} \tag{6.1.27}$$

Autrement dit, la méthode est la même que la précédente, à la différence près que notre tableau (représentant les domaines de solutions) comportera une ligne supplémentaire par inéquation supplémentaire dans le système plus une ligne de synthèse qui est la projection des domaines de solutions possibles du système.

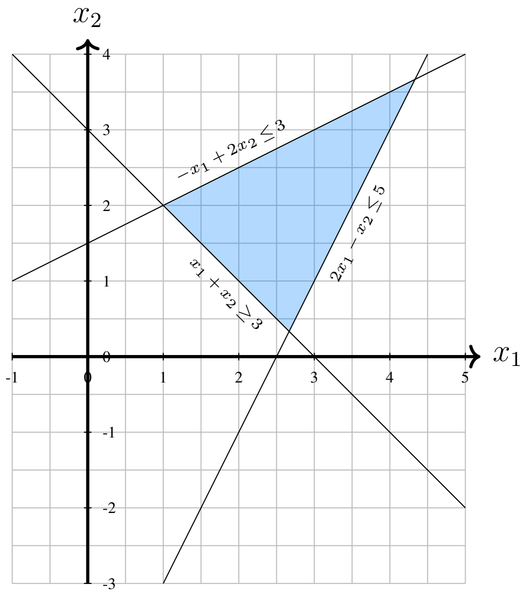
Ainsi, un système à n inéquations aura un tableau récapitulatif à $n+1$ lignes.

Mathématiquement, les domaines (car il peut y en avoir plusieurs qui sont disjoints) peuvent s'écrire comme un ensemble de domaines :

$$S=\{]\ldots,\ldots],[\ldots,\ldots],\ldots,[\ldots,\ldots[\} \tag{6.1.28}$$

Les systèmes d'inéquations sont très fréquents dans beaucoup de problèmes de la mathématique, physique, économétrie, etc... Il est donc important de s'entraîner à les résoudre pendant vos études avec l'aide de votre professeur.

Par exemple, voici une représentation possible du domaine de solution du système d'inéquations précédent :



6.1.2 Identités remarquables

Les identités remarquables sont des sortes de relations magiques, qui nous servent le plus souvent pour la factorisation ou la résolution d'équations algébriques.

Rappelons certaines notions qui ont déjà été vues dans le chapitre de théorie des ensembles de la section d'arithmétique (nous supposons le concept d'élément neutre connu puisque déjà défini) :

- Commutativité :

$$a+b=b+a \qquad \text{et} \qquad ab=ba \tag{6.1.29}$$

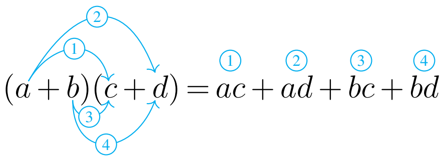
- Associativité :

$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad \text{et} \qquad a(bc)=(ab)c \tag{6.1.30}$$

- Distributivité (rappelons que l'opération inverse est la factorisation) :

$$a(b+c)=ab+ac \tag{6.1.31}$$

Ou de manière illustrée :



Les mêmes observations sont valables avec l'opération de soustraction bien évidemment dans les domaines de définition adéquats.

En cours de traduction de l' anglais

Nous pouvons vérifier avec des valeurs numériques (en remplaçant chaque nombre abstrait par un nombre choisi au hasard), ou par développement (ce serait mieux, ainsi vous êtes sûr d'avoir compris ce dont quoi nous parlions), que les identités algébriques suivantes sont vérifiées (ce sont les plus connues) :

1. Identité du second degré :

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2 \quad (6.1.32)$$

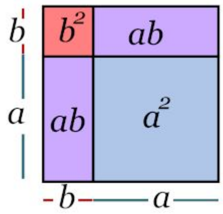


FIG. 6.1 – Visuel de l'identité binomiale au carré (source : Wikipedia, Auteur :Drini)

2. Identité du troisième degré :

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad (6.1.33)$$

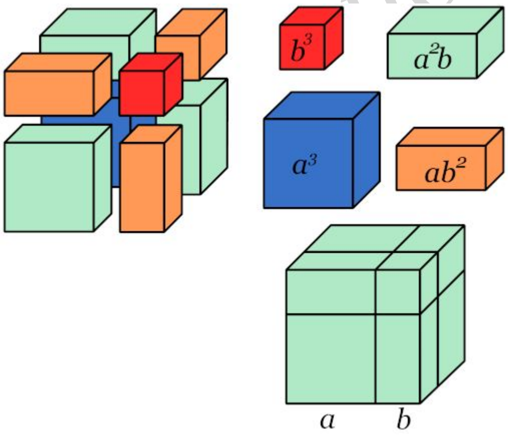


FIG. 6.2 – Visuel de l'identité binomiale au cube (source : Wikipedia, Auteur :Drini)

En cours de validation de l' anglais

Remarque

Nous pouvons très bien poser que $(a+(c+d))^2:=(a+b)^2$ où nous avons bien évidemment posé que $b:=c+d$ (nous faisons un "abstrait d'abstraction" ou plus couramment : un "changement de variable"). Et dès lors :

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \quad (6.1.34)$$

Nous pouvons remarquer ainsi qu'en toute généralité, pour calculer le développement de $(a+b)^n$, nous utilisons le développement de $(a+b)^{n-1}$, c'est-à-dire calculé avec la valeur précédente de n.

Nous pouvons également voir une sorte de motif émerger si nous rassemblons tout cela :

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1\\
&(a+b)^1 = 1a+1b\\
&(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2\\
&(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3\\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{6.1.35}
$$

Nous remarquons alors les propriétés suivantes pour a et b :

1. Les puissances de a décroissent de n à 0 ($a^0=1$, sdonc il n'est pas noté dans le dernier terme).
2. Les puissances de b croissent de 0 à n ($a^0=1$, , donc il n'est pas noté dans le premier terme).
3. Dans chaque terme, la somme des puissances de a et b est égale à n.
4. Les coefficients multiplicateurs devant chaque terme se calculent en faisant la somme des coefficients multiplicateurs de deux termes du développement obtenu avec la valeur précédente de n (voir la figure ci-dessous).

Les "coefficients binomiaux" peuvent alors être obtenus par construction du "triangle de Pascal" ci-dessous :

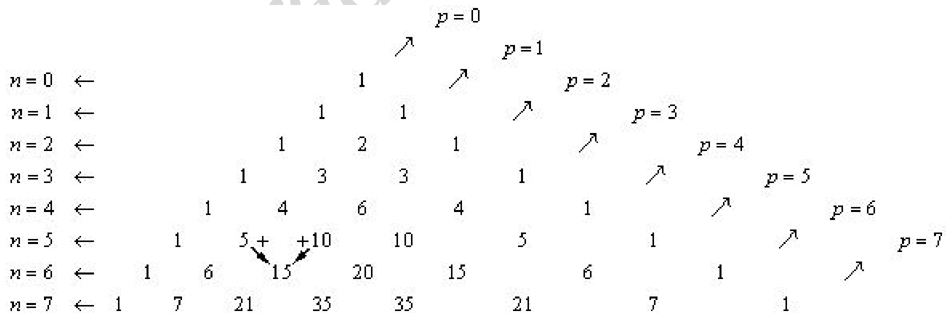


FIG. 6.3 – Triangle de Pascal

Où chaque élément est donné par (voir section Probabilités page 515) :

$$
C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}
\tag{6.1.36}
$$

avec $n, p \in \mathbb{N}^+$.

Théorème 6.1. Nous pouvons alors démontrer que : :

$$
\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_p^n a^{n-p} b^p}
\tag{6.1.37}
$$

En cours de traduction de l'anglais

ce qui constitue le fameux "binôme de Newton" (que nous réutiliserons dans de multiples autres chapitres et sections dans ce livre) aussi parfois nommé "théorème binomial".

Plus explicitement :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n} C_p^n a^{n-p}b^p = a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\ldots+b^n \tag{6.1.38}$$

aussi appelé "série binomiale".

Démonstration 6.1.1. Cette relation peut être prouvée tout simplement par induction en supposant vraie la relation précédente et en la calculant pour le rang 1 :

$$(a+b)^1=a+b=C_0^1a^1b^0+C_1^1a^0b^1=a+b \tag{6.1.39}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{p=0}^{n}C_p^n a^{n-p}b^p\\&=\sum_{p=0}^{n}C_p^n a^{n+1-p}b^p+\sum_{p=0}^{n}C_p^n a^{n-p}b^{p+1}\\&=C_0^n a^{n+1}+\sum_{p=1}^{n}C_p^n a^{n+1-p}b^p+\sum_{p=0}^{n-1}C_p^n a^{n-p}b^{p+1}+C_n^n b^{p+1}\\&=C_0^n a^{n+1}+\sum_{p=1}^{n}C_p^n a^{n+1-p}b^p+\sum_{p=1}^{n}C_{p-1}^n a^{n+1-p}b^p+C_n^n b^{p+1}\\&=C_0^n a^{n+1}+\sum_{p=1}^{n}\left(C_p^n+C_{p-1}^n\right)a^{n+1-p}b^p+C_n^n b^{p+1}\\&=C_0^n a^{n+1}+\sum_{p=1}^{n}C_p^{n+1}a^{n+1-p}b^p+C_n^n b^{p+1}\\&=\sum_{p=0}^{n+1}C_p^{n+1}a^{n+1-p}b^p\end{aligned} \tag{6.1.40}$$

La relation est vraie pour le rang $n+1$, elle est donc vraie pour tout n.

■ Q.E.D.

En appliquant deux fois la formule binomiale, on peut obtenir pour le plaisir la formule du trinôme suivante :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^n&=((a+b)+c)^n\\&=\sum_{k=0}^{n}C_k^n(a+b)^kc^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\left(\sum_{l=0}^{k}C_l^k a^lb^{k-l}\right)c^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}C_k^nC_l^k a^lb^{k-l}c^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{l!(k-l)!}a^lb^{k-l}c^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}a^lb^{k-l}c^{n-k}=\sum_{0\leq l,j,m\leq n,l+j+m=n}\frac{n!}{l!j!m!}a^lb^jc^m\end{aligned} \tag{6.1.41}$$

En cours de traduction de l'anglais

Concernant les identités remarquables à valeurs négatives, il n'est pas nécessaire de mémoriser l'emplacement du signe "$-$". Il suffit de faire un changement de variable et une fois le développement fait on remplace la variable en arrière (changement de variable inverse).

✍**Exemple :**

$$\begin{aligned}(a-b)^2 \underset{c:=-b}{=} (a+c)^2 = a^2+2ac+c^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 \\ = a^2-2ab+(-b)(-b) = a^2-2ab+b^2\end{aligned} \tag{6.1.42}$$

et ainsi de suite pour toute puissance finie n.

On peut bien sûr mélanger les genres (...) comme (exemple particulièrement célèbre) :

$$(a+b)(a-b) = a(a-b)+b(a-b) = a^2-b^2 \tag{6.1.43}$$

et quelques relations pratiques supplémentaires remarquables qui sont souvent utilisées dans les petites classes pour les exercices :

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ (x+a)(x+b) &= x^2+(a+b)x+ab \\ (x+a)(x-b) &= x^2+(a-b)x-ab \\ (x-a)(x-b) &= x^2-(a+b)x+ab \\ (ax+b)(cx+d) &= acx^2+(ad+bc)x+bd \end{aligned} \tag{6.1.44}$$

Remarque

Lorsque, du côté droit (sous une forme numérique simplifiée) l'enseignant demande à ses élèves comme exercice d'obtenir la factorisation de la gauche de l'égalité, il n'y a pas d'autre moyen que de procéder par tests successifs.

En cours de traduction de l' anglais

Pour information, nous obtenons également le développement célèbre suivant qui est immédiatement déductible de ce que nous avons vu auparavant :

$$(1+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_p^n 1^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} C_p^n b^p = 1+nb+\frac{n(n-1)}{2!}b^2+\ldots \tag{6.1.45}$$

qui est valable pour toute valeur de b et est nommée le "développement binomial".

Pour les petits valeurs de b, nous pourrions négliger tous les termes impliquant b^2 ou une puissance supérieure de b, nous donnant la relation d'approximation :

$$(1+b)^n \cong 1+nb \tag{6.1.46}$$

avec $b \ll 1$.

Bien sûr, il y a encore un beaucoup plus grand nombre de relations utiles (dont une partie découle d'une généralisation de celles présentées ci-dessus) que le lecteur découvrira par ses propres raisonnements et en fonction de sa pratique.

Remarque

Il est bien sûr possible de multiplier des polynômes entre eux et de distribuer les termes multiplicatifs. Inversement, il est souvent demandé aux élèves des petites classes de faire la procédure inverse ("factoriser" ou "décomposer" un polynôme) afin qu'ils s'habituent à la manipulation des identités remarquables. Décomposer en un produit de facteurs est une opération importante en mathématiques, puisqu'il est ainsi possible de réduire l'étude d'expressions compliquées à l'étude de plusieurs expressions plus simples.

Nous pouvons généraliser le théorème binomial (ce qui est utile quand nous avons besoin de prouver la continuité epsilon-delta de certaines fonctions puissance) tel que pour $|x|<1$ et un nombre réel α, nous ouvons encore écrire $(1+x)^\alpha$ comme série convergente :

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{+\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}x^k \tag{6.1.47}$$

où pour rappel :

$$\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}=\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{6.1.48}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{24}=-\frac{15}{16\cdot 24}\\ \begin{pmatrix}-n\\k\end{pmatrix}&=\frac{-n\cdot(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}=\\ &=(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}=(-1)^k\begin{pmatrix}n+k-1\\k\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.1.49}$$

Maintenant, pour utiliser cela efficacement quand $(a+b)^{-n}$, vous avez besoin d'au moins que l'un des deux a ou b ne soit pas nul et que $|a|\neq|b|$. Ensuite, nous choisissons celui avec la valeur absolue la plus élevée et le factorisons. Si c'est a, cela signifie écrire tout comme :

$$a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}=a^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-n\\k\end{pmatrix}\frac{b^k}{a^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}n+k-1\\k\end{pmatrix}(-b)^k a^{-k-n} \tag{6.1.50}$$

Cela peut même être étendu aux nombres complexes ($\mathbb{C}$) (toujours pour l'étude de la continuité des fonctions définies complexes) en utilisant la fonction Gamma d'Euler (voir section Calcul Intégral et Différentiel page ??) en utilisant le fait que (cependant elle n'est pas définie lorsque $x+1$ est égal à zéro ou à un entier négatif) :

$$\Gamma(x+1)=x! \tag{6.1.51}$$

Dès lors :

$$\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}=\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \tag{6.1.52}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.1.3 Polynômes

Définition (version naïve #165) : Nous appelons "polynôme algébrique $P(x)$" une fonction de degré $n \in \mathbb{N}$ qui s'écrit :

$$P_n(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \tag{6.1.53}$$

ou de façon plus condensée par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{6.1.54}$$

où le "facteur dominant" d'un polynôme est le coefficient du monôme de plus haut degré a_n et le "terme dominant" est simplement $a_n x^n$. Si $a_n = 1$ est égal à 1 nous parlons alors de "polynôme normalisé".

Si l'on considère chaque coefficient du polynôme comme la composante d'un vecteur, alors on peut manipuler les polynômes comme des espaces vectoriels notés $P_n(\mathbb{R})$ et de dimension $n+1$.

En cours de traduction vers l'anglais

Remarques

R1. L'indice n de $P(x)$ est la plupart du temps omis comme explicitement défini dans l'expression du polynôme lui-même.

R2. Le lecteur qui a lu la section de Théorie des Ensembles, se rappellera probablement que l'ensemble de tous les polynômes de degré n ou inférieur forme une structure d'espace vectoriel !

Nous supposerons sans preuve et évident (car nous sommes des ingénieurs ou physiciens mais pas des mathématiciens...) que si nous notons $\deg(P_n(x)) = n$ le degré d'un polynôme, et que $P_n(x)$ et $P_m(x)$ sont tous deux des polynômes, que alors :

$$\deg(P_n(x) + Q_m(x)) \leq \max(\deg(P_n(x)), \deg(Q_m(x))) \tag{6.1.55}$$

et :

$$\deg(P_n(x) \cdot Q_m(x)) = \deg(P_n(x)) + \deg(Q_m(x)) \tag{6.1.56}$$

Définition (version théorie des ensembles #166) : Soit k un anneau (voir section Théorie des Ensembles page 423) et $n \in \mathbb{N}^*$, "l'anneau polynomial" en n indéterminées (ou variables) $k[X_1, \ldots, X_n]$ est construit à partir d'un polynôme élémentaire, nommé le "monôme" de la forme :

$$\lambda X_1^{m_1} \ldots X_m^{m_n} \tag{6.1.57}$$

où $\lambda \in k$ est le "coefficient du monôme", $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers positifs non nuls et où $X_1^{m_1} \ldots X_m^{m_n}$ forment la "partie littérale du monôme". Ainsi, par construction, un polynôme est une somme d'un nombre fini de monômes nommés les "termes du polynôme".

Ainsi, le cas particulier courant utilisé dans les petites classes et présenté au début est $k[X]$, c'est-à-dire l'anneau de polynômes univariés à coefficients en k. En effet, la plupart du temps, les ingénieurs et étudiants travaillent avec des "anneaux de polynômes univariés à coefficient en $\mathbb{R}$" et notés $\mathbb{R}[X]$. Tout élément de $k[X]$ s'écrit donc :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \tag{6.1.58}$$

avec $a_i \in k$ (la majorité du temps $a_i \in \mathbb{R}$), $i = 0 \ldots n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Remarques

R1. Notez que les puissances de i sont toujours positives ou nulles dans $k[X]$! ! !

R2. Nous disons que deux polynômes sont "similaires" s'ils ont la même partie littérale.

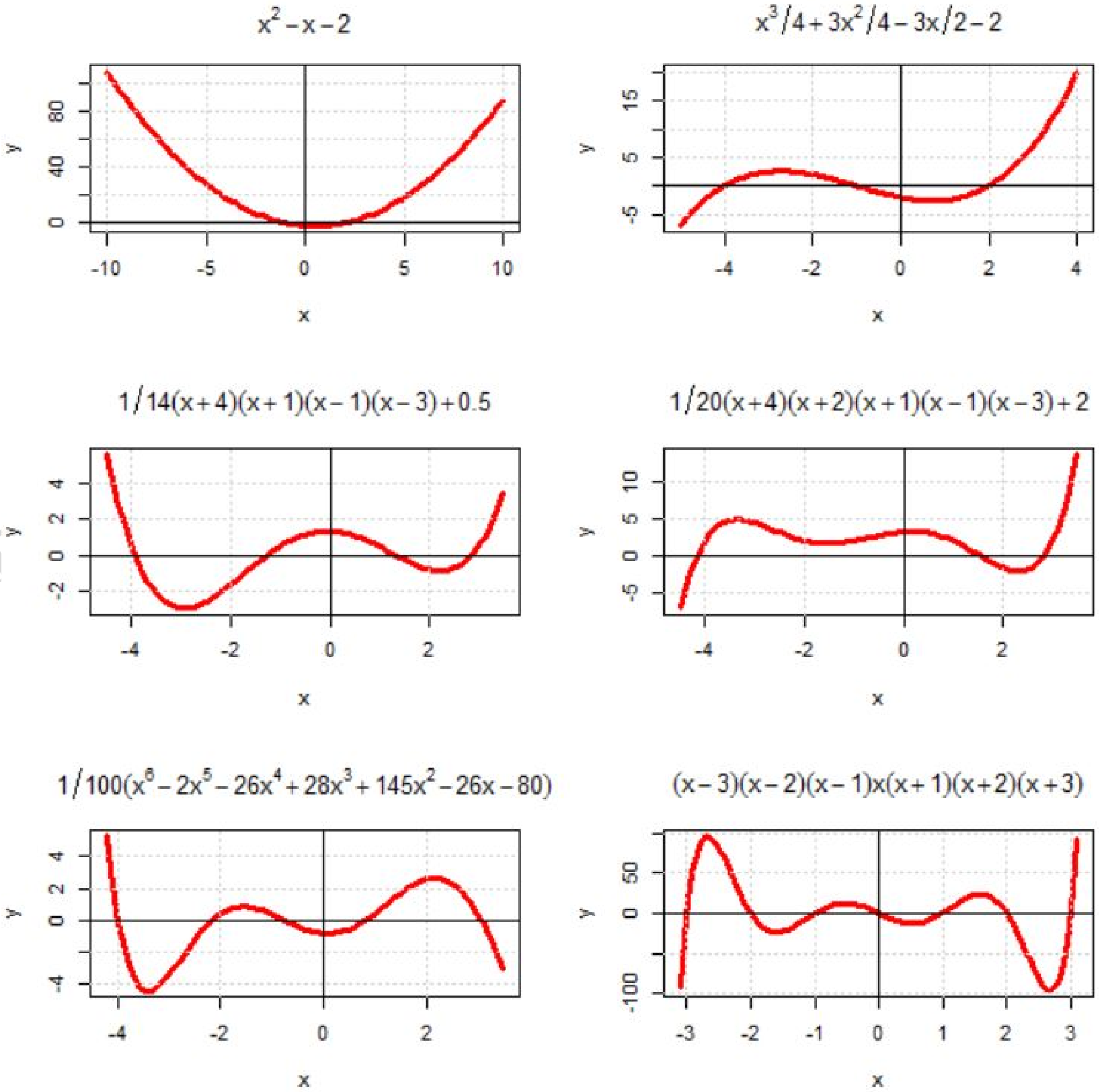


FIG. 6.4 – Quelques polynômes tracés avec R.3.2.1 (voir le livre compagnon sur R)

Le "comportement limite" d'une fonction décrit ce qui arrive à la fonction quand $x \to \pm\infty$. Le degré d'un polynôme et le signe de son coefficient directeur (ie dominant) dictent son comportement limite. En particulier :

- Si le degré d'un polynôme $f(x)$ est pair et que le coefficient directeur est positif, alors $f(x) \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$.
- Si $f(x)$ est un polynôme de degré pair avec un coefficient directeur négatif, alors $f(x) \to -\infty$ quand $x \to \pm\infty$.
- Si $f(x)$ est un polynôme de degré impair avec un coefficient directeur positif, alors $f(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$ et $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
- Si $f(x)$ est un polynôme de degré impair avec un coefficient directeur négatif, alors $f(x) \to +\infty$ quand $x \to -\infty$ et $f(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.

Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Degré du polynôme	**Coefficient directeur**	
	$+$	$-$
Pair	$f(x) \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$	$f(x) \to -\infty$ quand $x \to \pm\infty$
Impair	$f(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$	$f(x) \to +\infty$ quand $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$

TAB. 6.4 – **Comportement limite des polynômes**

Définition (#6.1.167) : Nous nommons "point tournant" un point à partir duquel le graphique change de direction de croissant à décroissant ou de décroissant à croissant (ou autrement dit : où les dérivées sont égales à zéro).

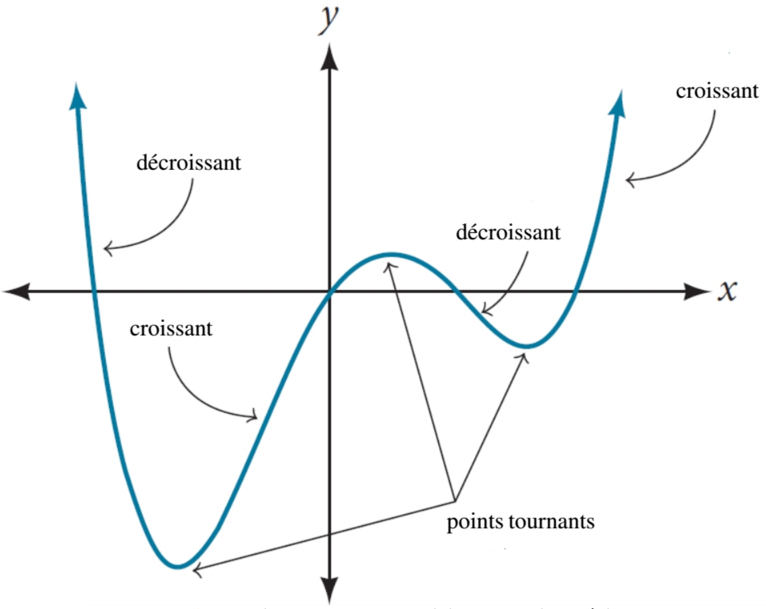


FIG. 6.5 – **Points tournants explicitement mis en évidence**

En cours de traduction de l'anglais

La fonction f ci-dessus est un polynôme de degré 4 et a 3 points tournants. Le nombre maximum de points de retournement d'une fonction polynomiale est toujours un de moins que le degré de la fonction.

Définition (#6.1.168) : Nous nommons "racine" ou "zéro d'un polynôme (univarié)", les valeurs x telles que "l'équation polynomiale" $P(x)=0$ est satisfaite à la condition qu'au moins un des a_n avec $n>0$ ne soit pas nul.

Si le polynôme est normalisé[1] et admet une ou plusieurs racines r_n nous pouvons alors évidemment le factoriser comme suit (nous le prouverons rigoureusement plus loin) :

$$P(x)=(x-r_n)(x-r_{n-1})\ldots(x-r_2)(x-r_1) \tag{6.1.59}$$

de sorte que lorsque x prend la valeur d'une des racines r_n, l'expression ci-dessus est zéro. C'est ce que l'on nomme par convention "factoriser un polynôme".

Si le polynôme n'est pas normalisé alors la factorisation sera évidemment donnée par :

$$P(x)=a_n(x-r_n)(x-r_{n-1})\ldots(x-r_2)(x-r_1) \tag{6.1.60}$$

Les identités algébriques sont des formes particulières de fonctions polynomiales. En effet, considérons une constante c et une variable x et :

$$(c+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_k^n c^k x^{n-k}=C_0^n c^0 x^n+C_1^n c^1 x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}^n c^{n-1} x^1+C_n^n c^n \tag{6.1.61}$$

On voit que si nous posons :

$$C_0^n c^0=a_n,\; C_1^n c^1=a_{n-1},\;\ldots,\; C_{n-1}^n c^{n-1}=a_1,\; C_n^n c^n=a_0 \tag{6.1.62}$$

nous retombons sur :

$$(c+x)^n=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x^1+a_0 \tag{6.1.63}$$

Définitions (#6.1.169) :

D1. Un polynôme à une indéterminée est nommé "polynôme univarié", un polynôme avec plus d'une indéterminée est nommé "polynôme multivarié". Un polynôme à deux indéterminées est nommé "polynôme bivarié".

Un exemple célèbre en mathématiques pures d'un polynôme multivarié donné à plusieurs reprises dans les cours de premier cycle universitaire est (certains lecteurs le reconnaîtront probablement...) :

$$x^n+y^n=z^n \tag{6.1.64}$$

D2. Dans le cas de polynômes à plus d'une indéterminée, un polynôme est dit "homogène de degré n si tous ses termes non nuls sont de degré n (l'exemple juste au-dessus est un tel polynôme !).

[1] En effet, si vous développez l'expression donnée, vous verrez que le facteur devant le terme d'ordre le plus élevé x^n est 1.

En cours de traduction de l'anglais

6.1.3.1 Relations générales entre racines et coefficients

Voyons maintenant une relation intéressante entre les racines d'un polynôme et ses coefficients.

Pour cela, considérons le polynôme suivant :

$$P=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_0 \tag{6.1.65}$$

Et désignons ses racines par $r_1,r_2,\ldots,r_n$ (n racines ne signifie pas nécessairement n racines distinctes...). Nous avons alors :

$$\begin{aligned}P&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_0\\&=a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_{n-1})(x-r_n)\end{aligned} \tag{6.1.66}$$

Nous en déduisons alors en développant la dernière égalité et en identifiant aux coefficients que :

$$\begin{aligned}r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}+r_n&=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\r_1r_2+r_1r_3+\ldots+\ldots+r_{n-1}r_n&=\frac{a_{n-2}}{a_n}\\r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\ldots+r_{n-2}r_{n-1}r_n&=-\frac{a_{n-3}}{a_n}\\&\ldots\\r_1r_2r_3r_4r_5r_6r_7r_8\ldots r_{n-1}r_n&=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}\end{aligned} \tag{6.1.67}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons le réécrire différemment en définissant les nombres $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ comme suit :

$$\begin{aligned}&\sigma_1=\sum_{i=1}^n r_i=r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{n-1}+r_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\&\sigma_2=\sum_{i<j}r_ir_j=r_1r_2+r_1r_3+\ldots+\ldots+r_{n-1}r_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}\\&\sigma_3=\sum_{i<j<k}r_ir_jr_k=r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\ldots+r_{n-2}r_{n-1}r_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n}\\&\ldots\\&\sigma_n=\prod_{i=1}^n r_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}\end{aligned} \tag{6.1.68}$$

Inversement si les $r_1,r_2,\ldots,r_n$ satisfont le système précédent, alors ce sont les racines d'un polynôme normalisé de la forme :

$$P=a_n\left(x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^n\sigma_n\right) \tag{6.1.69}$$

Remarquons que pour le fameux cas $n=2$ que nous avons trouvé :

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\sum_{i=1}^2 r_i=r_1+r_2=-\frac{a_1}{a_2}\\\sigma_2&=\sum_{i<j}r_ir_j=r_1r_2=\frac{a_0}{a_2}\end{aligned} \tag{6.1.70}$$

6.1.3.2 Multiplication de polynômes

Le produit des deux polynômes P (de degré n) et Q (de degré m) est trivialement donné par :

$$(PQ)(x) \equiv P(x)Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} \qquad (6.1.71)$$

Il n'y a pas grand chose à dire de plus concernant la multiplication des polynômes pour les besoins de ce livre.

6.1.3.3 Division Euclidienne de Polynômes

Plaçons nous à présent dans l'anneau $k[X]$. Si $P(x) \in k[X]$, nous notons $\deg(P)$ le degré du polynôme $P(X)$ à coefficients dans un anneau k (les réels ou les complexes... peu importe !)

Remarque

Par convention :

$$\deg(0) = -\infty \qquad (6.1.72)$$

Théorème 6.2. Soit :

$$u(X) = \sum_{i=0}^{k} u_i X^i, v(X) = \sum_{i=0}^{m} v_i X^i \in k[X] \qquad (6.1.73)$$

avec $k, m > 0$. Alors il existe deux polynômes uniques $q(X), r(X) \in k[X]$ tels que :

$$\deg(r) < \deg(v) = m \qquad (6.1.74)$$

et :

$$u(X) = q(X)v(X) + r(X) \qquad (6.1.75)$$

où $q(X)$ est le "polynôme quotient" et $r(X)$ est le "polynôme résiduel".

Démonstration 6.2.1. Si $u(X) = 0$ le résultat est évident. Supposons $u(X) \neq 0$ et prouvons l'existence par récurrence sur le degré k de $u(X)$.

Si $k = 0$ alors $q(X) = 0$ (puisque $m > 0$) et donc $r(X) = u(X)$ fera le travail.

Supposons maintenant ce résultat appliquable pour tout $k \leq n$... (cette supposition est totalement gratuite...) :

Soit $u(X)$ de degré $k = n+1$. Si $m > n+1$ alors $q(X) = 0$ et $r(X) = u(X)$ peuvent également faire le travail.

Sinon, si $m \leq n+1$ alors en écrivant (u_{n+1} est le $n+1$-ième coefficient du polynôme $u(X)$ et v_m le m-ième coefficient de $v(X)$) :

$$u(X) - \frac{u_{n+1}}{v_m} X^{n+1-m} v(X) \qquad (6.1.76)$$

En cours de traduction anglais

on réduit alors $u(X)$ à un polynôme de degré $\leq n$ puisque $v(X)$ est de degré m (et qu'il existe) !

Effectivement le terme :

$$\frac{u_{n+1}}{v_m}X^{n+1-m}v(X) \tag{6.1.77}$$

supprime (au moins) le terme de plus haut degré $u_{n+1}X^{n+1}$.

Par l'hypothèse d'induction, il existe $f(X)$ et $g(X)$ tels que :

$$u(X)-\frac{u_{n+1}}{v_m}X^{n+1-m}v(X)=f(X)v(X)+g(X) \tag{6.1.78}$$

avec $\deg(g)<m$. Donc après réorganisation :

$$u(X)=\left(\frac{u_{n+1}}{v_m}X^{n+1-m}v(X)+f(X)\right)v(X)+g(X) \tag{6.1.79}$$

et dès lors :

$$q(X)=\frac{u_{n+1}}{v_m}X^{n+1-m}v(X)+f(X) \qquad r(X)=g(X) \tag{6.1.80}$$

fait le travail !

Donc par récurrence on voit que la division euclidienne existe dans l'anneau polynomial $k[X]$

■ Q.E.D.

En … de traduction de l' anglais

Remarque

Cette preuve nous a permis dans la section de Théorie des Ensembles de montrer que cet anneau est "principal".

✍**Exemple :**

Nous ne verrons qu'un seul exemple car l'idée est toujours la même. On veut diviser x^3+x^2 par $x-1$, nous obtenons :

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & \cdot(-1) & x \quad -1 \\
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \; +2x \; +2 \\
\hline
 & 2x^2 & & & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\
\hline
 & & 2x & & \\
 & & -2x & +2 & \\
\hline
 & & & +1 &
\end{array} \tag{6.1.81}$$

6.1.3.4 Théorème de factorisation des polynômes

Nous allons maintenant prouver un théorème important qui est en fait illustré à l'origine (entre autres) par les identités remarquables que nous avons vues ci-dessus :

Théorème 6.3. Si un polynôme $P(X) \in k[\mathbb{K}]$ avec des coefficients dansn k de degré $n \geq 1$ a une racine $x = r$ dans l'anneau k, alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x-r)$ tel que :

$$P(x) = (x-r)Q(x) \tag{6.1.82}$$

où Q est un polynôme de degré $n-1$ (et peut donc être un simple monôme).

Autrement dit, "factoriser un polynôme", c'est l'écrire comme un produit de monômes (dans le cas général : de polynômes). Lorsqu'elle n'est pas seulement appliquée aux polynômes ou aussi simplement aux nombres, la factorisation est une opération qui transforme une somme en un produit !

Démonstration 6.3.1. L'idée est d'effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-r)$. D'après le théorème précédent, il existe un couple (Q, R) de polynômes tels que :

$$P(x) = (x-r)Q + R \tag{6.1.83}$$

et d'après le résultat du théorème précédent sur la division euclidienne :

$$\text{deg}(R) < \text{deg}(x-r) \tag{6.1.84}$$

Mais $\text{deg}(x-r) = 1$, donc $\text{deg}(R) = 0$ (ou $-\infty$ par convention). $R(x)$ est donc une fonction polynomiale constante. De plus, par hypothèse, r est une racine de $P(x)$. On a donc :

$$0 = P(r) = (r-r)Q(r) + R(r) \tag{6.1.85}$$

Donc $R(r) = 0$. Dès lors $R(x)$ est le polynôme zéro et le théorème est pratiquement prouvé. Il reste à prouver que $\text{deg}(Q) = n-1$, ce qui est une conséquence immédiate de la relation :

$$\text{deg}(P(x)) = \text{deg}(x-r) + \text{deg}(Q(x)) \tag{6.1.86}$$

Ainsi :

$$n = 1 + \text{deg}(Q) \tag{6.1.87}$$

■ Q.E.D.

À partir de cette propriété de factoriser un polynôme, nommé parfois "théorème de factorisation", on peut donner un avant-goût d'un théorème beaucoup plus important :

Théorème 6.4. Montrons que si on a une fonction polynomiale $P(X) \in k[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ avec des coefficients en k, alors elle a au plus un nombre fini n de racines (certaines pouvant être confondues) dans k.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.4.1. Premièrement, parce que $P(x)$ a un degré (ordre), $P(x)$ n'est pas une fonction polynomiale nulle. Alors, argumentons par l'absurde :

Si la fonction $P(x)$ a n racines avec $p > n$ (plus de racines que de degrés...), en notant ces racines $r_1, \ldots, r_p$, on a, par le théorème de factorisation précédent (appliqué p fois) :

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_p)Q(x) \quad (6.1.88)$$

où Q est un polynôme de degré :

$$n - p < 0 \quad (6.1.89)$$

Maintenant, puisque par définition un polynôme est un polynôme si et seulement si son degré (ordre) appartient à $\mathbb{N}$, le polynôme Q doit être le polynôme nul tel que :

$$Q(x) = 0 \quad (6.1.90)$$

Il s'ensuit que :

$$P(x) = 0 \quad (6.1.91)$$

Ceci contredit l'hypothèse initiale selon laquelle P n'est pas le polynôme zéro, d'où :

$$p \leq n \quad (6.1.92)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

6.1.3.5 Équation diophantienne

Si l'on généralise la notion de polynôme univarié à plusieurs variables telles que :

$$P = P(x, y, z) \quad (6.1.93)$$

alors on nomme "équation diophantienne" une équation de la forme :

$$\boxed{P(x, y, z) = 0} \quad (6.1.94)$$

où P est un polynôme à coefficients entiers (ou rationnels) dont on cherche les radicaux (racines) strictement dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$. Les équations diophantiennes conventionnelles sont par exemple :

- Les équations diophantiennes linéaires :

$$ax + by + c^{te} = 0 \quad (6.1.95)$$

- Les triplets pythagoriciens :

$$x^n + y^n = z^n \quad (6.1.96)$$

Pour la preuve générale de cette dernière, le lecteur devra attendre un peu le temps que les rédacteurs du présent livre aient le temps de comprendre la preuve traditionnelle avant de pouvoir la simplifier (...).

6.1.3.6 Polynômes et équations univarié du premier ordre

Étant donné la fonction linéaire :

$$P_1(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \tag{6.1.97}$$

Si $a \neq 0$ alors la première l'équation :

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0 \tag{6.1.98}$$

a une racine analytique simple donnée trivialement par :

$$r = -\frac{b}{a} \tag{6.1.99}$$

tel que $P_1(r) = 0$.

Ce polynôme est une "fonction affine" et si $b = 0$ nous appelons ce dernier une "fonction linéaire".

Remarques

R1. Si les coefficients du polynôme univarié de degré 1 sont tous tels que $a, b \in \mathbb{R}$ alors la racine appartient aussi à $\mathbb{R}$.

R2. Si un des coefficients du polynôme univarié de degré 1 appartient à $\mathbb{C}$ alors la racine appartient aussi à $\mathbb{C}$.

R3. Si les deux coefficients du polynôme univarié de degré 1 appartiennent à $\mathbb{C}$ alors la racine appartient aussi à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

R4. On dit que deux équations polynomiales sont "équivalents" si elles admettent les mêmes solutions.

Voici également quelques propriétés pour les polynômes univariés du premier ordre que nous donnons sans démonstration car elles nous semblent très très intuitives (sauf sur demande de lecteurs) :

P1. Si nous sommons (ou respectivement soustrayons) un même nombre à chaque membre de l'équatoin (à gauche du signe "=", et aussi à droite), on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation d'origine (et ce quelle que soit est son degré).

P2. Si nous multiplions (ou divisons respectivement) chaque membre d'une équation (à gauche du signe "=", et aussi à droite) par un même nombre non nul, nous obtenons une équation qui a les mêmes solutions que l'équation d'origine (et ce quel que soit son degré).

La méthode doit être suffisamment générale pour être appliquée à toutes les équations du même genre, être construite sur les quatre opérations arithmétique de base (addition, soustraction,

multiplication et division) et l'extraction de racines. On peut trouver les solutions (racines), d'une équation grâce à ses coefficients, en n'utilisant que les opérations précédentes (c'est-à-dire sous une "forme analytique"), on dit alors que le l'équation peut être résolue par "radicaux".

6.1.3.6.1 Résolution par référence circulaire

De nombreux cadres dans les petites, moyennes et entreprises internationales ne savent plus résoudre les équations linéaires du premier degré (et au-delà aussi bien sûr...). Je pense donc qu'il serait intéressant pour l'étudiant de voir comment procède la majorité des gens qui ne sont pas ou plus capables de résoudre de tels problèmes de niveau secondaire (c'est particulièrement intéressant quand vous savez qu'ils sont payés assez cher pour résoudre de tels "problèmes compliqués" selon employeur). La façon la plus simple de voir cela c'est d'apprendre comment je les voirs utiliser le tableur Microsoft Excel. En effet, considérons l'exemple suivant :

Une entreprise réalise un chiffre d'affaires (revenu) de $1'500$.- et doit payer $1'000$.- de frais fixes. Il a 40% d'impôt payable après déduction. L'entreprise souhaite faire un don (déductible d'impôt) tel que le montant de ce don représente 10% d'impôt après déduction.

Ceci s'écrit mathématiquement simplement si on note R le chiffre d'affaires, C les frais fixes, D le don, t le taux d'imposition :

$$D = 10\% \cdot (R - C - D)(1 - t) \tag{6.1.100}$$

Après quelques petits réarrangements triviaux, nous obtenons :

$$D = \frac{10\%(R - C)(1 - t)}{1 + 10\%(1 - t)} = \frac{10\%(1500 - 1000)}{1 + 10\%(1 - 40\%)} \cong 28.301 \tag{6.1.101}$$

Cela correspond bien à la taxe de 10% après déduction puisque :

$$(R - C - D)(1 - t) \cong 283.01.- \tag{6.1.102}$$

Et voici comment les (mauvais) cadres utilisent un tableur comme Microsoft Excel et « résolvent » cela (vous pouvez me faire confiance, je vois vraiment des gens faire cela en entreprise parce qu'ils ne sont plus capables de résoudre des problèmes niveau lycée sur papier). Ils écrivent d'abord dans le tableur (qui détecte automatiquement l'incohérence de l'utilisateur en l'indiquant par une flèche bleue pour mettre en évidence la "référence circulaire") :

	A	B
1	**Chiffre d'Affaire:**	1500
2	**Taxe:**	0.4
3	**Coûts:**	1000
4	**Dons:**	=10%*B5
5	**Profit après taxation:**	=(B1-B3-B4)*(1-B2)

FIG. 6.6 – Résoudre une équation simple par référence circulaire dans Microsoft Excel

Validé cela donne :

En cours de traduction de l'anglais

	A	B
1	Chiffre d'Affaire:	1500
2	Taxe:	0.4
3	Coûts:	1000
4	Dons:	0
5	Profit après taxation:	0

Pour résoudre cette équation, il faut activer dans les options du logiciel l'autorisation d'utiliser l'itération (la position de cette option dépend de la version du tableur).

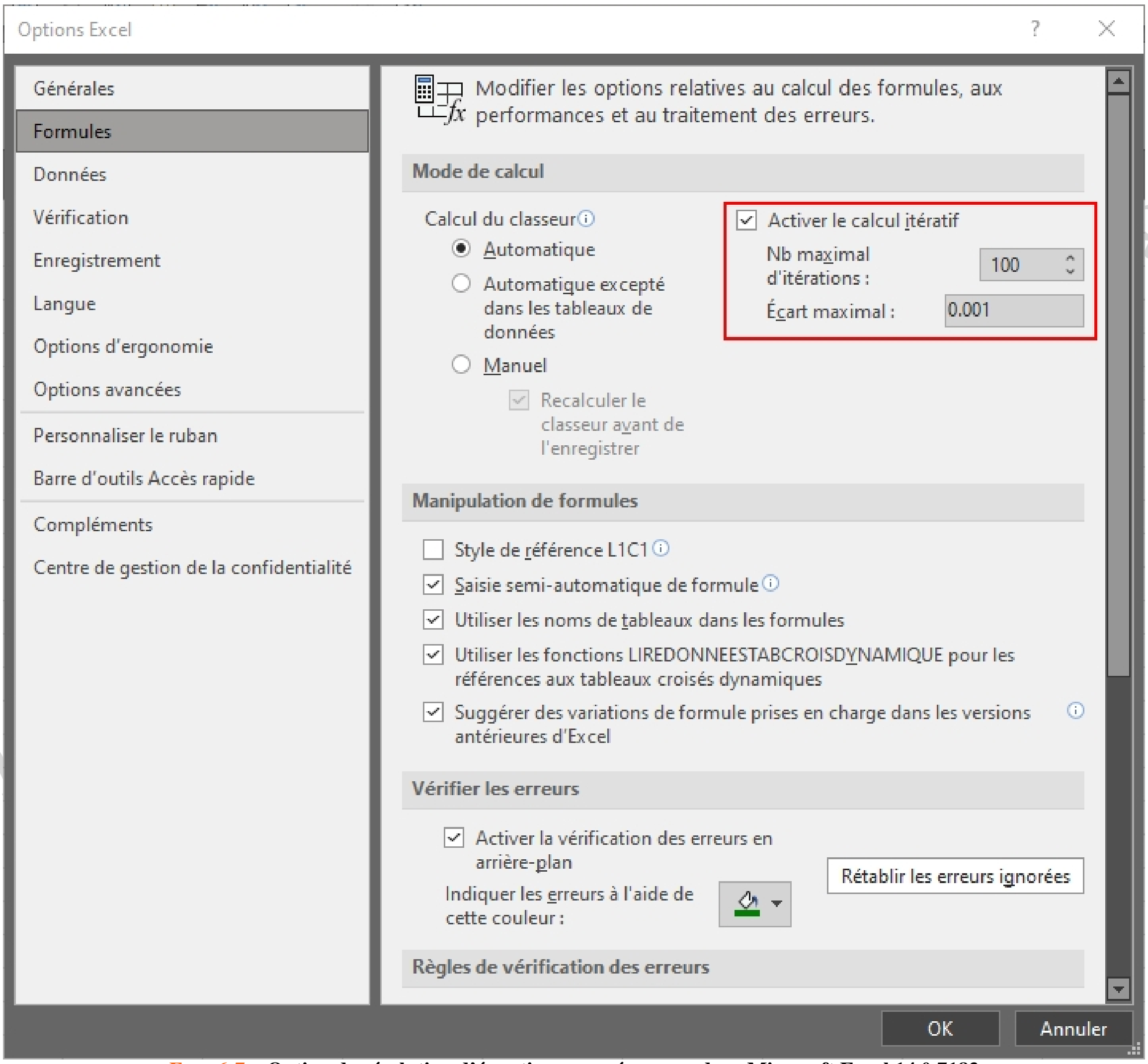


FIG. 6.7 – **Option de résolution d'équations par récurrenc dans Microsoft Excel 14.0.7183**

Ce qui donne alors :

	A	B
1	**Chiffre d'Affaire:**	1500
2	**Taxe:**	0.4
3	**Coûts:**	1000
4	**Dons:**	28.3019088
5	**Profit après taxation:**	283.018855

Donc, comme on peut le voir, c'est une façon assez peu efficace de résoudre un simple problème de niveau lycée (regrettable pour des gestionnaires ou analystes qui ont un MBA... !).

6.1.3.7 Polynômes et équations univarisé d'ordre deux

Soit le polynôme univarié suivant à coefficient dans $\mathbb{R}$ (trinôme du second degré) :

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \tag{6.1.103}$$

Si nous représentons ce polynôme univarié sur le plan, cela nous donne :

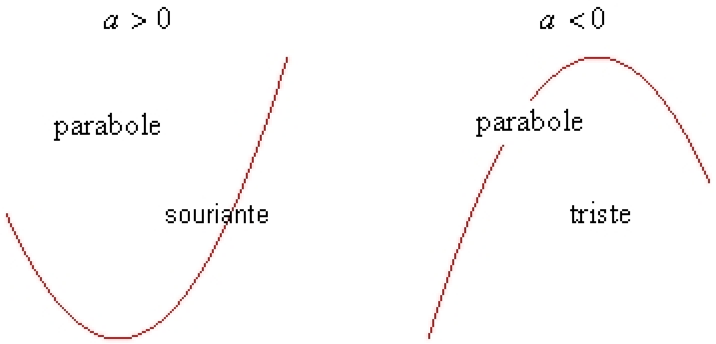


FIG. 6.8 – **Représentation des polynômes en fonction du signe du terme de degré** 2

Si on prend la dérivée de cette fonction (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1432) et qu'on cherche en quel point la dérivée est égale à zéro, on trouvera toujours l'optimum sur le point d'inflexion (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1436) de la parabole (qui correspond aussi à son axe de symétrie) :

En cours ... de l' anglais

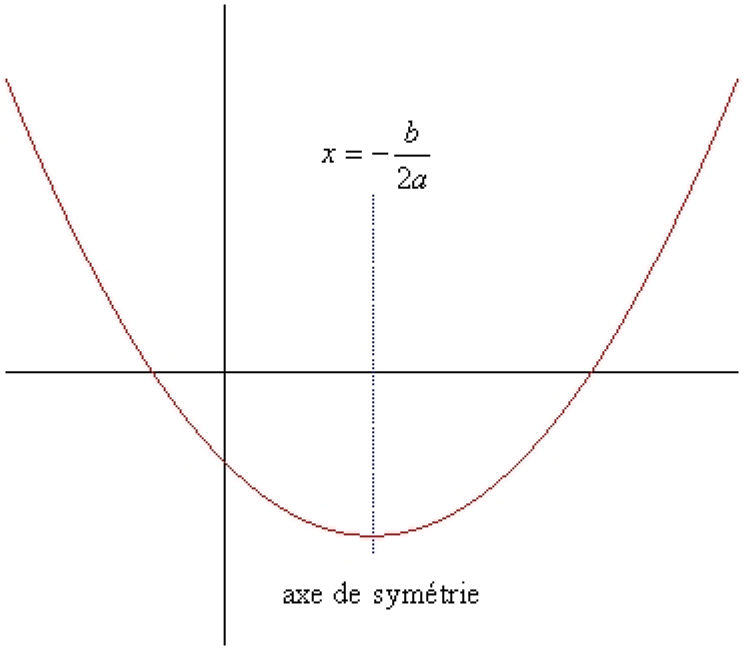


FIG. 6.9 – **Point d'inflexion de la tangente**

Si $a \neq 0$, nous avons alors :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{6.1.104}$$

Nous avons alors une "racine double" (ou "racine de multiplicité 2") que l'on note par :

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{6.1.105}$$

tel que $P(r_{1,2})=0$ et nous définissons un nouveau terme nommé parfois le "déterminant du polynôme" et le plus souvent le "discriminant du polynôme" :

$$\Delta=b^2-4ac \tag{6.1.106}$$

Finalement :

$$\boxed{r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}} \tag{6.1.107}$$

Si le polynôme univarié du second ordre en x a deux racines, nous pouvons alors le factoriser sous une forme irréductible (suivant le théorème de factorisation démontré précédemment) sous la forme suivante :

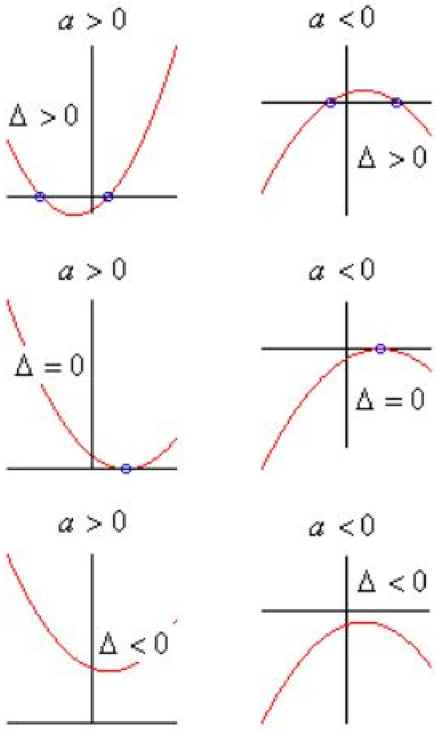
$$P(x)=a(x-r_1)(x-r_2) \tag{6.1.108}$$

Nous prouvons aussi facilement à partir de l'expression de la racine en faisant de l'algèbre simple les "relations de Viète" (sur demande des lecteurs nous pouvons détailler les développements nécessaires) :

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a} \qquad r_1r_2=\frac{c}{a} \tag{6.1.109}$$

En cours de traduction de l'anglais

Selon le signe de $2a$ et celui du discriminant Δ, nous avons :



En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

- Si $\Delta < 0$ notre polynôme n'a pas de racines réelles et ne peut pas être factorisé dans une multiplication de monômes avec des facteurs réels ($\mathbb{R}$) mais avec un facteur complexe ($\mathbb{C}$). Par conséquent (il est recommandé d'avoir lu d'abord la partie sur les Nombres Complexes à la page 241 dans la section Nombres de ce livre) :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\mathrm{i}^2(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = 0 \quad (6.1.110)$$

  et nous savons qu'on peut écrire n'importe quel nombre complexe sous une forme condensée (formule d'Euler) et comme les racines complexes d'un polynôme du second degré sont conjuguées (on connaît déjà ce jargon) nous avons :

$$r_{1,2} = re^{\pm(\varphi+2k\pi)} \quad (6.1.111)$$

  où (rappel) r est le module des racines complexes (module qui est égal pour les deux) et φ l'argument des racines complexes (égal en valeur absolue).

- Si $\Delta = 0$ l'équation polynomiale a alors une seule solution qui est évidemment :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad (6.1.112)$$

- Si $\Delta > 0$ l'équation polynomiale a alors deux solutions définies par les relations générales que nous avons déjà données plus haut :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(b^2-4ac)}}{2a} \quad (6.1.113)$$

A propos du cas complexe, prenons comme exemple le polynôme quadratique suivant :

$$x^2+1=0 \tag{6.1.114}$$

qui n'admet que deux racines complexes que sont i et $-$i. Dans le plan réel ce polynôme sera représenté avec Maple 4.00b par :

```
>plot(x^2+1,x=-5..5);
```

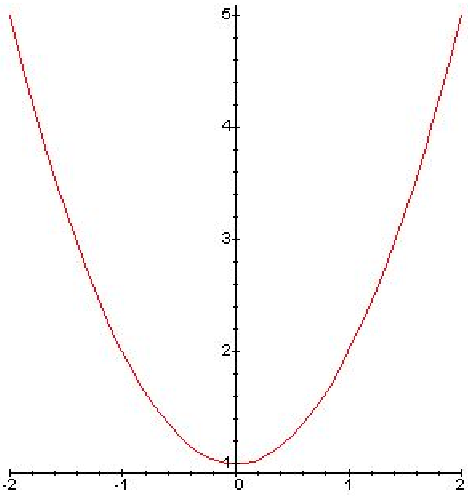


FIG. 6.10 – **Exemple de tracé d'un polynôme de degré 2 qui n'admet que des solutions complexes**

En cours de traduction de l'anglais

où l'on voit bien qu'il n'y a pas de solutions (zéros) réelles. En nous plaçant dans les complexe $\mathbb{C}$, nous avons par contre :

```
>plot3d(abs((re+I*im)^2+1),re=-2..2,im=0..2,view=[-2..2,-2..2,0..2],
orientation=[-130,70],contours=50,style=PATCHCONTOUR,axes=frame,
grid=[100,100],numpoints=10000);
```

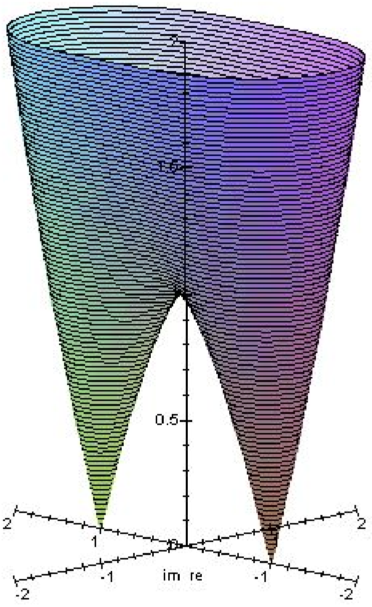


FIG. 6.11 – **Le même polynôme mais en jouant avec la représentation complexe**

où les deux zéros sont visibles sur l'axe imaginaire à -1 et $+1$. Évidemment quand c'est la première fois que l'on voit une fonction représentée sur une figure prenant en compte les valeurs complexes on essaie de trouver où est la parabole correspondante au cas purement réel. Pour ce faire, on coupe simplement la surface ci-dessus en deux sur l'axe imaginaire et on obtient alors :

```
>plot3d(abs((re+I*im)^2+1),re=-2..2,im=0..2,view=[-2..2,-2..2,0..2],
orientation=[-130,70],contours=50,style=PATCHCONTOUR,axes=frame,
grid=[100,100],numpoints=10000);
```

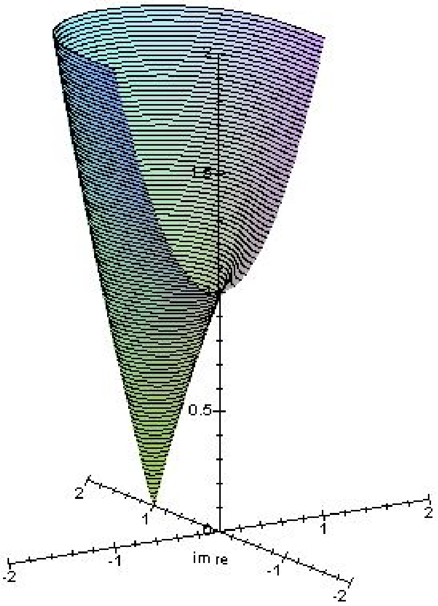


FIG. 6.12 – Un petit zoom sur le même polynôme

où l'on retrouve clairement notre parabole visible sur la surface découpée. On peut donc se demander si les nombres complexes sont une extension naturelle de notre espace conventionnel au-delà de nos sens physiques et de nos appareils de mesure communs... ?!

6.1.3.7.1 Équations Irrationnelles

Le praticien doit toujours prendre l'habitude de vérifier la solution dans l'équation d'origine pour être sûr de la validation du domaine de définition de la fonction. En effet, il existe des solutions à la résolution d'équations qui ne satisfont pas l'équation d'origine et c'est ce que l'on nomme des "solutions étrangères" et c'est typiquement le cas des équations irrationnelles.

Définition (#6.1.170) : Une "équation irrationnelle" est une équation où l'inconnue est sous un radical (c'est-à-dire dans le cas typique : sous une racine carrée).

En cours de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons l'équation suivante :

$$\sqrt{2+x}+4-\sqrt{10-3x}=0 \tag{6.1.115}$$

Pour le résoudre d'abord, nous pouvons redistribuer :

$$\sqrt{2+x}+4=\sqrt{10-3x} \tag{6.1.116}$$

Nous mettons le tout au carré :

$$2+x+8\sqrt{2+x}+16=10-3x \tag{6.1.117}$$

Nous simplifions un peu :

$$8\sqrt{2+x}=-8-4x \tag{6.1.118}$$

et encore :

$$2\sqrt{2+x}=-2-x \tag{6.1.119}$$

Nous mettons au carré une deuxième fois :

$$4(2+x)=4+4x+x^2 \tag{6.1.120}$$

Nous simplifions une dernière fois :

$$x^2=4 \tag{6.1.121}$$

Nous obtenons deux solutions triviales qui sont $x_1=-2$ et $x_2=2$. Mais seule la solution $x_1=-2$ satisfait l'équation proposée. En effet, si on met la première solution dans l'équation d'origine nous obtenons :

$$\sqrt{2+(-2)}+4-\sqrt{10-3\cdot(-2)}=\sqrt{0}+4-\sqrt{16}=4-4=0 \tag{6.1.122}$$

Mais si nous mettons la deuxième solution :

$$\sqrt{2+(2)}+4-\sqrt{10-3\cdot(2)}=\sqrt{4}+4-\sqrt{4}=2+4-2=4\neq 0 \tag{6.1.123}$$

6.1.3.7.2 Nombre d'or

Il existe un polynôme de degré deux dont la solution est fameuse de par le monde. Ce nombre est appelé la "nombre d'or" ou "divine proportion" et se retrouve en architecture, esthétique ou encore en phyllotaxie (c'est-à-dire dans la disposition des feuilles autour de la tige des plantes).

Ce nombre vaut :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots \quad (6.1.124)$$

Le nombre d'or est aussi un nombre algébrique (tout nombre complexe qui est une racine d'un polynôme univarié non nul avec des coefficients rationnels) et même un entier algébrique (nombre complexe qui est une racine d'un polynôme monique avec des coefficients dans $\mathbb{Z}$) car c'est la solution de :

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (6.1.125)$$

Historiquement, le lecteur doit savoir que deux quantités a et b sont dites « dans le ratio du nombre d'or φ » si leur rapport est le même que le rapport de leur somme à la plus grande des deux quantités :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \quad (6.1.126)$$

En cours de traduction de l'anglais

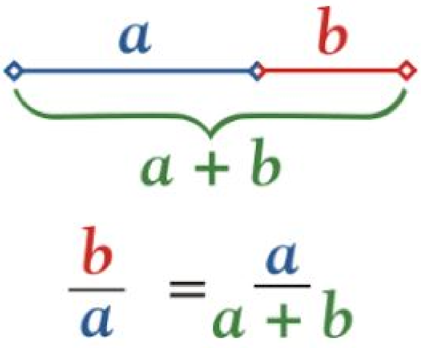


FIG. 6.13 – Illustration du nombre d'or

Une méthode pour trouver la valeur de φ consiste à commencer par la fraction de gauche. En simplifiant la fraction et en substituant dans $b/a = 1/\varphi$:

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad (6.1.127)$$

Dès lors :

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \quad (6.1.128)$$

Multipliant par φ donne :

$$\varphi + 1 = \varphi^2 \quad (6.1.129)$$

qui peut être réarrangé en :

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \tag{6.1.130}$$

En utilisant la formule quadratique, deux solutions sont obtenues :

$$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots \qquad \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6180339887\ldots \tag{6.1.131}$$

Parce que φ est le rapport entre des quantités positives, φ est nécessairement positif :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots \tag{6.1.132}$$

Introduisons maintenant une relation utile pour lorsque nous étudierons la fonction génératrice ordinaire (voir page 1763) relativement à la suite de Fibonacci. Rappelons que nous sommes partis de :

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \tag{6.1.133}$$

Nous avons alors :

$$-\frac{1}{\varphi} = 1 - \varphi = 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi_2 \tag{6.1.134}$$

C'est pourquoi $-1/\varphi$ est nommé le "conjugué du nombre d'or" !

6.1.3.8 Polynômes et équations univarisé d'ordre trois

Même s'il est rare de résoudre une telle chose en physique théorique ou en ingénierie, résoudre un polynôme univarié de degré 3 est assez récréatif et montre un bon exemple d'un raisonnement mathématique déjà mature (nous avons ces développements grâce à Scipione del Ferro et Jérôme Cardan mathématiciens du XVIe siècle...).

Étant donnée l'équation :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{6.1.135}$$

avec les coefficients tous dans $\mathbb{R}$ (pour commencer...). Dans un premier temps, le lecteur pourra voir que les raisonnements que nous avons appliqués pour les polynômes de degrés inférieurs à 3 coincent rapidement (excepté pour des cas particuliers simplistes bien sûr...).

Nous allons contourner le problème par des changements de variables subtils mais tout à fait justifiés.

Ainsi, rien ne nous empêche de poser que :

$$\exists X \Rightarrow x = X - \frac{b}{3a} \tag{6.1.136}$$

En cours de traduction de l'anglais

et qu'en divisant le polynôme de degré 3 par a d'écrire :

$$\begin{aligned} & x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0 \\ & \left(X-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(X-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(X-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0 \\ & \left(X^3-\cancel{3}X^2\frac{b}{\cancel{3}a}+\cancel{3}X\frac{b^2}{3^{\cancel{2}}a^2}-\frac{b^3}{27a^3}\right)+\frac{b}{a}\left(X^2-2X\frac{b}{3a}+\frac{b^2}{9a^2}\right)+\frac{c}{a}\left(X-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0 \end{aligned} \tag{6.1.137}$$

En regroupant les termes de même ordre :

$$\begin{aligned} & X^3+X^2\left(-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\right)+X\left(\frac{b^2}{3a^2}-2\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)+\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^3}{9a^3}-\frac{cb}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)=0 \\ & X^3+X\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)+\left(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{cb}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)=0 \end{aligned} \tag{6.1.138}$$

et posons (rien, mais alors absolument rien ne nous l'interdit) :

$$\begin{cases} (1) & x=X-\dfrac{b}{3a} \\ (2) & p=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{3a^2} \\ (3) & q=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{cb}{3a^2}+\dfrac{d}{a} \end{cases} \tag{6.1.139}$$

(6.1.140)

où (1) est connu si et seulement si X est connu et où p,q sont de toute façon connus.

Le polynôme[2] :

$$P=X^3+pX+q=0 \tag{6.1.141}$$

étant de degré impair, il admet - comme permet de le constater tout tracé visuel d'un tel polynôme à coefficients réels - au moins une racine réelle, appelée "racine certaine" (vérifiez ! Vous verrez bien par une représentation graphique d'un polynôme de degré impair que cela est trivial).

Le membre de gauche de cette équation est un "trinôme monique" appelé aussi la "cubique déprimée", car le terme quadratique a un coefficient 0.

Maintenant, nous faisons un autre changement de variable (nous en avons tout à fait le droit) subtil :

$$X=u+v \tag{6.1.142}$$

en imposant la condition que u,v doivent être tels que $3uv=-p$ (rien ne nous empêche d'imposer une telle contrainte) et nous avons alors :

$$P=X^3+pX+q=(u+v)^3-3uv(u+v)+q=0\Rightarrow u^3+v^3=-q \tag{6.1.143}$$

[2] La première fois que j'ai dû résoudre un tel polynôme, c'était pour calculer la nutation d'un gyroscope et la deuxième fois c'était pour le calcul de l'horizon d'un Trou Noir basé sur la métrique de Schwarzschild avec une constante cosmologique qui était en unités naturelles : $\dfrac{\Lambda}{3}r^3-r-2M=0$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors nous avons :

$$\begin{cases} (1') & u^3+v^3=-q \\ (2') & u^3v^3=\dfrac{-p^3}{27} \Leftrightarrow 3uv=-p \end{cases} \quad (6.1.144)$$

(6.1.145)

Nous pouvons très bien faire une analogie entre les deux relations (1') et (2') et les relations de Viète que nous avions obtenues pour le polynôme de degré 2 qui rappelons-le étaient :

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1r_2=\frac{c}{a} \quad (6.1.146)$$

excepté que nous avons maintenant (nous adoptons une autre notation pour ces racines intermédiaires) :

$$z_1=u^3 \qquad z_2=v^3 \quad (6.1.147)$$

à la différence que nous avons maintenant (nous adoptons une autre notation pour ces racines intermédiaires) :

$$Z^2+qZ-\frac{p^3}{27}=0 \quad (6.1.148)$$

dont z_1, $z_2$sont les racines. Cette dernière équation a pour discriminant :

$$\Delta=q^2+4\frac{p^3}{27} \quad (6.1.149)$$

Prenons maintenant le cas par cas :

1. Si , l'$\Delta>0$ en Z admet deux solutions z_1, z_2 dont la somme va nous donner indirectement la valeur de X puisque par définition $X=u+v$ et $z_1=u^3$ et $z_2=v^3$. Nous voyons que nous avons tous les ingrédients pour trouver la première racine de l'équation initiale qui sera la racine certaine (ou "zéro certain"). Ainsi :

$$X_1=u+v=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad (6.1.150)$$

comme $\Delta>0$ et que les racines supérieures sont cubiques nous avons nécessairement $X_1\in\mathbb{R}$ si tous les coefficients de l'équation originale sont bien dans $\mathbb{R}$.

2. Si $\Delta=0$, nous le savons, l'équation en Z admet une racine double et puisque le discriminant comporte une puissance carrée de q cela signifie nécessairement que p est négatif.

   Le polynôme P admet donc lui aussi une racine double et de même pour l'équation d'origine. Nous avons vu par ailleurs que pour un polynôme du second degré si le discriminant est nul les racines sont :

$$r_{1,2}=-\frac{b}{2a} \quad (6.1.151)$$

   alors par analogie :

$$X_1=X_2=u+v=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}=2\sqrt[3]{z_{1,2}}=2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} \quad (6.1.152)$$

En cours de traduction de l' anglais

3. Si $\Delta < 0$ nous devons à nouveau utiliser les nombres complexes comme nous l'avons fait lors de notre étude du polynôme de degré 2. Ainsi, nous savons que l'équation en Z admet deux solutions complexes telles que :

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \tag{6.1.153}$$

et à nouveau comme les racines sont conjuguées nous pouvons écrire sous la forme condensée :

$$z_{1,2} = re^{\pm \mathrm{i}(\varphi + 2k\pi)} \tag{6.1.154}$$

et comme :

$$X = u + v = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} \tag{6.1.155}$$

nous avons donc :

$$\begin{aligned} X_k &= u_k + v_k = u_k + \bar{u}_k = \sqrt[3]{re^{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)}} + \sqrt[3]{re^{-\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)}} \\ &= \sqrt[3]{r}e^{\dfrac{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)}{3}} + \sqrt[3]{r}e^{-\dfrac{\mathrm{i}(\varphi+2k\pi)}{3}} \end{aligned} \tag{6.1.156}$$

Comme u_k, v_k sont conjugués, nous avons nécessairement.

le l' anglais

✍**Exemple :**

Considérons l'équation :

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \tag{6.1.157}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} x &= X - \frac{b}{3a} = X \\ p &= \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{c}{a} = -15 \\ q &= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = -4 \end{aligned} \tag{6.1.158}$$

En

et alors :

$$\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27} = 16 + 4\frac{-3375}{27} = -484 < 0 \tag{6.1.159}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{-3375}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{-3375}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121.25}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121.25}} = \sqrt[3]{2 + \mathrm{i}\sqrt{121.25}} + \sqrt[3]{2 - \mathrm{i}\sqrt{121.25}} = 4 \end{aligned} \tag{6.1.160}$$

Les polynômes de degré trois sont donc bien résolubles par radicaux !

Remarquez aussi une autre approche intéressante due à Viète ! On recommence à partir de :

$$X^3+pX+q=0 \tag{6.1.161}$$

et posons $X=u\cos(\theta)$. L'idée est de choisir u pour faire coïncider l'équation précédente avec l'identité trigonométrique suivante :

$$4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)-\cos(3\theta)=0 \tag{6.1.162}$$

Avant de continuer, démontrons cette identité en utilisant les identités trigonométriques prouvées dans la section Trigonométrie :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta)&=\cos(2\theta+\theta)=\cos(2\theta)\cos(\theta)-\sin(2\theta)\sin(\theta)\\&=(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))\cos(\theta)-2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)\\&=\cos^3(\theta)-\sin^2(\theta)\cos(\theta)-2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\&=\cos(\theta)(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)-2\sin^2(\theta))=\cos(\theta)(\cos^2(\theta)-3\sin^2(\theta))\\&=\cos^3(\theta)-3\sin^2(\theta)\cos(\theta)=\cos^3(\theta)-3(1-\cos^2(\theta))\cos(\theta)\\&=\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)+3\cos^3(\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\end{aligned} \tag{6.1.163}$$

En fait, en choisissant $u=2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ et en divisant l'équation par $\dfrac{u^3}{4}$ nous obtenons :

$$4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)-\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}=0 \tag{6.1.164}$$

En comparant avec l'identité ci-dessus, nous obtenons :

$$\cos(3\theta)=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}} \tag{6.1.165}$$

et donc les racines de l'équation cubique déprimée sont :

$$X_k=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)-\frac{2\pi k}{3}\right)\quad \text{pour}\quad k=0,1,2 \tag{6.1.166}$$

6.1.3.9 Polynômes et équations univarisé d'ordre quatre

L'équation polynomiale univariée à résoudre ici est :

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \tag{6.1.167}$$

avec $a\neq 0$.

Remarque

Nous devons cette méthode de résolution à l'italien Ludovico Ferrari mathématicien italien du 16ème siècle également.

En cours de traduction de l'anglais

Quitte à diviser par a nous avons :

$$x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'=0 \tag{6.1.168}$$

Puis, en posant :

$$x=y-\frac{b'}{4} \tag{6.1.169}$$

l'équation se réduit :

$$\begin{aligned}
&\left(y'-\frac{b'}{4}\right)^4+b'\left(y'-\frac{b'}{4}\right)^3+c'\left(y'-\frac{b'}{4}\right)^2+d'\left(y'-\frac{b'}{4}\right)+e'\\
&=\left(y^4-4y^3\frac{b'}{4}+6y^2\frac{b'^2}{4^2}-4y\frac{b'^3}{4^3}+\frac{b'^4}{4^4}\right)+b'\left(y^3-3y^3\frac{b'}{4}+3y\frac{b'^2}{4^2}-\frac{b'^3}{4^3}\right)\\
&+c'\left(y^2-2y\frac{b'}{4}+\frac{b'^2}{4^2}\right)+d'\left(y-\frac{b'}{4}\right)+e'\\
&=y^4+(b'-b')y^3+\left(\frac{3}{4}b'^2+c'+\frac{3}{8}b'^2\right)y^2+\left(\frac{3}{16}b'^3-\frac{1}{2}c'b'-\frac{1}{16}b'^3+d'\right)y\\
&+\left(\frac{b'^4}{256}-\frac{1}{4}d'b'-\frac{1}{64}b'^4+\frac{1}{16}c'b'^2+e'\right)
\end{aligned} \tag{6.1.170}$$

En cours de traduction de l'anglais

où nous voyons que le coefficient devant le y^3 s'annule. Ainsi, tout polynôme du type :

$$P(x)=x^4+bx^3+cx^2+dx+1e \tag{6.1.171}$$

peut être écrit sous la forme suivante :

$$y^4+c''y^2+d''y+e''=0 \tag{6.1.172}$$

En posant :

$$x=y-\frac{b'}{4} \tag{6.1.173}$$

$$c''=\frac{3}{4}b'^2+c'+\frac{3}{8}b'^2 \tag{6.1.174}$$

$$d''=\frac{3}{16}b'^3-\frac{1}{2}c'b'-\frac{1}{16}b'^3+d' \tag{6.1.175}$$

$$e''=\frac{b'^4}{256}-\frac{1}{4}d'b'-\frac{1}{64}b'^4+\frac{1}{16}c'b'^2+e' \tag{6.1.176}$$

Remarque

Si $d''=0$, l'équation à résoudre est en réalité une "équation bicarrée". Le changement de variable permet alors de se ramener à une équation polynomiale du deuxième degré (ce que nous savons facilement résoudre).

Nous introduisons maintenant un paramètre t (que nous choisirons judicieusement par la suite) et nous réécrivons l'équation polynomiale sous la forme suivante :

$$(x^2+t)^2-\left[(2t-c'')x^2-d''x+(t^2-e'')\right]=0 \tag{6.1.177}$$

Remarque

Si le lecteur développe et distribue tous les termes de la relation précédente il retombera bien évidemment sur $x^4+c''x^2+d''x+e''=0$.

L'idée sous-jacente est d'essayer de s'assurer que la partie entre crochets de l'expression précédente peut être écrite sous la forme d'un carré :

$$(2t-c'')x^2-d''x+(t^2-e'')=(x-\lambda)^2 \tag{6.1.178}$$

Car dans ce cas, en utilisant :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \tag{6.1.179}$$

Notre équation polynomiale peut alors s'écrire :

$$(x^2+t)^2-(x-\lambda)^2=\left((x^2+t)+(x-\lambda)\right)\left((x^2+t)-(x-\lambda)\right)=0 \tag{6.1.180}$$

et nous n'aurions qu'à résoudre deux équations polynomiales du second degré (ce que nous savons déjà faire).

Mais pour que nous puissions écrire :

$$(2t-c'')x^2-d''x+(t^2-e'')=(x-\lambda)^2 \tag{6.1.181}$$

l'expression du second degré à gauche de l'égalité ne doit avoir qu'une seule racine. Mais nous avons vu dans notre étude des équations polynomiales du second degré cela signifiait puisque le discriminant est nul :

$$\Delta=b^2-4ac=0 \tag{6.1.182}$$

et que la racine était alors donnée par :

$$x=-\frac{b}{2a} \tag{6.1.183}$$

Ce qui correspond dans notre cas à :

$$\Delta=d''^2-4(2t-c'')(t^2-e'')=0 \tag{6.1.184}$$

et donc que :

$$4(2t-c'')(t^2-e'')=d''^2 \tag{6.1.185}$$

avec :

$$\lambda=-\frac{-d''}{2(2t-c'')}=\frac{d''}{4t-2c''} \tag{6.1.186}$$

Donc finalement, si t est tel que $4(2t-c'')(t^2-e'')=d''^2$, alors nous avons :

$$(2t-c'')x^2-d''x+(t^2-e'')=(2t-c'')(x-\lambda)(x-\lambda)=(2t-c'')\left(x-\frac{d''}{4t-2c''}\right)^2 \tag{6.1.187}$$

En cours de traduction de l'anglais

puisque le théorème fondamental des polynômes nous donne pour un polynôme du deuxième degré n'ayant qu'une seule racine :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) = a(x - r_1)^2 \tag{6.1.188}$$

Pour conclure, il suffit de voir que trouver un nombre t vérifiant la relation :

$$4(2t - c'')(t^2 - e'') = d''^2 \tag{6.1.189}$$

est un problème de degré 3 que nous savons déjà résoudre par la méthode de Cardan.

De telles méthodes générales n'existent plus pour les degrés égaux ou supérieurs à 5 comme nous le verrons à l'aide de la théorie de Galois (voir section Algèbre Ensembliste page 1426).

6.1.3.10 Polynômes trigonométriques

Définition (#6.1.171) : Nous appelons "polynôme trigonométrique" de degré N toute somme finie du type :

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \tag{6.1.190}$$

où $c_n \in \mathbb{C}$.

Un polynôme trigonométrique peut aussi être écrit en utilisant les fonctions trigonométriques usuelles grâce aux transformations suivantes :

$$S_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-in\theta} \tag{6.1.191}$$

Soit en utilisant la formule d'Euler (voir section Nombres page 249) :

$$S_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)) + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(\cos(n\theta) - \mathrm{i}\sin(n\theta)) \tag{6.1.192}$$

Ce que nous pouvons réécrire aussi sous la forme :

$$S_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{N}(c_n + c_{-n})\cos(n\theta) + \sum_{n+1}^{N} \mathrm{i}(c_n - c_{-n})\sin(n\theta) \tag{6.1.193}$$

En posant alors :

$$a_0 = 2c_0 \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \tag{6.1.194}$$

Il vient :

$$S_N(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\theta) \tag{6.1.195}$$

En cours de traduction de l'anglais

En ingénierie, cette dernière relation est souvent notée :

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N} a_n \cos(n2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n2\pi f_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (6.1.196)$$

où f_0 est appelé "fréquence fondamentale".

Nous verrons longuement dans le chapitre des Suites Et Séries comment utiliser ces polynômes dans le cadre de l'étude des séries de Fourier.

6.1.3.11 Pôlynomes Cyclotomiques

Définition (#6.1.172) : Si n est un entier naturel (appartenant donc à $\mathbb{N}$) et x un nombre complexe, nous appelons "polynôme cyclotomique" ce que nous notons traditionnellement et que nous définissons comme étant le produit de tous les monômes :

$$(x-\alpha) \quad (6.1.197)$$

où α est une racine primitive n-ème de l'unité de $\mathbb{C}$. En d'autres termes :

$$\Phi_n = (x-\alpha_0)(x-\alpha_2)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1}) \quad (6.1.198)$$

Pour rappel une racine n-ème de l'unité (parfois appelée "nombre de De Moivre") est un nombre complexe dont la puissance n-ème vaut 1.

Ainsi, l'ensemble des racines n-èmes de l'unité est l'ensemble :

$$G_n = \{x \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad x^n = 1\} \quad (6.1.199)$$

qui est un groupe cyclique (voir section de Théorie des Ensebmles et aussi la section d'Algèbre Ensembliste page 1398).

Nous appelons alors "racine primitive n-ème de l'unité" ou "R.P.N." tout élément de ce groupe l'engendrant.

Les éléments de G_n sont donc du type :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (6.1.200)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous écrivons alors l'ensemble des G_n sous la forme :

$$G_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0,\ldots,n-1\}\right\} \quad (6.1.201)$$

Un petit exemple de polynôme cyclotomique (plus d'exemples seront donnés plus bas) :

$$\Phi_4(x) = (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})(x-1)(x+1) = x^4 - 1 \quad (6.1.202)$$

avec :

$$G_4 = \left\{e^{\frac{2\mathrm{i}0\pi}{4}} = 1, e^{\frac{2\mathrm{i}1\pi}{4}} = 1, e^{\frac{2\mathrm{i}2\pi}{4}} = -1, e^{\frac{2\mathrm{i}3\pi}{4}} = -\mathrm{i}\right\} \quad (6.1.203)$$

En cours de traduction de l'anglais

qui sont donc les racines quatrièmes de l'unité (autrement dit chacun de ces nombres mis à la puissance 4 donne 1). Elles forment le groupe et celui-ci ne peut-être engendré que par i et $-\mathrm{i}$ (générateur du groupe selon ce qui a été vu dans le chapitre de Théorie des Ensembles).

Donc un polynôme cyclotomique est le produit de facteurs qui s'écrit :

$$\Phi_n(x) = \prod_n \left(x - e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) \tag{6.1.204}$$

avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Nous verrons avec les exemples ci-dessous que si n est pair alors :

$$\Phi_n(x) = x^n - 1 = \prod_n \left(x - e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) \tag{6.1.205}$$

et si n est impair :

$$\Phi_n(x) = 1 + x + x^2 + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \prod_n \left(x - e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) \tag{6.1.206}$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Pour n jusqu'à 30, les polynômes cyclotomiques sont :

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(x)&=x-1\\
\Phi_2(x)&=x+1\\
\Phi_3(x)&=x^2+x+1\\
\Phi_4(x)&=x^2+1\\
\Phi_5(x)&=x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_6(x)&=x^2-x+1\\
\Phi_7(x)&=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_8(x)&=x^4+1\\
\Phi_9(x)&=x^6+x^3+1\\
\Phi_{10}(x)&=x^4-x^3+x^2-x+1\\
\Phi_{11}(x)&=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_{12}(x)&=x^4-x^2+1\\
\Phi_{13}(x)&=x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_{14}(x)&=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1\\
\Phi_{15}(x)&=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1\\
\Phi_{16}(x)&=x^8+1\\
\Phi_{17}(x)&=x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5\\
&\quad+x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_{18}(x)&=x^6-x^3+1\\
\Phi_{19}(x)&=x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7\\
&\quad+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_{20}(x)&=x^8-x^6+x^4-x^2+1\\
\Phi_{21}(x)&=x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1\\
\Phi_{22}(x)&=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1\\
\Phi_{23}(x)&=x^{22}+x^{21}+x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}\\
&\quad+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_{24}(x)&=x^8-x^4+1\\
\Phi_{25}(x)&=x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1\\
\Phi_{26}(x)&=x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1\\
\Phi_{27}(x)&=x^{18}+x^9+1\\
\Phi_{28}(x)&=x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1\\
\Phi_{29}(x)&=x^{28}+x^{27}+x^{26}+x^{25}+x^{24}+x^{23}+x^{22}+x^{21}+x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}\\
&\quad+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\
\Phi_{30}(x)&=x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1
\end{aligned}
\tag{6.1.207}
$$

6.1.3.12 Polynômes de Legendre

Définition (#6.1.173) : Les polynômes de Legendre sont définis par (il est fortement recommandé de lire les sections de Calcul Différentiel et Intégral page 1432 et aussi d'Analyse Fonctionnelle 2144 avant de poursuivre) :

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n \tag{6.1.208}$$

où P_n est donc un polynôme de degré n. Nous retrouverons ces polynômes dans la résolution d'équations différentielles en physique (propagation de la chaleur, physique quantique, chimie quantique, etc.). Nous retrouvons plus souvent l'écriture équivalente triviale :

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \tag{6.1.209}$$

Nous nous concentrerons ici uniquement et uniquement sur les propriétés qui sont utilisées actuellement dans les autres sections sur la Physique de ce livre ! ! !

Démontrons que selon la définition du produit scalaire fonctionnel (voir sections d'Analyse Fonctionelle page 2358 et Calcul Vectoriel 1798) que les polynômes de Legendre sont orthogonaux. C'est une propriété très importante pour notre étude de la Chimie Quantique (voir page **??**) plus tard !

Démonstration 6.4.2. Soit P un polynôme de degré $\leq n-1$. Il suffit de montrer que $\langle P_n|P\rangle=0$, c'est-à-dire que P_n est orthogonal à l'espace des polynômes de degré inférieur à n. Nous avons en effet :

$$\langle P_n|P\rangle=\int_{-1}^{1}P_n(x)P(x)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^nP(x)\mathrm{d}x \tag{6.1.210}$$

en intégrant par parties nous obtenons :

$$\begin{aligned}\langle P_n|P\rangle&=\underbrace{\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(1-x^2)^nP(x)\Bigg|_{-1}^{1}}_{=0}-\frac{(-1)^n}{n!2^n}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(1-x^2)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{(-1)^n}{n!2^n}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(1-x^2)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.1.211}$$

Attention ! ! ! Pour le terme nul ci-dessus, seulement le terme $(1-x^2)^n$ y est dérivé. Donc puisque x est au carré, quelque soit la dérivée la valeur sera toujours la même. Ce qui justifie que le terme soit nul.

En continuant de la sorte nous obtenons après n intégrations par parties :

$$\langle P_n|P\rangle=-\frac{(-1)^n}{n!2^n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\underbrace{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}P(x)}_{=0}\mathrm{d}x=0 \tag{6.1.212}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le terme dérivé est nul puisque le polynôme dérivé est de degré n-1 $n-1$.

■ Q.E.D.

Voici quelques propriétés utiles pour le chapitre de Chimie Quantique des polynômes de Legendre :

P1. Nous avons $P_n(1)=1$:

Démonstration 6.4.3.

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((1+x)^n(1-x)^n) \quad (6.1.213)$$

et en utilisant la règle de différenciation de Leibniz pour les produits (voir section de Calcul Différentiel et Intégral page 1461) nous avons :

$$\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((1+x)^n(1-x)^n)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{n!}{(n-j)!}(1+x)^{n-j}\frac{(-1)^{n-j}n!}{j!}(1-x)^j \quad (6.1.214)$$

Dès lors :

$$P_n(1)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}(-1)^n n!=1 \quad (6.1.215)$$

■ Q.E.D.

P2. Nous avons $P_n(-x)=P_n(-x)$ si n est pair :

Démonstration 6.4.4. Si n est pair :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n \quad (6.1.216)$$

est une fonction pair et dès lors :

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n \quad (6.1.217)$$

est pair.

■ Q.E.D.

P3. Nous avons $P_n(-x)=-P_n(x)$ si n est impair :

Démonstration 6.4.5. Si n est impair :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n \quad (6.1.218)$$

est une fonction impair et dès lors :

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n \quad (6.1.219)$$

est impair.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Théorème 6.5. Nous allons à présent démontrer la validité de la relation de récurrence suivante pour les P_n (relations que nous utiliserons en physique) :

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{6.1.220}$$

pour $n \geq 1$.

Démonstration 6.5.1. $xP_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$, il existe dès lors des $a_j \in \mathbb{R}$ tel que ce polynôme peut s'exprimer comme combinaison linéaire de la famille de polynômes constituant la base orthonormale (base qui permet donc d'engendrer $xP_n(x)$) :

$$xP_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j P_j \tag{6.1.221}$$

nous pouvons dès lors écrire :

$$\langle xP_n|P_k\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{n+1} a_j P_j \middle| P_k \right\rangle = \sum_{j=0}^{n+1} a_j \langle P_j|P_k\rangle = a_k\|P_k\|^2 \tag{6.1.222}$$

mais nous choisissons $k \leq n-2$ (parce que est dès lors xP_k est de degré $n-1$) :

$$\langle xP_n|P_k\rangle = \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_k(x)\mathrm{d}x = \langle P_n|xP_k\rangle = 0 \tag{6.1.223}$$

Dès lors :

$$a_k\|P_k\|^2 = 0 \tag{6.1.224}$$

c'est-à-dire que nous devons avoir $a_k = 0$. Il en suit que :

$$xP_n = a_{n+1}P_{n+1} + a_nP_n + a_{n-1}P_{n-1} \tag{6.1.225}$$

Par les propriétés des polynômes de Legendre vues précédemment, nous pouvons écrire les égalités :

$$xP_n(x), x = 1: \qquad 1 = a_{n+1} + a_n + a_{n-1} \tag{6.1.226}$$

et :

$$xP_n(x), x = -1: \qquad 1 = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} \tag{6.1.227}$$

dès lors :

$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 = a_{n+1} + a_{n-1} \tag{6.1.228}$$

Le coefficient dominant de $P_n$est défini (rappelons-le) par le coefficient du monôme du plus grand degré. Ainsi, il est donné par :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^n \Rightarrow P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{2n} \\
&\Rightarrow P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(2nx^{2n-1}) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^{n-n}}{\mathrm{d}x^{n-n}}(2n(2n-1)\ldots x^{2n-n}) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!2^n}(2n(2n-1)\ldots(2n-(n-1))x^n) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}x^n
\end{aligned} \tag{6.1.229}$$

Donc :

$$\mathrm{dom}(P_n(x)) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \tag{6.1.230}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le lecteur vérifiera au besoin pour un n donné que :

$$2n(2n-1)\ldots(n+1)=\frac{(2n)!}{n!} \tag{6.1.231}$$

La relation :

$$xP_n = a_{n+1}P_{n+1}+a_nP_n+a_{n-1}P_{n-1} \tag{6.1.232}$$

que nous avons obtenu ci-dessus nous impose que le coefficient dominant du polynôme de la combinaison linéaire soit égal au coefficient dominant du polynôme xP_n (nous avons éliminé le $(-1)^n$ qui se simplifie) :

$$\cancel{(-1)^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}=a_{n+1}\cancel{(-1)^{n+2}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2 2^{n+1}} \tag{6.1.233}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$a_{n+1}=\frac{(2n)!(n+1)!^2 2^{n+1}}{(n!)^2 2^n(2n+2)!}=\frac{(n+1)\cancel{(n+1)}2}{(2n+1)\cancel{(2n+2)}}=\frac{n+1}{2n+1} \tag{6.1.234}$$

et ce qui donne finalement facilement :

$$a_{n-1}=\frac{n}{2n+1} \tag{6.1.235}$$

La relation :

$$xP_n = a_{n+1}P_{n+1}+a_nP_n+a_{n-1}P_{n-1} \tag{6.1.236}$$

devient dès lors :

$$(2n+1)xP_n=(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1} \tag{6.1.237}$$

■ Q.E.D.

Voici les six premiers polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned} P_0(x)&=1\\ P_1(x)&=x\\ P_2(x)&=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\\ P_3(x)&=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\\ P_4(x)&=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}\\ &\ldots \end{aligned} \tag{6.1.238}$$

Les graphiques de ces polynômes (jusqu'à $n=5$) sont présentés ci-dessous :

En cours de traduction de l' anglais

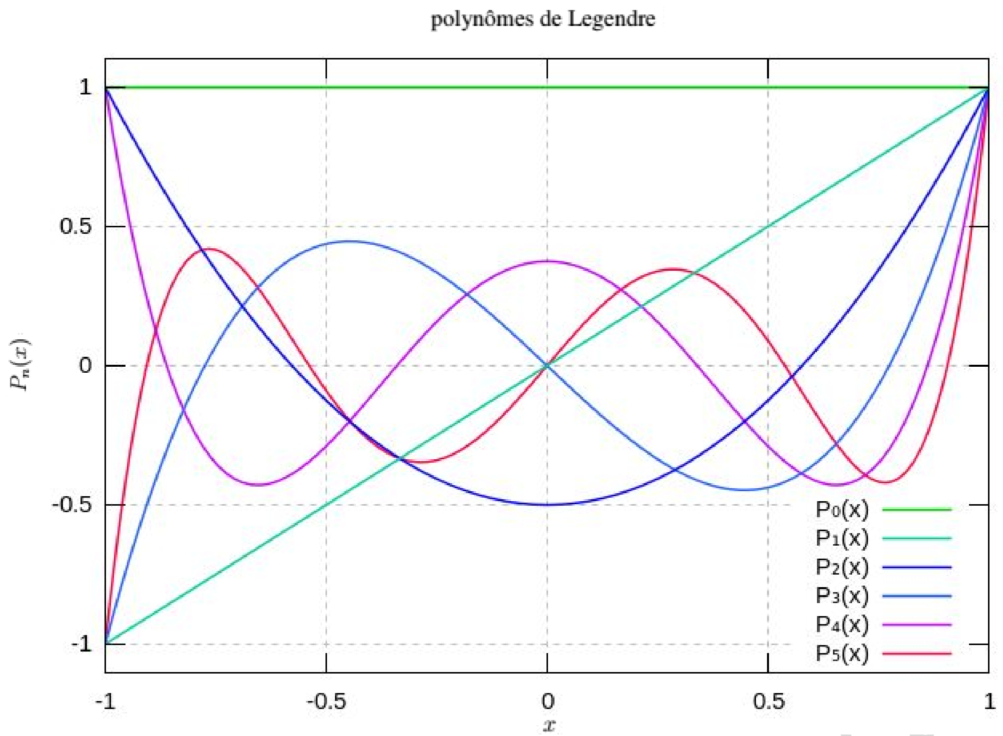


FIG. 6.14 – Cinq premiers polynômes de Legendre (source : Wikipédia)

En cours de traduction de l'anglais

6.1.3.13 Polynômes de Laguerre

Avant d'aborder les mathématiques des polynômes de Laguerre, le lecteur doit savoir que la grande majorité du texte ci-dessous est un simple copier/coller du contenu de l'excellent manuel [13]. Il est d'ailleurs fortement recommandé de lire les sections de Calcul Différentiel et Intégral à la page 1432 et aussi d'Analyse Fonctionnelle à la page ?? avant de continuer !

Définition (#6.1.174) : "L'équation différentielle ordinaire de Laguerre" (qui dérive de l'équation différentielle partielle radiale de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène[3] comme nous le prouverons dans la section de Chimie quantique à la page ??) est donnée par :

$$xy''(x)+(1-x)y'(x)+\lambda y(x)=0 \tag{6.1.239}$$

Cette équation n'a de solutions non singulières que si n est un entier non négatif.

Dérivons une solution en utilisant la méthode de Frobenius (voir section Suites et Séries page 1753) ! Pour cela nous supposons d'abord que la solution y est donnée sous la forme :

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} \tag{6.1.240}$$

[3]Les polynômes de Laguerre apparaissent en mécanique quantique, dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron. Ils décrivent également les fonctions statiques de Wigner des systèmes oscillants en mécanique quantique dans l'espace des phases. Ils entrent en outre dans la mécanique quantique du potentiel de Morse et de l'oscillateur harmonique isotrope 3D.

avec ses deux premières dérivées :

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} \quad (6.1.241)$$

et :

$$y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2} \quad (6.1.242)$$

En substituant ces expressions dans l'équation différentielle donnée, on obtient :

$$x\sum_{n=0}^{+\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2} + (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} = 0 \quad (6.1.243)$$

En multipliant les facteurs par les sommations correspondantes, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n x^{r+n} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} = 0 \quad (6.1.244)$$

Maintenant, nous ajustons l'indice des deux premières sommations pour tels que les x aient l'exposant $r+n$:

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} (r+n+1)(r+n) a_{n+1} x^{r+n} + \sum_{n=-1}^{+\infty} (r+n+1) a_{n+1} x^{r+n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n x^{r+n} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} = 0 \quad (6.1.245)$$

Nous évaluons quelques termes pour que toutes les sommations commencent à l'indice $n=0$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0x^{r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n+1)(r+n) a_{n+1} x^{r+n} + ra_0x^{r-1} \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n+1) a_{n+1} x^{r+n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n x^{r+n} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{r+n} = 0 \end{aligned} \quad (6.1.246)$$

En combinant les termes, nous avons :

$$[r(r-1)+r]a_0x^r + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{[(r+n+1)(r+n)+(r+n+1)]a_{n+1} - (r+n-\lambda)a_n\right\} x^{r+n} = 0 \quad (6.1.247)$$

qui donne, après simplification :

$$r^2a_0x^r + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(r+n+1)^2 a_{n+1} - (r+n-\lambda)a_n\right] x^{r+n} = 0 \quad (6.1.248)$$

En égalant les coefficients des deux côtés, on obtient :

$$\begin{cases} r^2a_0 = 0 \\ (r+n+1)^2 a_{n+1} - (r+n-\lambda)a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (6.1.249)$$

En cours de traduction de l'anglais

En divisant la dernière équation par $r+n+1 \neq 0$ et en décalant les indices, on obtient "l'équation de récurrence" :

$$(r+n)^2 a_n - (r+n-1-\lambda)a_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.1.250}$$

Puisque $a_0 \neq 0$, nous obtenons "l'équation indicatrice" de l'équation initiale :

$$r^2 = 0 \tag{6.1.251}$$

ayant pour racines $r_{1,2} = 0$.

La relation de récurrence peut s'écrire :

$$a_n = \frac{(r+n-1-\lambda)a_{n-1}}{(r+n)^2} = \frac{(n-1-\lambda)a_{n-1}}{n^2} \tag{6.1.252}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
a_0 &:= 1\\
a_1 &= \frac{-\lambda \cdot a_0}{1^2} = \frac{-\lambda \cdot 1}{1} = -\lambda\\
a_2 &= \frac{(1-\lambda)\cdot(-\lambda)}{4} = \frac{-\lambda+\lambda^2}{4} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2^2}\\
a_3 &= \frac{(2-\lambda)\cdot(-\lambda+\lambda^2)}{9\cdot 4} = \frac{(2-\lambda)\cdot\lambda(\lambda-1)}{2^2\cdot 3^2} = \frac{-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2^2\cdot 3^2}\\
a_4 &= \frac{-\lambda(3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)}{4^2\cdot 3^2\cdot 2^2} = \frac{\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)}{4^2\cdot 3^2\cdot 2^2}
\end{aligned} \tag{6.1.253}$$

Par conséquent, en choisissant $a_0 = 1$, la solution $y = y_1$ est égale à :

$$\begin{aligned}
y_1 = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 1 + \frac{-\lambda}{1^2}x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{1^2\cdot 2^2}x^2 + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)}{1^2\ldots 2^2\ldots 3^2}x^3\\
&+\cdots+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}+\cdots\\
&= 1-\lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2^2}x^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2^2\cdot 3^2}x^3 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}x^4+\ldots
\end{aligned} \tag{6.1.254}$$

On voit que cette somme est finie car quelle que soit la valeur de λ à un moment donné tout facteur aura $(\lambda-\ldots)$ égal à zéro. Donc, tous les termes s'annuleront. Ainsi la solution y_1 a un nombre fini de termes et est un polymonial !

Pour $\lambda = n$, cette solution devient :

$$\begin{aligned}
y(t) &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}x^3 + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}x^4 - \ldots\\
&= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \ldots\\
&= 10x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots
\end{aligned} \tag{6.1.255}$$

En cours de traduction de l'anglais

On voit que cette solution est polynomiale si $\lambda = n$. Revenons maintenant à :

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2^2}x^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2^2\cdot 3^2}x^3 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}x^4 + \ldots \\ &= 1 - \frac{\lambda(\lambda-1)!}{1^2(\lambda-1)!}x^1 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)!}{1^2 2^2(\lambda-2)!}x^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)!}{1^2 2^2 3^2(\lambda-3)!}x^3 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)!}{1^2 2^2 3^2 4^2(\lambda-4)!}x^4 + \ldots \\ &= 1 - \frac{\lambda!}{(1!)^2(\lambda-1)!}x^1 + \frac{\lambda!}{(2!)^2(\lambda-2)!}x^2 - \frac{\lambda!}{(3!)^2(\lambda-3)!}x^3 + \frac{\lambda!}{(4!)^2(\lambda-4)!}x^4 + \ldots \end{aligned} \tag{6.1.256}$$

Cette dernière relation nous amène à définir le polynôme de Laguerre comme :

$$L_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(-1)^\lambda n!}{(\lambda!)^2(n-\lambda)!}x^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda}\frac{(-x)^\lambda}{\lambda!} \tag{6.1.257}$$

Cette relation se retrouve souvent dans les livres sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n n!\right] \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m n! x^m}{(n-m)(m!)^2} = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^{n-s} n! x^{n-s}}{((n-s)!)^2 s!} \end{aligned} \tag{6.1.258}$$

On peut alors construire le tableau suivant :

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x+1$
2	$\frac{1}{2}(x^2-4x+2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720)$
...	...
n	$\frac{1}{n!}((-x)^n+n^2(-x)^{n-1}+\ldots+n(n!)(-x)+n!)$

TAB. 6.5 – **Liste de quelques polynômes de Laguerre**

Et donnons quelques tracés de ces polynômes de Laguerre :

En cours de traduction de l'anglais

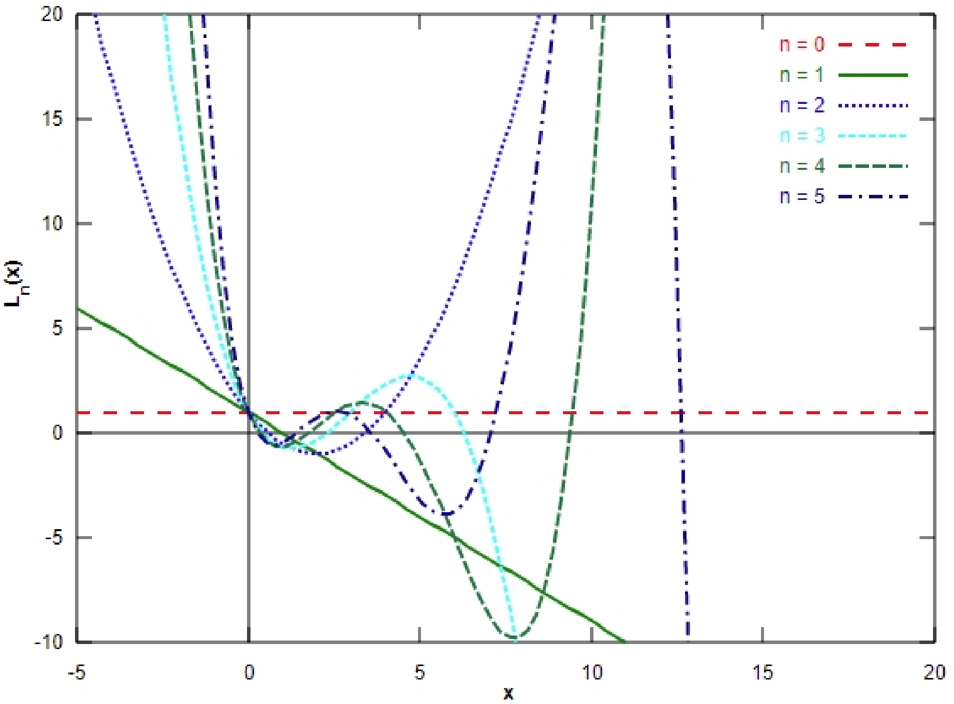


FIG. 6.15 – Tracé des six premiers polynômes de Laguerre (source : Wikipédia)

Maintenant, nous pouvons facilement prouver que :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right) \qquad (\text{integral } n) \tag{6.1.259}$$

nommé "formule de Rodrigues'" pour les polynômes de Laguerre (il y a différentes manières de l'exprimer et différentes versions également selon le type de polynôme de Laguerre auquel nous avons affaire !).

Si on utilise la représentation explicite des polynômes de Laguerre :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{(-x)^k}{k!} \tag{6.1.260}$$

alors le résultat découle facilement de la règle de différenciation de Leibniz pour les produits :

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \tag{6.1.261}$$

Soit $f(x) = x^n$ et $g(x) = e^{-x}$. Alors $f^{(k)}(x) = x^{n-k}n!/(n-k)!$ et $g^{(n-k)}(x) = (-1)^{n-k}e^{-x}$. Maintenant, si nous le nettoyons et refaisons la somme dans l'ordre inverse, c'est-à-dire de $k \rightarrow n-k$ nous retombons sur la formule de Rodrigues ci-dessus.

Montrons maintenant que la fonction génératrice fonctionnelle (voir section Suites et Séries page ??) des polynômes de Laguerre est donnée par :

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n, \quad |t| < 1 \tag{6.1.262}$$

En cours de traduction de l'anglais

La preuve courte est donnée par (on utilise simplement la série de Maclaurin de e^z où $z = -xt/(1-t)$) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{x^k t^n}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (xt)^k}{k!(1-t)^k} = \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{(-xt)}{1-t}\right)^k \\ &= \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}\end{aligned} \tag{6.1.263}$$

En différenciant la fonction génératrice ci-dessus par rapport à x et t, nous obtenons les deux relations de récurrence pour les polynômes de Laguerre comme suit :

Pour dériver la première relation de récurrence, nous partons de :

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} \tag{6.1.264}$$

On différencie les deux côtés par rapport à t pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} e^{\frac{-xt}{1-t}} - \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} \frac{x}{(1-t)^2} \tag{6.1.265}$$

$$= \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n - \frac{x}{(1-t)^2} L_n(x)t^n \tag{6.1.266}$$

En multipliant les deux membres par $(1-t)^2$ et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} nL_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nL_n(x)t^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \\ &- \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^{n+1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\end{aligned} \tag{6.1.267}$$

Nous égalisons maintenant les coefficients de t^n des deux côtés dans la relation ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{aligned}(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x) \\ \Rightarrow \quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\end{aligned} \tag{6.1.268}$$

Pour obtenir la deuxième relation de récursivité, nous repartons de la fonction génératrice :

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \tag{6.1.269}$$

Nous différencions maintenant les deux côtés de l'égalité ci-dessus par rapport à x pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L'_n(x)t^n = \frac{1}{1-t} \cdot e^{-\frac{xt}{1-t}} \left[\frac{-t}{1-t}\right] \tag{6.1.270}$$

En cours de traduction de l' anglais

en utilisant la fonction génératrice cette dernière peut être réécrite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L'_n(x)t^n = \frac{-t}{1-t}\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \tag{6.1.271}$$

Dès lors :

$$\begin{gathered}(1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} L'_n(x)t^n = -t\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\\ \sum_{n=0}^{+\infty} L'_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} L'_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^{n+1}\end{gathered} \tag{6.1.272}$$

En égalisant les coefficients t^n des deux côtés de ce qui précède nous donne :

$$\begin{gathered}L'_n(x) - L'_{n-1}(x) = -L_{n-1}(x)\\ \Rightarrow L'_{n-1}(x) = L'_n(x) + L_{n-1}(x)\end{gathered} \tag{6.1.273}$$

Dès lors :

$$L'_n(x) = L'_{n+1}(x) + L_n(x) \tag{6.1.274}$$

et après réarrangement :

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x) \tag{6.1.275}$$

De de la première relation de récurrence :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \tag{6.1.276}$$

Nous différencions ce qui précède par rapport à x pour obtenir :

$$(n+1)L'_{n+1}(x) = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x) - nL'_{n-1}(x) \tag{6.1.277}$$

En substituant les valeurs de $L'_{n-1}(x)$ et $L'_{n+1}(x)$ dérivées plus tôt dans la relation précédente, nous obtenons :

$$(n+1)\left[L'_n(x) - L_n(x)\right] = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x) - n\left[L'_n(x) + L_{n-1}(x)\right] \tag{6.1.278}$$

et après simplification on obtient la seconde relation de récurrence :

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x) \tag{6.1.279}$$

Pour la preuve de l'orthogonalité des polynômes de Laguerre, le lecteur peut se référer à la section Analyse page 2365.

En cours de traduction de l' anglais

6.1.3.13.1 Polynômes de Laguerre associés

Définition (#6.1.175) : Dans de nombreuses applications, notamment en mécanique quantique (encore !), on a besoin des "polynômes de Laguerre associés" aussi nommés "polynômes de Laguerre généralisés" définis par :

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} L_{n+k}(x) \tag{6.1.280}$$

À partir de la forme série de $L_n(x)$ nous vérifions que les plus petits polynômes de Laguerre associés sont donnés par :

$$\begin{aligned} L_0^k(x) &= 1 \\ L_1^k(x) &= -x+k+1 \\ L_2^k(x) &= \frac{x^2}{2}-(k+2)x+\frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned} \tag{6.1.281}$$

Dès lors en général :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!}x^m, \quad k>-1 \tag{6.1.282}$$

Les premiers polynômes de Laguerre associés sont :

n	$L_n^k(x)$
L_0^k	1
L_1^k	$-x+(\alpha+1)$
L_2^k	$\frac{x^2}{2}-(\alpha+2)x+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$
L_3^k	$-\frac{x^3}{6}+\frac{(\alpha+3)x^2}{2}-\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)x}{2}+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{6}$

TAB. 6.6 – Liste de quelques polynômes de Laguerre associés

En c... ...raduction de l' anglais

Et un tracé de certains d'entre eux :

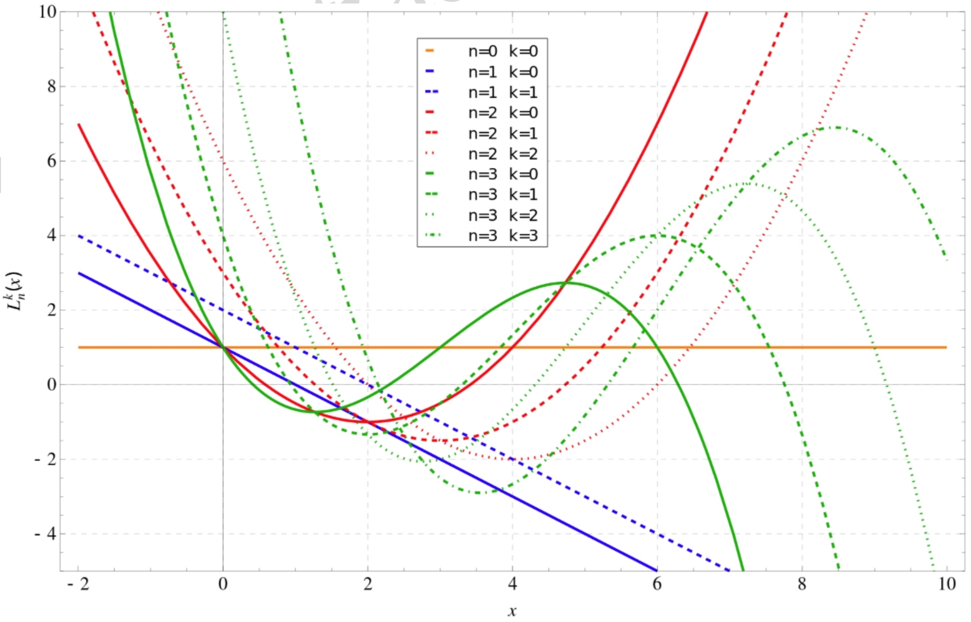


FIG. 6.16 – Tracés de quelques polynômes de Laguerre associés (source : Wikipédia)

Ou en utilisant une relation de récurrence pour tout $k \leq 1$:

$$L_{k+1}^{(\alpha)}(x)=\frac{(2k+1+\alpha-x)L_k^{(\alpha)}(x)-(k+\alpha)L_{k-1}^{(\alpha)}(x)}{k+1} \tag{6.1.283}$$

Une fonction génératrice peut être développée en différenciant la fonction génératrice de Laguerre k fois pour donner :

$$\begin{aligned}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}&=(-1)^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x)z^{n+k}=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n^k(x)z^{n+k}\\&=\left(\frac{z}{1-z}\right)^k\frac{e^{xz/(1-z)}}{1-z}\end{aligned} \tag{6.1.284}$$

À partir des deux derniers membres de cette équation, en annulant le facteur commun z^n, nous obtenons :

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n^k(x)z^n,\quad |z|<1 \tag{6.1.285}$$

De là, pour $x=0$, le développement binomial :

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-k-1}{n}(-z)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n^k(0)z^n \tag{6.1.286}$$

nous donne :

$$L_n^k(0)=\frac{(n+k)!}{n!k!} \tag{6.1.287}$$

Les relations de récurrence peuvent être dérivées de la fonction génératrice ou en différenciant les relations de récurrence polynomiales de Laguerre. Parmi les nombreuses possibilités, nous avons :

$$\begin{aligned}(n+1)L_{n+1}^k(x)&=(2n+k+1-x)L_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)\\x\frac{\mathrm{d}L_n^k(x)}{\mathrm{d}x}&=nL_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)\end{aligned} \tag{6.1.288}$$

Ainsi, nous obtenons en dérivant une fois l'équation différentielle ordinaire de Laguerre :

$$x\frac{\mathrm{d}L_n''}{\mathrm{d}x}+L_n''-L_n'+(1-x)\frac{\mathrm{d}L_n'}{\mathrm{d}x}+n\frac{\mathrm{d}L_n}{\mathrm{d}x}=0 \tag{6.1.289}$$

et finalement en différenciant l'équation différentielle ordinaire de Laguerre k fois :

$$x\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_n''+k\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}L_n''-k\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}L_n'+(1-x)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_n'+n\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_n=0 \tag{6.1.290}$$

En ajustant l'indice $n\to n+k$, nous avons "l'équation différentielle ordinaire de Laguerre associée" :

$$x\frac{\mathrm{d}^2L_n^k(x)}{\mathrm{d}x^2}+(k+1-x)\frac{\mathrm{d}L_n^k(x)}{\mathrm{d}x}+nL_n^k(x)=0 \tag{6.1.291}$$

Plus connue sous la forme suivante :

$$\boxed{xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0} \tag{6.1.292}$$

En cours de traduction de l'anglais

Lorsque des polynômes de Laguerre associés apparaissent dans un problème physique, c'est généralement parce que ce problème physique implique l'équation différentielle ci-dessus. L'application la plus importante concerne les états liés de l'atome d'hydrogène, qui en sont dérivés ! La "représentation de Rodrigues du polynôme de Laguerre associé" :

$$L_n^k(x)=\frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^{n+k}\right) \tag{6.1.293}$$

peut être obtenue par :

$$\begin{aligned}L_n^k(x)= & \frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^{n+k}\right)= \quad (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[L_{n+k}(x)\right]\\ & =\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!}x^m\end{aligned} \tag{6.1.294}$$

Les polynômes de Laguerre associés présentent les mêmes propriétés d'orthogonalité que les polynômes de Laguerre !

Dérivons à nouveau un résultat utile pour notre étude de la chimie quantique : la constante de normalisation du polynôme de Laguerre associé !

En utilisant la formule de Rodrigue pour le polynôme de Laguerre associé, nous obtenons :

$$L_n^k(x)=\frac{x^{-k}e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{n+k}e^{-x}) \tag{6.1.295}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\left(L_n^k(x)\right)^2\mathrm{d}x &=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} L_n^k(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{n+k}e^{-x})\mathrm{d}x\\ &=\frac{(-1)^m}{n!}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}L_n^k(x)\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^{n+k}e^{-x})\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.1.296}$$

pour $m\leqslant n$ (par induction sur m et intégration par parties). En prenant $m=n$ (rappelons que $L_n^k(x)$ est un polynôme de degré n avec le coefficient dominant égal à $(-1)^n/n!$) , on obtient le nécessaire :

$$\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\left(L_n^k(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^{n+k}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{(n+k)!}{n!} \tag{6.1.297}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.1.3.13.2 Fonctions de Laguerre

En posant :

$$\psi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{k/2} L_n^k(x) \tag{6.1.298}$$

$\psi_n^k(x)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire auto-adjointe :

$$x\frac{\mathrm{d}^2\psi_n^k(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}\psi_n^k(x)}{\mathrm{d}x} + \left(-\frac{x}{4} + \frac{2n+k+1}{2} - \frac{k^2}{4x}\right)\psi_n^k(x) = 0 \tag{6.1.299}$$

Les $\psi_n^k(x)$ sont parfois nommés "fonctions de Laguerre".

Une autre forme utile est donnée en définissant (cela correspond à modifier la fonction $\psi_n^k(x)$ pour éliminer la dérivée première dans l'équation différentielle ordinaire précédente) :

$$\Phi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{(k+1)/2} L_n^k(x) \tag{6.1.300}$$

La substitution dans l'équation de Laguerre associée donne (correspondant à l'équation différentielle ordinaire sans dimension du terme radial du rotateur non rigide que nous rencontrons lors de notre étude de l'atome hydrogénoïde dans la section de Chimie Quantique) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\Phi_n^k(x)}{\mathrm{d}x^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2n+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2}\right)\Phi_n^k(x) = 0} \tag{6.1.301}$$

Prouvons cette affirmation ! Pour atteindre la dérivée seconde, nous avons besoin de la dérivée première, et utilisons la notation :

$$y = e^{-x/2} x^{(k+1)/2} v \tag{6.1.302}$$

où $v = L_j^k(x)$, car les indices ne changent pas et ne servent qu'à ajouter de l'encombrement, et nous pouvons nous rappeler que la variable indépendante est x. La dérivée première est alors :

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{1}{2}e^{-x/2}x^{(k+1)/2}v + e^{-x/2}\left(\frac{k+1}{2}\right)x^{(k-1)/2}v + e^{-x/2}x^{(k+1)/2}v' \\
&= \left[-\frac{1}{2}v + \left(\frac{k+1}{2x}\right)v + v'\right]e^{-x/2}x^{(k+1)/2} \\
\Rightarrow \quad \left(e^{x/2}x^{-(k+1)/2}\right)y' &= -\frac{1}{2}v + \frac{k+1}{2x}v + v'
\end{aligned} \tag{6.1.303}$$

Similairement nous obtenons :

$$\left(e^{x/2}x^{-(k+1)/2}\right)y'' = \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}\frac{k+1}{2x}v - \frac{1}{2}v' - \frac{1}{2}\frac{k+1}{2x}v + \frac{k+1}{2x}\frac{k-1}{2x}v + \frac{k+1}{2x}v' - \frac{1}{2}v' + \frac{k+1}{2x}v' + v'' \tag{6.1.304}$$

En substituant la dérivée seconde et la fonction dans l'équation différentielle ordinaire de Laguerre associée :

$$y'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2j+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2}\right)y = 0 \tag{6.1.305}$$

En cours de traduction de l'anglais

et en divisant par le facteur commun de $e^{-x/2}x^{(k+1)/2}$, les termes restants sont :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{4}v-\frac{1}{2}\frac{k+1}{2x}v-\frac{1}{2}v'-\frac{1}{2}\frac{k+1}{2x}v+\frac{k+1}{2x}\frac{k-1}{2x}v+\frac{k+1}{2x}v'-\frac{1}{2}v'+\frac{k+1}{2x}v'+v''\right)\\
&\qquad+\left(-\frac{1}{4}+\frac{2j+k+1}{2x}-\frac{k^2-1}{4x^2}\right)v=0\\
&\Rightarrow v''+\cancel{\frac{1}{4}}v-\frac{1}{2}\frac{k+1}{2x}v-\frac{1}{2}v'-\frac{1}{2}\frac{k+1}{2x}v+\cancel{\frac{k^2+1}{4x^2}}v+\frac{k+1}{2x}v'-\frac{1}{2}v'+\frac{k+1}{2x}v'\\
&\qquad-\cancel{\frac{1}{4}}v+\frac{2j+k+1}{2x}v-\cancel{\frac{k^2+1}{4x^2}}v=0\\
&\Rightarrow v''-\frac{k+\cancel{1}}{\cancel{4x}}v-\frac{1}{2}v'-\frac{k+\cancel{1}}{\cancel{4x}}v+\frac{k+1}{x}v'-\frac{1}{2}v'+\frac{j}{x}v+\frac{k+\cancel{1}}{\cancel{2x}}v=0\\
&\Rightarrow v''-v'+\frac{k+1}{x}v'+\frac{j}{x}=0\\
&\Rightarrow xv''-xv'+(k+1)v'+jv=0\\
&\Rightarrow xv''+(1-x+k)v'+jv=0
\end{aligned}\tag{6.1.306}$$

qui est l'équation de Laguerre associée. Puisque $v=L_j^k(x)$, et les $L_j^k(x)$ sont des solutions de l'équation de Laguerre associée. La dernière ligne ci-dessus équivaut à :

$$xL_j^{k''}(x)+(1-x+k)L_j^{k'}(x)+jL_j^k(x)=0 \tag{6.1.307}$$

qui est l'équation de Laguerre associée, que nous savons être un énoncé vrai, donc :

$$y=e^{-x/2}x^{(k+1)/2}v=e^{-x/2}x^{(k+1)/2}L_j^k(x) \tag{6.1.308}$$

en sont des solutions ! La preuve est terminée.

L'intégrale de normalisation correspondante :

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\Phi_n^k(x)\right|^2\mathrm{d}x \tag{6.1.309}$$

est (sans démonstration) :

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^{k+1}\left[L_n^k(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1) \tag{6.1.310}$$

Notons que les $\Phi_n^k(x)$ ne forment pas un ensemble orthogonal (sauf avec x^{-1} comme fonction de pondération) à cause de x^{-1} dans le terme $(2n+k+1)/2x$.

Pour clôturer cette section, voici un résumé de tous les polynômes que nous avons vus jusqu'à présent et également d'autres polynômes dont nous démontrerons l'origine plus tard à travers tout ce livre :

En cours de traduction de l'anglais

Name	Formulation
Polynômes "vanilla"	$f(x)=\sum_{n} a_x x^n$
Polynômes trigonométriques	$S_N(\theta)=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}$
Polynômes cyclotomiques	$\Phi_n(x)=\prod_{n}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$
Polynômes de Legendre	$P_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n!2^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(1-x^2\right)^n$
Polynômes de Laguerre	$L_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{n}\dfrac{(-1)^{\lambda}n!}{(\lambda!)^2(n-\lambda)!}x^{\lambda}=\sum_{\lambda=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ \lambda \end{pmatrix}\dfrac{(-x)^{\lambda}}{\lambda!}$
Polynômes associé de Laguerre	$L_n^k(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\dfrac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!}x^m, \quad k>-1$
Polynômes de Bessel	$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!k!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^k$
Polynômes d'Hermite	$H_n(Q)=(-1)^n e^{Q^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}Q^n}e^{-Q^2}$
Polynômes de Bernstein	$B_{i,n}(t)=\dfrac{(n-1)!}{(1-i)!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i}=C_{i-1}^{n-1}t^{i-1}(1-t)^{n-i}$
Polynômes de Lagrange	$P(x)=\sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)f(x_j)$
Polynômes de Newton	$N_n(x)=f[x_0]+\sum_{i=1}^{n}f[x_0,\ldots,x_i]\left(\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\right)$

TAB. 6.7 – **Polynômes les plus courants**

En cours de traduction de l'anglais

~90 %
70 votes, 56.29%

6.2. Algèbre Ensembliste

Nous allons aborder maintenant dans ce livre l'étude des structures ensemblistes de manière très pragmatique (puisque rappelons que ce livre est principalement dédié aux ingénieurs). Ainsi, il sera fait usage du minimum de formalisme et seulement les démonstrations des éléments que nous considérons comme absolument essentiels à l'ingénieur seront présentées. Par ailleurs, de nombreuses démonstrations seront faites par l'exemple et nous nous focaliserons en grande partie sur la théorie algébrique des groupes car elle a une place presque prédominante en physique plus que pour les autres structures ensemblistes.

6.2.1 Algèbre et Géométrie Corporelle

Les symétries des figures géométriques, des cristaux et de tous les autres objets de la physique macroscopique font l'objet depuis des siècles d'observations et d'études. En termes modernes, les symétries d'un objet donné forment un groupe.

Depuis le milieu du 19ème siècle, la théorie des groupes a pris une extension énorme, et ses applications à la mécanique quantique et à la théorie des particules élémentaires se sont développées tout au long du 20ème siècle.

Dans une lettre de 1877 au mathématicien Adolph Mayer, Sophus Lie écrit qu'il a créé la théorie des groupes en janvier 1873. Il s'agit bien sûr des groupes qu'il appelait "groupes continus" et qui sont appelés aujourd'hui "groupes de Lie". Lie cherchait à étendre l'usage des groupes du domaine des équations algébriques, où Galois les avait introduites, à celui des équations différentielles.

Dès 1871, la notion de générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre de transformations était apparue dans son oeuvre. C'est l'ensemble des générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre d'un groupe continu qui forme ce que nous appelons aujourd'hui une algèbre de Lie".

Ce furent Wigner et Weyl qui montrèrent le rôle prééminent de la théorie des groupes, et de leurs représentations en particulier, dans la nouvelle mécanique quantique que développaient Heisenberg et Dirac. L'idée générale de la théorie des représentations est d'essayer d'étudier un groupe en le faisant agir sur un espace vectoriel de manière linéaire : nous essayons ainsi de voir le groupe comme un groupe de matrices (d'où le terme "représentation"). Nous pouvons ainsi, à partir des propriétés relativement bien connues du groupe des automorphismes de l'espace vectoriel (voir section Théorie des Ensembles page 441), arriver à déduire quelques propriétés du groupe qui nous intéressent.

Nous pouvons considérer la théorie des représentations de groupes comme une vaste généralisation de l'analyse de Fourier. Son développement est continu et elle a, depuis le milieu du

En cours de traduction de l'anglais

20ème siècle, des applications innombrables en géométrie différentielle, en théorie ergodique, en théorie des probabilités, en théorie des nombres, dans la théorie des formes automorphes, dans celle des systèmes dynamiques ainsi qu'en physique, chimie, biologie moléculaire et traitement du signal. À l'heure actuelle, des branches entières des mathématiques et de la physique en dépendent.

Avant de commencer, nous renvoyons le lecteur au chapitre traitant de la Théorie Des Ensembles pour qu'il se rappelle de la structure et des propriétés fondamentales qui constituent le groupe et également au chapitre d'Algèbre Linéaire (car nous en utiliserons quelques résultats).

6.2.1.1 Groupes Cycliques

Le groupe cyclique (dont la définition a déjà été vue dans le chapitre de Théorie des Ensembles) va nous servir de base dans le cadre de l'étude des groupes finis. Par ailleurs, plutôt que de faire des développements généralisés nous avons préféré prendre des exemples particuliers afin de présenter l'idée de groupe cyclique (approche plus adaptée à l'ingénieur).

Nous allons donc prendre l'exemple fort sympathique des heures de la montre... avec trois approches différentes qui successivement (!) permettront d'aborder un groupe cyclique simple.

En cours de traduction de l'anglais

1. Première approche :

   Imaginons donc une horloge avec une aiguille qui peut prendre 12 positions possibles (mais pas de positions intermédiaires). Nous noterons de manière spéciale les 12 positions possibles : $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{11}$ (le trait au-dessus des nombres n'est pas innocent !).

   Rien ne nous empêche sur l'ensemble de ces positions de définir une addition, par exemple :

   $$\overline{2}+\overline{3}=\overline{5},\ \overline{3}+\overline{2}=\overline{5},\ \overline{5}+\overline{7}=\overline{0},\ \overline{9}+\overline{5}=\overline{2},\ \overline{1}-\overline{8}=\overline{5}, \qquad (6.2.1)$$

   ce qui est similaire aux résultats que nous obtenons lorsque dans notre quotidien nous faisons des calculs avec notre montre.

2. Deuxième approche (première extension) :

   Si nous observons bien une montre ou une horloge, nous remarquons qu'à chaque fois que nous rajoutons 12 (ou retirons 12...) à une valeur des heures de notre montre alors nous tombons sur un ensemble de nombres bien déterminé qui sont aussi dans $\mathbb{Z}$. Ainsi (évidemment dans le cadre d'une montre/horloge seules les premières valeurs positives nous intéressent la plupart du temps mais ici nous faisons des maths alors nous généralisons un peu...) :

   $$\begin{aligned}\overline{0} &:= 0+12\mathbb{Z} = \{\ldots,-24,-12,0,12,24,\ldots\}\\ \overline{1} &:= 1+12\mathbb{Z} = \{\ldots,-11,1,13,25,\ldots\}\\ \overline{2} &:= 2+12\mathbb{Z} = \{\ldots,-10,2,14,26,\ldots\}\end{aligned} \qquad (6.2.2)$$

   Nous retrouvons ici un concept que nous avions déjà vu dans le chapitre de Théorie Des Nombres. Il s'agit de classes de congruences et l'ensemble de ces classes forme l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Si nous munissons cet ensemble quotient d'une loi d'addition, il

est normalement facile d'observer que celle-ci est une loi interne à l'ensemble quotient, qu'elle est associative, qu'il existe un élément neutre et que chaque élément possède un symétrique (inverse).

Ainsi, cet ensemble quotient muni uniquement de la loi d'addition (sinon en ajoutant la multiplication nous pouvons former un anneau) est un groupe commutatif.

3. Troisième approche (deuxième et dernière extension) :

   Voyons une troisième et dernière approche qui explique pourquoi le groupe quotient est cyclique.

   Si nous projetons la rotation des aiguilles de notre montre (toutes les rotations dans l'algèbre ensembliste se font traditionnellement dans le sens des aiguilles d'une montre !) dans $\mathbb{C}$ et que nous définissons :

$$x := e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{12}} \tag{6.2.3}$$

   Nous avons alors $x^{12} = x^0 = 1$ et :

$$\forall a, k \in \mathbb{Z} : \qquad x = x^{a+12k} \tag{6.2.4}$$

   ce qui explique pourquoi le groupe quotient $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ est appelé "groupe cyclique" (par isomorphisme de groupe selon ce qui a été vu dans la section de Théorie des Ensembles). Son isomorphe est noté C_{12} et tous les éléments sont modulus 1. Il est commun de noter tous les nombres complexes de module 1 comme suit :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \| z| = 1\} \tag{6.2.5}$$

   Si nous représentons dans $\mathbb{C}$ l'ensemble isomorphe nous obtenons alors sur le cercle unité un polygone ayant n sommets comme le montre la figure ci-dessous :

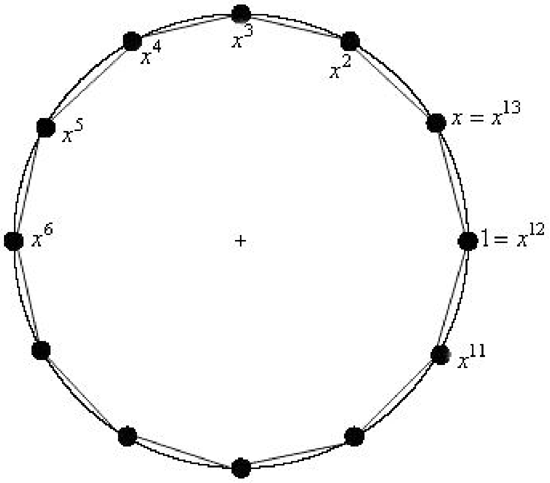


FIG. 6.17 – C_{12} **Groupe cyclique**

   Par ailleurs, le nombre d'éléments composants $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ étant fini, $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ est fini. Contrairement au groupe qui $(\mathbb{Z}, +)$ est lui un groupe discret infini.

   Ce concept de finitude sera peut-être plus évident avec l'exemple que nous ferons de suite après avec où le lecteur observera que cet ensemble a le même nombre d'éléments que C_4.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Les mathématiciens appellent C_n le "groupe des racines n-èmes de l'unité". Une racine n-ème de l'unité (parfois appelée "nombre de De Moivre") est donc un nombre complexe dont la puissance n-ème vaut 1. Par ailleurs, pour un entier n donné, toutes les racines n-èmes de l'unité sont situées sur le cercle unité et sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés ayant un sommet d'affixe 1.

Définition (#6.2.176) : Un "groupe fini" est un groupe mathématique avec un nombre fini d'éléments comme les "groupes de permutations", les "groupes symétriques", les "groupes cycliques", etc.

Ce qui intéresse les physiciens particulièrement dans un premier temps ce sont les représentations des groupes finis (aussi les groupes continus que nous verrons plus loin). Ainsi, la représentative de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nous est connue puisque la rotation dans le plan complexe est donnée comme nous l'a montrée notre étude des complexes dans le section sur les Nombres :

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \tag{6.2.6}$$

avec $k \in [0, n-1]$. Cette représentative est un sous-groupe du groupe des rotations$\text{O}(2)$ sur lesquelles nous reviendrons plus loin. Le groupe des rotations du plan étant lui-même un sous-groupe du groupe linéaire $\text{GL}(2)$ (nous en donnerons une définition précise et un exemple plus loin).

Au fait, les mathématiciens sont capables de démontrer que tous les groupes quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques à isomorphisme près avec C_n et ils disent alors que est un quotient fini du groupe monogène $\mathbb{Z}$...

Cette approche est par contre peut-être un peu abstraite. Alors, si le lecteur se rappelle de la section de Théorie Des Ensembles nous avons vu une définition bien précise de ce qu'était la cyclicité d'un groupe : Un groupe G est dit cyclique si G est engendré par la puissance d'au moins un de ses éléments appelé "générateur" tel que :

$$G = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\} \tag{6.2.7}$$

Vérifions que ce soit bien le cas pour le groupe :

$$G = \{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +\} \tag{6.2.8}$$

qui constitue un cas scolaire.

Nous noterons les éléments qui constituent ce groupe :

$$\{0, 1, 2, 3\} \tag{6.2.9}$$

Ceci étant fait, il convient de faire attention que dans la définition ensembliste du groupe cyclique nous parlons de "puissance" si la loi interne du groupe est la multiplication mais si la loi interne est l'addition, nous avons alors :

$$G = \{n \cdot a, n \in \mathbb{Z}\} \tag{6.2.10}$$

En cours de traduction de l' anglais

Le premier élément générateur du groupe $G=\{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+\}$ est 1. Effectivement :

$$\begin{aligned}1&=1\cdot 1=1\\1+1&=2\cdot 1=2\\1+1+1&=3\cdot 1=3\\1+1+1+1&=4\cdot 1=1\end{aligned}\tag{6.2.11}$$

Le deuxième élément générateur du même groupe est 3 :

$$\begin{aligned}3&=1\cdot 3=3\\3+3&=2\cdot 3=2\\3+3+3&=3\cdot 3=1\\3+3+3+3&=4\cdot 3=0\end{aligned}\tag{6.2.12}$$

Par contre, le lecteur pourra vérifier que 2 n'est pas générateur de ce groupe !

Au fait, en ce qui concerne les groupes $G=\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\}$ les mathématiciens arrivent à démontrer que seuls les éléments du groupe qui sont premiers avec n sont générateurs (c'est-à-dire les éléments dont le plus grand commun diviseur est 1).

Remarque

Un peu similaire à la façon dont les nombres premiers sont les blocs de construction de base des entiers, il existe un type spécial de groupes finis qui sont les groupes de construction de base de tous les groupes communs finis. Ces types particuliers de groupes sont appelés "groupes simples finis". La classification des groupes finis et simples est sans précédent dans l'histoire des mathématiques, car sa preuve fait $15'000$ pages et a nécessité près de 50 ans pour être achevée et a impliqué quelques centaines de mathématiciens. C'est pourquoi on l'appelle le "théorème énorme".

Ce sera tout pour notre introducton aux groupes cycliques pour ingénieurs. Maintenant passons à une introduction succinte à un autre type de groupes importants.

En cours de traduction vers l'anglais

6.2.1.2 Groupes de Transformations

Le groupe des rotations est celui qui intéresse le plus les physiciens surtout dans les domaines des matériaux, de la chimie, de la physique quantique et de l'art... Les mathématiciens apprécient eux l'étude des groupes de rotations dans le cadre de la géométrie bien évidemment (mais pas seulement) et les informaticiens tout autant les groupes linéaires. Nous avons d'ailleurs vu un exemple de groupe de rotations juste précédemment.

Définition (#6.2.177) : Nous appelons "groupe linéaire d'ordre n"" et nous notons $\text{GL}(n)$ les matrices inversibles $n\times n$ ou dites aussi "matrices régulières" (donc le déterminant est non nul selon ce que nous avons vu dans le chapitre d'Algèbre Linéaire) dont les coefficients sont dans un corps quelconque $\mathbb{K}$: (le corps $\mathbb{R}$ ou le groupe $\mathbb{C}$ la majorité du temps) :

$$\boxed{\text{GL}(n)=\text{GL}(n,\mathbb{K})=\text{GL}_n(\mathbb{K})=\{A\in M_n|\det(A)\neq 0\}}\tag{6.2.13}$$

Le groupe est ainsi nommé car les colonnes d'une matrice inversible sont linéairement indépendantes.

Nous considérerons comme évident que GL(n) est un groupe : la multiplication des matrices est associative et chaque matrice de GL(n) possède un inverse par définition (étant donné que le déterminant est non nul). D'autre part, le produit de deux matrices régulières est encore une matrice régulière.

Un exemple simple et important de groupe linéaire est celui du sous-"groupe des transformations affines" du plan qui est traditionnellement noté (c'est intuitif) :

$$F : M(x,y) \rightarrow M'(x',y') : \begin{cases} x' = ax + by + \alpha \\ y' = cx + dy + \beta \end{cases} \tag{6.2.14}$$

avec $a,b,c,d,\alpha,\beta \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$ (nous verrons le pourquoi du comment de l'inégalité un peu plus loin).

Définition (#6.2.178) : Le "groupe affine" ou "groupe affine général" de tout espace affine A sur un corps $\mathbb{K}$ est le groupe noté Aff(A) ou Aff$(n,\mathbb{K})$ de toutes les transformations affines inversibles de l'espace vers lui-même. C'est un "Groupe de Lie" si $\mathbb{K}$ est le corps des quaternions réels ou complexes.

Prenons un exemple pratique :

$$F : M(x,y) \rightarrow M'(x',y') : \begin{cases} x' = 0.5x - 0.4y + 0.5 \\ y' = 0.8x + 0.2y - 1.5 \end{cases} \tag{6.2.15}$$

ce qui appliqué à un cercle donnerait :

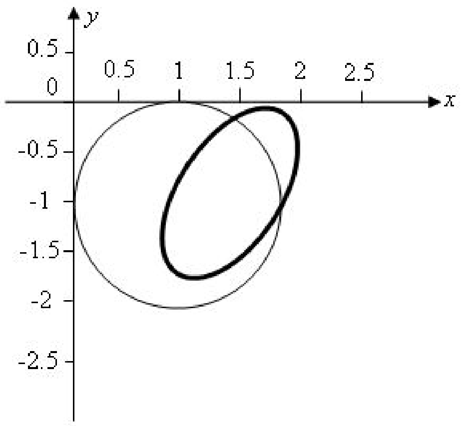


FIG. 6.18 – **Transformations affines sur un cercle**

Cette transformation est une manière de définir les ellipses comme images d'un cercle par une transformation affine.

Les coefficients α,β sont sans importance pour la forme de l'image. En fait, ils induisent bien évidemment des translations sur les figures. Nous pouvons donc nous en passer si nous cherchons seulement à la déformer.

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, il nous reste :

$$F : M(x,y) \to M'(x',y') : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{6.2.16}$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{6.2.17}$$

La transformation se réduit donc à la matrice :

$$F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{6.2.18}$$

et comme nous l'avons vu en algèbre linéaire, la multiplication matricielle est associative mais n'est pas commutative, donc la transformation linéaire ne l'est pas non plus.

L'élément neutre est la matrice :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2.19}$$

et l'inverse de F est :

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{6.2.20}$$

et comme nous avons imposé $ad - bc \neq 0$ tout élément y possède donc un inverse. Ainsi, le groupe linéaire affine est non commutatif et... forme bien un groupe....

Comme nous allons le voir, tous les groupes de Lie "classiques" sont des sous-groupes de $\text{GL}(n)$.

Définition (#6.2.179) : Nous appelons "groupe spécial linéaire d'ordre n" et nous notons $\text{SL}(n)$ les matrices inversibles (carrées $n \times n$) dont les coefficients sont dans un corps quelconque et dont le déterminant est égal à l'unité :

$$\boxed{\text{SL}(n) = \{A \in M_n \,|\, \det(A) = 1\}} \tag{6.2.21}$$

Il s'agit évidemment d'un sous-groupe de $\text{GL}(n)$.

En reprenant l'exemple précédant et en se rappelant que le déterminant d'une matrice carrée bidimensionnelle est (voir section d'Algèbre Linéaire 1935) :

$$\det(F) = ad - bc = 1 = \det(F^{-1}) \tag{6.2.22}$$

nous remarquons bien géométriquement ce que signifie d'avoir un déterminant unitaire dans ce cas ! Effectivement nous avons vu dans la section d'Algèbre Linéaire lors de notre interprétation géométrique qu'avoir un déterminant équivaut à une surface. Ainsi, le fait d'avoir $ad - bc$ unitaire permet donc que quel que soit l'ordre de la transformation, nous avons l'aire qui vaut toujours 1. Ainsi, le groupe spécial linéaire conserve les surfaces.

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#6.2.180) : Nous appelons "groupe orthogonal réel d'ordre n" et notons $\text{O}(n)$ les matrices orthogonales (voir section d'Algèbre Linéaire pour un rappel de ce que sont les matrices orthogonales) données par :

$$\text{O}(n)=\{A\in M_n(\mathbb{R})|A^TA=I_n\} \tag{6.2.23}$$

Par ailleurs, nous avons démontré dans la section d'Algèbre Linéaire lors de notre étude des matrices de rotations que $A^TA=I_n$ implique $\det(A)=\pm 1$.

C'est le cas par exemple de la matrice de $\text{O}(2)$ vue précédemment (elle appartient au groupe orthogonal mais aussi au groupe des rotations que nous verrons plus loin) :

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \end{bmatrix} \tag{6.2.24}$$

qui est orthogonale comme il est facile de le vérifier (multipliez simplement la matrice par sa transposée pour vérifier si vous obtenez la matrice identité).

Remarque

$\text{O}(1)$ est constitué aussi de l'ensemble des matrices triviales.... $[+1][-1]$ qui sont simplement des vecteurs à une composante... c'est à dire de simples scalaires.

Définition (#6.2.181) : Si $A\in\text{O}(n)$ et que $\det(A)=1$ nous obtenons alors un sous-groupe de $\text{O}(n)$ appelé "groupe spécial orthogonal réel d'ordre n" et alors défini par :

$$\text{SO}(n)=\{A\in M_n(\mathbb{R})|A^TA=I_n,\det(A)=1\}\subset\text{O}(n) \tag{6.2.25}$$

La matrice de rotations donnée précédemment fait partie de ce groupe puisque son déterminant est égal à l'unité ! Par ailleurs, ce groupe occupe une place très spéciale en physique et nous le retrouverons maintes fois lors de notre étude de la physique quantique.

Le sous-groupe $\text{SO}(2)$, appelé aussi parfois "groupe cercle" et noté S^1, que nous avions aussi étudié dans la section de Géométrie Euclidienne a une représentative donnée par la matrice :

$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} \tag{6.2.26}$$

et occupe une place à part dans la famille des groupes $\text{SO}(n)$ avec n supérieur à l'unité. Effectivement il est le seul à être commutatif. Par ailleurs, il est isomorphe à $e^{\mathrm{i}\theta}$ soit à $\text{U}(1)$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. C'est aussi le groupe de symétrie propre d'un cercle et l'équivalent continu de C_n.

Le sous-groupe $\text{SO}(3)$ donné par la matrice (voir section Géométrie Euclidienne page 2630) :

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} \tag{6.2.27}$$

En cours de traduction en l'anglais

pour la rotation autour de l'axe x dans l'espace tridimensionnel n'est pas commutatif (les matrices de rotation dans le plan étant elles pour rappel commutatives !). Par ailleurs les quaternions, dont la représentative est donc $\text{SO}(3)$, forment un groupe non commutatif aussi (par rapport à la loi de multiplication) comme nous l'avons vu dans la section sur les Nombres.

Par rapport à un vecteur unitaire on se rend facilement compte visuellement parlant que $\text{SO}(3)$ est un sous-groupe fermé de $\text{GL}(3)$, c'est-à-dire de l'ensemble des groupes linéaires de dimension 3.

Remarque

$\text{SO}(1)$ est constitué de la matrice $[1]$ (c'est-à-dire un simple scalaire unitaire !).

Définition (#6.2.182) : Nous appelons "groupe unitaire d'ordre n" et nous notons $\text{U}(n)$ les matrices dont les composantes sont complexes (dans le cadre de ce libre le plus souvent) ou réelles et qui sont orthogonales :

$$\text{U}(n)=\{A\in M_n(\mathbb{C})|A^\dagger A=I_n\} \tag{6.2.28}$$

Remarquons par ailleurs que toute matrice unitaire à coefficients complexes et à une dimension... (de $\text{U}(n)$ donc...) est un nombre complexe de module unitaire, qui peut toujours s'écrire sous la forme $e^{\text{i}\mathbb{R}}$.

Nous en avons déjà vu un exemple aussi dans ce livre lors de notre étude des spineurs (voir section du même nom page 2119). Il s'agit des matrices de Pauli (utilisées dans la section de Physique Quantique Relativiste) données par :

$$\sigma_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\sigma_y=\begin{bmatrix}0 & -\text{i}\\ \text{i} & 0\end{bmatrix},\sigma_z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{6.2.29}$$

Définition (#6.2.183) : Nous appelons "groupe spécial unitaire d'ordre n" et nous notons $\text{SU}(n)$ les matrices dont les coefficients sont complexes et qui sont orthogonales et dont le déterminant est unitaire :

$$\text{SU}(n)=\{A\in M_n(\mathbb{C})|A_\dagger A=I_n,\det(A)=1\}\subset\text{U}(n) \tag{6.2.30}$$

Remarque

$\text{U}(1)$ est égal à $\text{SU}(1)$ et il s'agit donc du cercle unité complexe égal à $e^{\text{i}\mathbb{R}}$. Par ailleurs, $\text{SO}(2)$ est commutatif et isomorphe à $\text{U}(1)$ car c'est l'ensemble des rotations du plan.

Un exemple connu est toujours celui des matrices de Pauli mais simplement écrites sous la forme utilisée en Physique Quantique Relativiste (voir section du même nom page **??**) :

$$\text{i}\sigma_x=\begin{bmatrix}0 & \text{i}\\ \text{i} & 0\end{bmatrix},\text{i}\sigma_y=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\text{i}\sigma_z=\begin{bmatrix}\text{i} & 0\\ 0 & -\text{i}\end{bmatrix} \tag{6.2.31}$$

qui font partie de $\text{SU}(2)$ et qui comme nous l'avons montré (implicitement) au début de la section Calcul Spinoriel est isomorphe au groupe des quaternions $\text{SO}(3)$ de module 1 sur la sphère de dimension 3. Relations que les mathématiciens appellent dans le cas présent un "homomorphisme de revêtement"...

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le groupe spécial unitaire possède une importance particulière en physique des particules. Si le groupe unitaire $\mathrm{U}(1)$ est le groupe de jauge de l'électromagnétisme (pensez au nombre complexe apparaissant dans les solutions de l'équation d'onde !), $\mathrm{SU}(2)$ est le groupe associé à l'interaction faible, et $\mathrm{SU}(3)$ celui de l'interaction forte. C'est par exemple grâce à la structure des représentations de $\mathrm{SU}(3)$ que Gell-Mann a conjecturé l'existence des quarks.

Avec une approche différente de celle vue dans le chapitre de Calcul Spinoriel comment montrer que les matrices de Pauli sont les bases de $\mathrm{SU}(2)$?

D'abord, rappelons que nous avons montré dans de Calcul Spinoriel que toute rotation dans l'espace de trois dimensions pouvait s'exprimer à l'aide de la relation :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma_0-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{L}\circ\vec{\sigma} \qquad (6.2.32)$$

Et nous avons vu dans le chapitre d'Informatique Quantique qu'une formulation explicitée et décomposée de la relation précédente était :

$$\begin{aligned} R_x(\theta)&=\begin{bmatrix}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & -\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\\ -\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}\\ R_y(\theta)&=\begin{bmatrix}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}\\ R_z(\theta)&=\begin{bmatrix}e^{-\mathrm{i}\theta/2} & 0\\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta/2}\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (6.2.33)$$

et donc que tout élément de $\mathrm{SU}(2)$ est produit de ces trois matrices qui font chacune décrire à l'extrémité d'un vecteur dans l'espace une courbe !

Maintenant, nous remarquons que ces trois matrices sont égales lorsque $\theta=0$:

$$R_x(\theta)=R_y(\theta)=R_z(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (6.2.34)$$

Nous obtenons alors la matrice identité. Donc si nous cherchons la tangente en ce point conjoint, nous pouvons dès lors construire une base (3 vecteurs orthogonaux).

En cours de traduction de l'anglais

Regardons ceci :

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}R_x(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\mathrm{i}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\mathrm{i}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_x \\
\left.\frac{\mathrm{d}R_y(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\mathrm{i}2}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_y \\
\left.\frac{\mathrm{d}R_z(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta/2} \end{bmatrix}_{\theta=0} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mathrm{i} \end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_z
\end{aligned}
\quad (6.2.35)
$$

Ainsi, $\mathrm{SU}(2)$ admet pour base :

$$
\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_x, -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_y, -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_z\right\} \quad (6.2.36)
$$

et ce sont en d'autres termes les générateurs infinitésimaux du groupe $\mathrm{SU}(2)$. $\mathrm{SU}(2)$ a donc une base qui est une Algèbre de Lie selon le vocabulaire des mathématiciens.

Ce résultat est assez remarquable... Puisque $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SO}(3)$ sont isomorphes, nous pouvons alors obtenir la base de l'Algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(3)$ alors avec la même méthode ! ! !

Voyons ceci ! Nous avons vu dans le chapitre de Géométrie Euclidienne que les matrices de rotations étaient données par (nous changeons le R par un U afin de ne pas confondre avec les matrices précédentes) :

$$
U_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, U_y = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix}, U_z = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2.37)
$$

Nous remarquons à nouveau qu'en $\theta = \gamma = \phi = 0$ la courbe que fait décrire à un vecteur les trois matrices de rotations passe par :

$$
U_x = U_y = U_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2.38)
$$

Alors de la même manière que pour $\mathrm{SU}(2)$, nous calculons les dérivées en ces angles pour déterminer les matrices de base génératrices de $\mathrm{SO}(3)$:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}U_x(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix}|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = X_x \\
\left.\frac{\mathrm{d}U_y(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma}\right|_{\gamma=0} &= \begin{bmatrix} -\sin(\gamma) & 0 & -\cos(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \end{bmatrix}|_{\gamma=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X_y \\
\left.\frac{\mathrm{d}U_z(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi=0} &= \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}|_{\phi=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X_z
\end{aligned}
\quad (6.2.39)
$$

En cours de traduction de l'anglais

L'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(3)$ admet donc pour base :

$$\{X_x, X_y, X_z\} \tag{6.2.40}$$

En physique, on préfère travailler avec des matrices complexes. Nous introduisons alors les matrices :

$$\{J_x = \mathrm{i}X_x, J_y = \mathrm{i}X_y, J_z = \mathrm{i}X_z\} \tag{6.2.41}$$

Il faut alors remarquer que si nous définissons :

$$J_\pm = J_x \pm \mathrm{i}J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \pm \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & -0 & 0 \end{bmatrix} \pm \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \\ \pm 1 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.42}$$

nous avons trivialement pour la complexe conjuguée de la matrice transposée :

$$(J_\pm)^\dagger = J_\mp \tag{6.2.43}$$

et au fait... nous avons aussi les relations de non-commutation (ce que nous pouvons développer sur demande) :

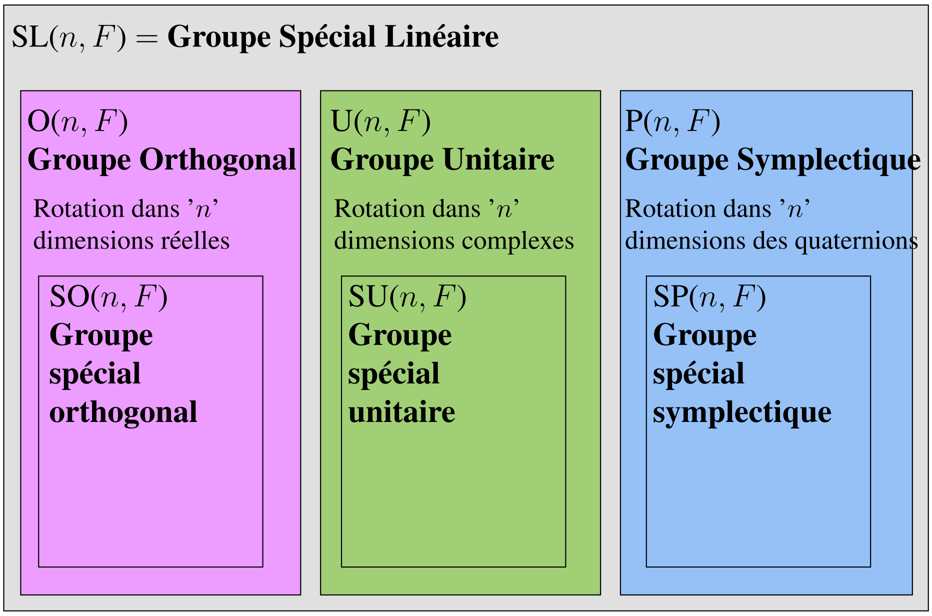
$$[J_x, J_y] = \mathrm{i}J_z \quad \text{(cycl.)} \tag{6.2.44}$$

et aussi la relation de commutation :

$$\left[J_z, \|\vec{J}\|^2\right] = 0 \quad \text{(cycl.)} \tag{6.2.45}$$

ce que satisfont aussi les matrices de Pauli et... pour rappel (ou information pour ceux qui n'ont pas encore lu la section de Physique Quantique Ondulatoire) les J_i sont les opérateurs du moment cinétique total du système de couplage spin-orbite ! ! !

La plupart des groupes que nous avons vus jusqu'à présent peuvent être résumés avec la figure suivante :



En cours de traduction de l'anglais

Les rotations avec les quaternions indiquées dans la figure ci-dessus sont étudiées dans la section Nombres du chapitre Arithmétique.

Ou bien nous pouvons également résumer ce que nous avons vu jusqu'à présent comme un ensemble unique de relations et avec une notation un peu différente (histoire d'habituer le lecteur à l'absence de normes internationales de notations en mathématiques...) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(X)=1\}\\
\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) &= \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \det(X)=1\}\\
\mathrm{O}(n) &= \left\{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : X^T X = \mathbb{1}_n\right\}\\
\mathrm{SO}(n) &= \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\\
\mathrm{O}(p,q) &= \left\{X \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) : X^T \mathbb{1}_{p,q} X = \mathbb{1}_{p,q}\right\}\\
\mathrm{SO}(p,q) &= \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R})\\
\mathrm{U}(n) &= \left\{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \bar{X} X = \mathbb{1}_n\right\}\\
\mathrm{SU}(n) &= \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})
\end{aligned} \tag{6.2.46}$$

Parlons maintenant des "dimensions" (c'est-à-dire des paramètres libres) de ces groupes. Pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, sa dimension est n^2, ce qui est assez évident. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est composé de nombres complexes ayant chacun deux paramètres réels, cela double le nombre de dimensions, de sorte que nous avons $2n^2$. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ a une contrainte : ses matrices doivent avoir un déterminant égal à 1. Cette contrainte réduit les paramètres libres d'une unité, il a donc n^2-1 dimensions. Pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, il suffit de le multiplier par deux, ce qui donne $2n^2-2$. Tous les autres suivent le même schéma.

En cours de traduction de l'anglais

6.2.1.3 Groupes de Symétries

Le groupe de symétries d'un objet noté X (image, signal etc. en 1D, 2D, 3D ou autre) est le groupe de toutes les isométries (une isométrie est une transformation qui conserve les longueurs) sous lesquelles il est invariant avec la composition en tant qu'opération.

Tout groupe de symétries dont les éléments ont un point fixe commun, ce qui est vrai pour tous les groupes de symétries de figures limitées, peut être représenté comme un sous-groupe du groupe orthogonal O(n) en choisissant l'origine pour point fixe. Le groupe de symétries propre est alors un sous-groupe du groupe orthogonal spécial $\text{SO}(n)$, et par conséquent, il est aussi appelé le "groupe de rotations" de la figure.

Dans ce qui suit, nous allons interpréter la composée de deux opérations de symétries ou de rotations comme une multiplication au même titre que pour les permutations.

Voyons d'abord deux définitions fondamentales :

Définitions (#6.2.184) :

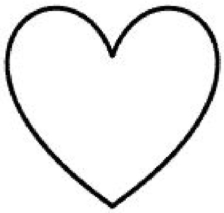
D1. Le "groupe des symétries", appelé aussi "groupe des invariants", de X est l'ensemble des symétries de X, muni de la structure de multiplication donnée par composition qui laisse X invariant.

D2. "L'ordre" d'un groupe est le nombre total de toutes ses symétries uniquement (y compris l'identité !).

En traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Le coeur (...) :



a un groupe de symétries total à 2 éléments, à savoir l'application identité id et l'application qui est la réflexion dans l'axe vertical r_v (sous-groupe de symétries à 1 élément). Nous observons que le symétrique est donné aussi via la relation :

$$r_v \circ r_v = \text{id} \tag{6.2.47}$$

E2. La lettre phi (...) :

$$\Phi$$

a un groupe de symétrie total à 4 éléments, à savoir l'application identité id, les deux réflexions r_h et r_v et la rotation par l'angle π que nous noterons t_π (sous-groupe de rotations à 1 élément). Cette forme possède donc un groupe de symétries d'ordre 3.

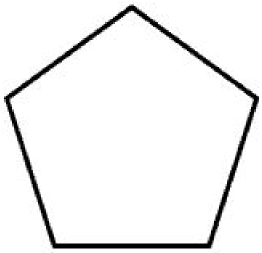
Dans ce groupe nous avons :

$$r_h \circ r_v = t_\pi \tag{6.2.48}$$

(et c'est commutatif !), $t_\pi \circ t_\pi$ est la rotation par un angle 2π, ce qui est la même application que l'application identité, donc $t_\pi \circ t_\pi = \text{id}$.

Ainsi, le groupe de symétries de cette lettre est commutatif et la loi de composition est bien interne. C'est donc bien un groupe !

E3. Le pentagone régulier :



a un groupe de symétries total à 10 éléments à savoir les 5 rotations $\text{id}, t_{2\pi/5}, t_{4\pi/5}, t_{6\pi/5}, t_{8\pi/5}$ ainsi que les 5 réflexions dans les 5 axes de symétries. C'est donc un groupe de symétries d'ordre 5 correspondant au groupe cyclique $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Remarque

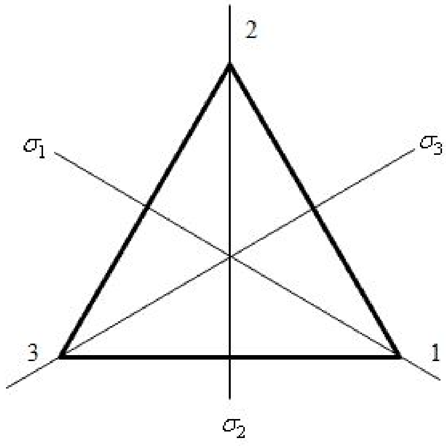
Plus généralement, le groupe de symétries d'un n-gone régulier (si n est impair) a exactement $2n$ éléments. Ce groupe s'appelle le "groupe diédral d'ordre n" et est noté le plus souvent D_{2n} (il faut faire attention car certains auteurs ne multiplient pas n par le facteur 2 ce qui fait que l'indice représente alors directement l'ordre et non le nombre d'éléments).

Le pentagone a donc D_{10} pour groupe diédral et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ en est un "sous-groupe distingué" (nous reviendrons plus tard sur cette notion de sous-groupe distingué).

E4. Le groupe diédral D_6 d'ordre 3 des isométries d'un triangle équilatéral (polygone régulier) a 6 éléments que nous noterons (afin que l'écriture soit moins lourde) :

$$D_6 = \{\mathrm{id}, t_{2\pi/3}, t_{4\pi/3}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \tag{6.2.49}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les symétries par rapport aux trois bissectrices (respectivement médiatrices). La table de compositions de ce groupe diédral montre aussi que ce groupe est non-commutatif :

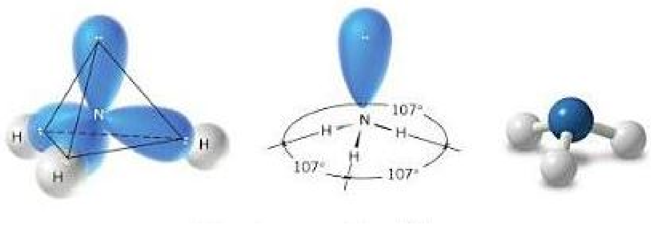


$\nearrow D_6$	id	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	σ_1	σ_2	σ_3
$t_{2\pi/3}$	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	id	σ_3	σ_1	σ_2
$t_{\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	id	$t_{2\pi/3}$	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	id	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	$t_{4\pi/3}$	id	$t_{2\pi/3}$
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	id

TAB. 6.8 – **Symétries du groupe diédral d'ordre** 3

Nous reviendrons sur cet exemple lorsque nous introduirons un peu plus loin le concept de groupe distingué lors de notre étude des groupes de permutations et la définition des groupes distingués.

E5. Regardons un dernier exemple appliqué à la chimie en énumérant les opérations de symétries qui laissent la molécule NH_3 (tétraèdre) invariante.



Le groupe de transformations contient 6 éléments : l'identité id, C_3 qui est la rotation de $2\pi/3$, la rotation de (que nous noterons par la suite C_{-3}) toutes deux selon l'axe z (perpendiculaire au plan xy donc...) et 3 axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de symétrie/réflexion passant chacun par le milieu d'une des arêtes de base au milieu de l'arête opposée comme le montre la figure ci-dessous (pyramide vue du dessus) :

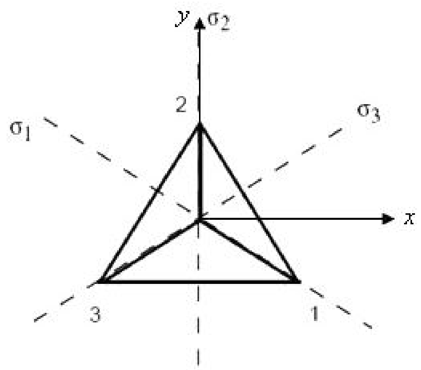


FIG. 6.19 – Opérations laissant invariant un tétraèdre

La combinaison des différents éléments de symétries montre que la table de compositions est (ce qui prouve que la loi est interne et que nous travaillons donc bien dans un groupe) :

↗	id	σ_1	σ_2	σ_3	C_3	C_{-3}
id	id	σ_1	σ_2	σ_3	C_3	C_{-3}
σ_1	σ_1	id	C_{-3}	C_3	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	C_3	id	C_{-3}	σ_1	σ_3
σ_3	σ_3	C_{-3}	C_3	id	σ_2	σ_1
C_3	C_3	σ_2	σ_3	σ_1	C_{-3}	id
C_{-3}	C_{-3}	σ_3	σ_1	σ_2	id	C_3

TAB. 6.9 – Compositions de transformations du tétraèdre

Attention à l'ordre des opérations dans le tableau ci-dessus, nous appliquons d'abord l'élément de ligne puis l'élément de colonne !

Nous constatons que le groupe n'est donc pas commutatif.

6.2.1.3.1 Orbite et Stabilisateur

Nous allons voir maintenant deux définitions que nous retrouverons en cristallographie (leur nom n'est pas innocent !).

Définition (#6.2.185) : L'orbite d'un élément x de E est donnée par :

$$\text{Orb}_x = \{g \cdot x, g \in G\} \tag{6.2.50}$$

L'orbite de x est l'ensemble des positions (dans E) susceptibles d'être occupées par l'image de x sous l'action de G. Les orbites forment évidemment une partition de E.

✍**Exemple :**

Considérons un ensemble E sur lequel agit un groupe G, par :

$$E = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\} \tag{6.2.51}$$

l'ensemble des 6 sommets d'un hexagone sur lequel nous faisons agir le groupe $G = \{\text{id}, t_{2\pi/3}, t_{4\pi/3}\}$. Nous observons déjà trivialement que G est bien un groupe !

Maintenant, prenons un élément de E, par exemple S_0.

Son orbite va donc être par définition :

$$\text{Orb}_{S_0} = \{\text{id}(S_0)S_0, t_{2\pi/2}(S_0) = S_2, t_{4\pi/3}(S_0) = S_4\} \tag{6.2.52}$$

Définition (#6.2.186) : Le stabilisateur x d'un élément de E est l'ensemble :

$$\text{Stab}_x = \{g \in G | g \cdot x = x\} \tag{6.2.53}$$

des éléments qui laissent x invariant sous leur action. C'est un sous-groupe de G.

✍**Exemple :**

Pour reprendre notre exemple précédent. Son stabilisateur va être réduit à :

$$\text{Stab}_{S_0} = \{\text{id}\} \tag{6.2.54}$$

En cours de rédaction Opera Magistris

6.2.1.4 Groupes de Permutations

Les groupes symétriques ont une importance non négligeable dans certains domaines de la physique quantique mais aussi en mathématiques en Algèbre Linéaire (pour la théorie du déterminant comme nous le verrons dans la section correspondante) et dans le cadre de la théorie de Galois (voir plus bas) et dans les codes correcteurs d'erreurs (voir la section du même nom et en particulier l'exemple avec les cartes de crédti). Il convient donc d'y porter aussi une attention toute particulière.

Rappelons d'abord (voir section Probabilités page 518) que dans un ensemble $\{1,\ldots,n\}$ il y a $n!$ permutations possibles. Les mathématiciens disent, à juste titre, qu'il y a $n!$ bijections et appellent ce nombre "ordre du groupe de permutations".

✍**Exemple :**
Prenons par exemple l'ensemble $\{1,2,3\}$. Cet ensemble a 3! permutations possibles qui sont notées dans le cadre des groupes de permutation de la manière suivante :

$$\{(1),(1\,2),(1\,3),(2\,3),(1\,2\,3),(1\,3\,2)\} \tag{6.2.55}$$

Ce qui se lit dans l'ordre : application identité id, 1 amène sur 2 ou 2 sur un 1 (en termes de position !), 1 amène sur 3 ou 3 sur 1, 2 amène sur 3 ou 3 sur 2, 1 amène sur 2 qui amène sur 3 qui amène sur 1, 1 amène sur 3 qui amène sur 2 qui amène sur 1.

$$\begin{array}{ll}
\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\rightarrow(1) & \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\rightarrow(1,2)\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow(1,3) & \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\rightarrow(2,3)\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\rightarrow(1,2,3) & \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\rightarrow(1,3,2)
\end{array} \tag{6.2.56}$$

Nous pouvons observer facilement que la composition de deux permutations n'est pas commutative :

$$\begin{aligned}(1,\ 2)\circ(1,\ 3)&=\{1,2,3\}\\(1,\ 3)\circ(1,\ 2)&=\{3,1,2\}\end{aligned} \tag{6.2.57}$$

et que la composition de deux permutations est une loi interne :

$$(1\,2)\circ(1\,3\,2)=\{1,3,2\}=(2\,3) \tag{6.2.58}$$

avec un élément neutre qui est bien l'identité id. Nous avons donc bien un groupe non commutatif. Rappelons également au lecteur que certains éléments du groupe, s'ils sont bien choisis, peuvent former un sous-groupe. C'est l'exemple de :

$$\{(1),(1\,2)\} \tag{6.2.59}$$

qui est un sous-groupe de S_3 (il est facile de vérifier qu'il possède toutes les propriétés d'un groupe).

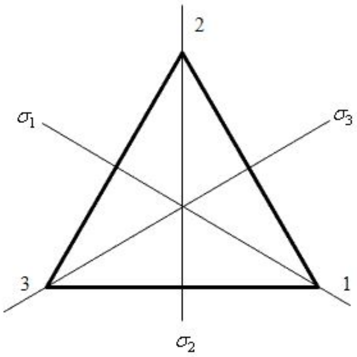
Définition (#6.2.187) : Un sous-groupe H d'un groupe G est appelé "groupe distingué" si, pour tout g de G et tout h de H, nous avons que ghg^{-1} est élément de H. Les mathématiciens appellent cela un "automorphisme intérieur"...

Voyons d'abord un exemple géométrique parlant après quoi nous reviendrons à cette définition avec S_3.

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Nous avons vu plus haut les éléments du groupe de symétrie diédral d'ordre 3 du triangle équilatéral. Géométriquement ils correspondent tous à des déplacements dans le plan dans lequel se trouve le triangle. Nous avions obtenu pour rappel le tableau de compositions suivant :



$\nearrow D_6$	id	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	σ_1	σ_2	σ_3
$t_{2\pi/3}$	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	id	σ_3	σ_1	σ_2
$t_{\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	id	$t_{2\pi/3}$	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	id	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	$t_{4\pi/3}$	id	$t_{2\pi/3}$
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	$t_{2\pi/3}$	$t_{4\pi/3}$	id

D'abord, nous constatons facilement à l'aide de ce tableau que nous avons :

- Le sous-groupe formé de $\{\text{id}\}$ d'ordre 1
- Le sous-groupe formé de $\{\text{id}, t_{2\pi/3}, t_{4\pi/3}\}$ d'ordre 3
- Le sous-groupe formé de $\{\text{id}, \sigma_1\}$ d'ordre 2
- Le sous-groupe formé de $\{\text{id}, \sigma_2\}$ d'ordre 2
- Le sous-groupe formé de $\{\text{id}, \sigma_3\}$ d'ordre 2

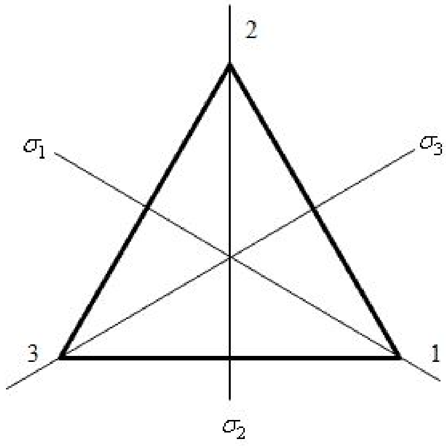
Parmi ces cinq sous-groupes, voyons lesquels sont distingués (cela est relativement facile à visualiser à l'aide du tableau de compositions) :

- Le sous-groupe formé de $\{\text{id}\}$
- Le sous-groupe formé de $\{\text{id}, t_{2\pi/3}, t_{4\pi/3}\}$

Nous allons voir maintenant une chose remarquable ! En numérotant par 1, 2 et 3 les sommets du triangle équilatéral et en prenant les rotations dans le sens des aiguilles d'une montre, nous pouvons identifier les éléments de D_6 aux éléments suivants de S_3 :

$$\text{id}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\rightarrow(1) \quad t_{2\pi/3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\rightarrow(1,2,3) \quad t_{4\pi/3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\rightarrow(1,3,2)$$
$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow(2,3) \quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow(1,3) \quad \sigma_3=\begin{pmatrix}\rightarrow 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow(1,2) \tag{6.2.60}$$

et reconstruire la même table de compositions (copie de la précédente mais juste avec le changement d'écriture... hé hé !) :



$\nearrow S_3$	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
(1)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(2 3)	(1 2)	(1 3)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)	(1 3)	(2 3)	(1 2)
(1 2)	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 3)	(1 3)	(2 3)	(1 2)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)
(2 3)	(2 3)	(1 2)	(1 3)	(1 2 3)	(1 2 3)	(1)

Bon... ce petit interlude fermé, revenons au groupe distingué de S_3 (car il va être important pour notre introduction aux groupes de Galois) et rappelons d'abord que :

$$G=\left\{(1),(1\ 2),(1\ 3),(2\ 3),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\right\} \tag{6.2.61}$$

et nous voyons que le sous-groupe distingué est formé de :

$$H=\left\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\right\} \tag{6.2.62}$$

Définition (#6.2.188) : Pour tout sous-groupe H stable par les automorphismes intérieurs d'un groupe G, nous appelons "indice de H dans G" le quotient de l'ordre du groupe G par l'ordre du sous-groupe H et nous l'écrivons $[G/H]$.

✍**Exemple :**

L'indice du sous-groupe $\{(1),(12)\}$ dans le groupe S_3 est $6/2$ c'est-à-dire 3.

Ce concept nous sera très utile lors de notre introduction aux corps de Galois plus loin.

Considérons maintenant, la permutation particulière σ pour aborder le sujet sous un angle différent mais équivalent :

$$\{1,2,3,4\} \xrightarrow{\sigma} \{3,2,4,1\} \tag{6.2.63}$$

Les mathématiciens ont pour habitude de noter cela, dans un premier temps, sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2.64}$$

avec :

$$\sigma(1)=3, \sigma(2)=2, \sigma(3)=4, \sigma(4)=1 \tag{6.2.65}$$

Dès lors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix} \tag{6.2.66}$$

Etant donné σ et τ, deux permutations, il est naturel de regarder leur composition (rappelons que cela signifie d'abord σ, puis τ comme pour la composition de fonctions).

Ainsi, si :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.2.67}$$

Alors :

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{6.2.68}$$

et :

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.2.69}$$

Maintenant, l'idée est d'interpréter la composition comme une multiplication de permutations. Cette multiplication est alors non-commutative comme nous venons de le constater dans l'exemple précédent. Nous avons en général $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

Chaque bijection a un inverse (une fonction réciproque). Dans notre exemple il s'agit de évidemment de :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.2.70}$$

En cours de traduction de l' anglais

Géométriquement, pour calculer l'inverse σ^{-1} d'un élément σ, il suffit de prendre la réflexion du dessin de σ dans un axe horizontal comme le montre la partie gauche de la figure ci-dessous :

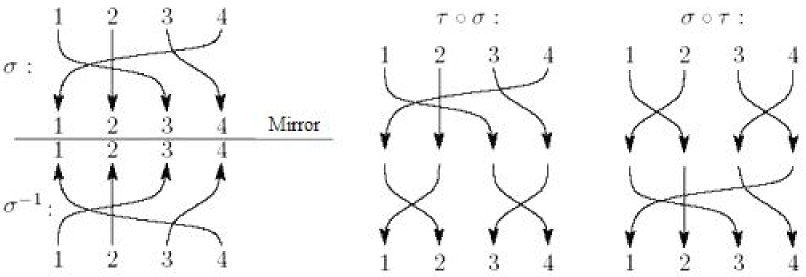


FIG. 6.20 – **Exemples de composées et d'inverses de permutations**

Nous pouvons représenter une permutation σ comme une matrice de permutation, c'est-à-dire la matrice qui mappe :

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{6.2.71}$$

Une matrice $n \times n$ est une matrice de permutation si et seulement si toutes ses entrées sont des zéros et des uns, chaque colonne a exactement un 1 et chaque ligne a exactement un 1. Dans ce cas, nous avons :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.72}$$

En cours de traduction de l' anglais

Définitions (#6.2.189) :

D1. L'ensemble des permutations d'un ensemble avec n éléments, muni de cette structure de multiplication, s'appelle le "groupe des permutations d'ordre n" ou "groupe des substitutions d'ordre n", et se note S_n ou encore $S(n)$.

D2. Nous disons qu'un élément σ de S_n est un "cycle d'ordre k", ou un "k-cycle", s'il existe $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :

- σ envoie a_1 sur a_2, a_2 sur $a_3, \ldots, a_{k-1}$, et a_k sur a_1.
- σ fixe tous les autres éléments de S_n

et nous notons le cycle ainsi :

$$\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \tag{6.2.73}$$

✍**Exemple :**

Pour mieux comprendre reprenons notre exemple de S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.2.74}$$

Ce groupe symétrique est un 3-cycle noté $\sigma = (1\,3\,4)$ car dans l'ordre : 1 envoie sur 3, 3 envoie sur 4 et 4 envoie sur 1 (et le 2 n'étant pas mentionné il reste fixe). Nous pouvons noter cela aussi des façons suivantes équivalentes : $\sigma = (3\,4\,1)$ ou encore $\sigma = (4\,1\,3)$.

D3. L'ordre d'un k-cycle est k (d'où le nom !).

✍**Exemple :**

Effectivement si nous reprenons $\sigma = (1\,3\,4)$, nous avons alors :

$$\sigma^2 = (1\,4\,3) \quad \text{et} \quad \sigma^3 = \text{id} \tag{6.2.75}$$

D4. Nous disons qu'une permutation σ est un "cycle" s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que σ est un k-cycle.

Attention ! Toute permutation doit s'écrire comme un produit de cycles disjoints (c'est-à-dire qu'un nombre qui apparaît dans un cycle ne doit pas apparaître dans un autre cycle).

✍**Exemple :**

Par exemple, dans S_9, nous avons :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 8 & 3 & 7 & 1 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} = (1\,5\,7\,6)(3\,8\,4) \tag{6.2.76}$$

Donc cette permutation est un produit d'un 4-cycle et d'un 3-cycle disjoint.

Nous laisserons d'ailleurs le lecteur vérifier par lui-même que le groupe cyclique engendré par σ (qui dans le cas présent est sous-groupe de S_9) est d'ordre 12 (12-cycle)...

Remarque

Les mathématiciens peuvent démontrer que si σ est un élément qui a une décomposition en c cycles disjoints de longueur $n_1, n_2, \ldots, n_c$ alors l'ordre σ de est le plus petit commun multiple des ordres de tous les cycles disjoints qui le composent.

Nous supposerons également intuitif que dans le vocabulaire commun, un 2-cycle dans S_n s'appelle aussi une "transposition".

Allons un petit peu plus loin. Nous nous proposons de montrer par l'exemple que l'ensemble

En cours de traduction de l'anglais

des transpositions engendre S_n. Autrement, dit, toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions !

✍Exemple :

Reprenons notre exemple (il s'agit d'une permutation paire) :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4) = (1\ 3)(4\ 1) \tag{6.2.77}$$

En général, un k-cycle s'écrit donc comme produit de $k-1$ transpositions.

Théorème 6.6. Comme les permutations d'un ensemble fini constituent un groupe. Cela signifie (entre autres choses) qu'il existe donc toujours un entier k, tel que p opéré k fois est la transformation identité (c'est-à-dire l'opération qui ne change rien).

Démonstration 6.6.1. Si G est un groupe fini et que $g \in G$, nous considérons la suite d'éléments (se rappeler que dans un groupe il ,n'y a, qu'une opération et donc le carré, le cube, etc. signifie que nous composons cette opération !) :

$$g, g^2, g^3, \ldots \tag{6.2.78}$$

Par exemple, dans les groupes de permutations, l'opération est la composition des permutations.

Étant donné que G est fini et que cette suite est infinie, il existe forcément deux éléments égaux dans la suite... Il existe donc deux indices différents n et m tels que :

$$g^n = g^m \tag{6.2.79}$$

En supposant que $n < m$, l'égalité précédente se simplifie et nous obtenons :

$$g^{m-n} = e \tag{6.2.80}$$

où e est l'élément neutre du groupe.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Nous allons voir que les permutations étant bijectives, nous pouvons créer sur des groupes finies des compositions d'opération de permutation qui finissent toujours par ramener à l'état initial (application identité id).

✍Exemples :

E1. Dans une liste de 5 objets, nous échangeons le premier et le troisième, et, en même temps, nous faisons passer le deuxième en position 4, celui qui est en position 4 est mis en position 5 et celui qui est en position 5 est mis en position 2. En nous réitérons. Cela donne :

$$ABCDE \rightarrow CEABD \rightarrow ADCEB \rightarrow CBADE \rightarrow AECBD \rightarrow CDAEB \rightarrow ABCDE \tag{6.2.81}$$

Nous sommes revenus au point de départ après 6 étapes.

E2. Considérons la "transformation du photomaton" d'une image de Mona Lisa de dimension de 256 par 256 pixels :

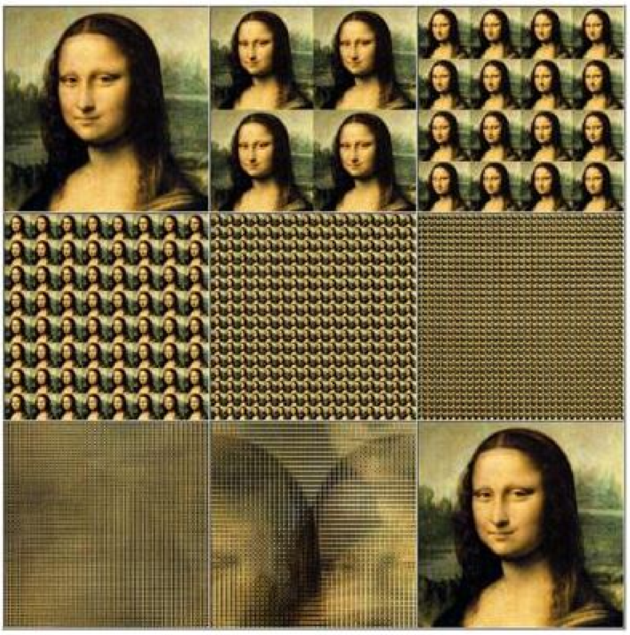


FIG. 6.21 – Transformation du photomaton

Nous pouvons avoir l'impression que chaque image a été obtenue à partir de la précédente en réduisant la taille de l'image de moitié, ce qui a donné quatre morceaux analogues que nous avons placés en carré pour obtenir une image ayant la même taille que l'image d'origine. Mais en fait il n'est est rien ! Le nombre de pixels a été conservé (aucun pixel n'est dupliqué ! ! !) et en fait nous avons seulement déplacé les pixels par permutation pour avoir quatre images qui ne contiennent pas réellement toute l'information de l'image d'origine mais seulement une partie.

En réitérant la procédure 8 fois, nous retombons toujours sur l'image d'origine quelle que soit l'image de départ. La question est de comprendre alors pourquoi ?

Considérons que l'image d'origine est un carré d'une taille de 16 pixels de large par 16 pixels de haut (mais vous pouvez appliquer ce qui va suivre avec une image rectangulaire de n'importe quelle taille et vous verrez que cela marche aussi !). Chaque pixel d'une ligne (la démarche est exactement la même pour les colonnes !) est identifié par une coordonnée selon l'axe X allant de 0 à 15.

Nous avons ainsi une suite de nombres au début où les coordonnées de pixels correspondant à la leur coordonnée x :

$$0\;1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15$$

Nous faisons alors la permutation qui consiste à noter k la position d'un pixel et de faire :

$$\text{permutation} : \begin{cases} x \text{ est pair} : & 2k \rightarrow k \\ x \text{ est impair} : & 2k+1 \rightarrow 8+k \end{cases} \tag{6.2.82}$$

Cela donne alors à la première permutation :

$$\begin{gathered}0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\\ \downarrow \text{Permutation } 1\\ 0\,2\,4\,6\,8\,10\,12\,14\,1\,3\,5\,7\,9\,11\,13\,15\\ \downarrow \text{Permutation } 2\\ 0\,4\,8\,12\,1\,5\,9\,13\,2\,6\,10\,14\,3\,7\,11\,15\\ \downarrow \text{Permutation } 3\\ 0\,8\,1\,9\,2\,10\,3\,11\,4\,12\,5\,13\,6\,14\,7\,15\\ \downarrow \text{Permutation } 4\\ 0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\end{gathered}$$

Ainsi, pour une image de 16 par 16 pixels, il faut quatre permutations, ce qui correspond à $2^4=16$. Donc, pour une image de 256 pixels, nous avons $256=2^8$, d'où le fait qsu'il faille 8 permutations pour retrouver la Mona Lisa d'origine avec :

$$\text{permutation} : \begin{cases} x \text{ is even} : & 2k \to k \\ x \text{ is odd} : & 2k+1 \to 128+k \end{cases} \tag{6.2.83}$$

Ainsi, dans le cas général d'une image de largeur L en nombre de pixels en comptant à partir de 1, la transformation est :

$$\text{permutation} : \begin{cases} x \text{ est pair} : & 2k \to k \\ x \text{ est impair} : & 2k+1 \to E^{+}\left[\dfrac{L}{2}\right]+k \end{cases} \tag{6.2.84}$$

où $E^{+}[\ldots]$ est la valeur entière supérieur la plus proche au cas où L serait impair.

Le lecteur aura aussi peut-être remarqué quelque chose d'intéressant si nous reprenons notre exemple avec l'image de 16 pixels... Effectivement, prenons le troisième pixel depuis la gauche de coordonnée x égale à 2. En binaire, sa position initiale est alors 0010. Après la première permutation, sa coordonnée x est égale à 1, soit en binaire : 0001. Après la deuxième permutation, sa coordonnée x est égale 8, soit en binaire : 1000, etc. Au fait nous voyons que chaque permutation se résume en binaire à décaler les bits vers la droite.

Définition (#6.2.190) : Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. Nous disons que σ est "permutation paire" si, dans une écriture de σ comme produit de transpositions, il y a un nombre pair de transpositions. Nous disons évidemment que σ est une "permutation impaire" si, dans une écriture de σ comme produit de transpositions, il y a un nombre impair de transpositions.

Finissons par un petit complément... Nous avons que S_3 est un groupe des permutations d'ordre 3 avec donc $3!=6$ permutations possibles.

Si nous énumérons les 6 permutations nous avons vu que nous obtenons :

$$\{(1),(1\,2),(1\,3),(2\,3),(1\,2\,3),(1\,3\,2)\} \tag{6.2.85}$$

Parmi ceux-ci, seuls certains peuvent être écrits comme un produit pair de transpositions :

$$(1\,2\,3)=(1\,2)(3\,1) \quad \text{et} \quad (1\,3\,2)=(1\,3)(2\,1) \tag{6.2.86}$$

Les permutations paires forment avec la permutation identité, un sous-groupe (non commutatif !) que l'on nomme le "groupe alternatif d'ordre n" et que l'on note AN. C'est facile à vérifier avec l'exemple précédent.

6.2.2 Théorie de Galois

En algèbre abstraite, la théorie de Galois, du nom d'Évariste Galois, établit un lien entre la théorie des corps et la théorie des groupes. En utilisant la théorie de Galois, certains problèmes de la théorie des corps peuvent être réduits à la théorie des groupes, qui est, dans un certain sens, plus simple et mieux comprise.

À l'origine, Galois utilisait des groupes de permutations pour décrire comment les diverses racines d'une équation polynomiale donnée sont liées les unes aux autres.

La naissance et le développement de la théorie de Galois ont été provoqués par la question suivante, dont la réponse est connue sous le nom de "théorème d'Abel-Ruffini" : Pourquoi n'y a-t-il pas de formule pour les racines d'une équation polynomiale de degré cinq (ou supérieur) en termes de coefficients du polynôme, en utilisant uniquement les opérations algébriques habituelles (addition, soustraction, multiplication, division) et l'application de radicaux (racines carrées, racines cubiques, etc.) ?.

La théorie de Galois ne fournit pas seulement une belle réponse à cette question, elle explique également en détail pourquoi il est possible de résoudre des équations de degré quatre ou moins de la manière ci-dessus, et pourquoi leurs solutions prennent la forme qu'elles prennent. De plus, cela donne un moyen conceptuellement clair et souvent pratique de dire quand une équation particulière de degré supérieur peut être résolue de cette manière.

La théorie de Galois trouve son origine dans l'étude des fonctions symétriques : les coefficients d'un polynôme monique (polynômes dont le coefficient affecté au degré le plus haut du dénominateur doit être 1) sont (au signe près) les polynômes symétriques élémentaires dans les racines. Par exemple :

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab \tag{6.2.87}$$

où 1, $a+b$ et ab sont les polynômes élémentaires de degré 0, 1 et 2 à deux variables.

Nous avons essayé de rendre cette partie du livre aussi simple que possible. Nous espérons donc que notre objectif est atteint si vous comprenez ce qui suit. Commençons maintenant ! ! !

En cours de traduction de l'anglais

6.2.2.1 Polynômes élémentaires symétriques et invariants

Définition (#6.2.191) : Le "k-ième polynôme symétrique élémentaire à n variables", noté $s_k(x_k,\ldots,x_n)$ est la somme de tous les monômes de degré k possibles avec n variables avec chaque x_i apparaissant PAS PLUS D'UNE FOIS DANS CHAQUE MONÔME. Formellement, pour $k\leq n$:

$$s_k(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \tag{6.2.88}$$

Un polynôme est dit "invariant sous S_n" si et seulement si c'est un polynôme dans les fonctions symétriques élémentaires $s_1,\ldots,s_n$.

Dès lors :

$$\begin{aligned}
s_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=1,\\
s_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\sum_{1\leq j\leq n} x_j,\\
s_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\sum_{1\leq j<k\leq n} x_jx_k,\\
s_3(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\sum_{1\leq j<k<l\leq n} x_jx_kx_l\\
&\vdots\\
s_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned} \tag{6.2.89}$$

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Pour $n=1$:

$$s_1(x_1)=x_1, \tag{6.2.90}$$

Pour $n=2$:

$$\begin{aligned} s_1(x_1,x_2)&=x_1+x_2\\ s_2(x_1,x_2)&=x_1x_2 \end{aligned} \tag{6.2.91}$$

Pour $n=3$:

$$\begin{aligned} s_1(x_1,x_2,x_3)&=x_1+x_2+x_3,\\ s_2(x_1,x_2,x_3)&=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\\ s_3(x_1,x_2,x_3)&=x_1x_2x_3 \end{aligned} \tag{6.2.92}$$

Pour $n=4$:

$$\begin{aligned} s_1(x_1,x_2,x_3,x_4)&=x_1+x_2+x_3+x_4\\ s_2(x_1,x_2,x_3,x_4)&=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\\ s_3(x_1,x_2,x_3,x_4)&=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4\\ s_4(x_1,x_2,x_3,x_4)&=x_1x_2x_3x_4 \end{aligned} \tag{6.2.93}$$

Considérons maintenant l'équation :

$$ax^2+bx+c=0 \tag{6.2.94}$$

Elle peut être réécrite comme :

$$1\cdot x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \tag{6.2.95}$$

ou comme nous connaissons les relations de Viète à deux racines, ces dernières peuvent être réécrites :

$$1\cdot x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2=(x-r_1)(x-r_2)=0 \tag{6.2.96}$$

C'est-à-dire :

$$s_0 \cdot x^2 - s_1 x + s_2 = 0 \quad (6.2.97)$$

De même, pour un polynôme du troisième degré :

$$\begin{aligned}&ax^3+bx^2+cx+d=\\&a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=a[x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x-r_1r_2r_3]\\&=a[s_0x^3-s_1x^2+s_2x-s_3]\end{aligned} \quad (6.2.98)$$

et dès lors :

$$s_1=r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a} \qquad s_2=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\frac{c}{a} \qquad s_3=r_1r_2r_3=-\frac{d}{a} \quad (6.2.99)$$

Les polynômes symétriques élémentaires apparaissent lorsque nous développons une factorisation linéaire d'un polynôme monique. Nous avons l'identité :

$$\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)=x^n-s_1(r_1,\ldots,r_n)x^{n-1}+s_2(r_1,\ldots,r_n)x^{n-2}+\cdots+(-1)^n s_n(r_1,\ldots,r_n) \quad (6.2.100)$$

C'est-à-dire que lorsque nous substituons des valeurs numériques aux variables $r_1,r_2,\ldots,r_n$, nous obtenons le polynôme univarié monique (avec la variable x) dont les racines sont les valeurs substituées à $r_1,r_2,\ldots,r_n$ et dont les coefficients sont à leur signe près les polynômes symétriques élémentaires. Ces relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme sont nommées "formules générales de Viète" pour lesquelles nous avons déjà vu deux cas particuliers dans la section Calcul et que nous généraliserons plus loin.

Théorème 6.7. Si $r_1,r_2,\ldots,r_n$ sont les racines d'un polynôme de degré n, alors :

$$\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)=x^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i(r_1,\ldots,r_n)x^{n-i} \quad (6.2.101)$$

Démonstration 6.7.1. Nous allons prouver ceci par récurrence sur le degré du polynôme. Si notre polynôme est de degré $n=1$ avec la racine r, le côté gauche est $x-r$, et le côté droit est $x-s_1(r)=x-r$, donc l'équation est vraie pour $n=1$. Supposons que l'équation soit vraie pour tous les polynômes de degré n. Soit $P(x)$ de degré $n+1$ de racines $r_1,\ldots,r_{n+1}$.

Dès lors, nous pouvons écrire :

$$P(x)=(x-r_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=(x-r_{n+1})\left(x^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i}\right) \quad (6.2.102)$$

où nous laissons s_i dénoter $s_i(r_1,\ldots,r_n)$ par souci de concision. En multipliant le membre de

En cours de traduction de l'anglais

droite :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-r_{n+1})\left(x^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i}\right)\\
&= x^{n+1}+x\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i}-r_{n+1}x^n-r_{n+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i}\\
&= x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i+1}-r_{n+1}x^n+r_{n+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} s_i x^{n-i}\\
&= x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i+1}-r_{n+1}x^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} s_i r_{n+1} x^{n-i}\\
&= x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_i x^{n-i+1}-r_{n+1}x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1} s_i r_{n+1} x^{n-i}+(-1)^{n+1}s_n r_{n+1} \qquad (6.2.103)\\
&= x^{n+1}+(-1)s_1x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1} s_{i+1} x^{n-i}-r_{n+1}x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1} s_i r_{n+1} x^{n-i}+(-1)^{n+1}s_n r_{n+1}\\
&= x^{n+1}+(-1)s_1x^n-r_{n+1}x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}(s_{i+1}+s_i r_{n+1})x^{n-i}+(-1)^{n+1}s_n r_{n+1}\\
&= x^{n+1}-(r_{n+1}+s_1)x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}(s_{i+1}+s_i r_{n+1})x^{n-i}+(-1)^{n+1}s_n r_{n+1}
\end{aligned}$$

Étant donné que :

$$s_1+r_{n+1}=(r_1+\ldots+r_n)+r_{n+1}=s_1(r_1,\ldots,r_{n+1}) \qquad (6.2.104)$$

et :

$$s_n r_{n+1}=(r_1r_2\ldots r_n)r_{n+1}=s_{n+1}(r_1,\ldots,r_{n+1}) \qquad (6.2.105)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^{n+1}-(r_{n+1}+s_1)x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}(s_{i+1}+s_i r_{n+1})x^{n-i}+(-1)^{n+1}s_n r_{n+1}\\
&= x^{n+1}-s_1(r_1,\ldots,r_{n+1})x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}(s_{i+1}+s_i r_{n+1})x^{n-i}+(-1)^{n+1}s_{n+1}(r_1,\ldots,r_{n+1}) \qquad (6.2.106)
\end{aligned}$$

Reste maintenant que si l'on peut prouver que :

$$s_{i+1}+s_i a_{n+1}=s_{i+1}(a_1,\ldots,a_{n+1}) \qquad (6.2.107)$$

pour tous les autres i, nous pourrons conclure que l'équation est vraie pour $n+1$, donc pour tous les n.

Rappelez-nous que par définition :

$$s_k(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \qquad (6.2.108)$$

En cours de traduction de l'anglais

Alors :

$$s_{i+1}(r_1,\ldots,r_{n+1})=\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_{i+1}\leq n+1} r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_{n+1}} \tag{6.2.109}$$

En séparant la somme par rapport aux monômes divisibles par r_{n+1}, nous voyons que ce qui précède est égal à (la plupart du temps le mieux est de vérifier cela en utilisant l'un des exemples précédents donnés plus tôt) :

$$\begin{gathered}\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_{i+1}\leq n+1} r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_{i+1}}=\\ \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_{i+1}\leq n} r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_{i+1}}+r_{n+1}\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} r_{j_1}r_{j_2}\ldots r_{j_i}=s_{i+1}(r_1,\ldots,r_{n+1})+r_{n+1}s_i(r_1,\ldots,r_n)\end{gathered} \tag{6.2.110}$$

il est donc clair que la relation que nous voulions tient !

■ Q.E.D.

6.2.2.2 Formules générales de Viète

Si nous écrivons l'équation du second degré comme suit :

$$a_2x^2+a_1x+a_0=0 \tag{6.2.111}$$

Nous savons déjà que :

$$s_1=r_1+r_2=-\frac{a_1}{a_2}\qquad s_2=r_1r_2=\frac{a_0}{a_2} \tag{6.2.112}$$

Et aussi pour un polynôme du troisième degré nous avons vu juste plus haut dans les exemples que si nous avons :

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \tag{6.2.113}$$

alors :

$$s_1=r_1+r_2+r_3=-\frac{a_2}{a_3}\quad s_2=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\frac{a_1}{a_3}\quad s_3=r_1r_2r_3=-\frac{a_0}{a_3} \tag{6.2.114}$$

Nous pouvons facilement voir émerger un motif qui est :

$$\boxed{s_k=\sum_{i\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} r_{i_1}r_{i_2}\ldots r_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_k}} \tag{6.2.115}$$

En cours de traduction de l' anglais

~90 %

16 votes, 81.25%

6.3. Calcul Différentiel et Intégral

Le calcul différentiel est un des domaines les plus passionnants et vastes de la mathématique, et il existe une littérature considérable (colossale) sur le sujet. Les résultats initiés par des scientifiques comme Fermat, Newton, Leibniz, Euler et compagnie depuis la fin du 17ème siècle retrouvent des implications dans absolument tous les domaines de la physique, de l'informatique, de l'électronique, de la chimie, de la finance, de la biologie et de la mathématique elle-même.

Les mathématiciens ont rédigé une telle quantité de théorèmes depuis sa naissance au milieu du 16ème siècle sur le sujet que la validation d'un échantillon de ceux-ci est parfois délicate car nécessitant à eux-seuls la vie d'un homme pour être parcourus (c'est un problème que la communauté des mathématiciens reconnaît) et vérifiés (ce qui fait que parfois personne ne les vérifie...).

Ce constat fait, nous avons choisi de ne présenter ici que les points absolument nécessaires à la compréhension des outils fondamentaux de l'ingénieur. Les puristes nous excuseront donc pour l'instant de ne pas présenter certains théorèmes qui peuvent leur sembler indispensables mais que nous rédigerons une fois le temps venu...

Nous allons principalement étudier dans ce qui va suivre ce que les mathématiciens aiment bien préciser (et ils ont raison) : les cas généraux des fonctions réelles à une variable réelle. Les fonctions plus complexes (à plusieurs variables réelles ou complexes, continues ou discrètes) viendront une fois cette partie terminée.

Erreurs de traduction de l'anglais

Remarque

Nous ne nous attarderons pas à démontrer les dérivées et primitives de toutes les fonctions car comme il y a une infinité de fonctions possibles, il y a également une infinité de dérivées et de primitives. C'est le rôle des professeurs dans les instituts scolaires d'entraîner les élèves à appliquer et à comprendre le raisonnement de dérivation et d'intégration par des applications sur des fonctions connues (l'Internet ne remplacera très probablement jamais l'école à ce niveau).

6.3.1 Calcul Différentiel

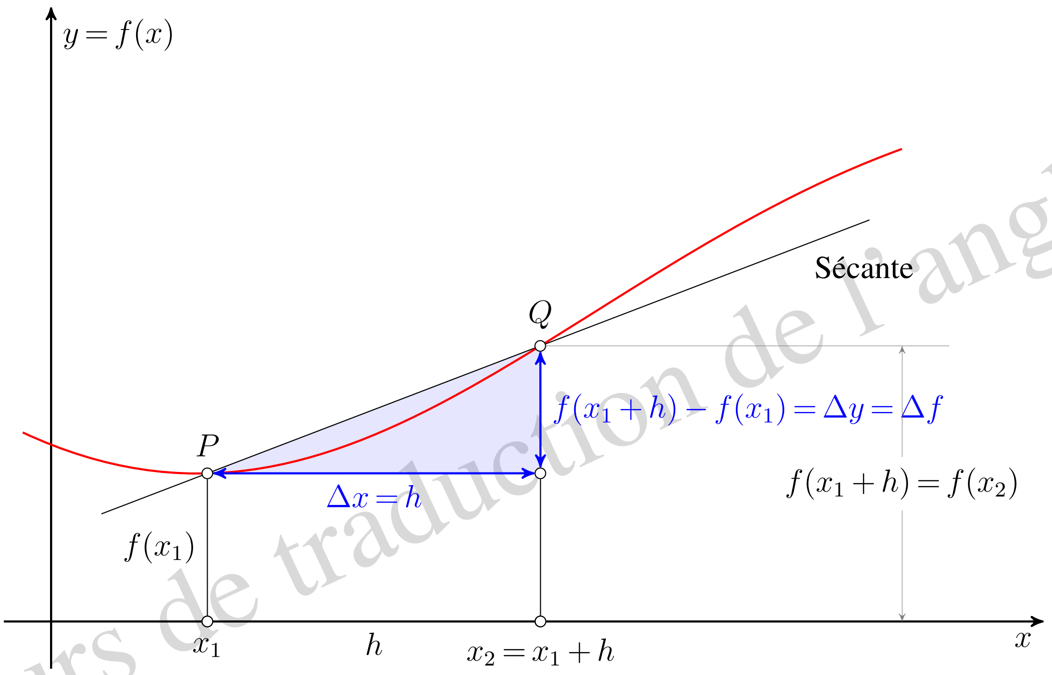
Soit une fonction f réelle à une variable réelle x notée $f(x)$ (nous nous limitons à ce cas de figure pour l'instant et étudierons les dérivées partielles dans des espaces à un nombre de dimensions quelconques plus loin) continue au moins dans un intervalle où se situe l'abscisse a.

Définitions (#6.3.192) :

D1. Nous appelons "pente moyenne", ou encore "coefficient directeur" le rapport de la projection orthogonale de deux points $x_1 \neq x_2$ de la fonction f non nécessairement continue sur l'axe des abscisses et des ordonnées tel que :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - (x_1)} \underset{x_1 := a}{=} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (6.3.1)$$

Ce qui se représente sous forme graphique de la manière suivante avec une fonction particulière :



En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Δ signifiant "un delta" exprime le fait que nous sous-entendons une différence d'une même quantité.

Nous supposerons comme évident (sans démonstration) que deux fonctions dont les pentes sont les mêmes dans un même intervalle de définition, y sont parallèles (ou confondues).

Remarque

Nous démontrerons dans la section de Géométrie Analytique que deux fonctions dont la multiplication des pentes vaut -1 sont perpendiculaires.

D2. Nous appelons "nombre dérivé en a" ou "pente instantanée" ou encore "dérivée première", la limite quand h tend vers 0 (si elle existe) du rapport de la projection orthogonale de deux points infiniment proches $x_1 \neq x_2$ de la fonction f continue (dans le sens qu'elle ne

contient pas de "trous") sur l'axe des abscisses x et des ordonnées y tel que :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} = \frac{f(a+h)-f(h)}{h} = f'(a) \tag{6.3.2}$$

Cette relation est parfois nommée "quotient de différence de Newton".

Une interprétation graphique donne donc bien que $f'(a)$ est le coefficient directeur (la pente de la tangente au point d'abscisse a).

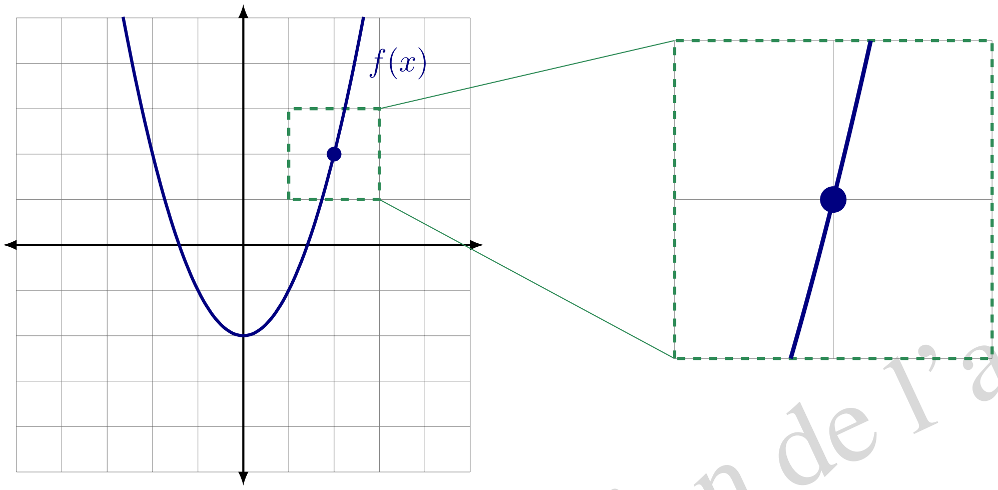


FIG. 6.22 – Une fonction continue à la limite ressemble toujours à une tangente (auteur : Lauren K. Williams)

La "tangente" à une courbe Γ en un point A est la position limite, lorsqu'elle existe, de la sécante AB lorsque le point B de la courbe tend vers le point A. Pour être rendue parfaitement rigoureuse, cette définition nécessite l'introduction de notions de topologie permettant le calcul d'une telle limite comme nous le verrons dans la section d'Analyse Fonctionnelle à la page 2201.

En cours de traduction de l'anglais

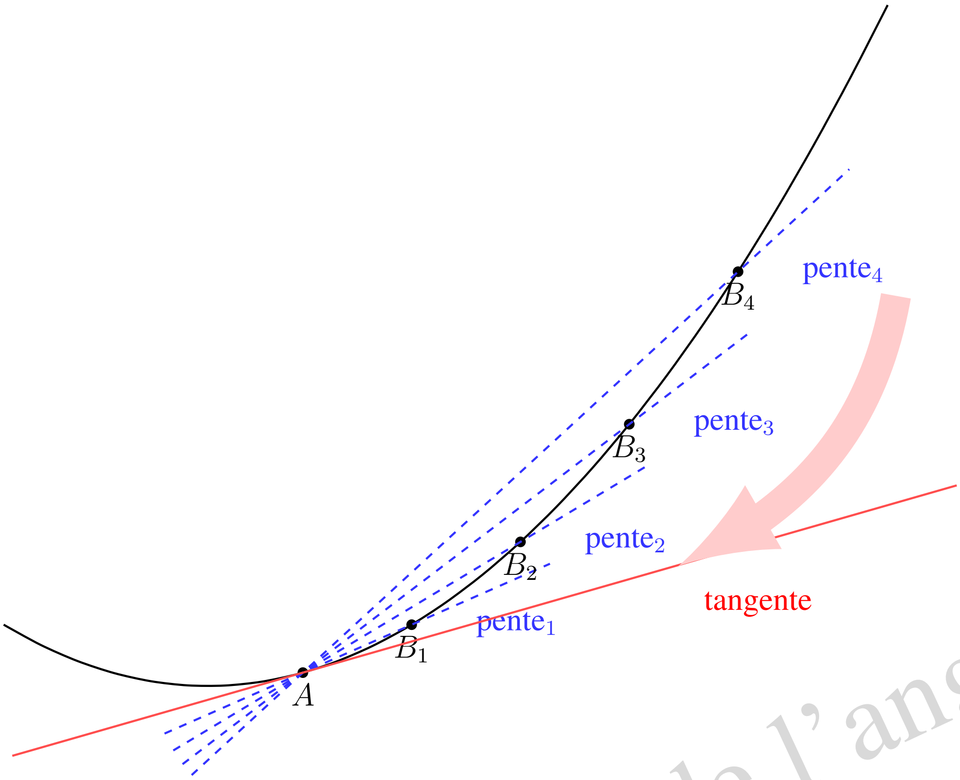


FIG. 6.23 – **Sécante vs Tangente**

En construction de l'anglais

Remarques

R1. La lettre d (écrite à la verticale, non en italique comme le recommande la norme internationale ISO 80000-2 : *Quantités et unités - Partie 2 : Signes et symboles mathématiques à utiliser dans les sciences naturelles et la technologie*) signifie ici un "différentiel" et exprime le fait que nous prenons une différence infinitésimale de la quantité concernée.

R2. Nous renvoyons le lecteur à la section d'Analyse Fonctionnelle (page 2201) pour la définition de ce qu'est exactement une fonction continue.

D3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point a de I, la fonction qui à tout réel a de I associe le nombre $f'(a)$ est appelée "fonction dérivée de f sur I" et est notée f'.

Remarque

Au niveau des notations les physiciens adoptent suivant leur humeur différentes notations possibles pour les dérivées. Ainsi, considérons la fonction réelle $f(x)$ à une variable réele x, vous trouverez dans la littérature ainsi que dans le présent livre les différentes notations suivantes pour la dérivée première :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\mathrm{d}_x f(x)=\dot{f}(x)=f'(x) \quad (6.3.3)$$

ou encore en considérant implicitement que f est fonction de x (ceci permet d'al-

léger un petit peu la tailles des développements) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\mathrm{d}_x f(x)=\dot{f}=f' \tag{6.3.4}$$

Nous pouvons de la même manière définir les dérivées d'ordre 2 (dérivée d'une dérivée), les dérivées d'ordre 3 (dérivée d'une dérivée d'ordre 2) et ainsi de suite. Nous rencontrerons par ailleurs très fréquemment de telles dérivées en physique (et même en maths pour l'analyse fonctionnelle).

Précisons que les dérivées d'ordre 2 ont une interprétation très importante en physique et dans le domaines de l'optimisation (voir section Méthodes Numériques page ??). Effectivement, si le signe de la dérivée première est positif puis devient négatif quand x croît, alors nous devinons facilement que nous parcourons un maximum local d'une fonction (point où la dérivée est nulle) et que si le signe de la dérivée première est négatif puis devient positif quand x croît, alors nous parcourons un minimum local de la fonction (point où la dérivée est aussi nul). En d'autres termes, lorsque la pente change de signe (s'annule en changeant de signe) la fonction passe par un extremum (minimum ou maximum) et la tangente est "horizontale" en ce point : parallèle à l'axe des abscisses. Nous parlons alors de "point tournant" :

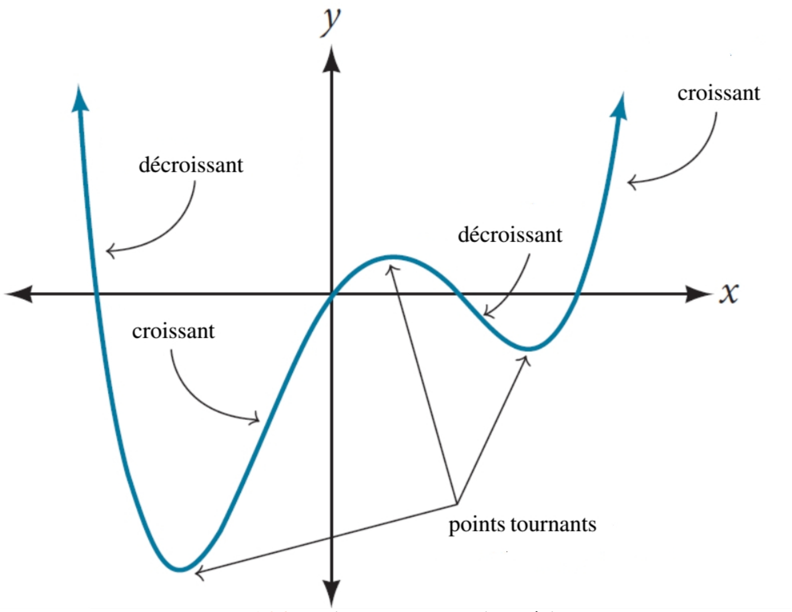


FIG. 6.24 – **Points tournants mis en évidence**

Mais lorsque la dérivée d'ordre 2 est nulle, cela signifie que la courbure de la fonction s'inverse. On parle alors d'un "point d'inflexion" :

En cours de l'anglais

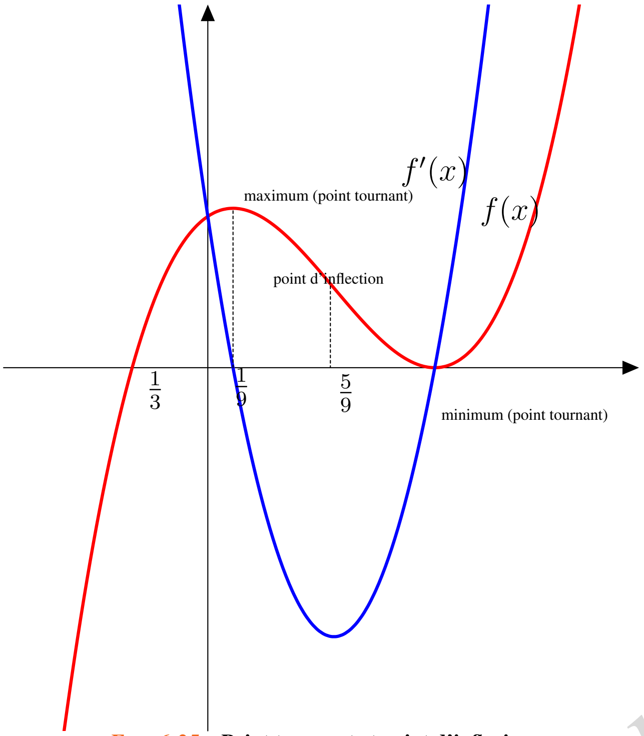


FIG. 6.25 – **Point tournant et point d'inflexion**

Donc chose très importante qu'il faudra toujours avoir en tête (! ! !) quand vous poserez que la dérivée d'une fonction est nulle, c'est que nous pouvons avoir une dérivée qui s'annule en un point sans que ce soit un extremum (nous appelons cela un point d'inflexion). Pour contrôler que ce soit bien un maximum, nous pouvons calculer la dérivée seconde afin d'éliminer le cas d'un point d'inflexion. Sinon il faut recourir à un tableau de variation pour s'assurer que nous avons affaire à un maximum ou à un minimum comme par exemple avec la fonction $x^3 - 3x^2 + 2$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Dont le tracé correspondant est :

En cours de traduction de l'anglais

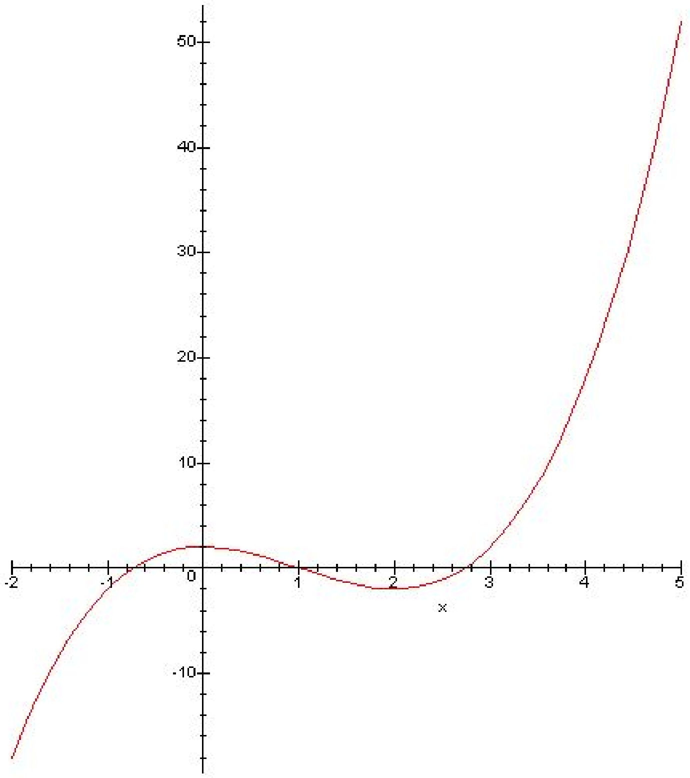


FIG. 6.26 – **Plot of function** $x^3 - 3x^2 + 2$

Un autre exemple avec $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$:

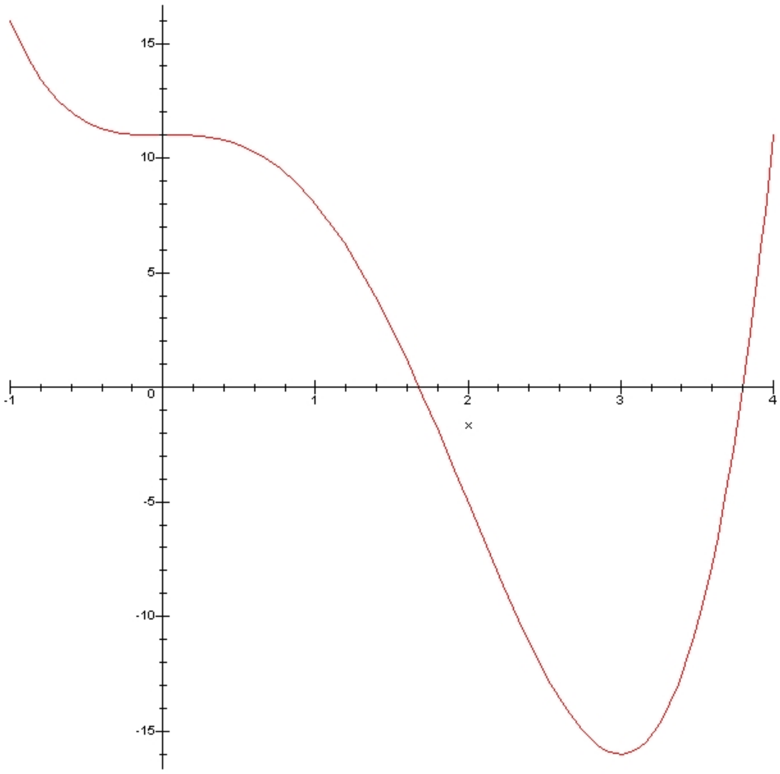


FIG. 6.27 – **Tracé de la fonction** $x^4 - 4x^3 + 11$

En cours de traduction de l'anglais

Avec une table de variation plus détailée :

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	11 Σ.K.	↘	-5 Σ.K.	↘	-16 T.E.	↗	$+\infty$

Voici un exemple d'une fonction avec ses dérivées première et seconde avec Maple 4.00 :

```
>plot([tanh(x),diff(tanh(x),x),diff(tanh(x),x$2)],x=-5...5,
color=[red,green,blue]);
```

En cours ... anglais

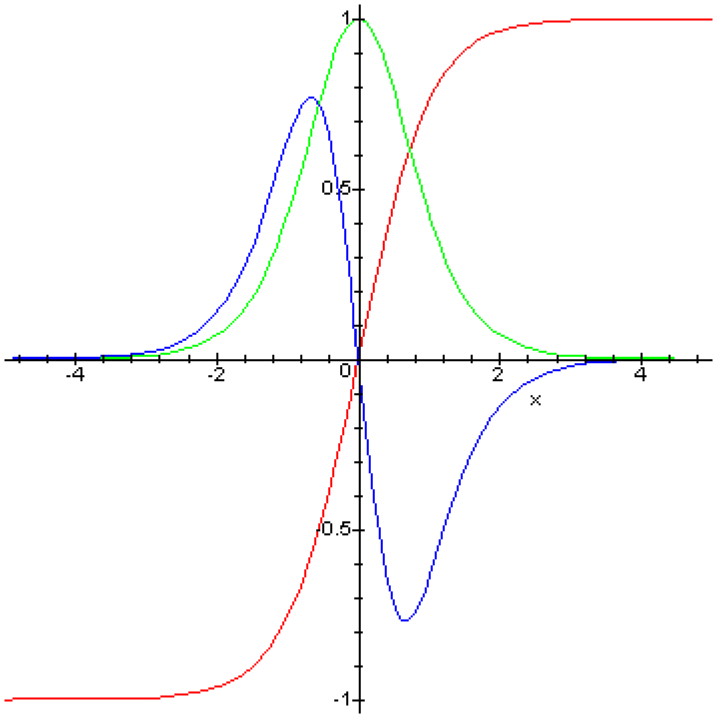


FIG. 6.28 – **Tracé de la fonction tangente hyperbolique, sa dérivée première et seconde**

La "dérivée seconde" ou "dérivée du second ordre" est donnée par :

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{6.3.5}$$

En effet, en utilisant les développements en série de Taylor (voir page 1703) de $f(x+h)$ et

$f(x-h)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

L'addition des relations ci-dessus donne :

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x) + 2\frac{f''''(x)}{4!}h^2 + \cdots \tag{6.3.7}$$

en prenant la limite de l'équation ci-dessus lorsque h tend vers zéro, nous obtenons le résultat souhaité :

$$f''(x) = \lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \tag{6.3.8}$$

Remarque

Deux bonnes fonctions pour se souvenir facilement de la propriété de la dérivée seconde sont $f(x)=x^2$ et $f(x)=-x^2$. Comme vous le savez, la première a un minimum global et la second un maximum global et si vous calculez la dérivée seconde pour la première, vous obtenez une constante positive et une constante négative pour la seconde.

Un point d'inflexion très important dans les affaires et la science est le point d'inflexion de la distribution Normale (voir section Statistiques page 680).

Étant donné la fonction de la distribution de Gauss univariée :

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.3.9}$$

Les points d'inflexion se produisent lorsque la dérivée seconde $f''(x)=0$. Donc, nous devons le calculer. D'abord :

$$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.3.10}$$

Dès lors :

$$f''(x) = \frac{(x-\mu-\sigma)(x-\mu+\sigma)}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.3.11}$$

Nous la posons comme étant égale à zéro :

$$0 = \frac{(x-\mu-\sigma)(x-\mu+\sigma)}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6.3.12}$$

Nous avons donc deux situations possibles :

$$0 = (x-\mu-\sigma) \qquad \text{et} \qquad 0 = (x-\mu+\sigma) \tag{6.3.13}$$

En cours de traduction anglais

Par conséquent, les deux points d'inflexion se produisent à :

$$x = \mu \pm \sigma \tag{6.3.14}$$

ou un écart-type au-dessus et au-dessous de la moyenne !

Maintenant, suite à un problème de compréhension de la part d'un lecteur dans un des chapitres de ce livre, précisons une technique utilisée fréquemment par les physiciens. Considérons une dérivée d'ordre 2 telle que :

$$\ddot{f} = f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right) \tag{6.3.15}$$

Si nous regardons le $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ comme un opérateur différentiel (ce qu'il est !) nous pouvons bien évidemment écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f(x) \tag{6.3.16}$$

Finalement nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f(x) \tag{6.3.17}$$

et donc il vient après simplification par $f(x)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{6.3.18}$$

sinon quoi nous ne pouvons pas avoir cette égalité si l'opérateur agit explicitement sur une fonction dans une relation mathématique ou physique quelconque.

Cela peut paraître évident pour certains mais parfois moins pour d'autres... et il était visiblement utile de préciser cela car c'est souvent utilisé dans les sections de Relativité Restreinte, Relativité Générale, Physique Quantique Corpusculaire et Physique Quantique Ondulatoire.

Indiquons et démontrons maintenant deux propriétés intuitivement évidentes des dérivées et qui nous seront plusieurs fois indispensables pour certaines démonstrations dans ce livre (comme par exemple dans le chapitre de méthodes numériques ou ici même...).

Théorème 6.8. Considérons d'abord deux nombres réels $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors nous voulons démontrer qu'il existe bien évidemment au moins un élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$ (c'est typiquement le cas des fonctions polynômiales !).

Cette propriété est appelée "théorème de Rolle" et donc explicitement elle montre qu'il existe au moins un élément où la dérivée de f est nulle si en la parcourant nous revenons à la même valeur des images pour deux valeurs distinctes des abscisses, c'est-à-dire qu'il existe au moins un point où la tangente est horizontale.

En cours de traduction de l' anglais

Démonstration 6.8.1. Si f est constante, le résultat est immédiat... Dans le cas contraire, comme f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ elle admet au moins un minimum global ou maximum global compte tenu que nous nous basons sur l'hypothèse que et que f n'est pas constante. L'extrema est atteint en un point c appartenant à l'intervalle ouvert $]a,b[$ (le fait de prendre l'intervalle ouvert permet dans certains cas d'éviter d'avoir un extrema à nouveau en a ou en b).

Supposons comme premier cas que $f(c)$ est maximum global. La dérivée de la fonction f entre c et un deuxième point a alors un signe connu.

- Pour h strictement positif et tel que $c+h$ appartienne à l'intervalle $[a,b]$:
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0 \tag{6.3.19}$$
En considérant la limite quand h tend vers 0, la valeur de la dérivée $f'(c)$ est négative.
- Pour h strictement négatif et tel que $c+h$ appartienne à l'intervalle $[a,b]$:
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0 \tag{6.3.20}$$
En considérant la limite quand h tend vers 0, le nombre dérivé $f'(c)$ est positif.

Au bout du compte, la dérivée de f est nulle au point c.

La démonstration est analogue si $f(c)$ est un minimum global, avec les signes des dérivées qui sont les opposés.

■ Q.E.D.

Maintenant, considérons deux réels a,b et $f(x)$ une fonction continue sur $[a,b]$ (c'est-à-dire $\mathcal{C}([a,b])$) et dérivable sur $]a,b[$.

Théorème 6.9. Alors, nous nous proposons de montrer qu'il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{6.3.21}$$

Ce qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$f(x_0+k)-f(x_0)=f'(x_0+s\cdot k)k \tag{6.3.22}$$

avec $s\in]0,1[$.

Puisque le terme de gauche représente une augmentation finie du terme de droite, alors ce résultat est nommé "théorème de la valeur moyenne" ou mieux "théorème des incréments finis".

Géométriquement cela signifie qu'en au moins un point c du graphe de la fonction $f(x)$, il existe une tangente de coefficient directeur :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{6.3.23}$$

En cours de traduction de l'anglais

Graphiquement cela donne :

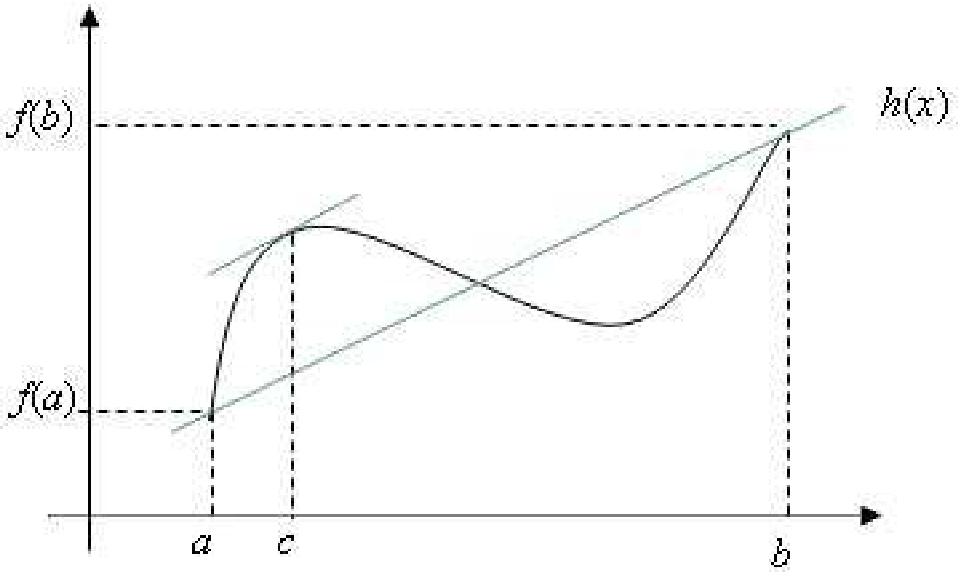


FIG. 6.29 – **Représentation graphique du théorème de Rolle**

Démonstration 6.9.1. Nous avons premièrement :

$$h(x) = (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a) \tag{6.3.24}$$

parce que la pente de $h(x)$ est trivialement :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{6.3.25}$$

et comme nous devons avoir $f(a)$ lorsque $x = a$ il s'ensuit la relation donnée précédemment.

Ensuite, pour montrer qu'une telle valeur c existe, l'idée est de ramener les deux points a et b dans la même ordonnée ce qui nous ramène au théorème de Rolle et pour cela, nous définissons une fonction $g(x)$ par :

$$g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - \left[(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)\right] \tag{6.3.26}$$

qui est telle qu'en effet $g(a) = g(b)$ ... et est dans ce cas égal à 0 (mais cette valeur n'est pas pertinente).

Par conséquent, le théorème de Rolle discuté ci-dessus indique qu'il existe un point entre a et b où la dérivée de $g(x)$ est nulle telle que $g'(c) = 0$. Et en voyant ça :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{6.3.27}$$

Nous avons alors

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \tag{6.3.28}$$

Dès lors après simplification :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \tag{6.3.29}$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Puisque le terme de gauche représente un accroissement fini du terme de droite, alors ce résultat est appelée "théorème des accroissements finis"" (TAF).

A l'aide de ce petit théorème et des outils mathématiques introduits précédemment, nous pouvons construire un petit théorème fort utile et puissant en physique.

Définition (#6.3.193) : Nous appelons "règle de L'Hôpital" (également appelée "règle de Bernoulli") le procédé qui utilise la dérivée dans le but de déterminer les limites difficiles à calculer de la plupart des quotients et qui apparaissent souvent en physique (la règle porte le nom du mathématicien français Guillaume de l'Hôpital du 117ème siècle - selon le calendrier holocène. Bien que la règle soit souvent attribuée à l'Hôpital, le théorème lui a été présenté pour la première fois en 11694 par le mathématicien suisse Johann Bernoulli).

Démonstration 6.9.2. Considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ et telles que $f(a)=g(a)=0$ alors nous pouvons écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\frac{x-a}{x-a}=\frac{f(x)}{x-a}\frac{x-a}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{x-a}{g(x)-g(a)} \quad (6.3.30)$$

Alors selon la définition de la dérivée :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-h}\frac{(a+h)-h}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (6.3.31)$$

■ Q.E.D.

Nous pouvons généraliser ce résultat précédent initialement basé sur la contrainte un peu trop forte :

$$f(a)=g(a)=0 \quad (6.3.32)$$

Démonstration 6.9.3. Rappelons donc que selon le théorème des accroissements finis, si $f(x)$ est dérivable sur un intervalle $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$ alors il existe un réel c dans l'intervalle $[a,b]$ tel que :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-c} \quad (6.3.33)$$

Si le théorème se vérifie pour deux fonctions satisfaisant aux mêmes contraintes alors nous avons deux fonctions telles que :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-c} \quad \text{et} \quad g'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-c} \quad (6.3.34)$$

Si $g'(c)$ est non nul nous avons alors tout à fait le droit d'écrire le rapport (certains appellent cela le "théorème des accroissements fini généralisé"...) :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b-a}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad (6.3.35)$$

En cours de traduction de l' anglais

ce qui sans perdre en validité tant que c est dans l'étau $[a,x]$ peut s'écrire :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \tag{6.3.36}$$

Ainsi, lorsque $x\rightarrow a$ ce qui implique que l'étau $[a,x]$ se referme et donc $c\rightarrow a$, nous avons :

$$\lim_{x\rightarrow a}=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}\frac{(a+h)-a}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{6.3.37}$$

Ainsi, nous venons de prouver quand dans la démonstration précédente de la règle de l'Hôpital la relation :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}\frac{(a+h)-a}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{6.3.38}$$

que nous avions est vraie en toute généralité et qu'il n'est pas nécessaire que $f(a)=g(a)=0$ soit vrai pour que le résultat soit juste !

■ Q.E.D.

Remarque

Le résultat peut être généralisé, toujours sous la même condition, avec :

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f^{(k+1)}(x)}{g^{(k+1)}(x)} \tag{6.3.39}$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Nous voulons calculer :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} \tag{6.3.40}$$

Il y a deux façons de résoudre ça ! On peut d'abord factoriser :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{4} \tag{6.3.41}$$

Soit en utilisant la règle de l'Hôpital (nous voyons que l'hypothèse $f(2)=g(2)=0$ est satisfaite !) :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{2x} = \frac{5}{4} \tag{6.3.42}$$

Mais nous voyons que nous ne pouvons pas appliquer la règle de l'Hôpital deux fois car les hypothèses ne seraient pas remplies.

E2. Nous voulons calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{2+x-4x^2} \tag{6.3.43}$$

Nous ne pouvons évidemment pas appliquer la règle de l'Hôpital puisque $f(+\infty) \neq g(+\infty) \neq 0$. La technique de factorisation échouera également. Nous devons utiliser une astuce de puissance.

On divise par la puissance du plus grand dénominateur :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{2+x-4x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-4} = -\frac{1}{4} \tag{6.3.44}$$

Nous mettons également en garde contre la précédente "règle de division par la puissance la plus élevée" qui est applicable dans le scénario spécifique où nous prenons une limite à l'infini ou moins l'infini ET l'expression limite est de la forme $P(x)/Q(x)$ où P et Q sont des combinaisons linéaires de puissances de x et la plus grande puissance de x apparaissant dans l'expression entière est non négative.

6.3.1.1 Différentielles

Nous avons indiqué précédemment ce qu'était un différentiel d. Mais il existe en fait plusieurs types de sortes de différentielles d'une fonction (remarquez que nous distinguons le genre masculin et féminin du terme) :

1. Les différentielles
2. Les différentielles partielles
3. Les différentielles totales exactes
4. Les différentielles totales inexactes

Rappelons que nous appelons "différentiel $\mathrm{d}f$" d'une fonction univariée à une variable la relation donnée par (voir texte précédent) :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x} \tag{6.3.45}$$

Cependant, pour exprimer l'effet d'un changement de toutes les variables d'une fonction f de plusieurs variables (ie multivariée), nous devons utiliser une autre type de différentielle que nous appelons la "différentielle totale" (dérivée en deux sous-familles : différentielle totale exacte et différentielle totale inexacte que nous détaillerons plus loin).

Soit par exemple, une fonction $f(x,y)$ des deux variables x et y. L'accroissement $\mathrm{d}f$ de la fonction f, pour un accroissement fini de x à $x+\Delta x$ et y à $y+\Delta y$ est évidemment donné par :

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x), y+\Delta y) - f(x,y) \tag{6.3.46}$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x), y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \tag{6.3.47}$$

Ou encore :

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+\Delta x), y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y \tag{6.3.48}$$

Pour des accroissements infiniment petits de x et y :

$$\mathrm{d}f = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x), y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x\right) + \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y\right) \tag{6.3.49}$$

Intéressons-nous dès lors aux deux termes au passage à la limite :

$$\frac{f(x+\mathrm{d}x), y+\mathrm{d}y) - f(x, y+\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \frac{f(x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)}{\mathrm{d}y} \tag{6.3.50}$$

Le premier terme de gauche, nous le voyons, ne donne finalement que la variation en x de la fonction $f(x,y)$ en ayant y constant sur la variation. Nous notons cela dès lors (si la connaissance des variables constantes est triviale, nous ne les indiquons plus) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{f(x+\mathrm{d}x), y+\mathrm{d}y) - f(x, y+\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}x} \tag{6.3.51}$$

En cours de traduction de l'anglais

et de même :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{f(x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)}{\mathrm{d}y} \tag{6.3.52}$$

Remarque

Quand une variable est fixée pour étudier la variation de l'autre, certains auteurs ou professeurs des anciennes générations aiment à dire : "toutes choses égales par ailleurs f varie en fonction de ... de façon ....". Bref, c'est un usage que l'on retrouve dans d'autres domaines (comme les régressions linéaires à plusieurs variables explicatives) mais qui se perd...

Les deux expressions :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \tag{6.3.53}$$

sont ce que nous appelons des "différentielles partielles" ou plus simplement "dérivée partielle" (dont le cas d'application pratique le plus simple et probablement le plus intéressant et pédagogiquement pertinent disponible à ce jour dans l'entier de ce livre est le modèle d'approvisionnement de Wilson avec rupture présenté dans la section de Techniques De Gestion).

En cours de traduction de l'anglais

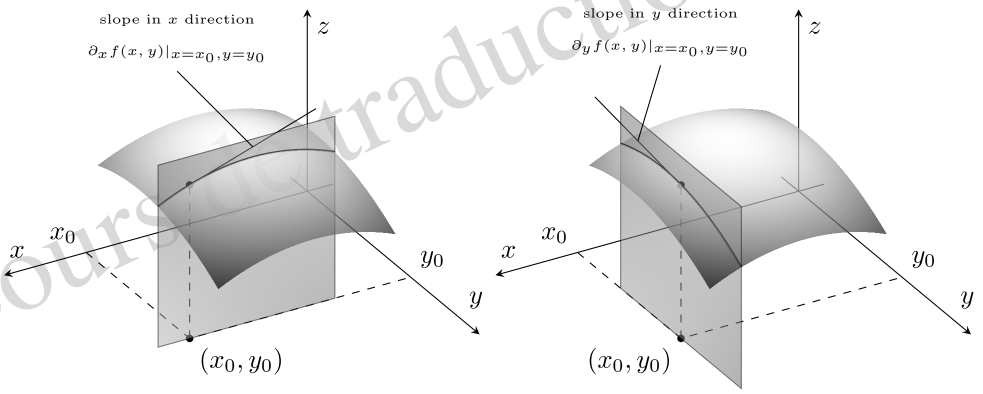


FIG. 6.30 – **Dérivée partielle illustrée**

✍**Exemple :**

Considérons $f(x,y) = x^2 + y^3 + e^{xy^2}$. Calculer la dérivée partielle équivaut à calculer la dérivée classique avec les autres variables traitées comme constantes. Par exemple :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y = 2x + y^2 e^{xy^2}$$

Les dérivées secondes et partielles mixtes peuvent également être calculées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 + y^4 e^{xy^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}\end{aligned}$$

Il est souvent fastidieux d'écrire les variables qui restent constantes. Si toutes les autres variables restent constantes, nous ne les écrivons tout simplement pas et notons simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Nous avons alors :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{6.3.54}$$

qui est la "différentielle de f". Les thermodynamiciens parlent souvent eux de la "différentielle totale exacte de f" ou plus simplement "différentielle exacte de f" ou encore de "dérivée totale" mais aussi de "dérivée extérieure".

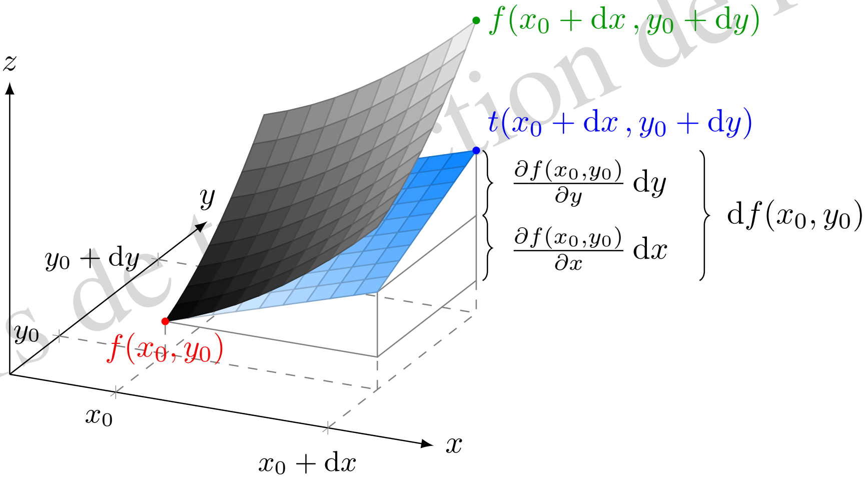


FIG. 6.31 – **Différentielle totale illustrée**

En cours de traduction de l'anglais

Il existe également un moyen plus court (question de notation) pour obtenir le même résultat en considérant un déplacement arbitraire dans n'importe quelle direction $(x, y) \to (x + \delta x, y + \delta y)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\delta f &= f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y) \\ &= f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x+\delta x, y) + f(x+\delta x, y) - f(x,y) \\ &= f_y(x+\delta x, y)\delta y + o(\delta y) + f_x(x,y)\delta x + o(\delta x) \\ &= (f_y(x,y) + o(1))\,\delta y + o(\delta y) + f_x(x,y)\delta x + o(\delta x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + o(\delta x, \delta y)\end{aligned} \tag{6.3.55}$$

Si nous prenons la limite comme $\delta x, \delta y \to 0$ nous retombons sur la relation encadrée précédente.

La relation précédente est un cas particulier de ce que les mathématiciens appellent en toute généralité une "forme différentielle" :

$$\boxed{\mathrm{d}f = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y} \tag{6.3.56}$$

nous y reviendrons un peu plus loin...

Il est d'usage de noter :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} M(x,y) \\ N(x,y) \end{pmatrix} \tag{6.3.57}$$

donc sous forme d'un champ vectoriel.

Il est important de se rappeler de la forme de la différentielle totale car nous la retrouverons partout dans des opérateurs particuliers en physique, dans la mécanique des fluides, dans la thermodynamique, etc.

Géométriquement, les dérivées partielles peuvent être interprétées comme suit : la fonction $f(x,y)$ définit une surface dans $\mathbb{R}$, dont l'intersection avec la plan $y = y_0$ est une courbe $f(x,y_0)$.

La dérivée partielle $\partial_x f$ est alors la pente de cette courbe en tout point x. Nous avons alors naturellement la fonction suivante pour la pente au point (x_0,y_0) :

$$f(x,y_0) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) \tag{6.3.58}$$

De la même manière, la tangente à la courbe $f(x_0,y)$ sera donnée par :

$$f(x_0,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{6.3.59}$$

Le plan localement tangent au point (x_0,y_0) déterminé pas ses deux tangentes est alors donné par :

$$f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{6.3.60}$$

En réorganisant les termes tel que :

$$f(x_0,y_0) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{6.3.61}$$

Nous reconnaissons :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{6.3.62}$$

Ainsi, par exemple, la surface représentée par la fonction :

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \tag{6.3.63}$$

En cours de traduction de l'anglais

est représentée ci-dessous avec les deux tangentes passant par le point :

$$(x_0, y_0) = (0.3, 0.1) \tag{6.3.64}$$

et dont les équations respectives sont :

$$\begin{aligned} f(x, y_0) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) = e^{-x^2-y^2}\Big|_{0.3,0.1} - 2xe^{-x^2-y^2}\Big|_{0.3,0.1}(x - x_0) \\ &\cong 0.905 - 0.543(x - 0.3) = -0.543x + 1.0679 \end{aligned} \tag{6.3.65}$$

et :

$$\begin{aligned} f(x_0, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = e^{-x^2-y^2}\Big|_{0.3,0.1} - 2ye^{-x^2-y^2}\Big|_{0.3,0.1}(y - y_0) \\ &\cong 0.905 - 0.181(x - 0.1) = -0.181x + 0.9231 \end{aligned} \tag{6.3.66}$$

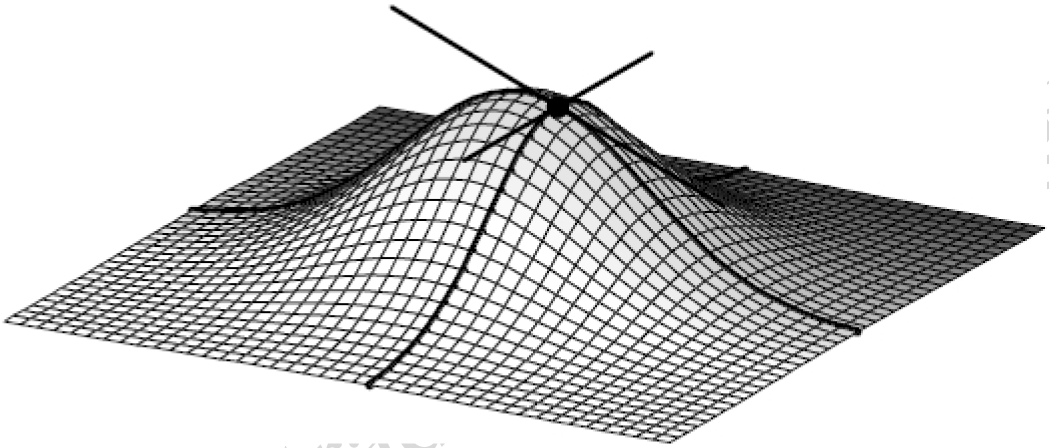


FIG. 6.32 – **Les deux tangentes de la fonction au point d'intérêt**

Nous avons le "tangent plane" en ce point qui est alors donné par :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\cong 0.905 - 0.543(x - 0.3) - 0.181(y - 0.1) = -0.543x - 0.181y + 1.086 \end{aligned} \tag{6.3.67}$$

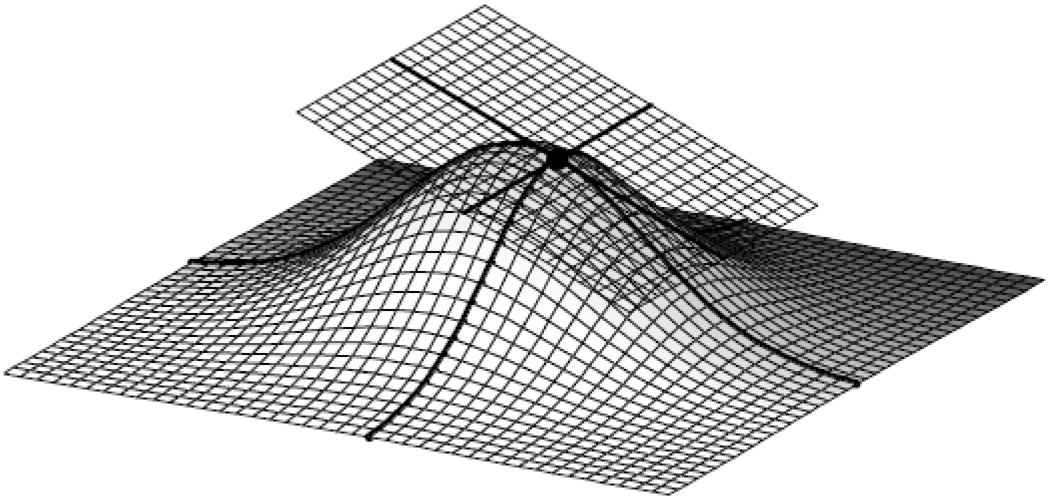


FIG. 6.33 – **Les deux tangentes de la fonction au point d'intérêt avec la plan tangent**

En cours de tra glais

Remarque

De la même manière, pour une fonction de plus de deux variables, par exemple $f(x,y,z)$, la différentielle totale $\mathrm{d}f$ est :

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \quad (6.3.68)$$

Dans l'équation ci-dessus, la différentielle $\mathrm{d}f$ a été calculée à partir de l'expression de la fonction f. Puisqu'il existe une fonction f qui vérifie l'expression de $\mathrm{d}f$, la différentielle $\mathrm{d}f$ est dite alors aussi "différentielle totale exacte".

Profitons pour faire une indication importante sur l'utilisation des dérivées partielles par les physiciens (et donc dans les nombreux chapitres y relatifs du site). Nous avons vu plus haut que si f dépend de deux variables x,y nous avons :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad (6.3.69)$$

et s'il ne dépend que d'une variable nous avons alors :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x \quad (6.3.70)$$

Et alors dans le cas univarié :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x} \quad (6.3.71)$$

raison pour laquelle les physiciens mélangent allègrement les deux notations...

Maintenant, il faut cependant savoir qu'il existe également des différentielles totales exactes qu'aucune fonction ne vérifie. Dans ce cas, nous parlons de "différentielle totale inexacte" et pour déterminer si une différentielle totale est exacte ou inexacte, nous utilisons les propriétés des dérivées partielles (cas très important en thermodynamique ! ! !).

Soit la fameuse forme différentielle générale (cela fait appel à de la géométrie différentielle) :

$$\mathrm{d}z=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y \quad (6.3.72)$$

où $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont des fonctions des variables x et y. Si $\mathrm{d}z$ est une différentielle totale exacte, alors :

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \quad (6.3.73)$$

Il faut donc que in extenso :

$$M(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x} \qquad N(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y} \quad (6.3.74)$$

ou encore, en effectuant une seconde dérivation, que :

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial M}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x} \quad (6.3.75)$$

En cours de traduction de l' anglais

pour que la forme différentielle, soit une différentielle totale exacte.

Avant de continuer, nous avons besoin d'un résultat donné par le "théorème de Schwarz" (mais qui a été démontré à la fin du 17ème siècle par un des frères Bernoulli) qui s'énonce de la manière suivante :

Théorème 6.10. Soit une fonction f, si :

$$f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{6.3.76}$$

sont continues alors nous avons (il faut vraiment vérifier que ce soit le cas !) un résultat très important dans la pratique :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \tag{6.3.77}$$

pour tout $(x_0, y_0) \in U$ où U est le domaine de définition où f est continue (et donc dérivable).

Démonstration 6.10.1. Nous considérons l'expression :

$$H = f(x_0 + k, y_0 + h) - f(x_0 + k, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \tag{6.3.78}$$

Posons :

$$\begin{aligned} g(x) &:= f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) \\ w(x) &:= f(x_0 + k, y) - f(x_0, y) \end{aligned} \tag{6.3.79}$$

Nous avons alors :

$$H = g(x_0 + k) - g(x_0) = w(y_0 + h) - w(y_0) \tag{6.3.80}$$

Par le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} H &= g(x_0 + k) - g(x_0) = kg'(x_0 + sk) \\ H &= w(y_0 + h) - w(y_0) = hw'(y_0 + th) \end{aligned} \tag{6.3.81}$$

avec $s, t \in]0, 1[$. En reprenant les définitions de g et w nous obtenons :

$$\begin{aligned} H = kg'(x_0 + sk) &= k\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + sk, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + sk, y_0)\right) \\ H = hw'(y_0 + th) &= h\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + k, y_0 + th) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + th)\right) \end{aligned} \tag{6.3.82}$$

en appliquant à nouveau le théorème des accroissements finis aux deux membres entre parenthèses nous trouvons :

$$\begin{aligned} H &= kh\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + sk, y_0 + \tilde{s}h) \\ H &= hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \tilde{t}k, y_0 + th) \end{aligned} \tag{6.3.83}$$

En cours de traduction de l'anglais

avec $\tilde{s},\tilde{t} \in]0,1[$. Pour finir nous voyons que nous avons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + sk, y_0 + \tilde{s}h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \tilde{t}k, y_0 + th) \tag{6.3.84}$$

et par continuité lorsque $k,h \rightarrow 0$, nous avons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \tag{6.3.85}$$

Plus simplement écrit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} \tag{6.3.86}$$

Donc si f s'exprime sous forme différentielle totale exacte alors les différentielles croisées sont égales (la réciproque n'est pas forcément vraie).

■ Q.E.D.

Par récurrence sur le nombre de variables nous pouvons démontrer le cas général (c'est long mais c'est possible, nous le ferons si besoin il y a...).

Donc finalement pour en revenir à notre problème initial, nous avons donc :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \tag{6.3.87}$$

Ce qui nous donne finalement la "condition de Schwarz" :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6.3.88}$$

C'est donc la condition que doit satisfaire une forme différentielle pour être une différentielle totale exacte et la condition qu'elle ne doit pas satisfaire pour être une différentielle totale inexacte ! ! ! C'est une propriété très important pour l'étude de la Thermodynamique !

Afin de ne pas confondre les deux types de différentielles, nous utilisons le symbole δ pour représenter une différentielle totale inexacte :

$$\delta z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y \tag{6.3.89}$$

et d pour une différentielle totale exacte :

$$\mathrm{d}z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y \tag{6.3.90}$$

La distinction est extrêmement importante car seules les différentielles totales exactes qui satisfont donc :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6.3.91}$$

En cours de traduction de l'anglais

ont une intégrale qui ne dépend que des bornes d'intégration (puisque toutes les variables changent en même temps). Dès lors les différentielles totales inexactes dépendent que des bornes d'intégration, ce qui signifie que :

$$\int_{z_1}^{z_2} \delta z \neq z_2 - z_1 \tag{6.3.92}$$

et donc sur un chemin fermé on peut avoir :

$$\oint_{\gamma} \delta z \neq 0 \tag{6.3.93}$$

Alors que pour les différentielles totales exactes :

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z = \Delta z \tag{6.3.94}$$

soit (voir la démonstration détaillée plus loin lorsque nous traiterons des intégrales curvilignes) :

$$\oint_{\gamma} \mathrm{d}z = 0 \tag{6.3.95}$$

Autrement dit, la variation d'une fonction dont la différentielle est totale exacte, ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des états initiaux et finaux car elle s'exprime comme le gradient d'une fonction (voir la démonstration par l'exemple dans la section d'Électrostatique quand nous vérifions que la différence de potentiel est indépendante du chemin). Nous appelons une telle fonction qui satisfait à une différentielle totale exacte en physique, une fonction d'état" et en mathématique une "fonction holomorphe" (voir la section d'Analyse Complexe page 2379), c'est-à-dire une fonction dont la valeur ne dépend que de l'état présent et futur, et non de son histoire.

Cette distinction est très importante et particulièrement en thermodynamique où il convient de déterminer si une quantité physique est une différentielle totale exacte (une "fonction d'état" donc) ou non afin de savoir comment évoluent les systèmes.

✍Exemple :

Un exemple important de forme différentielle en thermodynamique, est le travail élémentaire δW d'une force exercée sur un corps en mouvement dans le plan Oxy, nous avons :

$$\delta W = \vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{r} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{6.3.96}$$

Les forces F_x, F_y et ne dérivent pas nécessairement d'un même potentiel $U(x,y)$ tel que :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{6.3.97}$$

dès lors δW est donc une différentielle totale inexacte !

Enfin quelque chose peut-être important à garder à l'esprit ?! :

En cours de traduction de l'anglais

- Supposons $y = f(x, w)$, tandis qu'à leur tour $x = g(t)$ et $w = h(t)$. Comment y change-t-il lorsque t change ?

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial y}{\partial \omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{6.3.98}$$

Notez que si nous supposons $y = f(x, w(x))$ (une dépendance directe !) mais avec x n'ayant aucune dépendance implicite, la relation ci-dessus devient :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} \tag{6.3.99}$$

- Supposons $y = f(x, w)$, tandis qu'à leur tour $x = g(t, s)$ et $w = h(t, s)$. Comment y change-t-il lorsque t change ?

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial s}\end{aligned} \tag{6.3.100}$$

Notez que le premier point est la "dérivée totale" alors que le deuxième point est la "dérivée partielle totale".

de l'anglais

Remarque

Pour information, il existe de nombreux types de dérivées différentes en mathématiques :

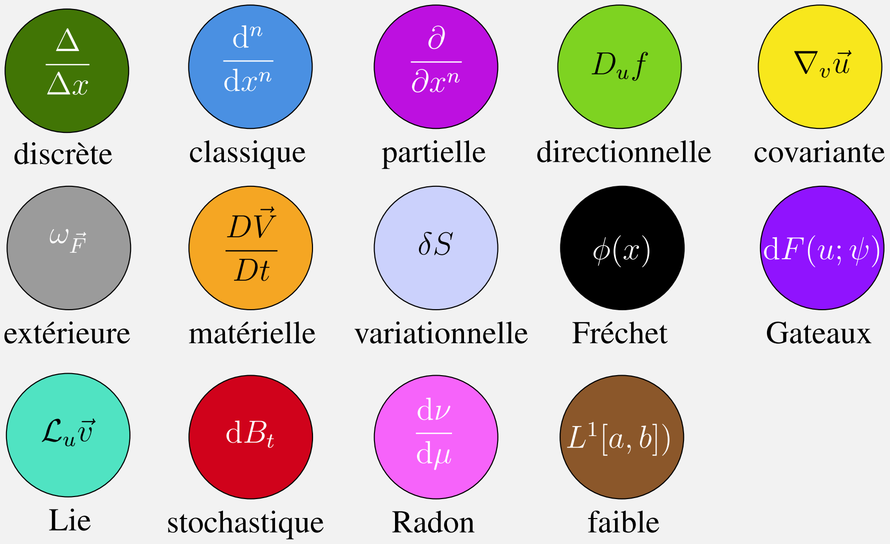


FIG. 6.34 – **Types de dérivées les plus courants en mathématiques**

dans ce livre, nous n'utiliserons et n'introduirons que quelques-unes d'entre elles à des fins pratiques, comme les dérivées discrètes, classiques, partielles, covariantes, stochastiques, matérielles et variationnelles.

6.3.1.2 Dérivée usuelles

Nous allons démontrer ici les dérivées les plus fréquentes (une petite trentaine) que nous puissions rencontrer en physique théorique et mathématique ainsi que certaines de leurs propriétés (en fait, nous allons toutes les appliquer dans les sections relatives à la Mécanique, l'Ingénierie, l'Atomistique, les Mathématiques Sociales, etc.). La liste est pour l'instant non exhaustive mais les démonstrations étant généralisées, elles peuvent s'appliquer à un grand nombre d'autres cas similaires (que nous appliquerons/rencontrerons tout au long de ce livre).

1. Dérivée de $f(x) = x^n$:

   Partons d'abord d'un cas particulier, la dérivée de x^3 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h}=\lim_{h\to 0}3a^2+3ah+h^2=3a^2 \quad (6.3.101)$$

   La dérivée de la fonction cubique est donc $3a^2$.

   On peut généraliser ce résultat pour tout entier positif ou négatif n et on verra que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable et que sa dérivée f' est donné par $f'(x) = nx^{n-1}$.

   Effectivement :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k h^{n-k}-a^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_n^k a^k h^{n-k}+a^n-a^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_n^k a^k h^{n-k}}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k a^k h^{n-k-1}\\&=\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-2}\left(C_n^k a^k h^{n-k-1}+C_n^{n-1}a^{n-1}\right)=C_n^{n-1}a^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!}a^{n-1}\\&=na^{n-1}\end{aligned} \quad (6.3.102)$$

   Ainsi, nous avons (quelques exemples peuvent être utiles pour comprendre la portée de ce résultat) :

$$\begin{aligned}&f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x^1=2x\\&f(x)=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-2}\\&f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\end{aligned} \quad (6.3.103)$$

   Nous voyons donc qu'en ayant déterminé la dérivée d'une fonction de la forme x^n, nous avons également déterminé la dérivée de toute fonction qui est mise sous cette forme tel que :

$$f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n} \quad \text{et} \quad f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n} \quad (6.3.104)$$

En cours de traduction de l'anglais

Cependant, les fonctions :

$$f(x)=\frac{1}{x^n} \quad \text{et} \quad f(x)=\sqrt[n]{x} \qquad (6.3.105)$$

ne sont pas dérivables en $x=0$ puisque la fonction n'y est plus définie (division par zéro). De plus, en ce qui concerne la fonction comportant la racine (puissance non entière), la dérivée n'est pas définie dans $\mathbb{R}_{-}^{*}$.

Remarque

Il ressort immédiatement des résultats ci-dessus que si $f(x)=x^n$ pour n étant un entier positif $f^{(k)}(x)=x^{n-k}\, n!/(n-k)!$ pour $k\leq n$.

2. Dérivée de $f(x)=c^{te}$:

   Le résultat précédent donne un résultat immédiat intéressant pour des fonctions constantes telles que :

$$f(x)=c^{te}=c^{te}x^0 \qquad (6.3.106)$$

   il n'est alors pas difficile de déterminer que la dérivée est simplement :

$$f'(x)=c^{te}0x^{0-1}=0 \qquad (6.3.107)$$

   La dérivée de toute fonction constante est donc nulle (il est important de se souvenir de ce résultat lorsque nous étudierons les propriétés des intégrales) ! ! !

3. Dérivée de $f(x)=\cos(x)$:

   Soit donc a un réel quelconque fixé, alors (attention ! il est utile de connaître les relations trigonométriques remarquables que nous démontrons dans la section de Trigonométrie) :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{a+h+a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+h-a}{2}\right)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{2a+h}{2}\right)\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(-2\sin\left(\frac{2a+h}{2}\right)\right)\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}}\right)\\
&=-2a\sin(a)\frac{1}{2}=-\sin(a)
\end{aligned} \qquad (6.3.108)$$

   Puisque en utilisant la règle de l'Hospital (ou en voyant que $\sin(x)$ peut être assimilié à une droite $f(x)=x$ à proximité de $x=0$) :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad (6.3.109)$$

   Donc pour résumer :

$$f(x)=\cos(x)\Rightarrow f'(x)=-\sin(x) \qquad (6.3.110)$$

En cours de traduction de l' anglais

4. Dérivée de $f(x)=\sin(x)$:

   Soit donc a un réel quelconque fixé, alors (attention ! il est utile de connaître les relations trigonométriques remarquables que nous démontrons dans la section de Trigonométrie) :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\dfrac{a+h+a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+h-a}{2}\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\dfrac{2a+h}{2}\right)\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2\cos\left(\frac{2a+h}{2}\right)\right)\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}}\right)\\&=2a\cos(a)\frac{1}{2}=\cos(a)\end{aligned}\tag{6.3.111}$$

   Puisque en utilisant la règle de l'Hospital (ou en voyant que $\sin(x)$ peut être assimilié à une droite $f(x)=x$ à proximité de $x=0$) :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1\tag{6.3.112}$$

   Donc pour résumer :

$$f(x)=\sin(x)\Rightarrow f'(x)=\cos(x)\tag{6.3.113}$$

5. Dérivée de $f(x)=\log_b(x)$:

   Nous commençons en écrivant :

$$y+\Delta y=\log_b(x+\Delta x)\tag{6.3.114}$$

   Dès lors :

$$\Delta y=\log_b(x+\Delta x)-y=\log_b(x+\Delta x)-\log_b(x)=\log_b\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\tag{6.3.115}$$

   Ainsi :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\tag{6.3.116}$$

   Multiplions et divisons par x l'expression figurant dans le membre droit de la dernière égalité :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_b\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_b\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\Delta x}}\right)\tag{6.3.117}$$

   Désignons la quantité $\dfrac{\Delta x}{x}$ par α. Il est évident que quand $\alpha\to 0$ quand Δx pour un x donné. Par conséquent :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_b\left((1+\alpha)^{\dfrac{1}{\alpha}}\right)\tag{6.3.118}$$

En cours de traduction de l' anglais

Or, nous retrouvons ici une autre provenance historique de la constante d'Euler (voir la section d'Analyse fonctionnelle page 2264 pour la preuve) où :

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\dfrac{1}{\alpha}}=e \tag{6.3.119}$$

Ainsi :

$$f'(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{x}\log_b\left((1+\alpha)^{\dfrac{1}{\alpha}}\right)=\frac{1}{x}\log_b(e) \tag{6.3.120}$$

Un cas particulier important est le cas où $b=e$. Nous avons alors :

$$y=\ln(x)\Rightarrow y'=\frac{1}{x} \tag{6.3.121}$$

6. Dérivée d'une somme de fonctions :

Soient u et v deux fonctions. La fonction somme $s=u+v$ est dérivable sur tout intervalle où u et v sont dérivables, sa dérivée est la fonction s' somme des fonctions dérivées u' et v' de u et v.

Soit a un nombre réel et u,v deux fonctions définies et différentiables sur a :

$$\begin{aligned}s'&=\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)+v(a+h)-v(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\\&=u'(a)+v'(a)\end{aligned} \tag{6.3.122}$$

Donc la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

Ce résultat se généralise pour une somme d'un nombre quelconque fixé de fonctions.

7. Dérivée d'un produit de fonctions (nommé souvent "règle du produit") :

Soient u et v deux fonctions. La fonction produit $p=uv$ est dérivable sur tout intervalle où u et v sont dérivables, et p' sera la notation pour la dérivée du produit. Voyons maintenant quelle est son expression.

Soient a un réel fixé et u,v deux fonctions définies et dérivables en a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \tag{6.3.123}$$

Nous rajoutons à cette dernière relation deux termes dont la somme est nulle tels que :

$$\begin{aligned}p'&=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\lim_{h\to 0}v(a+h)+\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\lim_{h\to 0}u(a)\\&=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)\end{aligned} \tag{6.3.124}$$

En cours de traduction de l'anglais

D'où le résultat fameux :

$$p = u'v + uv' \tag{6.3.125}$$

Mais il existe une formulation plus générale que la dérivée première d'un produit :

Théorème 6.11. Considérons pour cela toujours nos deux fonctions u et v, n fois dérivables sur un intervalle I. Alors le produit uv est n fois dérivable sur I et :

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(k)} v^{(n-k)}} \tag{6.3.126}$$

et ceci constitue la "règle de différentiation de Leibniz pour le produit" que nous avons utilisée dans la section de Calcul Algébrique pour l'étude des polynômes de Legendre (qui nous sont eux-mêmes indispensables pour l'étude de la Chimie Quantique).

La démonstration de cette expression est très proche de celle faite pour le binôme de Newton (voir section Calcul Algébrique page 1347).

Démonstration 6.11.1. Soit :

$$(uv)^{(0)} = uv \tag{6.3.127}$$

D'autre part :

$$(uv)^{(0)} = \sum_{k=0}^{0} C_k^0 u^k v^{(0-k)} = u^{(0)} v^{(0)} = uv \tag{6.3.128}$$

La relation est ainsi bien initialisée.

La démonstration se fait par récurrence. Ainsi, le but est de montrer que pour $\forall n \geq 0 \in \mathbb{N}$ que si :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n u^k v^{(n-k)} \tag{6.3.129}$$

alors :

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} u^k v^{(n+1-k)} \tag{6.3.130}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} = \left((uv)^{(n+1)}\right)' &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(\left(u^{(k)}\right)' v^{(n-k)} + u^{(k)} \left(v^{(n-k)}\right)'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \left(u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(k)} v^{(n+1-k)}
\end{aligned} \tag{6.3.131}$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous allons procéder à un changement de variable dans la première somme pour ne plus avoir le terme en $k+1$. Nous posons pour cela $j=k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(k+1)} v^{(n-k)} = \sum_{j=1}^{n+1} C_{j-1}^n u^{(j)} v^{(n-(j-1))} \quad (6.3.132)$$

Si nous revenons à la lettre k, nous avons donc :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(k+1)} v^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} \quad (6.3.133)$$

Nous avons donc :

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_k^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} \quad (6.3.134)$$

Nous voulons réunir les deux sommes. Pour cela, nous écartons les termes en trop dans chacune d'elles :

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= C_{n+1-1}^n u^{(n+1)} v^{(n+1-(n+1))} + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} \\ &+ \sum_{k=1}^{n} C_k^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} + C_0^n u^{(0)} v^{(n+1-0)}\end{aligned} \quad (6.3.135)$$

Ce qui donne donc :

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} C_k^n u^{(k)} v^{(n+1-k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (C_{k-1}^n + C_k^n) u^{(k)} v^{(n+1-k)} + u^{(0)} v^{(n+1)}\end{aligned} \quad (6.3.136)$$

D'après la formule de Pascal (voir section Probabilities page 522), nous avons :

$$C_{k-1}^n + C_k^n = C_k^{n+1} \quad (6.3.137)$$

Donc :

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1} u^{(k)} v^{(n+1-k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} \quad (6.3.138)$$

Mais nous avons en même temps :

$$u^{(n+1)} v^{(0)} = C_{n+1}^{n+1} u^{(n+1)} v^{(n+1-(n+1))} \qquad u^{(0)} v^{(n+1)} = C_0^{n+1} u^{(0)} v^{(n+1-0)} \quad (6.3.139)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= C_{n+1}^{n+1} u^{(n+1)} v^{(n+1-(n+1))} + \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1} u^{(k)} v^{(n+1-k)} + C_0^{n+1} u^{(0)} v^{(n+1-0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} u^{(k)} v^{(n+1-k)}\end{aligned} \quad (6.3.140)$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

8. Dérivée d'un ratio de deux fonctions différerntiables (nomméel a "règle du quotient") :

   Soit $f(x)=g(x)/h(x)$. L'application de la définition de la dérivée et des propriétés des limites donne la preuve suivante :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{g(x+k)}{h(x+k)}-\dfrac{g(x)}{h(x)}}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{g(x+k)h(x)-g(x)h(x+k)}{k\cdot h(x)h(x+k)} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{g(x+k)h(x)-g(x)h(x+k)}{k}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{h(x)h(x+k)} \\ &= \left(\lim_{k\to 0}\frac{g(x+k)h(x)-g(x)h(x)+g(x)h(x)-g(x)h(x+k)}{k}\right)\cdot\frac{1}{h(x)^2} \\ &= \left(\lim_{k\to 0}\frac{g(x+k)h(x)-g(x)h(x)}{k}-\lim_{k\to 0}\frac{g(x)h(x+k)-g(x)h(x)}{k}\right)\cdot\frac{1}{h(x)^2} \\ &= \left(h(x)\lim_{k\to 0}\frac{g(x+k)-g(x)}{k}-g(x)\lim_{k\to 0}\frac{h(x+k)-h(x)}{k}\right)\cdot\frac{1}{h(x)^2} \\ &= \frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h(x)^2} \end{aligned} \tag{6.3.141}$$

En cours de traduction de l'anglais

   Nous pouvons également faire la preuve en utilisant la différenciation implicite. En effet, soit $f(x)=g(x)/h(x)$, donc $g(x)=f(x)h(x)$. La règle du produit prouvée juste plus haut nous donne alors :

$$g'(x)=f'(x)h(x)+f(x)h'(x) \tag{6.3.142}$$

   En résolvant pour $f'(x)$ et en substituant $f(x)$ donne :

$$f'(x)=\frac{g'(x)-f(x)h'(x)}{h(x)}=\frac{g'(x)-\dfrac{g(x)}{h(x)}\cdot h'(x)}{h(x)}=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h(x)^2} \tag{6.3.143}$$

9. Dérivée d'une fonction composite univariée :

   Considérons la fonction composée $f=g\circ u=g(u(x))$ de deux fonctions g et u différentiables, la première dans $u(a)$, la seconde dans a. On a donc :

$$f'=\lim_{h\to 0}\frac{g\circ u(a+h)-g\circ u(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(u(a+h))-g(u(a))}{h} \tag{6.3.144}$$

   Posons maintenant $k=u(a+h)-u(a)$ alors nous avons :

$$\lim_{h\to 0}k=0 \tag{6.3.145}$$

Continuons notre développement précédent :

$$\begin{aligned}
f' &= \lim_{h\to 0}\frac{g(u(a+h))-g(u(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(k+u(a)))-g(u(a))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{k}\frac{k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{k}\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{k}\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\
&= g'(u(a))u'(a)
\end{aligned} \tag{6.3.146}$$

Ainsi, la dérivée d'une fonction composite est donnée par la dérivée de la fonction, multipliée par le "dérivée intérieure". De plus, ce type de dérivée est très importante car souvent utilisée en physique sous le nom de "dérivation (univariée) en chaîne" ou simplement "règle de dérivation en chaîne".

Voyons de quoi il s'agit. La relation précédente obtenue peut être réécrite d'une autre manière plus courante :

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'g' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{6.3.147}$$

Ou typiquement lorsque nous avons plusieurs fonctions qui se multiplient :

$$y = f(g(x))h(j(x)) \Rightarrow y' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}j}\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} \tag{6.3.148}$$

Nous parlons alors parfois de "règle de puissance en chaîne".

10. Dérivée d'une fonction composée bivariée :

Théorème 6.12. La dérivée en t d'une fonction composite $z = f(x(t), y(t))$ est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x(t),y(t))] = \frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.3.149}$$

Nous supposons dans ce théorème et ses applications que $x = x(t)$ et $y = y(t)$ ont des dérivées premières en t et que $z = f(x,y)$ a des dérivées continues du premier ordre dans un cercle ouvert centré sur $(x(t), y(t))$.

Démonstration 6.12.1. Nous fixons t et posons $(x,y) = (x(t), y(t))$. Nous considérons Δt non nul et si petit que $(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$ est dans le cercle où f a des dérivées premières continues et posons $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ et $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$. Alors par définition de la dérivée :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x(t),y(t))] &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))-f(x(t),y(t))}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[f(x+\Delta x),y)-f(x,y)]+[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)]}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{6.3.150}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons appliquer le "théorème de la valeur moyenne" qui dit que (voir la preuve plus loin lors de notre étude du Calcul Intégral) :

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{6.3.151}$$

à l'expression dans le premier ensemble de crochets à droite de la dernière égalité ci-dessus où y est constant et à l'expression dans le deuxième ensemble de crochets où x est constant. Nous en concluons qu'il existe un nombre c_1 entre x et $x+\Delta x$ et un nombre c_2 entre y et $y+\Delta y$ tels que :

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x,y)-f(x,y)&=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(c_1,y)\Delta x\\ f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)&=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x+\Delta x,c_2)\Delta y\end{aligned} \tag{6.3.152}$$

Nous ajoutons les deux relations ci-dessus et divisons par Δt pour obtenir :

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta t}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(c_1,y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x+\Delta x,c_2)\frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{6.3.153}$$

Les fonctions $x=x(t)$ et $y=y(t)$ sont continues en t car elles ont des dérivées en ce point. Par conséquent, comme $\Delta t\to 0$, les nombres Δx et Δy tendent tous les deux vers zéro et le cercle incluant les constantes c_i s'effondre jusqu'au point (x,y), Comme les dérivées partielles de f sont continues, le terme $\partial_x f(c_1,y+\Delta y)$ tend vers $\partial_x f(x,y)$ et le terme $\partial_y f(x,c_2)$ tend vers $\partial_y f(x,y)$ comme $\Delta t\to 0$. De plus :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to x'(t) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t}\to y'(t) \tag{6.3.154}$$

quand $\Delta t\to 0$, ainsi la relation ci-dessus devient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x(t),y(t))]=\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}} \tag{6.3.155}$$

qui est parfois nommée "règle en chaîne multivariée" (mais en réalité il s'agit seulement du cas bivarié...) et est une relation trèeeees importante pour l'étude de la physique !

Cette dernière relation est parfois écrite de la manière suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x(t),y(t))]=\partial_x f(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\partial_y f(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.3.156}$$

■ Q.E.D.

11. Dérivée d'une fonction réciproque :

Théorème 6.13. Si la fonction f est continue, strictement monotone sur un intervalle I, dérivable sur I, alors la fonction réciproque est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ et admet pour fonction dérivée :

$$\forall y\in f(I) \qquad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f(f^{-1}(y))'} \tag{6.3.157}$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.13.1. En effet nous pouvons écrire :

$$x \overset{f}{\mapsto} y = f(x) \overset{f^{-1}}{\longmapsto} x = f^{-1}(y) \tag{6.3.158}$$

C'est-à-dire (application identité) :

$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) \tag{6.3.159}$$

Par application de la dérivation des fonctions composées :

$$(f^{-1}(f(x)))' = (f^{-1}(y))' f'(x) = (x)' = 1 \tag{6.3.160}$$

d'où :

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \tag{6.3.161}$$

Pour une variable x, nous poserons pour la dérivée de la fonction réciproque :

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \tag{6.3.162}$$

■ Q.E.D.

12. Dérivée de la fonction $\arccos(x)$:

    En utilisant le résultat précédent de la fonction réciproque et de la dérivée de $\cos(x)$ démontré plus haut, nous pouvons calculer la dérivée de la fonction $\arccos(x)$:

$$(f^{-1}(x))' = (\arccos(x)) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\sin(y)} = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.3.163}$$

13. Dérivée de $\arcsin(x)$:

    En utilisant le résultat précédent de la fonction réciproque et la dérivée de $\sin(x)$, nous pouvons calculer la dérivée de la fonction $\arcsin(x)$:

$$(f^{-1}(x))' = (\arcsin(x)) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.3.164}$$

14. Dérivée d'un quotient de deux fonctions :

    Considérons que la fonction :

$$f = \frac{u}{v} \tag{6.3.165}$$

est dérivable sur tout intervalle où les fonctions u et v sont dérivables et où la fonction v est non nulle.

La fonction f peut être considérée comme le produit de deux fonctions : la fonction u et la fonction $1/v$. Une produit de deux fonctions est dérivable si chacune d'elle est dérivable, il faut donc que la fonction u soit dérivable et que la fonction $1/v$soit également dérivable ce qui est le cas quand v est dérivable non nulle.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\frac{1}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} + u\left(\frac{-v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{6.3.166}$$

En cours de traduction de l'anglais

15. Dérivée de la fonction $\tan(x)$:

Par définition (voir section Trigonométrie page ??), pour $\forall x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{6.3.167}$$

et en appliquant donc la dérivée d'un quotient vue précédemment, nous avons :

$$f'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)} \tag{6.3.168}$$

ou :

$$f'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x) \tag{6.3.169}$$

16. Dérivée de la fonction $\cot(x)$:

Par définition (voir section Trigonométrie page ??), $\forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$f(x)=\cot(x)=\frac{1}{\tan(x)} \tag{6.3.170}$$

et en appliquant donc la dérivée d'un quotient vue précédemment, nous avons :

$$f'(x)=\cot'(x)=-\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}=-\frac{1}{\tan^2(x)}-1=-(\cot^2(x)+1) \tag{6.3.171}$$

ou :

$$\cot'(x)=-\frac{1}{\tan^2(x)}-1=-\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}-1=-\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}=-\frac{1}{\sin^2(x)} \tag{6.3.172}$$

17. Dérivée de la fonction $\arctan(x)$:

Nous utilisons les propriétés dérivées des fonctions réciproques démontrées plus haut :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=\arctan'(x)=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}=\frac{1}{1+x^2} \tag{6.3.173}$$

18. Dérivée de la fonction $\text{arccot}(x)$:

Selon la même méthode que précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=\text{arccot}'(x)=\frac{1}{-(1+\cot^2(\text{arccot}(x)))}=-\frac{1}{1+x^2} \tag{6.3.174}$$

19. Dérivée de la fonction e^x :

Nous démontrerons lors de notre étude des Méthodes Numériques (voir section du même nom ??) que le "nombre d'Euler" peut être calculé selon la série :

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{6.3.175}$$

En cours de traduction de l' anglais

qui converge sur $\mathbb{R}$. En dérivant terme à terme cette série qui converge, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x \tag{6.3.176}$$

Ainsi l'exponentielle est sa propre dérivée. Ainsi, nous pouvons nous permettre d'étudier les dérivées de quelques fonctions trigonométriques hyperboliques (voir section Trigonométrie page 2515) et d'autres nombreux cas spécifiques (voir tous les autres chapitres de ce livre).

20. Dérivée de la fonction $\sinh(x)$:

 Rappelons que (voir section Trigonométrie page ??) :

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \tag{6.3.177}$$

 Donc trivialement :

$$\sinh'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \tag{6.3.178}$$

21. Dérivée de la fonction $\cosh(x)$:

 Rappelons que (voir section Trigonométrie page ??) :

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \tag{6.3.179}$$

 Donc trivialement :

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x) \tag{6.3.180}$$

22. Dérivée de la fonction $\tanh(x)$:

 Rappelons que (voir section Trigonométrie page ??) :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{6.3.181}$$

 Donc en appliquant la dérivée d'un quotient nous obtenons :

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} \tag{6.3.182}$$

 ou :

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \tag{6.3.183}$$

23. Dérivée de la fonction $\coth(x)$:

 Rappelons que (voir section Trigonométrie page ??) :

$$\forall x \neq 0 \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)} \tag{6.3.184}$$

 Donc en appliquant la dérivée d'un quotient nous obtenons :

$$\coth'(x) = -\frac{1 - \tanh^2(x)}{\tanh^2(x)} = 1 - \frac{1}{\tanh^2(x)} = 1 - \coth^2(x) \tag{6.3.185}$$

En cours de traduction de l' anglais

24. Dérivée de la fonction arcsinh(x) :

    Nous appliquons les propriétés des dérivées des fonctions réciproques démontré plus haut :

$$\text{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\text{arcsinh}(x))} \quad (6.3.186)$$

    Mais (voir section Trigonométrie page ??) :

$$1 = \cosh^2(\text{arcsinh}(x)) - \sinh^2(\text{arcsinh}(x)) = \cosh^2(\text{arcsinh}(x)) - x^2 \quad (6.3.187)$$

    et dès lors :

$$1 + x^2 = \cosh^2(\text{arcsinh}(x)) \quad (6.3.188)$$

    Etant donné que $\cosh(x)$ ne prend que des valeurs positives, nous avons :

$$\cosh(\text{arcsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2} \quad (6.3.189)$$

    Donc finalement :

$$\text{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\text{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (6.3.190)$$

25. Dérivée de la fonction arccosh(x) :

    Nous appliquons les propriétés des dérivées des fonctions réciproques :

$$\forall x > 1 \quad \text{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\text{arccosh}(x))} \quad (6.3.191)$$

    Or selon la même méthode que précédemment (voir section Trigonométrie page ??) :

$$1 = \cosh^2(\text{arccosh}(x)) - \sinh^2(\text{arccosh}(x)) = x^2 - \sinh^2(\text{arccosh}(x)) \quad (6.3.192)$$

    d'où :

$$-1 + x^2 = \sinh^2(\text{arccosh}(x)) \quad (6.3.193)$$

    Etant donné que arccosh(x) ne prend que des valeurs positives il en est de même pour $\sinh(x)$, nous avons alors :

$$\sinh(\text{arccosh}(x)) = \sqrt{x^2-1} \quad (6.3.194)$$

    Donc finalement :

$$\forall x > 1 \quad \text{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\text{arccosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (6.3.195)$$

26. Dérivée de la fonction arctanh(x) :

    En appliquant à nouveau les propriétés des dérivées des fonctions réciproques :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \text{arctanh}'(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(\text{arctanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2} \quad (6.3.196)$$

En cours de traduction de l' anglais

27. Dérivée de la fonction $\text{arccoth}(x)$: En appliquant à nouveau les propriétés des dérivées des fonctions réciproques :

$$\forall |x|>1 \quad \text{arccoth}'(x) = \frac{1}{1-\coth^2(\text{arccoth}(x))} = \frac{1}{1-x^2} \tag{6.3.197}$$

28. Dérivée de la fonction a^x avec $a>0$:

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)} \tag{6.3.198}$$

Donc (dérivée d'une fonction composée) :

$$f'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = a^x \ln(a) \tag{6.3.199}$$

29. Nous connaissons les règles de la chaîne pour la dérivée d'un produit de fonction. Mais qu'en est-il de la règle équivalent pour la puissance qui est assez fréquente en physique ?

En effet, la dérivée de $f(x)^{g(x)}$ est considérée par beaucoup comme l'une des dérivées les plus polyvalentes !

Premièrement, pour faire la preuve, il devrait être évident que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1} \tag{6.3.200}$$

et :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \ln(a)a^x \tag{6.3.201}$$

ne sont que des cas particuliers de la dérivée de $f(x)^{g(x)}$.

Pour résoudre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g)^{g(x)} \tag{6.3.202}$$

nous devons utiliser un petit truc pour faciliter la différenciation. Et rien n'est aussi simple que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \tag{6.3.203}$$

Donc, puisque $x = e^{\ln(x)}$ nous l'utiliserons à notre avantage.

Nous commençons par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g)^{g(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}\right) \tag{6.3.204}$$

Nous savons que :

$$\ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln(f(x)) \tag{6.3.205}$$

donc nous injectons cela pour obtenir ceci :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g)^{g(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{g(x)\ln(f(x))}\right) \tag{6.3.206}$$

En cours de traduction de l' anglais

Il ne nous reste plus qu'à différencier le membre de droite. N'oublions pas que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{f(x)}=e^{f(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \tag{6.3.207}$$

Dès lors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{g(x)\ln(f(x))}=e^{g(x)\ln(f(x))}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\ln(f(x))\right) \tag{6.3.208}$$

Cela équivaut à écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)^{g(x)}=f(x)^{g(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\ln(f(x))\right) \tag{6.3.209}$$

Il ne nous reste plus qu'à différencier le membre de droite. Voici la règle de multiplication simple :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\ln(f(x))\right)=\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\ln(f(x))+g(x)\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} \tag{6.3.210}$$

Et puis nous devons différencier le logarithme naturel :

$$\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{6.3.211}$$

Donc, nous injectons cela pour obtenir ceci :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)^{g(x)}=f(x)^{g(x)}\left[\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\ln(f(x))+\frac{g(x)}{f(x)}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right] \tag{6.3.212}$$

Et puis nous distribuons $f(x)^{g(x)}$ pour obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)^{g(x)}=f(x)^{g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\ln(f(x))+f(x)^{g(x)}\frac{g(x)}{f(x)}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{6.3.213}$$

Alors si nous simplifions :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)^{g(x)}=f(x)^{g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\ln(f(x))+f(x)^{g(x)-1}g(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}} \tag{6.3.214}$$

Quelques exemples d'applications nous donnent donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x \tag{6.3.215}$$

En effet, il suffit de poser $f(x)=x$ et $g(x)=n$ et nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=x^n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\ln(x)+x^{n-1}n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}=x^n\cdot 0\cdot\ln(x)+x^{n-1}n\cdot 1=x^{n-1}n \tag{6.3.216}$$

Ou une autre application :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x \tag{6.3.217}$$

tout ce que nous avons à faire est de définir $f(x)=a$ et $g(x)=x$ et nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x=a^x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\ln(a)+a^{x-1}x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=a^2\cdot 1\cdot\ln(a)+a^{x-1}x\cdot 0=a^x\cdot\ln(a) \tag{6.3.218}$$

En cours de traduction de l' anglais

30. Pour le plaisir (nous n'utilisons cette dérivée nulle part dans ce livre sur aucun cas pratique), calculons la dérivée de x^x.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^x\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{\ln(x)x}\right] = \mathrm{e}^{x\ln(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\ln(x)] \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x]\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x)]\right)\mathrm{e}^{x\ln(x)} \\ &= \mathrm{e}^{x\ln(x)}\left(1\ln(x)+\frac{1}{x}x\right) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)\end{aligned} \tag{6.3.219}$$

Pour résumer pour les plus importants (certaines dérivées seront démontrées plus loin) :

$f(x)$	$f'(x)$	Condition
c^{te}	0	Aucune
x^n	nx^{n-1}	Aucune
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x\in\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x\in\mathbb{R}$
$\log_b(x)$	$\dfrac{1}{x}\log_b(e)$	$x>0, b>0, b\neq 1$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	Aucune
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	Aucune
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	Aucune
$u(x)/v(x)$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$	$v(x)\neq 0, v'(x)\neq 0$
$v\circ u=v(u(x))$	$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	Aucune
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x(t),y(t))]$	$\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$	Aucune
$f^{-1}(y)$	$\frac{1}{f(f^{-1}(y))'}$	Aucune
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1\geq x\geq -1$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1\geq x\geq -1$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$\forall x\neq k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-\left(\cot^2(x)+1\right)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\forall x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x\in\mathbb{R}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x\in\mathbb{R}$
e^x	e^x	Aucune
$\sinh(x)$	$\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$	Aucune
$\cosh(x)$	$\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\sinh(x)$	Aucune
$\coth(x)$	$1-\frac{1}{\tanh^2(x)}=1-\coth^2(x)$	$\forall x\neq 0$
$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	Aucune
$\operatorname{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh}(x))}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\forall x>1$
$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{arctanh}(x))}=\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x\in[-1,1]$
$\operatorname{arccoth}(x)$	$\frac{1}{1-\coth^2(\operatorname{arccoth}(x))}=\frac{1}{1-x^2}$	$\forall \lvert x\rvert>1$
a^x	$a^x\ln(a)$	$a>0$
$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\ln(f(x))+f(x)^{g(x)-1}g(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$	Aucune
x^x	$x^x(\ln(x)+1)$	$x\neq 0$
$H(x)$ (Heaviside)	$\delta(x-a)$	Aucune

TAB. 6.10 – **Dérivées les plus communes**

En cours de traduction de l'anglais

6.3.1.3 Dérivation implicite

Jusqu'à présent, les fonctions dont nous nous sommes occupés sont des fonctions qui ont été définies explicitement. Une fonction est définie explicitement si *sortie est donnée directement en termes d'entrée*. Par exemple, dans la fonction :

$$f(x) = 4x^2 \tag{6.3.220}$$

la valeur de $f(x)$ est donnée explicitement ou directement en termes d'entrée. Juste en connaissant l'entrée, nous pouvons immédiatement trouver la sortie. Un deuxième type de fonction qu'il nous est également utile de considérer est une "fonction implicitement définie". Une fonction est définie implicitement si *sortie ne peut pas être trouvée directement à partir de l'entrée*. Par exemple (exemple simple et stupide) :

$$\sqrt{f} = 2x \tag{6.3.221}$$

est une fonction définie implicitement, car pour chaque valeur x positive, il existe une valeur f correspondante, mais nous ne pouvons pas la trouver directement à partir de la fonction. Nous aurions besoin de mettre les deux côtés au carré, puis nous aurions la fonction explicitement définie :

$$f = 4x^2 \tag{6.3.222}$$

Il nous est également possible d'avoir des fonctions implicitement définies que nous ne pouvons pas réécrire en tant que fonction explicitement définie ! ! !

Par exemple, nous pourrions avoir la fonction :

$$\sin(f(x)) + f(x) = x \tag{6.3.223}$$

Pour une valeur x donnée, il *peut* y avoir une valeur de sortie correspondante $f(x)$ qui en fait une déclaration vraie. De cette façon, une fonction $f(x)$ serait définie pour tous ces x où il existe une solution. Par exemple, nous avons $f(0) = 0$, car la définition de $x = f(x) = 0$ dans l'équation ci-dessus est une déclaration vraie. À l'heure actuelle, nous n'avons pas les outils appropriés pour résoudre une telle équation, mais le concept important ici est que nous pouvons avoir une fonction définie de cette manière !

Lorsque nous parlons de fonctions, nous voulons dire que nous avons une règle qui nous fournit au plus une sortie pour une entrée donnée (il n'y a pas de sortie pour des entrées pour lesquelles la fonction n'est pas définie). Dans un sens plus général, nous pourrions vouloir examiner les règles qui nous fournissent plusieurs sorties pour une entrée donnée. Un tel exemple serait l'équation :

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{6.3.224}$$

qui est l'équation du cercle unité (voir section Géométrie Analytique page 2748). Il s'avère que cet objet est constitué de deux fonctions, à savoir :

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \tag{6.3.225}$$

L'équation de ce cercle ne définit pas de fonction (parce que la sortie est multivaluée ! !), mais elle définit un certain type de courbe dans le plan x-y. En général, nous devrions être capables

En cours de traduction de l'anglais

de décrire une courbe arbitraire comme une combinaison d'un certain nombre de fonctions. Il est judicieux (et utile) de considérer la pente de certains points de la courbe, qui correspondrait simplement à la pente de la fonction spécifique qui définit cette partie de la courbe.

Pour résoudre le problème de trouver la dérivée d'une fonction définie d'une manière telle que $\sin(f(x))+f(x)=x$ ou par une courbe comme un cercle, nous utilisons à nouveau la règle de la chaîne. La manière dont nous allons l'employer est nommée "différenciation implicite". Le processus fonctionne comme suit : nous différencions les deux côtés de l'équation par rapport à x (ou la variable indépendante), puis nous résolvons la dérivée de la variable dépendante. Partout où nous trouvons la fonction f (ou la variable dépendante), nous utiliserons la règle de la chaîne pour trouver la dérivée. Commençons par quelques exemples simples :

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Nous voulons trouver $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ si $y^2=x$.

Une méthode pour résoudre ce problème serait de le réécrire en termes de fonction explicite de y, et de le différencier. Puisque nous avons $y=\pm\sqrt{x}$, nous avons en fait deux fonctions, et nous trouverions :

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{6.3.226}$$

Cela fonctionne suffisamment bien dans cette situation, mais qu'en est-il d'une fonction que nous ne pouvons pas réécrire explicitement ? Il faudrait une différenciation implicite. Appliquons une différenciation implicite à cette situation, comme exercice :

$$\begin{aligned} y^2&=x\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^2&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\\ 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=1\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{2y}\end{aligned} \tag{6.3.227}$$

Si nous ne pouvions pas réécrire y explicitement en termes de x, c'est aussi loin que nous pourrions aller, mais nous savons que $y=\pm\sqrt{x}$, et en injectant ce résultat, nous trouvons que :

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

encore une fois. De cette façon, nous avons pu calculer les deux dérivées en une fois.

E2. Nous voulons trouver $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ pour $\sin(f)+f=x$.

Ici, nous n'avons pas d'autre choix que d'appliquer une différenciation implicite :

$$\begin{aligned} \sin(f)+f&=x\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(f)+f)&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\\ \cos(f)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}&=1\\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\cos(f)+1)&=1\\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{\cos(f)+1}\end{aligned} \tag{6.3.228}$$

Un cas célèbre d'application en mathématiques pures de la différenciation implicite (nous verrons plus loin pour la physique) est celui à l'origine de cette technique : le "folium de Des-

cartes[4]" défini par :

$$x^3+y^3-9xy=0 \tag{6.3.229}$$

La courbe a été proposée pour la première fois par René Descartes en... 1638.

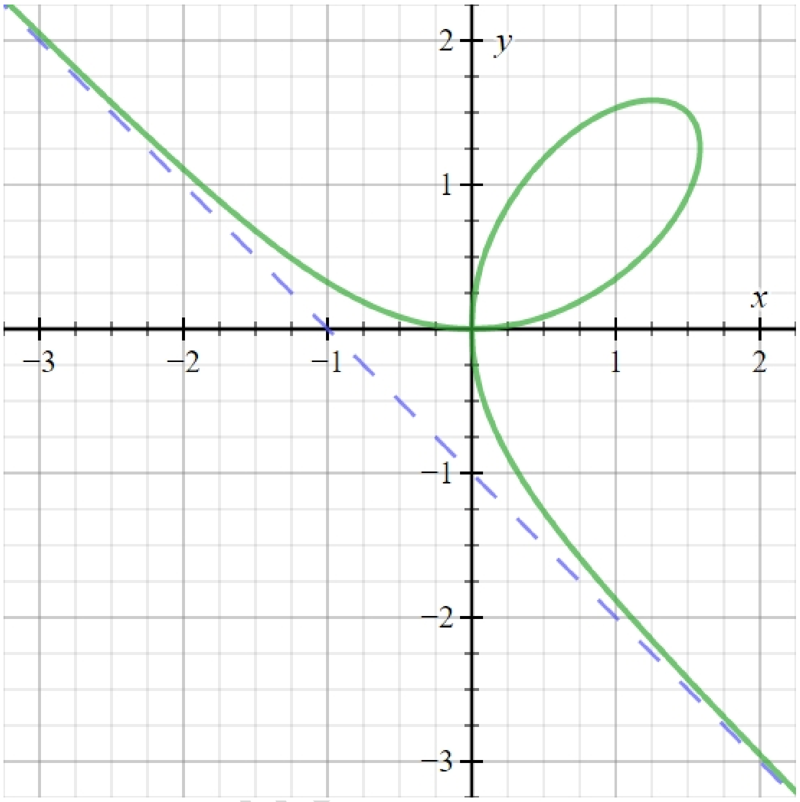


FIG. 6.35 – Le folium de Descartes (vert) avec asymptote (bleu) (source : Wikipédia)

Son titre de gloire réside dans un incident dans le développement du calcul. Descartes a défié Pierre de Fermat de trouver la ligne tangente à la courbe à un point arbitraire puisque Fermat avait récemment découvert une méthode pour trouver des lignes tangentes. Fermat a résolu le problème facilement, ce que Descartes n'a pas pu faire. Depuis l'invention de l'algèbre, la pente de la ligne tangente peut être trouvée facilement en utilisant la différentiation implicite en n'importe quel point comme nous allons le montrer !

Considérons maintenant que nous voulons trouver la pente de la courbe au point $(2,4)$. Ensuite, nous utilisons la différentiation implicite :

$$\begin{aligned}
x^3+y^3-9xy&=0\\
3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-9y-9x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=0\\
(3y^2-9y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=9y-3x^2\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{9y-3x^2}{3y^2-9y}&=\frac{3y-x^2}{y^2-3y}
\end{aligned} \tag{6.3.230}$$

[4]Le nom vient du mot latin folium qui signifie "feuille".

En évaluant la dérivée au point $(2,4)$ nous trouvons :

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(2,4)}=\left.\frac{3y-x^2}{y^2-3y}\right|_{(2,4)}=\frac{12-4}{16-6}=\frac{4}{5} \tag{6.3.231}$$

Maintenant que nous avons la pente de la ligne tangente au point d'intérêt, nous utilisons la forme point-pente :

$$\begin{gathered}y_t-y_0=m(x-x_0)\\ y_t-4=\frac{4}{5}(x-4)y_t=\frac{4}{5}(x-2)+4=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}\end{gathered} \tag{6.3.232}$$

Maintenant, tant que c'est la ligne normale à la courbe en ce point qui est d'intérêt, nous devons trouver la ligne perpendiculaire à la ligne tangente. Cette ligne passera par le même point, mais la pente sera l'inverse négatif de la pente de la ligne tangente. Il s'ensuit que :

$$y_n=-\frac{5}{4}(x-2)+4=-\frac{5}{4}x+\frac{13}{2} \tag{6.3.233}$$

Bon maintenant concentrons-nous sur un exemple appliqué à la physique (mise à part le fameux cas de la recherche de la tangente d'une ellipse). Nous prouverons dans la section de Mécanique des Continuums l'équation de Van der Waals (voir page **??**) : :

$$\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT \tag{6.3.234}$$

Si T reste constant, considérons que l'on veut trouver le taux de variation du volume par rapport à la pression, soit $\mathrm{d}V/\mathrm{d}P$! Nous pouvons nous défier ici de calculer ce taux de variation pour transformer cette équation en une fonction explicitement définie... Nous avons donc qu'il faut utiliser la différentiation implicite. D'abord :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P}\left(\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P}(nRT) \tag{6.3.235}$$

Cela donne immédiatement :

$$\left(1-\frac{n^2a}{V^3}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)(V-nb)+\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}=0 \tag{6.3.236}$$

Maintenant, nous distribuons :

$$V-nb-\frac{n^2a}{V^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}+\frac{n^3ab}{V^3}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}+P\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}+\frac{n^2a}{V^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}=0 \tag{6.3.237}$$

Après simplification et réarrangement nous obtenons :

$$\left(\frac{n^3ab}{V^3}+P\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}=nb-V \tag{6.3.238}$$

Finalement :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}=\frac{nb-V}{\dfrac{n^3ab}{V^3}+P} \tag{6.3.239}$$

En cours de traduction de l'anglais

Le cas particulier des exemples ci-dessus avec l'équation de Van der Waals et le folium de Descartes est introduit dans certains manuels comme suit avec un cas à deux variables :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c^{te}) \tag{6.3.240}$$

Dès lors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{6.3.241}$$

Se réduit à :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{6.3.242}$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}} \tag{6.3.243}$$

C'est tout pour le moment. Nous nous arrêterons ici sur ce sujet car nous n'avons pas besoin de plus de techniques ou d'exemples pour notre étude de la physique et de l'ingénierie comme présenté dans ce livre.

En cours de traduction de l' anglais

6.3.1.4 Régularité

La régularité a à voir avec le nombre de dérivées d'une fonction qui existent et sont continues. Le terme "fonction régulière" est souvent utilisé techniquement pour désigner une fonction qui a des dérivées de tous les ordres partout dans son domaine.

Définition (#6.3.194) : Une "classe de différentiabilité" est une classification des fonctions selon les propriétés de leurs dérivées. Les classes de différentiabilité d'ordre supérieur correspondent à l'existence de plus de dérivées.

Considérons un ensemble ouvert sur la ligne réelle $\mathbb{R}$ et une fonction f définie sur cet ensemble avec des valeurs réelles ou complexes. Soit k un entier non négatif. La fonction f est dite de classe (de différentiabilité) $\mathcal{C}^k$ si les dérivées $f', f'', \ldots, f(k)$ existent et sont continues (la continuité est impliquée par la différentiabilité pour toutes les dérivées sauf pour $f(k)$). La fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$, ou "lisse", si elle a des dérivées de tous les ordres. La fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^\omega$, ou simplement "analytique", si f est lisse et si elle est égale à son développement en série de Taylor autour d'un point quelconque de son domaine (voir section Suites et Séries page 1677). $\mathcal{C}^\omega$ est donc strictement contenu dans $\mathcal{C}^\infty$.

En cours de traduction de l' anglais

6.3.2 Calcul Intégral

Nous discuterons ici des principes de base du calcul intégral dans $\mathbb{R}^n$. Les sujets les plus avancés viendront en fonction du temps dont disposent les rédacteurs de ce livre mais le lecteur peut déjà se référer à la section Analyse Complexe (voir page 2369) pour les techniques d'intégration basées sur le théorème des résidus qui est très puissant et utile surtout pour certaines intégrales en physique quantique.

quote 6.3:1480.#44

> *La différentiation est une science, l'intégration est un art.*
>
> Anonymous

Pour information, le présent manuel est principalement dédié à l'intégrale de Darboux, à l'intégrale de Riemann et à l'intégrale de Lebesgue. Seulement si nous en avons le temps et s'il y a une nécessité pratique, nous introduirons également à l'avenir l'intégrale Régulée, l'intégrale de Riemann-Stieltjes et l'intégrale de Lebesgue-Stielties !

6.3.2.1 Intégrale Définie

L'origine du calcul intégral semble venir d'Archimède qui était fasciné par le calcul des aires de différentes formes. Il a utilisé un processus connu sous le nom de *Méthode d'exhaustion*, qui utilisait des formes de plus en plus petites, dont les aires pouvaient être calculées exactement, pour remplir une région irrégulière et obtenir ainsi des approximations de plus en plus proches de la superficie totale. Dans ce processus, une zone délimitée par des courbes est remplie de rectangles, de triangles et de formes avec des formules de zone exactes. Ces aires sont ensuite additionnées pour approximer l'aire de la région incurvée. Cette sous-section présente les intégrales définies.

La première idée du concept d'intégrale est de calculer l'aire algébrique (surface positive si au-dessus de l'axe x ou négative en dessous) entre une courbe et son support. Voir la figure ci-dessous avec une zone positive et les notations pour les développements qui suivront :

En cours de traduction de l'anglais

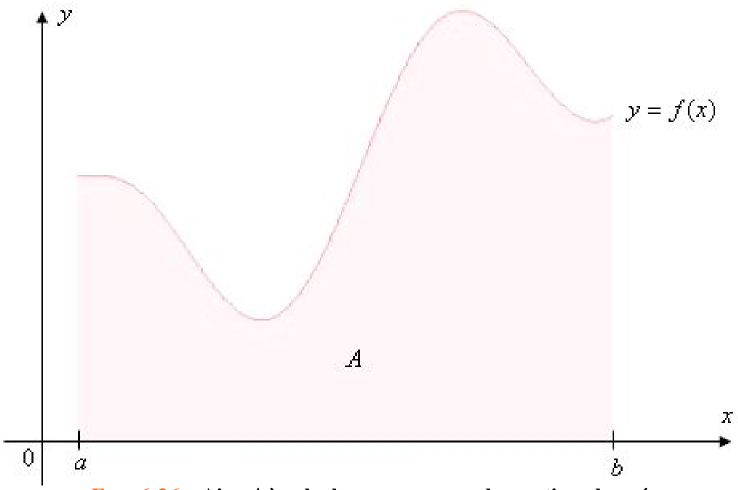


FIG. 6.36 – Aire A à calculer sous une courbe continue bornée

Ou avec des aires algébriques différentes (la différence entre la zone bleue et la zone jaune est nommée "zone nette signée") :

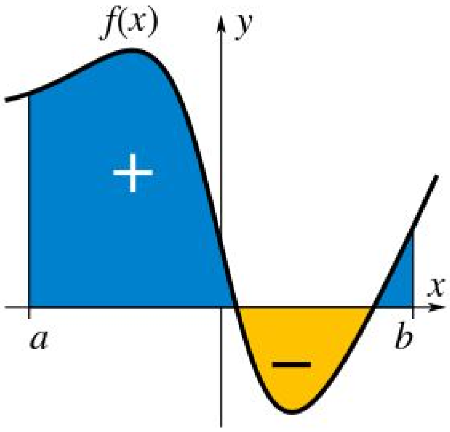
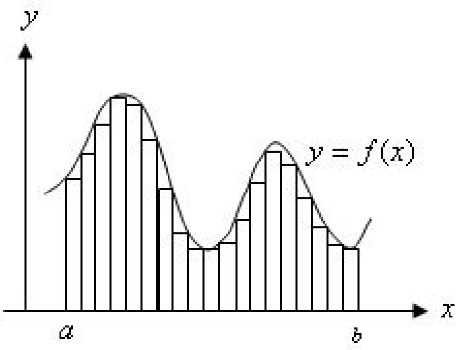


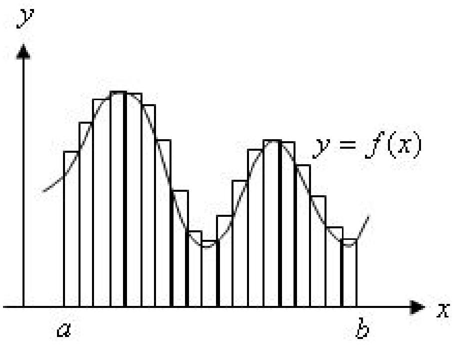
FIG. 6.37 – Aire A à calculer dans une fonction continue bornée positive et négative

En cours de traduction de l'anglais

Une valeur approchée de l'aire sous une courbe peut être obtenue par un découpage en n bandes rectangulaires verticales de même largeur. En particulier on peut réaliser un encadrement de cette aire à l'aide d'une somme majorante A_M et d'une somme minorante A_m pour un découpage donné :



(a) Somme minorante des aires A_m



(b) Somme majorante des aires A_M

Supposons que le nombre n de bandes tende vers l'infini. Comme les bandes sont de même largeur, la largeur de chaque bande tend vers 0 (objectivement il n'est pas nécessaire que la largeur des sous-intervalles du découpage soit la même partout).

Si les sommes A_m et A_M ont toutes deux une limite lorsque le nombre n de bandes tend vers l'infini, alors l'aire A sous la courbe est comprise entre ces deux limites. Nous notons cela :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} A_m < A < \lim_{n\rightarrow+\infty} A_M \tag{6.3.244}$$

Évidemment si ces deux limites sont égales, leur valeur est celle de l'aire sous la courbe.

D'où une première définition directe de l'intégrale définie ou dite "intégrale de Riemann".

Définition (#6.3.195) : Soit un intervalle $[a, b]$, divisé en n parties égales, soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, soit A_m, la somme algébrique minorante et soit A_M, la somme algébrique majorante. Nous appelons "intégrale définie" de f, depuis a jusqu'à b, notée :

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x} \tag{6.3.245}$$

le nombre A tel que :

$$A = \lim_{n\rightarrow+\infty} A_m = \lim_{n\rightarrow+\infty} A_M \tag{6.3.246}$$

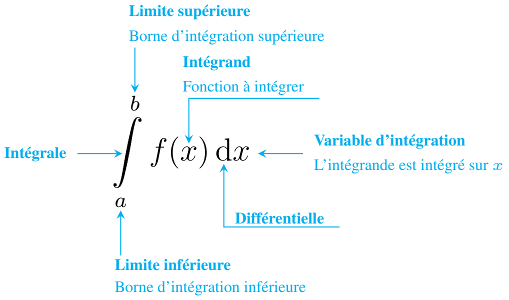
pourvu que cette limite existe. Si cette limite existe, alors nous disons que f est "intégrable" sur $[a, b]$ et l'intégrale définie existe.

Le symbole :

$$\int_a^b \tag{6.3.247}$$

n'est que le symbole de la somme discrète $\sum$ mais appliquée aux cas d'éléments infiniments petits.

Les nombres a et b (qui peuvent parfois être des fonctions !) de l'intégrale sont appelés les "bornes d'intégration" : a est la "borne inférieure", b est la "borne supérieure".



(6.3.248)

En cours de traduction de l'anglais

Intuitivement, il est évident que lorsque $a = b$, nous étendons la définition ainsi :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (6.3.249)$$

Enfin, signalons qu'il est tout à fait possible que l'intégrale soit négative ou même complexe puisqu'il s'agit d'une surface algébrique ! C'est-à-dire qu'en général, le résultat peut être dans $\mathbb{C}$.

Remarques

R1. D'autres lettres que x peuvent être employées dans la notation de l'intégrale définie. Ainsi si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s$, etc. C'est la raison pour laquelle la variable x de la définition est dite "variable muette".

R2. Comme nous le verrons plus loin, il est essentiel de ne pas confondre "intégrale définie" et "intégrale indéfinie". Ainsi, une intégrale indéfinie, notée $\int f(x)\mathrm{d}x$ est une fonction, ou, plus précisément, une famille de fonctions appelées aussi "primitives de f" (voir plus bas) alors qu'une intégrale définie, notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est une constante.

Voyons une deuxième approche de définition de l'intégrale, un peu plus rigoureuse que la précédente (suite à la demande de plusieurs lecteurs). Nous utiliserons par tradition cette fois-ci, le S de la surface au lieu du A de l'aire.

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. Nous considérons une subdivision de son support $[a,b]$ que nous notons :

$$\sigma = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b\} \quad (6.3.250)$$

où les intervalles ne sont pas obligatoirement de tailles équivalentes.

Nous notons pour $i = 1,2,3,\ldots,n$:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad (6.3.251)$$

Définitions (#6.3.196) :

D1. Nous appelons "somme de Darboux inférieure" associée à f et σ la surface :

$$s_{[a,b]}(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad (6.3.252)$$

En cours de traduction

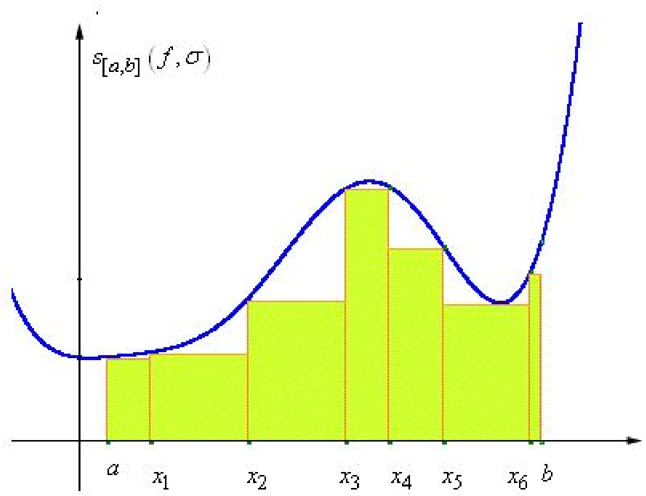


FIG. 6.39 – **Principe du calcul de la somme de Darboux inférieure**

D2. Nous appelons "somme de Darboux supérieure" associée à f et σ la surface :

$$S_{[a,b]}(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) \tag{6.3.253}$$

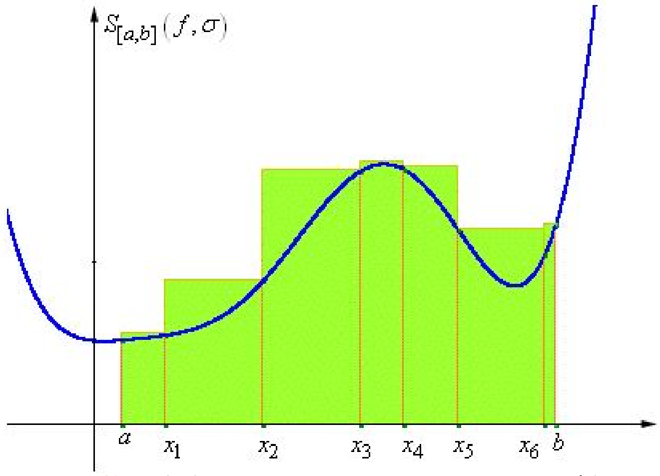


FIG. 6.40 – **Principe du calcul de la somme de Darboux supérieure**

En cours de l' anglais

Une fonction f est dite "Riemann-Intégrable sur $[a,b]$" si et seulement si les deux surfaces susmentionnées coïncident lorsque les intervalles deviennent infiniment petit.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.254}$$

L'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ sont notées $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

On pouvons faire une démonstration rapide et moche de cette équivalence (car ce n'est pas très intéressant pour un ingénieur car le résultat est assez intuitif).

Théorème 6.14. Rappelons que nous avons la définition suivante de l'intégrabilité de Darboux : Soit f définie et bornée sur $[a,b]$, alors f est Darboux intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition P de $[a,b]$ tel que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ (où U et L sont respectivement les sommes de Riemann supérieure et inférieure).

Une fonction est "Riemann intégrable" si :

$$\sup_P\{L(f,P)\} = \underline{\int_a^b} f(x) = \overline{\int_a^b} f(x) = \inf_P\{U(f,P)\} \tag{6.3.255}$$

ou de façon équivalente :

$$\inf_P\{U(f,P)\} - \sup_P\{L(f,P)\} < \varepsilon \tag{6.3.256}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Dans ce cas, le supremum des sommes inférieures est le même que l'infimum des sommes supérieures.

Démonstration 6.14.1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe P tel que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Dès lors, puisque :

$$L(f,P) \leq \sup_P\{L(f,P)\} \leq \inf_P\{U(f,P)\} \leq U(f,P) \tag{6.3.257}$$

nous avons clairement :

$$\inf_P\{U(f,P)\} - \sup_P\{L(f,P)\} < \varepsilon \tag{6.3.258}$$

qui est respecté.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Supposons que nous voulions montrer que la fonction $f(x) = x$ est Darboux-intégrable sur l'intervalle $[0,1]$ et déterminer sa valeur. Pour ce faire, nous partitionnons $[0,1]$ en n sous-intervalles de taille égale, chacun de longueur $1/n$. Nous désignons une partition de n sous-intervalles de taille égale par P_n.

Maintenant, puisque $f(x) = x$ est strictement croissante sur $[0,1]$, l'infimum sur un sous-intervalle particulier est donné par son point de départ. De même, le supremum sur un sous-intervalle particulier est donné par son point final. Le point de départ du k-ième sous-intervalle dans P_n est $(k-1)/n$ et le point final est k/n. Ainsi la somme de Darboux inférieure sur une partition P_n est donnée par :

$$\begin{aligned} L_{f,P_n} &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[k-1] \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\frac{(n-1)n}{2}\right] \end{aligned} \tag{6.3.259}$$

de même, la somme supérieure de Darboux est donnée par :

$$\begin{aligned} U_{f,P_n} &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{(n+1)n}{2} \right] \end{aligned} \tag{6.3.260}$$

Comme :

$$U_{f,P_n} - L_{f,P_n} = \frac{1}{n} \tag{6.3.261}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, nous avons que toute partition P_n avec $n > \frac{1}{\varepsilon}$ satisfait :

$$U_{f,P_n} - L_{f,P_n} < \varepsilon \tag{6.3.262}$$

ce qui montre que f est intégrable dans le sens de Darboux. Pour trouver la valeur de l'intégrale, notez que :

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U_{f,P_n} = \lim_{n\to\infty} L_{f,P_n} = \frac{1}{2} \tag{6.3.263}$$

Les sommes de Darboux ne sont pas très utiles pour le calcul effectif d'une intégrale, par exemple à l'aide d'un ordinateur, car il est en général assez difficile de trouver les inf et sup sur les sous-intervalles. On considère plutôt :

$$s_{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) \quad \text{ou} \quad S_{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \tag{6.3.264}$$

La "somme de Riemann" est défini par le fait que si nous désignons une "partition" (ou "partition régulière" s'ils sont tous ont la même largeur) de l'intervalle $[a, b]$ par :

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{6.3.265}$$

et que :

$$f(x_i) = f(\xi_i) \tag{6.3.266}$$

où $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, alors :

$$S \cong s_{[a,b]}(f) = S_{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{6.3.267}$$

Mais comme il faut bien choisir un ξ_i, souvent nous prenons soit celui à droite, soit celui à gauche, dès lors en prenant au hasard la "méthode des rectangles à gauche" :

$$S \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i \tag{6.3.268}$$

En cours de traduction anglais

Ce qui nous donnerait pour l'exemple ci-dessous :

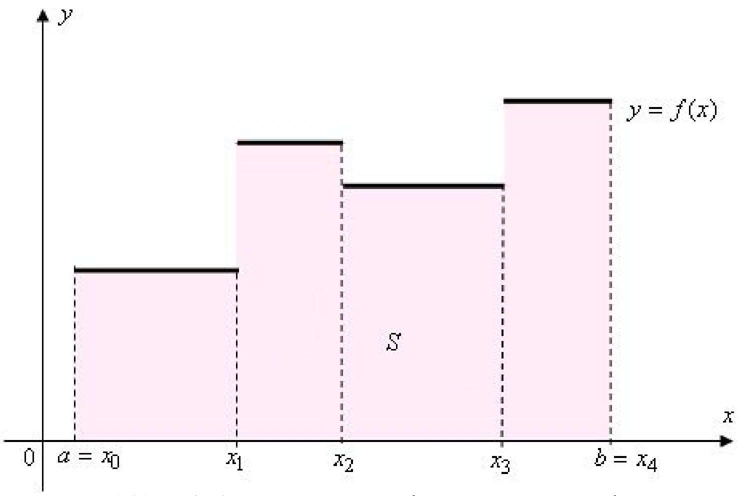


FIG. 6.41 – **Principe du calcul de la méthodes des rectangles à gauche**

Soit :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\Delta x_i = f(x_0)\Delta x_1 + f(x_1)\Delta x_2 + f(x_2)\Delta x_3 + f(x_3)\Delta x_4 \\
&= f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3)
\end{aligned}
\tag{6.3.269}
$$

Mais c'est facile pour une fonction en escalier... mais cela l'est moins pour une fonction continue pour laquelle nous n'obtiendrions qu'une valeur approchée de la surface réelle ! L'idée est alors de prendre des intervalles de plus en plus petits :

En cours de traduction de l' anglais

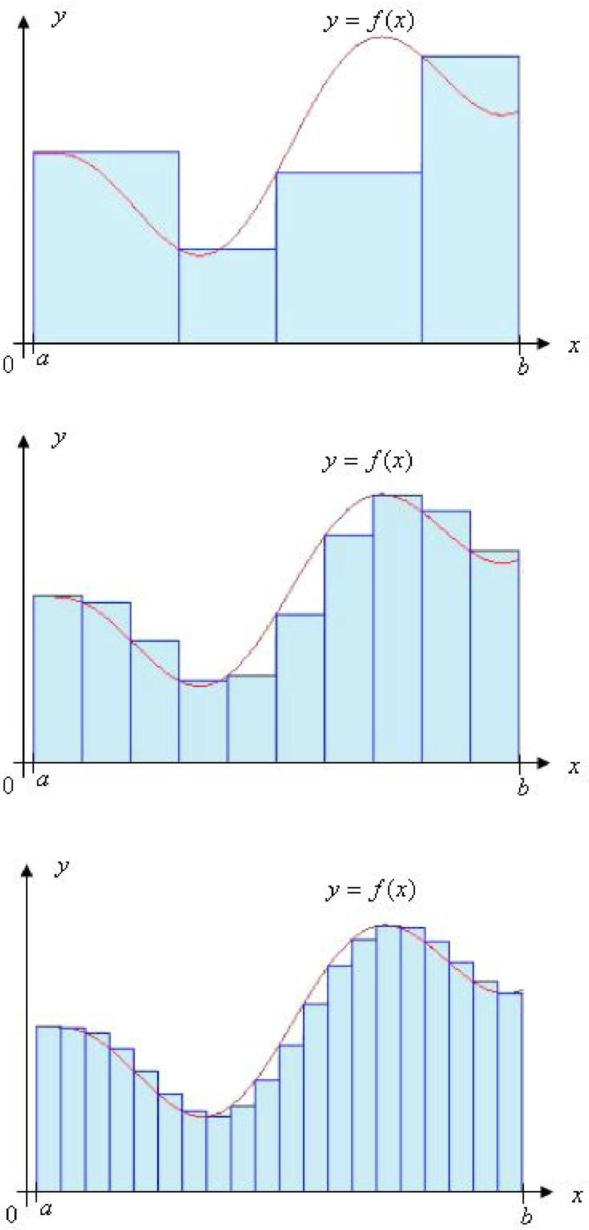


FIG. 6.42 – Principe du calcul de l'intégrale de Riemann avec la méthode des rectangles à gauche

En cours de l' anglais

Et dès lors, à la limite, nous obtenons la quantité voulue :

$$S \underset{\lim \Delta x_i \to 0}{=} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.270}$$

Le fait de chercher cette limite s'appelle "calculer l'intégrale", et plus spécifiquement de la méthode choisie : "intégrale de Riemann".

✍**Exemple :**

Nous voulons utiliser la construction de l'intégrale définie pour évaluer :

$$\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x \tag{6.3.271}$$

en utilisant une approximation de l'extrémité droite pour générer la somme de Riemann.

Pour cela, nous avons d'abord établi la somme de Riemann. Sur la base des limites d'intégration, nous avons $a = 0$ et $b = 2$. Pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, soit $P = \{x_i\}$ une partition régulière de $[0, 2]$. Puis :

$$x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + i\left[\frac{2}{n}\right] = \frac{2i}{n} \tag{6.3.272}$$

Ainsi, la valeur de la fonction à l'extrémité droite de l'intervalle est :

$$f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2} \tag{6.3.273}$$

Alors la somme de Riemann prend la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{6.3.274}$$

En utilisant la relation de sommation de Gauss de $\sum_{i=1}^{n} i^2$ (voir section Suites et Séries page 1646), nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] \\ &= \frac{16n^3+24n^2+n}{6n^3} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{1}{6n^2}\end{aligned} \tag{6.3.275}$$

Maintenant, pour calculer l'intégrale définie, nous devons prendre la limite comme $n \to +\infty$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{1}{6n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{3}\right) + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}\right) + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{8}{3} + 0 + 0 = \frac{8}{3}\end{aligned} \tag{6.3.276}$$

6.3.2.2 Intégrale Indéfinie

Nous avons vu précédemment lors de notre étude des dérivées, le problème suivant : étant donnée une fonction $F(x)$, trouver sa dérivée, c'est-à-dire la fonction algébrique :

$$F'(x) = f(x) \tag{6.3.277}$$

Définition (#6.3.197) : Nous disons que la fonction $F(x)$ est une "primitive" ou "intégrale indéfinie" de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a,b]$, si en tout point de ce segment nous avons l'égalité $F'(x) = f(x)$.

Deux définitions alternatives plus explicites et moins techniques sont :

- Une "intégrale indéfinie" est une FONCTION de x (ou une autre variable), tandis qu'une "intégrale définie" est une VALEUR !
- La collection de toutes les primitives de $f(x)$ est appelée "l'intégrale indéfinie" de f par rapport à x.

Une autre manière de voir le concept d'intégrale indéfinie est de passer par le "théorème fondamental du calcul intégral (et différentiel)" appelé aussi parfois "théorème fondamental de l'analyse" dont les deux propriétés s'énoncent ainsi :

1. Si A est la fonction définie par $A(X) = \int\limits_a^X f(t)\mathrm{d}t$ pour tout X dans $[a,b]$, alors A est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a (ou en d'autres termes : $f(t)$ est la dérivée de A).
2. Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors :

$$\boxed{\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)} \tag{6.3.278}$$

qui peut aussi s'écrire évidemment comme suit :

$$\int\limits_a^b F'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{6.3.279}$$

Certaines personnes disent alors que la somme des changements à l'extérieur d'une fonction (le côté gauche de l'égalité) est égale aux changements à l'intérieur de la fonction (le côté droit de l'égalité). C'est typiquement un cas particulier à 1 dimension du théorème de Stokes !

Démontrons la première propriété du théorème fondamental :

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.14.2. Soit la fonction :

$$A(X)=\int\limits_a^X f(t)dt \tag{6.3.280}$$

Si f est positive et $h>0$ (la démonstration dans le cas où $h<0$ est similaire) et comme $X>0$, nous pouvons nous représenter $A(X)$ comme l'aire sous la courbe de f de $t=a$ jusqu'à $t=X$.

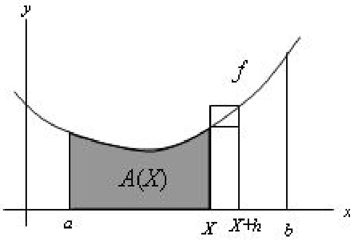


FIG. 6.43 – Représentation graphique de l'aire

Pour démontrer que A est une primitive de f, nous allons prouver que $A'=f$. Selon la définition de la dérivée :

$$A'(X)=\lim_{h\to 0}\frac{A(X+h)-A(X)}{h} \tag{6.3.281}$$

Etudions ce quotient : $A(x+h)-A(x)$ est représentée par l'aire de la bande de largeur h, prise en sandwich entre deux rectangles de largeur h.

Soit M le maximum de f sur l'intervalle $[X,X+h]$ et m le minimum de f sur ce même intervalle. Les aires respectives des deux rectangles sont Mh et mh.

Nous avons alors la double inégalité suivante :

$$mh\leq A(X+h)-A(X)\leq Mh \tag{6.3.282}$$

Comme h est positif, on peut diviser par h sans changer le sens des inégalités :

$$m\leq \frac{A(X+h)-A(X)}{h}\leq M \tag{6.3.283}$$

Lorsque $h\to 0^+$ et si f est une fonction continue, alors M et m ont pour limite $f(X)$, et le rapport :

$$\frac{A(X+h)-A(X)}{h} \tag{6.3.284}$$

qui est compris entre m et M, a bien pour limite $f(X)$.

Comme $A'(X)=f(X)$ pour tout X, ceci nous montre que la dérivée de la fonction aire est f. Ainsi A est une primitive de f. Comme $A(a)=0$, A est bien la primitive de f qui s'annule en a.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Avant de commencer la démonstration de la deuxième propriété du théorème fondamental, donnons et démontrons le théorème suivant qui va nous être indispensable : Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a,b]$, leur différence est une constante (ce théorème est très important en physique pour ce qui est de l'étude de ce que nous appelons les "conditions initiales").

Démonstration 6.14.3. Nous avons en vertu de la définition de la primitive :

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x) \\ F_2'(x) &= f(x) \end{aligned} \tag{6.3.285}$$

Nous avons en vertu de la définition de la primitive : $\forall x \in [a,b]$.

Posons :

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \tag{6.3.286}$$

Nous pouvons écrire :

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \left[F_1(x) - F_2(x)\right]' = \varphi'(x) = f(x) - f(x) = 0 \tag{6.3.287}$$

Il vient donc de ce que nous avons vu pendant notre étude des dérivées que :

$$\varphi(x) = c^{te} \tag{6.3.288}$$

Nous avons alors :

$$F_1(x) - F_2(x) = c^{te} \tag{6.3.289}$$

■ Q.E.D.

Il résulte de ce théorème que si nous connaissons une primitive quelconque $F(x)$ de la fonction $f(x)$, toute autre primitive de cette fonction sera de la forme :

$$F(x) + c^{te} \tag{6.3.290}$$

où c^{te} est nommée la "constant d'intégration".

Donc finalement, nous appelons "intégrale indéfinie" de la fonction $f(x)$ et nous notons :

$$\int f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.291}$$

toute expression de la forme où $F(x) + c^{te}$ est une primitive de $f(x)$. Ainsi, par convention d'écriture :

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c^{te}} \tag{6.3.292}$$

si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

Dans ce contexte, $f(x)$ est également appelée "fonction à intégrer" et $f(x)\mathrm{d}x$, la "fonction sous le signe somme".

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Une "antidérivée" (primitive) d'une fonction f est une fonction F dont la dérivée est f. L'intégrale indéfinie de f est l'ensemble de TOUTES les antidérivées (primitives) de f. Donc l'intégrale indéfinie et l'antidérivée (primitive) ne sont pas les mêmes chosese car la première est l'ensemble de toutes les secondes ! Si f et F sont tels que décrits tout à l'heure, l'intégrale indéfinie de f a la forme $\{F+c^{te}|c^{te}\in\mathbb{R}\}$ quand une antidérivée (primitive) n'est qu'un élément de cet ensemble ! ! Mais tous les enseignants ne sont pas d'accord sur la définition des antidérivées (primitives)...

Attention ! Parfois, toutes les primitives ne sont pas des fonctions des aires de Riemann. C'est exactement ce qui se passe avec la fonction constante $f(x)=0$. Quel que soit a choisi, nous aurons toujours :

$$\int_a^x 0\mathrm{d}t=0 \tag{6.3.293}$$

pour chaque x. Et ce n'est pas seulement la fonction toujours nulle qui fait cela !

Géométriquement, nous pouvons considérer l'intégrale indéfinie comme un ensemble (famille) de courbes telles que nous passons de l'une à l'autre en effectuant une translation dans le sens positif ou négatif de l'axe des ordonnées.

En cours de traduction de Opera Magistris

Revenons-en à la démonstration du point (2) du théorème fondamental de l'analyse :

Démonstration 6.14.4. Soit F une primitive de f. Puisque deux primitives diffèrent d'une constante, nous avons bien :

$$A(X)=F(X)+c^{te} \tag{6.3.294}$$

ce que nous pouvons écrire aussi :

$$\int_a^X f(t)\mathrm{d}t=F(X)+c^{te} \tag{6.3.295}$$

pour tout X dans $[a,b]$. Le cas particulier $X=a$ donne $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t$ et donc $F(a)+c^{te}=0$ et nous otenons trivialement $c^{te}=-F(a)$. En remplaçant, nous obtenons :

$$\int_a^X f(t)\mathrm{d}t=F(X)-F(a) \tag{6.3.296}$$

Comme cette identité est valable pour tout X de l'intervalle $[a,b]$, elle est vraie en particulier pour $X=b$. D'où :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)} \tag{6.3.297}$$

■ Q.E.D.

Ce dernier résulétat montre aussi quelque chose d'utile ! : Il n'est pas nécessaire lorsque nous évaluaons une intégrale de prendre en compte la constante de la primitive générale puisque celle-ci s'annule de par la différence des deux primitives ! !

Remarques

R1. Le théorème fondamental qui montre le lien entre primitive et intégrale a conduit à utiliser le même symbole $\int$ pour écrire une primitive (introduit par Leibniz à la fin du 17ème siècle), qui est une fonction, et une intégrale, qui elle, est un nombre.

R2. Nous avons également démontré dans le chapitre de Mécanique Analytique comment calculer à l'aide d'une intégrale la longueur d'une courbe dans le plan si la fonction $f(x)$ est explicitement connue.

Voici quelques propriétés triviales de l'intégration qu'il est bon de se rappeler car souvent utilisées ailleurs sur le site (si cela ne vous semble pas évident, contactez-nous et nous le détaillerons) :

En cours de traduction de l'anglais

P1. La dérivée d'une intégrale indéfinie est égale à la fonction à intégrer :

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(F(x)+c^{te}\right)' = f(x) \qquad (6.3.298)$$

P2. La différentielle d'une intégrale indéfinie est égale à l'expression sous le signe somme :

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x) \qquad (6.3.299)$$

P3. L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une certaine fonction est égale à la somme de cette fonction et d'une constante arbitraire :

$$\int F(x)\mathrm{d}x = F(x) \qquad (6.3.300)$$

P4. L'intégrale indéfinie de la somme (ou soustraction) algébrique de deux ou plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique de leurs intégrales (ne pas oublier que l'on travaille avec l'ensemble des primitives et non des primitives particulières !) :

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x \qquad (6.3.301)$$

Démonstration 6.14.5. Pour démontrer cela nous allons prouver que la dérivée du membre de gauche permet de trouver le membre de droite et inversement (réciproque) à l'aide des propriétés précédentes.

D'après P1 nous avons :

$$\left(\int [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x\right)' = \left(\int f_1(x)\mathrm{d}x\right)' + \left(\int f_2(x)\mathrm{d}x\right)' = f_1(x)+f_2(x) \qquad (6.3.302)$$

Vérifions s'il en est de même avec le membre de droite (nous supposons connues les propriétés des dérivées que nous avons démontrées au début de ce chapitre) :

$$\begin{aligned}\left(\int f_1(x)\mathrm{d}x+\int f_2(x)\mathrm{d}x\right)'&=\left(\int f_1(x)\mathrm{d}x\right)'+\left(\int f_2(x)\mathrm{d}x\right)'\\&=f_1(x)+f_2(x)\end{aligned} \tag{6.3.303}$$

■ Q.E.D.

P5. Nous pouvons sortir un facteur constant de sous le signe somme, c'est-à-dire :

$$\int c^{te}f(x)\mathrm{d}x=c^{te}\int f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.304}$$

Nous justifions cette égalité en dérivant les deux membres (et d'après les propriétés des dérivées) :

$$\begin{gathered}\left(\int c^{te}f(x)\mathrm{d}x\right)'=c^{te}f(x)\\\left(c^{te}\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=c^{te}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=c^{te}f(x)\end{gathered} \tag{6.3.305}$$

P6. Nous pouvons sortir un facteur constant de l'argument de la fonction intégrée (plutôt rarement utilisée) :

$$\int f(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax)+c^{te} \tag{6.3.306}$$

En effet, en dérivant les deux membres de l'égalité nous avons d'après les propriétés des dérivées :

$$\left(\int f(ax)\mathrm{d}x\right)'=\left(\frac{1}{a}F(ax)+c^{te}\right)'=f(ax) \tag{6.3.307}$$

P7. L'intégration d'une fonction dont l'argument est sommé (ou soustrait) algébriquement est la primitive de l'argument sommé (respectivement soustrait) :

$$\int f(x+b)\mathrm{d}x=F(x+b)+c^{te} \tag{6.3.308}$$

Cette propriété se démontre également identiquement à la précédente à l'aide des propriétés des dérivées.

P8. La combinaison des propriétés P6 et P7 nous permet d'écrire :

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+c^{te} \tag{6.3.309}$$

P9. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, nous avons pour tout c appartenant à cet intervalle :

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.310}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce théorème, appelé parfois "relation de Chasles" (de par son pendant vectoriel), découle immédiatement de la définition de l'intégrale indéfinie. F étant une primitive de f sur $[a, b]$ nous avons :

$$F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) \tag{6.3.311}$$

P10. Voilà une propriété souvent utilisée dans la section de Statistiques du site (nous ne trouvons pas de moyen d'exprimer cette propriété par le langage courant donc...) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int\limits_{g(x)}^{h(y)} f(t)\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(F(h(y)) - F(g(x))\right)\\ &= f(h(y))\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y} + f(g(x))\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}y}\\ &= f(h(y))h'(y)\end{aligned} \tag{6.3.312}$$

Voyons deux propriétés qui nous seront parfois utiles pour calculer des intégrales difficiles :

P11. Si une fonction est paire (voir section Analyse Fonctionnelle page 2186), l'intégrale sur des bornes symétriques équivaut à :

$$\begin{aligned}\int\limits_{-L}^{+L} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_{-L}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_{-L}^{0} f(-x)\mathrm{d}x}_{u=-x} + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int\limits_{-L}^{0} f(u)\mathrm{d}u + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{+L} f(u)\mathrm{d}u + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.3.313}$$

P12. Si une fonction est paire (voir section Analyse Fonctionnellea page 2187), l'intégrale sur des bornes symétriques équivaut à :

$$\begin{aligned}\int\limits_{-L}^{+L} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_{-L}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-L}^{0} -f(-x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \underbrace{\int\limits_{0}^{+L} f(-x)\mathrm{d}y}_{u=-x} + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{+L} f(u)\mathrm{d}u + \int\limits_{0}^{+L} f(x)\mathrm{d}x = 0\end{aligned} \tag{6.3.314}$$

P13. L'intégrale d'une fonction périodique est invariante sous un décalage de son intégration. C'est une propriété que nous utiliserons plus loin pour finaliser la preuve de la représentation intégrale de la fonction de Bessel d'ordre zéro du premier type.

Si f est une fonction périodique de période T nous savons que pour toute valeur a :

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.315}$$

En cours de traduction de l'anglais

Considérons donc maintenant :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{T}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.316}$$

Nous faisons le changement de variable $y = t - T$, alors nous avons pour la dernière intégrale :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(y+T)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a} f(y)\mathrm{d}y \tag{6.3.317}$$

Dès lors :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(y)\mathrm{d}y = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.318}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.3.2.3 Intégrale Double

L'idée des intégrales doubles est de mesurer le volume de la zone délimitée par le graphe d'une fonction de deux variables, au-dessus d'un domaine D du plan (ci-dessous D est rectangulaire).

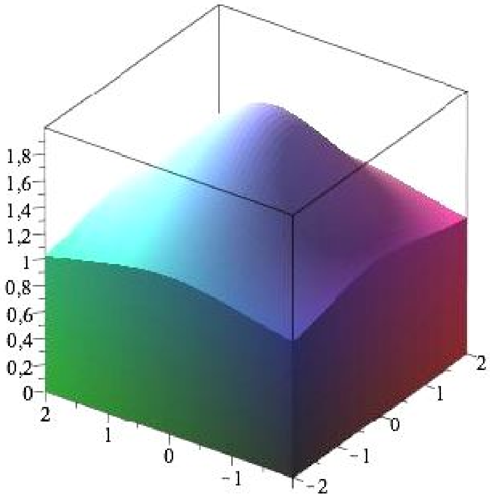


FIG. 6.44 – **Exemple d'une fonction à deux variables au-dessus d'un domaine**

Il va sans dire que les intégrales doubles sont extrêmement importantes aussi dans tout le domaine des mathématiques appliquées !

Là encore, l'idée est la même que l'intégrale définie. Si nous adaptons une approche simpliste, nous décomposons la fonction continue en un escalier et le volume à calculer se réduit alors à faire la somme des volumes de parallélépipèdes :

En cours de traduction de l' anglais

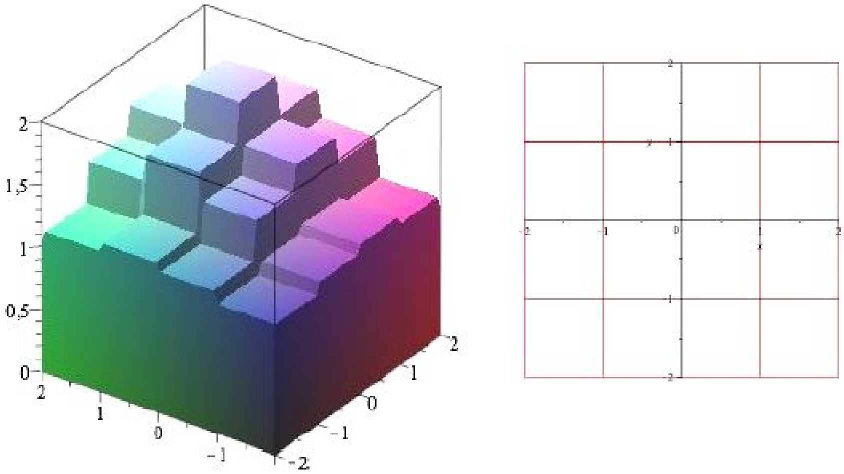


FIG. 6.45 – **Décomposition du volume en parallélépipèdes grossiers**

Dès lors nous avons la double somme :

$$V \cong \sum f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i = \sum f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i \qquad (6.3.319)$$

Pour une fonction continue, nous procèdons par approximations successives : nous calculons des sommes de Riemann pour des subdivisions de plus en plus fines du domaine D :

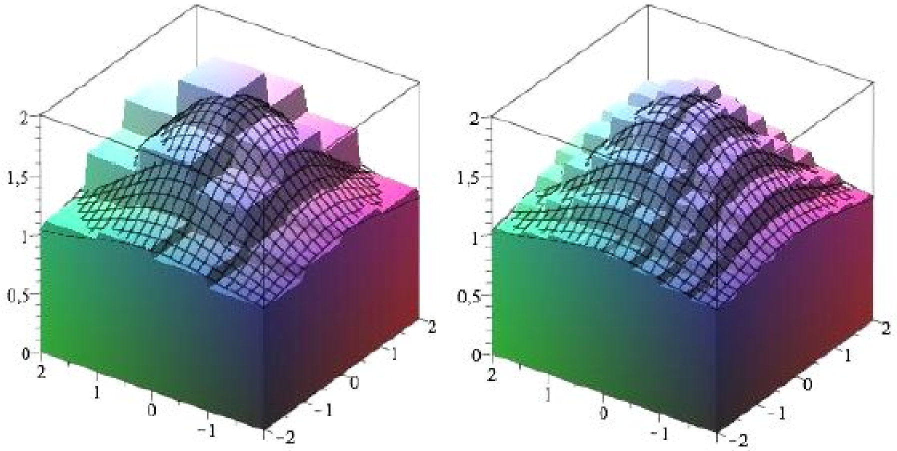


FIG. 6.46 – Décomposition du volume en parallélépipèdes de plus en plus fins

et donc à la limite :

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad (6.3.320)$$

Par contre, quand on veut intégrer sur un domaine qui n'est pas rectangulaire, les choses se compliquent à priori... Voyons comment contourner le problème.

Pour cela, nous allons construire le domaine D fermé borné de la façon suivante.

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x), v(x)] \end{cases} \qquad (6.3.321)$$

où le lecteur aura remarqué que le support de y est la variable x par l'intermédiaire de deux fonctions u et v. C'est ce que nous appelons alors un "domaine du type I" (et donc si c'est y qui paramétrise x alors il s'agit "domaine du type II").

Ce qui peut s'illustrer par la figure ci-dessous :

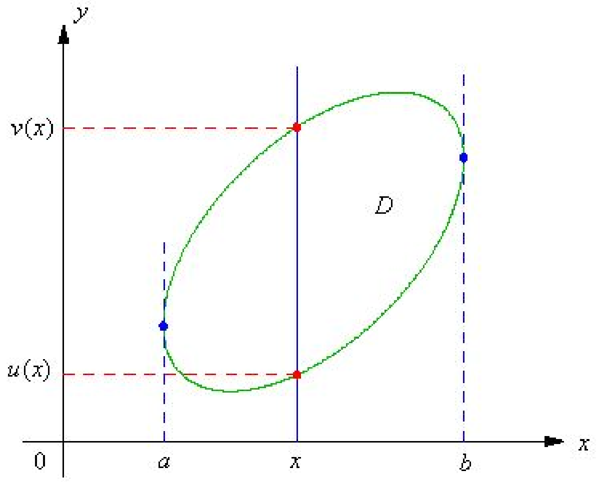


FIG. 6.47 – Exemple d'un domaine de type I

où nous remarquons que cette approche simpliste (il existe d'autres approches possibles mais qui nécessitent de faire appel à la théorie de la mesure) nécessite que le domaine soit simplement

En cours de traduction de l'anglais

connexe (qu'il n'y ait pas de trous hors du domaine D entre $u(x)$ et $v(x)$) ou décomposé en sous-domaines disjointes simplement connexes.

Bref, nous pouvons donc intégrer de la manière suivante :

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad (6.3.322)$$

Donc nous transformons l'intégrale double en deux intégrales simples emboîtées.

6.3.2.3.1 Théorème de Fubini

Nous allons voir un théorème important utilisé à de nombreuses reprises dans différents chapitres du site et qui permet d'inverser l'ordre d'intégration.

En se rappelant que :

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x),v(x)] \end{cases} \qquad (6.3.323)$$

nous pouvons aussi utiliser :

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [c,d] \\ x \in [\alpha(y),\beta(y)] \end{cases} \qquad (6.3.324)$$

Ainsi avec cette paramétrisation nous pouvons écrire :

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \qquad (6.3.325)$$

Nous pouvons ainsi changer l'ordre d'intégration, le calcul est différent, mais le résultat est le même. Mais ce n'est pas cela qui nous intéresse en réalité ici.

Considérons une fonction telle que (nous disons que la fonction est à "variables séparables") :

$$f(x,y) = \varphi(x)\psi(y) \qquad (6.3.326)$$

Alors :

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(x)\psi(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad (6.3.327)$$

Supposons que le domaine est un rectangle (nous faisons cette simplification sinon la démonstration se complique nettement). C'est-à-dire :

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [c,d] \end{cases} \qquad (6.3.328)$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors par la propriété de linéarité des intégrales :

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{u(x)}^{v(x)} \varphi(x)\psi(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \varphi(x)\psi(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\varphi(x) \int\limits_c^d \psi(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^b \varphi(x) \left(\int\limits_c^d \psi(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \left(\int\limits_c^d \psi(y)\mathrm{d}y \right) \int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \int\limits_c^d \psi(y)\mathrm{d}y \end{aligned} \quad (6.3.329)$$

6.3.2.4 Intégration par changement de variables

Lorsque nous ne pouvons facilement déterminer la primitive d'une fonction donnée, nous pouvons nous débrouiller par un changement de variable astucieux (parfois même très subtil) pour contourner la difficulté. Cela ne marche pas à tous les coups (car certaines fonctions ne sont pas intégrables formellement) mais il vaut la peine d'essayer avant d'avoir recours à l'ordinateur.

À nouveau, nous ne donnons que la forme générale de la méthode. C'est le rôle des professeurs dans les écoles d'entraîner les élèves à comprendre et maîtriser ce genre de techniques. De plus, les chapitres traitant des sciences exactes sur le site (physique, informatique, astrophysique, chimie, ...) regorgent d'exemples utilisant cette technique et servent ainsi implicitement d'exercices de style.

Soit à calculer l'intégrale (non bornée pour l'instant) :

$$\int f(x)\mathrm{d}x \quad (6.3.330)$$

bien que nous ne sachions pas calculer directement la primitive de cette fonction $f(x)$ (en tout cas nous imaginons être dans une telle situation) nous savons (d'une manière ou d'une autre) qu'elle existe (nous ne traitons pas encore des intégrales impropres à ce niveau).

La technique consiste alors dans cette intégrale à effectuer le changement de variable :

$$x = \varphi(t) \quad (6.3.331)$$

où $\varphi(t)$ est une fonction continue ainsi que sa dérivée, et admettant une fonction inverse. Alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$, démontrons que dans ce cas l'égalité :

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \quad (6.3.332)$$

est satisfaite.

Démonstration 6.14.6. Nous sous-entendons ici que la variable t sera remplacée après intégration du membre droit par son expression en fonction de x. Pour justifier l'égalité en ce sens, il suffit de montrer que les deux quantités considérées dont chacune n'est définie qu'à une constante arbitraire près ont la même dérivée par rapport à x. La dérivée du membre gauche est :

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x \right)' = f(x) \quad (6.3.333)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous dérivons le membre droit par rapport àx en tenant compte que t est une fonction de x. Nous savons que :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t) \tag{6.3.334}$$

Nous avons par conséquent :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)&=\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\&=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=f(\varphi(t))\\&=f(x)\end{aligned} \tag{6.3.335}$$

■ Q.E.D.

Les dérivées par rapport à x des deux membres de l'égalité de départ sont donc égales.

Bien évidemment, la fonction $x=\varphi(t)$ doit être choisie de manière à ce que nous sachions calculer l'intégrale indéfinie figurant à droite de l'égalité.

Remarque

Il est parfois préférable de choisir le changement de variable sous la forme $t=\varphi(x)$ au lieu de $x=\psi(t)$ car cela à une large tendance à simplifier la longueur de l'équation au lieu de l'allonger.

Il est évident que ce théorème s'écrira plus explicitement :

$$\boxed{\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{b} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t} \tag{6.3.336}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.4.1 Jacobien

Considérons un domaine D du plan u, v limité par une courbe L. Supposons que les coordonnées x, y soient des fonctions des nouvelles variables u, v (toujours dans le cadre d'un changement de variables donc) par les relations de transformations :

$$\begin{gathered} x = \varphi(u,v) \quad y = \phi(u,v) \\ (x,y) \in D \underset{\varphi,\phi}{\longrightarrow} (\varphi,\phi) \in D' \end{gathered} \tag{6.3.337}$$

où les fonctions $\varphi(x,y)$ et $\phi(u,v)$ sont univoques, continues et possèdent des dérivées continues dans un certain domaine D' que nous définirons par la suite. Il correspond alors d'après les relations précédentes à tout couple de valeurs u, v un seul couple de valeur x, y et réciproquement.

Il résulte de ce qui précède qu'à tout point $P(x,y)$ du plan Oxy correspond univoquement un point $P'(u,v)$ du plan Ouv de coordonnées u, v définies par les relations précédentes. Les nombres v et u seront appelées "coordonnées curvilignes" de P et nous verrons des exemples concrets et schématisés de ceux-ci dans la section de Calcul Vectoriel.

Si dans le plan Oxy le point P décrit la courbe fermée L délimitant le domaine D, le point correspondant décrit dans le plan Ouv un certain domaine D'. Il correspond alors à tout point de D' un point de D. Ainsi, les relations de transformations établissent une correspondance biunivoque entre les points des domaines D et D'.

Considérons maintenant dans D' une droite d'équation $u = c^{te}$. En général, les relations de transformation lui font correspondre dans le plan Oxy une ligne courbe (ou inversement). Ainsi, découpons le domaine D' par des droites d'équations $u = c^{te}$ et$v = c^{te}$ en de petits domaines rectangulaires (nous ne prendrons pas en compte dans la limite, les rectangles empiétant sur la frontière de D'). Les courbes correspondantes du domaine D découpent alors ce dernier en quadrilatère (définis par des courbes donc). Évidemment, l'inverse est applicable.

Considérons dans le plan Ouv le rectangle $\Delta s'$ limité par les droites :

$$\begin{gathered} u = c^{te}, u + \Delta u = c^{te} \\ v = c^{te}, v + \Delta v = v^{te} \end{gathered} \tag{6.3.338}$$

et le quadrilatère curviligne Δs correspondant dans le plan Oxy. Nous désignerons les aires de ces domaines partiels également par $\Delta s'$ et Δs. Nous avons évidemment :

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v \tag{6.3.339}$$

Les aires Δs et $\Delta s'$ peuvent être en général différentes.

En cours de traduction de l'anglais

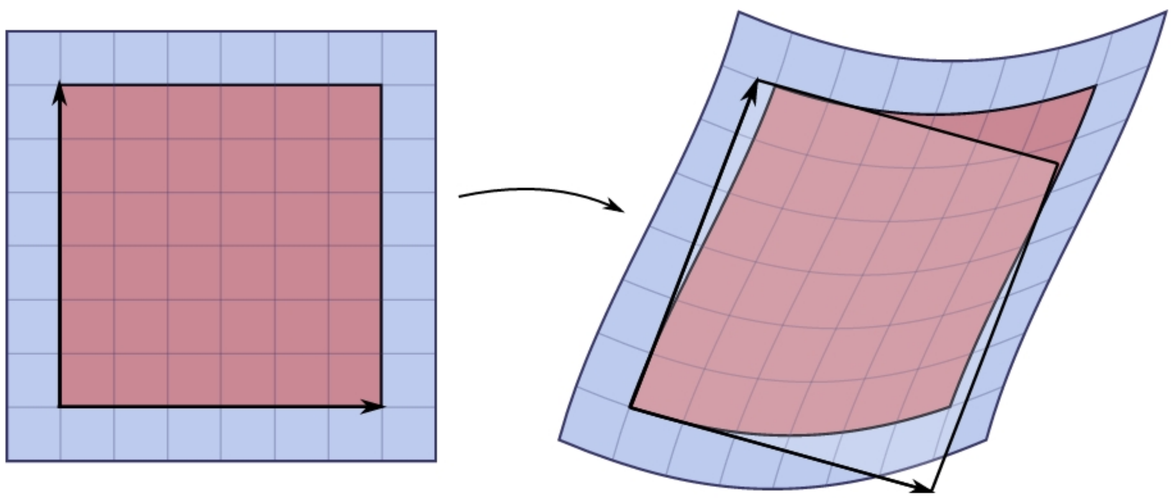


FIG. 6.48 – Une application non linéaire $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ envoie un petit carré à un parallélogramme déformé

Supposons donc dans D une fonction continue $z=f(x,y)$. Il correspond à toute valeur de cette fonction du domaine D la même valeur $z=F(u,v)$ (ce qu'il faut vérifier) dans D', où :

$$F(u,v)=f(x,y)=f\left(\varphi(u,v),\phi(u,v)\right) \tag{6.3.340}$$

Considérons les sommes intégrales de la fonction z dans le domaine D. Nous avons évidemment l'égalité suivante :

$$\sum f(x,y)\Delta s=\sum F(u,v)\Delta s \tag{6.3.341}$$

Calculons Δs, c'est-à-dire l'aire du quadrilatère curviligne P_1, P_2, P_3, P_4 dans le plan Oxy :

Déterminons les coordonnées de ses sommets :

$$\begin{array}{lll}
P_1(x_1,y_1) & x_1=\varphi(u,v) & y_1=\phi(u,v)\\
P_2(x_2,y_2) & x_2=\varphi(u+\Delta u,v) & y_2=\phi(u+\Delta u,v)\\
P_3(x_3,y_3) & x_3=\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v) & y_3=\phi(u+\Delta u,v+\Delta v)\\
P_4(x_4,y_4) & x_4=\varphi(u,v+\Delta v) & y_4=\phi(u,v+\Delta v)
\end{array}$$

Nous assimilerons dans le calcul de l'aire du quadrilatère P_1,P_2,P_3,P_4 les arcs $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ à des segments de droites parallèles. Nous remplacerons en outre les accroissements des fonctions par leurs différentielles. C'est dire que nous faisons abstraction des infiniment petits d'ordre plus élevé que Δu et Δv. Les relations précédentes deviennent alors :

$$\begin{array}{ll}
x_1=\varphi(u,v) & y_1=\phi(u,v)\\
x_2=\varphi(u,v)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u & y_2=\phi(u,v)+\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u\\
x_3=\varphi(u,v)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v & y_3=\phi(u,v)+\dfrac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\Delta v\\
x_4=\varphi(u,v)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v & y_4=\phi(u,v)+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}\Delta v
\end{array} \tag{6.3.342}$$

En cours de traduction de l'anglais

Sous ces hypothèses, le quadrilatère curviligne $P_1P_2P_3P_4$ peut être assimilé à un parallélogramme. Son aire est approximativement égale au double de l'aire du triangle $P_1P_2P_3$, aire que nous pouvons calculer en utilisant les propriétés du déterminant (comme nous le démontrerons dans le chapitre d'Algèbre Linéaire, le déterminant dans $\mathbb{R}^2$ représente un parallélogramme alors que dans $\mathbb{R}^3$ celui-ci représente le volume d'un parallélépipède) :

$$\begin{aligned}\Delta s &\cong |\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2)| = |\det(M)|\\ &= \left|\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right| = |a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}|\end{aligned} \tag{6.3.343}$$

Tel que (c'est là qu'il faut faire le meilleur choix pour que l'expression finale soit la plus simple et la plus esthétique, nous procédons par essais successifs et faisons enfin le choix ci-dessous) :

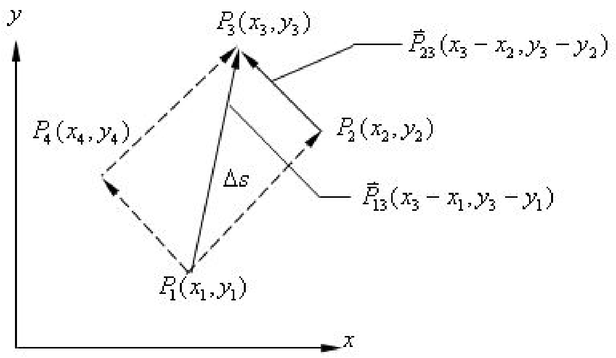


FIG. 6.49 – **Représentation graphique du déterminant**

En cours de traduction vers l'anglais

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta s \cong |\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2)| &= |D(\vec{P}_{13},\vec{P}_{23})|\\ &= \left|\det\begin{bmatrix}(x_3-x_1) & (x_3-x_2)\\ (y_3-y_1) & (y_3-y_2)\end{bmatrix}\right|\\ &= |(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)|\\ &= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\phi}{\partial v}\Delta v-\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\phi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right|\\ &= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}\Delta u\Delta v-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right|\\ &= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}\Delta u\Delta v-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v\\ &= |\det(J)|\Delta u\Delta v\\ &= \left|\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\end{bmatrix}\right|\Delta s'\end{aligned} \tag{6.3.344}$$

Par conséquent la relation suivante (contenant ce qu'il est d'usage d'appeler le "déterminant fonctionnel) :

$$\Delta s \cong \left|\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\end{bmatrix}\right|\Delta s' \tag{6.3.345}$$

avec :

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\end{bmatrix} \quad (6.3.346)$$

qui est la "matrice jacobienne" (alors que son déterminant est appelé le "jacobien" (tout court)) de la transformation de coordonnées de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. En appliquant exactement le même raisonnement pour $\mathbb{R}^3$, la matrice jacobienne s'écrit alors (en changeant un peu les notations car sinon cela devient illisible) :

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial u} & \dfrac{\partial P}{\partial v} & \dfrac{\partial P}{\partial w}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial u} & \dfrac{\partial Q}{\partial v} & \dfrac{\partial Q}{\partial w}\\ \dfrac{\partial R}{\partial u} & \dfrac{\partial R}{\partial v} & \dfrac{\partial R}{\partial w}\end{bmatrix} \quad (6.3.347)$$

Bref, à quoi cela sert-il concrètement ? Eh bien revenons à notre relation :

$$\Delta s \cong |\det(J)|\Delta s' \quad (6.3.348)$$

qui n'est finalement qu'approximatiion étant donné que dans les calculs de l'aire Δs nous avons négligé les infiniment petits d'ordre supérieur. Toutefois, plus les dimensions des domaines élémentaires Δs et $\Delta s'$ sont petites, et plus nous nous approchons de l'égalité. L'égalité ayant finalement lieu quand nous passons à la limite (finalement en maths aussi on fait des approximations... hein !), les surfaces des domaines élémentaires tendant vers zéro :

$$|\det(J)|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s'} \quad (6.3.349)$$

Appliquons maintenant l'égalité obtenue au calcul de l'intégrale double (nous pouvons faire de même avec la triple bien sûr). Nous pouvons donc finalement écrire (c'est la seule manière de poser la chose qui ait un sens) :

$$\begin{gathered}\sum f(x,y)\Delta s=\sum F(u,v)\Delta s\\ \Downarrow\\ \sum f(x,y)\Delta s\cong\sum F(u,v)|\det(J)|\Delta s'\end{gathered} \quad (6.3.350)$$

Passant à la limite, nous obtenons l'égalité stricte :

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} F(u,v)|\det(J)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v} \quad (6.3.351)$$

Telle est la relation de transformation des coordonnées dans une intégrale double. Elle permet de ramener le calcul d'une intégrale double dans le domaine D au domaine D', ce qui peut simplifier le problème. De même, pour une intégrale triple, nous écrirons :

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{D'} F(u,v,w)|\det(J)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w} \quad (6.3.352)$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

Déterminons maintenant le Jacobien pour les systèmes de coordonnées les plus courants (nous renvoyons à nouveau le lecteur au chapitre de Calcul Vectoriel pour plus d'informations concernant ces systèmes) :

E1. Coordonnées polaires $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi)$:

$$\left|\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi}\end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}\cos(\phi) & -r\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & r\cos(\phi)\end{bmatrix}\right| = |r| \tag{6.3.353}$$

Comme r est toujours positif, nous écrivons simplement :

$$|\det(J)| = r \tag{6.3.354}$$

En cours de traduction de l'anglais

E2. En coordonnées cylindriques $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi), z = z$ (voir section Algèbre Linéaire page 1935 pour le calcul détaillé d'un tel déterminant) :

$$\begin{aligned}\left|\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial z}\end{bmatrix}\right| &= \left|\det\begin{bmatrix}\cos(\phi) & -r\sin(\phi) & 0\\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{bmatrix}\cos(\phi)r\cos(\phi)\cdot 1-\cos(\phi)\cdot 0\cdot 0\\ +r\sin(\phi)\sin(\phi)\cdot 1-r\sin(\phi)\cdot 0\cdot 0\\ +0\cdot\sin(\phi)\cdot 0-1\cdot r\cos(\phi)\cdot 0\end{bmatrix}\right| \\ &= |r|\end{aligned} \tag{6.3.355}$$

Comme r est toujours positif, nous écrivons simplement :

$$|\det(J)| = r \tag{6.3.356}$$

E3. En coordonnées sphériques $x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta)$ (voir section Algèbre Linéaire page 1935 pour le calcul détaillé d'un tel déterminant) :

$$\begin{aligned}\left|\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\end{bmatrix}\right| &= \left|\det\begin{bmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta)\end{bmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{matrix}-\sin(\theta)\cos(\phi)r\sin(\theta)\cos(\phi)r\sin(\theta)-\sin(\theta)\cos(\phi)r\cos(\theta)\sin(\phi)\cdot 0\\ -r\sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi)r\sin(\theta)-r\sin(\theta)\sin(\phi)r\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\theta)\\ +r\cos(\theta)\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi)\cdot 0+r\cos(\theta)\cos(\phi)r\sin(\theta)\cos(\phi)r\sin(\theta)\end{matrix}\right| \\ &= \left|\begin{matrix}-(\sin^3(\theta)\cos^2(\phi)r^2+\sin^3(\theta)\sin^2(\phi)r^2)\\ -(r^2\sin(\theta)\sin^2(\phi)\cos^2(\theta)+r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\phi)\sin(\theta))\end{matrix}\right| \\ &= |-\sin^3(\theta)r^2-r^2\sin(\theta)\cos^2(\theta)| \\ &= |-r^2\sin(\theta)(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))| \\ &= |-r^2\sin(\theta)|\end{aligned} \tag{6.3.357}$$

Comme r^2 est toujours positif, nous écrivons simplement :

$$|\det(J)| = r^2\sin(\theta) \quad \text{avec} \quad \sin(\theta) \geq 0 \tag{6.3.358}$$

La définition de la différentiabilité dans le calcul multivariable est un peu technique. Il y a des subtilités à surveiller, car il faut se rappeler que l'existence de la dérivée est une condition plus stricte que l'existence de dérivées partielles. Mais, au final, si notre fonction est assez sympa pour qu'elle soit dérivable, alors la dérivée elle-même n'est pas trop compliquée. C'est une généralisation assez simple de la dérivée à variable unique.

Dans le calcul univaré, nous avons appris que la dérivée d'une fonction $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ en un seul point n'est qu'un nombre réel, le taux d'augmentation de la fonction (c'est-à-dire la pente du graphique) à ce stade. Nous pourrions considérer ce nombre comme une matrice de 1×1, donc

si nous le souhaitons, nous pourrions désigner la dérivée de $f(x)$ à $x=a$ comme :

$$\mathrm{D}f(a)=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)\right] \tag{6.3.359}$$

Pour une fonction à valeur scalaire de plusieurs variables, telles que $f(x,y)$ ou $f(x,y,z)$, nous pouvons considérer les dérivées partielles comme les taux d'augmentation de la fonction dans la directions des coordinées. Si la fonction est dérivable, alors la dérivée est simplement une matrice ligne contenant toutes ces dérivées partielles, que nous appelons la "matrice des dérivées partielles" (qui correspond à la matrice jacobienne). Pour $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, vu comme un $f(\vec{x})$, où $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, la matrice $1\times n$ des dérivées partielles à $\vec{x}=\vec{a}$ est :

$$\mathrm{D}f(\mathbf{a})=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right] \tag{6.3.360}$$

La dernière généralisation concerne les fonctions vectorielles, $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$. Ici, $f(\vec{x})$ est une fonction du vecteur $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dont la sortie est un vecteur de m composants. Nous pourrions écrire f en termes de ses composants comme :

$$f(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),f_2(\vec{x}),\ldots,f_m(\vec{x}))=\begin{bmatrix}f_1(\vec{x})\\ f_2(\vec{x})\\ \vdots\\ f_m(\vec{x})\end{bmatrix} \tag{6.3.361}$$

(Rappelez-vous que lorsque nous considérons les vecteurs comme des matrices, nous les considérons comme des matrices de colonnes, de sorte que les composants sont empilés les uns sur les autres.)

Pour former la matrice des dérivées partielles, nous considérons $f(\vec{x})$ comme une matrice de colonnes, où chaque composant est une fonction à valeur scalaire. La matrice des dérivées partielles de chaque composant $f_i(\vec{x})$ serait une matrice de lignes de $1\times n$, comme ci-dessus. Nous empilons simplement ces matrices de lignes les unes sur les autres pour former une matrice plus grande. Nous obtenons que la matrice $m\times n$ complète des dérivées partielles à $\vec{x}=\vec{a}$ est :

$$\mathrm{D}f(\vec{a})=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a})\end{bmatrix} \tag{6.3.362}$$

Bien que nous devrions probablement nous référer à la dérivée de f comme la transformation linéaire associée à la matrice $\mathrm{D}f(\vec{a})$, c'est bien à ce niveau de se référer à la " NewTermmatrice des dérivées partielles" $Df(\vec{a})$ comme "la dérivée" de f au point $\vec{a}$ (en supposant que f est dérivable en $\vec{a}$, bien sûr).

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Soit $f(x,y)=x^2+y^2$. Nous voulons trouver $\mathrm{D}f(1,2)$ et l'équation pour le plan tangent (en utilisant le développement de Taylor multivarié tel que démontré à la page 1694) à $(x,y)=(1,2)$.

Nous avons dans un premier temps :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=2x\\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)&=2\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=2y\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)&=4\end{aligned} \tag{6.3.363}$$

Ainsi $\mathrm{D}f(1,2)=[2 \quad 4]$.

Puisque les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont des fonctions continues, nous savons que $f(x,y)$ est dérivable. Par conséquent, $\mathrm{D}f(1,2)$ est la dérivée de f, et la fonction y a un plan tangent.

Pour calculer l'équation du plan tangent, le seul calcul supplémentaire est la valeur de f à $(x,y)=(1,2)$, soit $f(1,2)=1^2+2^2=5$. L'équation pour le plan tangent est donc (toujours en utilisant l'approximation multivariée de Taylor) :

$$\begin{aligned}z&\cong f(1,2)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)\\ &=5+2(x-1)+4(y-2)\end{aligned} \tag{6.3.364}$$

6.3.2.5 Intégration par parties

Lorsque nous cherchons à effectuer des intégrations, il est très fréquent que nous ayons à utiliser un outil (ou méthode de calcul) appelé "intégration par parties". Il existe différents degrés d'utilisation de cet outil et nous allons commencer par le plus simple et qui est le plus utilisé dans tous les chapitres traitant de physique sur le présent site.

Nous partons d'abord de la dérivée du produit de deux fonctions démontrée plus haut :

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \tag{6.3.365}$$

nous avons donc :

$$f(t)g'(t) = (f(t)g(t))' - f'(t)g(t) \tag{6.3.366}$$

et il vient :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left[(f(t)g(t))' - f'(t)g(t)\right]\mathrm{d}t = \int_a^b (f(t)g(t))'\mathrm{d}t - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.367}$$

après une dernière simplification nous avons enfin la fameuse relation très importante :

$$\boxed{\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t} \tag{6.3.368}$$

Mais nous allons parfois avoir besoin de la généralisation de cette dernière relation. Nous pouvons démontrer que si f et g sont deux applications (fonctions) de classe $\mathcal{C}^n$ (dérivables n fois) sur $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, alors :

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)} \cdot g^{(n-1-k)}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.369}$$

Démonstration 6.14.7. Procédons par récurrence sur n (attention ce n'est pas forcément facile à comprendre comme souvent avec les démonstrations par récurrence !).

Tout en sachant la relation vraie pour $n=1$, nous la supposons vraie pour n (comme donnée dans la relation précédente !) et nous la démontrons pour $n+1$ (donc nous devons retomber sur

En cours de traduction de l'anglais

la relation précédente mais avec $n+1$ au lieu de n) :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cdot g^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= f(t)g^{(n)}(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g^{(n)}(t)\mathrm{d}t\\ &= f(t)g^{(n)}(t)\Big|_a^b - \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k+1)}g^{(n-1-k)}\right]_a^b\\ &\quad +(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)\mathrm{d}t\\ &= f(t)g^{(n)}(t)\Big|_a^b - \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}g^{(n-k)}\right]_a^b\\ &\quad +(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)\mathrm{d}t\\ &= \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}g^{(n-k)}\right]_a^b +(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(t)g(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.3.370}$$

Remarque

L'astuce (proposée par un internaute) dans cette démonstration est de bien voir que $-(-1)^n$ donne un signe moins quand n est pair et un plus quand n est impair et de même $+(-1)^{n+1}$ donne un signe moins quand n est pair et un plus quand n est impair.

Pour $n=1$ nous retrouvons la formule bien connue et qui sera très très souvent utilisée dans tout le présent livre :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.371}$$

■ Q.E.D.

En cours de relecture / traduction de l' anglais

6.3.2.6 Primitives usuelles

Il existe en mathématique et en physique un grand nombre de primitives ou de fonctions définies sur des intégrales que nous retrouvons assez fréquemment (mais pas exclusivement). Par ailleurs, toutes les primitives démontrées ci-dessous seront utilisées dans les sections relatives à la Mécanique, l'Ingénierie, l'Atomistique, les Mathématiques Sociales, etc. Donc, comme dans n'importe quel formulaire, nous vous proposons les primitives connues mais avec les démonstrations !

Attention ! Parce que le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral prouvé plus haut (page 1490) dit que l'intégrale d'une fonction est la même que sa primitive, nous ne démontrerons pas ci-dessous les intégrales de certaines fonctions pour lesquelles la primitive se trouve déjà dans notre liste de dérivées usuelles à la page 1457. D'autant plus que le calcul direct de l'intégrale de certaines fonctions simples (comme l'intégrale de $1/x$) est inutilement laborieux (même s'il est parfois considéré comme drôle par certains lecteurs...).

Ainsi, comme nous venons de le mentionner, nous omettrons les primitives qui peuvent être immédiatement déduites des dérivées habituelles que nous avons prouvées précédemment. Cela signifie par exemple que nous supposons connues les primitives suivantes importantes (certainement les plus utilisées dans toutes les pages de ce livre) :

$$\begin{gathered}\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(x)+c^{te}\\ \int \sin(x)\mathrm{d}x=-\cos(x)+c^{te}\\ \int \cos(x)\mathrm{d}x=\sin(x)+c^{te}\\ \int e^x\mathrm{d}x=e^x+c^{te}\\ \ldots\end{gathered}\tag{6.3.372}$$

Sinon voici déjà une liste de quelques intégrales fréquentes (le lecteur en rencontrera de toute façon bien d'autres - développées dans les détails - lors de son parcours du présent livre) :

1. Primitive de $f(x)=\tan(x)$:

   Par définition nous avons donc :

   $$\int \tan(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x\tag{6.3.373}$$

   Nous utilisons le changement de variable $u=\cos(x)$, $\mathrm{d}u=-\sin(x)\mathrm{d}x$ et dès lors :

   $$\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=-\ln|u|=-\ln|\cos(x)|\tag{6.3.374}$$

   Donc :

   $$F(x)=-\ln|\cos(x)|\tag{6.3.375}$$

En cours de traduction de l'anglais

2. Primitive de $f(x) = \cot(x)$:

   Par définition nous avons donc :

$$\int \cot(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x \tag{6.3.376}$$

   Nous utilisons le changement de variable $u = \sin(x)$, $\mathrm{d}u = \cos(x)\mathrm{d}x$ et dès lors :

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| = \ln|\sin(x)| \tag{6.3.377}$$

   Donc :

$$F(x) = \ln|\sin(x)| \tag{6.3.378}$$

3. Primitive de $f(x) = \arcsin(x)$:

   Nous intégrons par parties :

$$\int 1\cdot\arcsin(x)\mathrm{d}x = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \tag{6.3.379}$$

   Si nous posons $u = 1-x^2$, ce qui nous donne $\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$, nous obtenons :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2} \tag{6.3.380}$$

   Donc :

$$F(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \tag{6.3.381}$$

4. Primitive de $f(x) = \arccos(x)$:

   Nous intégrons à nouveau par parties :

$$\int 1\cdot\arccos(x)\mathrm{d}x = x\arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \tag{6.3.382}$$

   Si nous posons $u = 1-x^2$, ce qui nous donne $\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$, nous obtenons :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2} \tag{6.3.383}$$

   Donc :

$$F(x) = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} \tag{6.3.384}$$

5. Primitive de $f(x) = \arctan(x)$:

   Nous intégrons encore une fois par parties :

$$\int 1\cdot\arctan(x)\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \tag{6.3.385}$$

   Si nous posons $u = 1+x^2$, ce qui nous donne $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, nous obtenons :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \tag{6.3.386}$$

   Donc :

$$F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \tag{6.3.387}$$

En cours de traduction de l'anglais

6. Primitive de $f(x) = \text{arccot}(x)$:

Encore une fois... nous intégrons par parties :

$$\int 1 \cdot \text{arccot}(x)\text{d}x = x\text{d}(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\text{d}x \quad (6.3.388)$$

Si nous posons $u = 1 + x^2$, ce qui nous donne $\text{d}u = 2x\text{d}x$, nous obtenons :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\text{d}x = \int \frac{1}{2u}\text{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad (6.3.389)$$

Donc :

$$F(x) = x\text{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad (6.3.390)$$

7. Primitive de $f(x) = xe^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}\{0\}$:

Une intégration par parties nous donne :

$$\int xe^{ax}\text{d}x = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\text{d}x = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} = e^{ax}\left(\frac{1}{a}x - \frac{1}{a^2}\right) \quad (6.3.391)$$

Donc :

$$F(x) = e^{ax}\left(\frac{1}{a}x - \frac{1}{a^2}\right) \quad (6.3.392)$$

La généralisation est de notre point de vue immédiate et on obtient la formule de réduction suivante :

$$\int x^n e^{ax}\text{d}x = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}a^{ax}\text{d}x \quad (6.3.393)$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Une autre intégrale très importante avec l'exponentielle en physique est celle que nous avions démontrée lors de notre étude de la loi de Gauss-Laplace en statistiques et probabilités (détermination de la moyenne).

8. Primitive de $f(x) = \ln(x)$:

Nous écrivons :

$$\int \ln(x)\text{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\text{d}x \quad (6.3.394)$$

En intégrant par parties nous trouvons :

$$\int 1 \cdot \ln(x)\text{d}x = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\text{d}x = x\ln(x) - x = x(\ln(x) - 1) \quad (6.3.395)$$

Finalement :

$$F(x) = x(\ln(x) - 1) \quad (6.3.396)$$

9. Primitive de $f(x)=x\ln(ax)$ avec $a\in\mathbb{R}\{0\}$:

   Une intégration par parties nous donne :

$$\int x\ln(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(ax)-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(ax)-\frac{1}{4}x^2 \quad (6.3.397)$$

   Donc :

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln(ax)-\frac{1}{4}x^2 \quad (6.3.398)$$

10. Primitive de $f(x)=a^x$ pour $a>0, a\neq 1$:

    Pour commencer nous écrivons :

$$f(x)=a^x\Leftrightarrow f'(x)=a^x\ln(a) \quad (6.3.399)$$

    Ainsi il vient :

$$\frac{f'(x)}{\ln(a)}=a^x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{\ln(a)}\mathrm{d}x=\int a^x\mathrm{d}x \quad (6.3.400)$$

    et :

$$\frac{1}{\ln(a)}\int f'(x)\mathrm{d}x=\frac{f(x)}{\ln(a)}\quad\text{et}\quad\int a^x\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x=F(x) \quad (6.3.401)$$

    Finalement :

$$F(x)=\frac{f(x)}{\ln(a)}=\frac{a^x}{\ln(a)} \quad (6.3.402)$$

11. Primitive de $f(x)=\log_a(x)$:

    Pour $a>0, a\neq 1$ sachant que (voir les propriétés des logarithmes dans la section d'Analyse Fonctionnelle) :

$$\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}=\frac{1}{\ln(a)}\ln(x) \quad (6.3.403)$$

    nous avons en utilisant la primitive de $\ln(x)$:

$$F(x)=\frac{x}{\ln(a)}\big(\ln(x)-1\big) \quad (6.3.404)$$

12. Primitive de $f(x)=\tanh(x)$:

    Nous avons :

$$\int\tanh(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\mathrm{d}x \quad (6.3.405)$$

    Nous utilisons le changement de variable $u=\cosh(x), \mathrm{d}u=\sinh(x)\mathrm{d}x$ et obtenons :

$$\int\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u|=\ln|\cosh(x)| \quad (6.3.406)$$

    Donc :

$$F(x)=\ln\big(|\cosh(x)|\big) \quad (6.3.407)$$

En cours de traduction de l'anglais

13. Primitive de $f(x) = \coth(x)$:

    Nous avons donc :

$$\int \coth(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\mathrm{d}x \qquad (6.3.408)$$

    Nous utilisons le changement de variable $u = \sinh(x)$, $\mathrm{d}u = \cosh(x)\mathrm{d}x$ et obtenons :

$$\int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| = \ln|\sinh(x)| \qquad (6.3.409)$$

    Donc :

$$F(x) = \ln\big(|\sinh(x)|\big) \qquad (6.3.410)$$

14. Primitive de $f(x) = \text{arcsinh}(x)$:

    Nous intégrons par parties :

$$\int 1 \cdot \text{arcsinh}(x)\mathrm{d}x = x\text{arcsinh}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \qquad (6.3.411)$$

    Si nous posons $u = 1 + x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ nous obtenons :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \sqrt{u} = \sqrt{1+x^2} \qquad (6.3.412)$$

    Donc :

$$F(x) = x\text{arcsinh}(x) - \sqrt{1+x^2} \qquad (6.3.413)$$

15. Primitive de $f(x) = \text{arccosh}(x)$:

    Nous intégrons par parties :

$$\int 1 \cdot \text{arccosh}(x)\mathrm{d}x = x \cdot \text{arccosh}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x \qquad (6.3.414)$$

    Si nous posons $u = x^2 - 1$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, nous obtenons :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \sqrt{u} = \sqrt{x^2-1} \qquad (6.3.415)$$

    Donc finalement :

$$F(x) = x\text{arccosh}(x) - \sqrt{x^2-1} \qquad (6.3.416)$$

16. Primitive de $f(x) = \text{arctanh}(x)$:

    Nous intégrons par parties :

$$\int 1 \cdot \text{arctanh}(x)\mathrm{d}x = x\text{arctanh}(x) - \int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x \qquad (6.3.417)$$

    Si nous posons $u = 1 - x^2$, $\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$, nous obtenons :

$$\int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{2u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| \qquad (6.3.418)$$

    Donc finalement :

$$F(x) = x\text{arctanh}(x) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| \qquad (6.3.419)$$

En cours de traduction de l'anglais

17. Primitive de $f(x)=\text{arccoth}(x)$:

Nous intégrons par parties :

$$\int 1\cdot\text{arccoth}(x)\mathrm{d}x=\text{arccoth}(x)-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x \tag{6.3.420}$$

Si nous posons $u=1-x^2$, $\mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x$, nous obtenons :

$$\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{2u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\ln|u|=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| \tag{6.3.421}$$

Donc finalement :

$$F(x)=x\cdot\text{arccoth}(x)+\frac{1}{2}\ln|1-x^2| \tag{6.3.422}$$

18. Primitive de $f(x)=\sin^n(x)$ avec $n\geq 2$:

Posons $I_n=\int\sin^n(x)\mathrm{d}x$. Une intégration par partie donne :

$$I_n=\int\sin x\cdot\sin^{n-1}x\mathrm{d}x=-\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n+1)\int\cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\mathrm{d}x \tag{6.3.423}$$

en remplaçant $\cos^2(x)$ par $1-\sin^2 x$ dans la dernière intégrale, nous obtenons :

$$I_n=-\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n-1)(I_{n-2}-I_n) \tag{6.3.424}$$

et donc :

$$F(x)=I_n=\frac{1}{n}\left(-\cos x\cdot\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}\right) \tag{6.3.425}$$

Toutes les primitives de même forme (relation de récurrence) sont nommées "formules de réduction".

19. Primitive de $f(x)=\cos^n(x)$ avec $n\geq 2$:

Dans ce cas nous avons la formule de récurrence :

$$\begin{aligned}F(x)=\int\cos^n x\mathrm{d}x&=\frac{1}{n}\left(\sin x\cdot\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{n}\left(\sin x\cdot\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}\right)\end{aligned} \tag{6.3.426}$$

cela se démontre exactement de la même manière que la relation récursive précédente (le lecteur peut demander les détails s'il le souhaite).

20. Primitive de $f(x)=\tan^2(x)$:

Sachant que $\tan'(x)=1+\tan^2(x)$, nous avons :

$$\int\tan^2(x)\mathrm{d}x=\int\left(\tan'(x)-1\right)\mathrm{d}x=\tan(x)-x \tag{6.3.427}$$

Donc :

$$F(x)=\tan(x)-x \tag{6.3.428}$$

En cours de traduction de l'anglais

21. Primitive de $f(x)=\cot^2(x)$:

Sachant que $\cot'(x)=-1-\cot^2(x)$, nous avons :

$$\int \cot^2(x)\mathrm{d}x=\int\left(-\cot'(x)-1\right)\mathrm{d}x=-\cot(x)-x \tag{6.3.429}$$

Donc :

$$F(x)=\int \cot^2(x)\mathrm{d}x=-\cot(x)-x \tag{6.3.430}$$

22. Primitive de $f(x)=\sin^{-2}(x)$:

En utilisant les relations trigonométriques remarquables (voir section Trigonométrie page 2502), , nous avons :

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x=\int\left(1+\cot^2(x)\right)\mathrm{d}x=-\cot(x) \tag{6.3.431}$$

selon la primitive $\cot^2(x)$. Donc :

$$F(x)=\int \frac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x=-\cot(x) \tag{6.3.432}$$

23. Primitive de $f(x)=\cos^{-2}(x)$:

En utilisant encore une fois les relations trigonométriques remarquables (voir section Trigonométrie page 2502), nous avons :

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x=\int\left(1+\tan^2(x)\right)\mathrm{d}x=\tan(x) \tag{6.3.433}$$

grâce à la primitive de $\tan^2(x)$. Donc :

$$F(x)=\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x=\tan(x) \tag{6.3.434}$$

24. Primitive de $f(x)=\sin^{-1}(x)$:

Nous faisons la substitution $x=2\arctan(t), t=\tan(x/2)$. Sachant que : (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\sin(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{6.3.435}$$

nous obtenons alors :

$$\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \tag{6.3.436}$$

Donc :

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|t|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \tag{6.3.437}$$

Finalement :

$$F(x)=\int \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \tag{6.3.438}$$

En cours de traduction de l' anglais

25. Primitive de $f(x)=\cos^{-1}(x)$:

Sachant que $\cos(x)=\sin(x+\pi/2)$ (voir section Trigonométrie page 2497), nous avons :

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}x \tag{6.3.439}$$

Nous faisons le changement de variable $x+\pi/2=u$, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x&=\int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin(u)}\mathrm{d}u\\&=\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right|=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\end{aligned} \tag{6.3.440}$$

grâce à la connaissance de la primitive de $\sin^{-1}(x)$. Finalement :

$$F(x)=\int \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \tag{6.3.441}$$

26. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos(x)}$:

Nous faisons la substitution $x=2\arctan(t), t=\tan(x/2)$, sachant que (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\cos(x)=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{6.3.442}$$

nous obtenons :

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \tag{6.3.443}$$

Dès lors :

$$\int \frac{1}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}t=t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.3.444}$$

Finalement :

$$F(x)=\int \frac{1}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.3.445}$$

27. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1-\cos(x)}$:

Nous faisons à nouveau la substitution $x=2\arctan(t), t=\tan(x/2)$. Dès lors nous trouvons :

$$\int \frac{1}{1-\cos(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{t}=-\cot\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.3.446}$$

Tel que finalement :

$$F(x)=\int \frac{1}{1-\cos(x)}\mathrm{d}x=-\cot\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.3.447}$$

En cours de traduction de l'anglais

28. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin(x)}$:

Sachant que :

$$\sin(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.3.448)$$

Nous avons alors :

$$\int\frac{1}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}x \quad (6.3.449)$$

En faisant le changement de variable :

$$u=x-\frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \quad (6.3.450)$$

nous obtenons :

$$\int\frac{1}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\cos(u)}\mathrm{d}u=\tan\left(\frac{u}{2}\right)=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (6.3.451)$$

Finalement :

$$F(x)=\int\frac{1}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (6.3.452)$$

29. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin(x)}$:

Par le même raisonnement que précédemment en utilisant le cosinus nous obtenons :

$$F(x)=\int\frac{1}{1-\sin(x)}\mathrm{d}x=-\cot\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (6.3.453)$$

30. Primitive de $f(x)=\sinh^n(x)$ avec $n\geq 2$:

Posons :

$$I_n=\int\sinh^n(x)\mathrm{d}x \quad (6.3.454)$$

Une intégration par partie donne (nous avons démontré lors des dérivées usuelles que la primitive du sinus hyperbolique était le cosinus hyperbolique) :

$$\begin{aligned}I_n=\int\sinh(x)\sinh^{n-1}(x)\mathrm{d}x&=\cosh(x)\sinh(x)^{n-1}(x)\\&-(n-1)\int\cosh^2(x)\sinh^{n-2}(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \quad (6.3.455)$$

en remplaçant $\cosh^2(x)$ avec $1+\sinh^2(X)$ ans la dernière intégrale, nous obtenons :

$$I_n=\cosh(x)\sinh(x)^{n-1}(x)-(n-1)(I_{n-2}+I_n) \quad (6.3.456)$$

et donc :

$$F(x)=I_n=\int\sinh^n(x)=\frac{1}{n}\left(\cosh(x)\sinh(x)^{n-1}(x)-(n-1)I_{n-2}\right) \quad (6.3.457)$$

Ainsi nous pouvons obtenir pour ce cas particulier :

$$F(x)=\int\sinh^2(x)=\frac{1}{2}\left(\cosh(x)\sinh(x)(x)-x\right) \quad (6.3.458)$$

En cours de traduction de l' anglais

31. Primitive de $f(x) = \cosh^n(x)$ avec $n \geq 2$:

Dans ce cas nous avons aussi la relation de récurrence :

$$I_n = \int \cosh(x)^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\big(\sinh(x)\cosh(x)^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2}\big) \tag{6.3.459}$$

qui se démontre de la même façon que ci-dessus. Ainsi :

$$\int \cosh^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cosh(x)\sinh(x) + x) \tag{6.3.460}$$

32. Primitive de $f(x) = \tanh^2(x)$:

Sachant que (démontré lors des dérivées usuelles) :

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) \tag{6.3.461}$$

nous avons :

$$\int \tanh^2(x)\mathrm{d}x = \int \big(1 - \tanh'(x)\big)\mathrm{d}x = x - \tanh(x) \tag{6.3.462}$$

Donc :

$$F(x) = \int \tanh^2(x)\mathrm{d}x = x - \tanh(x) \tag{6.3.463}$$

33. Primitive de $f(x) = \coth^2(x)$:

Sachant que (démontré lors des dérivées usuelles) :

$$\coth'(x) = 1 - \coth^2(x) \tag{6.3.464}$$

nous avons :

$$\int \coth^2(x)\mathrm{d}x = \int \big(1 - \coth'(x)\big)\mathrm{d}x = x - \coth(x) \tag{6.3.465}$$

Donc :

$$F(x) = \int \coth^2(x)\mathrm{d}x = x - \coth(x) \tag{6.3.466}$$

34. Primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sinh^2(x)}$:

Nous avons en utilisant la primitive de $f(x) = \coth^2(x)$:

$$\int \sinh^2(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\sinh^2(x)}\mathrm{d}x = \int (\coth^2(x) - 1)\mathrm{d}x = -\coth(x) \tag{6.3.467}$$

Donc :

$$F(x) = \int \sinh^2(x)\mathrm{d}x = \coth(x) \tag{6.3.468}$$

En cours de traduction de l' anglais

35. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$:

Nous avons en utilisant la primitive de $f(x)=\tanh^2(x)$:

$$\int \cosh^2(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x=\int (1-\tanh^2(x))\mathrm{d}x=\tanh(x) \quad (6.3.469)$$

Donc :

$$F(x)=\int \cosh^2(x)\mathrm{d}x=\tanh(x) \quad (6.3.470)$$

36. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sinh(x)}$:

Nous faisons la substitution :

$$t=e^x \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (6.3.471)$$

Nous obtenons en utilisant la dérivée de arctanh(x) :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sinh(x)}\mathrm{d}x&=\int \frac{2}{e^x-e^{-x}}\mathrm{d}x\\&=\int \frac{2}{t\left(t-\frac{1}{t}\right)}\mathrm{d}t\\&=\int \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t\\&=-2\text{arctanh}(t)\\&=-2\text{arctanh}(e^x)\end{aligned} \quad (6.3.472)$$

et finalement :

$$F(x)=\int \frac{1}{\sinh(x)}\mathrm{d}x=-2\text{arctanh}(e^x) \quad (6.3.473)$$

En cours de traduction de l' anglais

37. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\cosh(x)}$:

Nous faisons la substitution :

$$t=e^x \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (6.3.474)$$

Nous avons en utilisant la primitive de $\arctan(x)$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x&=\int \frac{2}{t\left(t+\frac{1}{t}\right)}\mathrm{d}t\\&=\int \frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\arctan(t)=2\arctan(e^x)\end{aligned} \quad (6.3.475)$$

et finalement :

$$F(x)=\int \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x=2\arctan(e^x) \quad (6.3.476)$$

38. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1+\cosh(x)}$:

Nous faisons la substitution :

$$t=e^x \text{ avec } \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{6.3.477}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\cosh(x)}\mathrm{d}x&=\int\frac{2}{2+e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{t\left(2+t+\dfrac{1}{t}\right)}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{2}{(t+1)^2}\mathrm{d}t=-\frac{2}{1+t}+c^{te}=-\frac{2}{1+e^x}+c^{te}\end{aligned} \tag{6.3.478}$$

Finalement nous obtenons :

$$F(x)=\int\frac{1}{1+\cosh(x)}\mathrm{d}x=-\frac{2}{1+e^x}+1=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\tanh\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.3.479}$$

39. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1-\cosh(x)}$:

Nous faisons la substitution :

$$t=e^x \text{ avec } \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{6.3.480}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1-\cosh(x)}\mathrm{d}x&=\int\frac{2}{2-e^x-e^{-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{t\left(2-t-\dfrac{1}{t}\right)}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{(t-1)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{t-1}+c^{te}=\frac{2}{e^x-1}+c^{te}\end{aligned} \tag{6.3.481}$$

Finalement :

$$F(x)=\int\frac{1}{1-\cosh(x)}\mathrm{d}x=\frac{2}{e^x-1}+1=\frac{e^x+1}{e^x-1}=\coth\left(\frac{x}{2}\right) \tag{6.3.482}$$

40. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1+\sinh(x)}$:

Nous faisons la substitution :

$$t=e^x \text{ avec } \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{6.3.483}$$

Nous obtenons :

$$\int\frac{1}{1+\sinh(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2+e^x-e^{-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2t+t^2-1}\mathrm{d}t \tag{6.3.484}$$

En cours de traduction de l' anglais

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{2}{2t+t^2-1}&=\frac{2}{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(t+1-\sqrt{2})}-\frac{1}{(t+1+\sqrt{2})}\right)\end{aligned} \tag{6.3.485}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int\frac{2}{2t+t^2-1}\mathrm{d}t&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int\frac{1}{(t+1-\sqrt{2})}\mathrm{d}t-\int\frac{1}{(t+1+\sqrt{2})}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|t+1-\sqrt{2}\right|-\ln\left|t+1+\sqrt{2}\right|\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\left|t+1-\sqrt{2}\right|}{\left|t+1+\sqrt{2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\left|e^x+1-\sqrt{2}\right|}{\left|e^x+1+\sqrt{2}\right|}\end{aligned} \tag{6.3.486}$$

Finalement :

$$F(x)=\int\frac{1}{1+\sinh(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\left|e^x+1-\sqrt{2}\right|}{\left|e^x+1+\sqrt{2}\right|} \tag{6.3.487}$$

41. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{1-\sinh(x)}$:

Nous faisons la substitution habituelle :

$$t=e^x \text{ avec } \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{6.3.488}$$

Nous obtenons :

$$\int\frac{1}{1-\sinh(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2-e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{2}{-2t+t^2-1}\mathrm{d}t \tag{6.3.489}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{2}{-2t+t^2-1}&=\frac{2}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(t-1-\sqrt{2})}-\frac{1}{(t-1+\sqrt{2})}\right)\end{aligned} \tag{6.3.490}$$

D'où :

$$\begin{aligned}-\int\frac{2}{-2t+t^2-1}\mathrm{d}t&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int\frac{1}{(t-1-\sqrt{2})}\mathrm{d}t+\int\frac{1}{(t-1+\sqrt{2})}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|t-1+\sqrt{2}\right|-\ln\left|t-1-\sqrt{2}\right|\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\left|t-1+\sqrt{2}\right|}{\left|t-1-\sqrt{2}\right|}\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\left|e^x-1+\sqrt{2}\right|}{\left|e^x-1-\sqrt{2}\right|}\end{aligned} \tag{6.3.491}$$

Finalement :

$$F(x)=\int\frac{1}{1-\sinh(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\left|e^x-1+\sqrt{2}\right|}{\left|e^x-1-\sqrt{2}\right|} \tag{6.3.492}$$

En cours de traduction de l'anglais

42. Primitive de $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$:

    Une première intégration par parties donne :

$$\int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x \quad (6.3.493)$$

    Une deuxième intégration par parties donne :

$$\int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x\right) \quad (6.3.494)$$

    d'où l'égalité :

$$\int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x \quad (6.3.495)$$

    Ainsi en redistribuant la relation précédente :

$$F(x) = \int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) \quad (6.3.496)$$

43. Primitive de $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$:

    Un raisonnement analogue à celui d'avant montre que :

$$F(x) = \int e^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big) \quad (6.3.497)$$

44. Primitive de $f(x) = x\sin(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$:

    Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} F(x) = \int x\sin(ax)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{a}x\cos(ax) + \frac{1}{a}\int \cos(ax)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{a}x\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\sin(ax) \end{aligned} \quad (6.3.498)$$

45. Primitive de $f(x) = x\cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$:

    Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} F(x) = \int x\cos(ax)\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}x\sin(ax) - \frac{1}{a}\int \sin(ax)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) \end{aligned} \quad (6.3.499)$$

46. Primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ avec $a \neq b$:

    Nous avons la relation suivante (en calcul intégral, nous appelons une telle décomposition "décomposition en fraction partielle") :

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x-b)}\right) \quad (6.3.500)$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{(x-a)}-\frac{1}{(x-b)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a-b}\left(\int\frac{1}{(x-a)}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(x-b)}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{a-b}\left(\ln|x-a|-\ln|x-b|\right)\\ &= \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|\end{aligned} \tag{6.3.501}$$

Finalement :

$$F(x)=\int\frac{1}{(x-a)(x-b)}\mathrm{d}x=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| \tag{6.3.502}$$

En cours de traduction de l' anglais

47. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{a^2-x^2}$ avec $a\neq 0$:

Nous avons en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(a+x)(a-x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{(x+a)(x-a)}\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\end{aligned} \tag{6.3.503}$$

Dès lors :

$$F(x)=\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| \tag{6.3.504}$$

48. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$ avec $a\neq 0$:

En faisant le changement de variable :

$$x=au \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}x=a\mathrm{d}u \tag{6.3.505}$$

Nous obtenons en utilisant la dérivée de $\arctan(x)$:

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{a}\arctan(u)=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned} \tag{6.3.506}$$

49. Soit :

$$I_{n+1}=\int\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \tag{6.3.507}$$

avec $n \in \mathbb{N}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int \frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-x^2}{(1-x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1-x^2)^{n+1}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{(1-x^2)^{n}}\mathrm{d}x + \int \frac{x^2}{(1-x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x = I_n + \int \frac{x^2}{(1-x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.3.508}$$

Or cette dernière intégrale se résout par parties :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1-x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{(1-x^2)^{n+1}}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n(1-x^2)^n}x - \int \frac{1}{2n(1-x^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n(1-x^2)^n}x - \frac{1}{2n}I_n \end{aligned} \tag{6.3.509}$$

Dès lors :

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{2n(1-x^2)^n}x - \frac{1}{2n}I_n = \frac{1}{2n(1-x^2)^n}x - \frac{(2n-1)}{2n}I_n \tag{6.3.510}$$

Or cette dernière intégrale se résout par parties :

$$\boxed{2nI_{n+1} = \frac{x}{(1-x^2)^n} + (2n-1)I_n} \tag{6.3.511}$$

Identiquement au développement suivant, nous avons pour (le signe change) :

$$I_{n+1} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \tag{6.3.512}$$

la relation suivante :

$$\boxed{2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n} \tag{6.3.513}$$

Vous pourrez trouver une application de ces deux primitives dans le modèle cosmologique newtonien de l'univers dans le chapitre d'Astrophysique ainsi que dans le chapitre de Relativité Générale dans le cadre de l'étude de l'effet Shapiro !

En cours de traduction de l'anglais

50. Primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$:

Nous avons en utilisant les primitives de $\dfrac{1}{(1-x^2)^n}$ (vue avant) et de $\dfrac{1}{1-x^2}$ (vue plus haut) :

$$F(x) = \int \frac{1}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) \tag{6.3.514}$$

51. Primitive de $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$:

Nous avons en utilisant les primitives de $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ (vue avant) et de $\dfrac{1}{1+x^2}$ (vue plus haut) :

$$F(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x)\right) \tag{6.3.515}$$

Vous pouvez trouver une application de cette primitive dans la section de Relativité Générale pour le temps de chute propre dans un Trou Noir non rotatif.

52. Primitive de $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ (cas relatif à la surface sous une hyperbole) :

Nous pouvons sans perte de généralité supposer $a>0$. Remarquons que le domaine de définition de f est $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$.

Nous allons déterminer une primitive de f uniquement sur l'intervalle $[a,+\infty[$ (car c'est celle dont nous aurons besoin dans certains chapitres).

Faisons le changement de variable :

$$x=a\cdot\cosh(t) \tag{6.3.516}$$

avec donc :

$$t=\text{arccosh}\left(\frac{1}{a}x\right),\quad \mathrm{d}x=a\sinh(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.517}$$

où nous considérons la fonction $\cosh:\mathbb{R}^+\to[1,+\infty[$ avec pour réciproque la fonction $\text{arccosh}:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ donnée par (voir section Trigonométrie page 2517) :

$$\text{arccosh}(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) \tag{6.3.518}$$

Nous obtenons alors en utilisant la primitive de $\sinh^2(x)$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x&=a^2\int\sinh^2\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(\cosh t\sinh t-t)\\&=\frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}x\sinh\left(\text{arccosh}\left(\frac{1}{a}x\right)\right)-\text{arccosh}\left(\frac{1}{a}x\right)\right)\end{aligned} \tag{6.3.519}$$

mais (voir section Trigonométrie page 2515) comme :

$$\sinh^2(u)=\cosh^2(u)-1 \tag{6.3.520}$$

Donc :

$$\sinh\left(\text{arccosh}\left(\frac{1}{a}x\right)\right)=\sqrt{\cosh^2\left(\text{arccosh}\left(\frac{1}{a}x\right)\right)-1}=\sqrt{\frac{1}{a^2}x^2-1} \tag{6.3.521}$$

et en utilisant un autre résultat de la section de Trigonométrie :

$$\text{arccosh}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \tag{6.3.522}$$

nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x&=\frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}-\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\right)\\&=\frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a^2}\sqrt{x^2-a^2}-\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)\\&=\frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a^2}\sqrt{x^2-a^2}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+\ln(a)\right)\end{aligned} \tag{6.3.523}$$

étant donné que les primitives sont données à une constante près, nous pouvons écrire :

$$F(x)=\int\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \tag{6.3.524}$$

pour $x\geq a$. F est donc une primitive de $\sqrt{x^2-a^2}$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

En cours de traduction de l' anglais

53. Primitive de $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$:

Nous pouvons sans perte de généralité supposer $a>0$. Remarquons que le domaine de définition de f est $[-a,a]$.

Nous faisons les substitutions :

$$x=a\sin(t) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}x=a\cos(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.525}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=a^2\int\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}(t+\sin(t)\cos(t))=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right]\end{aligned} \tag{6.3.526}$$

où nous avons utilisé la primitive de $\cos^n(x)$ avec $n=2$ démontrée plus haut. Maintenant nous avons :

$$\cos(\arcsin(y))=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}=\sqrt{1-y^2} \tag{6.3.527}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\end{aligned} \tag{6.3.528}$$

et :

$$F(x)=\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} \tag{6.3.529}$$

54. Primitive de $f(x)=\sqrt{x^2+a^2}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$:

Nous pouvons sans perte de généralité supposer $a>0$.

Faisons le changement de variable :

$$x=a\sinh(t) \tag{6.3.530}$$

avec :

$$t=\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{a}x\right), \qquad \mathrm{d}x=a\cosh(t)\mathrm{d}t \tag{6.3.531}$$

Nous obtenons :

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=a^2\int\cosh^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(t+\sinh(t)\cosh(t)) \tag{6.3.532}$$

Ainsi :

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}(t+\sinh(t)\cosh(t))=\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) \tag{6.3.533}$$

En cours de traduction de l'anglais

Mais comme nous avons vu dans la section de Trigonométrie page 2515 :

$$\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right)=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln(a) \quad (6.3.534)$$

et :

$$\cosh\left(\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)=\sqrt{1+\sinh^2\left(\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2} \quad (6.3.535)$$

Donc nous avons finalement :

$$F(x)=\int\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} \quad (6.3.536)$$

où le $ln(a)$ a encore une fois été omis car les primitives sont données à une constante près.

55. Primitive de $f(x)=\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{-1}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$:

Nous pouvons sans perte de généralité supposer $a>0$.

Nous faisons la substitution :

$$x=a\sin(t) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}x=a\cos(t)\mathrm{d}t \quad (6.3.537)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}a\cos(t)\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}a\cos(t)\mathrm{d}t=\int\frac{1}{a\cos(t)}a\cos(t)\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t=t\\&=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned} \quad (6.3.538)$$

56. Primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$:

Nous pouvons sans perte de généralité supposery $a>0$.

Faisons le changement de variable :

$$x=a\sinh(t) \qquad \text{avec} \qquad t=\text{arcsinh}\left(\frac{1}{a}x\right), \quad \mathrm{d}x=a\cosh(t)\mathrm{d}t \quad (6.3.539)$$

Nous obtenons de la même manière que pour les intégrales usuelles précédentes :

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x=t=\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (6.3.540)$$

et sachant que (voir section Trigonométrie page 2517) :

$$\text{arcsinh}(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \quad (6.3.541)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous obtenons alors au final la primitive importante suivante :

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) \tag{6.3.542}$$

En procédant de même, mais en utilisant le cosinus hyperbolique au lieu du sinus hyperbolique, nous avons bien évidemment :

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) \tag{6.3.543}$$

Nous réutiliserons ces deux dernières relations dans des cas pratiques importants des sections de Mécanique Analytique, Génie Civil (où la constante a valant 1, $\ln(a)$ est de toute façon nul !) et de Relativité Générale (où a sera non nul et donc il ne sera pas possible d'omettre la constante $\ln(a)$).

57. Primitive de $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$:

Donc le problème est :

$$\int\sqrt{\frac{1}{x}-1\mathrm{d}x} \tag{6.3.544}$$

Substituons :

$$u=\sqrt{\frac{1}{x}-1}\longrightarrow \mathrm{d}u=-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1x^2}}\mathrm{d}x=-2\int\frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}u \tag{6.3.545}$$

Maintenent résolvons :

$$\int\frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u \tag{6.3.546}$$

Écrivons u^2 comme u^2+1-1 et séparons :

$$\int\frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{u^2+1}{\left(u^2+1\right)^2}-\frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\right)\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{u^2+1}-\frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\right)\mathrm{d}u \tag{6.3.547}$$

Nous appliquons la linéarité :

$$\int\frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u-\int\frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u \tag{6.3.548}$$

Nous savons de ce que nous avons vu plus que haut que le premier terme est :

$$\int\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u=\arctan(u) \tag{6.3.549}$$

Maintenant résolvons :

$$\int\frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u \tag{6.3.550}$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons également prouvé cette intégrale plus haut. Alors :

$$\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u == \frac{\arctan(u)}{2}+\frac{u}{2\left(u^2+1\right)} \tag{6.3.551}$$

Nous injectons cela dans l'intégrale initiale :

$$\int \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u-\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{\arctan(u)}{2}-\frac{u}{2\left(u^2+1\right)} \tag{6.3.552}$$

Soit :

$$-2\int \frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{u}{u^2+1}-\arctan(u) \tag{6.3.553}$$

Nous annulons la substitution :

$$u=\sqrt{\frac{1}{x}-1} \tag{6.3.554}$$

Ce qui donne :

$$\sqrt{\frac{1}{x}-1}x-\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) \tag{6.3.555}$$

Le problème est donc résolu :

$$\int \sqrt{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{1}{x}-1}x-\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)+c^{te} \tag{6.3.556}$$

58. En mathématiques, il existe plusieurs intégrales connues sous le nom de "intégrales de Dirichlet". L'une d'entre elles est l'intégrale impropre de la fonction sinc sur la droite réelle positive :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega}\mathrm{d}\omega=\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{6.3.557}$$

De par le théorème de Fubini (voir 1500) :

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin(x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \tag{6.3.558}$$

Puis en utilisant la primitive de e^{ax} :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin(x)\mathrm{d}y=-e^{-xy}\frac{\sin(x)}{x}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\sin(x)}{x} \tag{6.3.559}$$

et en utilisant la primitive de $e^{ax}\sin(bx)$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin(x)\mathrm{d}x=\frac{-e^{-xy}(y\sin(x)+\cos(x))}{y^2+1}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{y^2+1} \tag{6.3.560}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y \tag{6.3.561}$$

En utilisant la primitive de $\frac{1}{x^2+a^2}$ vu plus tôt :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \arctan(y)\Big|_0^{+\infty} \tag{6.3.562}$$

Comme :

$$\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \tag{6.3.563}$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \arctan(y)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \tag{6.3.564}$$

59. Considérons une intégrale de la forme suivante que nous pouvons utiliser pour améliorer la formule de Stirling (voir section Méthodes Numériques page ??) et aussi dont nous avons absolument besoin pour l'étude de la diffraction de Fresnel circulaire (voir section Optique Ondulatoire page ??) :

$$I = \int_a^b e^{-\lambda g(y)} h(y)\mathrm{d}y \tag{6.3.565}$$

où :

- λ est grand ;
- $g(y)$ est une fonction lisse qui a un minimum local à y^* à l'intérieur de l'intervalle $[a,b]$;
- $h(y)$ est lisse.

L'intégrale peut être la fonction génératrice caractéristique de la distribution de $g(Y)$ lorsque Y a une densité h (voir section Statistiques page 906), cela pourrait être une espérance postérieure de $h(Y)$, ou juste une intégrale "simple".

Lorsque λ est grand, la contribution à cette intégrale est essentiellement entièrement par construction provenant d'un voisinage autour de y^*.

Nous formalisons cela par le développement de Taylor de la fonction g autour de y^* :

$$g(y) = g(y^*) + g'(y^*)(y-y^*) + \frac{1}{2}g''(y^*)(y-y^*)^2 + \ldots \tag{6.3.566}$$

Puisque y^* est un minimum local, nous avons :

$$g'(y^*) = 0 \qquad g''(y^*) > 0 \tag{6.3.567}$$

En cours de traduction de l'anglais

et donc :

$$g(y)=g(y^*)+\frac{1}{2}g''(y^*)(y-y^*)^2+\ldots \tag{6.3.568}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b e^{-\lambda g(y)}h(y)\mathrm{d}y \\ &\cong \int_a^b e^{-\lambda\left(g(y^*)+\frac{1}{2}g''(y^*)(y-y^*)^2\right)}h(y)\mathrm{d}y \\ &= e^{-\lambda g(y^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda g''(y^*)(y-y^*)^2/2}h(y)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6.3.569}$$

Le fait que ci-dessus les limites aient changé de $[a,b]$ à $]-\infty,+\infty[$ est du au fait que nous supposons que la zone d'intérêt est au voisinage de y^* et cela parce que λ est tellement grand que quand on s'éloigne rapidement un peu de y^*, on peut considérer la courbe comme négligeable !

Si on approxime $h(y)$ linéairement autour de y^*, soit :

$$h'(y^*)=\frac{h(y)-h(y^*)}{y-y^*} \tag{6.3.570}$$

tel que :

$$h(y)=h'(y^*)(y-y^*)+h(y^*) \tag{6.3.571}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} I &\cong e^{-\lambda g(y^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda g''(y^*)(y-y^*)^2/2}h(y)\mathrm{d}y \\ &= e^{-\lambda g(y^*)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda g''(y^*)(y-y^*)^2/2}\left(h'(y^*)(y-y^*)+h(y^*)\right)\mathrm{d}y \\ &= e^{-\lambda g(y^*)}h(y^*)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda g''(y^*)(y-y^*)^2/2}\mathrm{d}y+e^{-\lambda g(y^*)}h'(y^*)\int_{-\infty}^{+\infty}(y-y^*)e^{-\lambda g''(y^*)(y-y^*)^2/2}\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6.3.572}$$

Le lecteur ne doit pas oublier qu'ici $\lambda g''(y^*)$ est une constante et que si on pose :

$$\lambda g''(y^*)=\frac{1}{\sigma^2} \tag{6.3.573}$$

Dès lors, pour la première intégrale ci-dessus, nous voyons que nous nous rabattons sur l'intégrale de quelque chose de très similaire à la distribution de Gauss (avec une moyenne

En cours de traduction de l'anglais

y^* et un écart type $\lambda g''(y^*)$) et ensuite il vient presque immédiatement (voir section Statistiques page 683) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda g''(y^*)(y-y^*)^2/2} \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(y^*)}} \tag{6.3.574}$$

Pour la deuxième intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y-y^*) e^{-\lambda g''(y^*)(y-y^*)^2/2} \mathrm{d}y \tag{6.3.575}$$

le changement de variable $y - y^* = x$ nous donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda g''(y^*)x^2/2} \mathrm{d}x \tag{6.3.576}$$

Il est immédiat que primitive est de la forme :

$$c^{te} e^{-\lambda g''(y^*)x^2/2} \tag{6.3.577}$$

Donc par symétrie la seconde intégrale est nulle ! On a enfin :

$$I \cong e^{-\lambda g(y^*)} h'(y^*) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(y^*)}} \tag{6.3.578}$$

Ce calcul est nommé "méthode d'intégration de Laplace" ou simplement "intégration de Laplace".

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Les personnes intéressées par une lecture plus approfondie sur des intégrales communes et belles peuvent jeter un oeil au très bon livre de P.J. Nahin : *Inside Interesting Integrals* [328].

Pour résumer voici un tableau avec les primitives les plus courantes (certaines primitives seront démontrées plus loin) : :

Function $f(x)$	**Primitive** $F(x)$
0	c^{te}
c^{te}	$c^{te}x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + c^{te}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c^{te}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c^{te}$
e^x	$e^x + c^{te}$
$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\| + c^{te}$

Function $f(x)$	**Primitive** $F(x)$
$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert + c^{te}$
$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c^{te}$
$\arctan(x)$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c^{te}$
$\text{arccot}(x)$	$x\,\text{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c^{te}$
xe^{ax}	$e^{ax}\left(\frac{1}{a}x-\frac{1}{a^2}\right)+c^{te}$
$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1))+c^{te}$
$x\ln(ax)$	$\frac{1}{2}x^2\ln(ax)-\frac{1}{4}x^2+c^{te}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}+c^{te}$
$\log_a(x)$	$\dfrac{x}{\ln(a)}(\ln(x)-1)+c^{te}$
$\tanh(x)$	$\ln(\lvert\cosh(x)\rvert)+c^{te}$
$\coth(x)$	$\ln(\lvert\sinh(x)\rvert)+c^{te}$
$\text{arcsinh}(x)$	$x\,\text{arcsinh}(x)-\sqrt{1+x^2}+c^{te}$
$\text{arccosh}(x)$	$x\,\text{arccosh}(x)-\sqrt{x^2-1}+c^{te}$
$\text{arctanh}(x)$	$x\,\text{arctanh}(x)+\frac{1}{2}\ln\lvert 1-x^2\rvert+c^{te}$
$\text{arccoth}(x)$	$x\cdot\text{arccoth}(x)+\frac{1}{2}\ln\left(\lvert 1-x^2\rvert\right)+c^{te}$
$\sin^n(x)$	$\dfrac{1}{n}\left(-\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)+(n-1)I_{n-2}\right)+c^{te}$
$\cos^n(x)$	$\dfrac{1}{n}\left(\sin(x)\cdot\cos^{n-1}(x)+(n-1)I_{n-2}\right)+c^{te}$
$\tan^2(x)$	$\tan(x)-x+c^{te}$
$\cot^2(x)$	$-\cot(x)-x+c^{te}$
$\sin^{-2}(x)$	$-\cot(x)+c^{te}$
$\cos^{-2}(x)$	$\tan(x)+c^{te}$
$\sin^{-1}(x)$	$\ln\left(\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert\right)+c^{te}$
$\cos^{-1}(x)$	$\ln\left(\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{1+\cos(x)}$	$\ln\left(\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{1-\cos(x)}$	$-\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{1+\sin(x)}$	$\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{1-\sin(x)}$	$-\cot\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+c^{te}$
$\sinh^n(x)$	$\cosh(x)\sinh(x)^{n-1}(x)-(n-1)\left(I_{n-2}+I_n\right)+c^{te}$
$\cosh^n(x)$	$\dfrac{1}{n}\left(\sinh(x)\cosh(x)^{n-1}(x)+(n-1)I_{n-2}\right)+c^{te}$
$\tanh^2(x)$	$x-\tanh(x)+c^{te}$
$\coth^2(x)$	$x-\coth(x)+c^{te}$
$\sinh^{-2}(x)$	$\coth(x)+c^{te}$
$\cosh^{-2}(x)$	$\tanh(x)+c^{te}$
$\sinh^{-1}(x)$	$-2\,\text{arctanh}\left(e^2\right)+c^{te}$
$\cosh^{-1}(x)$	$2\arctan\left(e^x\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{1+\cosh(x)}$	$\tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)+c^{te}$

En cours de traduction de l'anglais

Function $f(x)$	**Primitive** $F(x)$
$\dfrac{1}{1-\cosh(x)}$	$\coth\left(\dfrac{x}{2}\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{1+\sinh(x)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\lvert e^x+1-\sqrt{2}\rvert}{\lvert e^x+1+\sqrt{2}\rvert}\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{1-\sinh(x)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\lvert e^x-1+\sqrt{2}\rvert}{\lvert e^x-1-\sqrt{2}\rvert}\right)+c^{te}$
$e^{ax}\sin(bx)$	$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))+c^{te}$
$e^{ax}\cos(bx)$	$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))+c^{te}$
$x\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}x\cos(ax)+\dfrac{1}{a^2}\sin(ax)+c^{te}$
$x\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}x\sin(ax)+\dfrac{1}{a^2}\cos(ax)+c^{te}$
$\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\ln\left(\left\lvert\dfrac{x-a}{x-b}\right\rvert\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\dfrac{x+1}{x-1}\right\rvert\right)\right]+c^{te}$
$\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2}+\arctan(x)\right)+c^{te}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c^{te}$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{a^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c^{te}$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+c^{te}$
$\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{-1}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)+c^{te}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c^{te}$
$\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$	$\sqrt{\frac{1}{x}-1}x-\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)+c^{te}$
$\delta(x-a)$	$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\mathrm{d}x=1$
$\delta(x)$	$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x=H(x)$ (Heaviside)

TAB. 6.11 – **Primitives les plus communes**

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.7 Règle d'intégration de Leibniz

En algèbre, la "règle de l'intégrale de Leibniz", du nom de Gottfried Leibniz, indique que pour une intégrale de la forme :

$$I = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \qquad (6.3.579)$$

où $-\infty < a(x), b(x) < +\infty$, la dérivée de cette intégrale s'exprime par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t\right) = f\left(x,b(x)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b(x) - f\left(x,a(x)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a(x) + \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\mathrm{d}t \qquad (6.3.580)$$

Cette relation peut être utile pour évaluer certaines intégrales définies. Lorsqu'elle est utilisée dans ce contexte, la règle de Leibniz pour différencier sous le signe intégral est également connue sous le nom de "astuce de Feynman".

Notons que si $a(x)$ et $b(x)$ sont des constantes plutôt que des fonctions de x, nous avons un cas particulier de la règle de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{a}^{b} f(x,t)\mathrm{d}t\right) = \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\mathrm{d}t \qquad (6.3.581)$$

Par ailleurs, si $a(x) = a$ et $b(x) = x$, ce qui est aussi une situation courante (par exemple, dans la preuve de la formule d'intégration répétée de Cauchy), nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(x,t)\mathrm{d}t\right) = f\left(x,x\right) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\mathrm{d}t \qquad (6.3.582)$$

Démonstration 6.14.8. Dans un premier temps, autorisons-nous à écrire :

$$I(\alpha) = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\mathrm{dx} \qquad (6.3.583)$$

Nous partons de la définition même de la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha} \qquad (6.3.584)$$

Maintenant, puisque les limites d'intégration dépendent (en général) de α, alors un $\Delta\alpha$ provo-

En cours de traduction de l'anglais

quera un Δa et un Δb et nous devons donc écrire :

$$\begin{aligned}I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha) &= \int\limits_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\mathrm{d}x - \int\limits_{a}^{b} f(x,\alpha)\mathrm{d}x \\ &= \left(\int\limits_{a+\Delta a}^{a} + \int\limits_{a}^{b} + \int\limits_{b}^{b+\Delta b}\right) f(x,\alpha+\Delta\alpha)\mathrm{d}x - \int\limits_{a}^{b} f(x,\alpha)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{a}^{b} \{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\}\mathrm{d}x + \int\limits_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\mathrm{d}x \\ &\quad - \int\limits_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.3.585}$$

Comme $\Delta\alpha \to 0$ nous avons $\Delta a \to 0$ et $\Delta b \to 0$, aussi, et ainsi :

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta\alpha\to 0}\{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)\} \\ &\quad = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\int\limits_{a}^{b}\{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\}\mathrm{d}x + f(b,\alpha)\Delta b - f(a,\alpha)\Delta a\end{aligned} \tag{6.3.586}$$

où les deux derniers termes découlent du fait que comme $\Delta a \to 0$ et $\Delta b \to 0$ la valeur de x sur tout l'intervalle d'intégration reste pratiquement inchangée à $x = a$ ou à $x = b$ respectivement. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\int_a^b\{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\}\mathrm{d}x \\ &+ \lim_{\Delta\alpha\to 0} f(b,\alpha)\frac{\Delta b}{\Delta\alpha} - \lim_{\Delta\alpha\to 0} f(a,\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha}\end{aligned} \tag{6.3.587}$$

ou, en prenant le $1/\Delta\alpha$ à l'intérieur de l'intégrale (l'intégrale de Riemann elle-même est définie comme une limite, donc ce que nous faisons est d'inverser l'ordre de deux opérations limites, ce qu'un pur mathématicien voudrait justifier mais, comme d'habitude dans ce livre, nous ne nous en soucierons pas !) :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int\limits_{a}^{b}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx + f(b,\alpha)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\alpha} - f(a,\alpha)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\alpha} \tag{6.3.588}$$

■ Q.E.D.

La différenciation sous le signe intégral est mentionnée dans les mémoires à succès du regretté physicien Richard Feynman *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* dans le chapitre *A Different Box of Tools*. Il décrit l'avoir appris, alors qu'il était au lycée, à partir d'un ancien texte, *Advanced Calculus* (1926), de Frederick S. Woods (qui était professeur de mathématiques au Massachusetts Institute of Technology). La technique n'était pas souvent enseignée lorsque Feynman a reçu plus tard son éducation formelle en Algèbre, mais en utilisant cette technique, Feynman

En cours de traduction de l'anglais

a pu résoudre des problèmes d'intégration autrement difficiles à son arrivée à l'école supérieure de l'Université de Princeton :

«Une chose que je n'ai jamais apprise était l'intégration des contours. J'avais appris à faire des intégrales par diverses méthodes décrites dans un livre que mon professeur de physique au lycée, M. Bader, m'avait donné. Un jour, il m'a dit de rester après les cours. "Feynman, dit-il, tu parles trop et tu fais trop de bruit. Je sais pourquoi. Tu t'ennuies. Alors je vais te donner un livre. Tu montes là-bas au fond, dans le coin, et étudies ce livre, et quand vous saurez tout ce qu'il y a dans ce livre, vous pourrez reparler." Donc à chaque cours de physique, je ne prêtais aucune attention à ce qui se passait avec la loi de Pascal, ou quoi qu'ils fassent. J'étais à l'arrière avec ce livre : "Advanced Calculus", de Woods. Bader savait que j'avais un peu étudié "Calculus for the Practital Man", alors il m'a donné les vrais exercices. C'était pour un cours junior ou senior au collège. Il y avait des séries de Fourier, des fonctions de Bessel, des déterminants, des fonctions elliptiques, toutes sortes de trucs merveilleux dont je ne connaissais rien. Ce livre montrait aussi comment différencier des paramètres sous le signe intégral, c'est une certaine opération. Il s'avère que cela n'est pas très enseigné dans les universités ; ils ne le soulignent pas. Mais j'ai compris comment utiliser cette méthode, et j'ai utilisé ce foutu outil encore et encore. Donc, parce que j'étais autodidacte en utilisant ce livre, j'avais des méthodes particulières pour faire des intégrales. Le résultat était que lorsque les gars du MIT ou de Princeton avaient du mal à faire une certaine intégrale, c'était parce qu'ils ne pouvaient pas le faire avec les méthodes standard qu'ils avaient apprises à l'école. Si c'était l'intégration des contours, ils l'auraient trouvée ; s'il s'agissait d'une simple extension en série, ils l'auraient trouvée. Ensuite, je viens et j'essaie de différencier sous le signe intégral, et souvent cela a fonctionné. J'avais donc une excellente réputation pour faire des intégrales, uniquement parce que ma boîte à outils était différente de celle des autres, et ils avaient essayé tous leurs outils dessus avant de me donner le problème.»

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Calculons l'intégrale suivante avec des limites variables :

$$I(\alpha)=\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos(\alpha)\cos(x))}{\cos(x)}\mathrm{d}x \qquad 0<\alpha<\pi \tag{6.3.589}$$

Comme $a(x)$ et $b(x)$ sont des constantes plutôt que des fonctions de x, nous utiliserons le cas particulier de la règle intégrale de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int\limits_{a}^{b} f(x,t)\mathrm{d}t\right)=\int\limits_{a}^{b}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\mathrm{d}t \tag{6.3.590}$$

Donc en différenciant sous l'intégrale par rapport à α, nous avons (à la fin nous utilisons l'une des primitives démontrée plus haut ainsi qu'une relation trigonométriques usuelle) :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha)&=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\ln(1+\cos(\alpha)\cos(x))}{\cos(x)}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)\cos(x)}\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\alpha)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\cos(\alpha)\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2\sin(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2\left(2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\
&=-2\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\\
&=-2\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=-2\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\\
&=-2\arctan\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=-\alpha
\end{aligned} \tag{6.3.591}$$

Dès lors :

$$I(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}+c^{te} \tag{6.3.592}$$

Mais $I(\pi/2)=0$ par définition, donc nous devons avoir $c^{te}=\pi^2/8$ et enfin :

$$I(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\pi^2}{8} \tag{6.3.593}$$

6.3.2.8 Représentation intégrale de la fonction de Bessel du premier type

Une manière particulièrement utile et puissante de traiter les fonctions de Bessel utilise leur représentation intégrale comme nous le verrons dans la section d'Optique Ondulatoire à la page **??**.

Rappelez-vous que dans la section Suites et Séries nous avons prouvé que la fonction génératrice de la fonction de Bessel était (voir page 1771) :

$$\begin{aligned} e^{(x/2)(t-1/t)}G(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=\max(0,-n)}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{s=\max(0,-n)}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\right] t^n \end{aligned} \tag{6.3.594}$$

C'est-à-dire :

$$G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n \tag{6.3.595}$$

Maintenant, souvenons-nous que (voir section Nombres page 249) :

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \tag{6.3.596}$$

Donc, si nous revenons à la fonction génératrice et substituons $t = e^{\mathrm{i}\theta}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} e^{(x/2)(t-1/t)} = e^{(x/2)(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta})} = e^{(x/2)2\mathrm{i}\sin(x)} = e^{\mathrm{i}x\sin(x)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)e^{n\mathrm{i}\theta} \\ = J_0(x) + 2\left[J_2(x)\cos(2\theta) + J_4(x)\cos(4\theta) + \ldots\right] + 2\mathrm{i}\left[J_1(x)\sin(\theta) + J_3(x)\sin(3\theta) + \ldots\right] \end{aligned} \tag{6.3.597}$$

Pour condenser le résultat, nous avons d'abord utilisé la propriété prouvée lors de notre étude de la fonction génératrice des fonctions de Bessel :

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \tag{6.3.598}$$

et aussi :

$$J_1(x)e^{\mathrm{i}\theta} + J_{-1}(x)e^{-\mathrm{i}\theta} J_1(x)\left(e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}\right) = 2\mathrm{i}J_1(x)\sin(\theta) J_2(x)e^{2\mathrm{i}\theta} + J_{-2}(x)e^{-2\mathrm{i}\theta} = 2J_2(x)\cos(2\theta) \tag{6.3.599}$$

et ainsi de suite... Rappelons-nous maintenant que :

$$e^{\mathrm{i}x\sin(x)} = \cos(x\sin(\theta)) + \mathrm{i}\sin(x\sin(\theta)) \tag{6.3.600}$$

Par conséquent, en identifiant la partie réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \cos(x\sin(\theta)) = J_0(x) + 2\left[J_2(x)\cos(2\theta) + J_4(x)\cos(4\theta) + \ldots\right] = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta) \\ \sin(x\sin(\theta)) = 2\left[J_1(x)\sin(\theta) + J_3(x)\sin(3\theta) + \ldots\right] = 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n-1}\sin((2n-1)\theta) \end{aligned} \tag{6.3.601}$$

En cours de traduction de l'anglais

Rappelons également que nous avons prouvé lors de notre étude des séries de Fourier dans la section des suites et séries que :

$$\text{(I)}\begin{cases}\displaystyle\int_0^T \cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_0^T \cos(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_0^T \sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x=0\end{cases}\qquad \text{(II)}\begin{cases}\displaystyle\int_0^T \cos^2(kx)\mathrm{d}x=\frac{T}{2}\\ \displaystyle\int_0^T \cos(kx)\sin(kx)\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_0^T \sin^2(kx)\mathrm{d}x=\frac{T}{2}\end{cases}\tag{6.3.602}$$

avec $n,k\in\mathbb{N}$ et $n\neq k$ avec $n,k\in\mathbb{N}$ et $n=k$

C'est-à-dire :

$$\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\delta_{nm}\qquad \int_0^\pi \sin(n\theta)\sin(m\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\delta_{nm}\tag{6.3.603}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker (voir section Calcul Tensoriel page 2015).

Écrivons maintenant :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\left(J_0(x)+2\sum_{n=1}^{+\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta)\right)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta&=\int_0^\pi\cos(x\sin(\theta))\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta\\ \int_0^\pi\left(2\sum_{n=1}^{+\infty}J_{2n-1}\sin((2n-1)\theta)\right)\sin(n\theta)\mathrm{d}\theta&=\int_0^\pi\sin(x\sin(\theta))\sin(n\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}\tag{6.3.604}$$

Concentrons-nous sur la première intégrale :

$$\int_0^\pi J_0(x)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta+2\left(\int_0^\pi J_2(x)\cos(2\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi J_4(x)\cos(4\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta+\ldots\right)\tag{6.3.605}$$

Nous voyons donc ci-dessus que quelle que soit la valeur pour tout n, sauf pour $n=0$:

$$\int_0^\pi J_0(x)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=J_0(x)\int_0^\pi\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=0\tag{6.3.606}$$

Il ne reste donc que pour $n>0$:

$$2\left(\int_0^\pi J_2(x)\cos(2\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi J_4(x)\cos(4\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi J_6(x)\cos(6\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta+\ldots\right)\tag{6.3.607}$$

et nous voyons plus haut que si $n>0$ est impair toutes les intégrales s'annulent mais si $n>0$ est pair, seul le $J_n(x)$ correspondant reste !

En cours de traduction de l' anglais

Exactement la même analyse peut être faite pour :

$$\int\limits_0^\pi \left(2\sum_{n=1}^{+\infty} J_{2n-1}\sin((2n-1)\theta)\right)\sin(n\theta)\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^\pi \sin(x\sin(\theta))\sin(n\theta)\mathrm{d}\theta \tag{6.3.608}$$

On a donc pour chacune des intégrales ci-dessus, pour chacung des termes de gauche que (rappelons que $n = 0, 2, 4, \ldots$ est pair et $n = 1, 3, 5, \ldots$ est impair) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(x\sin(\theta))\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta &= \begin{cases} J_n(x) & n \text{ est pair} \\ 0 & n \text{ est impair} \end{cases} \\
\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(x\sin(\theta))\sin(n\theta)\mathrm{d}\theta &= \begin{cases} 0 & n \text{ est pair} \\ J_n(x) & n \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.3.609}$$

Si ces deux équations sont additionnées nous avons en utilisant les identités trigonométriques (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\cos(x\sin(\theta))\cos(n\theta) + \sin(x\sin(\theta))\sin(n\theta))\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\cos(n\theta - x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta
\end{aligned} \tag{6.3.610}$$

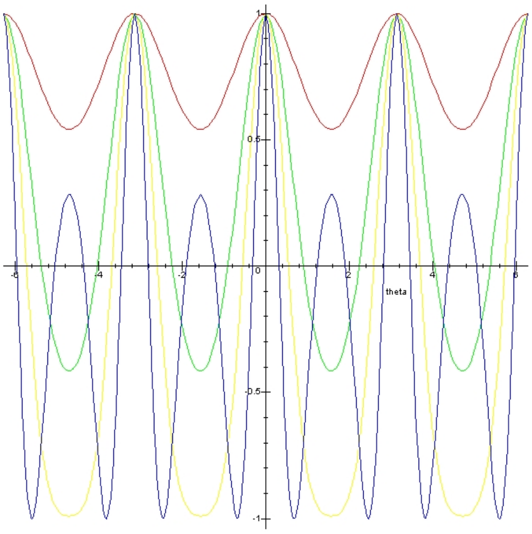
pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Si nous mettons $n = 0$ dans la relation ci-dessus, nous obtenons :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\cos(-x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta \tag{6.3.611}$$

Si nous traçons $\cos(x\sin(\theta))$ nous voyons qu'elle se répète dans les quatre quadrants (c'est une fonction paire) :

```
>plot([cos(sin(theta)),cos(2*sin(theta)),cos(3*sin(theta)),cos(5*sin(theta))]
,theta=-2*Pi..2*Pi);
```



En cours de traduction de l'anglais

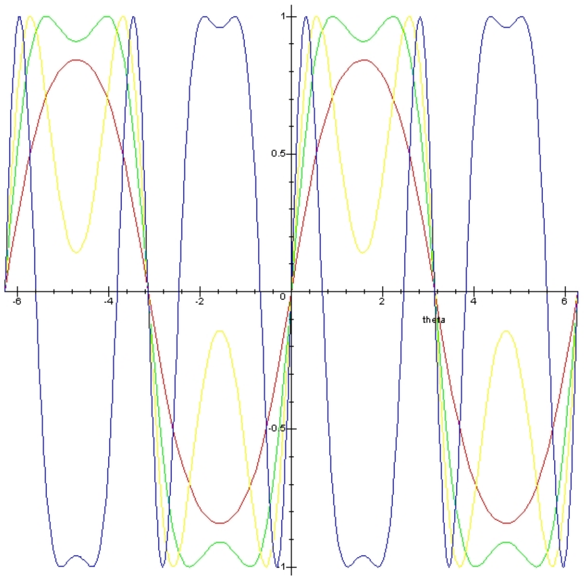
Nous pouvons donc écrire :

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta \qquad (6.3.612)$$

C'est la représentation intégrale réelle de la fonction de Bessel d'ordre zéro du premier type.

Mais dans de nombreux développements, nous n'utilisons pas l'expression ci-dessus car il n'y a pas de phaseur visible. L'astuce consiste donc à remarquer que $\sin(x\sin(\theta))$ inverse son signe dans le troisième et le quatrième quadrant (c'est une fonction impaire) :

```
>plot([sin(sin(theta)),sin(2*sin(theta)),sin(3*sin(theta)),sin(5*sin(theta))],
theta=-2*Pi..2*Pi);
```



Ainsi nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta=0 \qquad (6.3.613)$$

En additionnant les deux relationset en multipliant la seconde par i, nous avons :

$$\begin{aligned}J_0(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta+0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos(x\sin(\theta))+\mathrm{i}\sin(x\sin(\theta))\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned} \qquad (6.3.614)$$

Enfin, nous obtenons la représentation complexe de la fonction de Bessel d'ordre zéro du premier type :

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}x\sin(\theta)}\mathrm{d}\theta \qquad (6.3.615)$$

En cours de l' anglais

Faisons un changement de variable $\theta=\varphi+\pi/2$, dès lors :

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{3/4\pi}e^{\mathrm{i}x\sin(\varphi+\pi/2)}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{3/4\pi}e^{\mathrm{i}x\cos(\varphi)}\mathrm{d}\varphi \qquad (6.3.616)$$

Mais nous avons prouvé plus haut que pour toute fonction périodique :

$$\int\limits_{a}^{T+a}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{T}f(t)\mathrm{d}t \qquad (6.3.617)$$

Dès lors :

$$\boxed{J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{\mathrm{i}x\cos(\varphi)}\mathrm{d}\varphi} \qquad (6.3.618)$$

Cette représentation intégrale peut être obtenue de diverses manières mais celle-ci nous semble la plus facile. Il existe de nombreuses autres représentations intégrales.

6.3.2.9 Fonction de Dirac

La "fonction de Dirac", appelée aussi "pic de Dirac" ou encore "fonction delta", joue un rôle pratique très important aussi bien en électronique et informatique qu'en physique quantique ondulatoire et physique quantique des champs (cela permet de discrétiser un continuum) ainsi que dans le domaine du génie civil (voir les sections du même nom pour des exemples).

Signalons avant d'aller qu'il est abusif de parler de "fonction" car une fonction est une application d'une ensemble de départ (généralement l'ensemble des réels ou complexes à une ou plusieurs dimensions) dans un ensemble d'arrivée (généralement l'ensemble des réels ou complexes à une ou plusieurs dimensions). Alors que le domaine de définition de la fonction de Dirac n'est pas un ensemble de nombres mais en toute rigueur un ensemble de fonctions !

Plus techniquement, la fonction delta de Dirac, ou fonction δ, est une fonction généralisée, ou distribution, sur la droite des nombres réels qui est nulle partout sauf à zéro, avec une intégrale valant 1 sur toute la droite réelle. La fonction delta est parfois considérée comme une pointe infiniment haute et infiniment mince à l'origine, avec une surface totale sous la pointe, et représente physiquement la densité d'une masse ponctuelle idéalisée ou d'une charge ponctuelle. Elle a été introduit par le physicien théoricien Paul Dirac. Dans le contexte du traitement du signal, elle est souvent appelée "symbole d'impulsion unitaire" (ou fonction). Son analogue discret est la "fonction delta de Kronecker", qui est généralement définie sur un domaine discret et prend les valeurs 0 et 1.

Comme toujours dans ce livre, nous nous concentrerons ici uniquement sur les propriétés dont nous aurons besoin pour étudier les sujets de mathématiques appliquées des autres sections du livre.

En cours de traduction de l'anglais

Pour représenter mentalement de manière simple cette fonction, considérons d'abord la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \quad \text{si} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ f(x) &= 0 \quad \text{si} \quad |x| > \frac{a}{2} \end{aligned} \tag{6.3.619}$$

La représentation de $y = f(x)$ ci-dessus est un rectangle de largeur a, de hauteur $1/a$ et de surface unitaire. La fonction de Dirac peut être considérée comme la frontière lorsque $a \leftarrow 0$ du $f(x)$. Nous avons donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ \delta(x) &= \infty \quad \text{si} \quad x = 0 \end{aligned}} \tag{6.3.620}$$

C'est-à-dire (le fait que la flèche s'arrête à 1 est une tradition mais c'est trompeur car en réalité elle devrait s'arrêter à l'infini ! ! ! ce que vous voyez ci-dessous est l'intégrale de la fonction Dirac comme nous en discuterons juste après) :

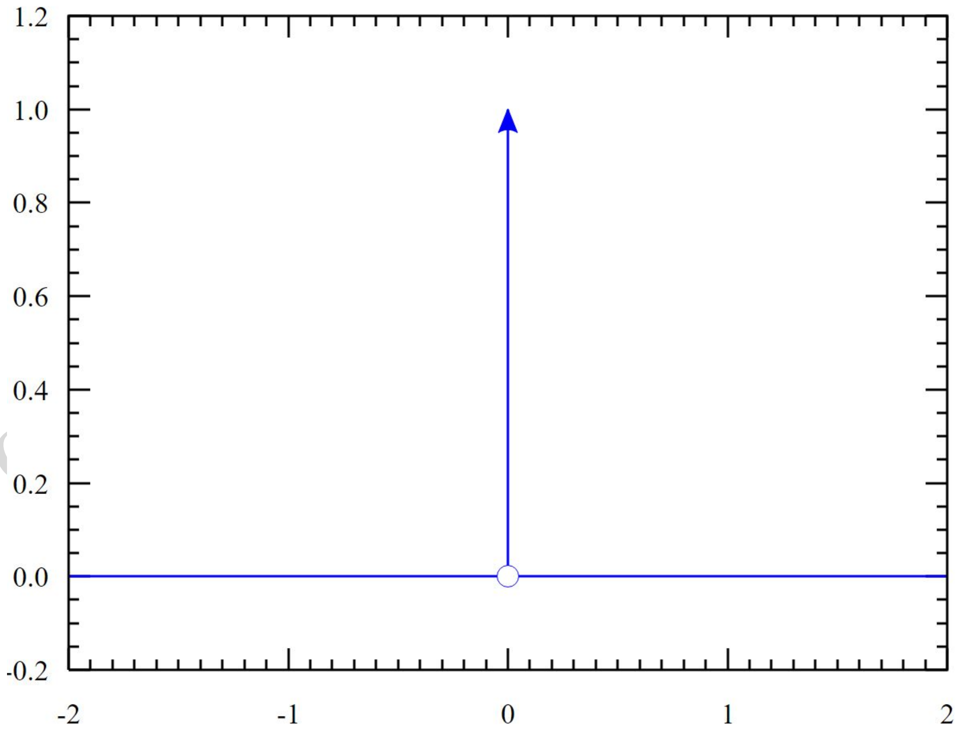


FIG. 6.50 – Représentation schématique de la fonction delta de Dirac par un trait surmonté d'une flèche (source : Wikipédia)

avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) \mathrm{d}x = 1 \tag{6.3.621}$$

où ε est un nombre plus grand que 0 et aussi petit que l'on veut.

Remarque

Comme le lecteur l'aura probablement remarqué lorsque nous avons introduit la fonction initiale $f(x)$, la fonction delta Dirac résultante a donc la dimension de l'inverse d'une longueur !

Pour une fonction $g(x)$ continue en $x=0$ nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x)\mathrm{d}x = g(0) \qquad (6.3.622)$$

Par extension nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(x-x_0)&=0 \quad \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \delta(x-x_0)&=\infty \quad \text{si} \quad x = x_0 \end{aligned}} \qquad (6.3.623)$$

et pour une fonction $g(x)$ continuer sur x_0 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = g(x_0) \qquad (6.3.624)$$

Il est alors relativement facile de définir la fonction de Dirac dans l'espace à 3 dimensions par :

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(y-y_0) \qquad (6.3.625)$$

Comme déjà mentionné, nous prouverons les propriétés de la fonction de Dirac uniquement si nous en aurons besoin dans d'autres sections de ce livre.

Pour voir maintenant la représentation intégrale de la fonction de Dirac (très utile en Théorie Quantique des Champs) rappelons la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ (voir section Suites et Séries page 1738) en utilisant une autre notation et convention commune utilisée par les physiciens et les mathématiciens[5] (certains d'entre eux inversent la définition... la transformée de Fourier est désignée comme la transformée de Fourier inverse...) :

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}t \qquad (6.3.626)$$

Cette transformation est réversible, c'est-à-dire que nous pouvons revenir de $\tilde{f}(s)$ à $f(t)$ en :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)e^{-\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}\omega \qquad (6.3.627)$$

[5] Au lieu d'utiliser la limite d'une impulsion rectangulaire de plus en plus étroite de surface unitaire lors de la définition de la fonction delta, toutes fonctions similaires peuvent être utilisées, à condition que leur intégrale soit égale à l'unité et que leur amplitude augmente à mesure que leur largeur d'amplitude rétrécit.

En cours de traduction de l'anglais

Si nous posons $f(t)=\delta(t)$ dans les équations ci-dessus, nous trouvons :

$$\tilde{\delta}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.3.628}$$

$$\delta(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\mathrm{i}t\omega}}{2\pi}\mathrm{d}\omega \tag{6.3.629}$$

En d'autres termes, la fonction delta et une constante $1/\sqrt{2\pi}$ sont des transformées de Fourier l'une de l'autre !

Une autre façon de voir la représentation intégrale de la fonction delta consiste à nouveau à utiliser les limites. Par exemple, en utilisant la limite de la gaussienne (et le fait que la transformée de Fourier d'une gaussienne soit une autre gaussienne comme prouvé à la page 1744) :

$$\delta(t)=\lim_{\sigma\rightarrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-t^2/2\sigma^2}=\lim_{\sigma\rightarrow 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\omega^2\sigma^2/2}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\pi}\mathrm{d}\omega \tag{6.3.630}$$

La première égalité est souvent notée :

$$\delta(x-a)=\lim_{k\rightarrow 0}\frac{1}{k\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{k}\right)^2} \tag{6.3.631}$$

et décrite par la figure suivante (pour $a=0$) :

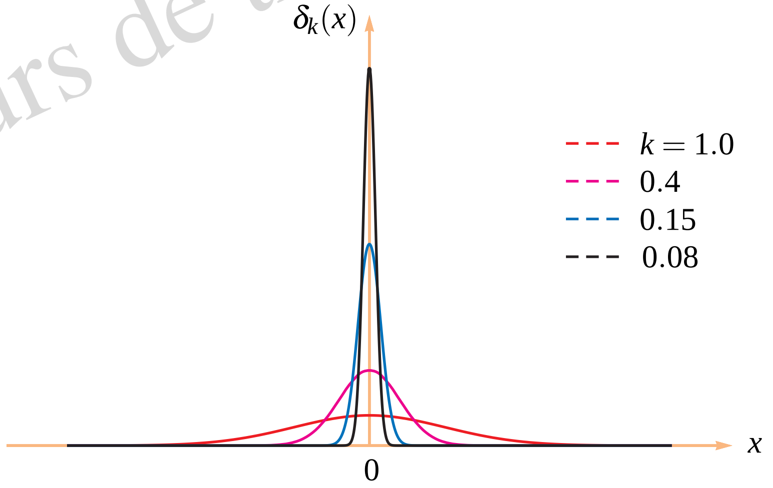


FIG. 6.51 – Fonction delta de Dirac régularisée par une Gaussienne

Ou plus généralement :

$$\boxed{\delta(t-x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}\omega(t-x)}\mathrm{d}\omega} \tag{6.3.632}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.9.1 Fonction de Heaviside

Rappelons que nous avons vu juste plus haut la propriété suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases} g(x_0) & \text{si } \alpha<x_0<\beta \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{6.3.633}$$

Notez que l'intégrale finie bornée ci-dessus conduit à :

$$\int_{a}^{b} g(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} g(0) & \text{si } 0\in[a,b] \\ 0 & \text{si } 0\notin[a,b]\end{cases} \tag{6.3.634}$$

et aussi à (nous posons $g(x)=1$) :

$$\int_{a}^{b} \delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\in[a,b] \\ 0 & \text{si } 0\notin[a,b]\end{cases} \tag{6.3.635}$$

Maintenant, posons $a=-\infty$ et $b=x$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\in]-\infty,x] \\ 0 & \text{si } 0\notin]-\infty,x]\end{cases} \tag{6.3.636}$$

ce dernier équivaut à écrire :

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0\end{cases} \tag{6.3.637}$$

Et maintenant nous pouvons faire quelque chose d'astucieux, comme $\mathbb{R}$ est dense, nous pouvons donc définir une nouvelle fonction nommée "fonction d'Heaviside" comme une fonction pour laquelle chaque valeur est calculée comme l'intégrale de Dirac semi-bornée telle que :

$$\boxed{H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x-a)dx} \tag{6.3.638}$$

Ainsi chaque point valorisé de la fonction Heaviside $H(x)$ est en fait l'évaluation d'une fonction de Dirac semi-bornée estimée sur le point x.

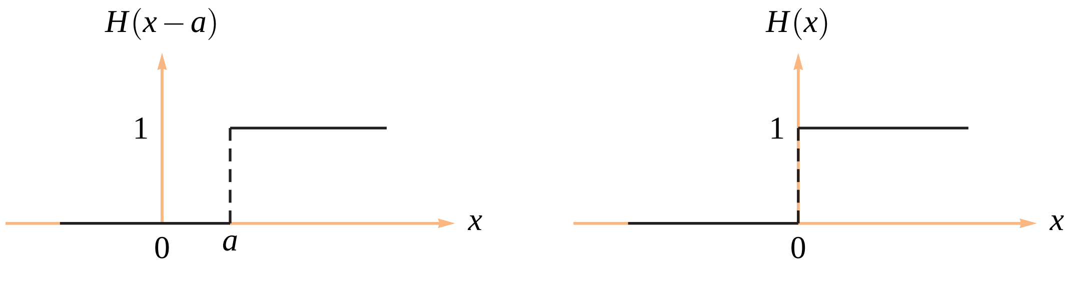


FIG. 6.52 – Tracé de la fonction de Heaviside

La différenciation de la définition ci-dessus par rapport à x donne la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}=\delta(x) \tag{6.3.639}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.10 Fonction Gamma d'Euler

Nous définissons la fonction Gamma d'Euler (intégrale eulérienne de seconde espèce), aussi appelée "fonction Gamma incomplète supérieure, par l'intégrale suivante :

$$\Gamma_{-1}(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \qquad (6.3.640)$$

avec x appartenant à l'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est positive et non nulle (donc les nombres réels positifs sont aussi inclus dans le domaine de définition) ! En effet, si l'on prend des nombres complexes à partie réelle nulle ou négative, l'intégrale diverge et est alors indéfinie !

Remarque

Nous avons déjà rencontré cette intégrale et certaines de ses propriétés (qui seront prouvées ici) dans notre étude des fonctions de distribution statistique Beta, Gamma, Chi-deux, Fisher et Student (voir section Statistiques page 636). Nous utiliserons également cette intégrale en maintenance (voir section Génie Industriel page ??), en théorie des cordes et dans d'autres domaines de l'ingénierie et de la physique (voir les chapitres correspondants) comme pour la régression linéaire généralisée binomiale négative canonique (voir section Méthodes Numériques page ??).

En cours de traduction en anglais

Considérons que nous voulons résoudre un cas pratique y relatif assez courant :

$$\int_0^{+\infty} x^{t-1}\,e^{-c^{te}x}\mathrm{d}x \qquad (6.3.641)$$

Posons :

$$y=c^{te}x \qquad \mathrm{d}y=c^{te} \qquad \mathrm{d}x=\frac{y}{c^{te}} \qquad (6.3.642)$$

Dès lors :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{c^{te}}\right)^{t-1} e^{-y}\,\frac{\mathrm{d}y}{c^{te}} \qquad (6.3.643)$$

En réarrangeant nous obtenons :

$$\frac{1}{(c^{te})^t}\int_0^{+\infty} y^{t-1}\,e^{-y}\,\mathrm{d}y \qquad (6.3.644)$$

C'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} x^{t-1}\,e^{-c^{te}x}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma_{-1}(t)}{(c^{te})^t} \qquad (6.3.645)$$

Voici un tracé graphique du module de la fonction Gamma d'Euler $\Gamma_{-1}(x)$ pour x parcourant un intervalle des nombres réels (attention dans Maple 4.00b à bien écrire GAMMA en majuscules ! ! !) :

```
>with(plots):
>plot(GAMMA(x),x=-Pi..Pi,y=-5..5);
```

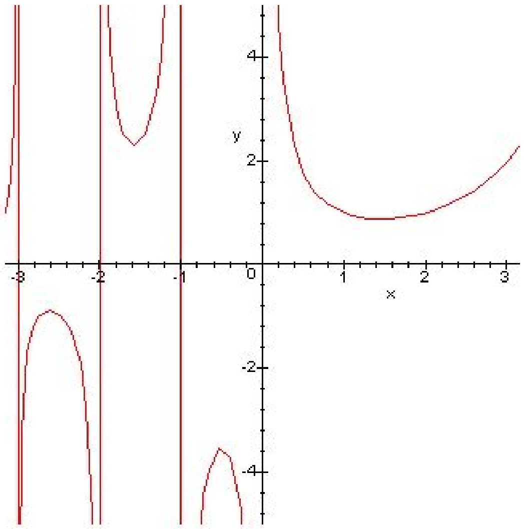


FIG. 6.53 – Plot de la fonction Gamma d'Euler dans Maple 4.00b

et la même fonction tracée avec Maple 4.00b mais dans le plan complexe cette fois-ci et toujours avec en ordonnée le module de la fonction Gamma d'Euler :

```
>with(plots):
>plot3d(abs(GAMMA(x+y*I)),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,view=0..5,
grid=[30,30],orientation=[-120,45],axes=frame,style=patchcontour);
```

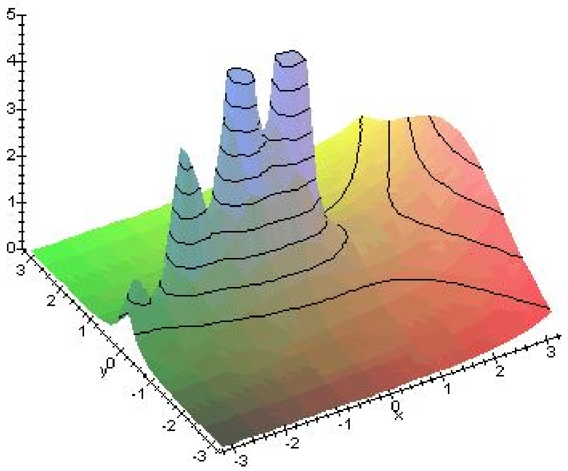


FIG. 6.54 – Plot de la fonction Gamma d'Euler dans le plan complexe avec Maple 4.00

Cette fonction est intéressante si nous imposons que la variable x appartienne aux entiers positifs

En cours de traduction vers l'anglais

et que nous l'écrivons sous la forme suivante :

$$\Gamma_0(x)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t \tag{6.3.646}$$

Intégrons par partie cette dernière fonction :

$$\begin{aligned}\Gamma_0(x)&=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t=-t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\&=-t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+x\Gamma_0(x-1)\end{aligned} \tag{6.3.647}$$

Comme la fonction exponentielle décroît beaucoup plus vite t^x que nous avons alors :

$$\Gamma_0(x)=x\Gamma_0(x-1) \tag{6.3.648}$$

Dans la littérature, nous retrouvons fréquemment les notations suivantes (qui portent alors à confusion) :

$$\begin{aligned}\Gamma_{-1}(x)=\Gamma_0(x-1)=\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\\Gamma_0(x)=\Gamma_0(x+1)=\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.3.649}$$

Ce qui nous amène à réécrire le résultat sous une forme plus classique :

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)} \tag{6.3.650}$$

De la relation $\Gamma_0(x)=x\Gamma_0(x-1)$, il vient par récurrence :

$$\Gamma_0(x)=x(x-1)\Gamma_0(x-2)=\ldots=\Gamma_0(0)x! \tag{6.3.651}$$

Or :

$$\Gamma_0(0)=\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t=-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=-e^{-\infty}-(-e^{-0})=1 \tag{6.3.652}$$

ce qui donne :

$$\Gamma_0(x)=x\cdot(x-1)\cdot\Gamma_0(x-2)=\ldots=\Gamma_0(0)x!=1\cdot x!=x! \tag{6.3.653}$$

Donc :

$$\Gamma_0(x+1)=x! \tag{6.3.654}$$

ou autrement écrit pour $x\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x!=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t} \tag{6.3.655}$$

En cours de traduction de l'anglais

Notez que pour $x=0$, nous avons :

$$\Gamma(1)=0!=\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t=-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=-e^{-\infty}-(-e^{-0})=1 \tag{6.3.656}$$

Voyons pour le plaisir quelle est la valeur de i! en utilisant la formule d'Euler des nombres complexes :

$$\begin{aligned}\mathrm{i}! &= \int_0^{+\infty} t^{\mathrm{i}} e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{\ln\left(t^{\mathrm{i}}\right)} e^{-t}\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}\ln(t)} e^{-t}\mathrm{d}t=\int_n^{+\infty}(\cos(\ln(t))+\mathrm{i}\sin(\ln(t)))e^{-t}\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}\cos(\ln(t))e^{-t}\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\sin(\ln(t))e^{-t}\mathrm{d}t\\ &\cong 0.498-0.155\mathrm{i}\end{aligned} \tag{6.3.657}$$

où les dernières intégrales doivent être calculées par des méthodes numériques.

Un autre résultat intéressant de la fonction gamma d'Euler est obtenu lorsque nous remplaçons t par y^2 et calculons celle-ci pour $x=0.5$.

D'abord nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}=2y\Rightarrow \mathrm{d}t=2y\mathrm{d}y \tag{6.3.658}$$

ensuite :

$$\Gamma_{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} y^{-1}e^{-y^2}2y\mathrm{d}y=2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \tag{6.3.659}$$

Or, comme nous l'avons démontré dans la section de Statistiques lors de notre étude de loi de de Gauss-Laplace (voir page 683), cette dernière intégrale vaut :

$$\Gamma_{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi} \tag{6.3.660}$$

Différents types de relations peuvent être dérivés en utilisant la relation de récurrence :

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \tag{6.3.661}$$

et du résultat précédent. Par exemple, la fonction Gamma pour $n+\frac{1}{2}$, où n dans un entier nous sera très utile dans la section Statistiques pour la dérivation de la distribution chi carré non

En cours de traduction de l' anglais

centrale et peut être dérivée comme suit :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\\&=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(3)(1)}{2^n}\sqrt{\pi}\\&=\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots(3)(2)(1)}{2^n(2n-2)(2n-4)\ldots2}\\&=\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots(3)(2)(1)}{2^n2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots1}\\&=\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}\end{aligned}\tag{6.3.662}$$

6.3.2.10.0.1 Fonction Gamma régularisée incomplète

La "fonction Gamma régularisée incomplète (supérieure)", utile dans l'étude du test A/B testing pour les données de type comptage (voir section Statistiques page 976), est défini par :

$$Q(\alpha,\beta\lambda)=\frac{\Gamma(\alpha,t)}{\Gamma(\alpha)}=\int\limits_x^{+\infty}\frac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}\lambda\tag{6.3.663}$$

Évidemment, la version non régularisée est définie par :

$$Q(\alpha,\beta\lambda)=\int\limits_x^{+\infty}\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}\mathrm{d}\lambda\tag{6.3.664}$$

Et en factorisant un β elle est aussi parfois définie comme (avec la notation conventionnelle) et en posant $t=\beta\lambda$:

$$Q(\alpha,\beta\lambda)=\int\limits_x^{+\infty}(\beta\lambda)^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}\beta\mathrm{d}\lambda=Q(\alpha,t)=\int\limits_x^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t\tag{6.3.665}$$

Alors quelle que soit la version que nous choisissons pour les prochains développements, le résultat restera le même !

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Nous définissons également la fonction Gamma régularisée incomplète (inférieure)" par :

$$q(\alpha,\beta\lambda)=\int\limits_0^x \frac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}\lambda \tag{6.3.666}$$

Ces fonctions ont été étudiées pour la première fois par le mathématicien Friedrich Prym en 11877 (calendrier holocène), et $Q(\alpha,\beta\lambda)$ a également été nommée "Fonction de Prym".

Avant de continuer, considérons le cas particulier suivant qui sera utile plus loin :

$$Q(1,\beta\lambda)=\int\limits_x^{+\infty}\frac{\beta^1\lambda^{1-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(1)}\mathrm{d}\lambda=\beta\int\limits_x^{+\infty}e^{-\beta\lambda}\mathrm{d}\lambda=\beta\left(-\frac{e^{-\beta\lambda}}{\beta}\Bigg|_x^{+\infty}\right)=-e^{-\beta\lambda}\Bigg|_x^{+\infty}=e^{-\beta x} \tag{6.3.667}$$

Et nous devons également prouver comme résultat intermédiaire une relation récursive spéciale. Pour cela grâce à une intégration par partie nous démontrons la relation suivante :

$$\Gamma(\alpha+1,t)=\alpha\Gamma(\alpha,t)+t^\alpha e^{-t} \tag{6.3.668}$$

Effectivement :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha,t)&=\int\limits_t^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{x^\alpha}{\alpha}e^{-x}\Bigg|_t^{+\infty}+\frac{1}{\alpha}\int_t^{+\infty}x^\alpha e^{-x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{t^\alpha}{\alpha}e^{-t}+\frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1,t)\end{aligned} \tag{6.3.669}$$

et en multipliant par α des deux côtés de l'égalité, nous avons prouvé l'égalité précédente !

Sachant que $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ et que par définition $Q(\alpha,t)=\Gamma(\alpha,t)/\Gamma(\alpha)$ et en divisant :

$$\Gamma(\alpha+1,t)=\alpha\Gamma(\alpha,t)+t^\alpha e^{-t} \tag{6.3.670}$$

par $\Gamma(\alpha+1)$ nous obtenons :

$$Q(\alpha+1,t)=\alpha\frac{\Gamma(\alpha,t)}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t^\alpha e^{-t}}{\Gamma(\alpha+1)}=Q(\alpha,t)+\frac{t^\alpha e^{-t}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

À partir de la relation ci-dessus, nous pouvons calculer $Q(\alpha+2,t)$:

$$\begin{aligned}Q(\alpha+2,t)&=Q(\alpha+1,t)+\frac{t^{\alpha+1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha+2)}\\&=Q(\alpha,t)+\frac{t^\alpha e^{-t}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t^{\alpha+1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha+2)}\\&=Q(\alpha,t)+t^\alpha e^{-t}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t}{\Gamma(\alpha+2)}\right)\end{aligned} \tag{6.3.671}$$

En cours de traduction de l'anglais

et $Q(\alpha+3,t)$ pour le fun... :

$$\begin{aligned}Q(\alpha+3,t)&=Q(\alpha+2,t)+\frac{t^{\alpha+2}e^{-t}}{\Gamma(\alpha+3)}\\&=Q(\alpha,t)+t^{\alpha}e^{-t}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t}{\Gamma(\alpha+2)}\right)+\frac{t^{\alpha+2}e^{-t}}{\Gamma(\alpha+3)}\\&=Q(\alpha,t)+t^{\alpha}e^{-t}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{t^2}{\Gamma(\alpha+3)}\right)\end{aligned}\tag{6.3.672}$$

Nous montrons facilement par récurrence la relation récursive suivante :

$$\boxed{Q(\alpha+n,t)=Q(\alpha,t)+t^{\alpha}e^{-t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}}\tag{6.3.673}$$

En utilisant l'identité $Q(1,t)=e^{-t}$ et la relation récursive précédente, nous pouvons exprimer Q comme :

$$Q(n,t)=e^{-t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}\tag{6.3.674}$$

Effectivement, posons d'abord $\alpha=1$:

$$\begin{aligned}Q(n+1,t)=Q(1,t)+te^{-t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+2)}&=Q(1,t)+e^{-t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+2)}\\=e^{-t}+e^{-t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+2)}&\end{aligned}\tag{6.3.675}$$

Nous posons $n=n+1$ (nous exigeons alors maintenant que $n>1$), donc :

$$Q(n,t)=e^{-t}+e^{-t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+2)}\tag{6.3.676}$$

Nous faisons un autre changement de variable $k=k+1$:

$$Q(n,t)=e^{-t}+e^{-t}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}=e^{-t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}\tag{6.3.677}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.10.1 Constante d'Euler-Mascheroni

Ce petit texte fait juste office de curiosité relativement à la constante d'Euler e et à presque tous les outils de calcul différentiel et intégral que nous avons vus jusqu'à maintenant. C'est un très joli exemple (presque artistique) de ce que nous pouvons faire avec la mathématique dès que nous avons suffisamment d'outils à notre disposition.

De plus, cette constante est utile dans certaines équations différentielles où nous la retrouverons.

Nous avions vu dans la d'Analyse Fonctionnelle que la constante d'Euler e est définie par la limite :

$$e=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \tag{6.3.678}$$

Dans un cas plus général nous pouvons très facilement démontrer de la même façon que (les détails peuvent nous être demandés au besoin) :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}=e^{-t} \tag{6.3.679}$$

Cela suggère évidemment :

$$\Gamma_{-1}(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\mathrm{d}t \tag{6.3.680}$$

par un changement de variable $t=nu$ nous écrivons :

$$\Gamma_{-1}(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n n\mathrm{d}u=\lim_{n\to+\infty} n^x\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\mathrm{d}u \tag{6.3.681}$$

Et nous utilisons la définition de la fonction Beta (voir section Statistique page 748) :

$$\begin{aligned}B(x-1,n)&=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\mathrm{d}u\\&=\frac{u^x}{x}(1-u)^n\Big|_0^1+\frac{1}{x}n\int_0^1 u^x(1-u)^{n-1}\mathrm{d}u\\&=\frac{n}{x}B(x,n-1)=\frac{n(n-1)}{x(x+1)}B(x+1,n-2)\\&=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\end{aligned} \tag{6.3.682}$$

Dès lors :

$$\Gamma_{-1}(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{6.3.683}$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour transformer cette expression nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} n^x &= e^{\ln(n^x)} = e^{x\cdot\ln(n)} \\ &= e^{x\left(\cdot\ln(n)-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-x\cdot(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n))}\cdot e^x\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{x}{n}} \end{aligned} \tag{6.3.684}$$

Or la quantité :

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n) \tag{6.3.685}$$

tend vers la limite $\gamma = 0.5772$, appelée "constante d'Euler-Mascheroni" ou également "constante Gamma d'Euler", lorsque n tend vers l'infini.

D'où :

$$\Gamma_{-1}(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\cdot e^{-\gamma x}\cdot e^x\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{x}{n}}}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\cdot e^{-\gamma x}\prod\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{x}{k}}}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{6.3.686}$$

Divisons chacun des termes du produit $(x+1)\ldots(x+n)$ par l'entier correspondant pris dans $n!$, nous obtenons donc (suite à une demande de lecteur nous avons mis un maximum de détails !) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_{-1}(x)} &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!e^{\lambda x}\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{x}{k}}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}} = x\cdot e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n!}\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}} \\ &= x\cdot e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{1\cdot 2\ldots\cdot n}\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}} = x\cdot e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\frac{(x+1)}{1}\frac{(x+2)}{2}\ldots\frac{(x+n)}{n}\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}} \\ &= x\cdot e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}(x+1)\left(\frac{x}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{n}+1\right)\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}} = x\cdot e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k}+1\right)\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{x}{k}} \\ &= x\cdot e^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = x\cdot e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} \end{aligned} \tag{6.3.687}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.11 Intégrales Curvilignes

Les intégrales de ligne (intégrale curviligne) sont également très importantes en physique. Le lecteur les retrouvera donc dans la section de Mécanique Classique, Electrodynamique et Magnétostatique pour calculer le travail d'une force ou le "champ d'écoulement", ou dans la section de Géométrie Euclidienne pour calculer le centre de gravité des courbes (fonctions), ou dans la section des Formes Géométriques pour calculer la surface de certains corps de révolution mais aussi en Physique Corpusculaire Quantique pour la fameuse "intégrale de chemin" (qui n'est que le terme utilisé par les physiciens pour dire "intégrale de ligne") ou pour le calcul spécifique d'intégrales à l'aide du théorème des résidus prouvé dans la section d'Analyse Complexe ou pour les transformation d'états dans la section de Thermodynamique. C'est pourquoi il n'y aura pas ici d'exemples d'intégrales de ligne car elles ont déjà beaucoup de cas d'applications dans les autres chapitres de ce livre.

Avec la définition des ce intégrales, nous pourrons démontrer deux résultats très importants détaillés dans le chapitre de Calcul Vectoriel et qui sont respectivement le théorème de Green, le théorème de Stokes ou encore le théorème des résidus démontré dans le chapitre d'Analyse Complexe et déjà mentionné dans le paragraphe précédent (c'est suffisamment important pour le mentionner deux fois !).

Plus techniquement, une intégrale de ligne est une intégrale où la fonction à intégrer est évaluée le long d'une courbe. Les termes "intégrale de chemin", "intégrale de courbe" et "intégrale curviligne" sont également utilisés ; "intégrale de contour" également, bien que cela soit généralement réservé aux intégrales de ligne dans le plan complexe.

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.11.1 Intégrale curviligne d'un champ scalaire

Considérons une courbe C paramétrée (voir section Géométrie Différentielle page 2822) par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ avec $t \in [a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (cette condition est nécessaire pour que l'on puisse intégrer sur la courbe sans problèmes).

Définitions (#6.3.198) :

D1. La courbe est dite "courbe fermée" si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$

D2. La courbe est dite "courbe régulière" si $\forall t \in [a,b]\; \vec{r}'(t) \neq 0$

Rappelons qu'une courbe paramétrée peut être écrite sous la forme suivante (toute fonction vectorielle peut être écrite sous cette forme) :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{6.3.688}$$

Considérons une fonction ou un "champ scalaire" définie dans un voisinage de C. Subdivisons $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur Δt tel que :

$$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b \tag{6.3.689}$$

Nous choisissons sur chaque sous-intervalle un point $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$. Soit δs_i la longueur de l'arc de C reliant les points $(x(t_i), y(t_i))$ et $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1})$, l'intégrale de f de long de C est définie comme étant "l'intégrale curviligne" ou "intégrale de chemin" :

$$\int\limits_C f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x(t_i^*), y(t_i^*))\Delta s_i \tag{6.3.690}$$

Ce qui comme nous le savons, peut s'écrire (voir section Géométrie Différentielle page 2828 ou Mécanique Analytique page **??** et beaucoup d'autres) :

$$\int\limits_C f(x(t), y(t))\mathrm{d}s = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t \tag{6.3.691}$$

et qui peut évidemment immédiatement être étendu au cas à 3 variables et plus.

Soit sous forme vectorielle :

$$\int\limits_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int\limits_a^b \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\|\mathrm{d}t \tag{6.3.692}$$

L'intégrale curviligne est linéaire, c'est-à-dire que si $C = C_1 \cup C_2$ et que $C_1 \cap C_2$ est un point, alors (sans aller dans la définition rigoureuse de ce qu'est l'union de deux courbes...) :

$$\int\limits_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int\limits_{C_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int\limits_{C_2} f(x,y)\mathrm{d}s \tag{6.3.693}$$

6.3.2.11.2 Intégrale curviligne d'un champ vectoriel

Considérons un champ de vecteurs (par exemple un champ de forces) tel que :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x,y)) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = F_x(x,y,)\vec{i} + F_y(x,y,)\vec{j} \tag{6.3.694}$$

et une élément infinitésimal d'une courbe (chemin) $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} \tag{6.3.695}$$

L'idée est alors de considérer que le produit scalaire (projection de champ vectoriel sur l'élément de chemin) représente le travail le long de l'élément différentiel :

$$\vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{r} \tag{6.3.696}$$

Par conséquent le travail sur tout le chemin sera donné par (en utilisant au passage la propriété de linéarité de l'intégrale) :

$$W = \int_C \vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \int_C (F_x(x,y)\mathrm{d}x + F_y(x,y)\mathrm{d}y) = \int_C F_x(x,y)\mathrm{d}x + \int_C F_y(x,y)\mathrm{d}y \tag{6.3.697}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ce qui peut évidemment se généraliser à n dimensions. Indiquons que lorsque l'intégrale curviligne (de chemin) d'un champ vectoriel est étendue à une courbe fermée, nous parlons alors de "circulation du champ vectoriel".

Comme :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}'(t) \quad (6.3.698)$$

Nous avons alors une écriture assez courante :

$$\int_C \vec{F}\circ \mathrm{d}\vec{r}=\int_C \vec{F}(\vec{r}(t))\circ\vec{r}'(t)\mathrm{d}t=\int_C \big(F_x(x(t),y(t))r_x'(t)+F_y(x(t),y(t))r_y'(t)\big)\,\mathrm{d}t \quad (6.3.699)$$

Remarque

En physique souvent les problèmes sont dans le plan et nécessitent le passage aux coordonnées polaires, ce qui en outre facilite les calculs.

✍**Exemple :**

Calculons le travail de la force de pesanteur déplaçant une masse M du point $M_1(a_1,b_1,c_1)$ au point $M_2(a_2,b_2,c_2)$ le long d'un chemin arbitraire C. Les projections de la force de pesanteur sur les axes de coordonnées sont :

$$F_x=0,F_y=0,F_z=-mg \quad (6.3.700)$$

Le travail accompli est alors :

$$\begin{aligned}W&=\int_C \vec{F}\circ\mathrm{d}\vec{r}=\int_C (F_x(x,y,z)\mathrm{d}x+F_y(x,y,z)\mathrm{d}y+F_z(x,y,z)\mathrm{d}y)\\&=-\int_C mg\mathrm{d}z=-mg\Delta z\end{aligned} \quad (6.3.701)$$

et nous retrouvons un résultat connu de la section de Mécanique Classique.

Une intégrale curviligne d'un champ vectoriel $\vec{F}$ le long d'une courbe C_1 est indépendante du chemin d'intégration si :

$$\int_{C_1}\vec{F}\circ\mathrm{d}\vec{r}=\int_{C_2}\vec{F}\circ\mathrm{d}\vec{r} \quad (6.3.702)$$

pour toute courbe C_2 ayant les mêmes points de départ et d'arrivée. De plus, si le champ de vecteurs satisfait (où U en physique est typiquement un potentiel) :

$$\left.\begin{aligned}F_x(x,y)&=\frac{\partial U}{\partial x}\\F_y(x,y)&=\frac{\partial U}{\partial y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{F}=\overrightarrow{\text{grad}}(U)=\vec{\nabla}(U) \quad (6.3.703)$$

tel que (le lecteur y reconnaîtra une forme différentielle totale exacte) :

$$\vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{r} = F_x(x,y)\mathrm{d}x + F_y(x,y)\mathrm{d}y = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad (6.3.704)$$

Alors l'intégrale de chemin sur une courbe arbitraire dépend uniquement de la différence des valeurs de la fonction U aux deux extrémités ! C'est le "théorème fondamental des intégrales curvilignes" ou "théorème du gradient des intégrales curvilignes".

Démonstration 6.14.9. Si la forme différentielle du champ de vecteur satisfait bien une différentielle totale exacte, nous avons :

$$\begin{aligned} W_{A,B} &= \int\limits_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = \int\limits_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(x(t),y(t))\mathrm{d}t \\ &= U(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = U(x(t_2),y(t_2)) - U(x(t_1),y(t_1)) = U(B) - U(A) \end{aligned} \qquad (6.3.705)$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\int\limits_\Gamma \vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{r} \Leftrightarrow \int\limits_\Gamma \vec{\nabla}(U) \circ \mathrm{d}\vec{r} : \quad \int\limits_\Gamma \vec{\nabla}(U) \circ \mathrm{d}\vec{r} = U(b) - U(a)} \qquad (6.3.706)$$

■ Q.E.D.

Donc l'intégrale curviligne d'une différentielle totale exacte ne dépend pas du chemin d'intégration mais seulement des extrémités. Nous en déduisons également que si $\vec{F}$ dérive donc d'un potentiel scalaire et que $A = B$, l'intégrale curviligne est alors nulle.

En physique ce résultat s'interprète en disant que le travail fourni par une force dérivant d'un potentiel scalaire s'exerçant sur une particule élémentaire lors d'un déplacement fini ne dépend pas du chemin suivi.

En cours de traduction de l' anglais

Définitions (#6.3.199) :

D1. Lorsque la courbe C est fermée et que l'intégrale de chemin a un résultat indépendant du sens dans lequel ce chemin est parcouru, nous utilisons la notation (la lettre sous l'intégrale pouvant évidemment varier...) :

$$\oint_C \qquad (6.3.707)$$

Si cette intégrale fermée est toujours nulle, nous disons que le champ vectoriel intégré est un "champ conservatif" et "dérive d'un potentiel scalaire" (et donc satisfait le théorème de Schwarz pour pouvoir être écrit sous forme de différentielle totale exacte) puisque ceci découle de la démonstration donnée déjà juste plus haut.

D2. Lorsque la valeur de l'intégrale de chemin fermée dépend du sens de parcours, nous utilisons la notation suivante (la lettre sous l'intégrale pouvant évidemment varier...) :

$$\circlearrowleft\!\!\!\!\!\!\oint_C \quad \text{ou} \quad \circlearrowright\!\!\!\!\!\!\oint_C \qquad (6.3.708)$$

Ainsi, si le sens est direct (c'est-à-dire "anti-horlogique" ou encore "trigonométrique") comme la notation de gauche, son signe sera positif; si au contraire le sens est horlogique son signe sera négatif (voir la démonstration dans le chapitre d'Analyse Complexe). Nous parlons alors respectivement souvent de "sens négatif" ou "sens positif".

Ainsi, pour résumer, une intégrale curviligne (de chemin) est entièrement définie par l'expression sous le signe de l'intégrale, la forme de la courbe d'intégration et le sens d'intégration.

Remarque

Le lecteur trouvera quelques preuves de propriétés très importantes des intégrales curvilignes dans la section de Calcul Vectoriel comme le théorème de Green-Riemann ou une application particulière pour étudier les fonctions holomorphes dans la section d'Analyse Complexe.

En cours de traduction de l' anglais

6.3.2.12 Intégrales de Surfaces

Les intégrales de surface sont une généralisation naturelle des intégrales linéaires (curvilignes) : au lieu d'intégrer sur une courbe, nous intégrons sur une surface dans un espace à trois dimensions. De telles intégrales sont importantes dans tous les sujets traitant des milieux continus (solides, fluides, gaz), ainsi que dans les sujets traitant des champs de force, comme les champs électromagnétiques ou gravitationnels.

Bien que la majeure partie de notre travail consistera à voir comment les intégrales de surface peuvent être calculées et à quoi elles servent, nous souhaitons d'abord indiquer brièvement comment elles sont définies. L'intégrale de surface de la fonction (continue) $f(x,y,z)$ sur la surface S est notée :

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S \tag{6.3.709}$$

Vous pouvez considérer $\mathrm{d}S$ comme l'aire d'un morceau infinitésimal de la surface S. Pour définir l'intégrale ci-dessus, nous subdivisons la surface S en petits morceaux d'aire ΔS_i, choisissons un point (x_i,y_i,z_i) dans le i-ième morceau, et formons la somme de Riemann :

$$\sum f\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta S_i \tag{6.3.710}$$

Au fur et à mesure que la subdivision de S devient de plus en plus fine, les sommes correspondantes ci-dessus se rapprochent d'une limite qui ne dépend pas du choix des points ni de la manière dont la surface a été subdivisée. L'intégrale de surface précédente est définie comme étant cette limite (la surface doit être lisse et non infinie en étendue, et les subdivisions doivent être faites de manière raisonnable, sinon la limite peut ne pas exister, ou elle peut ne pas être unique).

Le type d'intégrale de surface le plus important est celui qui calcule le flux d'un champ vectoriel sur S. Plus tôt, nous avons calculé le flux d'un champ de vecteurs plan $\vec{F}(x,y)$ à travers une courbe dirigée dans le plan xy. Ce que nous faisons maintenant est l'équivalent de cela dans l'espace.

Nous supposons que S est orienté : cela signifie que S a deux côtés et que l'un d'eux a été désigné comme étant le "côté positif". En chaque point de S, il y a deux vecteurs normaux unitaires, pointant dans des directions opposées ; le vecteur normal unitaire orienté positivement, noté $\vec{n}$, est celui qui a sa base (c'est-à-dire sa queue) du côté positif. Si S est une surface fermée, comme une sphère ou un cube - c'est-à-dire une surface sans limites, de sorte qu'elle enferme complètement une portion de l'espace tridimensionnel - alors par convention elle est orientée de telle sorte que le côté extérieur soit le côté positif, c'est-à-dire que $\vec{n}$ pointe toujours vers l'extérieur de S :

En cours de traduction de l'anglais

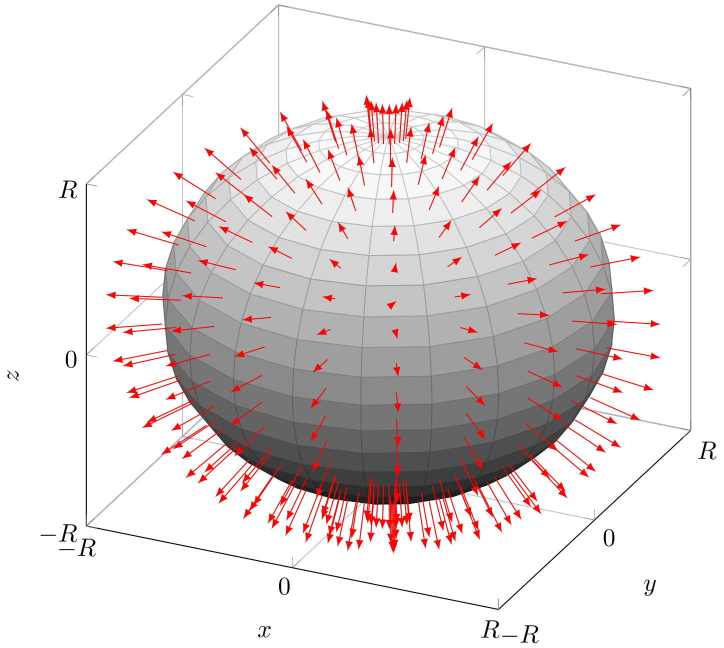


FIG. 6.55 – Flux sortant pour l'intégrale de surface d'une sphère entière

Soit $\vec{F}(x,y,z)$ un champ vectoriel continu dans l'espace, et S une surface orientée. Nous définissons :

$$\text{flux of } \vec{F} \text{ through } S = \iint_S (\vec{F} \circ \vec{n}) dS = \iint_S \vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{S} \quad (6.3.711)$$

les deux intégrales sont identiques, mais la seconde s'écrit en utilisant l'abréviation courante et suggestive $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S$.

Si $\vec{F}$ représente le champ de vitesse pour l'écoulement d'un fluide incompressible de densité 1, alors $\vec{F} \circ \vec{n}$ représente la composante de la vitesse dans la direction perpendiculaire positive à la surface, et $\vec{F} \circ \vec{n}\mathrm{d}S$ représente le débit à travers le petit morceau infinitésimal de surface ayant une aire $\mathrm{d}S$. L'intégrale ci-dessus additionne ces flux à travers les morceaux de surface, de sorte que nous pouvons l'interpréter comme disant :

$$\text{flux de } \vec{F} \text{ à travers } S = \text{flux net à travers } S \quad (6.3.712)$$

où nous comptons le flux dans la direction de $\vec{n}$ comme positif, le flux dans la direction opposée comme négatif. Plus généralement, si le fluide a une densité variable, alors le côté droit de la relation ci-dessus est le taux de transport de masse net du fluide sur S (par unité de surface, par unité de temps).

Si $\vec{F}$ est un champ de force, alors rien ne coule physiquement, et nous utilisons simplement le terme "flux" pour désigner l'intégrale de surface, comme dans :

$$\text{flux of } \vec{F} \text{ through } S = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S \vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{S} \quad (6.3.713)$$

En cours de traduction de l'anglais

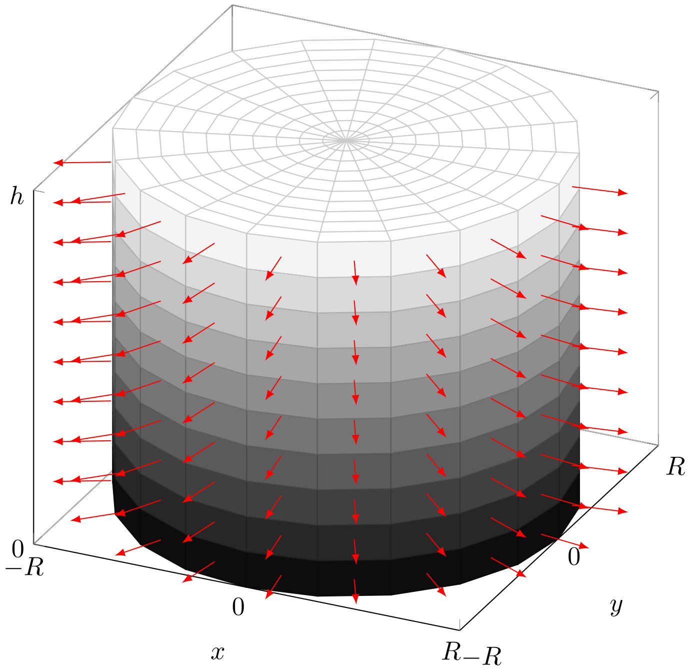


FIG. 6.56 – Flux sortant pour l'intégrale de surface d'un cylindre

✍**Exemple :**

E1. Trouvons le flux de $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ vers l'extérieur à travers la partie du cylindre $x^2 + y^2 = a^2$ dans le premier octant et en dessous du plan $z = h$.

Le morceau de cylindre est illustré. L'expression "vers l'extérieur" suggère que nous orientons le cylindre de manière à ce que $\vec{n}$ pointe vers l'extérieur (comme la figure ci-dessus), c'est-à-dire loin de l'axe z. Puisque par inspection $\vec{n}$ est radialement vers l'extérieur et horizontal :

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{a} \tag{6.3.714}$$

Il s'agit de la normale extérieure au cercle $x^2 + y^2 = a^2$ dans le plan xy ; $\vec{n}$ n'a pas de composante z puisqu'il est horizontal. Nous divisons par a pour faire que sa longueur soit 1.

Pour obtenir $\mathrm{d}S$, l'élément infinitésimal de la surface, nous utilisons des coordonnées cylindriques pour paramétrer le cylindre :

$$x = a\cos(\theta), \quad y = a\sin(\theta) \quad z = z \tag{6.3.715}$$

Comme les paramètres θ et z varient, c'est tout le cylindre qui est tracé ; le morceau que nous voulons satisfait $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq h$. La façon naturelle de subdiviser le cylindre est d'utiliser des petits morceaux de rectangles incurvé, délimités par deux arcs de cercle horizontaux et deux lignes verticales à la surface. Son aire $\mathrm{d}S$ est le produit de sa hauteur et de sa largeur :

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}z \cdot a\mathrm{d}\theta \tag{6.3.716}$$

Après avoir obtenu $\vec{n}$ et $\mathrm{d}S$, le reste du travail est routinier. Nous exprimons l'intégrande de notre intégrale de surface :

$$\Phi_S = \iint_S (\vec{F}\circ\vec{n})\mathrm{d}S = \iint_S \vec{F}\circ\mathrm{d}\vec{S} \tag{6.3.717}$$

en termes de z et θ :

$$\begin{aligned}\vec{F}\circ\vec{n}\mathrm{d}S &= \frac{zx+xy}{a}\cdot a\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\\ &= \big(az\cos(\theta)+a^2\sin(\theta)\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{6.3.718}$$

Cette dernière étape est essentielle, puisque les $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}\theta$ nous indiquent que l'intégrale de surface sera calculée en termes de z et θ, et donc l'intégrande doit également utiliser ces variables. Nous pouvons maintenant calculer le flux passant par S :

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\circ\vec{n}\mathrm{d}S &= \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{h}\big(az\cos(\theta)+a^2\sin(\theta)\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\\ \text{inner integral } &= \frac{ah^2}{2}\cos(\theta)+a^2h\sin(\theta)\cos(\theta)\\ \text{outer integral } &= \left[\frac{ah^2}{2}\sin(\theta)+a^2h\frac{\sin^2(\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ah}{2}(a+h)\end{aligned} \tag{6.3.719}$$

Nous remarquons rapidement que sur toute la surface latérale du cylindre l'intégrale de surface est égale à zéro.

E2. Trouvons le flux de $\vec{F}=xz\vec{i}+yz\vec{j}+z^2\vec{k}$ vers l'extérieur à travers cette partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ situé dans le premier octant $(x,y,z,\geq 0)$.

Encore une fois, nous commençons par trouver $\vec{n}$ et $\mathrm{d}S$ pour la sphère. Nous prenons l'extérieur de la sphère comme côté positif, donc $\vec{n}$ pointe radialement vers l'extérieur depuis l'origine ; on voit donc par inspection que :

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{a} \tag{6.3.720}$$

où nous avons divisé par a pour faire de $\vec{n}$ un vecteur unitaire.

Pour faire l'intégration, nous utilisons les coordonnées sphériques ρ,ϕ,θ. Sur la surface de la sphère de rayon $\rho=a$, les coordonnées ne sont donc que les deux angles ϕ et θ. L'élément de zone $\mathrm{d}S$ se trouve le plus facilement en utilisant le célèbre élément de volume sphérique :

$$\mathrm{d}V = \rho^2\sin(\phi)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}\rho = \text{ aire } \cdot \text{ épaisseur} \tag{6.3.721}$$

de sorte qu'en divisant par l'épaisseur $\mathrm{d}\rho$ et en définissant $\rho=a$, on obtient :

$$\mathrm{d}S = a^2\sin(\phi)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \tag{6.3.722}$$

Enfin puisque l'élément d'aire $\mathrm{d}S$ est exprimé en termes de ϕ et θ, l'intégration se fera en utilisant ces variables, ce qui signifie qu'il faut exprimer x, y, z en termes de ϕ et θ. Nous utilisons les relations exprimant les coordonnées cartésiennes en termes de coordonnées sphériques (en fixant $\rho = a$ puisque (x, y, z) est sur la sphère) :

$$x = a\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = a\sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = a\cos(\phi) \tag{6.3.723}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale de flux :

$$\Phi_S = \iint_S (\vec{F}\circ\vec{n})\mathrm{d}S = \iint_S \vec{F}\circ\mathrm{d}\vec{S} \tag{6.3.724}$$

De par :

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a} \tag{6.3.725}$$

et :

$$\mathrm{d}S = a^2\sin(\phi)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \tag{6.3.726}$$

l'intégrande est :

$$\vec{F}\circ\vec{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{a}\left(x^2z + y^2z + z^2z\right)\cdot a^2\sin(\phi)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \tag{6.3.727}$$

En utilisant :

$$x = a\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = a\sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = a\cos(\phi) \tag{6.3.728}$$

en remarquant que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, l'intégrale devient (nous posons $u = \sin(\phi) \longrightarrow \mathrm{d}u = \cos(\phi)\mathrm{d}\phi$) :

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\circ\vec{n}\mathrm{d}S &= a^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(\phi)\sin(\phi)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = a^4\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(\phi)\sin(\phi)\mathrm{d}\phi \\ &= a^4\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} u\mathrm{d}u = a^4\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\sin^2(\phi)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{4}\end{aligned} \tag{6.3.729}$$

6.3.2.13 Intégrales impliquant des équations paramétriques

Maintenant que nous avons vu comment calculer la dérivée d'une courbe plane, la question est la suivante : comment trouver l'aire sous une courbe définie paramétriquement ?

Pour dériver une expression de l'aire sous une courbe paramétrique définie par les fonctions :

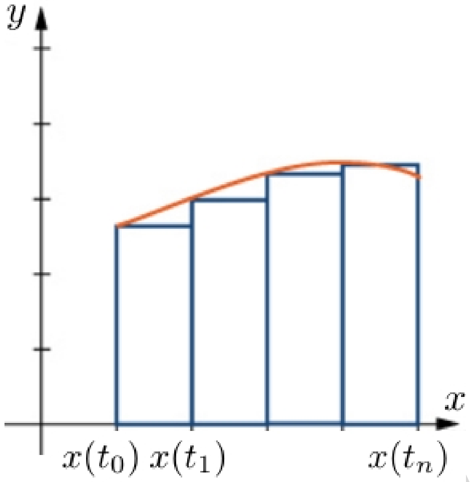
$$x = x(t) \qquad y = y(t) \tag{6.3.730}$$

avec $a \leq t \leq b$, nous supposons que $x(t)$ est différentiable et commençons par une partition égale de l'intervalle $a \leq t \leq b$.

Supposons :

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b \quad (6.3.731)$$

et considérons la figure suivante :



Nous utilisons des rectangles pour approximer la surface sous la courbe. La hauteur d'un rectangle typique dans cette paramétrisation est $y(x(\overline{t_i}))$ pour une certaine valeur $\overline{t_i}$ dans le i-ième sous-intervalle, et la largeur peut être calculée comme $x(t_i) - x(t_{i-1})$. Ainsi la surface du i-ième rectangle est donnée par :

$$S_i = y(x(\overline{t_i}))(x(t_i) - x(t_{i-1})) \quad (6.3.732)$$

Alors une somme de Riemann pour la surface est :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} y(x(\overline{t_i}))(x(t_i) - x(t_{i-1})) \quad (6.3.733)$$

En multipliant et divisant chaque surface par $t_i - t_{i-1}$ donne :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} y(x(\overline{t_i}))\frac{(x(t_i) - x(t_{i-1}))}{x(t_i) - x(t_{i-1})}(x(t_i) - x(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} y(x(\overline{t_i}))\frac{(x(t_i) - x(t_{i-1}))}{\Delta t}\Delta t \quad (6.3.734)$$

En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini nous donne :

$$\boxed{S = \lim_{n \to +\infty} = \int_a^b y(t)x'(t)\mathrm{d}t} \quad (6.3.735)$$

Et il est évident qu'en appliquant le théorème de Pythagore sur une longueur infinitésimale de la courbe paramétrique nous ayons :

$$\boxed{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t} \quad (6.3.736)$$

En cours de traduction de l' anglais

avec $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $t_1 < t < t_2$. Cela donne la longueur de l'arc de la courbe paramétrique entre deux points de la courbe.

Il vient aussi immédiatement :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\sqrt{1+y'(t)^2}\mathrm{d}t \qquad (6.3.737)$$

La règle de dérivation en chaîne (théorème de dérivation des fonctions composées) donne :

$$\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t \qquad (6.3.738)$$

Dès lors :

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+y'(t)^2}\mathrm{d}x} \qquad (6.3.739)$$

Nous retrouverons cette relation dans la section de Mécanique Analytique.

En astronomie, nous devons souvent faire face à des courbes fermées et calculer la distance parcourue sur cette courbe. Mais travailler en coordonnées cartésiennes n'est pas toujours la meilleure solution. C'est pourquoi il est préférable de passer en coordonnées polaires.

L'idée est de supposer que nous sommes capables d'exprimer la courbe qui nous intéresse sous la forme suivante :

$$r = f(\theta) \qquad (6.3.740)$$

où $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Afin d'adapter la relation de longueur d'arc pour une courbe polaire, nous utilisons les relations :

$$x = r\cos(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta) = f(\theta)\sin(\theta) \qquad (6.3.741)$$

et nous remplaçons le paramètre t par θ. Dès lors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} &= f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)\end{aligned} \qquad (6.3.742)$$

Nous remplaçons $\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}\theta$, et respectivement les limites inférieure et supérieure d'intégration

En cours de traduction de l' anglais

par α et β. Alors la formule de longueur d'arc devient :

$$\begin{aligned}L &= \int_{\alpha}^{b} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta))^2 + (f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + (f(\theta))^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{6.3.743}$$

Donc finalement en coordonnées polaires :

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}\theta} \tag{6.3.744}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.3.2.14 Intégrales impropres

Les intégrales impropres sont des intégrales définies où l'une ou les deux limites sont à l'infini, ou où l'intégrande a une asymptote verticale dans l'intervalle d'intégration. Aussi fou que cela puisse paraître, nous pouvons en fait calculer certaines intégrales impropres en utilisant des méthodes astucieuses qui impliquent des limites.

Par abus de notation, les intégrales impropres sont souvent écrites symboliquement tout comme les intégrales définies standard, peut-être avec l'infini parmi les limites d'intégration. Lorsque l'intégrale définie existe (au sens de l'intégrale de Riemann ou de l'intégrale de Lebesgue plus avancée), cette ambiguïté est résolue car l'intégrale propre et l'intégrale impropre coïncideront en valeur et c'est ce qui se produira le plus à travers toutes les applications d'intégrales en physique, chimie et ingénierie à travers ce livre !

Pour l'intégrale de Riemann (ou l'intégrale de Darboux, qui lui est équivalente comme nous l'avons vu plus haut), une mauvaise intégration est nécessaire à la fois pour les intervalles non bornés (puisqu'on ne peut pas diviser l'intervalle en un nombre fini de sous-intervalles de longueur finie) et pour les fonctions non bornées d'intégrale finie (puisque, à supposer qu'elle soit illimitée au-dessus, alors l'intégrale supérieure sera infinie, mais l'intégrale inférieure sera finie) !

Une "intégrale impropre" d'une fonction $f(x) > 0$ est donnée essentiellement par :

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\rightarrow\infty} \int_{a}^{N} f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.745}$$

Et nous disons que l'intégrale impropre converge si cette limite existe et diverge sinon.

Plus généralement, les intégrales impropres sont données par les paires de possibilités suivantes :

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.746}$$

ou :

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \qquad \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x \tag{6.3.747}$$

dans lequel nous prenons une limite dans l'un ou l'autre (ou parfois les deux) points de terminaison.

Remarque

Par abus de notation, les intégrales impropres sont souvent écrites symboliquement tout comme les intégrales définies standard, peut-être avec l'infini parmi les limites d'intégration. Lorsque l'intégrale définie existe (au sens de l'intégrale de Riemann ou de l'intégrale de Lebesgue plus avancée), cette ambiguïté est résolue car l'intégrale propre et l'intégrale impropre coïncideront en valeur.

Géométriquement, l'intégrale impropre représente alors la surface totale sous une courbe s'étendant à l'infini. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge, la surface totale sous la courbe est finie; sinon elle est infinie.

Mais comment une surface qui s'étend à l'infini peut-elle être finie ? De toute évidence, la zone entre a et N (c'est-à-dire $\int_a^N f(x)\mathrm{d}x$) est finie. Lorsque N tend vers l'infini, cette quantité grandira sans limite ou convergera vers une valeur finie.

Les domaines où les intégrales impropres sont les plus utilisées, sans même être perceptibles la plupart du temps par les étudiants ou les ingénieurs praticiens, sont respectivement :

- Statistiques (voir section correspondante) lorsque l'on normalise ou vérifie la condition de convergence à une probabilité cumulée de 1 d'une fonction de densité (la plupart du temps en statistique une ou les deux bornes sont égales à l'infini)
- Physique Quantique Ondulatoire (voir section correspondante) où l'on traite parfois de particules se propageant librement de l'infini à l'infini (cela arrive aussi parfois en Relativité Générale)
- Équations différentielles, en particulier lorsque nous les résolvons en utilisant la transformée de Fourier ou la transformée de Laplace (nous avons de nombreux exemples utilisant ces transformées à travers le livre) pour une application pratique en physique et en ingénierie financière de haut niveau.

En cours de traduction anglais

- En astrophysique ou en électrostatique lorsque nous traitons de toute source ponctuelle de champ de potentiel de type $1/r^2$ pour laquelle nous voulons calculer le travail nécessaire pour amener un objet de l'infini à cette source (calcul de type $\int_{+\infty}^{r} f(r)\mathrm{d}r$).

✍**Exemples :**

E1. Nous voulons calculer l'intégrale très importante (pour introduire les transformées de Laplace) :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t \quad (6.3.748)$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

En suivant la définition ci-dessus, nous devons d'abord calculer une intégrale définie et prendre une limite. Donc de la définition :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N} e^{-at}\mathrm{d}t \quad (6.3.749)$$

Nous calculons d'abord l'intégrale définie. Nous commençons par le cas $a = 0$:

$$I_{a=0} = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N} \mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} t\Big|_0^N = \lim_{N\to+\infty} N = +\infty \quad (6.3.750)$$

donc pour $a = 0$ l'intégrale impropre I n'existe pas. Quand $a \neq 0$ nous avons :

$$I_{a\neq 0} = \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{a}\left(e^{-aN} - 1\right) \quad (6.3.751)$$

Dans le cas $a < 0$, c'est-à-dire $a = -|a|$, nous avons :

$$I_{a<0} = \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{a}\left(e^{-aN} - 1\right) = -\infty \quad (6.3.752)$$

donc pour $a < 0$ l'intégrale impropre I n'existe pas. Dans le cas $a > 0$ nous avons :

$$I_{a>0} = \lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{a}\left(e^{-aN} - 1\right) = -\frac{1}{a}(0-1) = \frac{1}{a} \quad (6.3.753)$$

E2. Nous voulons calculer :

$$I=\int\limits_{-2}^{3}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x \tag{6.3.754}$$

L'intégrande n'est pas continue à $x=0$ et nous devrons donc séparer l'intégrale en ce point :

$$I=\int\limits_{-2}^{3}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{3}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x \tag{6.3.755}$$

Maintenant, nous devons regarder chacune de ces intégrales et voir si elles sont convergentes :

$$\int\limits_{-2}^{0}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0^-}\int\limits_{-2}^{t}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{t}=\lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{8}\right)=-\infty \tag{6.3.756}$$

À ce stade, nous avons terminé. L'une des intégrales est divergente, ce qui signifie que l'intégrale qu'on nous a demandé de regarder est divergente. Nous n'avons même pas besoin de nous soucier de la deuxième intégrale pour le coup !

En passant, notons que la surface sous la courbe de cet intervalle infini n'était pas infini comme le lecteur aurait pu (peut-être) le soupçonner. En fait, c'était un nombre étonnamment petit. Bien sûr, ce ne sera pas toujours le cas, mais il est suffisamment important de souligner que toutes les surfaces sur un intervalle infini ne produiront pas toutes des surfaces infinies.

Tirons maintenant quelques définitions de ce qui a été vu précédemment. Nous nommerons ces intégrales "intégrales convergentes" si la limite associée existe et est un nombre fini (c'est-à-dire qu'il n'est égal pas plus ou moins l'infini) et "intégrales divergentes" si la limite associée n'existe pas ou est égal à plus ou moins l'infini.

Notons qu'à l'intégrale suivante :

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{6.3.757}$$

nous ne pouvons attribuer une valeur de la manière précédente, car les intégrales au-dessus et au-dessous de zéro ne convergent pas indépendamment. Cependant il existe une autre possibilité que nous verrons dans la section d'Analyse Fonctionnelle lors de notre étude de la transformée de Hilbert (voir page 2355).

6.3.2.15 Intégrales elliptiques

Les "intégrales elliptiques" apparaissent à l'origine en relation avec le problème de calculer la longueur de l'arc d'une ellipse. Elles auraient d'abord été étudiés par Giulio Fagnano et Leonhard Euler. Les mathématiques modernes définissent une "intégrale elliptique" comme toute fonction f qui peut être exprimée sous la forme :

$$f(x)=\int_c^x R\left(t,\sqrt{P(t)}\right)\mathrm{d}t \tag{6.3.758}$$

où R est une fonction rationnelle de ses deux arguments, P est un polynôme de degré 2 à 4 sans racines répétées, et c est une constante.

En général, les intégrales de cette forme ne peuvent pas être exprimées en termes de fonctions élémentaires. Les exceptions à cette règle générale sont lorsque P a des racines répétées, ou lorsque $R(x,y)$ ne contient aucune puissance impaire de t. Cependant, avec la formule de réduction appropriée, chaque intégrale elliptique peut être amenée sous une forme qui implique des intégrales sur des fonctions rationnelles et les trois formes canoniques de Legendre (c'est-à-dire les intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce).

Informons le lecteur que nous rencontrerons dans ce livre, les intégrales elliptiques suivantes :

- Dans la section de Géométrie non-euclidenne à la page 2658 (intégrale elliptique complète de deuxième espèce) :

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2(\tau)}\mathrm{d}x \tag{6.3.759}$$

- Dans la section des Formes Géométriques à la page 2888 (intégrale elliptique du second ordre) :

$$J(a,b)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta \tag{6.3.760}$$

- Dans la section de Mécanique Classique pour l'étude du pendule page **??** (intégrale elliptique de première espèce) :

$$T=4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-p^2\sin^2(\theta)}}=4\sqrt{\frac{L}{g}}F\left(\frac{\pi}{2},p^2\right) \tag{6.3.761}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.3.2.15.1 Intégrales elliptiques incomplètes

Il est fréquent de considérer d'abord trois types d'intégrales que nous appelons "intégrales elliptiques incomplètes[6]".

Définitions (#6.3.200) :

D1. "L'intégrale elliptique incomplète de première espèce" dépend de deux paramètres, qui sont l'amplitude ϕ et l'angle α :

$$F(\phi,\alpha)=\int\limits_0^{\phi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)\sin^2(\theta)}} \quad (6.3.762)$$

Nous pouvons faire les simples changements de variables suivants :

$$\begin{gathered}t=\sin(\theta)\\ \mathrm{d}t=\cos(\theta)\mathrm{d}\theta=\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}\theta\end{gathered} \quad (6.3.763)$$

Dès lors :

$$F(\phi,\alpha)=\int\limits_0^{\sin(\phi)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-\sin^2(\alpha)t^2)(1-t^2)}} \quad (6.3.764)$$

Nous utilisons alors aussi parfois à la place le paramètre $k=\sin(\alpha)$, $(\leq m\leq 1)$, en écrivant :

$$F(\phi,k)=\int\limits_0^{\phi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}}=\int\limits_0^{\sin(\phi)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}} \quad (6.3.765)$$

appelée la "forme de Jacobi" de l'intégrale elliptique.

✍**Exemple :**

En utilisant (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\cos(x)=\cos(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}x)=\cos^2(\tfrac{1}{2}x)-\sin^2(\tfrac{1}{2}x)=1-2\ \sin^2(\tfrac{1}{2}x) \quad (6.3.766)$$

Alors :

$$\int\limits_0^{x}\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\sin^2(\frac{1}{2}x)}}=2\int\limits_0^{x/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2\sin^2(\theta)}}=2F\left(\tfrac{1}{2}x,\sqrt{2}\right) \quad (6.3.767)$$

D2. "L'intégrale elliptique incomplète du second type" est définie par les mêmes paramètres :

$$E(\phi,\alpha)=\int\limits_0^{\phi}\sqrt{1-\sin^2(\alpha)\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta \quad (6.3.768)$$

[6] Le terme "intégrale incomplète" semble être une manière démodée d'appeler une fonction primitive...

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons aussi faire le simple changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} t &= \sin(\theta) \\ \mathrm{d}t &= \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}\theta \end{aligned} \quad (6.3.769)$$

et $k = \sin(\alpha)$ pour obtenir comme précédemment :

$$E(\phi,\alpha) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_0^{x} \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \quad (6.3.770)$$

D3. "L'intégrale elliptique incomplète de troisième espèce" :

$$\Pi(\phi,\alpha,n) = \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1-n\sin^2(\theta))\sqrt{1-\sin^2(\alpha)\sin^2(\theta)}} \quad (6.3.771)$$

ou :

$$\Pi(\phi,k,n) = \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1-n\sin^2(\theta))\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \quad (6.3.772)$$

pour $n > 0$. Nous pouvons faire le même type de changement de variable, et alors :

$$\Pi(\phi,k,n) = \int_0^{\sin(\phi)} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-kt^2)}} \quad (6.3.773)$$

6.3.2.15.2 Intégrales elliptiques complètes

Lorsque l'amplitude est égale à $\pi/2$ (donc $t = 1$), nous écrivons les "intégrales elliptiques complètes" suivantes :

Définitions (#6.3.201) :

D1. "L'intégrale elliptique complète de première espèce" peut ainsi être définie à partir de l'intégrale elliptique incomplète de première espèce :

$$K(k) = F(\pi/2,k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (6.3.774)$$

D2. "L'intégrale elliptique complète de deuxième espèce" peut ainsi être définie à partir de l'intégrale elliptique incomplète de deuxième espèce également :

$$E(k) = E(\pi/2,k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{1} \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \quad (6.3.775)$$

En cours de traduction de l'anglais

D3. "L'intégrale elliptique complète de troisième espèce" peut ainsi être définie à partir de l'intégrale elliptique incomplète de troisième espèce également :

$$\Pi(k,n)=\Pi(\pi/2,k,n)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1-n\sin^2(\theta))\sqrt{1-\sin^2(\alpha)\sin^2(\theta)}}=\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-kt^2)}} \quad (6.3.776)$$

En cours de traduction de l' anglais

6.3.3 Équations Différentielles

Définition (#6.3.202) : En mathématiques, une "équation différentielle" (E.D.) est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n. "L'ordre" correspond au degré maximal de différentiation auquel une des fonctions inconnues y a été soumise.

Par rapport à notre objectif d'essayer de voir comment la mathématiques décrit la réalité sensible, les équations différentielles remportent un franc succès, mais sont également la source de bien des soucis. D'abord des difficultés de modélisation (voir par exemple le système d'équation différentielles de la Relativité Générale dans la section correspondante de ce livre...), des difficultés de résolution (il n'existe pas de méthode générale !), puis des difficultés proprement mathématiques (c'est pourquoi certains équations différentielles ont un prix d'un million de dollars en cas de résolution), enfin des difficultés liées au fait que certaines équations différentielles ne sont pas stables par nature et donnent des solutions chaotiques (voir la section de Dynamique des populations ou de Météorologie ur des exemples simples flagrants !).

Remarque

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un immense champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'appliquées.

En cours de traduction

> *Depuis Newton, l'humanité s'est rendue compte que les lois de la physique sont toujours exprimées dans le langage des équations différentielles.*
>
> Steven Strogatz

quote 6.3:1581.#45

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme :

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \tag{6.3.777}$$

Nous ne considérons dans ce livre que le cas où x et y sont à valeur dans $\mathbb{R}$. Une solution à une telle E.D. sur l'intervalle $I\in\mathbb{R}$ est une fonction $y\in\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ (une fonction $y:I\to\mathbb{R}$ qui est n fois continûment dérivable) telle que pour tout $x\in I$, nous ayons :

$$F\left(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right)=0 \tag{6.3.778}$$

Nom équation différentielle	Notation	Paramètres impliqués
Laplace	$\nabla^2 f=0$	$f(x,y,z)$
Diffusion (conduction)	$\frac{\partial f}{\partial t}=D\nabla^2 f$	Coefficient de diffusion D
Helmholtz	$\nabla^2 f+\alpha^2 f=0$	Constant α
Onde	$\nabla^2 f=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	Vitesse onde v
Legendre	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)y=0$	Entier l
Legendre Associée	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$	Entiers l,m
Bessel	$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)\,y=0$	Constante m
Hermite	$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\alpha y=0$	Constante α
Laguerre	$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha y=0$	Constante α
Laguerre Associée	$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1+k-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha y=0$	Entier k , constante α
Chebyshev	$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y=0$	Entier n
Euler (our Cauchy)	$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+ax\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=f(x)$	Constantes a,b
Bernoulli	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^a$	
Airy	$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=xy$	

TAB. 6.12 – **Certaines des équations différentielles les plus célèbres que nous allons construire et utiliser dans ce livre dans des cas pratiques**

En ... de l'anglais

Remarques

R1. Pour des raisons qui seront développées par la suite, nous disons aussi "intégrer l'E.D." au lieu de "trouver une solution à l'E.D.". La première expression se retrouve particulièrement dans la littérature anglo-saxonne.

R2. Étant donné que tout ce livre est bourré d'exemples d'équations différentielles avec conditions initiales (on parle alors de "problème de Cauchy") et de méthodes de résolutions dans les sections de Mécanique Classique, de Physique Atomique, de Cosmologie, d'Économétrie, de Suites et Séries, etc., nous ne ferons pas d'exemples ici et ne nous intéresserons donc qu'à l'aspect théorique minimal.

6.3.3.1 Équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du 1er ordre est donc une E.D. qui ne fait intervenir que la première dérivée y'.

Définition (#6.3.203) : Une équation différentielle du 1er ordre est dite "E.D. d'ordre 1 à variables séparées" si elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(y)y' = g(x) \tag{6.3.779}$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement. En effet, nous écrivons :

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{6.3.780}$$

Puis symboliquement :

$$f(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int f(y)\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x + c^{te} \tag{6.3.781}$$

Remarque

Nous écrivons ici explicitement la constante d'intégration arbitraire $c^{te} \in \mathbb{R}$ (qui est implicitement présente dans les intégrales indéfinies) pour ne pas l'oublier !

Il s'agit donc d'abord de trouver des primitives F et G de f et de g, et ensuite d'exprimer y en terme de x (et de c^{te}) :

$$F(y) = G(x) + c^{te} \Leftrightarrow y = F^{-1}\left(G(x) + c^{te}\right) \tag{6.3.782}$$

La constante d'intégration est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donné, nous ayons une valeur donnée de $y(x) = y(x_0) = y_0$. Nous parlons alors de "problème aux valeurs initiales" ou plus simplement de "conditions initiales" également abrégé parfois : CI. Ainsi, en d'autres termes, les conditions initiales sont des valeurs de la solution et/ou de ses dérivées à des points spécifiques. Comme nous le verrons par la suite, les solutions aux équations différentielles ... assez simples ... sont uniques et, par conséquent, une seule solution répondra aux conditions données. Le nombre de conditions initiales requises pour une équation différentielle donnée dépendra de l'ordre de l'équation différentielle, comme nous le verrons.

En cours de traduction de l'anglais

6.3.3.2 Équations différentielles linéaires

Définition (#6.3.204) : Une équation différentielle d'ordre n est dite "équation différentielle linéaire E.D.L." linéaire" si et seulement si elle est de la forme :

$$L(y) = f(x) \tag{6.3.783}$$

avec :

$$L(y) = a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} \tag{6.3.784}$$

Voyons maintenant une propriété qui peut sembler négligeable au premier coup d'oeil mais qui va prendre de l'importance plus loin !

Nous allons montrer que L est une application linéaire :

$$L(y+z)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)(y+z)^{(i)}=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)y^{(i)}+\sum_{i=0}^{n}a_i(x)z^{(i)}=L(y)+L(z) \quad (6.3.785)$$

et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$L(\lambda y)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)(\lambda y)^{(i)}=\lambda\sum_{i=0}^{n}a_i(x)y^{(i)}=\lambda L(y) \quad (6.3.786)$$

Nous disons alors que l'E.D. linéaire représente un modèle linéaire si les multiples de cette fonction (ou toute combinaison linéaire) sont aussi solution. Ainsi, en physique, pour un système linéaire, l'amplification de la cause implique une amplification de l'effet (les systèmes sont souvent linéaires dans le cas scolaires mais dans la réalité ils sont plutôt l'exception !).

Par exemple, l'équation différentielle ordinaire d'ordre 2 du pendule simple démontrée dans le chapitre de Mécanique Classique n'est pas linéaire car elle contient un terme en sinus qui n'est pas séparable.

Définition (#6.3.205) : L'équation différentielle (c'est la plus courante en physique) :

$$L(y)=0 \quad (6.3.787)$$

est appelée "équation homogène" (E.H.) ou "équation sans second membre" (ESSM) associée à :

$$L(y)=f(x) \quad (6.3.788)$$

Théorème 6.15. Nous allons maintenant démontrer une propriété importante des E.H. : l'ensemble $\{S_0\}$ des solutions de E.H. est le noyau de l'application linéaire L (ce qui rappelons-le signifie : $L(S_0)=0$) et l'ensemble $\{S\}$ des solutions à $L(y)=f(x)$ est donné par :

$$S=y_p+S_0=\{y_p+y_h|y_h\in\{S_0\}\}\text{ avec } L(y_p)=f(x) \quad (6.3.789)$$

c'est-à-dire que les solutions de la forme :

$$y=y_p+y_h \quad (6.3.790)$$

où y_p est une "solution particulière" de $L(y)=f(x)$ et y_h la "solution homogène", parcourent toutes les solutions de l'E.D.

Démonstration 6.15.1. La première affirmation sera supposée évidente.

En ce qui concerne la 2ème partie, toute fonction de la forme y_p+y_h est solution de $L(y)=f(x)$.

En effet c'est trivial et cela découle de la définition du concept de noyau (voir section Théorie des Ensembles page 402) :

$$L(y_p+y_h)=L(y_p)+L(y_h)=f(x)+0=f(x) \quad (6.3.791)$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Ce qu'il est important aussi de comprendre avec les E.D. linéaires avec second membre, c'est que si nous trouvons des solutions à $L(y)$ avec un second membre donné et des solutions à la même E.D. avec un autre second membre (différent !), alors la somme de toutes ces solutions, sera solution de l'E.D. avec la somme des seconds membres ! ! !

6.3.3.3 Méthodes de résolution d'équations différentielles

Il existe de nombreuses manières de résoudre les équations différentielles linéaires ou non linéaires de manière exacte ou approchée. Citons les quelques méthodes que nous analyserons plus loin par l'exemple (mais qui se trouvent déjà de très très nombreuses fois dans les chapitres de Mécanique, Cosmologie, Sciences Sociales et de Physique Quantique) :

- La "méthode du polynôme caractéristique des E.D." (voir plus bas) utilisée un peu dans tous les sections des chapitres de Mécanique/Physique Quantique/Cosmologie/Chimie et de Sciences Sociales de ce livre.
- La "méthode du facteur intégrant" (voir plus bas) pour la culture générale mais utilisée à ce jour sur aucun cas pratique dans ce livre.
- La "méthode de variation de la constante" (voir plus bas) et utilisée à ce jour uniquement dans la section de Génie Industriel de ce livre.
- La "méthode des perturbations des E.D." (voir plus bas) utile pour la physique quantique ondulatoire et le physique quantique des champs.

Signalons également d'autres méthodes très utilisées (grands classiques scolaires) mais qui sont princpalement traitées au cas par cas dans les différents chapitres de ce livre car les approches de résolution sont trop nombreuses et particulières :

- La "méthode de séparation des variables E.D." dont nous verrons un cas très particulier et simple plus bas mais pour laquelle il vaut mieux se référer aux section mentionnées (équation de la chaleur dans la section de Thermodynamique, équation des vagues dans la section de Génie Marin & Météo, équation d'évolution de Schrödinger dans la section de Physique Quantique Ondulatoire, vibration d'un tambour dans la section de Mécanique Ondulatoire) pour des exemples concrets.
- La "méthode matricielle de résolution des E.D." et "solutions triviales des E.D." (modèle de Lotka-Volterra dans la section de Dynamique des Populations, résonance de spin électronique ou nucléaire dans la section de Physique Quantique Relativiste, modèle de Lorenz dans la section de Génie Marin & Météo).
- La "méthode spectrale" utilisant le théorème spectral démontré dans la section d'Algèbre Linéaire page 1976 (voir la section de Génie Industriel dans le calcul de fiabilité de système par chaînes de Markov pour un exemple concret).

En cours de traduction de l'anglais

- La "méthode de la transformée de Fourier des E.D." ou la "méthode de la transformée de Laplace des E.D." (voir l'équation de la chaleur dans la section d'Analyse Fonctionnelle, la résolution de l'équation de Black & Scholes dans la section d'Économie ou l'équation de la poutre sous charge ponctuelle dans la section de Génie Civil pour des exemple concrets).

- Les "méthodes numériques des E.D." pour résoudre les équations différentielles avec l'ordinateur quand elles n'ont pas de solutions analytique connues (voir l'équation de la chaleur dans la section de Méthodes Numériques).

- La "méthode de Frobenius" nommé d'après Ferdinand Georg Frobenius et aussi les "solutions en séries de puissance", qui sont un moyen de trouver une solution en série infinie pour une équation différentielle ordinaire du second ordre d'une forme spéciale. Nous utiliserons cette technique dans la section de Suites et Séries pour notre étude de la série de Bessel et introduirons également la série de Bessel en résolvant dans la section de Génie Mécanique le problème de la colonne auto-flambée avec les solutions en série de puissance.

Remarque

Les premières équations différentielles auraient été résolues vers la fin du 17ème siècle et le début du 18ème. Au milieu du 18ème siècle, les gens ont réalisé que les premières méthodes que nous avons énumérées ci-dessus étaient dans une impasse. L'une des raisons était le manque de fonctions pour écrire les solutions des équations différentielles. Les fonctions élémentaires que nous utilisons en calcul algébrique telles que les polynômes, le quotient de polynômes, les fonctions trigonométriques, les exponentielles et les logarithmes, n'étaient tout simplement pas suffisantes. Les gens ont même commencé à considérer les équations différentielles comme des sources pour trouver de nouvelles fonctions. Il ne fallut que peu de temps avant que les mathématiciens commencent à utiliser des développements de séries de puissances pour trouver des solutions d'équations différentielles. Les séries de puissances convergentes définissent des fonctions beaucoup plus générales que les fonctions élémentaires du calcul algébrique élémentaire.

6.3.3.3.1 Méthode du polynôme caractéristique

La résolution des équations différentielles simples (à coefficients constants et sans second membre la plupart du temps...) utilise une technique faisant appel à un polynôme caractéristique de l'équation différentielle dont nous verrons les détails dans les développements à suivre sur quelques cas particuliers courants en physique.

C'est une méthode relativement simple à mettre en place lorsque nous cherchons les solutions homogènes de l'équation sans second membre (ESSM). Dans le cas contraire, celui de la présence d'un second membre, nous additionnons les solutions de l'équation homogènes aux solutions particulières.

6.3.3.3.1.1 Résolution de l'E.H. de l'E.D.L. à coefficients constants d'ordre 1

Considérons l'E.D.L. à coefficients constants suivante :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x) \tag{6.3.792}$$

qui est une version simplifiée de l'E.D.L à coefficients constants générale suivante :

$$a'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+b'y=f(x) \tag{6.3.793}$$

où :

$$a=\frac{b'}{a'} \tag{6.3.794}$$

Nous écrivons son équation homogène (ESSM) associée :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=0 \tag{6.3.795}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-a\mathrm{d}x \tag{6.3.796}$$

d'où :

$$\ln(y)=-ax+c^{te}\Rightarrow y_h=e^{-ax+c^{te}}=e^{c^{te}}a^{-ax}=Ce^{-ax} \tag{6.3.797}$$

Il y a derrière cette solution homogène une infinité de solutions : à chaque valeur donnée à C correspond une solution.

Il faut encore à cette solution homogène ajouter la solution particulière y_p et nous disposons pour cela d'une collection de recettes, qui dépendent du type de la fonction $f(x)$ du second membre de l'équation. Nous les verrons au cas par cas dans les différents chapitres de Physique.

En cours de traduction de l' anglais

6.3.3.3.1.2 Résolution de l'E.H. de l'E.D.L. d'ordre 1 avec coefficients non constants

La solution générale des équations différentielles linéaires homogènes (ESSM) d'ordre 1 à coefficients non constants :

$$a(x)y'+b(x)y=0 \tag{6.3.798}$$

peut toujours se réduire à la forme suivante :

$$y'+g(x)y=0 \tag{6.3.799}$$

où :

$$g(x)=\frac{b(x)}{a(x)} \tag{6.3.800}$$

Bon évidemment il y a la solution $y=0$... mais cherchons à faire mieux. Nous avons donc :

$$\frac{y'}{y}=-g(x) \tag{6.3.801}$$

Il vient donc :

$$\ln(y)=-G(x)+c^{te} \tag{6.3.802}$$

où $G(x)$ est une primitive de $g(x)$. Dès lors :

$$y=e^{c^{te}}e^{-G(x)}=Ae^{-G(x)} \tag{6.3.803}$$

Il est aussi fréquent de retrouver ces développements sous une autre écriture un tout petit peu plus explicite.

Nous repartons donc de l'équation différentielle sans seconde membre à coefficients non constante :

$$a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+b(x)y=0 \tag{6.3.804}$$

après réarrangement :

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x \tag{6.3.805}$$

Et donc :

$$\ln(y_0)+c^{te}=-\int\frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x \tag{6.3.806}$$

Soit :

$$y_0=c^{te}e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x} \tag{6.3.807}$$

Ce résultat nous sera très utile pour calculer la transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne (voir section Suites et Séries page 1744), transformée de Fourier qui est indispensable pour résoudre de manière assez générale l'équation de la Chaleur (voir section Thermodynamique page ??), résolution qui nous permettra par la suite de démontrer l'équation de Black & Scholes (voir section d'Écnomie page ??).

En cours de traduction de l' anglais

6.3.3.3.1.3 Résolution de l'E.H. de E.D.L. du second ordre à coefficients constants

Considérons l'E.D.L. à coefficients constants suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=f(x) \tag{6.3.808}$$

qui est une version simplifiée de l'E.D.L à coefficients constants générale suivante :

$$a'\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c'y=f(x) \tag{6.3.809}$$

où :

$$a=\frac{b'}{a'} \qquad b=\frac{c'}{a'} \tag{6.3.810}$$

Nous écrivons son équation homogène (ESSM) associée :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=0 \tag{6.3.811}$$

dans laquelle la fonction du second membre est nulle. Nous pouvons assez rapidement entrevoir une solution du type (en s'inspirant de la forme des solutions des E.D. du 1er ordre) :

$$y=\lambda e^{Kx+\tau} \tag{6.3.812}$$

où τ est une constante. Ce qui nous donne alors :

$$\lambda K^2e^{Kx+\tau}+a\lambda Ke^{Kx+\tau}+b\lambda e^{Kx+\tau}=0 \tag{6.3.813}$$

Ce que nous pouvons simplifier en :

$$K^2+aK+b=0 \tag{6.3.814}$$

Si notre hypothèse de départ est bonne, nous n'avons qu'à résoudre en K cette "équation caractéristique" (ECAR) ou "polynôme caractéristique" de l'équation homogène pour trouver la solution homogène :

$$K_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{6.3.815}$$

dont les solutions dépendent du signe du discriminant du polynôme caractéristique :

$$\Delta=a^2-4b \tag{6.3.816}$$

En cours de traduction de l' anglais

- Si le discriminant est strictement positif, soit $\Delta>0$:

  Alors nous savons que le polynôme caractéristique possède deux racines distinctes et nous avons alors :

  $$y_h=Ae^{K_1(x+\tau)}+Be^{K_2(x+\delta)} \tag{6.3.817}$$

  où $K_1\tau=c^{te}$ et $K_2\delta=c^{te'}$. Nous disons alors que "la solution est retardée" ou "la solution est avancée" selon les valeurs de ces constantes. Mais l'essentiel est de remarquer que si $y_h(x)$ est la solution, alors $y_h(x\pm\Delta x)$ est toujours solution !

  Nous parlons alors de "solution générale de l'équation homogène". Il y a derrière ce résultat une infinité de solutions : à chaque valeur donnée aux constantes A, B correspond une solution.

  Les physiciens écrivent aussi parfois cela sous une forme particulière en posant d'abord :

  $$\alpha=\frac{K_1+K_2}{2} \qquad \beta=\frac{K_1-K_2}{2} \tag{6.3.818}$$

avec donc :

$$\alpha+\beta=K_1 \qquad \alpha-\beta=K_2 \tag{6.3.819}$$

Et en utilisant les fonctions de trigonométrie hyperbolique (voir section Trigonométrie page 2515) :

$$\begin{aligned}\cosh(\beta x)&=\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{2}\\ \sinh(\beta x)&=\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{2}\end{aligned} \tag{6.3.820}$$

d'où finalement la possibilité d'écrire la solution homogène sous la forme (lorsque nous omettons l'avance ou le retard $\delta=\tau=0$) :

$$y_h=e^{\alpha x}\left(C_1\cosh(\beta t)+C_2\sinh(\beta t)\right) \tag{6.3.821}$$

Par ailleurs, montrons que les solutions de l'ESSM forment un espace vectoriel de dimension 2 (correspond donc à l'ordre de notre E.D.) !

En effet :

- La fonction zéro : $y=0$ est solution de l'ESSM (ça c'est inutile de le démontrer... évident !)
- La somme ou soustraction des solutions reste solution (ça nous l'avons déjà démontré plus haut)
- Les éléments de la base de l'espace vectoriel (les solutions de l'ESSM) sont linéairement indépendants (ça c'est intéressant car nous en aurons besoin !)

Posons :

$$y_h=\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x) \tag{6.3.822}$$

Alors :

$$\begin{aligned}y_h'&=\lambda_1 f_1'+\lambda_2 f_2'\\ y_h''&=\lambda_1 f_1''+\lambda_2 f_2''\end{aligned} \tag{6.3.823}$$

Ces relations injectées dans l'ESSM sous forme généralisée :

$$a'\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c'y=0 \tag{6.3.824}$$

donne alors :

$$\begin{aligned}a'y_h''+b'y_h'+c'y_h&=a'\left[\lambda_1 f_1''+\lambda_2 f_2''\right]+b'\left[\lambda_1 f_1'+\lambda_2 f_2'\right]+c'\left[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\right]\\ &=\lambda_1\left(a'f_1''+b'f_1'+c'f_1\right)+\lambda_2\left(a'f_2''+b'f_2'+c'f_2\right)=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0=0\end{aligned} \tag{6.3.825}$$

Donc nous avons bien une structure d'espace vectoriel.

Rappelons que inversement deux fonctions sont linéairement dépendantes si :

$$\forall t \quad f_1(x)=\lambda f_2(x) \tag{6.3.826}$$

En cours de traduction de l' anglais

- Si le discriminant est nul, soit $\Delta = 0$:

  L'équation caractéristique possède une racine double réelle K.

  En allant un peu vite nous dirons alors :

$$y_h = A^{K(x+\tau)} \tag{6.3.827}$$

et que c'est fini... mais au fait ce serait oublier que la base vectorielle doit être formée de deux solutions indépendantes !

Donc la deuxième solution est probablement... de la forme :

$$y_{h2} = z(x)A^{K(x+\tau)} \tag{6.3.828}$$

Alors :

$$\begin{aligned} y'_{h2} &= Ke^{K(x+\tau)}z(x) + z'(x)e^{K(x+\tau)} \\ y''_{h2} &= K^2e^{K(x+\tau)}z(x) + Ke^{K(x+\tau)}z'(x) + Kz'(x)e^{K(x+\tau)} + z''(x)e^{K(x+\tau)} \\ &= K^2e^{K(x+\tau)}z(x) + 2Ke^{K(x+\tau)}z'(x) + z''(x)e^{K(x+\tau)} \end{aligned} \tag{6.3.829}$$

Si nous injectons cela dans l'ESSM sous forme généralisée :

$$a'\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c'y = 0 \tag{6.3.830}$$

alors :

$$\begin{aligned} &a'\left(K^2e^{K(x+\tau)}z + 2Ke^{K(x+\tau)}z' + z''e^{K(x+\tau)}\right) + b'\left(Ke^{K(x+\tau)}z + z'e^{K(x+\tau)}\right) + c'ze^{K(x+\tau)} = 0 \\ &e^{K(x+\tau)}\left(a'K^2 + b'K + c'\right)z + e^{K(x+\tau)}(2a'K + b')z' + a'e^{K(x+\tau)}z'' = 0 \\ &\Rightarrow \left(a'K^2 + b'K + c'\right)z + (2a'K + b')z' + a'z'' = 0 \end{aligned} \tag{6.3.831}$$

Soit dans notre cas :

$$(K^2 + aK + b)z + (2K + a)z' + z'' = 0 \tag{6.3.832}$$

Or, les deux valeurs de K réelles sont justement solutions de :

$$K^2 + aK + b = 0 \tag{6.3.833}$$

La relation antéprécédente se réduit alors à :

$$(2K + a)z' + z'' = 0 \tag{6.3.834}$$

et comme nous sommes dans le cas d'étude où le discriminant est nul, il vient :

$$K_{1,2} = \frac{-a \pm \Delta}{2} = \frac{-a}{2} \tag{6.3.835}$$

Donc la relation antéprécédente se réduit au final à :

$$z'' = 0 \tag{6.3.836}$$

Nous en déduisons :

$$z'' = 0 \Rightarrow z' = c^{te} \Rightarrow z = Bx + c^{te} \tag{6.3.837}$$

Donc finalement :

$$y_{h2} = (Bx + c^{te})e^{K(x+c^{te})} \tag{6.3.838}$$

Ce qui donne pour la solution générale de l'ESSM :

$$y_h = (C_1x + C_2)e^{K(x+\tau)} \tag{6.3.839}$$

En cours de traduction de l' anglais

- Si le discriminant est strictement négatif, soit $\Delta < 0$:

  L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées (voir section Calcul Algébrique page 1364) :

$$K_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta \qquad K_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta \tag{6.3.840}$$

  Dès lors :

$$\begin{aligned} y_h &= Ae^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)(x+\tau)} + Be^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)(x+\delta)} \\ &= Ae^{\alpha(x+\tau)}e^{\mathrm{i}\beta(x+\tau)} + Be^{\alpha(x+\delta)}e^{-\mathrm{i}\beta(x+\delta)} = e^{\alpha(x+\tau)}Ae^{\mathrm{i}\beta(x+\tau)} + e^{\alpha(x+\delta)}B^{-\mathrm{i}\beta(x+\delta)} \\ &= Ae^{\alpha(x+\tau)}\left(\cos(\beta x+\tau\beta)+\mathrm{i}\sin(\beta x+\tau\beta)\right) + Be^{\alpha(x+\delta)}\left(\cos(\beta x+\delta\beta)+\mathrm{i}\sin(\beta x+\delta\beta)\right) \\ &= y_{h1} + y_{h2} \end{aligned} \tag{6.3.841}$$

  Or, si nous cherchons plutôt des solutions réelles, nous pouvons toujours poser A et B égaux tels que :

$$\begin{aligned} y'_h &= \frac{1}{2}(y_{h1}+y_{h2}) + \frac{1}{2\mathrm{i}}(y_{h1}-y_{h2}) = e^{\alpha(x+\tau)}\cos(\beta x+\tau\beta) + e^{\alpha(x+\delta)}\sin(\beta x+\delta\beta) \\ &= e^{\alpha x}e^{\alpha\tau}\cos(\beta x+\tau\beta) + e^{\alpha x} + e^{\alpha\delta}\sin(\beta x+\delta\beta) = e^{\alpha x}\left(A'\cos(\beta x+\tau\beta) + B'\sin(\beta x+\delta\beta)\right) \end{aligned} \tag{6.3.842}$$

  Et si nous posons que le retard et respectivement l'avance sont nuls ($\delta = \tau = 0$), alors nous retrouvons la relation disponible dans la plupart des livres :

$$y'_h = e^{\alpha x}\left(A'\cos(\beta x) + B'\sin(\beta x)\right) \tag{6.3.843}$$

  où A' et B' sont donc deux constantes réelles quelconques. Il existe une autre forme importante à cette dernière relation (souvent utilisée en électronique par exemple). Effectivement, Il est possible, pour tout A' et $B' \in \mathbb{R}$, de trouver C' et ϕ réels tels que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$A'\cos(\beta x) + B'\sin(\beta x) = C'\cos(\beta t - \phi) \tag{6.3.844}$$

  Nous posons :

$$C' = \sqrt{A'^2 + B'^2} \tag{6.3.845}$$

  alors :

$$A'\cos(\beta x) + B'\sin(\beta x) = C'\left[\frac{A'}{M}\cos(\beta x) + \frac{B'}{M}\sin(\beta x)\right] \tag{6.3.846}$$

  Il est alors possible de trouver ϕ tel que :

$$\frac{A'}{M} = \cos(\phi) \qquad \frac{B'}{M} = \sin(\phi) \tag{6.3.847}$$

  La quantité (proposition) de départ s'écrit ainsi :

$$A'\cos(\beta x) + B'\sin(\beta x) = C'\left[\cos(\phi)\cos(\beta x) + \sin(\phi)\sin(\beta x)\right] = C'\cos(\beta t - \phi) \tag{6.3.848}$$

  Finalement :

$$y_h = C'e^{\alpha x}\cos(\beta t - \phi) \tag{6.3.849}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons donc faire le résumé suivant :

Discriminant	Racines	Forme solution homogène
$\Delta > 0$	$K_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$	$y_h = Ae^{K_1(x+\tau)} + Be^{K_2(x+\delta)}$
$\Delta = 0$	$K_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$	$y_h = (C_1x + C_2)e^{K(x+\tau)}$
$\Delta < 0$	$K_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$	$y_h = e^{\alpha x}(A'\cos(\beta x) + B'\sin(\beta x))$

TAB. 6.13 – **Solutions types de l'E.H. de l' L'E.D.L. à coefficients constants**

6.3.3.3.2 Méthode du facteur intégrant (d'Euler)

La technique du facteur d'intégration est utile lorsqu'il s'agit de résoudre des équations différentielles de la forme :

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{6.3.850}$$

Nous n'avons pas à ce jour de cas pratique d'application de cette technique dans les autres chapitres du site. Il faut donc voir cela comme une présentation pour la culture générale.

L'idée de base étant de trouver une fonction $M(x)$, appelée "facteur d'intégration", par laquelle peut être multipliée notre équation différentielle pour ramener le terme de gauche de l'égalité à une simple dérivée. Par exemple, pour une équation différentielle linéaire comme celle ci-dessus, nous choisissons assez souvent le facteur d'intégration suivant (mais ce n'est de loin pas la seule possibilité et ce choix ne permet pas de tout résoudre !) :

$$M(x) = e^{F(x)} \tag{6.3.851}$$

Nous avons alors :

$$e^{F(x)}(y' + f(x)y) = g(x)e^{F(x)} \tag{6.3.852}$$

ou en distribuant :

$$y'e^{F(x)} + f(x)ye^{F(x)} = g(x)e^{F(x)} \tag{6.3.853}$$

Ce qui peut donc être vu comme :

$$y'e^{F(x)} + F'(x)ye^{F(x)} = g(x)e^{F(x)} \tag{6.3.854}$$

ou encore plus fort (et c'est là que réside toute l'astuce)... :

$$\left(ye^{F(x)}\right)' = g(x)e^{F(x)} \tag{6.3.855}$$

Nous pouvons alors prendre la primitive par rapport à x :

$$\int \left(ye^{F(x)}\right)' \mathrm{d}x = \int g(x)e^{F(x)}\mathrm{d}x \tag{6.3.856}$$

En cours de traduction de l'anglais

et trivialement (!) nous avons la primitive de gauche qui est immédiate :

$$ye^{F(x)}=\int g(x)e^{F(x)}\mathrm{d}x \tag{6.3.857}$$

Ce qui est parfois écrit :

$$y=\frac{1}{e^{F(x)}}\int g(x)e^{F(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{e^{\int f(x)\mathrm{d}x}}\int g(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{6.3.858}$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons l'équation différentielle :

$$y'+\frac{y}{x}-4=0 \quad (6.3.859)$$

Que nous mettrons sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=4 \quad (6.3.860)$$

Nous voyons alors que (en assumant que x soit strictement positif) :

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow F(x)=\ln(x) \quad (6.3.861)$$

Nous avons alors :

$$e^{\ln(x)}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}}x+\frac{1}{x}y\right)=e^{\ln(x)}4 \quad (6.3.862)$$

Hasard faisant (l'exemple est exprès simple), nous avons cette égalité qui se simplifie puisque :

$$e^{\ln(x)}=x \quad (6.3.863)$$

en :

$$x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}}x+\frac{1}{x}y\right)=4x \quad (6.3.864)$$

Ce qui peut se condenser en :

$$(xy)'=4x \quad (6.3.865)$$

En intégrant :

$$\int(xy)'\mathrm{d}x=\int 4x\mathrm{d}x \quad (6.3.866)$$

Il vient alors immédiatement :

$$xy=2x^2+c^{te} \quad (6.3.867)$$

Soit :

$$y=2x+\frac{x}{c^{te}} \quad (6.3.868)$$

6.3.3.3.3 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables (aussi connue sous le nom de "méthode de Fourier") est une technique très fréquente en physique dès que nous avons des équations différentielles du deuxième ordre. De nombreux exemples très complets et pratiquent se trouvent déjà de part et d'autres dans les différents chapitres déjà précédemment mentionnés. Nous allons ici juste en présenter un cas particulier par principe juste histoire de bien faire les choses mais au minimum vital !

Il s'agit de l'une des nombreuses méthodes de résolution d'équations aux dérivées ordinaires et partielles, dans lesquelles l'algèbre permet de réécrire une équation de sorte que chacune des deux variables se produise d'un côté différent de l'équation.

En mathématiques, une "équation aux dérivées partielles PDE" est une équation différentielle qui contient des fonctions multivariables inconnues et leurs dérivées partielles (un cas particulier sont les équations différentielles ordinaires, qui traitent des fonctions d'un seul variables et leurs dérivées). Les EDP sont utilisées pour formuler des problèmes impliquant des fonctions de plusieurs variables, et sont soit résolues à la main, soit utilisées pour créer un modèle informatique pertinent.

Les EDP peuvent être utilisés pour décrire une grande variété de phénomènes tels que le son, la chaleur, l'électrostatique, l'électrodynamique, la dynamique des fluides, l'élasticité ou la mécanique quantique. Ces phénomènes physiques apparemment distincts peuvent être formalisés de manière similaire en termes de EDP. Tout comme les équations différentielles ordinaires modélisent souvent des systèmes dynamiques unidimensionnels, les équations aux dérivées partielles modélisent souvent des systèmes multidimensionnels. Les EDP trouvent leur généralisation dans les équations aux dérivées partielles stochastiques.

En cours de traduction de l'anglais

Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction $U(x_1,\cdots,x_n)$ est une équation de la forme :

$$f\left(x_1,\ldots,x_n,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial U}{\partial x_n},\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_n},\ldots\right)=0 \quad (6.3.869)$$

Si f est une fonction linéaire de U et de ses dérivées, alors l'EDP est nommée "équation différentielle partielle linéaire". Des exemples courants d'EDP linéaires incluent l'équation de la chaleur, l'équation des ondes, l'équation de Laplace, l'équation de Helmholtz, l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Poisson (voir les chapitres correspondants Mécanique, Électrodynamique et Physique quantique pour l'étude de la plupart d'entre eux !).

La méthode de séparation des variables est une technique très courante utilisée en physique lorsque l'on a des équations différentielles du second ordre. De nombreux exemples utiles et très détaillés se trouvent déjà dans les différents chapitres déjà cités plus haut. Ici on va juste présenter un cas particulier juste pour faire les choses bien mais avec le minimum vital !

Considérons le cas fréquent en physique d'équation différentielle partielle du type :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial y}=0 \quad (6.3.870)$$

La solution de cette équation nécessite donc de trouver une fonction U qui dépende de x et de y tel que :

$$U = U(x,y) \tag{6.3.871}$$

En physique, l'idée consiste alors à poser que nous pouvons toujours trouver une solution dite séparable de la forme

$$U(x,y) = X(x)Y(y) \tag{6.3.872}$$

Ainsi, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} - \frac{\partial X(x)Y(y)}{\partial y} = 0 \tag{6.3.873}$$

Ce qui peut se simplifier en :

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = X(x)\frac{\partial Y(y)}{\partial y} \tag{6.3.874}$$

Ou :

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial Y(y)}{\partial y} \tag{6.3.875}$$

Après réarrangement est il d'usage en physique de noter cette dernière égalité sous la forme condensée :

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} \tag{6.3.876}$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si chacun des termes est une constante puisque X ne dépend que de x et Y que de y. Il vient alors :

$$\frac{X''}{X} = c^{te} \qquad \frac{Y''}{Y} = c^{te} \tag{6.3.877}$$

Et chaque équation différentielle par alors être résolue indépendamment de l'autre et une fois les solutions trouvées on les multiplie pour donc déterminer l'expression de U.

Remarque

Le plus bel exemple d'application est probablement la section de Chimie Quantique.

Comment sait-on que cette technique de séparation des variables est valide ? Lorsque les opérateurs différentiels dans diverses variables sont additifs dans l'équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de produits d'opérateurs différentiels dans différentes variables, la méthode de séparation fonctionne généralement. Nous procédons dans l'esprit de *essayons et voyons si ça marche*... Si notre tentative réussit, alors cette technique sera justifiée. Si cela ne réussit pas, nous le saurons assez tôt et nous essaierons alors une autre approche, comme les fonctions de Green, les transformées intégrales ou l'analyse numérique par force brute !

En cours de traduction de l'anglais

6.3.3.3.4 Méthode de variation de la constante

La variation des constantes est une méthode générale pour résoudre des équations différentielles ordinaires linéaires inhomogènes.

Pour les équations différentielles linéaires inhomogènes du premier ordre, il est généralement possible de trouver des solutions via des facteurs d'intégration ou des coefficients indéterminés avec beaucoup moins d'effort, bien que ces méthodes exploitent des heuristiques qui impliquent des suppositions et ne fonctionnent pas pour toutes les équations différentielles linéaires inhomogènes.

La variation des paramètres s'étend également aux équations différentielles partielles linéaires, en particulier aux problèmes inhomogènes pour les équations d'évolution linéaire comme l'équation de la chaleur, l'équation des ondes et l'équation de la plaque vibrante. Dans ce contexte, la méthode est plus souvent connue sous le nom de "principe de Duhamel", du nom de Jean-Marie Duhamel qui a appliqué la méthode pour résoudre l'équation de la chaleur inhomogène.

L'idée de la méthode de variation de la constante est la suivante : si nous avons une solution particulière affectée de constantes, nous savons qu'en fonction des conditions initiales celles-ci sont bien déterminées. L'idée est alors de généraliser en posant que ces constantes sont des fonctions. Dans certains cas évidemment les développements mathématiques montreront que les fonctions sont obligatoirement des constantes.

L'idée sous-jacente de cette méthode, c'est de se dire que les solutions de l'équation différentielle (linéaire) avec second membre vont ressembler aux solutions de l'équation homogène. Comme le terme de droite va perturber cette solution, nous faisons varier uniquement les constantes (qui n'en seront plus), mais nous restons sur la "base" des solutions homogènes, pour chercher des solutions proches. Après, nous vérifions que ce raisonnement à la physicienne donne bien toutes les solutions de l'équation.

Voyons avant de passer au cas général un exemple simple en considérant l'équation différentielle suivante :

$$y'(t)+by(t)=1 \tag{6.3.878}$$

pour laquelle la solution particulière de l'équation homogène (ESSM) est (si vous avez besoin de détails n'hésitez pas à demander !) :

$$y_0(t)=Ae^{-bt} \tag{6.3.879}$$

si vous avez besoin de détails n'hésitez pas à demander !

$$A=A(t) \tag{6.3.880}$$

et donc :

$$y_0'(t)=A'e^{-bt}-bA(t)e^{-bt} \tag{6.3.881}$$

Or de par l'équation différentielle avec second membre, nous avons :

$$y_0'(t)+by_0(t)=1 \Rightarrow y_0'(t)=1-by_0(t)=1-bA^{-bt} \tag{6.3.882}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc en utilisant les deux dernières relations il vient :

$$\left.\begin{aligned}y_0'(t) &= A'(t)e^{-bt} - bA(t)e^{-bt}\\ y_0'(t) &= 1 - bAe^{-bt}\end{aligned}\right\} \Rightarrow A'(t) = e^{bt} \quad (6.3.883)$$

et il s'ensuit que :

$$A(t) = \frac{1}{b}e^{bt} \quad (6.3.884)$$

où nous avons éliminé la constante d'intégration parce que nous voulons c'est une solution particulière ! La solution générale particulière (pg) est alors la somme de la solution particulière homogène et celle avec la variation de la constante :

$$y_{0,\mathbf{pg}}(t) = Ae^{-bt} + A'(t)e^{-bt} = A^{-bt} + \frac{1}{b}e^{bt}e^{-bt} = Ae^{-bt} + \frac{1}{b} \quad (6.3.885)$$

Ainsi, en généralisant l'exemple précédent, nous avons donc une équation différentielle de la forme :

$$y'(t) + by(t) = c \quad (6.3.886)$$

La solution particulière générale sera alors :

$$C_0y_0(t) := C_0(t)y_0(t) \quad (6.3.887)$$

Nous avons alors :

$$y_0'(t) = C_0'y_0(t) + C_0(t)y_0'(t) \quad (6.3.888)$$

d'où injecté dans l'équation différentielle d'origine :

$$\underbrace{C_0'y_0(t) + C_0(t)y_0'(t)}_{y'(t)} + b(t)\underbrace{C_0(t)y_0(t)}_{y(t)} = c(t) \quad (6.3.889)$$

Soit après factorisation des termes semblables :

$$C_0'y_0(t) + C_0(t)\left(y_0'(t) + b(t)C_0(t)y_0(t)\right) = c(t) \quad (6.3.890)$$

Nous avons donc la relation ci-dessus et la solution particulière à l'équation différentielle homogène (donc sans seconde membre) :

$$\left.\begin{aligned}&C_0'y_0(t) + C_0(t)\left(y_0'(t) + b(t)C_0(t)y_0(t)\right) = c(t)\\ &y_0'(t) = -b(t)C_0(t)y_0(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow C_0'y_0(t) = c(t) \quad (6.3.891)$$

Nous trouvons donc :

$$C_0' = \frac{c(t)}{y_0(t)} \quad (6.3.892)$$

et il suffit alors d'intégrer cette équation pour trouver $C_0(t)$. Ensuite, la solution générale particulière (pg) est alors la somme de la solution particulière homogène et de celle avec la variation de la constante.

En cours de traduction de l' anglais

6.3.3.4 Classification des équations aux dérivées partielles

Avant de commencer, le lecteur pourrait se demander à quoi peut servir le classement des équations différentielles, eh bien voici les deux principaux arguments de l'utilité d'un classement par ordre d'importance :

- De nombreux livres ont des auteurs qui parlent systématiquement d'une équation différentielle en la catégorisant, il est donc plus agréable de savoir de quoi ils parlent.
- Certains logiciels de modélisation par éléments finis (y compris MATLAB™) exigent que la catégorie d'équation différentielle soit choisie avant que quoi que ce soit d'autre puisse être fait comme calcul.

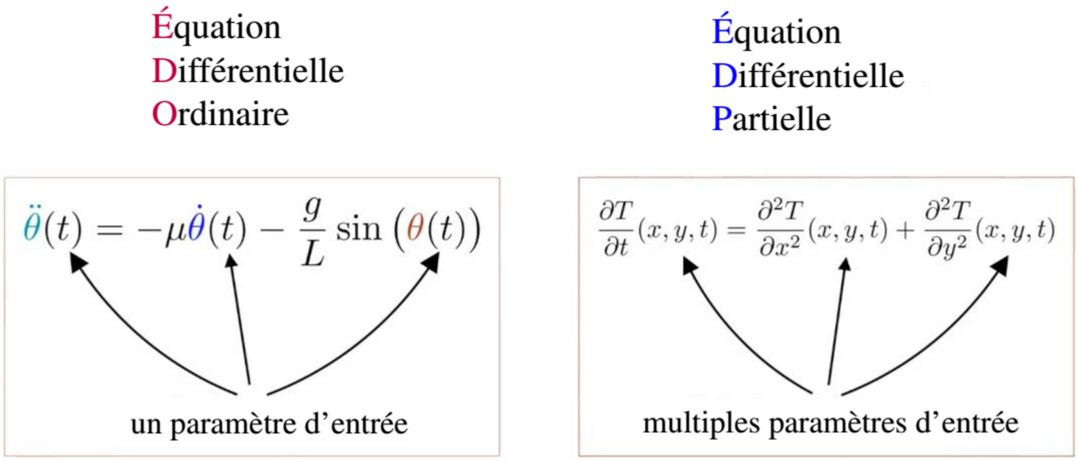
Ceci étant dit, formellement, nous nommons "équation aux dérivées partielles PDE" d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et d'inconnue :

$$\Phi(x)=\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_N):\Omega\mapsto\mathbb{R} \tag{6.3.893}$$

une équation du type général suivant :

$$\sum_{i,j}^{n}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)+\sum_{i}^{n}\left(b_i(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i}\right)+c(x)\Phi(x)=s(x) \tag{6.3.894}$$

où $s(x)$ est souvent nommé un "terme source" par analogie avec la situation principale en physique concernée.



Il est maintenant important de généraliser cette dernière équation sous forme vectorielle. Ainsi, nous introduisons les notations suivantes :

- $A=[a_{ij}]$ la $n\times n$ matrice symétrique des coefficients devant les termes d'ordre 2
- $B=(f_i(x))$ le vecteur de taille n des coefficients devant les termes d'ordre 1

En cours de traduction de l'anglais

- $[H\Phi(x)]$ la matrice Hessienne symétrique $n \times n$ (voir section Suites et Séries page 1695) de Φ :

$$H\Phi(x)_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (6.3.895)$$

- $\vec{\nabla}(\Phi(x))$ le vecteur de taille n de Φ :

$$\vec{\nabla}(\Phi(x)) = \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}\right) \qquad (6.3.896)$$

- La notation (appelée la "produit scalaire (matriciel) de Frobenius") :

$$A : B = \text{tr}\left(A^T B\right) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} b_{ij} \qquad (6.3.897)$$

aussi parfois noté comme le produit scalaire classique : $\langle A, B \rangle$.

Remarque

La "norme de Frobenius" (très utile pour dériver la décomposition généralisée en valeurs singulières utilisée massivement en Data Science) d'une matrice $\mathbb{R}^{m\ foisn}$ est définie par :

$$\|X\|_F = \left(\text{tr}\left(X^T X\right)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2\right)^{1/2} \qquad (6.3.898)$$

Plus explicitement, soit A une matrice $m \times n$ dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire $A_{mn}\mathbb{C}()$) et notons a_{ij} l'entrée de A à la ligne i et à la colonne j. Par conséquent, nous avons :

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m |a_{i1}|^2 & \sum_{i=1}^m \bar{a}_{i1} a_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^m \bar{a}_{i1} a_{in} \\ \sum_{i=1}^m \bar{a}_{i2} a_{i1} & \sum_{i=1}^m |a_{i2}|^2 & \ldots & \sum_{i=1}^m \bar{a}_{i2} a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \bar{a}_{n1} a_{i1} & \sum_{i=1}^m \bar{a}_{n1} a_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^m |a_{in}|^2 \end{bmatrix}$$

Alors évidemment :

$$\text{tr}\left(A^T A\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2}\right)^2 = \|A\|_F^2$$

Avec cela, la précédente relation :

$$\sum_{i,j}^{n} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \sum_{i}^{n} \left(b_i(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}\right) + c(x)\Phi(x) = s(x) \qquad (6.3.899)$$

peut être réécrite :

$$\boxed{A(x) : [H\Phi(x)] + B(x) \circ (\vec{\nabla}(\Phi(x))) + c(x)\Phi(x) = s(x)} \qquad (6.3.900)$$

Ce qui est souvent (abusivement) écrit de la manière très condensée suivante :

$$AH\Phi + B\vec{\nabla}\Phi + c\Phi = s \qquad (6.3.901)$$

✍**Exemple :**

Considérons l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=\sin(x,y) \tag{6.3.902}$$

D'abord, il est facile de déterminer (parce que cést une définition) que :

$$[H\Phi(x)]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x}(x,y) & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y}(x,y)\end{bmatrix} \qquad \vec{\nabla}(\Phi(x))=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix} \tag{6.3.903}$$

Il est aussi trivial que :

$$c(x,y)=0 \tag{6.3.904}$$

et que :

$$s(x,y)=\sin(x+y) \tag{6.3.905}$$

Il est aussi trivial que :

$$B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{6.3.906}$$

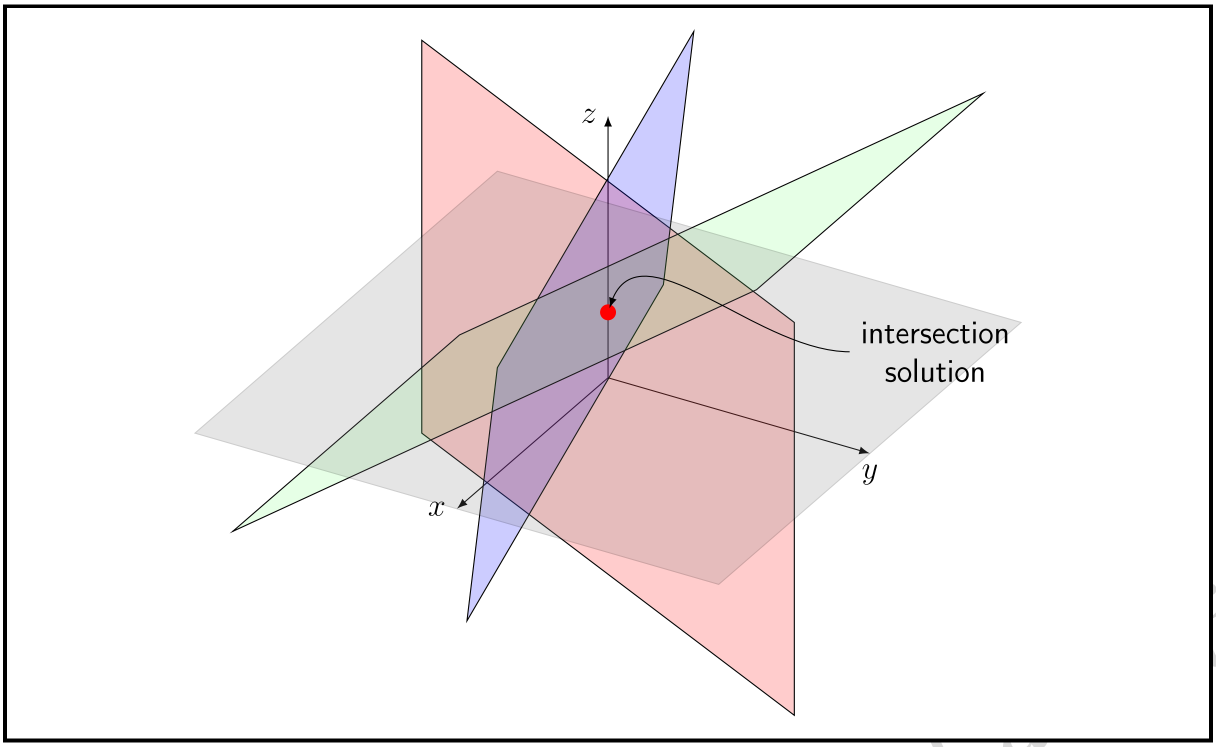
Finalement les difficultés mineures sont de trouver que :

$$a=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} \tag{6.3.907}$$

E2. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x- \ y \qquad =0\\ -x+2y- \ z=-1\\ \quad -3y+4z=4\end{cases} \tag{6.3.908}$$

Qui a une solution unique qui peut être représentée par le croisement de plans suivant (cette fois réalisé avec TikZ plutôt qu'avec Maple) :



Pour les équations différentielles partielles linéaires d'ordre 2, la matrice A est non-nulle et symétrique. Elle est alors diagonalisable avec des valeurs propres réelles (voir section Algèbre Linéaire page 1969) et leur étude fournit des éléments de classification des équations différentielles partielles linéaires d'ordre 2 sous la dénomination de EDP "elliptique", "hyperbolique" ou "parabolique" (voir section Géométrie Analytique page 2771).

Il est souvent habituel dans le domaine de de la physique de dire que les équations différentielles partielles elliptiques caractérisent un problème d'équilibre ou de stationnarité, que les équations différentielles partielles hyperboliques caractérisent un problème de propagation d'onde (l'équation d'Einstein des champs peut dans certains cas particuliers se réduire à ce cas de figure) et finalement que les équations différentielles partielles paraboliques caractérisent un problème de diffusion (voir les exemples plus bas).

Cette dernière terminologie provient du fait que quand un matrice A est constante, les courbes :

$$x^T A x = c^{te} \quad (6.3.909)$$

sont respectivement des ellipsoides, hyberboloides et paraboloides (voir section Géométrique Analytique page 2775).

En effet, nous avons prouvé dans la section de Géométrie Analytique que suivant le déterminant de A, nous avions :

- Si $\det(A) = ac - b^2 > 0$, la courbe Γ est soit vide, soit réduite à un point, soit une ellipse.
- Si $\det(A) = ac - b^2 < 0$, la courbe Γ est la réunion de deux droites sécantes, c'est-à-dire une hyperbole.
- Si $\det(A) = ac - b^2 = 0$, la courbe Γ est soit vide, soit une ligne, ou deux droites parallèles distinctes, ou une parabole.

En cours de traduction de l'a... is

Plus explicitement ce que nous avons vu ci-dessus peut être reformulé comme suit. Si nous avons l'équation différentielle partielle suivante :

$$a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+d\frac{\partial\Phi}{\partial x}+e\frac{\partial\Phi}{\partial y}+fu=0 \tag{6.3.910}$$

où a, b, c, d, e et f sont des constantes réelles, cette dernière est dite :

- Une "équation aux dérivées partielles elliptique" si $ac-b^2>0$ c'est-à-dire si les valeurs propres sont toutes positives ou toutes négatives (voir section Géométrie Analytique page 2775).
- Une "équation aux dérivées partielles hyperbolique" si $ac-b^2<0$ c'est-à-dire s'il n'y a qu'une seule valeur propre négative et que toutes les autres sont positives, ou qu'il n'y en a qu'une valeur propre positive et que toutes les autres sont négatives (voir section Géométrie Analytique page 2775).
- Une "équation aux dérivées partielles parabolique" si $ac-b^2=0$ c'est-à-dire si les valeurs propres sont toutes positives ou toutes négatives, sauf une qui vaut zéro (voir section Géométrie Analytique page 2775).

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

L'équation de Laplace :

$$\nabla^2\phi=0 \tag{6.3.911}$$

est une équation différentielle partielle elliptique.

L'équation d'ondes :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{6.3.912}$$

est une équation différentielle partielle hyperbolique.

L'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{6.3.913}$$

est une équation différentielle partielle parabolique.

6.3.3.5 Systèmes d'équation différentielles

Voyons maintenant des développements particuliers qui vont aussi bien être utiles lors de notre étude de la physique quantique (voir la section correspondante de ce livre) que dans la résolution de systèmes particuliers d'équations différentielles (et particulièrement une qui est connue en théorie du chaos !).

Indiquons d'abord au lecteur avant d'aller plus loin que le cas plus complexe non homogène (avec seconde membre) et avec coefficients inconnus est traité directement par l'exemple dans la section de Génie Industriel lors du traitement de la fiabilité d'un système réparable sous la forme d'une chaîne de Markov avec traitement par les déterminants et valeurs/vecteurs propres.

Pour commencer cette première approche, il va nous falloir introduire le concept d'exponentiation d'une matrice :

6.3.3.5.1 Méthode d'exponentation des matrices

L'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ noté $M_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel pour l'addition des matrices et la multiplication par un scalaire. Nous notons $\mathbb{1}_n$ la matrice identité voir section Algèbre Linéaire page ?? de dimension n.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Dans $M_2(\mathbb{C})$ la suite de matrices :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n} & 2 \\ 0 & \dfrac{n+1}{n} \end{pmatrix} \tag{6.3.914}$$

converge vers :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.3.915}$$

lorsque $n \to +\infty$. Si $x \in \mathbb{C}$, nous avons vu lors de notre étude des nombres complexes (voir section on Nombres page 249) que la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{6.3.916}$$

converge et sa limite est notée e^x. En fait ici il n'y a aucune difficulté à remplacer x par une matrice A puisque nous savons (nous l'avons montré lors de notre étude des nombres complexes) que tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme suivante (le corps des nombres complexes est donc isomorphe au corps des matrices réelles carrées de dimensions 2 ayant cette forme) :

$$x=a+ib=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}b=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix} \tag{6.3.917}$$

et qu'un nombre complexe au carré est équivalant à mettre sa forme matricielle au carré :

$$x^2=(a+ib)(a+ib)=a^2+aib+aib-b^2=(a^2-b^2)+2abi=\begin{bmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{bmatrix} \tag{6.3.918}$$

Effectivement :

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{bmatrix} \tag{6.3.919}$$

Nous définissons alors "l'exponentielle d'une matrice" $A\in M_n(\mathbb{C})$ comme la matrice limite de la suite :

$$e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!} \tag{6.3.920}$$

Si la matrice A est diagonale il est évident que son exponentielle est facile à calculer. En effet, si :

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}\Rightarrow A^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{bmatrix} \tag{6.3.921}$$

Par suite :

$$e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix} \tag{6.3.922}$$

En cours de traduction de l'anglais

Cette propriété des matrices diagonales nous sera également très utile dans la section de Relativité Générale lors de notre étude de la variation du déterminant de la métrique.

Or, il apparaît évident qu'une matrice non diagonale va être beaucoup plus compliquée à traiter ! Nous allons alors utiliser la technique de diagonalisation soit une réduction des endomorphismes[7] (voir section Algèbre Linéaire page 1907).

Alors, remarquons que si $S\in M_n(\mathbb{C})$ est inversible et si $A\in M_n(\mathbb{C})$ alors :

$$e^{SAS^{-1}}=Se^AS^{-1} \tag{6.3.923}$$

[7] En algèbre linéaire, une "réduction d'endomorphismes" vise à exprimer des matrices et des endomorphismes sous une forme plus simple, par exemple pour faciliter les calculs. Cela consiste essentiellement à trouver une décomposition de l'espace vectoriel en une somme directe de sous-espaces stables sur lesquels l'endomorphisme induit est plus simple. Mais géométriquement, cela correspond à trouver une base de l'espace dans laquelle l'endomorphisme s'exprime simplement comme par exemple le théorème spectral (voir section Algèbre Linéaire page 1976).

Ceci découle du fait que (penser au changement de base d'une application linéaire comme ce qui a été étudié dans la section d'Algèbre Linéaire page 1966... cela pourrait aider) :

$$\left(SAS^{-1}\right)^k = SA\underbrace{S^{-1}S}_{=1}A\underbrace{S^{-1}S}_{=1}AS^{-1}\ldots\underbrace{S^{-1}S}_{=1}AS^{-1} = SA^kS^{-1} \tag{6.3.924}$$

Donc :

$$e^{SAS^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{SA^kS^{-1}}{k!} = S\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\right)S^{-1} \tag{6.3.925}$$

Ce développement va nous permettre de ramener le calcul de l'exponentielle d'une matrice diagonalisable à la recherche de ses valeurs propres et de ses vecteurs propres.

✍**Exemple :**

Calculons e^A où :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.3.926}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 7$, et les vecteurs propres associés sont :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6.3.927}$$

Effectivement :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e } t \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6.3.928}$$

En posant :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.3.929}$$

Nous avons :

$$A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}S^{-1} = S\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}S^{-1} \tag{6.3.930}$$

avec :

$$S^{-1} = S\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \tag{6.3.931}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} e^A &= e^{S\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}S^{-1}} = Se^{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ 0 & e^7 \end{pmatrix}S^{-1} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-3}+3e^7 & 2e^{-3}-2e^7 \\ 2e^{-3}-3e^7 & 2e^{-3}+2e^7 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.3.932}$$

Maintenant, rappelons que dans le cas des nombres réels nous savons que si $x, y \in \mathbb{R}$ alors :

$$e^{x+y} = e^x e^y \tag{6.3.933}$$

Dans le cas des matrices nous pouvons montrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sont deux matrices qui commutent entre-elles c'est-à-dire telles que $AB = BA$, alors :

$$e^{A+B} = e^A e^B \tag{6.3.934}$$

La condition de commutativité tient au fait que l'addition dans l'exponentielle est quant à elle commutative. La démonstration est donc intuitive.

Un corollaire important de cette proposition est que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, e^A est inversible. En effet les matrices A et commutent $-A$, par conséquent :

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_n = \mathbb{1} \tag{6.3.935}$$

Nous rappelons qu'une matrice A à coefficients complexes est unitaire si :

$$AA^\dagger = I_n \tag{6.3.936}$$

Le théorème suivant nous servira par la suite :

Théorème 6.16. Prouvons que si A est une matrice hermitienne (dite aussi "autoadjointe") (voir section Algèbre Linéaire page 1926) alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{itA} est unitaire.

Démonstration 6.16.1.

$$\left(e^{\text{i}tA}\right)^\dagger = e^{(\text{i}tA)^\dagger} = e^{-\text{i}tA^\dagger} = e^{-\text{i}tA} \tag{6.3.937}$$

Donc :

$$\left(e^{\text{i}tA}\right)^\dagger \cdot e^{\text{i}tA} = e^{-\text{i}tA} e^{\text{i}tA} = e^{\text{i}t(A-A)} = I \tag{6.3.938}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Rappelons que cette condition pour une matrice autoadjointe est liée à la définition de groupe unitaire d'ordre n (voir section Algèbre Ensembliste page 1406).

Une des premières applications de l'exponentielle de matrices est la résolution des équations différentielles ordinaires. En effet, de l'équation différentielle linéaire ci-dessous avec comme condition initiale $y(0) = 0$ et où A est une matrice :

$$y'(t) + Ay(t) = 0 \tag{6.3.939}$$

la solution est donnée (comme vu précédemment) par :

$$y(t) = Ce^{-At} \tag{6.3.940}$$

Nous retrouvons fréquemment ce genre de systèmes d'équations différentielles en biologie (dynamique des populations), en astrophysique (étude des plasmas) ou en mécanique des fluides (théorie du chaos) ainsi qu'en mécanique classique (systèmes couplés), en astronomie (orbites couplées), en électrotechnique, etc.

✍**Exemple :**

Supposons que nous ayons le système d'équations différentielles homogène (sans termes constants) suivant :

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 4y \\ y' &= -6x + y \end{aligned} \tag{6.3.941}$$

La matrice associée est alors :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.3.942}$$

et son exponentielle (voir les développements faits plus haut) :

$$e^{-At} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-3t} + 3e^{7t} & 2e^{-3t} - 2e^{7t} \\ 2e^{-3t} - 3e^{7t} & 2e^{-3t} + 2e^{7t} \end{pmatrix} \tag{6.3.943}$$

La solution générale du système est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2e^{-3t} + 3e^{7t} \\ 2e^{-3t} - 3e^{7t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2e^{-3t} - 2e^{7t} \\ 2e^{-3t} + 2e^{7t} \end{pmatrix} \tag{6.3.944}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} x &= C_1(2e^{-3t} + 3e^{7t}) + C_2(2e^{-3t} - 2e^{7t}) = A'e^{-3t} + B'e^{7t} \\ y &= C_1(2e^{-3t} - 3e^{7t}) + C_2(2e^{-3t} + 2e^{7t}) = D'e^{-3t} + E'e^{7t} \end{aligned} \tag{6.3.945}$$

En calculant la dérivée des relations précédentes et en comparant à :

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 4y \\ y' &= -6x + y \end{aligned} \tag{6.3.946}$$

nous déterminons facilement les constantes pour obtenir :

$$\begin{aligned} E' - 6B' = 7E' \Rightarrow -6E' = 6B' \Rightarrow E' &= -B' \\ -6A' + F' = -3F' \Rightarrow 4F' = 6A' \Rightarrow F' &= \frac{3}{2}A' \end{aligned} \tag{6.3.947}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\begin{aligned} x &= A'e^{-3t} + B'e^{7t} \\ y &= \frac{3}{2}A'e^{-3t} - B'e^{7t} \end{aligned} \tag{6.3.948}$$

6.3.3.5.2 Espace des phases

Si nous nous donnons une équation différentielle générale d'ordre n de la forme :

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \tag{6.3.949}$$

et que nous avons une solution y, alors nous pouvons tracer un graphique de y contre x, et voir comment y évolue avec x.

Cependant, un problème est que pour une telle équation, la solution n'est pas seulement déterminée par la condition initiale $y(x_0)$, mais aussi $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ etc. Donc si nous avons juste un instantané de la valeur de y à un point particulier x_0, nous n'avons absolument aucune idée de son évolution dans le futur.

Alors, de combien d'informations avons-nous réellement besoin ? À tout point x_0, si on nous donne les premières $n-1$ dérivées, c'est-à-dire $y(x_0)$, $y'(x_0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)$, nous pouvons alors obtenir la $n$ième dérivée ainsi que toutes les dérivées supérieures de l'équation différentielle.

Ainsi nous sommes amenés à considérer le "vecteur solution" :

$$\vec{Y}(x)=\left(y(x),y'(x),\cdots,y^{n-1}(x)\right) \tag{6.3.950}$$

Nous disons qu'un tel vecteur se trouve dans "l'espace des phases", qui est un espace n-dimensionnel (évidemment cet outil est assez limité pour les humains car nous avons d'énormes difficultés à gérer les espaces ayant plus de trois dimensions...). Donc pour chaque x, nous obtenons donc un point $\vec{Y}(x)$ situé dans l'espace de n-dimensions. De plus, étant donné n'importe quel point dans l'espace des phases, si nous le considérons comme les conditions initiales de notre équation différentielle, nous obtenons une trajectoire unique dans l'espace des phases.

E... de traduction de l' anglais

Remarque

Honnêtement, en tant qu'auteurs de ce manuel, nous n'avons jamais vu le sujet traité et le suivant sur la "théorie de la stabilité" utilisé dans des cas d'application réels en ingénierie de nos jours. Peut-être que c'était utile avant l'existene des ordinateurs modernes ? Cependant le sujet débouche sur de beaux concepts alors pourquoi ne pas le présenter ici...

✍**Exemple :**

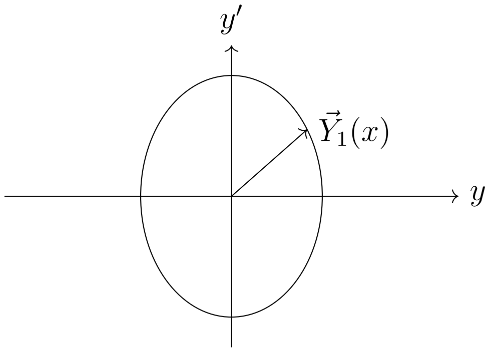
Considérons :

$$y''+4y=0$$

Supposons que nous ayons comme conditions initiales :

$$y_1(0)=1, y_1'(0)=0$$

Ensuite, nous pouvons résoudre l'équation pour obtenir $y_1(x)=\cos(2x)$. Ainsi, le vecteur solution initial est $\vec{Y}_1(0)=(1,0)$, et la trajectoire lorsque x varie est donnée par $\vec{Y}_1(x)=(\cos(2x),-2\sin(2x))$. Ainsi, lorsque x change, nous traçons une ellipse dans le sens des aiguilles d'une montre :



Une autre condition initiale possible est $y_2(0)=0, y_2'(0)=2$. Dans ce cas, nous obtenons la solution $y(x)=\sin(2x)$, avec un vecteur solution $\vec{Y}_2(x)=(\sin(2x), 2\cos(2x))$.

Notons qu'en tant que vecteurs, nos deux conditions initiales $(1,0)$ et $(0,2)$ sont indépendantes (nous verrons plus bas ce que cela signifie exactement). De plus, lorsque x change, les deux vecteurs solution $\vec{Y}_1(x), \vec{Y}_2(x)$ restent indépendants.

En général, pour une équation du 2ème ordre, l'espace des phases est un espace à deux dimensions, et nous pouvons prendre les deux fonctions complémentaires $\vec{Y}_1$ et $\vec{Y}_2$ comme vecteurs de base pour l'espace des phases à chaque valeur particulière de x. Bien sûr, nous avons besoin que les deux solutions soient linéairement indépendantes.

Définition (#206) : Étant donné une équation différentielle de solutions y_1, y_2, le "Wronskien" est le déterminant (cette définition sera motivée bientôt plus bas !) :

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1' \qquad (6.3.951)$$

Intuitivement, comme nous le verrons plus loin le Wronskien vérifie que y_1 et y_2 sont linéairement indépendants (c'est-à-dire que y_1 n'est pas un multiple de y_2 autrement que trivialement lorsque $x_1=x_2=0$), que le vecteur (y_1,y_2) est linéairement indépendant de $(\partial_x y_1, \partial_x y_2)$ et de manière équivalente que $partial_x y_1$ n'est pas un multiple de $\partial_x y_2$.

L'exigence du Wronskien n'est en fait pas plus stricte que l'indépendance linéaire. Nous pouvons montrer que la dépendance linéaire implique l'annulation du Wronskien. Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement dépendantes, alors il existe des scalaires non nuls a_1, a_2 tels que :

$$a_1y_1+a_2y_2=0 \qquad (6.3.952)$$

En différenciant, nous obtenons :

$$a_1\partial_x y_1+a_2\partial_x y_2=0 \qquad (6.3.953)$$

tel que :

$$a_2\partial_x y_2=-a_1\partial_x y_1 \qquad (6.3.954)$$

Multipliant la première équation par $a_2\partial_x y_2$ donne :

$$\begin{aligned} 0 &= a_1a_2y_1\partial_x y_2+a_2^2y_2\partial_x y_2 \\ &= a_1a_2\left(y_1y_xy_2-y_2\partial_x y_1\right) \\ &\rightarrow y_1\partial_x y_2-y_2\partial_x y_1=0 \end{aligned} \qquad (6.3.955)$$

En cours de traduction de l'anglais

Autrement dit : Pour montrer que deux fonctions φ_1 et φ_2 sont linéairement indépendantes nous posons :

$$Ay_1(x)+By_2(x)=0 \tag{6.3.956}$$

et nous devons prouver que celáest juste que si et seulement si A et B sont nuls.

Mais nous avons besoin d'une autre condition pour forcer A et B à être nuls. Et nous obtenons cette autre condition en dérivant :

$$Ay_1'(x)+By_2'(x)=0 \tag{6.3.957}$$

C'est un système homogène linéaire :

$$\begin{cases} Ay_1(x)+By_2(x)=0 \\ Ay_1'(x)+By_2'(x)=0 \end{cases} \tag{6.3.958}$$

qui n'ont que la solution $A=B=0$ si le déterminant est non nul. Mais ce déterminant est précisément le Wronskien ! !

Définition (#207) : Deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des "solutions indépendantes" de l'équation différentielle si et seulement si $\vec{Y_1}$ et $\vec{Y_2}$ sont linéairement indépendants en tant que vecteurs dans l'espace des phases pour certains x, c'est-à-dire si et seulement si le Wronskien est non nul pour certains x.

Dans les deux cas, le Wronskien est jamais nul. Est-il possible qu'il soit nul pour certains x et non nul pour d'autres ? La réponse est : Non ! Et la preuve donnée ci-dessous est appelée "théorème d'Abel".

Théorème 6.17. Soit donné une équation différentielle $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (le théorème peut être généralisé aux équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n), soit $W=0$ pour tout x, soit $W\neq 0$ pour tout x. C'est-à-dire que si deux solutions sont indépendantes pour un x particulier, alors elles sont indépendantes pour tout x.

Démonstration 6.17.1. Si y_1 et y_2 sont les deux solutions, alors :

$$\begin{gathered} y_2(y_1''+py_1'+qy_1)=0 \\ y_1(y_2''+py_2'+qy_2)=0 \end{gathered} \tag{6.3.959}$$

En soustrayant les deux équations, nous avons :

$$y_1y_2''-y_2y_1''+p(y_1y_2'-y_2y_1')=0 \tag{6.3.960}$$

A noter que (c'est ce qui motive la définition du Wronskian !) :

$$W=y_1y_2'-y_2y_1' \tag{6.3.961}$$

et :

$$W'=y_1y_2''+y_1'y_2'-(y_2'y_1'+y_2y_1'')=y_1y_2''-y_2y_1'' \tag{6.3.962}$$

Alors avec ces définitions que nous pouvons écrire :

$$W'+pW=0 \tag{6.3.963}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et la solution est immédiate :

$$W(x) = W_0 e^{-\int p \mathrm{d}x} \tag{6.3.964}$$

Où $W_0 = c^{te}$. Puisque la fonction exponentielle n'est jamais nulle, soit $W_0 = 0$, auquel cas $W = 0$, soit $W_0 \neq 0$ et $W \neq 0$ pour toute valeur de x !

En d'autres termes : le Wronskian est toujours soit identiquement nul, soit toujours positif, soit toujours négatif.

■ Q.E.D.

6.3.3.5.2.1 Théorie de la stabilite

Dans l'étude des systèmes d'équations différentielles, il est souvent utile d'étudier les solutions sans obtenir une forme algébrique pour la solution. Cela se fait en explorant les solutions d'équilibre et les solutions proches des solutions d'équilibre. De telles techniques sont considérées comme utiles dans l'étude des systèmes non linéaires.

En cours de traduction de l'anglais

La "théorie de la stabilité" traite de la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires de systèmes dynamiques sous de petites perturbations des conditions initiales. L'équation de la chaleur, par exemple, est une équation aux dérivées partielles stable car de petites perturbations des données initiales entraînent de petites variations de température ultérieurement.

De nombreuses parties de la théorie qualitative des équations différentielles et des systèmes dynamiques traitent des propriétés asymptotiques des solutions et des trajectoires - ce qui se passe avec le système après une longue période de temps. Le type de comportement le plus simple est celui des points d'équilibre, ou points fixes, et des orbites périodiques. Si une orbite particulière est bien comprise, il est naturel de se demander ensuite si un petit changement dans la condition initiale conduira à un comportement similaire. La théorie de la stabilité aborde les questions suivantes : Une orbite proche restera-t-elle indéfiniment proche d'une orbite donnée ? Convergera-t-elle vers l'orbite donnée ? Dans le premier cas, l'orbite est dite "stable" ; dans le deuxième cas, elle est dite "asymptotiquement stable" et l'orbite donnée est dite "attractive".

Ok maintenant plongeons dans les maths ! Considérons deux variables dépendantes $y_1(t), y_2(t)$ liées par le "système non autonome[8]" d'un système couplé d'équations différentielles du premier ordre dans le plan suivant (comme il y a deux équations différentielles, il est également nommé un "système planaire") :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= P(y_1, y_2, t) = ay_1 + by_2 + f_1(t) \\ \dot{y}_2 &= Q(y_1, y_2, t) = cy_1 + dy_2 + f_2(t) \end{aligned} \tag{6.3.965}$$

[8]Un "système autonome" ou "équation différentielle autonome" est un système d'équations différentielles ordinaires qui ne dépend pas explicitement de la variable indépendante. Lorsque la variable est le temps, ils sont également appelés "systèmes invariants dans le temps". De nombreuses lois en physique, où la varaible indépendante est usuellement considérée comme étant le temps, sont exprimé comme des systèmes autonomes parce qu'il est assumé que les lois de la nature connues aujourd'hui sont identique dans le passé et dans le futur.

Un système autonome étant par définition explicictement indépendant du temps :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= ay_1 + by_2\\ \dot{y}_2 &= cy_1 + dy_2\end{aligned} \qquad (6.3.966)$$

Nous pouvons écrire cela en notation vectorielle par :

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} \qquad (6.3.967)$$

ou :

$$\dot{\vec{Y}} = M\vec{Y} + \vec{F} \qquad (6.3.968)$$

Nous pouvons convertir cela en une équation d'ordre supérieur par :

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2 + \dot{f}_1\\ &= a\dot{y}_1 + b(cy_1 + dy_2 + f_2) + \dot{f}_1\\ &= a\dot{y}_1 + bcy_1 + d(\dot{y}_1 - ay_1 - f_1) + bf_2 + \dot{f}_1\end{aligned} \qquad (6.3.969)$$

ainsi :

$$\ddot{y}_1 - (a+d)\dot{y}_1 + (ad-bc)y_1 = bf_2 - df_1 + \dot{f}_1 \qquad (6.3.970)$$

Cependant, actuellement cela complique l'équation...

Donc, ce que nous faisons habituellement, c'est l'inverse : si nous avons une équation d'ordre supérieur, nous pouvons le faire pour la changer en un système d'équations du premier ordre !

Si :

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f \qquad (6.3.971)$$

posons $y_1 = y$ et $y_2 = \dot{y}$. Et définissons :

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix}y\\ \dot{y}\end{pmatrix} \qquad (6.3.972)$$

Notre système d'équations devient :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2\\ \dot{y}_2 &= f - ay_2 - by_1\end{aligned} \qquad (6.3.973)$$

ou :

$$\dot{\vec{Y}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ f\end{pmatrix} \qquad (6.3.974)$$

Considérons maintenant l'équation générale :

$$\dot{\vec{Y}} = M\vec{Y} + \vec{F} \qquad (6.3.975)$$

En cours de traduction de l' anglais

Après réarrangement :

$$\dot{\vec{Y}} - M\vec{Y} = \vec{F} \tag{6.3.976}$$

Nous cherchons d'abord une solution complémentaire $\vec{Y}_c = \vec{v}e^{\lambda t}$, où $\vec{v}$ est un vecteur constant. Donc nous obtenons :

$$\lambda\vec{v} - M\vec{v} = \vec{0} \tag{6.3.977}$$

Nous pouvons écrire ceci comme :

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{6.3.978}$$

Donc λ est la valeur propre de M et $\vec{v}$ est le vecteur propre correspondant ! ! !

Nous pouvons résoudre cela en résolvant l'équation caractéristique :

$$\det(M - \lambda I) = 0 \tag{6.3.979}$$

Alors, pour chaque λ, nous trouvons le $\vec{v}$ (vecteur propre) correspondant. L'équation aux valeurs propres correspondante est donc :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{6.3.980}$$

Les valeurs propres ne sont pas déterminées par les quatre nombres (a, b, c, d), mais seulement par deux nombres $(a+d, ad-bc)$.

Pour une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, la trace est $\text{tr}(M) = a + d$, et le déterminant $\det(M) = ad - bc$.

Si λ_1 et λ_2 sont les racines de :

$$\lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det(M) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \tag{6.3.981}$$

alors :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(M), \lambda_1\lambda_2 = \det(M), \lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(M) \pm \sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4\det(M)}}{2} \tag{6.3.982}$$

et pour rappel, nous avons :

- $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) > 0$, deux racines réelles (liées aux "systèmes suramortis" puisque le système conduit à une décroissance exponentielle). Alors la solution est communément écrite comme ($\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les vecteurs propres) :

$$\vec{Y} = A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + B\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{6.3.983}$$

- $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) = 0$, une racine (répétée) (liée aux "systèmes à amortissement critique" - il n'y a pas d'oscillations). Alors la solution est communément écrite comme :

$$\vec{Y} = A\vec{v}_1 e^{\lambda t} + B\vec{v}_2 e^{\lambda t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1) \tag{6.3.984}$$

- $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) < 0$, deux racines complexes conjuguées (liées à des "systèmes oscillants sous-amortis" constitués d'oscillations temporelles exponentielles décroissantes). Alors la solution est communément écrite comme :

$$\vec{Y} = A\Re\left(e^{\alpha t}\vec{v}(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t)\right) + B\Im\left(e^{\alpha t}\vec{v}(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t)\right) \tag{6.3.985}$$

Voyons un exemple :

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons le système suivant :

$$\dot{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} -4 & 24 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

L'équation caractéristique de M est :

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 24 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne :

$$(\lambda+8)(\lambda-2) = 0$$

et donc :

$$\lambda_{1,2} = 2, -8$$

Quand $\lambda = 2$, $\vec{v}$ satisfait :

$$\begin{bmatrix} -6 & 24 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

et nous obtenons $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

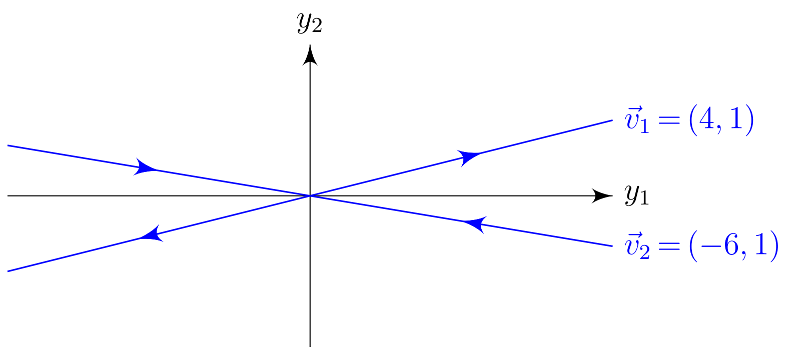
Quand $\lambda = -8$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} 4 & 24 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

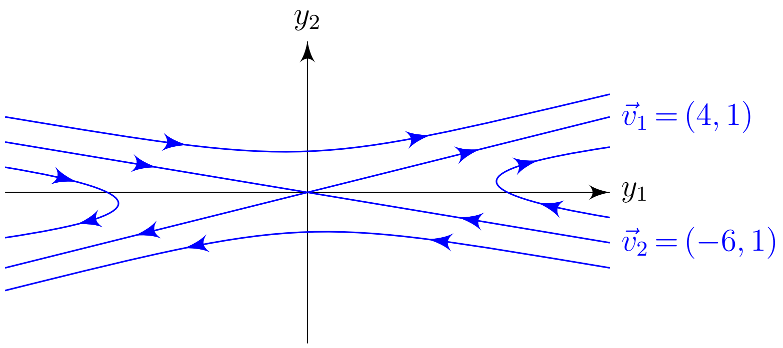
et donc $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi la solution complémentaire est :

$$\vec{Y} = A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-8t}$$

Pour tracer les trajectoires dans l'espace des phases, nous considérons d'abord les cas où $\vec{Y}$ est un vecteur propre. Si $\vec{Y}$ est un multiple entier de $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors il continuera à se déplacer vers l'extérieur dans la même direction. De même, s'il s'agit d'un multiple entier de $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, il se déplacera vers l'origine.



Nous pouvons maintenant ajouter plus de lignes (courbes) basées sur ces deux :



Pour trouver la solution particulière, nous essayons $\vec{Y}_p = \vec{u}e^t$. Alors :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} - \begin{bmatrix}-4 & 24\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\\ \begin{bmatrix}5 & -24\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} &= -\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3 & 24\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale est :

$$\vec{Y} = A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^{2t} + B\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}e^{-8t} - \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^t = \begin{bmatrix}4e^{2t} & -6e^{-8t}\\1e^{2t} & 1e^{-8t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^t$$

Souvent notée dans le cas général :

$$\vec{Y} = \Phi(t)\vec{C} + \vec{x}_p(t)$$

Remarque

Notons que si le système ci-dessus était autonome, c'est-à-dire indépendant du temps tel que :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= -4y_1 + 42y_2\\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= 1y_1 - 2y_2\end{aligned}$$

dès lors, nous pouvons obtenir les pentes du diagramme de phase en calculant simplement :

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}} = \frac{1y_1 - 2y_2}{-4y_1 + 42y_2}$$

Considérons la solution générale d'un système autonome connu comme étant (comme on le voit dans l'exemple ci-dessus) :

$$\vec{Y} = \Phi(t)\vec{C} \tag{6.3.986}$$

Nous sommes maintenant prêts à résoudre le problème de la valeur initiale :

$$\dot{\vec{Y}} = M\vec{Y}, \quad \vec{Y}(t_0) = \vec{Y}_0 \tag{6.3.987}$$

En partant de la solution générale, nous avons que :

$$\vec{Y}_0 = \vec{Y}(t_0) = \Phi(t_0)\vec{C} \tag{6.3.988}$$

Comme d'habitude, nous devons résoudre pour le c_k (c'est-à-dire les composants de $\vec{C}$). En utilisant des méthodes matricielles, c'est très facile. Puisque le Wronskien n'est pas nul, nous pouvons inverser Φ à n'importe quelle valeur de t. Donc nous avons :

$$\vec{C} = \Phi^{-1}(t_0)\vec{Y}_0 \tag{6.3.989}$$

En remettant $\vec{C}$ dans la solution générale, nous obtenons la solution du problème de la valeur initiale :

$$\vec{Y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{Y}_0 \tag{6.3.990}$$

Comme toujours, nous pouvons (et devrions toujours !) vérifier facilement qu'il s'agit d'une solution du système et qu'elle satisfait la condition initiale à $t = t_0$.

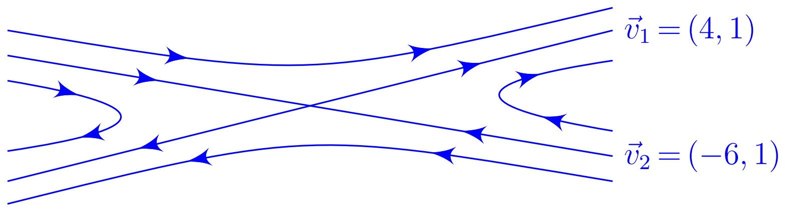
La combinaison matricielle $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ est utile. Ainsi, nous définirons le produit résultant comme étant la "solution matricielle principale", en le désignant par :

$$\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \tag{6.3.991}$$

Ainsi, la solution du problème à valeur initiale est alors notée $\vec{Y}(t) = \Psi(t)\vec{Y}_0$.

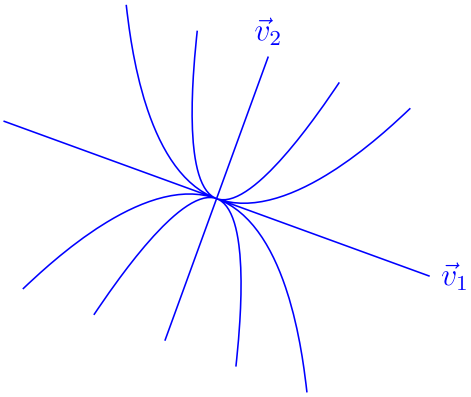
En général, il existe fondamentalement trois cas possibles de $\dot{\vec{Y}} = M\vec{Y}$ correspondant à trois valeurs propres possibles différentes de M :

1. Si les deux λ_1, λ_2 sont réels avec un signe opposé ($\lambda_1\lambda_2 < 0$). Sans perte de généralité, supposons que $\lambda_1 > 0$. Alors, il y a une selle comme ci-dessus :



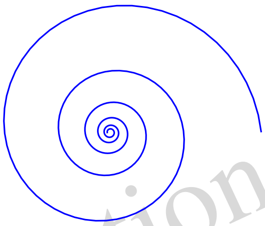
2. Si λ_1, λ_2 sont réels avec $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Sans perte de généralité, supposons que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Alors le portrait de phase est :

En cours de traduction de l'anglais



Si les deux $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, alors les flèches pointent vers l'intersection et nous disons qu'il y a un noeud stable. Si les deux sont positifs, ils pointent vers l'extérieur et il y a un noeud instable.

3. Si λ_1, λ_2 sont conjugués complexes, alors nous obtenons une spirale :



Si $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$, alors cela tourne en spirale vers l'intérieur. Si $\Re(\lambda_{1,2}) > 0$, alors cela tourne en spirale vers l'extérieur. Si $\Re(\lambda_{1,2}) = 0$, alors nous avons des ellipses avec des centres communs au lieu de spirales. Nous pouvons déterminer si la spirale est positive (comme indiqué ci-dessus) ou négative (image miroir de la spirale ci-dessus) en considérant les vecteurs propres.

En cours de traduction de l' anglais

Pour revenir à :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(M), \lambda_1\lambda_2 = \det(M), \lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(M) \pm \sqrt{\text{tr}(M)^2 - 4\det(M)}}{2} = \frac{\text{tr}(M) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (6.3.992)$$

Nous avons alors pour rappel :

- $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) > 0$, deux racines réelles (liées aux "systèmes suramortis" puisque le système conduit à une décroissance exponentielle). Alors la solution est communément écrite comme ($\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les vecteurs propres) :

$$\vec{Y} = A\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + B\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6.3.993)$$

- $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) = 0$, une racine (répétée) (liée aux "systèmes à amortissement critique" - il n'y a pas d'oscillations). Alors la solution est communément écrite comme :

$$\vec{Y} = A\vec{v}_1 e^{\lambda t} + B\vec{v}_2 e^{\lambda t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1) \quad (6.3.994)$$

- $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) < 0$, deux racines conjuguées complexes (liées à des "systèmes oscillants sous-amortis" constitués d'oscillations temporelles exponentielles décroissantes). Alors la solution est communément écrite comme :

$$\vec{Y} = A\Re\left(e^{\alpha t}\vec{v}(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t)\right) + B\Im\left(e^{\alpha t}\vec{v}(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t)\right) \quad (6.3.995)$$

Mais plus en détails :

- Si $\text{tr}(M) > 0, \det(M) > 0$, et $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) > 0$, c'est une source (système instable !) ;
- Si $\text{tr}(M) < 0, \det(M) > 0$, et $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) > 0$, c'est un puits (système stable !) ;
- Si $\text{tr}(M) > 0, \det(M) > 0$, et $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) < 0$, c'est une source spirale (système instable !) ;
- Si $\text{tr}(M) < 0, \det(M) > 0$, et $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) < 0$, c'est un puits spirale (système instable !) ;
- Si $\det(M) < 0$, alors c'est une selle (système instable !). Dans ce cas, $\text{tr}(M)^2 - 4\det(M) > 0$ est toujours satisfait et peu importe si $\text{tr}(M) > 0$ ou $\text{tr}(M) < 0$;
- Si $\text{tr}(M) = 0$ ou $\det(M) = 0$, c'est dégénéré (système neutre !)

Si représenté sous forme de tableau et avec un autre vocabulaire aussi parfois utilisé :

Type	Valeurs propres	Type de stabilité
Noeud	Réel λ, même signes	$\lambda < 0$, stable $\lambda > 0$, instable
Selle	Réel λ signes opposés	Le plus souvent instable
Centré	λ imaginaire pure	-
Focus/Spirale	λ complexe, $\Re(\lambda) \neq 0$	$\Re(\lambda) < 0$, stable $\Re(\lambda) > 0$, instable
Noeud dégénéré	Racines répétées	$\lambda > 0$, stable
Lignes d'équilibre	Une valeur propre nulle	$\lambda < 0$, stable

TAB. 6.14 – **Liste des comportements typiques dans les systèmes planaires**

Voici un résumé visuel basé sur la matrice et le déterminant (basé sur un dessin à la main de Douglas R. Hundley) :

En cours de traduction de l'anglais

Poincaré Diagram: Classification des portraits de phase dans le plan $(\det(M), \text{tr}(M))$

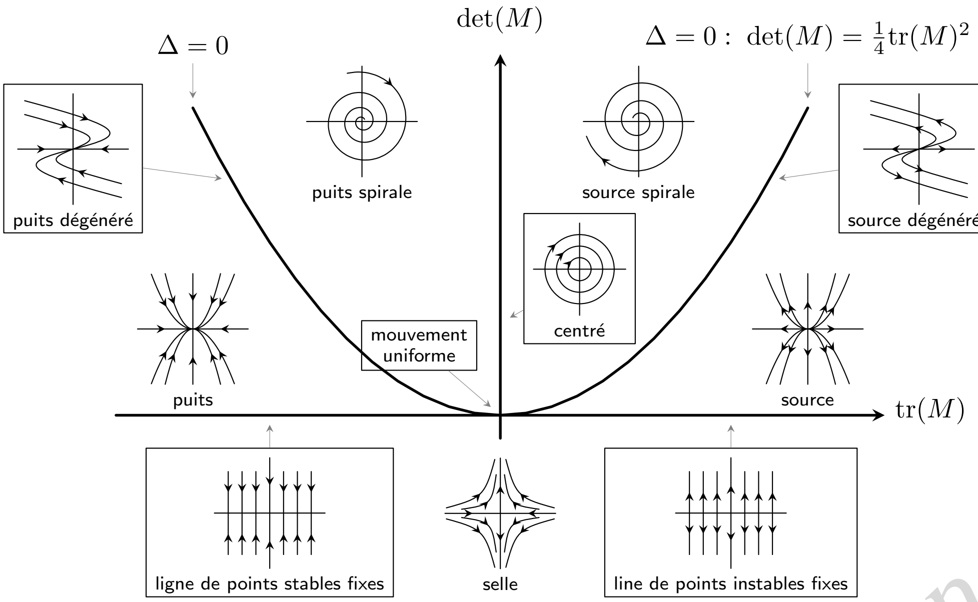


FIG. 6.57 – Diagramme de Poincaré - Classification des portraits de phase pour une matrice 2×2 (auteur : Gernot Salzer)

Dans le plan trace-déterminant ci-dessus, les points de coordonnées (T, D) (c'est-à-dire Trace/Déterminant) correspondent à des systèmes à valeurs propres répétées. De plus, les points au-dessus de la parabole correspondent à un système à deux valeurs propres complexes conjuguées l'une à l'autre. Enfin, les points sous la parabole correspondent à des systèmes planaires à deux valeurs propres distinctes.

Attention ! Le diagramme de Poincaré ci-dessus ne concerne vraiment qu'une matrice A de dimensions 2×2. Pour des dimensions supérieures, il ne peut plus être utilisé !

Remarque

Si la matrice M est symétrique, nous obtenons un autre type de motif typique (motif "en étoile") qui n'est pas représenté dans la figure ci-dessus.

En cours de la traduction de l'anglais

6.3.3.6 Systèmes dynamiques non linéaires

En mathématiques et en sciences expérimentales, un système non linéaire est un système dans lequel le changement de la sortie n'est pas proportionnel au changement de l'entrée. Les problèmes non linéaires intéressent les ingénieurs, les biologistes, les physiciens, les mathématiciens et de nombreux autres scientifiques, car la plupart des systèmes sont par nature non linéaires. Les systèmes dynamiques non linéaires, décrivant les changements de variables au fil du temps, peuvent sembler chaotiques, imprévisibles ou contre-intuitifs, contrastant avec des systèmes linéaires beaucoup plus simples. Ils sont difficiles à résoudre ou insolubles dans certaines situations. Dans la plupart des cas, ils ne peuvent pas être résolus à la main mais par des simulations numériques.

Un système d'équations différentielles est dit non linéaire s'il n'est pas un système d'équations linéaires. Les problèmes impliquant des équations différentielles non linéaires sont extrêmement divers et les méthodes de résolution ou d'analyse dépendent du problème. Des exemples d'équations différentielles non linéaires traitées en détail dans ce livre sont :

- Le pendule double (voir page **??**)
- Les équations de Navier–Stokes en dynamique des fluides (voir page **??**)
- Les équations de Lotka-Volterra en biologie (voir page **??**)
- Les équations du champ d'Einstein en relativité générale (voir page **??**)
- L'équation de Lorenz en météorologie (voir page **??**)
- etc.

Ainsi, le lecteur intéressé peut reprendre l'un des sujets ci-dessus pour obtenir un traitement mathématique assez détaillé d'un cas particulier de systèmes dynamiques non linéaires.

En cours de traduction de l' anglais

6.3.3.7 Méthode régulière des perturbations

Très fréquemment en physique (de pointe), un problème mathématique ne peut pas être résolu de manière exacte. Si la solution est connue il y a parfois une telle dépendance de paramètres que la solution est difficile à utiliser en tant que telle.

Il peut arriver cependant qu'un paramètre identifié de l'équation différentielle, que nous noterons par tradition avec la lettre grecque ε, soit tel que la solution soit disponible et raisonnablement simple pour $\varepsilon = 0$.

Le souci ensuite est de savoir comment la solution est altérée pour un ε non-nul mais petit quand même. Cette étude est le centre de la théorie des perturbations que nous utilisons par exemple dans la section de Relativité Générale pour calculer la précession du périhélie de Mercure.

Comme la théorie dans le cadre général est trop complexe par rapport aux objectifs du site, nous nous proposons une approche par l'exemple d'abord avec une simple équation algébrique et ensuite avec ce qui nous intéresse : une équation différentielle.

6.3.3.7.1 Théorie perturbative des équations algébriques

Considérons l'équation polynômiale suivante :

$$x^2 - 1 = \varepsilon x \quad (6.3.996)$$

Nous savons de par notre étude de la section d'Analyse Fonctionnelle, que cette équation polynômiale admet deux racines qui sont trivialement :

$$x_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}} \quad (6.3.997)$$

Pour ε petit, ces racines peuvent être approximées par le premier terme en développement de série de Taylor (voir section Suites et Séries page 1677) :

$$x_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad x_2 = -1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (6.3.998)$$

La question et de savoir si nous pouvons obtenir les deux relations précédentes sans a priori de connaissances sur la solution exacte de l'équation polynômiale initiale ? La réponse est bien évidemment affirmative avec l'aide de la théorie des perturbations.

La technique est basé sur quatre étapes :

1. Dans la première étape, nous assumons que la solution de l'équation polynomiale est une expression du type série de Taylor en ε. Nous avons alors :

$$x = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (6.3.999)$$

où X_1, X_2, X_3 sont bien évidemment à déterminer.

2. Dans la deuxième étape, nous injectons la solution hypothétique dans notre équation polynômiale :

$$\left(X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right)^2 - 1 = \varepsilon\left(X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) \quad (6.3.1000)$$

Comme :

$$\begin{aligned}
x^2 =& X_0^2 + 2\left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right)X_0 + \left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right)^2 \\
=& X_0^2 + 2\left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right)X_0 + \left(\left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2\right)^2 + 2\left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2\right)\mathcal{O}(\varepsilon^3)\varepsilon^3\right) \\
\cong& X_0^2 + 2\left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2\right)X_0 + \left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2\right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
=& X_0^2 + 2\left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2\right)X_0 + \left(\varepsilon^2 X_1^2 + 2\varepsilon^3 X_1 X_2 + \varepsilon^4 X_2^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
\cong& X_0^2 + 2\left(\varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2\right)X_0 + \left(\varepsilon^2 X_1^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
=& X_0^2 + 2\varepsilon X_0 X_1 + \varepsilon^2\left(X_1^2 + 2X_0 X_2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned} \quad (6.3.1001)$$

et :

$$\varepsilon x = \varepsilon X_0 + \varepsilon^2 X_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (6.3.1002)$$

Il vient finalement que l'équation polynômiale s'écrit :

$$X_0^2 - 1 + \varepsilon(2X_0 X_1 - X_0) + \varepsilon^2\left(X_1^2 + 2X_0 X_2 - X_1\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0 \quad (6.3.1003)$$

En cours de traduction de l'anglais

3. Dans la troisième étape nous égalisons successivement les termes avec 0 tel que :

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}(\varepsilon^0) : X_0^2 - 1 = 0\\&\mathcal{O}(\varepsilon^1) : 2X_0X_1 - X_0 = 0\\&\mathcal{O}(\varepsilon^2) : X_1^2 + 2X_0X_2 - X_1 = 0\\&\mathcal{O}(\varepsilon^3) : \ldots\end{aligned} \tag{6.3.1004}$$

4. Quatrième et dernière étape, nous résolvons successivement les équations polynômiales ci-dessus pour obtenir :

$$X_0 = \pm 1 \Rightarrow X_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow X_2 = \pm\frac{1}{8} \tag{6.3.1005}$$

En injectant ces résultants dans la solution hypothétique :

$$x = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{6.3.1006}$$

il est évident d'observer que nous retombons sur la solution certaine :

$$x_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \qquad x_2 = -1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{6.3.1007}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.3.3.7.2 Théorie perturbative des équations différentielles

La théorie des perturbations est aussi souvent utilisée pour résoudre un bon nombre d'équations différentielles. C'est le cas par exemple en mécanique des fluides, en relativité générale ou en physique quantique.

À nouveau, plutôt que de faire une théorie ultra abstraite et générale, voyons le concept sur un exemple tel que précédemment.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'' = -\varepsilon y' - 1 \tag{6.3.1008}$$

ou autrement écrit :

$$y'' + \varepsilon y' = -1 \tag{6.3.1009}$$

avec les conditions aux limites :

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 \tag{6.3.1010}$$

La résolution exacte est relativement facile à obtenir !

D'abord nous commençons par l'équation homogène :

$$y'' + \varepsilon y' = 0 \tag{6.3.1011}$$

C'est donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec des coefficients constants, équation qu'il est relativement aisé de résoudre dans le cas général. Soit l'équation :

$$y'' + p\varepsilon y' + qy = 0 \tag{6.3.1012}$$

Supposons que la fonction y qui satisfait cette équation différentielle soit de la forme $y = e^{Kx}$ où K peut être un nombre complexe. Nous avons alors :

$$K^2 e^{Kx} + pKe^{Kx} + qe^{Kx} = 0 \quad \text{or} \quad K^2 + pK + q = 0 \tag{6.3.1013}$$

pourvu, bien sûr, que $e^{Kx} \neq 0$. Cette dernière relation est donc l'équation quadratique auxiliaire de l'équation différentielle (polynôme caractéristique). Elle a deux solutions/racines (c'est une simple résolution d'un polynôme du deuxième degré) que nous noterons dans le cas général : K_1, K_2. Ce qui signifie que :

$$K_1^2 e^{K_1 x} + pK_1 e^{K_1 x} + qK_1 e^{K_1 x} = 0 \quad \text{et} \quad K_2^2 e^{K_2 x} + pK_2 e^{K_2 x} + qK_2 e^{K_2 x} = 0 \tag{6.3.1014}$$

sont satisfaites pour les deux racines. Si nous faisons la somme puisque les deux sont égales à la même constante :

$$\left(K_1^2 e^{K_1 x} + K_2^2 e^{K_2 x}\right) + p\left(K_1 e^{K_1 x} + K_2 e^{K_2 x}\right) + q\left(e^{K_1 x} + e^{K_2 x}\right) = 0 \tag{6.3.1015}$$

Ainsi, il est immédiat que la solution générale de l'équation homogène de y est du type :

$$y_h = Ae^{K_1 x} + Be^{K_2 x} \tag{6.3.1016}$$

En cours de traduction de l' anglais

où A, B sont bien évidemment des constantes à déterminer. Nous résolvons maintenant le polynôme caractéristique :

$$K^2+\varepsilon K=0 \tag{6.3.1017}$$

Il vient immédiatement que :

$$K_{1,2}=\frac{-\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}K_1=-\varepsilon\\K_2=0\end{cases} \tag{6.3.1018}$$

Donc :

$$y_h=Ae^{-\varepsilon x} \tag{6.3.1019}$$

Maintenant une solution particulière à :

$$y''+\varepsilon y'=-1 \tag{6.3.1020}$$

est relativement trivialement une solution du type :

$$y_p=Bx \tag{6.3.1021}$$

où B est bien évidemment une constante à déterminer et qui vaut simplement une fois injectée dans l'équation différentielle :

$$y''+\varepsilon y'=-1\Rightarrow 0+\varepsilon B=1\Rightarrow B=-\frac{1}{\varepsilon} \tag{6.3.1022}$$

Soit :

$$y_p=-\frac{x}{\varepsilon}+c^{te} \tag{6.3.1023}$$

D'où finalement la solution générale :

$$y=y_p+y_h=Ae^{-ex}-\frac{x}{\varepsilon}+c^{te} \tag{6.3.1024}$$

Ensuite, avec les conditions initiales qui sont pour rappel :

$$y(0)=0,y'(0)=1 \tag{6.3.1025}$$

il est très facile de trouver A :

$$y(0)=0\Rightarrow Ae^{-e0}-\frac{0}{\varepsilon}+c^{te}=A+c^{te}=0 \tag{6.3.1026}$$

$$\Rightarrow c^{te}=-A \tag{6.3.1027}$$

Nous avons aussi :

$$y'(0)=1\Rightarrow -\varepsilon Ae^{-\varepsilon 0}-\frac{1}{\varepsilon}+c^{te}=-\varepsilon A-\frac{1}{\varepsilon}+c^{te}=1\Rightarrow A=-\frac{1}{\varepsilon}\left(1-c^{te}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon c^{te}+1}{\varepsilon^2}\right) \tag{6.3.1028}$$

Il est loisible de choisir $c^{te}=0$ que ce qui nous donne :

$$A=-\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon^2}\right) \tag{6.3.1029}$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors :

$$y = y_p + y_h = Ae^{-\varepsilon x} - \frac{x}{\varepsilon} + c^{te} \tag{6.3.1030}$$

devient :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon^2}e^{-\varepsilon x} - \frac{x}{\varepsilon} + c^{te} \\ &= -\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}e^{-\varepsilon x} - \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\left(1-e^{-\varepsilon x}\right) - \frac{x}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{6.3.1031}$$

Maintenant que nous avons la solution générale, si ε est petit nous pouvons prendre le développement d'ordre 4 en série de Maclaurin de l'exponentielle (voir section Suites et Séries page 1683). Tel que :

$$e^{-\varepsilon x} = 1 - \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon^2x^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^3x^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4x^4) \tag{6.3.1032}$$

Injecté dans y cela donne (vous remarquerez que nous exprimons parfois explicitement par anticipation...... le terme d'ordre 5) :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\left(1-e^{-\varepsilon x}\right) - \frac{x}{\varepsilon} \\ &= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\left(\varepsilon x - \frac{1}{2}\varepsilon^2x^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3x^3 - \mathcal{O}(\varepsilon^4x^4)\right) - \frac{x}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\varepsilon x - \frac{1}{2}\varepsilon^2x^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3x^3 - \mathcal{O}(\varepsilon^4x^4)\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon x - \frac{1}{2}\varepsilon^2x^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3x^3 - \mathcal{O}(\varepsilon^4x^4)\right) - \frac{x}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\varepsilon x^3 - \frac{1}{24}\varepsilon^2x^4 + x - \frac{1}{2}\varepsilon x^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^2x^3 - \mathcal{O}(\varepsilon^3x^4) - \frac{x}{\varepsilon} \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4\right) - \mathcal{O}(\varepsilon^3x^4) \end{aligned} \tag{6.3.1033}$$

Maintenant que nous avons ce développement, ce que nous souhaitons montrer c'est qu'à partir d'un développement perturbatif nous pouvons retrouver le même résultat en série et ce sans aucune connaissance préalable sur la solution.

En cours de traduction de l' anglais

À nouveau, le développement pour cela se fait en 4 étapes :

1. Dans la première étape, nous assumons que la solution de l'équation différentielle est une expression du type série de Taylor en ε. Nous avons alors :

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{6.3.1034}$$

où y_0, y_1, y_2 sont bien évidemment à déterminer.

2. Dans la deuxième étape, nous injectons la solution hypothétique de notre équation différentielle dans celle-ci avec les conditions initiales et nous développons le tout.

D'abord l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} y'' + \varepsilon y' + 1 &= \left(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) + \varepsilon\left(y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) + 1 \\ &= (y_0''+1) + \varepsilon(y_1''+y_0') + \varepsilon^2(y_2''+y_1') + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0 \end{aligned} \tag{6.3.1035}$$

ensuite les conditions initiales :

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0(0)+\varepsilon y_1(0)+\varepsilon^2 y_2(0)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)=0 \\ y'(0) &= \left(y_0'(0)-1\right)+\varepsilon y_1'(0)+\varepsilon^2 y_2'(0)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)=0 \end{aligned} \tag{6.3.1036}$$

3. Dans la troisième étape nous égalisons successivement les termes avec 0 tel que :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{O}(\varepsilon^0): & y_0''+1=0 & y_0(0)=0 & y_0'(0)-1=0 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^1): & y_1''+y_0'=0 & y_1(0)=0 & y_1'(0)=0 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^2): & y_2''+y_1'=0 & y_2(0)=0 & y_2'(0)=0 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^3): & \ldots & & \end{array} \tag{6.3.1037}$$

4. Dans la quatrième étape nous résolvons les équations différentielles listées précédemment (si vous ne voyez pas comment nous les résolvons n'hésitez pas à nous contacter !) :

$$\begin{aligned} y_0 &= x-\frac{1}{2}x^2 \\ y_1 &= -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 \\ y_2 &= \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4 \end{aligned} \tag{6.3.1038}$$

En injectant ces relations dans la solution supposée développée en série de Taylor et injectée dans l'équation différentielle :

$$y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{6.3.1039}$$

Nous retombons sur :

$$y=x-\frac{1}{2}x^2+\varepsilon\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)+\varepsilon^2\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\right)-\mathcal{O}(\varepsilon^3x^4) \tag{6.3.1040}$$

En cours de traduction de l' anglais

quote 6.3:1628.#46

> *La Science est une équation différentielle. La religion est une condition aux limites.*

Alan Turing

~95 %

119 votes, 75.45%

6.4. Suites et Séries

Les suites et séries ont une très grande importance dans la mathématique appliquée et c'est la raison pour laquelle nous y consacrons une section entière. Nous les retrouverons par ailleurs souvent dans les différents chapitres de la section de Mécanique lorsque nous aurons besoin de faire quelques approximations mineures (...) ainsi qu'en dans les chapitres d'Économie et de Techniques de Gestion. Il conviendra cependant de la part du lecteur de ne pas confondre dans ce qui va suivre le concept de "suite" de celui de "série" qui tout en étant similaires sur le fond ne s'analysent mathématiquement pas toujours de la même manière.

Nous avons souhaité dans cette section rester dans des choses simples sans trop partir dans les concepts topologiques des suites et séries. Cependant, la personne intéressée par des définitions un peu plus rigoureuses pourra se reporter à la section traitant des Fractales (voir chapitre d'Informatique Théorique page ??) et de Topologie (voir chapitre d'Analyse page 2427) où de nombreux concepts sur les suites sont définis (supremum, infimum, sous-suite, théorème de Bolzano-Weierstrass, etc.).

En cours de traduction de l'anglais

6.4.1 Suites

Définition (#6.4.208) : Une "suite" d'un ensemble est une famille d'éléments indexée par l'ensemble des entiers naturels (voir section Nombres page 213) ou par une partie de celui-ci. De manière vulgarisée, nous disons qu'une suite est une liste d'objets mis en ordre, chacun ayant un numéro d'ordre. Nous notons classiquement une suite par :

$$(u_n) \quad \text{ou} \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{6.4.1}$$

où l'indexation se fait parfois (par tradition...) sans le 0.

Pour quelques suites, nous indiquons le premier terme u_1 (si l'indexation commence par 1 au lieu de 0), ainsi qu'une formule pour obtenir n'importe quel terme u_{n+1} à partir du terme précédent quel que soit $n \geq 1$. Nous appelons une telle formulation une "définition récurrente", et la suite est dite définie par "récurrence" (et de même si elle est indexée à partir de 0 au lieu de 1).

Avant de voir quelques exemples de familles de suites qui seront utilisées dans les différents section de ce livre (Dynamiques des populations, Économie, Physique nucléaire, etc.) voyons un petit paquet de définitions comme il est de tradition en mathématique...

Définitions (#6.4.209) :

D1. Des nombres (en suite) sont en "progression arithmétique"" si la différence de deux termes consécutifs est une constante r appelée la "raison".

D2. Des nombres (en suite) sont en "progression géométrique" si le rapport de deux termes consécutifs est une constante r appelée aussi la "raison".

D3. Des nombres (en suite) sont en "progression harmonique" si les inverses de deux termes consécutifs sont en progression arithmétique.

Dès lors, une "suite" est arithmétique, géométrique, harmonique si ses termes sont respectivement en progression arithmétique, géométrique, harmonique et b est la moyenne arithmétique, géométrique, harmonique de a et c si les nombres a, b, c sont en progression arithmétique, géométrique, harmonique.

Remarque

Pour les définitions des moyennes citées ci-dessus voir le chapitre de Statistiques page 562.

Définitions (#6.4.210) :

D1. Une "suite majorée", est une suite telle qu'il existe un réel M tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$

D2. Une "suite minorée", est une suite telle qu'il existe un réel m tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$

D3. Une "suite bornée", est une suite telle qu'elle est à la fois majorée et minorée.

D4. Une suite (u_n) est appelée "suite croissante" si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$

D5. Une suite (u_n) est appelée "suite décroissante" si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0$

Remarque

Si une suite est croissante ou décroissante, on dit parfois simplement qu'il s'agit d'une "séquence monotone" (sans préciser si elle est croissante ou décroissante).

D6. Une suite (u_n) est appelée "suite constante" si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$

Nous allons maintenant voir quelques séquences arithmétiques et géométriques pratiques importantes qui seront utilisées plus tard dans d'autres sections de ce livre.

Mais gardez à l'esprit pendant la lecture que nous pouvons exprimer des séquences la plupart du temps de deux manières :

- En une "formule fermée" ou une "relation fermée" pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une relation pour u_n utilisant un nombre fini fixe d'opérations sur n seulement (et rien d'autre !). C'est ce que nous pensons normalement en tant que fonction de n seulement,
- En une "définition récursive" pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui consiste en une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation reliant un terme de la séquence aux termes précédents (termes avec un indice plus petit n) et une condition initiale.

En cours de traduction de l'anglais

6.4.1.1 Suites arithmétiques

Définition (#6.4.211) : Nous disons que des nombres ou que des "termes" en progression forment une "suite arithmétique" lorsque leurs valeurs numériques différent d'une valeur r appelée la "raison" de la suite telle que :

$$u_{k+1} = u_k + r \tag{6.4.2}$$

où r est donc la "raison" de la progression. Nous avons alors bien évidemment si l'indexation commence à partir de 0 :

$$\boxed{u_k = u_0 + k \cdot r} \tag{6.4.3}$$

✍**Exemples :**

E1. La suite :

$$n, n+1, n+2, n+3, \ldots, n+k \tag{6.4.4}$$

où n est une constante, est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

E2. La suite :

$$n+0\cdot x, n+1\cdot x, n+2\cdot x, n+3\cdot x, \ldots, n+k\cdot x \tag{6.4.5}$$

est une suite arithmétique de raison x, etc.

Ainsi, si nous notons par u_n un terme quelconque de la suite (u_n) de raison r, nous avons :

$$u_0 = \text{c}^{te}, u_1 = u_0 + r, u_2 = u_1 + r = u_0 + 2\cdot r, \ldots, u_n = u_0 + n\cdot r \tag{6.4.6}$$

Nous avons les propriétés suivantes pour un tel type de suite :

P1. Un terme dont le rang est la moyenne arithmétique des rangs de deux autres termes est la moyenne arithmétique de ces deux termes.

Démonstration 6.17.2. Considérons maintenant (u_n) une suite arithmétique de raison r donnée selon le développement précédent :

$$u_n = u_0 + n \cdot r \tag{6.4.7}$$

et soient $a, b, k \in \mathbb{N}$ tels que $a + b = 2k$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} u_a + u_b &= u_0 + (a)r + u_0 + (b)r = 2u_0 + 2\left(\frac{a+b}{2}\right)r \\ &= 2\left(u_0 + \left(\frac{a+b}{2}\right)r\right) = 2u_{\frac{a+b}{2}} = 2u_k \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

et alors :

$$u_k = \frac{u_a + u_b}{2} \tag{6.4.9}$$

avec $k = \dfrac{a+b}{2}$.

■ Q.E.D.

P2. Pour trois termes consécutifs u_n, u_{n+1}, u_{n+2} en progression arithmétique de raison r, le deuxième terme est la moyenne arithmétique des deux autres.

Démonstration 6.17.3. Effectivement, nous avons :

$$\frac{u_n+u_{n+2}}{2}=\frac{u_n+(u_n+2r)}{2}=2\frac{u_n+r}{2}=u_n+r=u_{n+1} \quad (6.4.10)$$

■ Q.E.D.

P3. Si $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ est une progression arithmétique de raison r, alors la n-ème somme partielle (c'est-à-dire, la somme des n premiers termes à la puissance 1) est donnée par :

$$S_n=\frac{n}{2}(2u_1+n\cdot r)=\frac{n}{2}(u_1+u_n) \quad (6.4.11)$$

lorsque l'indexation se fait à partir de 1.

Démonstration 6.17.4. ous pouvons écrire la série :

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n\\&=u_1+(u_1+r)+(u_1+2r)+(u_1+3r)+\ldots+(u_1+(n-1)r)\end{aligned} \quad (6.4.12)$$

En jouant avec la deuxième ligne, nous obtenons :

$$S_n=(u_1+u_1+u_1+u_1+\ldots+u_1)+(r+2r+3r+4r+\ldots+(n-1)r) \quad (6.4.13)$$

Ce qui se simplifie encore :

$$S_n=nu_1+r(1+2+3+4+\ldots+(n-1)) \quad (6.4.14)$$

Nous démontrerons quelques lignes plus bas que la série de Gauss simple :

$$1+2+3+4+\ldots+n \quad (6.4.15)$$

est égale à :

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2} \quad (6.4.16)$$

Nous avons alors in extenso pour :

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1) \quad (6.4.17)$$

la relation suivante :

$$S_1=\frac{(n-1)n}{2} \quad (6.4.18)$$

Il vient alors :

$$S_n=nu_1+r\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n}{2\left[2u_1+r(n-1)\right]} \quad (6.4.19)$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous voyons avec cette dernière relation que si $u_1 = r = 1$ nous retombons sur la série de Gauss simple.

Comme :

$$u_n = u_1 + r(n-1) \tag{6.4.20}$$

lorsque l'indexation se fait à partir de 1. Il vient alors :

$$S_n = \frac{n}{2}[u_1 + u_n] \tag{6.4.21}$$

■ Q.E.D.

Nous verrons d'autres types de sommations un peu plus bas lors de notre étude des séries !

6.4.1.2 Suites harmoniques

Définition (#6.4.212) : Nous disons que des nombres $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c},\ldots$ forment une "suite harmonique" lorsque leurs inverses sont en progression arithmétique. Nous représentons cette progression par :

$$\boxed{h_{k+1} = \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{1}{u_k + r}} \tag{6.4.22}$$

Nous avons alors évidemment si l'indexation part de 0 :

$$\frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_0 + k \cdot r} \tag{6.4.23}$$

De plus, nous supposons, dans ce qui suit, qu'il n'y a pas de dénominateur nul.

En partageant cette série en groupes renfermant successivement 2^n termes, nous observons que chacun des groupes est plus grand que celui qui le suit :

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \ldots \tag{6.4.24}$$

Nous pouvons aussi voir que chaque terme est la moyenne harmonique du précédent et consécutif :

Démonstration 6.17.5.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\dfrac{1}{h_{k-1}} + \dfrac{1}{h_{k+1}}} &= \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{u_0+(k-1)r}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{u_0+(k+1)r}}} = \frac{1}{(u_0+(k-1)r)+(u_0+(k+1)r)}\\ &= \frac{1}{2u_0+2kr} = \frac{1}{2(u_0+kr)} = \frac{1}{2}\frac{1}{h_k}\end{aligned} \tag{6.4.25}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi :

$$\frac{1}{h_k}=\frac{2}{\dfrac{1}{h_{k-1}}+\dfrac{1}{h_{k+1}}} \tag{6.4.26}$$

Donc finalement :

$$h_k=\frac{\dfrac{1}{h_{k-1}}+\dfrac{1}{h_{k+1}}}{2} \tag{6.4.27}$$

■ Q.E.D.

6.4.1.3 Suites géométriques

Définition (#6.4.213) : Une "suite géométrique" est une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal au précédent n multiplié par un nombre constant q que nous appelons aussi la "raison" ou "ratio commun" de la progression. Ce que nous noterons :

$$n,qn,q^2n,q^3n,\ldots \tag{6.4.28}$$

Ainsi, si nous notons par u_n un terme quelconque de la suite (u_n), nous avons (trivial) :

$$\boxed{u_k=u_0q^k} \tag{6.4.29}$$

Voici quelques propriétés pour un tel type de suite (sans démonstration pour l'instant... sauf demande car triviales pour la plupart) :

P1. (triviale) Le quotient de deux termes d'une même suite est une puissance de la raison q dont l'exposant égale la différence des rangs des deux termes (simple rapport de termes de puissance).

P2. (triviale) Si nous multiplions ou divisons terme à terme deux suites géométriques, nous obtenons une troisième suite géométrique dont la raison égale le produit (respectivement le quotient) des raisons des progressions données (simple opération avec les raisons des deux séries d'origine).

P3. Dans une suite géométrique, un terme dont le rang est la moyenne arithmétique des rangs de deux autres termes est la moyenne géométrique (voir section Statistiques page 555) de ces deux termes (relisez plusieurs fois au besoin... !).

Démontrons cette dernière propriété en détails :

Démonstration 6.17.6. Soit une suite géométrique réelle positive de raison q, nous avons :

$$u_n=u_0q^n \tag{6.4.30}$$

Soient a,b deux termes de la suite géométrique, nous avons alors :

$$u_a\cdot u_b=u_0^2q^aq^b=\left(u_0q^{\frac{a+b}{2}}\right)^2=u_{\frac{a+b}{2}}^2=u_k^2 \tag{6.4.31}$$

et ainsi :

$$u_k=\sqrt{u_a\cdot u_b} \tag{6.4.32}$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Corollaire 6.17.1. Nous avons comme corolaire que pour trois termes consécutifs $n, n+1, n+2$ en progression géométrique, le deuxième terme est la moyenne géométrique des deux autres.

Démonstration 6.17.7. Nous avons :

$$u_n u_{n+2} = u_0^2 q^n q^{n+2} = u_0^2 q^{n+(n+2)} = u_0^2 q^{2n+2} \quad (6.4.33)$$

Dès lors :

$$\sqrt{u_n u_{n+2}} = \sqrt{u_0^2 q^{2n+2}} = u_0 q^{n+1} = u_{n+1} \quad (6.4.34)$$

■ Q.E.D.

Il existe cependant quelques suites particulières qui ont des propriétés particulières que nous retrouvons très fréquemment en mathématique ou physique théorique. Sans trop entrer dans les détails, voici une petite liste (non exhaustive de ces dernières) :

6.4.1.4 Suite de Cauchy

Il est souvent intéressant pour le mathématicien, autant que pour le physicien, de connaître les propriétés d'une suite ayant un type de progression donnée. La propriété la plus importante étant la limite vers laquelle elle tend.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le lecteur qui n'est pas à l'aise avec la topologie peut sauter le texte qui va suivre en attendant... et celui qui souhaite en savoir plus sur les suites de Cauchy peut se reporter au chapitre de Topologie et particulièrement à la section consacrée aux Fractales page **??**.

Définition (#6.4.214) : Soit (X, d) un espace métrique (voir section Topologiie page 2429), nous disons que la suite :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.4.35)$$

converge vers $x \in X$ si par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \quad (6.4.36)$$

En d'autres termes plus nous avançons dans la suite, plus les points sont proches (au sens de la métrique d) les uns des autres.

Si nous choisissons une métrique particulière (la métrique euclidienne par exemple) et une séquence discrète, la définition ci-dessus ressemblera à ceci :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad (6.4.37)$$

où le point de convergence est donc a et nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \tag{6.4.38}$$

Dans l'exemple de la figure ci-dessous où la suite semble converger vers 1.13, nous observons que pour un ε positif non nul donné, il existe un n particulier que nous notons N ($n = 17$ dans la figure ci-dessous) à partir de laquelle la séquence converge :

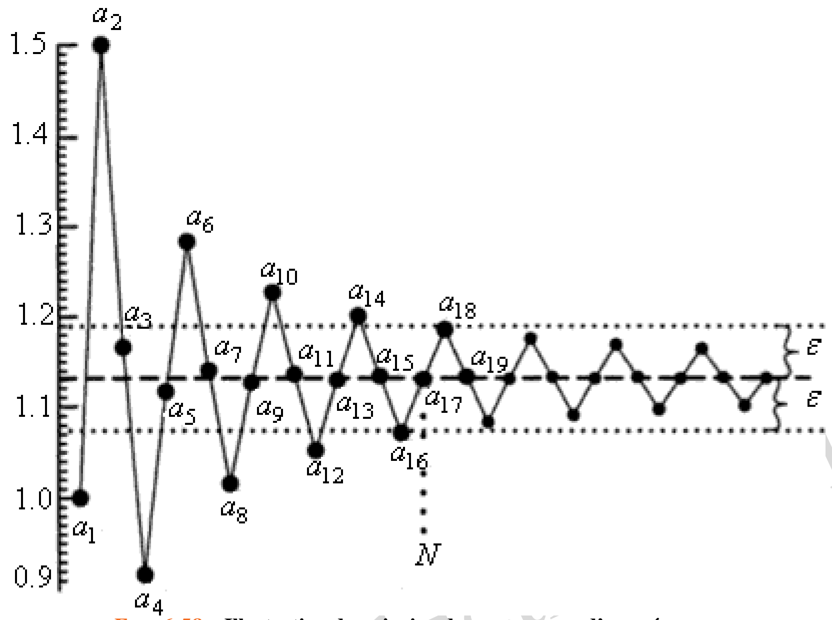


FIG. 6.58 – **Illustration du principe de convergence d'une séquence**

Cependant la définition précédente de la convergence pose problème car la limite x doit être connue. Dans la plupart des cas intéressants, x est malheureusement inconnue. Pour sortir de cette impasse, Cauchy a eu l'idée de proposer la définition suivante :

Définition (#6.4.215) : Nous disons par définition que la suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X est une "suite de Cauchy"ši :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n \geq N \text{ nous avons } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \tag{6.4.39}$$

Le lecteur doit remarquer qu'il ne suffit pas que chaque terme se rapproche arbitrairement du terme précédent. C'est pourquoi exiger que $|a_{N+1} - a_N| < \varepsilon$ n'est pas suffisant !

Il est clair alors que toute suite convergente est une suite de Cauchy (bon il y a quelques subtilités auxquelles nous ne ferons pas référence pour l'instant).

Remarque

Ce critère facilite certaines démonstrations car il permet de montrer l'existence d'une limite sans faire intervenir sa valeur, en général inconnue.

Théorème 6.18. Maintenant, démontrons le théorème affirme que toute suite convergente est uje suite de Cauchy.

En cours de tradu… l' anglais

Démonstration 6.18.1. Soit une suite u_n convergeante vers l (qui nous est inconnu donc !) et $\varepsilon > 0$ (choisi au hasard). Il existe alors selon la définition d'une suite convergente, $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.4.40}$$

Le choix d'écrire $\varepsilon/2$ est complètement arbitraire mais en fait nous anticipons juste le résultat final de la démonstration afin que celui-ci soit plus esthétique...

Alors pour $p, q > N$ (au fait connaître le N en question importe peu puisque cela doit marcher pour n'importe lequel... bon n'oublions pas quand même que N dépend de $\varepsilon/2$) nous avons selon l'inégalité triangulaire (voir section Calcul Vectoriel page 1805) :

$$d(u_p, u_q) \leq d(u_p, l) + d(l, u_q) \tag{6.4.41}$$

et puisque $d(u_n, l) \leq \varepsilon/2$, nous pouvons écrire :

$$d(u_p, u_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.4.42}$$

Ce qui revient à écrire :

$$d(u_p, u_q) \leq \varepsilon \tag{6.4.43}$$

C'est peut-être un peu abstrait alors voyons un exemple avec la suite harmonique (divergente comme nous le savons déjà) comme étant un exemple proche de la démonstration :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{6.4.44}$$

D'abord, rien ne nous interdit de prendre $n \geq 2$ (sinon cela va être dur de faire une différence entre deux termes...).

Dès lors nous prenons la distance euclidienne :

$$d(u_p, u_q) = d(u_{2n}, u_n) = u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \tag{6.4.45}$$

D'abord le lecteur remarquera que dans tous les cas $k \leq 2n$ puisque compris entre $n+1$ et $2n$. Ce qui nous amène à pouvoir écrire :

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \quad \forall\, n+1 \leq k \leq 2n \tag{6.4.46}$$

Donc à partir de cette égalité il vient automatiquement que chaque terme de la somme de gauche ci-dessous sera plus grand que chaque terme de la somme de droite suivant :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \tag{6.4.47}$$

avec (faites juste un exemple particulier) :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \tag{6.4.48}$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \tag{6.4.49}$$

Maintenant l'idée est de voir que la somme de gauche est donc plus grande ou égale à $\varepsilon = 1/2$ et cela quel que soit n. Donc la suite n'est pas convergente !

Ainsi, l'idée c'est que nous ayons trouvé un ε pour lequel le critère de Cauchy est mis en défaut.

■ Q.E.D.

Donc, ce n'est pas parce que des points se rapprochent les uns des autres qu'ils convergent vers un point, car ce point n'existe peut-être pas.

Le meilleur exemple est probablement le suivant (c'est aussi un exemple un peu bête mais...) :

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Prenons $X = \mathbb{Q}$ et la différence absolue comme distance :

$$d(p,q) = |p-q| \tag{6.4.50}$$

Soit z un nombre irrationnel et $q_j \in \mathbb{Q}$, avec $j \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|z-q_j| \leq \frac{1}{j} \tag{6.4.51}$$

L'idée est que plus le plus grand est j, plus le nombre rationnel q_j est proche de l'irrationnel z et nous savons que nous pouvons trouver une telle suite. Montrons que les q_1, q_2 que nous pourrions construire forment une suite de Cauchy ! En effet en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|q_m - q_n| \leq |z-q_m| - \leq |z-q_n| \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \tag{6.4.52}$$

est donc une suite de Cauchy si et seulement si $|q_m - q_n| \leq \varepsilon$:

$$m, n \geq \frac{1}{2\varepsilon} \tag{6.4.53}$$

Nous avons donc trouvé un N (égal à $\dfrac{1}{2\varepsilon}$) qui satisfait à notre définition d'une suite de Cauchy. Or cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ sinon z serait rationnel ! Vous pouvez vérifier cela avec π et la suite :

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{3}{1} = 3 & |\pi - q_1| &\cong 0.141592 \leq \frac{1}{1}\\
q_2 &= \frac{13}{4} = 3.25 & |\pi - q_1| &\cong 0.108407 \leq \frac{1}{2}\\
q_3 &= \frac{19}{6} = 3.1\bar{6} & |\pi - q_3| &\cong 0.02507401 \leq \frac{1}{3}\\
q_4 &= \frac{22}{7} = 3.1428571428571428 & |\pi - q_4| &\cong 0.001264489267 \leq \frac{1}{4}\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{6.4.54}$$

Remarque

Il semblerait que les mathématiciens utilisent ce fait pour définir l'ensemble des irrationnels en utilisant quelques concepts topologiques supplémentaires.

Nous venons donc voir qu'une suite de Cauchy n'est pas forcément une suite convergente dans X. La réciproque toutefois est vraie : toute suite convergente est une suite de Cauchy !

6.4.1.5 Suite de Fibonacci

Si nous calculons une suite de nombres commençant par 0 et 1, de telle sorte que chaque terme soit égal à la somme des deux précédents, nous pouvons former la suite suivante :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots \tag{6.4.55}$$

par conséquent, si nous désignons les différents termes par :

$$u_0, u_1, u_2, \ldots \tag{6.4.56}$$

nous avons la loi de suivante de la séquence :

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \tag{6.4.57}$$

Plus souvent connue sous la notation suivante :

$$\boxed{F_{n+2} = F_n + F_{n+1}} \tag{6.4.58}$$

La suite de Fibonacci possède des nombreuses propriétés intéressantes, qui seront développées ultérieurement. Il s'agit cependant de la première "suite récurrente" connue (d'où le fait que nous en parlions dans ce livre).

L'origine de cette suite viendrait d'un problème de lapins posé à Fibonacci en 1202. Partant d'un couple, combien de couples de lapins obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois. Nous avons alors :

- Début : Nous n'avons rien (0)
- 1er mois : Un couple de bébés lapins qui vont grandir (1)
- 2ème mois : Un couple de lapins adultes (qui feront des bébés le mois prochain...) (1)
- 3ème mois : Un couple de lapins adultes et un couple de bébés donc 2 couples (2).
- 4ème mois : Deux couples de lapins adultes et un couple de bébés donc 3 couples (3).
- et ainsi de suite...

Prenons un exemple dans le monde réel (c'est typiquement un exemple scientifique biaisé car vous finirez toujours par trouver dans la Nature ce que vous cherchez pour argumenter vos théories avec au moins un exemple particulier...) : le coeur de certaines fleurs, les écailles d'un ananas ou d'une pomme de pin forment deux familles de spirales enroulées en sens inverse. Sur une pomme de pin, vous compterez 5 spirales dans un sens et 8 dans l'autre, sur l'ananas, 8 et 13, sur la fleur de tournesol 21 et 34. Chaque fois, nous obtenons des nombres de Fibonacci !

Une illustration de ceci consiste à faire le simple schéma suivant (appelé "spirale de Fibonacci") qui reproduit les nombres de Fibonacci sur un plan quadrillé :

En cours de traduction de l'anglais

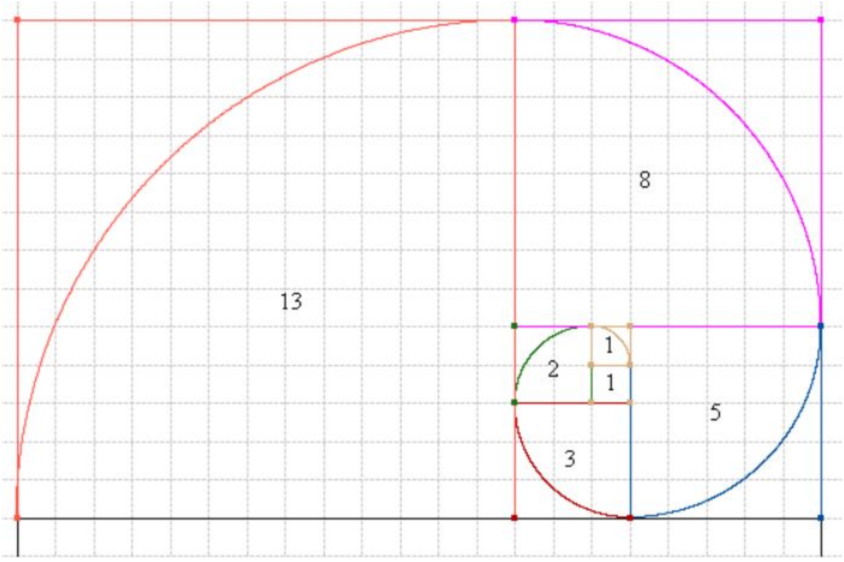


FIG. 6.59 – **Spirale de Fibonacci**

En cours de traduction... mais

Remarque

La spirale de Fibonacci (quarts de cercles tangents à l'intérieur de chaque carré) ne doit pas être confondue avec la "spirale d'or" (une spirale logarithmique dont le facteur de croissance est le nombre d'or φ) !

Considérons maintenant la limite de la suite de Fibonacci, soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=L \tag{6.4.59}$$

par les propriétés des limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=L \tag{6.4.60}$$

Comme la construction de la suite de Fibonacci est donnée par :

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \tag{6.4.61}$$

En utilisant cette équation pour remplacement, nous obtenons :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+\frac{1}{L} \tag{6.4.62}$$

et nous obtenons ainsi l'équation équivalente bien connue (voir page 1369) :

$$1+\frac{1}{L}=L\Leftrightarrow L^2-L-1=0 \tag{6.4.63}$$

et enfin résoudre pour L en utilisant la formule quadratique donne (en gardant la seule solution qui a du sens) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi} \tag{6.4.64}$$

qui est le non moins fameux "nombre d'or" !

Nous reviendrons plus tard (voir page 1763) sur cette séquence pour prouver une autre relation qu'elle a avec le nombre d'or (voir page 1369) par la détermination directe de la valeur du terme n !

6.4.1.6 Suites logiques/Suites psychologiques

Définition (#6.4.216) : Les psychologues nomment "séquences logiques", des séquences qu'ils écrivent avec une idée en tête, et ils nomment "logiques" les personnes qui trouvent l'idée en question, bien qu'il existe d'autres possibilités mathématiquement parlant (mais les psychologues ne savent rien de la vraie logique).

Par exemple, si vous devez trouver le prochain numéro X de la séquence logique :

$$4, 5, 10, 50, 400, 3500, X \tag{6.4.65}$$

En fait, vous faites la différence entre le dernier et l'antéprécédent puis vous multipliez par 10 donc le nombre suivant est $X = (3500 - 400) \cdot 10 = 31000$.

D'un point de vue rigoureusement mathématique, tout nombre convient pour remplacer X ! Il existe aussi pour chaque valeur de X, un polynôme en n qui prend les valeurs $4, 5, 10, 50, 400, 3500$ pour $n = 0, 1, 2 \ldots, 6$.

Pour l'exemple ci-dessus on peut prendre par exemple :

$$P(n) = -\frac{1}{120}(x-6)(2646x^5 - 25735x^4 + 88490x^3 - 124945x^2 + 59584x + 80) \tag{6.4.66}$$

tel que $P(0) = 4, P(1) = 5, P(2) = 10, \ldots, P(6) = 0$.

En cours de traduction de l'anglais

6.4.2 Séries

Les physiciens ont souvent besoin de résoudre simplement et formellement des problèmes, d'approximer certains "termes" donnés de leurs équations. Pour cela, ils utiliseront les propriétés de certaines séries données. De plus, les statisticiens et les analystes financiers sont souvent confrontés à des séries qu'ils doivent simplifier.

Définition (#6.4.217) : Soit donnée une suite numérique infinie :

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \tag{6.4.67}$$

L'expression :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{6.4.68}$$

est appelée "série numérique".

Définition (#6.4.218) : La somme partielle des n premiers termes de la série est appelée "somme partielle" et notée :

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n} \tag{6.4.69}$$

Si la limite notée S suivante existe et est finie :

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n \tag{6.4.70}$$

nous l'appelons la "somme de la série" et nous disons que c'est une série convergente" (elle est donc de Cauchy !). Cependant, si la limite n'existe pas, nous disons que la est une "série divergente" et n'a pas de somme (pour plus de détails voir le plus bas lorsque nous traiterons de critères de convergence empiriques).

Théorème 6.19. Prouvons aussi pour le plaisir (car c'est presque trivial) que si $\sum\limits_{k \geq 0} u_k$ est une série numérique convergente alors :

$$\lim_{k \to +\infty} u_k = 0 \tag{6.4.71}$$

Mais l'inverse n'est pas forcément vrai ! ! En fait rappelez-vous l'exemple lors de notre étude ci-dessus des suites de Cauchy avec la série harmonique $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ qui n'est pas convergente même si les termes tendent vers zéro lorsque $k \to +\infty$.

Démonstration 6.19.1. Nous supposons d'abord que $\sum\limits_{k \geq 0} u_k$ est bien une série convergente et notons par S sa limite. Posons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \tag{6.4.72}$$

Alors :

$$S_n - S_{n-1} = u_n \tag{6.4.73}$$

En cours de traduction de l' anglais

Or, si la série est convergente : :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \tag{6.4.74}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0 \tag{6.4.75}$$

■ Q.E.D.

Suite à la demande d'un lecteur, démontrons en détail (pas seulement en supposant que c'est intuitif) que la série harmonique :

$$H = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots \tag{6.4.76}$$

diverge.

Démonstration 6.19.2. Supposons que la série converge vers H, c'est-à-dire :

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots \tag{6.4.77}$$

Alors :

$$H \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \ldots \tag{6.4.78}$$

En calculant les accolades, nous obtenons :

$$H \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{2} + H \tag{6.4.79}$$

Cette contradiction conclut la preuve !

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Beaucoup de gens ont du mal à comprendre intuitivement pourquoi la série harmonique diverge alors que la série p-harmonique converge. Bien sûr, il existe des méthodes et des applications pour prouver la convergence et la divergence, mais beaucoup de gens ont du mal à comprendre intuitivement pourquoi. Nous savons que nous ne devons jamais trop faire confiance à l'intuition, mais cela est difficile à comprendre pour beaucoup. Dans les deux cas, les termes de la série deviennent plus petits, donc se rapprochent de zéro, mais

ils aboutissent tous deux à des réponses différentes !

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\text{diverges}\\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\text{converges}\end{aligned} \quad (6.4.80)$$

Peut-être une manière convaincante est de faire un prolongement analytique pour changer la somme en une intégrale (voir section Calcul Différentiel et Ontégral page 1513) :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\bigg|_1^{+\infty}=-\frac{1}{+\infty}+1=1 \quad (6.4.81)$$

converge mais :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(x)\bigg|_1^{+\infty}=+\infty \quad (6.4.82)$$

Dans la sous-section suivante, nous allons voir comment calculer la somme partielle de certaines séries classiques importantes en physique, en statistique et en finance. Nous commencerons par les séries arithmétiques de Gauss qui sont une expression de la somme des n premiers entiers non nuls élevés à une puissance donnée k sous une forme condensée. L'application de cette forme condensée d'une série a une utilité pratique importante en physique, en statistique et en finance lorsque l'on souhaite simplifier l'expression de certains résultats.

En cours de traduction de Opera Magistris

6.4.2.1 Séries de Gauss

Les séries arithmétiques de Gauss sont l'expression de la somme de n premiers entiers non nuls élevés à une puissance k donnée sous une forme condensée S_k. L'application de cette forme condensée de série a une utilité pratique en physique, statistique et finance (voir les chapitres y relatifs lorsque l'on souhaite simplifier l'expression de certains résultats.

Gauss aurait trouvé une méthode séduisante en 1786 pour déterminer l'expression de la somme arithmétique des entiers à la puissance 1 lorsqu'il avait neuf ans (...) :

$$\begin{array}{l} S_1=1+2+3+\ldots+(n-1)+n\\ +S_1=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1\\ \hline 2S_1=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)\end{array} \quad (6.4.83)$$

En simplifiant, nous trouvons facilement (notons que ce n'est pas une relation récursive !) :

$$\boxed{S_n=\frac{n(n+1)}{2}} \quad (6.4.84)$$

pour $n\geq 0$. Indiquons que chaque somme intermédiaire de la série $(1,3,6,10,15,$ etc.) est appelée "nombre triangulaire" puisqu'il est possible de le représenter sous la forme suivante :

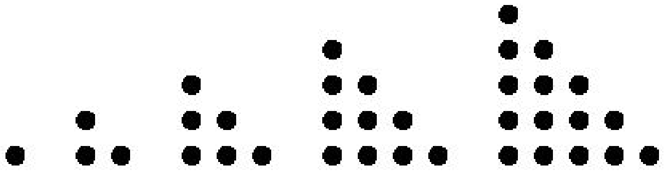


FIG. 6.60 – Nombres triangulaires

Nous pouvons continuer ainsi pour des ordres supérieurs mais nous les présentons pas en tant qu'exercices parce que ces relations sont utiles !

Calculons maintenant le cas très important que nous retrouverons dans un certain nombre d'autres sections (Économie, Physique Quantique Ondulatoire, etc.) et qui est la somme des n premiers carrés (toujours non nuls).

Posons pour cela :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1+2+3+\ldots+n \\ S_2 &= 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 \end{aligned} \tag{6.4.85}$$

nous savons du théorème binomial de Newton (voir section Calcul Algébrique page 1347) que :

$$(k+1)^3-k^3 = 3k^2+3k+1 \tag{6.4.86}$$

Nous pouvons donc écrire et ajouter membre à membre les n égalités suivantes :

$$\begin{array}{c} 2^3-1^3 = 3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ 3^3-2^3 = 3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\ 4^3-3^3 = 3\cdot 3^2+3\cdot 3+1 \\ \ldots \\ (n+1)^3-n^3 = 3n^3+3n+1 \\ \hline (n+1)^3-1 = 3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+n \end{array} \tag{6.4.87}$$

Et la somme peut être simplifiée comme :

$$(n+1)^3-1 = 3S_2+3S_1+1n \tag{6.4.88}$$

Après quelques manipulations algébriques élémentaires :

$$\begin{aligned} 3S_2 &= (n+1)^3-1-3S_1-n = (n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n \\ &= (n+1)^3-(n+1)-3\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left[2(n+1)^2-2-3n\right] \end{aligned} \tag{6.4.89}$$

d'où :

$$S_2 = \frac{n(n+1)}{6}\left[2n^2+4n+2-2-3n\right] = \frac{n+1}{6}(2n^2+n) \tag{6.4.90}$$

Finalement :

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \tag{6.4.91}$$

En cours de traduction de l'anglais

Terminons avec la somme des n premiers cubes (non nuls). Le principe étant le même que précédemment, nous posons :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1+2+\ldots+n \\ S_2 &= 1^2+2^2+\ldots+n^2 \\ S_3 &= 1^3+2^3+\ldots+n^3 \end{aligned} \tag{6.4.92}$$

Nous savons par ailleurs du théorème binomial de Newton (voir section Calcul Algébrique page 1347) que :

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1 \tag{6.4.93}$$

Nous obtenons en faisant varier k de 1 à n, n relations que nous pouvons ajouter membre à membre :

$$\begin{aligned} 2^4-1^4 &= 4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1 \\ 3^4-2^4 &= 4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1 \\ &\ldots \\ (n+1)^4-n^4 &= 4n^3+6n^2+4n+1 \\ \hline (n+1)^4-1 &= 4(1^3+2^3+...+n^3)+6(1^2+2^2+\ldots+n^2)+4(1+2+\ldots+n)+n \end{aligned} \tag{6.4.94}$$

Et la somme peut être simplifiée ainsi :

$$(n+1)^4-1^4=4S_3+6S_2+4S_1+n \tag{6.4.95}$$

Donnant après développement :

$$(n+1)^4-1^4=4S_3+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+n \tag{6.4.96}$$

Et après une première simplification :

$$(n+1)^4-1^4=4S_3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n \tag{6.4.97}$$

Et une seconde simplification :

$$\begin{aligned} 4S_3 &= -n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n+(n+1)^4-1 \\ &= -\left((n^2+n)(2n+1)\right)-(2n^2+2n)-n+(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)-1 \\ &= -(2n^3+n^2+2n^2+n)+n^4+4n^3+4n^2+n \\ &= n^4+2n^3+n^2=n^2(n^2+2n+1)=n^2(n+1)^2 \end{aligned} \tag{6.4.98}$$

Le résultat final est donc :

$$S_3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{6.4.99}$$

ou écrit autrement :

$$\boxed{S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}} \tag{6.4.100}$$

En cours de traduction de l'anglais

Évidemment, nous pouvons continuer ainsi longtemps mais à partir d'une certaine valeur de l'élévation de la puissance les choses se compliquent un petit peu (de plus, la méthode est un peu longue). Ainsi, un des membres de la famille des Bernoulli (c'était une famille de mathématiciens assez doués...) a montré une relation générale fonctionnant pour n'importe quelle puissance en définissant ce que nous appelons le "polynôme de Bernoulli".

Terminons pour conclure avec un dernier cas particulier dont nous aurons besoin lors de notre étude des séries de Fourier. Nous posons :

$$S_n = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} \tag{6.4.101}$$

Nous voulons exprimer cette expression sous forme de fraction rationnelle. Pour ce faire, nous multiplions tout par x^2. Nous avons donc les deux expressions :

$$\begin{aligned} S_n &= x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} \\ x^2 S_n &= x^3 + x^5 + x^7 + \ldots + x^{2n+1} \end{aligned} \tag{6.4.102}$$

Nous soustrayons la première de la deuxième :

$$S_n(x^2 - 1) = x^{2n+1} - x \tag{6.4.103}$$

Finalement :

$$\boxed{S_n = \frac{x^{2n+1} - x}{x^2 - 1}} \tag{6.4.104}$$

La plupart du temps, pour indiquer qu'il s'agit de puissances impaires, nous préfèrons écrire :

$$S_{2n+1} = \frac{x^{2n+1} - x}{x^2 - 1} \tag{6.4.105}$$

De même, pour les besoin de la section d'Économie, nous avons :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} \\ x^2 S_n &= x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n+2} \end{aligned} \tag{6.4.106}$$

Soit :

$$S_n(1 - x^2) = 1 - x^{2n+2} \tag{6.4.107}$$

Dès lors :

$$\boxed{S_n = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}} \tag{6.4.108}$$

La plupart du temps, pour indiquer qu'il s'agit de puissances paires, nous préfèrons écrire :

$$S_{2n} = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2} \tag{6.4.109}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.4.2.1.1 Nombres et polynômes de Bernoulli

Comme nous venons de le voir plus haut il est possible d'exprimer la somme des n premiers entiers non nuls élevés à une puissance donnée selon (les quatre premiers ont été démontrés précédemment) les relations suivantes où nous avons posé avec $n := n+1$ le nombre de termes dont nous voulons la somme 0 compris (d'où le signe négatif que nous n'avions pas plus haut) :

$$\begin{aligned}
&S_0 = n\\
&S_1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2}\\
&S_2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n-1)(2n-2)}{6}\\
&S_3 = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}\\
&S_4 = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}\\
&S_5 = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{n^2(2n^2-2n-1)(n-1)^2}{12}\\
&\quad\ldots
\end{aligned} \tag{6.4.110}$$

Il est dit que Jacob Bernoulli remarqua ensuite que les polynômes S_p avaient la forme :

$$S_p = \frac{1}{p+1}n^{p+1} - \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{12}n^{p-1} + 0 \cdot n^{p-2} + \ldots \tag{6.4.111}$$

Dans cette expression, les nombres $(1, -1/2, 1/12, 0, \ldots)$ semblent ne pas dépendre de p. Plus généralement, après tâtonnement nous remarquons que le polynôme peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
S_p(n) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} \frac{p!}{(p+1-k)!} n^{p+1-k} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} C_k^{p+1} n^{p+1-k}\\
&= \frac{B_0}{0!}\frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{B_1}{1!}n^p + \frac{B_2}{2!}pn^{p-1} + \frac{B_3}{3!}p(p-1)n^{p-2} + \ldots + \frac{B_p}{1!}n
\end{aligned} \tag{6.4.112}$$

Ce qui donne par identification les "nombres de Bernoulli" :

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, \ldots \tag{6.4.113}$$

Théorème 6.20. Par la suite, les mathématiciens dans leurs recherches sont tombés au hasard (? ? ?) sur le fait que les nombres de Bernoulli pouvaient être exprimés par la série :

$$G(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{z^k}{k!} \tag{6.4.114}$$

avec $|z| < 2\pi$. En d'autres termes, la fonction génératrice des nombres de Bernoulli serait $G(z)$. Si nous développons les premiers termes de cette série :

$$G(z) = \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \ldots\right)^{-1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \frac{z^6}{30240} - \frac{z^8}{1209600} + \ldots \tag{6.4.115}$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.20.1. Nous avons vu pendant notre étude sur les nombres complexes (voir section Nombres page 249) que :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots \tag{6.4.116}$$

Dès lors :

$$G(z) = \left(\frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots \right)^{-1} \tag{6.4.117}$$

Posons maintenant :

$$G(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{6.4.118}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} G(z)\frac{1}{G(z)} &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots \right)^{-1}} \\ &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots \right) = 1 \end{aligned} \tag{6.4.119}$$

Nous voyons (en distribuant) que :

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots \right) = a_0 + \left(a_1 + \frac{a_0}{2!} \right) z + \left(a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!} \right) z^2 + \ldots \tag{6.4.120}$$

par suite pour que tout cela soit égal à l'unité il faut que :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 + \frac{a_0}{2!} &= 0 \\ a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!} &= 0 \\ &\ldots \end{aligned} \tag{6.4.121}$$

De la deuxième équation nous tirons :

$$a_1 = -\frac{1}{2} \tag{6.4.122}$$

De la troisième équation nous tirons :

$$a_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \tag{6.4.123}$$

etc. En continuant ainsi nous montrons que :

$$a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{720}, \ldots \tag{6.4.124}$$

En cours de traduction de l' anglais

Il est évident que cette méthode ne nous permet de calculer à la main que les premiers termes de cette série.

Ainsi, à partir de (comme nous le verrons plus loin, il s'agit de l'expression d'une "fonction génératrice ordinaire") :

$$G(z)=\frac{z}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}B_k\frac{z^k}{k!} \tag{6.4.125}$$

nous trouvons que les premiers nombres de Bernoulli sont les suivants :

k	B_k
0	1
1	-1/2
2	1/6
3	0
4	-1/30
5	0
6	1/42
7	0
8	-1/30
9	0
10	5/66
11	0
12	-691/2730
13	0
14	7/6
...	...

TAB. 6.15 – **Nombres de Bernoulli**

En cours de traduction de l' anglais

Le lecteur aura remarqué que $B_k=0$ lorsque k est impair et différent de 1. C'est pourquoi parfois la relation ci-dessus est donnée par (rappelez-vous que 0 est un nombre pair !) :

$$G(z)=\frac{z}{e^z-1}=\sum_{k\geq 0\text{ (even)}}B_k\frac{z^k}{k!} \tag{6.4.126}$$

■ Q.E.D.

Nous voyons bien par ailleurs, que les valeurs des nombres de Bernoulli ne peuvent pas être décrites simplement. En fait, ce sont essentiellement des valeurs de la fonction zeta de Riemann (voir plus bas page 1662) pour des valeurs entières négatives de la variable, et ces nombres sont associés à des propriétés théoriques profondes qui dépassent le cadre d'étude de ce livre. Par ailleurs, les nombres de Bernoulli apparaissent également dans le développement en série de Taylor des fonctions tangentes circulaire et hyperbolique, dans la formule d'Euler-Maclaurin (voir plus bas).

Avec une petite modification, il est possible de définir les "polynômes de Bernoulli" $B_k(x)$ par :

$$G(z,x)=\frac{ze^{zx}}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}B_k(x)\frac{z^k}{k!} \tag{6.4.127}$$

avec donc :

$$G(z,0)=G(z) \tag{6.4.128}$$

Théorème 6.21. Par ailleurs, il est aisé de remarquer que :

$$\frac{\partial G(z,x)}{\partial x}=z\frac{ze^{zx}}{e^z-1}=zG(z,x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}B_k(x)}{\mathrm{d}x}\frac{z^k}{k!} \tag{6.4.129}$$

et donc il est facile d'en déduire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}B_k(x)}{\mathrm{d}x}\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}B_{k-1}(x)\frac{z^k}{(k-1)!} \tag{6.4.130}$$

Démonstration 6.21.1. D'un côté nous avons :

$$zG(z,x)=z\sum_{k=0}^{+\infty}B_k(x)\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}B_k(x)\frac{z^{k+1}}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}B_{k-1}(x)\frac{z^k}{(k-1)!} \tag{6.4.131}$$

et d'un autre nous avons :

$$zG(z,x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}B_k(x)}{\mathrm{d}x}\frac{z^k}{k!} \tag{6.4.132}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}B_k(x)}{\mathrm{d}x}\frac{z^k}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}B_{k-1}(x)\frac{z^k}{(k-1)!} \tag{6.4.133}$$

■ Q.E.D.

Et par identification des coefficients nous en déduisons :

$$\frac{\mathrm{d}B_0(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{6.4.134}$$

et pour $k\geq 1$:

$$\frac{\mathrm{d}B_k(x)}{\mathrm{d}x}=kB_{k-1}(x) \tag{6.4.135}$$

En cours de traduction de l' anglais

Il est alors aisé de déduire que les polynômes $B_k(x)$ sont de degré k :

$$\begin{aligned}
&B_0(x)=1\\
&B_1(x)=x-\frac{1}{2}\\
&B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}\\
&B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\\
&B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}\\
&B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{6.4.136}$$

Voici un tracé de ces polynômes :

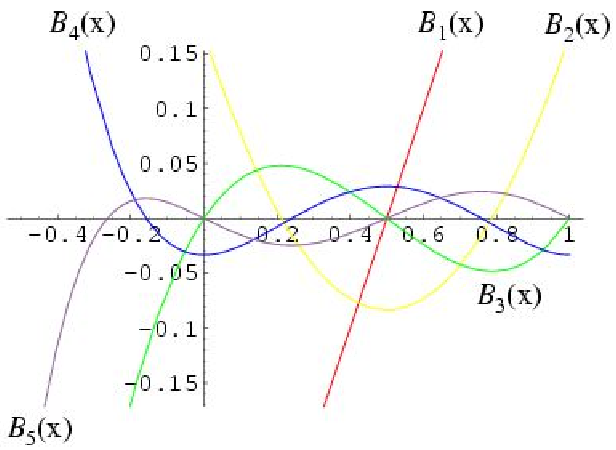


FIG. 6.61 – **Quelques polynômes de Bernoulli (source : Wikipédia)**

En cours de traduction en l'anglais

Ce qui est remarquable c'est qu'à l'aide des polynômes de Bernoulli, nous voyons qu'il est possible d'écrire les S_p sous la forme suivante :

$$S_p(n)=\sum_{k=0}^{n-1}k^p=\frac{1}{p+1}\big(B_{p+1}(n)-B_{p+1}(0)\big) \tag{6.4.137}$$

Certains écrivent cette relation encore autrement. Effectivement, de la relation précédente, nous pouvons écrire :

$$(p+1)\sum_{k=0}^{n-1}k^p=B_{p+1}(n)-B_{p+1}(0) \tag{6.4.138}$$

Et en utilisant :

$$\frac{\mathrm{d}B_k(x)}{\mathrm{d}x}=kB_{k-1}(x) \tag{6.4.139}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}B_{p+1}(x)}{\mathrm{d}x}=(p+1)B_p(x)\\&\Rightarrow B_p(x)=\frac{1}{p+1}B'_{p+1}(x)\\&\Rightarrow\int_0^k B_p(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}\int_0^k B'_{p+1}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}B_{p+1}(x)\bigg|_0^k=\frac{1}{p+1}\left[B_{p+1}(x)-B_{p+1}(0)\right]\end{aligned} \tag{6.4.140}$$

Donc nous venons de démontrer à la façon des ingénieurs que :

$$S_p(n)=\sum_{k=0}^{n-1}k^p=\int_0^k B_p(x)\mathrm{d}x \tag{6.4.141}$$

Cependant, nous pouvons maintenant nous demander ce qu'il advient de la somme partielle de suites arithmétiques et géométriques telles que présentées au début de cette section.

6.4.2.1.2 Formule d'Euler-Maclaurin

La formule d'Euler-Maclaurin est une relation pour la différence entre une intégrale et une somme étroitement liée. Elle peut être utilisé pour approximer des intégrales par des sommes finies, ou inversement pour évaluer des sommes finies et des séries infinies à l'aide d'intégrales et de la machinerie de l'algèbre. Par exemple, de nombreux développements asymptotiques sont dérivés de cette formule[9].

Si m et n sont des nombres naturels et $f(x)$ est une fonction continue à valeurs réelles ou complexes pour des nombres réels x dans l'intervalle $[m,n]$, alors l'intégrale :

$$I(n)=\int_m^n f(x)\mathrm{d}x \tag{6.4.142}$$

peut être approché par la somme (ou vice versa) :

$$S(n)=f(m+1)+\cdots+f(n-1)+f(n) \tag{6.4.143}$$

(voir la méthode des rectangle page **??**). La formule d'Euler-Maclaurin fournit des expressions pour la différence entre la somme et l'intégrale en fonction des dérivées supérieures $f^{(k)}(x)$ évaluées aux extrémités de l'intervalle, c'est-à-dire lorsque $x=m$ et $x=n$.

Explicitement, pour p un entier positif et une fonction $f(x)$ qui est p fois continûment dérivable sur l'intervalle $[m,n]$, nous avons :

$$S(n)-I(n)=\sum_{k=1}^{p}\frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(m)\right)+R_p \tag{6.4.144}$$

[9]Elle nous sera utile lors de notre étude de l'effet électromagnétique dans la section de Physique Quantique Ondulatoire.

En cours de traduction de l'anglais

où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli (avec $B_1 = 1/2$) et R_p, est un terme d'erreur qui dépend de n, m, p , et f et est généralement petit pour des valeurs appropriées de p. La formule est souvent écrite avec l'indice ne prenant que des valeurs paires, puisque les nombres de Bernoulli impairs sont nuls sauf pour B_1. Dans ce cas nous avons :

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) - \int_{m}^{n} f(x)\mathrm{d}x = + \frac{f(n)+f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor p/2 \rfloor} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)\right) + R_p \qquad (6.4.145)$$

Ou bien :

$$\sum_{i=m+1}^{n} f(i) - \int_{m}^{n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(n)-f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{[p/2]} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)\right) + R_p \qquad (6.4.146)$$

Démonstration 6.21.2. L'un des concepts fondamentaux du calcul est la correspondance entre les sommes et les intégrales. Étant donné toute fonction continue $f(x)$ ayant un comportement suffisamment acceptable (...), considérons la somme de l'intégrale définie par :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \quad I(n) = \int_{x=0}^{n} f(x)\mathrm{d}x \qquad (6.4.147)$$

Ces deux fonctions ont évidemment quelques similitudes, mais elles ont aussi des différences significatives. Par exemple, la sommation est prise sur les valeurs de $f(k)$ aux arguments entiers discrets $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, tandis que l'intégrale est prise sur les valeurs de $f(x)$ pour des arguments x variant continûment de 0 à n. Strictement parlant, la fonction $S(n)$ est définie uniquement pour les arguments entiers, tandis que $I(n)$ est définie pour toute valeur réelle non négative de n. Néanmoins, nous pouvons déduire une relation intéressante et utile entre ces deux fonctions !

Tout d'abord, notons que $I(n)$ peut s'écrire sous la forme :

$$I(n) = \int_{x=0}^{1} [f(0+x) + f(1+x) + f(2+x) + \ldots + f(n-1+x)]\mathrm{d}x \qquad (6.4.148)$$

Le développement en série de Taylor de chacun des termes individuels de l'intégrande est de la forme :

$$f(k+x) = \frac{f^{(0)}(k)}{0!} + \frac{f^{(1)}(k)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(k)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(k)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (6.4.149)$$

où $f^{(j)}$ désigne la j-ième dérivée de f. L'intégrale de ce terme de $x = 0$ à 1 est :

$$\int_{x=0}^{1} f(k+x)\mathrm{d}x = \frac{f^{(0)}(k)}{1!} + \frac{f^{(1)}(k)}{2!} + \frac{f^{(2)}(k)}{3!} + \frac{f^{(3)}(k)}{4!} + \ldots \qquad (6.4.150)$$

En insérant toutes ces expressions dans l'intégrale d'origine, nous obtenons :

$$I(n) = \frac{S(0)}{1!} + \frac{S(1)}{2!} + \frac{S(2)}{3!} + \frac{S(3)}{4!} + \ldots \qquad (6.4.151)$$

En cours de traduction de l' anglais

où :

$$S(j)=\sum_{k=0}^{n-1} f^{(j)}(k) \tag{6.4.152}$$

Maintenant, si nous étions partis de la dérivée de $I(n)$ à la place de simplement $I(n)$, nous serions arrivés à la même expression :

$$I(n)=\frac{S(0)}{1!}+\frac{S(1)}{2!}+\frac{S(2)}{3!}+\frac{S(3)}{4!}+\ldots \tag{6.4.153}$$

sauf que chaque $f^{(j)}$ serait remplacé par $f^{(j+1)}$, et donc chaque $S(j)$ serait remplacé par $S(j+1)$, et $I(n)$ serait remplacé par $I^{(1)}(n)$ où :

$$I^{(j)}(n)=\int\limits_{x=0}^{n} f^{j}(x)\mathrm{d}x=f^{(j-1)}(n)-f^{(j-1)}(0) \tag{6.4.154}$$

Ainsi, en commençant par des dérivées successivement supérieures de f, nous obtenons la suite infinie de relations :

$$\begin{aligned}
I^{(0)}(n)&=\frac{S(1)}{1!}+\frac{S(2)}{2!}+\frac{S(3)}{3!}+\frac{S(4)}{4!}+\ldots\\
I^{(1)}(n)&=\frac{S(2)}{1!}+\frac{S(3)}{2!}+\frac{S(4)}{3!}+\frac{S(5)}{4!}+\ldots\\
I^{(2)}(n)&=\frac{S(3)}{1!}+\frac{S(4)}{2!}+\frac{S(5)}{3!}+\frac{S(6)}{4!}+\ldots\\
&\text{etc.}
\end{aligned} \tag{6.4.155}$$

Chacune de ces équations a (en général) une infinité de termes, mais nous pouvons résoudre le système d'équations pour n'importe quel nombre fini de termes en prenant juste une partie restreinte de ces équations. Par exemple, en prenant uniquement les termes jusqu'à $S(6)$ des quatre premières équations, nous avons (sous forme matricielle) :

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{6!}\\
0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!}\\
0 & 0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!}\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1!}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} S(0)\\ S(1)\\ S(2)\\ S(3)\\ S(4)\\ S(5)\\ S(6)\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} I^{(0)}\\ I^{(1)}\\ I^{(2)}\\ I^{(3)}\\ I^{(4)}\\ I^{(5)}\\ I^{(6)}\end{bmatrix} \tag{6.4.156}$$

La résolution de ce système d'équations donne :

$$\begin{bmatrix} S(1)\\ S(2)\\ S(3)\\ S(4)\\ S(5)\\ S(6)\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{B_0}{0!} & \frac{B_1}{1!} & \frac{B_2}{2!} & \frac{B_3}{3!} & \frac{B_4}{4!} & \frac{B_5}{5!}\\
0 & \frac{B_0}{0!} & \frac{B_1}{1!} & \frac{B_2}{2!} & \frac{B_3}{3!} & \frac{B_4}{4!}\\
0 & 0 & \frac{B_0}{0!} & \frac{B_1}{1!} & \frac{B_2}{2!} & \frac{B_3}{3!}\\
0 & 0 & 0 & \frac{B_0}{0!} & \frac{B_1}{1!} & \frac{B_2}{2!}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_0}{0!} & \frac{B_1}{1!}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_0}{0!}
\end{bmatrix} \tag{6.4.157}$$

En cours de traduction de l'anglais

où :

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0 \quad B_6 = \frac{1}{42} \tag{6.4.158}$$

et ainsi de suite sont les nombres de Bernoulli. Ainsi, nous avons :

$$\text{S}(1) = \frac{B_0}{0!}I(0) + \frac{B_1}{1!}I(1) + \frac{B_2}{2!}I(2) + \frac{B_3}{3!}I(3) + \ldots \tag{6.4.159}$$

En insérant les expressions pour chaque $I^{(j)}$ de la relation :

$$I^{(j)}(n) = \int\limits_{x=0}^{n} f^{(j)}(x)\mathrm{d}x = f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0) \tag{6.4.160}$$

cela donne :

$$S(0) = \frac{B_0}{0!}\int\limits_{x=0}^{n} f(x)\mathrm{d}x + \frac{B_1}{1!}[f(n) - f(0)] + \frac{B_2}{2!}\left[f^{(1)}(n) - f^{(1)}(0)\right] + \ldots \tag{6.4.161}$$

Rappelons que $S(0)$ est défini comme la somme de $f(k)$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Par conséquent, si nous souhaitons exprimer cela en termes de sommation de $k = 0$ à n, nous devons ajouter $f(n)$ des deux côtés. En notant que $B_1 = -1/2$, cela conduit au résultat :

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \int\limits_{x=0}^{n} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}[f(n) + f(0)] + \frac{B_2}{2!}[f(1)(n) - f(1)(0)] + \ldots \tag{6.4.162}$$

Cela résultat est nommé la "formule d'Euler-Maclaurin", une généralisation de la formule de Bernoulli pour la somme des puissances des premiers n entiers. Souvent utilisée sous la forme suivante :

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) - \int\limits_{x=0}^{n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[f(n) + f(0)] + \frac{B_2}{2!}[f(1)(n) - f(1)(0)] + \ldots \tag{6.4.163}$$

ou en utilisant une notation condensée :

$$S - I = \sum_{k=1}^{p} \frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right) + R_p \tag{6.4.164}$$

Il convient de noter que cette série est divergente pour la plupart des applications, mais l'erreur est inférieure au premier terme négligé, de sorte que la formule d'Euler-Maclaurin est souvent une méthode d'approximation utile, reliant la sommation de la série à l'intégrale continue d'une fonction.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Les nombres de Bernoulli de B_1 à B_7 sont $1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0$. Par conséquent, les cas d'ordre inférieur de la formule d'Euler-Maclaurin sont :

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} f(i)-\int_{m}^{n} f(x)\mathrm{d}x &= \dfrac{f(m)+f(n)}{2}+\int_{m}^{n} f'(x)P_1(x)\mathrm{d}x\\
&= \dfrac{f(m)+f(n)}{2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{f'(n)-f'(m)}{2!}-\int_{m}^{n} f''(x)\dfrac{P_2(x)}{2!}\mathrm{d}x\\
&= \dfrac{f(m)+f(n)}{2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{f'(n)-f'(m)}{2!}+\int_{m}^{n} f'''(x)\dfrac{P_3(x)}{3!}\mathrm{d}x\\
&= \dfrac{f(m)+f(n)}{2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{f'(n)-f'(m)}{2!}-\dfrac{1}{30}\dfrac{f'''(n)-f'''(m)}{4!}\\
&\quad -\int_{m}^{n} f^{(4)}(x)\dfrac{P_4(x)}{4!}\mathrm{d}x\\
&= \dfrac{f(m)!f(n)}{2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{f'(n)-f'(m)}{2!}-\dfrac{1}{30}\dfrac{f'''(n)-f'''(m)}{4!}\\
&\quad +\int_{m}^{n} f^{(5)}(x)\dfrac{P_5(x)}{5!}\mathrm{d}x\\
&= \dfrac{f(m)+f(n)}{2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{f'(n)-f'(m)}{2!}-\dfrac{1}{30}\dfrac{f'''(n)-f'''(m)}{4!}\\
&\quad +\dfrac{1}{42}\dfrac{f^{(5)}(n)-f^{(5)}(m)}{6!}-\int_{m}^{n} f^{(6)}(x)\dfrac{P_6(x)}{6!}\mathrm{d}x\\
&= \dfrac{f(m)+f(n)}{2}+\dfrac{1}{6}\dfrac{f'(n)-f'(m)}{2!}-\dfrac{1}{30}\dfrac{f'''(n)-f'''(m)}{4!}\\
&\quad +\dfrac{1}{42}\dfrac{f^{(5)}(n)-f^{(5)}(m)}{6!}+\int_{m}^{n} f^{(7)}(x)\dfrac{P_7(x)}{7!}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.4.165}$$

6.4.2.2 Séries Arithmétiques

Nous avons démontré plus haut que la somme partielle de la série de Gauss (analogue à la somme des termes d'une suite arithmétique de raison $r=1$) s'écrivait donc :

$$S_1=\dfrac{n(n+1)}{2} \tag{6.4.166}$$

si nous notons non pas n la valeur du n-ème terme mais u_n, le développement que nous avions fait pour la série de Gauss nous amène alors à :

$$S_n=\dfrac{n(u_n+1)}{2} \tag{6.4.167}$$

Et si nous notons le premier terme 1 de la série de Gauss par u_0, nous avons alors :

$$S_n = \frac{n(u_n + u_0)}{2} \tag{6.4.168}$$

Ce qui nous donne la somme partielle des n-termes d'une suite arithmétique de raison r quelconque (ou plus simplement : la somme partielle de la série arithmétique de raison r).

✍**Exemples :**

E1. Une simple série de Gauss de raison 1 commençant à 4, finissant à 6 :

$$S_3 = 4+5+6 = \frac{n(u_n + u_0)}{2} = \frac{3(6+4)}{2} = 15 \tag{6.4.169}$$

E2. Maintenant une série de sommes partielles arithmétiques de raison 2 commençant à 4, finissant à 8 :

$$4+6+8 = \frac{n(u_n + u_0)}{2} = \frac{3(8+4)}{2} = 18 \tag{6.4.170}$$

Remarque

Le lecteur aura observé que la raison r n'apparaît pas dans la relation. Effectivement, en reprenant (toujours) le même développement fait que pour la série de Gauss, le terme r se simplifie !

6.4.2.3 Séries Géométriques

De même, avec un somme géométrique où nous avons pour rappel :

$$u_n = u_0 q^n \tag{6.4.171}$$

nous avons donc :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ qS_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} \\ \hline - \quad s_n - qS_n &= u_0 + u_1 - u_1 + u_2 - u_2 + \cdots + u_n - u_n - u_{n+1} \end{aligned} \tag{6.4.172}$$

La dernière relation s'écrit (après simplification) :

$$S_n - qS_n = (1-q)S_n = u_0 - u_{n+1} \tag{6.4.173}$$

et si $q \neq 1$, nous obtenons :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{(1-q)} \tag{6.4.174}$$

ce qui peut s'écrire en factorisant u_0 :

$$S_n = u_0 \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)} \tag{6.4.175}$$

En cours de traduction Opera Magistris

Si q est positif et inférieur à 1, lorsque n tend vers l'infini nous avons le résultat suivant qui sera très utilisé dans la section d'Économie :

$$S_{n\rightarrow+\infty} \underset{q<1}{=} u_0\frac{1}{(1-q)} \tag{6.4.176}$$

Que l'on retrouve souvent sous la forme suivante (cas particulier) :

$$S_{n\rightarrow+\infty} \underset{x<1}{=} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n = \frac{1}{1-x} \tag{6.4.177}$$

✍**Exemples :**

E1. Soit la suite géométrique de raison $q=2$ suivante :

$$1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3+\cdots+1\cdot 2^n = 1+2+4+8+\cdots+2^n \tag{6.4.178}$$

pour calculer la somme des quatre premiers termes $\{1,2,3,4\}$, nous prenons la puissance de 2 équivalent de $n=2$ (le zéro n'étant pas pris en compte). Nous obtenons alors bien $S_3=15$.

E2. Considérons la série géométrique assez célèbre de raison $q=1/2$. Nous avons alors :

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n+1}} \tag{6.4.179}$$

À la demande d'un lecteur, traitons le cas célèbre $1=0.99999\ldots$ dont la démonstration rigoureuse utilise des séries géométriques ! Voyons d'abord trois preuves naïves de cette égalité.

Première méthode qui ne fait pas appel à des séries géométriques, nous partons de :

$$\frac{1}{3}=0.33333\ldots \tag{6.4.180}$$

Nous multiplions par 3 des deux côtés. Ce qui donne (car il n'y a pas de place pour un nombre entre 1 et $1=0.99999\ldots$) :

$$1=0.99999\ldots \tag{6.4.181}$$

Deuxième méthode qui n'implique pas non plus de séries géométriques, nous partons de :

$$a=0.99999\ldots \tag{6.4.182}$$

Nous multiplions par 10 des deux côtés :

$$10\cdot a=9.99999\ldots \tag{6.4.183}$$

Nous soustrayons a des deux côtés :

$$\underbrace{10\cdot a-a}_{9a}=\underbrace{9.99999\ldots-0.99999\ldots}_{9} \tag{6.4.184}$$

En cours de traduction en anglais

Dès lors :

$$9\cdot a=9\Longrightarrow a=1$$
$$0.99999\ldots=1 \tag{6.4.185}$$

Enfin la dernière preuve naïve n'utilisant toujours pas de séries géométriques est un argument très court déduit du fait suivant (appelé "propriété archimédienne de l'ensemble des nombres réels") :

Si deux nombres réels sont différents, alors il existe au moins un troisième nombre entre eux, différent des deux autres. Ce troisième nombre peut être la moyenne entre les deux. Or, comme nous ne pouvons pas insérer un nombre entre 0.99999... et 1, ils sont donc nécessairement égaux.

Maintenant que nous avons vu les trois preuves naïves courantes, voyons la démonstration rigoureuse utilisant les propriétés des séries géométriques !

Nous savons que :

$$0.99999\ldots=0.9+0.09+0.009+\ldots \tag{6.4.186}$$

Nous définissons 0.9999... comme une série géométrique, c'est-à-dire une somme dont chaque terme est égal au précédent multiplié par une constante, ici $1/10$.

Nous disons que c'est une série géométrique de rapport $1/10$, et nous écrivons :

$$0.99999\ldots=0.9+0.09+0.009+\ldots=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{9}{10^k} \tag{6.4.187}$$

Mais en utilisant la preuve de la somme des n premiers termes d'une série géométrique, nous obtenons :

$$S_n=u_0\frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}=0.9\cdot\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \tag{6.4.188}$$

Dès lors :

$$S_n=1-\frac{1}{10^n} \tag{6.4.189}$$

Mais :

$$0.9999\ldots=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{10^n}=1 \tag{6.4.190}$$

Ainsi :

$$0.99999\ldots=1 \tag{6.4.191}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.4.2.3.1 Fonction Zêta et identité d'Euler

L'allemand Riemann a nommé "zêta" une fonction déjà étudiée avant lui, mais qu'il examine lorsque la valeur est un nombre complexe (voir section Nombres page 241). Cette fonction se présente comme une série de puissances inverses de nombres entiers. C'est ce dont à quoi ressemble cette série pour un cas particulier :

$$\zeta(5)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5} \tag{6.4.192}$$

Cela peut sembler au lecteur comme de pures mathématiques abstraites. Cependant comme nous le verrons dans les prochains chapitres de ce livre, cette fonction apparaîtra par exemple lors de notre étude du Corps Noir (loi de Stefan-Boltzmann), ou lors de notre étude de la force de Casimir en Physique Quantique, mais aussi lors de notre étude de la recombinaison du Fond Diffus Cosmologique.

Remarques

R1. Il est traditionnel de noter s la variable dont dépend cette série.

R2. La fonction zêta de Riemann est un cas particulier de la "fonction zêta" définie par :

$$\zeta_A(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n^s} \tag{6.4.193}$$

où $s=\Re(s)+\mathrm{i}\Im(s)=\sigma+it$ mais quand $a_n=n$.

Cette série a une propriété intéressante mais si l'on reste dans le cadre des puissances entières positives et non nulles :

$$\frac{1}{x^0}+\frac{1}{x^1}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots=u_0\frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}=1\frac{1-\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{x}} \tag{6.4.194}$$

avec $n\longrightarrow+\infty$, nous avons alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}=\frac{1}{x^n}=\frac{1}{x^0}+\frac{1}{x^1}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}} \tag{6.4.195}$$

Si nous posons $x=2^s$, nous obtenons la somme des puissances inverses de 2 et de même $x=3^s$ avec tel que :

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{8^5}+\cdots+\frac{1}{2^{a5}}+\cdots&=\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^5}}\\1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{9^5}+\frac{1}{27^5}+\cdots+\frac{1}{3^{b5}}+\cdots&=\frac{1}{1-\dfrac{1}{3^5}}\end{aligned} \tag{6.4.196}$$

En cours de traduction en anglais

Si nous faisons le produit de ces deux expressions, nous obtenons la somme des puissances de toutes les fractions dont le dénominateur est un nombre produit de 2 et de 3 :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots+\frac{1}{(2^a3^b)^s}+\cdots \tag{6.4.197}$$

Si nous prenons tous les nombres premiers à gauche, nous obtiendrons à droite tous les nombres entiers, puisque tout entier est produit de nombres premiers selon le théorème fondamental de l'arithmétique (voir section Théorie des Nombres page 352), et c'est l'identité fondamentale d'Euler : ce que nous appelons maintenant la "fonction zêta de Riemann" est à la fois un produit fini et la somme des puissances inverses de tous les entiers :

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots+\frac{1}{(2^a3^b5^c)^s} \tag{6.4.198}$$

En notation condensée, "l'identité d'Euler" de la fonction zête de Riemann est donnée par :

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\,(\text{premiers})}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \tag{6.4.199}$$

où p comme indiqué sous le symbole du produit sont les nombres premiers.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

La fonction zêta de Riemann est un cas particulier des "séries de Dirichlet" qui sont définies par :

$$\mathfrak{D}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s} \tag{6.4.200}$$

Lorsque la partie réelle de s est supérieure à 1, la série de Dirichlet converge. Par contre, la série de Dirichlet diverge lorsque la partie réelle de s est inférieure ou égale à 1, donc, en particulier, la série $1+2+3+4+\ldots$ qui résulte d'avoir posé $s=-1$ ne converge pas !

Nous proposons maintenant au lecteur de sauter ce qui va suivre concernant la fonction zêta de Riemann et d'y revenir une fois les séries de Fourier présentées plus bas dans cette section maîtrisées et comprises...

Nous supposons pour ce qui va suivre que les séries de Fourier sont maintenant connues et que l'égalité de Parseval a été étudiée (puisqu'elle est aussi démontrée plus bas à la page 1737).

Nous allons chercher à déterminer la fonction zêta de Riemann pour deux valeurs (s valant respectivement 2 et 4) qui nous seront utiles lors de la valorisation d'intégrales dans certaines section du chapitre de Mécanique.Comme les deux valeurs sont positives, la série converge et il n'y aura pas trop de problèmes pour évaluer la fonction zêta de Riemann[10].

[10]Pour la section de Cosmologie, nous devrions également avoir besoin de la valeur de la fonction zêta de Riemann pour $s=3$ mais cependant le résultat donne une constante irrationnelle (c'est-à-dire que le résultat ne peut pas être écrit comme une fraction p/q où p et q sont des entiers) nommée la "constante d'Apéry". Il existe un théorème qui prouve que $\zeta(3)$ est irrationnel nommé le "théorème d'Apéry".

Une fois cela fait, nous déterminerons la valeur de la fonction zêta de Riemann pour toute valeur entière négative ! Et ici évidemment la série semble divergente. En mathématiques et en physique théorique pour ce genre de situations, nous utilisons la "régularisation de la fonction zêta" qui est un type de méthode de régularisation ou de sommabilité qui attribue des valeurs finies à des sommes ou produits divergents, et cela permet notamment de définir des déterminants et des traces de certains opérateurs auto-adjoints. La technique est maintenant couramment appliquée aux problèmes de physique, mais a ses origines dans les tentatives de donner des significations précises aux sommes mal conditionnées apparaissant dans la théorie des nombres. Comme nous le verrons juste en dessous et lors de notre étude des séries de Grandi (voir page 1672) il existe plusieurs méthodes de sommation différentes appelées "régularisation de la fonction zêta" pour définir la somme d'une série éventuellement divergente !

Alors commençons !

- Pour déterminer la valeur de $\zeta(2)$, nous allons exprimer la fonction :

$$f(x) \qquad \forall x \in [-\pi, \pi] \tag{6.4.201}$$

sous forme de série de Fourier (voir un peu plus loin dans cette même section). Lors de notre étude des séries de Fourier nous verrons qu'il y a deux manières traditionnelles de définir une série de Fourier et que nous avons fait ici le choix de la définition d'usage le plus courant chez les physiciens et ingénieurs :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{6.4.202}$$

Comme nous le démontrerons lors de notre étude des séries de Fourier, les coefficients de Fourier a_0, a_n, b_n s'obtiennent en résolvant :

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \tag{6.4.203}$$

et en utilisant l'intégration par parties (voir section Calcul Différentiel et Intégral page

En cours de traduction de l'anglais

1511), nous avons :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(x^2|_{-\pi}^{\pi}\right) = 0 \\
a_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
b_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{+T/2} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}
\end{aligned}
\tag{6.4.204}
$$

Il vient alors :

$$
f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) \tag{6.4.205}
$$

Mais le théorème de Parseval que nous prouverons dans notre étude des séries de Fourier un peu plus bas nous donne aussi (selon le choix de la définition de la série de Fourier et des coefficients associés, le théorème de Parseval s'exprime un peu différemment !) :

$$
f(x) = x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{6.4.206}
$$

Il vient alors immédiatement :

$$
f(x) = x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \tag{6.4.207}
$$

Mais nous verrons aussi vu lors de notre démonstration du théorème de Parseval que :

$$
\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\bar{f}(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{6.4.208}
$$

Il vient alors dans notre cas :

$$
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \tag{6.4.209}
$$

En cours de traduction de l' anglais

Donc :

$$\frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)^3}{3}\right]=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{\pi^3}{3\pi}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad (6.4.210)$$

et au final :

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \quad (6.4.211)$$

Le problème de trouver la valeur vers laquelle cette série converge est connu sous le nom de "problème de Bâle". Leonhard Euler a trouvé la solution en 1735...

- Pour déterminer la valeur de $\zeta(4)$, nous ferons de même, mais avec la fonction :

$$f(x)=x^2 \qquad \forall x\in[-\pi,+\pi] \quad (6.4.212)$$

sous forme de série de Fourier :

$$f(x)=x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \quad (6.4.213)$$

Pour cela, nous allons calculer les coefficients de Fourier en utilisant l'intégration par parties (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1511).

Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3\pi}\left(x^3|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{2\pi^2}{3}\\
a_n&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}-2x\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x\right)\\
&=-\frac{2}{\pi n}\left(-x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi n}x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\\
b_n&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin(nx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left(-x^2\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}2x\frac{\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x\right)=\frac{2}{\pi n}\left(x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-T/2}^{+T/2}\frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x\right)\\
&=-\frac{2}{\pi n}\left(\int_{-T/2}^{+T/2}\frac{\sin(nx)}{x}\mathrm{d}x\right)=-\frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=0
\end{aligned} \quad (6.4.214)$$

Nous avons alors :

$$f(x)=x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos(nx) \quad (6.4.215)$$

En cours de traduction de l' anglais

Mais le théorème de Parseval que nous verrons donc plus loin nous donne aussi :

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos(nx)=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) \quad (6.4.216)$$

Il vient alors immédiatement dans notre cas :

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos(nx)=\frac{\pi^2}{9}+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{9}+8\zeta(4) \quad (6.4.217)$$

Mais nous verrons aussi vu lors de notre démonstration du théorème de Parseval que :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\bar{f}(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) \quad (6.4.218)$$

Il vient alors dans notre cas :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^4\mathrm{d}x=\frac{\pi^4}{9}+8\zeta(4) \quad (6.4.219)$$

Mais nous verrons aussi vu lors de notre démonstration du théorème de Parseval que :

$$\frac{1}{2\pi}\frac{x^5}{5}\bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^4}{9}+8\zeta(4)\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^5}{5}-\frac{(-\pi)^5}{5}\right]=\frac{\pi^4}{9}+8\zeta(4) \quad (6.4.220)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\pi^4}{5}-\frac{\pi^4}{9}=8\zeta(4)\Rightarrow\frac{9\pi^4}{45}-\frac{5\pi^4}{45}=8\zeta(4)\Rightarrow\frac{4\pi^4}{45}=8\zeta(4) \quad (6.4.221)$$

Finalement :

$$\zeta(4)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \quad (6.4.222)$$

- Concentrons-nous maintenant sur le premier cas divergent $\zeta(-1)$.

  Il y a plusieurs façons de prouver que :

$$\zeta(s=-1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}n=1+2+3+\ldots=-1/12 \quad (6.4.223)$$

Une méthode, dans la lignée du raisonnement d'Euler, utilise la relation entre la fonction zêta de Riemann et ce que nous définissons comme la "fonction eta de Dirichlet" ou "fonction zeta alternée[11]" :

$$\eta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots \quad (6.4.224)$$

[11]Oui, il existe de nombreux types différents (variations) de la fonction zêta. Vous pouvez trouver une liste des 34 plus importantes d'entre elles sur Wikipedia.

En cours de traduction de l' anglais

Cette série de Dirichlet est la somme alternée correspondant au développement en série de Dirichlet de la fonction zêta de Riemann, $\zeta(s)$.

Là où les deux séries de Dirichlet convergent, nous avons les identités :

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + 6^{-s} + \cdots \\ 2\cdot 2^{-s}\zeta(s) &= \quad 2\cdot 2^{-s} \quad + 2\cdot 4^{-s} \quad + 2\cdot 6^{-s} + \cdots \\ \left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) &= 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + 5^{-s} - 6^{-s} + \cdots = \eta(s) \end{aligned} \tag{6.4.225}$$

L'identité$(1-2^{1-s})\zeta(s)=\eta(s)$ reste valable lorsque les deux fonctions sont étendues par continuation analytique pour inclure les valeurs de s pour lesquelles les séries ci-dessus divergent. En substituant $s=-1$, nous obtenons $-3\zeta(-1)=\eta(-1)$. Maintenant, calculer $\eta(-1)$ est une tâche plus facile, car la fonction eta est égale à la somme d'Abel de sa série de définition, qui est une limite unilatérale :

$$-3\zeta(-1)=\eta(-1)=\lim_{x\to 1^-}\left(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{4} \tag{6.4.226}$$

En divisant les deux côtés par -3, nous obtenons :

$$\zeta(-1)=-\frac{1}{12} \tag{6.4.227}$$

Le premier exemple pratique dans lequel la régularisation de la fonction zêta est disponible apparaît dans l'effet Casimir (voir section Physique Quantique Ondulatoire page ??), qui est dans un espace plat les contributions globales du champ quantique dans trois dimensions de l'espace. Dans ce cas, nous devons calculer la valeur de la fonction zêta de Riemann à -3 :

$$\zeta(s=-3)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^3=\zeta(-3)=1+8+27+64+\ldots \tag{6.4.228}$$

qui diverge explicitement. Cependant, il peut être prolongé analytiquement jusqu'à $s=-3$ où, espérons-le, il n'y a pas de pôle (voir section Analyse Complexe page 2420), donnant ainsi une valeur finie à l'expression.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

La raison pour laquelle nous voyons le cas $\zeta(-1)$ dans de nombreuses vidéos YouTube et manuels de physique plutôt que $\zeta(-3)$ est que lorsque vous imaginez que l'effet Casimir se produit dans une dimension (le long d'une ligne plutôt que en 3D), la densité d'énergie que vous calculez est $\zeta(-1)$ plutôt que $\zeta(-3)$.

Voyons une autre façon plus rigoureuse de prouver que $\zeta(-1)=-\dfrac{1}{12}$.

Il nous faut d'abord un résultat :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\frac{xt^{x-1}}{e^t+1}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty}\frac{xt^{x-1}}{1+e^{-t}}e^{-t}\mathrm{d}t = x\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-kt}\mathrm{d}t \\ &= x\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}k^{-x}\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\eta(x)\Gamma(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)\Gamma(x+1) \end{aligned} \tag{6.4.229}$$

Multiplions maintenant le résultat ci-dessus par $x+1$, puis intégrons par parties deux fois, pour obtenir :

$$\begin{aligned}(1-2^{1-x})\zeta(x)\Gamma(x+2) &= \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)xt^{x-1}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^x e^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x+1}(e^{2t}-e^t)}{(e^t+1)^3}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.4.230}$$

Maintenant, nous pouvons insérer $x=-1$ dans le résultat ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{aligned}(1-2^2)\zeta(-1)\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{2t}-e^t}{(e^t+1)^3}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{u-1}{(u+1)^3}\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{(u+1)^3}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\end{aligned} \tag{6.4.231}$$

Puisque $(1-2^2)\Gamma(1) = -3$ le résultat ci-dessus peut être réorganisé en :

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \tag{6.4.232}$$

Nous verrons une troisième méthode juste en dessous pour obtenir ce même résultat et même une quatrième lors de notre étude ultérieure de la série de Grandi (voir page **??**).

- Prouvons maintenant un moyen élégant et rapide de déterminer la valeur de la fonction zêta pour tous les entiers négatifs (il existe d'autres méthodes mais impliquant des mathématiques lourdes et ennuyeuses pour la plupart des ingénieurs).

  Pour cela, nous aurons d'abord besoin de prouver le lemme suivant :

Lemme 6.21.1. La fonction zêta de Riemann dans la bande critique est donnée par :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x \tag{6.4.233}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Pour la preuve dont nous avons besoin d'abord pour $\Re(s) > 1$:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{1}\frac{n}{n^s} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{1}\frac{n}{n^s} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-(n-1)}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{1}\frac{n}{n^s} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{n^s} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^s} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right] \\ &= s\sum_{n=1}^{+\infty} n\int_n^{n+1} x^{-s-1}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.4.234}$$

En cours de traduction de l'anglais

Puisque $[x]=n$ pour tout x dans l'intervalle $[n,n+1]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&= s\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{n}^{n+1}[x]x^{-s-1}\mathrm{d}x = s\int\limits_{1}^{+\infty}[x]x^{-s-1}\mathrm{d}x\\
&= s\left[\int\limits_{1}^{+\infty}x^{-s}\mathrm{d}x\right] - s\int\limits_{1}^{+\infty}\{x\}x^{-s-1}\mathrm{d}x \quad \text{(parce que par définition :}[x]=x-\{x\}\text{)}\\
&= s\left[\left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_{1}^{+\infty}\right] - s\int\limits_{1}^{+\infty}\{x\}x^{-s-1}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{6.4.235}$$

permettant la simplification suivante :

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x \quad \Re(s)>1 \tag{6.4.236}$$

Comme $0\leq\{x\}<1$, la dernière intégrale converge et est holomorphe (voir section Analyse Complexe page 2379) sur $\Re(s)>0$. Mais cela signifie que l'équation complète est méromorphe (voir section Analyse Complexe page 2382) sur $\Re(s)>0$, et fournit donc une continuation analytique de $\zeta(s)$ sur le demi-plan $\Re(s)>0$. Le terme $s/(s-1)$ donne un pôle simple en $s=1$ de résidu 1 (voir section Analyse Complexe page 2420).

En injectant à nouveau $[x]=x-\{x\}\Leftrightarrow\{x\}=x-[x]$, nous obtenons :

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{s-1}+1-s\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x \quad \Re(s)>1 \tag{6.4.237}$$

Cela termine la preuve du lemme.

Souvenez-vous maintenant que nous avons prouvé juste plus haut que :

$$\zeta(s)=s\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\frac{s}{s-1}-s\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x \tag{6.4.238}$$

où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. Ceci donne la suite analytique de $\zeta(s)$ pour $\Re(s)>0$. Nous pouvons maintenant procéder de manière inductive. En écrivant :

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n-1}\frac{x-n}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{u\mathrm{d}u}{(u+n)^{n+1}} \tag{6.4.239}$$

et en intégrant la dernière intégrale par parties, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{u\mathrm{d}u}{(u+n)^{s+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{s+1}}+\frac{(s+1)}{2}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\{x\}^2}{x^{s+2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\zeta(s+1)-1)+\frac{(s+1)}{2}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\{x\}^2}{x^{s+2}}\mathrm{d}x \tag{6.4.240}$$

et cette dernière intégrale converge pour $\Re(s)>-1$. C'est-à-dire :

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-\frac{s}{2}(\zeta(s+1)-1)-\frac{s(s+1)}{2}\int_{1}^{x}\frac{\{x\}^2}{x^{s+2}}\mathrm{d}x \tag{6.4.241}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, par induction, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - \sum_{r=1}^{m} \frac{s(s+1)\cdots(s+r-1)}{(r+1)!}(\zeta(s+r)-1) \\ - \frac{s(s+1)\cdots(s+m)}{(m+1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u^{m+1}du}{(u+n)^{s+m+1}}\end{aligned} \quad (6.4.242)$$

et la somme infinie du membre de droite converge pour $\Re(s) > -m$.

Si dans la relation ci-dessus nous posons $s = 1-m$, et remarquons que pour $r = m$ que $\zeta(s+m)$ a un pôle simple en $s = 1-m$, nous obtenons le récurrence :

$$\zeta(1-m) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{(-1)^m}{m(m+1)} - \sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r \begin{pmatrix} m-1 \\ r \end{pmatrix} \frac{1}{r+1}(\zeta(1-m+r)-1) \quad (6.4.243)$$

Les premières valeurs des entiers non positifs sont immédiates et données par :

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \zeta(-2) = 0, \zeta(-3) = \frac{1}{120} \quad (6.4.244)$$

Et c'est tout !

6.4.2.4 Séries Téléscopiques

Une "série télescopique" est une série dans laquelle la plupart des termes s'annulent dans chacune des sommes partielles, ne laissant que certains des premiers termes et certains des derniers termes.

Par exemple, la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (6.4.245)$$

se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N+1}\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[1 - \frac{1}{N+1}\right] = 1.\end{aligned} \quad (6.4.246)$$

Nous rencontrerons une telle série pour des applications commerciales (gestion) dans notre étude de la Théorie des files d'attente dans la section de la Gestion Quantitative ! ! !

En cours de traduction de l'anglais

6.4.2.5 Séries de Grandi

La "série de Grandi" (d'après le mathématicien, philosophe et prêtre italien Guido Grandi, qui écrit un traitémémorable sur ces séries en 1703) est définie comme la série arithmétique suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots \qquad (6.4.247)$$

C'est une série très connue en mathématiques et en physique car :

- Elle met en évidence de manière très simple le fait (voir ci-dessous) qu'il est dangereux de manipuler des séries infinies
- Son résultat semble totalement non intuitif mais en fait il ouvre la porte à une définition plus générale de ce qu'est une "somme"
- C'est un bel exemple d'une série qui semble inutile et purement mathématique mais qui a en fait une application importante en physique quantique (effet Casimir comme nous le verrons dans la section de Physique Quantique Ondulatoire) et en théorie des cordes (nombre de dimensions comme nous le verrons dans la section de Théorie des cordes).

et c'est pourquoi nous lui consacrons une sous-section spéciale dans ce livre !

Il semble assez évident à première vue qu'il s'agit d'une série divergente, c'est-à-dire qu'il lui manque une somme au sens usuel (la suite des sommes partielles de la série de Grandi ne s'approche évidemment d'aucun nombre). Mais d'un autre côté, sa somme Cesàro est de $1/2$! ! ? ? Alors, qu'est-ce que c'est qu'une somme de Cesàro ?

Définition (#6.4.219) : En analyse mathématique, une "somme de Cesàro attribue des valeurs à des sommes infinies qui ne convergent pas au sens habituel. La somme de Cesàro est définie comme la limite de la moyenne arithmétique des sommes partielles des séries.

Soit $\{a_n\}$ une séquence, et soit :

$$s_k = a_1+\cdots+a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \qquad (6.4.248)$$

la $k$ième somme partielle de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad (6.4.249)$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est dite "sommable de Cesàro", avec somme de Cesàro $S\in\mathbb{R}$, si la valeur moyenne de ses sommes partielles s_k tendent vers S :

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = S \qquad (6.4.250)$$

En cours de traduction de l'anglais

En d'autres termes, la somme de Cesàro d'une série infinie est la limite de la moyenne arithmétique (moyenne) des premières n sommes partielles de la série, lorsque n tend vers l'infini. Si une série est convergente, alors elle est sommable de Cesàro et sa somme de Cesàro est la somme usuelle. Pour toute suite convergente, la série correspondante est sommable de Cesàro et la limite de la suite coïncide avec la somme de Cesàro.

Une méthode évidente pour attaquer la série de Grandi suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots \tag{6.4.251}$$

est de la traiter comme une série télescopique et d'effectuer les soustractions en place :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots = 0 \tag{6.4.252}$$

D'autre part, une procédure de mise entre parenthèses similaire conduit au résultat suivant apparemment contradictoire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+0+\ldots = 1 \tag{6.4.253}$$

Ainsi, en appliquant des parenthèses aux séries de Grandi de différentes manières, nous pouvons obtenir 0 ou 1 comme "valeur". Nous pouvons montrer qu'il n'est pas valide d'effectuer de nombreuses opérations apparemment anodines sur une série, telles que la réorganisation de termes individuels, à moins que la série ne soit absolument convergente. Sinon, ces opérations peuvent modifier le résultat de la sommation.

En traitant les séries de Grandi comme une série géométrique divergente, nous pouvons utiliser les mêmes méthodes algébriques qui évaluent les séries géométriques convergentes pour obtenir une troisième valeur :

$$S = 1-1+1-1+\ldots \tag{6.4.254}$$

Ainsi :

$$1-S = 1-(1-1+1-1+\ldots) = 1-1+1-1+\ldots = S \tag{6.4.255}$$

Dès lors :

$$1-S = S \tag{6.4.256}$$

Pour terminer :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n = \frac{1}{2} \tag{6.4.257}$$

La même conclusion résulte du calcul de $-S$, de la soustraction du résultat de S et de la résolution de $2S=1$.

Les manipulations ci-dessus ne tiennent pas compte de ce que signifie réellement la somme d'une série. Pourtant, dans la mesure où il est important de pouvoir mettre entre parenthèses des séries à volonté, et qu'il est plus important de pouvoir faire de l'arithmétique avec elles, on peut arriver à deux conclusions :

En cours de traduction de l'anglais

- La série $1-1+1-1+\ldots$ n'a pas de somme
- ...mais sa somme devrait être $1/2$ (voir ci-dessous)

En fait, ces deux affirmations peuvent être rendues précises et formellement prouvées, mais uniquement en utilisant des concepts mathématiques bien définis apparus au 19ème siècle. Après l'introduction de l'algèbre en Europe à la fin du 21ème siècle, mais avant l'avènement de la rigueur moderne, la tension entre ces réponses a alimenté ce qui a été qualifié de dispute « sans fin » et « violente » entre mathématiciens. Le plus drôle, c'est que les discussions violentes se poursuivent encore aujourd'hui... une vidéo YouTube sur ce sujet a plus de $5'000$ de commentaires... et un article de blog plus de 200 de commentaires et un fil de discussion de forum plus de 600... (et les commentaires montrent le pire de ce que peut être le comportement et le respect humain...). C'est donc un sujet qui reste assez brûlant !

Rappelons aussi qu'au début de notre étude des séries géométriques nous avons prouvé que :

$$S_n=u_0q^0+u_0q^1+u_0q^2+u_0q^3+\ldots=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{6.4.258}$$

Donc si $u_0=1$ cela se réduit à :

$$S_n=1+q^1+q^2+q^3+\ldots=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{6.4.259}$$

où lorsque n tend vers l'infini, la valeur absolue de $|q|$ doit être inférieure à 1 pour que la série converge !

Remarquons maintenant que si $q=-1$, nous retombons sur la série de Grandi et donc que cette dernière est un cas particulier de la série géométrique $1+q^1+q^2+q^3+\ldots$ et alors nous aurions peut-être écris un peu trop vite :

$$S_n=1+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots=1-1+1-1+\ldots=\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} \tag{6.4.260}$$

Mais comme nous venons de le mentionner, nous ne sommes pas autorisés à écrire cette dernière fraction si $q=\pm 1$ sinon les séries divergent sauf... si nous travaillons dans un cadre axiomatique particulier. C'est presque aussi choquant que lorsque les nombres imaginaires ont été introduits au 16ème siècle, ainsi que les nombres négatifs qui étaient mal compris et considérés par certains comme fictifs ou inutiles, tout comme zéro l'était autrefois...

Remarque

Il y a eu des études très intéressantes sur la réaction des élèves du secondaire à la présentation de la série de Grandi. Les réactions et analyses sont très intéressantes et je ne peux personnellement que recommander à chaque professeur d'introduire cette série dans les classes mais sans donner le résultat dans un premier temps !

Mais il y a "encore une chose"... Nous allons maintenant calculer une somme, pensant que cela donne vraiment l'infini comme résultat :

$$B=\sum_{n=1}^{+\infty} n=1+2+3+4+5+\ldots \tag{6.4.261}$$

En cours de traduction de l' anglais

Pour ce faire, faisons un autre tour de mathémagicien :

$$B = 1+2+3+4+\ldots \quad (6.4.262)$$

Dès lors :

$$4B = 4+8+\ldots \quad (6.4.263)$$

Ainsi nous pouvons calculer :

$$-3B = B-4B = 1-2+3-4+\ldots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n = C \quad (6.4.264)$$

Notre premier résultat concret, au carré, peut être réécrit comme suit :

$$S^2 = (-1+1-1+1-1+\ldots)^2 \quad (6.4.265)$$

Ou bien :

$$S^2 = S\cdot S \quad (6.4.266)$$

Explicitement :

$$\begin{array}{r} (-1+1-1+1-1+\ldots) \\ \times(-1+1-1+1-1+\ldots) \\ \hline =1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\ -1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\ +1-1+1-1+1-1+\cdots \\ \ldots \end{array}$$

En sommant chaque colonne, nous voyons que nous retombons sur :

$$1-2+3-4+5-6+\ldots = C \quad (6.4.267)$$

Dès lors :

$$S^2 = C \quad (6.4.268)$$

Mais comme $S = 1/2$, alors :

$$S^2 = C = (1/2)^2 = 1/4 \quad (6.4.269)$$

Ainsi :

$$B = -\frac{C}{3} = \frac{1}{12} \quad (6.4.270)$$

C'est-à-dire (pour paniquer une dernière fois), nous venons de montrer que :

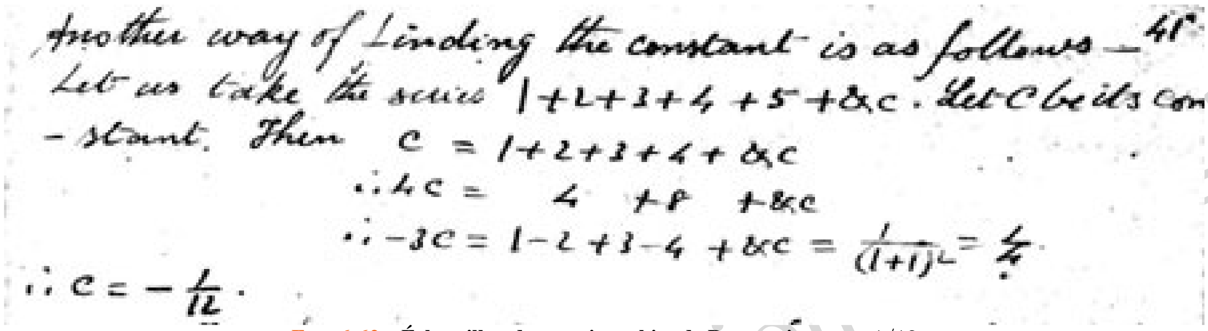
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1+2+3+4+5+\ldots = -\frac{1}{12}} \quad (6.4.271)$$

En cours de traduction de l'anglais

Plutôt interessant ! Mais n'oubliez pas que nous obtenons ce résultat dans un cadre spécial que nous avons construit et qui généralise la somme conventionnelle que nous apprenons au lycée. Il semble que toutes les généralisations de la somme conventionnelle (comme les mathématiciens font des définitions avec le café comme nous le savons...) conduisent au même résultat de $-1/12$...

Il est également assez choquant de constater sachant que l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ est fermé, que la somme de tous les naturels est $-1/12$...

De plus, tout cela n'est pas nouveau ! C'était connu de beaucoup de gens bien avant (quelques centaines d'années) et c'est surtout Srinivasa Ramanujan et plus tard Godfrey Harold Hardy dans un livre intitulé *Divergent Series* qui a formalisé le sujet d'une manière plus élégante et technique que celle ci-dessus.


Another way of finding the constant is as follows — 41. Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its constant. Then $C = 1+2+3+4+\&c$

$\therefore 4C = 4 + 8 + \&c$

$\therefore -3C = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore C = -\frac{1}{12}$.

FIG. 6.62 – Échantillon du premier cahier de Ramanujan sur $-1/12$

En cours de traduction... anglais

6.4.2.6 Séries de Taylor et de Maclaurin

Les séries de Taylor et de Maclaurin constituent un outil pratique très puissant pour simplifier des modèles théoriques ou des calculs informatiques (modélisation de fluides ou champs dans l'espace). Elles sont utilisées énormément dans tous les domaines de la physique mais on les retrouve aussi dans l'industrie notamment en ingénierie (plans d'expérience, méthodes numériques, gestion de la qualité), statistiques (approximations d'intégrales), finance (processus stochastiques), analyse complexe... Nous conseillons donc vivement au lecteur de bien lire les développements qui vont suivre.

> *Tout n'est qu'une forme d'expansion de Taylor de premier ordre !*

quote 6.4:1677.#47

Pour commencer, considérons un polynôme (avec une variable/univariée) :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{6.4.272}$$

Nous avons trivialement pour ce dernier :

$$P(0)=a_0 \tag{6.4.273}$$

Soit maintenant la dérivée du polynôme $P(x)$:

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \tag{6.4.274}$$

Dès lors :

$$P'(0)=1\cdot a_1 \tag{6.4.275}$$

et ainsi de suite avec $P''(x), P'''(x),\ldots$ tel que :

$$\begin{aligned}
&P''(x)=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} \Rightarrow P''(0)=1\cdot 2\cdot a_2\\
&P'''(x)=\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} \Rightarrow P''(0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3\\
&\ldots\\
&\frac{\mathrm{d}^n P(x)}{\mathrm{d}x^n}=\sum_{k=n}^{n} k(k-1)\cdots(k-(n-1))a_k x^{k-n} \Rightarrow P''(0)=n!\cdot a_n
\end{aligned} \tag{6.4.276}$$

Donc :

$$a_0=P(0), a_1=\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}P(0)}{\mathrm{d}x}, a_2=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}, a3=\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3},\cdots, a_n=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^nP(0)}{\mathrm{d}x^n} \tag{6.4.277}$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k \tag{6.4.278}$$

relation que nous appelons "série de Maclaurin limitée" ou tout simplement "série de Maclaurin" d'ordre $k+1$.

Remarque

Dans la pratique, comme nous le verrons dans de nombreux autres chapitres de ce livre, nous utiliserons fréquemment des développements limités d'ordre 1 (encore appelés "approximations affines", ou "approximations affines tangentes"), qui permettent de faciliter les calculs, lorsque nous n'exigons pas une trop grande précision.

En appliquant maintenant le même raisonnement mais en centrant le polynôme sur la valeur $x=x_0$, nous avons :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k \tag{6.4.279}$$

et ainsi le développement précédent devient plus général :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(x_0)}{\mathrm{d}x^k}(x-x_0)^k \tag{6.4.280}$$

qui n'est d'autre que l'expression générale d'un polynôme exprimé sous une forme dite de "série de Taylor limitée" d'ordre $k+1$. Cette fonction peut être assimilée à un polynôme tant que n est fini. Mais si n est infini, comme nous le verrons plus loin, cette série converge vers la fonction dont nous cherchons la représentation sous forme de somme de termes.

Ainsi, certaines fonctions $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^n$ pouvant être approchées par un polynôme $P(x)$ (une somme de puissances autrement dit...) centré sur la valeur x_0 peuvent être exprimées sous la forme :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kf(x_0)}{\mathrm{d}x^k}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{d}^{(k)}f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{6.4.281}$$

Relation souvent designée sous le nom de "théorème de Taylor".

Par contre cette dernière relation n'est pas juste pour toutes les fonctions ne pouvant pas s'exprimer sous forme de polynômes. Dès lors nous disons que la série n'est pas convergente pour ces dernières. Nous en verrons un exemple plus bas.

La dernière relation s'écrit aussi de manière plus conventionnelle... :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{D}^kf(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{6.4.282}$$

En cours de traduction de l' anglais

Dans la finance (et pas que !), nous utiliserons souvent le réarrangement suivant :

$$\begin{gathered}f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{D}^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\ \Rightarrow f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{D}^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\ \lim_{x-x_0\to \mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{D}^k f(x_0)}{k!}\mathrm{d}x^k\end{gathered} \tag{6.4.283}$$

Revenons brièvement à l'approximation de $f(x)$ proche et centrée en x_0 :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k}(\Delta x)^k \tag{6.4.284}$$

Une autre notation très courante en physique et en ingénierie financière de la relation ci-dessus est :

$$\widetilde{f}(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k}(\Delta x)^k \Leftrightarrow \mathrm{d}f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k}(\Delta x)^k \tag{6.4.285}$$

Certaines personnes n'aiment pas utiliser cette formulation car nous risquerions d'oublier que l'approximation pour quelques termes n'est bonne que tant que nous ne s'éloignons pas trop de x_0 avec x. Raison pour laquelle il arrive souvent que nous écrivions :

$$x=x_0+\Delta h=x_0+h \tag{6.4.286}$$

avec x_0 fixé et h variable mais petit (!) et ainsi il vient alors une forme d'écriture courante des séries de Taylor (!) :

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k}(x_0+h-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) \tag{6.4.287}$$

Voyons un exemple d'application avec une série de Maclaurin (avec x_0 étant nul) de la fonction $\sin(x)$ et Maple 4.00b :

```
>p[n](x) = sum((D@@i)(f)(a)/i!*(x-a)^i,i=0..n);
>p11:= taylor(sin(x),x=0,12);
>p11:= convert(p11,polynom);
>with(plots):
>tays:= plots[display](sinplot):
for i from 1 by 2 to 11 do
tpl:= convert(taylor(sin(x), x=0,i),polynom):
tays:= tays,plots[display]([sinplot,plot(tpl,x=-Pi..2*Pi,y=-2..2,
color=black,title=convert(tpl,string))]) od:
>plots[display]([tays],view=[-Pi..2*Pi,-2..2]);
```

En cours de traduction de l'anglais

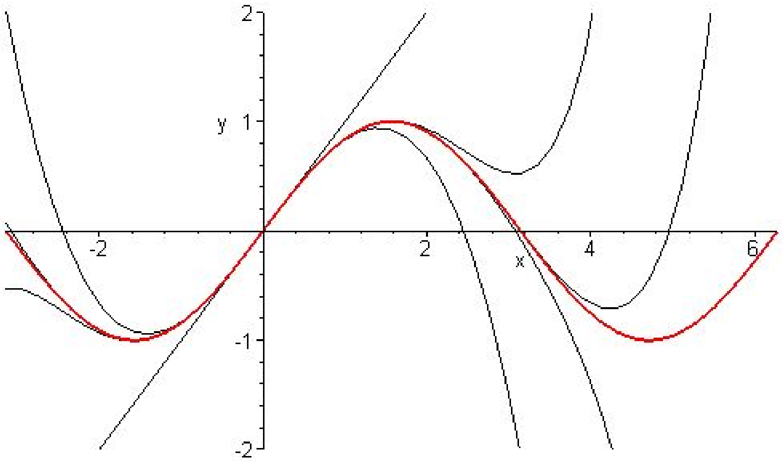


FIG. 6.63 – Approximation de la fonction sinus par un développement de Maclaurin dans Maple 4.00b

Ou en bien meilleure qualité avec TikZ :

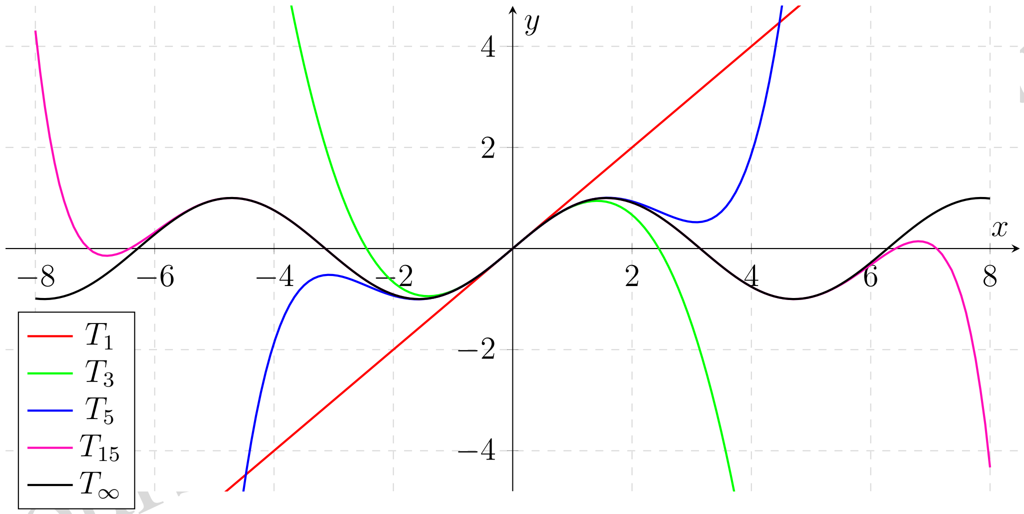


FIG. 6.64 – Approximation de la fonction sinus par un développement de Maclaurin avec TikZ

En cours... anglais

Nous voyons donc bien dans cet exemple que la série de Maclaurin ne permet que d'approcher une fonction en un point avec un nombre limités de points. Mais plus nous prenons de termes (mettre 100 termes dans l'exemple précédent) plus la validité est grande sur tout le domaine de définition de la fonction. Au fait il est possible de démontrer que la fonction $sin(x)$ est exactement exprimable en série de Maclaurin lorsque le nombre de termes est infini. Nous disons alors que son "reste" est nul.

Par contre ceci n'est pas vrai pour toutes les fonctions. Par exemple avec la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (6.4.288)$$

```
>p[n](x) = sum((D@@i)(f)(a)/i!*(x-a)^i,i=0..n);
>p10:= taylor(1/(1-x^2),x=0,10);
>p10:= convert(p10,polynom);
>with(plots):
```

```
>tays:= plots[display](xplot):
for i from 1 by 2 to 10 do
tpl:= convert(taylor(1/(1-x^2), x=0,i),polynom):
tays:= tays,plots[display]([xplot,plot(tpl,x=-2..2,y=-2..2,
color=black,title=convert(tpl,string))]) od:
>plots[display]([tays],view=[-2..2,-2..2]);
```

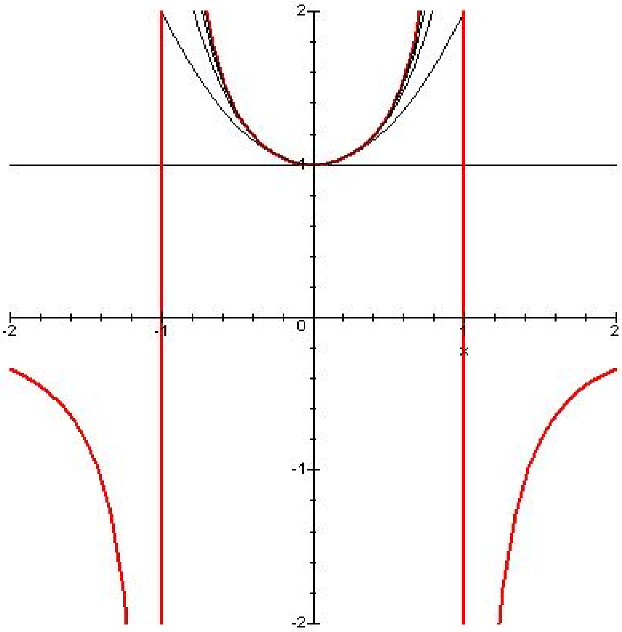


FIG. 6.65 – **Contre-exemple d'approche par Maclaurin dans Maple 4.00b**

Nous voyons bien ci-dessus que peu importe le nombre de termes que nous prenons, la série de Maclaurin converge seulement dans un domaine de définition compris entre $]-1,1[$. Cette intervalle est appelé le "rayon de convergence" et sa détermination (celle des singularités) est un point crucial dans de nombreux domaines de l'ingénierie, de la physique et de l'analyse. Nous y reviendrons plus en détails dans la section d'Analyse Complexe.

Par contre nous pouvons décaler la série de Maclaurin de la fonction précédente afin d'approcher la fonction avec une série de Taylor en un autre point non singulier comme par exemple en valant 2 :

```
>p[n](x) = sum((D@@i)(f)(a)/i!*(x-a)^i,i=0..n);
>p10:= taylor(1/(1-x^2),x=2,10);
>p10:= convert(p10,polynom);
>with(plots):
>tays:= plots[display](xplot):
for i from 1 by 2 to 10 do
tpl:= convert(taylor(1/(1-x^2), x=2,i),polynom):
tays:= tays,plots[display]([xplot,plot(tpl,x=0..5,y=-2..2,
color=black,title=convert(tpl,string))]) od:
>plots[display]([tays],view=[-0..5,-2..2]);
```

En cours de traduction de l'anglais

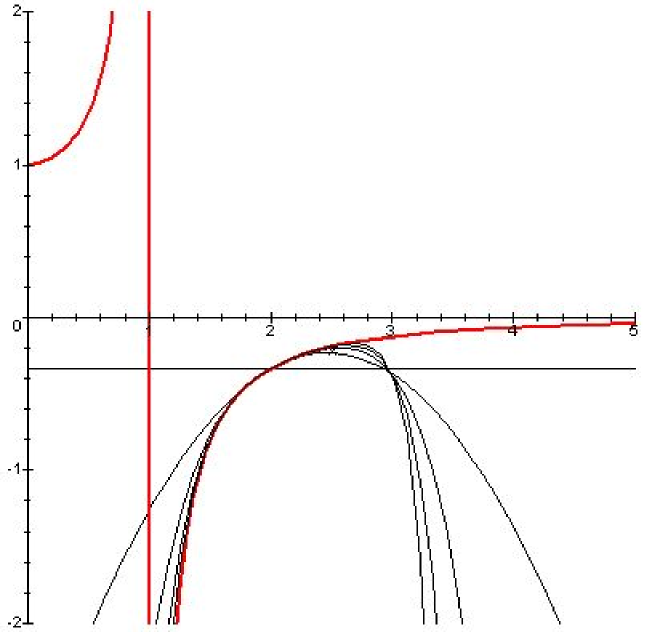


FIG. 6.66 – Décalage possible de l'approche par Maclaurin avec Maple 4.00b

Nous étudierons une généralisation au plan complexe des séries de Taylor précédentes dans la section d'Analyse Complexe pour obtenir un résultat trèèèèès puissant permettant aux physiciens de calculer des intégrales curvilignes compliquées.

En cours de traduction de l' anglais

6.4.2.6.1 Développements usuels de Maclaurin

Nous allons démontrer ici les développements de Maclaurin les plus fréquents (une petite dizaine) jusqu'au deuxième ordre que nous puissions rencontrer en physique théorique et mathématique (en fait, nous avons développés uniquement ceux qui sont utilisés dans l'ensemble de livre). La liste est pour l'instant non exhaustive mais les démonstrations étant généralisées, elles peuvent s'appliquer à un grand nombre d'autres cas (que nous appliquerons/rencontrerons tout au long de ce livre).

Remarque

Les développements de Taylor (donc ailleurs qu'en zéro) étant très rare (il y en a un ou deux sur l'ensemble du site mais ils sont détaillés dans le chapitre respectif), nous les omettrons.

1. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=e^x$:

   D'abord rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel Et Intégral que :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}=e^x\\ f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2e^x}{\mathrm{d}x^2}=e^x\\ f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3e^x}{\mathrm{d}x^3}=e^x\end{aligned}\tag{6.4.289}$$

   Il vient alors que :

$$\begin{aligned}&f_3(x)\cong e^x\\ &\cong\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\ &=\frac{1}{0!}e^x|_{x=0}+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2e^x}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3e^x}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0}x^3\\ &=\frac{1}{0!}e^x|_{x=0}+\frac{1}{1!}e^x|_{x=0}x+\frac{1}{2!}e^x|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}e^x|_{x=0}x^3\\ &=1+\frac{1}{1!}e^0x+\frac{1}{2!}e^0x^2+\frac{1}{3!}e^0x^3\\ &=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\end{aligned}\tag{6.4.290}$$

   Plus généralement :

$$e^x=1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i!}x^i=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}x^i\tag{6.4.291}$$

   Et donc nous avons le fameux résultat pour $x=1$:

$$e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\tag{6.4.292}$$

   qui est parfois nommé "séquence exponentielle".

En cours de traduction de l' anglais

2. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\sin(x)$:

   D'abord rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral que :

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x}=\cos(x)\\ f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2\sin(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x}=-\sin(x)\\ f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3\sin(x)}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}(-\sin(x))}{\mathrm{d}x}=-\cos(x)\end{aligned} \tag{6.4.293}$$

   Il vient alors que :

$$\begin{aligned} f_3(x)&\cong\sin(x)\\ &\cong\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\ &=\frac{1}{0!}\sin(x)|_{x=0}+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\sin(x)}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3\sin(x)}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0}x^3\\ &=\frac{1}{0!}\sin(x)|_{x=0}+\frac{1}{1!}\cos(x)|_{x=0}x-\frac{1}{2!}\sin(x)|_{x=0}x^2-\frac{1}{3!}\cos(x)|_{x=0}x^3\\ &=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3=x-\frac{x^3}{3!}\end{aligned} \tag{6.4.294}$$

3. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\cos(x)$:

   D'abord rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral que :

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x}=-\sin(x)\\ f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2\cos(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(-\sin(x))}{\mathrm{d}x}=-\cos(x)\\ f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3\cos(x)}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}(-\cos(x))}{\mathrm{d}x}=\sin(x)\end{aligned} \tag{6.4.295}$$

   Il vient alors que :

$$\begin{aligned} f_3(x)&\cong\cos(x)\\ &\cong\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\ &=\frac{1}{0!}\cos(x)|_{x=0}+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\cos(x)}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3\cos(x)}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0}x^3\\ &=\frac{1}{0!}\cos(x)|_{x=0}-\frac{1}{1!}\sin(x)|_{x=0}x-\frac{1}{2!}\cos(x)|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\sin(x)|_{x=0}x^3\\ &=\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}x^2=1-\frac{x^2}{2!}\end{aligned} \tag{6.4.296}$$

4. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\tan(x)$:

En cours de traduction de l'anglais

D'abord rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral que :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)\\
f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2\tan(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\cos^2(x)}=2\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\\
f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3\tan(x)}{\mathrm{d}x^3}=2\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\right)}{\mathrm{d}x}=2\frac{\mathrm{d}\left(\sin(x)\dfrac{1}{\cos^3(x)}\right)}{\mathrm{d}x}\\
&=\frac{2}{\cos^2(x)}+2\sin(x)3\frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}=\frac{2}{\cos^2(x)}+6\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}
\end{aligned}\tag{6.4.297}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}
f_3(x)&\cong\tan(x)\\
&\cong\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\
&=\frac{1}{0!}\tan(x)\Big|_{x=0}+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\tan(x)}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3\tan(x)}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0}x^3\\
&=\frac{1}{0!}\tan(0)x^0+\frac{1}{1!}\left(1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)\bigg|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\left(2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+2\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}\right)\bigg|_{x=0}x^2\\
&+\frac{1}{3!}\left(2+8\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+6\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\right)\bigg|_{x=0}x^3\\
&=\frac{1}{1!}x-\frac{2}{3!}x^3=x+\frac{x^3}{3}
\end{aligned}\tag{6.4.298}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le lecteur doit se rappeler que pour les physiciens et les ingénieurs, les trois approximations suivantes sont très utiles et célèbres pour θ petit :

$$\sin(\theta)\cong\theta\qquad\cos(\theta)\cong 1\qquad\tan(\theta)\cong\theta$$

5. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\arctan(x)$:

D'abord rappelons que nous avons démontré dans le section de Calcul Différentiel et Intégral que :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{d}\arctan(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}\\
f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2\arctan(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+x^2}=-2\frac{x}{(1+x^2)^2}\\
f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3\arctan(x)}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}\left(-2\dfrac{x}{(1+x^2)^2}\right)}{\mathrm{d}x}=-2\frac{\mathrm{d}\left(x\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\right)}{\mathrm{d}x}\\
&=\frac{-2}{(1+x^2)^2}+(-2)x\frac{(-2)2x}{(1+x^2)^3}=\frac{-2}{(1+x^2)^2}+\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}\tag{6.4.299}$$

Il vient alors que :

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &\cong \arctan(x)\\
&\cong \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\
&=\frac{1}{0!}\arctan(x)|_{x=0}+\frac{1}{1!}\left.\frac{\mathrm{d}\arctan(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2\arctan(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3\arctan(x)}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0}x^3\\
&=\frac{1}{0!}\arctan(0)x^0+\frac{1}{1!}\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}x^2\\
&+\frac{1}{3!}\left.\left(\frac{-2}{(1+x^2)^2}+\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}\right)\right|_{x=0}x^3\\
&=\frac{1}{1!}x-\frac{2}{3!}x^3=x-\frac{x^3}{3}
\end{aligned}
\tag{6.4.300}
$$

6. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$:

D'abord rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral l'expression générale de la dérivée d'un quotient de deux fonctions. Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{d}\frac{1}{1+x}}{\mathrm{d}x}=-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2\\
f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2\frac{1}{1+x}}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2\right)=\frac{2}{(1+x)^3}\\
f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3\frac{1}{1+x}}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2}{(1+x)^3}\right)}{\mathrm{d}x}=-\frac{6}{(1+x)^4}
\end{aligned}
\tag{6.4.301}
$$

Il vient alors que :

$$
\begin{aligned}
f_3(x)&\cong\frac{1}{1+x}\\
&\cong\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\
&=\frac{1}{0!}\frac{1}{1+x}\Big|_{x=0}+\frac{1}{1!}\left.\frac{\mathrm{d}\frac{1}{1+x}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2\frac{1}{1+x}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3\frac{1}{1+x}}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0}x^3\\
&=\frac{1}{0!}1x^0-\frac{1}{1!}\left.\frac{1}{(1+x)^2}\right|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\left.\frac{2}{(1+x)^3}\right|_{x=0}x^2-\frac{1}{3!}\left.\left(\frac{6}{(1+x)^4}\right)\right|_{x=0}x^3\\
&=1-\frac{1}{1!}x-\frac{2}{2!}x^2-\frac{6}{3!}x^3=1-x+x^2-x^3
\end{aligned}
\tag{6.4.302}
$$

Il s'ensuit immédiatement une autre série de Taylor que nous retrouverons aussi un certain nombre de fois :

$$
f_2(x)\cong\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{x}\frac{1}{(1+x)}\cong-\frac{\mathrm{d}}{x}\left(1-x+x^2-x^3\right)=1-x^2+3x^2
\tag{6.4.303}
$$

Pour notre étude du Fond Diffus Cosmologique dans la section de Cosmologie (en particulier l'ère de la recombinaison), nous aurons besoin d'un résultat lié aux deux séries

En cours de traduction de l'anglais

ci-dessus nommé le "théorème binomial pour les exposants entiers négatifs". Étant donné le coefficient binomial donné pour rappel par :

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} \tag{6.4.304}$$

Soit n un entier positif, nous avons alors (sans preuve mais en utilisant "l'intuition de l'ingénieur") :

$$\frac{1}{(1+x)^n}=1-nx+\frac{(-n)(-n-1)}{2}x^2+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k}(-1)^k x^k \tag{6.4.305}$$

pour $|x|<1$.

7. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\sqrt{1+x}$:

D'abord rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral l'expression générale de la dérivée d'un quotient de deux fonctions. Il vient alors :

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{\mathrm{d}\sqrt{1+x}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\\ f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2\sqrt{1+x}}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)^{3/2}}\\ f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3\sqrt{1+x}}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)^{3/2}}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{8}\frac{1}{(1+x)^{5/2}} \end{aligned} \tag{6.4.306}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} f_3(x)&\cong\sqrt{1+x}\\ &\cong\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\ &=\frac{1}{0!}\sqrt{1+x}|_{x=0}+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}\sqrt{1+x}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\sqrt{1+x}}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3\sqrt{1+x}}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=0}x^3\\ &=\frac{1}{0!}\sqrt{1+x}\bigg|_{x=0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\bigg|_{x=0}x^1-\frac{1}{2!}\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)^{3/2}}\bigg|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{3}{8}\frac{1}{(1+x)^{5/2}}\right)\bigg|_{x=0}x^3\\ &=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 \end{aligned} \tag{6.4.307}$$

Il s'ensuit immédiatement une autre série de Taylor que nous retrouverons aussi un certain nombre de fois :

$$\begin{aligned} f_2(x)&\cong\frac{1}{\sqrt{1+x}}=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x}\cong 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3\right)\\ &=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \end{aligned} \tag{6.4.308}$$

8. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (qui nous sera utile dans la section d'Astronomie) :

En cours de traduction de l'anglais

En utilisant les dérivées communes que nous avons démontrées dans la section de Calcul Différentiel et Intégral, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{1-x^2}\right]&=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[1-x^2\right]=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[1]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\right]}{2\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{0-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}\tag{6.4.309}$$

Et pour la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x]\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{1-x^2}\right]}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\\&=-\frac{1\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[1-x^2\right]}{1-x^2}\\&=-\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[1]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\right]\right)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=-\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{x(0-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\\&=-\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{6.4.310}$$

et pour la dérivée troisième :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]&=-\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}-1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[1-x^2\right]\\&=\frac{3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[1]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\right]\right)}{2\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3(0-2x)}{2\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{3x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}\tag{6.4.311}$$

En cours de traduction de l'anglais

et pour la quatrième et dernière dérivée (oui... il faut bien s'avoir s'arrêter !) :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\right] &= -3\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\right]\\
&= -3\cdot\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x]\cdot(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\right]}{\left((1-x^2)^{\frac{5}{2}}\right)^2}\\
&= -\frac{3\left(1\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}-1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[1-x^2]\cdot x\right)}{(1-x^2)^5}\\
&= -\frac{3\left((1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{5\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[1]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\right]\right)x\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{(1-x^2)^5}\\
&= -\frac{3\left((1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{5(0-2x)x\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{(1-x^2)^5}\\
&= -\frac{3\left((1-x^2)^{\frac{5}{2}} + 5x^2\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)}{(1-x^2)^5} = \frac{3}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}\\
&= -\frac{12x^2+3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}
\end{aligned} \tag{6.4.312}$$

Dès lors en se basant sur les résultats ci-dessus :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\\
f'''(x) &= -\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\\
f''''(x) &= -\frac{12x^2+3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}
\end{aligned} \tag{6.4.313}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &\cong \sqrt{1+x}\\
&\cong \sum_{k=0}^{4}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3+\frac{1}{4!}\frac{\mathrm{d}^4P(0)}{\mathrm{d}x^4}x^4\\
&=\frac{1}{0!}\sqrt{1-x^2}|_{x=0}+\frac{1}{1!}\left.\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0}x^3\\
&+\frac{1}{4!}\left.\frac{\mathrm{d}^4\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{d}x^4}\right|_{x=0}x^4\\
&=\frac{1}{0!}\left.\sqrt{1-x^2}\right|_{x=0}x^0-\frac{1}{1!}\left.\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0}x^1-\frac{1}{2!}\left.\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0}x^2-\frac{1}{3!}\left.\frac{3x}{2\,(1-x^2)^{\frac{7}{4}}}\right|_{x=0}x^3\\
&-\frac{1}{4!}\left.\frac{12x^2+3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}\right|_{x=0}x^4\\
&=\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}3x^4=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}
\end{aligned}
\tag{6.4.314}
$$

9. Développement de Taylor-Maclaurin de $f(x)=\ln(1+x)$:

D'abord rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral que la dérivée de la fonction logarithme. Il vient alors (nous retrouvons très vite les termes d'une des séries développée un peu plus haut) :

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{d}\ln(1+x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x}\\
f''(x)&=\frac{\mathrm{d}^2\ln(1+x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{(1+x)^2}\\
f'''(x)&=\frac{\mathrm{d}^3\ln(1+x)}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{(1+x)^3}
\end{aligned}
\tag{6.4.315}
$$

Il vient alors que :

$$
\begin{aligned}
f_3(x)&\cong\ln(1+x)\\
&\cong\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kP(0)}{\mathrm{d}x^k}x^k=\frac{1}{0!}\frac{\mathrm{d}^0P(0)}{\mathrm{d}x^0}x^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}^1P(0)}{\mathrm{d}x^1}x^1+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2P(0)}{\mathrm{d}x^2}x^2+\frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^3P(0)}{\mathrm{d}x^3}x^3\\
&=\frac{1}{0!}\ln(1+x)|_{x=0}+\frac{1}{1!}\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}x^1+\frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2\ln(1+x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3\ln(1+x)}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=0}x^3\\
&=\frac{1}{0!}\left.\ln(1+x)\right|_{x=0}x^0+\frac{1}{1!}\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0}x^1-\frac{1}{2!}\left.\frac{1}{(1+x)^2}\right|_{x=0}x^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{2}{(1+x)^3}\right|_{x=0}x^3\\
&=\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3
\end{aligned}
\tag{6.4.316}
$$

10. Considérons maintenant le cas important pour le modèle de Langevin du paramagnétisme qu'est le développement de Taylor approximé de la fonction cotangente hyperbolique (voir section Trigonométrie page 2515), définie pour rappel par la relation :

$$
\coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}
\tag{6.4.317}
$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour cela, nous allons utiliser la notation de Landau avec des expressions du type $\mathcal{O}(x^n)$ en se rappelant que nous venons de démontrer un peu plus haut que :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^3) \tag{6.4.318}$$

lorsque $x \to 0$. Pour la cotangente hyperbolique nous avons alors :

$$\begin{aligned}\coth(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) + 1 - x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4) - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)} \\ &= \frac{2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{2x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{2x} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)}}_{:=A}\end{aligned} \tag{6.4.319}$$

À présent il faut se rappeler comme nous venons de le démontrer un peu plus haut que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{6.4.320}$$

pour $|x| < 1$. Dès lors :

$$A = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right)} = 1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4) \tag{6.4.321}$$

et pour finir en remplaçant ceci dans l'expression précédente nous trouvons :

$$\begin{aligned}\coth(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2 + x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{2x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(2 + x^2 - 2\frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^4)\end{aligned} \tag{6.4.322}$$

11. Une autre célèbre série de Maclaurin utilisée des milliers de fois dans le monde pour des applications commerciales est le calcul des valeurs numériques de la distribution statistique Normale :

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x \tag{6.4.323}$$

Alors d'abord pour simplifier cette intégrale, nous posons typiquement :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{6.4.324}$$

que nous connaissons déjà (voir section Statistiques page ??) comme étant le Z-score d'une valeur de donnée. Avec cette simplification, l'intégrale ci-dessus devient :

$$\mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-z^2} \mathrm{d}z \tag{6.4.325}$$

En cours de traduction de l'anglais

La série de Maclaurin pour $e^{-x^2/2}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{n!} = 1 - \frac{x^2}{2^1 1!} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} \end{aligned} \tag{6.4.326}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-z^2/2} \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(1 - \frac{z^2}{2^1 1!} + \frac{z^4}{2^2 2!} - \frac{z^6}{2^3 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^n n!} + \ldots\right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(c^{te} + z - \frac{z^3}{3 \cdot 2^1 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{z^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1) \cdot 2^n \cdot n!} + \ldots\right) \end{aligned} \tag{6.4.327}$$

Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a'}^{b'} e^{-z^2/2} \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(c^{te} + z - \frac{z^3}{3 \cdot 2^1 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1) \cdot 2^n \cdot n!} + \ldots\right)\Bigg|_{a'}^{b'} \tag{6.4.328}$$

Il est assez évident que la constante s'éliminera d'elle-même. Donc !

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a'}^{b'} e^{-z^2/2} \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3 \cdot 2^1 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1) \cdot 2^n \cdot n!} + \ldots\right)\Bigg|_{a'}^{b'} \tag{6.4.329}$$

et dans le cas courant dans les entreprise où $a = 0$, nous obtenons (avec deux termes seulement) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\mu/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-z^2/2} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \frac{\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)^3}{3 \cdot 2^1 \cdot 1!} + \frac{\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} \right) \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right) - \frac{\left(\dfrac{-\mu}{\sigma}\right)^3}{3 \cdot 2^1 \cdot 1!} + \frac{\left(\dfrac{-\mu}{\sigma}\right)^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} \right) \end{aligned} \tag{6.4.330}$$

Pour résumer, voici un tableau avec les séries de Maclaurin les plus importantes :

En cours de traduction de l'anglais

Fonction	**Approximations de Maclaurin**
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
$\tan(x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} \left(2^{2n}-1\right) B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$
$\tan^{-1}(x)$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$, pour $\lvert x\rvert \leq 1$
$(1+x)^k$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \cdots$, pour $-1 < x \leq 1$
$-\ln(1-x)$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^k}{k} + \cdots$, pour $-1 \leq x < 1$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$, pour $\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$, pour $\lvert x\rvert < 1$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$, pour $\lvert x\rvert < +\infty$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$, pour $\lvert x\rvert < +\infty$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots$
$\coth(x)$	$\frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$, pour $0 < \lvert x\rvert < \pi$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha'}^{\sigma'} e^{-z^2/2} \mathrm{d}z$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3\cdot 2^1 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^n \cdot n!} + \ldots \right) \Bigg\vert_{\alpha'}^{b}$

TAB. 6.16 – **Séries de Maclaurin les plus courantes**

En cours de traduction de l'anglais

6.4.2.6.2 Séries de Taylor de fonctions bivariées (séries de Taylor multivariées))

Nous allons voir ici comment approcher une fonction $f(x,y)$ de deux variables réelles par une somme de puissances (série de Taylor). Ce type d'approximation est très utilisé dans de nombreux domaines de l'ingénierie (voir sections de Génie Industriel à la page **??** et de Méthodes Numériques à la page **??**).

Nous cherchons donc une approximation de $f(x,y)$ au point $f(x_0+h,y_0+h)$. Pour cela, posons (rien ne nous interdit a priori de le faire) que :

$$x=x(t)=x_0+ht \qquad y=y(t)=y_0+kt \tag{6.4.331}$$

Nous avons alors :

$$f(t)=f(x(t),y(t)) \tag{6.4.332}$$

La valeur de (l'astuce est là !) :

$$f(1)=f(x(1),y(1))=f(x_0+h,y_0+k) \tag{6.4.333}$$

peut être approchée en utilisant son expression en série de Taylor autour de la valeur 0 telle que :

$$\begin{aligned}
f(1)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{{}^k f(t_0)}{\mathrm{d}t^k}(t-t_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{{}^k f(0)}{\mathrm{d}t^k}(1-0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{{}^k f(0)}{\mathrm{d}t^k}\\
&=f(0)+1\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0)+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}(0)+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}t^n}(0)\\
&=f(x_0,y_0)+1\cdot\frac{\mathrm{d}f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t}(0)+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t^2}(0)+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^nf(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t^n}(0)
\end{aligned} \tag{6.4.334}$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t}&=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}(x_0+ht)+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}(y_0+kt)}{\mathrm{d}t}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}h\mathrm{d}t+\dfrac{\partial f}{\partial y}k\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f
\end{aligned} \tag{6.4.335}$$

et :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{d}f(x(t),y(t))\right)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\dfrac{\partial(\mathrm{d}x)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial(\mathrm{d}f)}{\partial y}\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t^2}\\
&=\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)}{\mathrm{d}t^2}\\
&=\frac{\left[(\mathrm{d}x)^2\dfrac{\partial^2f}{\partial x^2}+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dfrac{\partial^2f}{\partial x\partial y}\right]+\left[\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dfrac{\partial^2f}{\partial y\partial x}+(\mathrm{d}y)^2\dfrac{\partial^2f}{\partial y^2}\right]}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned} \tag{6.4.336}$$

Selon le théorème de Schwarz (voir section Calcul Différentiel et Intégral à la page 1453) :

$$\frac{\partial^2f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y} \tag{6.4.337}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t^2}=\frac{(\mathrm{d}x)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(\mathrm{d}y)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2 f}{\mathrm{d}t^2}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f \quad (6.4.338)$$

et nous démontrons par récurrence que :

$$\frac{\mathrm{d}^n f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t^2}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \quad (6.4.339)$$

Nous avons alors finalement :

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)&=f(x_0,y_0)+1\cdot\frac{\mathrm{d}f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t}(0)+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t^2}(0)+\ldots\\&=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(0)+\ldots\\&=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\\&+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right]\end{aligned} \quad (6.4.340)$$

ou sous une autre forme équivalente simplifiée :

$$\boxed{\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)&=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\\&+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right]\end{aligned}} \quad (6.4.341)$$

Ou encore si nous définissons une matrice H appelée "matrice Hessienne" donnée par :

$$H=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix} \quad (6.4.342)$$

nous pouvons aussi écrire :

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+\frac{1}{2!}(h\,k)H\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} \quad (6.4.343)$$

Dans Maple 4.00b nous utilisons la commande suivante pour faire un développement d'ordre 3a utour de 0 :

```
>readlib(mtaylor):
>mtaylor(f(x,y), [x,y], 3);
```

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Voyons un exemple avec la relativement fameuse fonction "baleine à bosse" :

```
>with(plots): with(plottools):
>readlib(mtaylor):
>fct:=x^2*(4-2.1*x^2+1/3*x^4)+x*y+y^2*(-4+4*y^2);
>poly2 :=mtaylor(fct,[x=1,y=1],6);
>#Convertir tous les coefficients en nombres à virgule flottante
>poly2n := map(evalf,poly2):
>gr1:= plot3d(poly2n,x=-2..2,y=-1..1,color=red):
>gr2:= plot3d(fct,x=-2..2,y=-1..1,color=blue):
>display3d(gr1,gr2,view=-3..8,axes=framed);
```

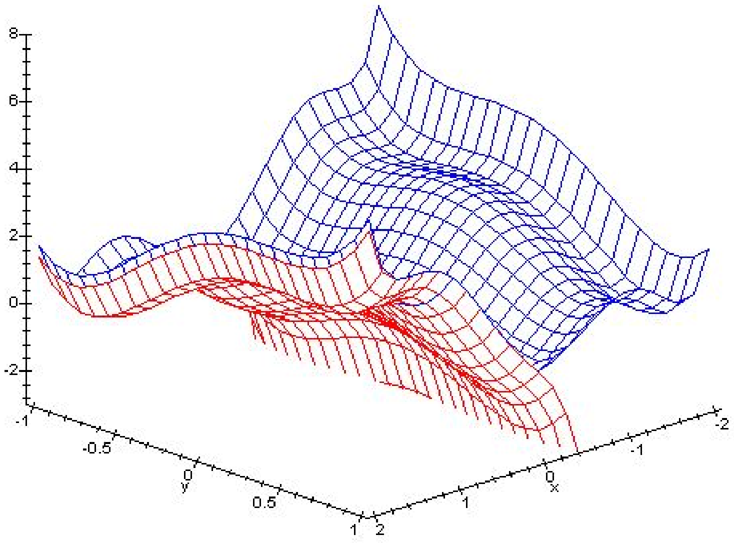


FIG. 6.67 – **Exemple de Taylor bivarié avec Maple 4.00b**

La relation précédente peut aussi s'écrire dans le cas multivarié en un point $\vec{x}$ près de l'origine du système de coordonnées $\vec{p}$ comme suit (notation courante en informatique) :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{p}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \ldots \cong c - \vec{b} \circ \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x} \circ (H\vec{x}) \qquad (6.4.344)$$

où :

$$c := f(\vec{p}) \qquad \vec{b} := \vec{\nabla}(\vec{f})|_P \qquad H_{ij} := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_P \qquad (6.4.345)$$

6.4.2.6.3 Forme quadratique

Maintenant nous allons avoir besoin pour la section de Méthodes Numériques d'énoncer une propriété importante (qui aurait tout à fait sa place uniquement dans le section de Calcul Différentiel Et Intégral) :

Soit f une fonction définie et derivable sur un intervalle I et soit a un élément de I. Si f est telle $f'(a)=0$ que alors nous disons qu'elle a un "extremum local" en a.

Remarque

La réciproque est fausse, la fonction x^3 en est un exemple. Sa dérivée est nulle en 0 mais il n'y a pas d'extremum local en ce point. Donc il faut être prudent !

Cependant, soit f une fonction définie et dérivée sur un intervalle I et soit a un élément de I. Si f est telle que $f'(a)=0$ et si f' change de signe en a alors f admet un extremum local en a.

Pour maintenant revenir à notre développement de Taylor à deux variables, nous savons que si (x_0,y_0) est un extremum local de f alors dans un premier temps (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1697) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \qquad (6.4.346)$$

Cependant nous venons de voir que cette condition n'est pas suffisante à garantir que (x_0,y_0) soit un extremum local.

Reconsidérons le développement de Taylor de f ci-dessus en tenant compte de la condition précédente. Le développement se simplifie alors en :

$$f(x_0+h,y_0+h)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)hk+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right] \qquad (6.4.347)$$

Nous savons alors par définition que pour que (x_0,y_0) soit un minimum local (respectivement un maximum local) il suffit que l'expression entre crochets soit positive (respectivement négative). Étant donné que les dérivées secondes de f sont continues, il suffit donc que l'expression :

$$\boxed{q:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)hk+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2} \qquad (6.4.348)$$

soit positive (resp. négative) quels que soient h ou k et qu'elle soit nulle que si $h=k=0$. Nous disons alors que q est une "forme quadratique définie positive (resp. définie négative) ".

Pour simplifier l'écriture et être conforme aux traditions posons maintenant :

$$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\; b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\; c=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0,y_0),\; h=\Delta x,\; k=\Delta y \qquad (6.4.349)$$

Nous pouvons alors réécrire q comme suit :

$$\begin{aligned}q(\Delta x,\Delta y)&=a\Delta x^2+2b\Delta x\Delta y+c\Delta y^2\\&=\frac{ac-b^2}{a}\Delta y^2+a\left(\Delta x+\frac{b\Delta y}{a}\right)^2=\frac{1}{a}\det(H)\Delta y^2+a\left(\Delta x+\frac{b\Delta y}{a}\right)^2\end{aligned} \qquad (6.4.350)$$

En cours de traduction de l'anglais

où H est toujours la matrice hessienne de f évaluée en (x_0, y_0).

Nous voyons donc que q est définie positive (minimum local) si $a > 0$ et $\det(H) > 0$, définie négative (maximum local) si $a < 0$ et $\det(H) > 0$. En d'autres termes, tout est déterminé par ce qui est souvent noté dans de nombreux manuels par :

$$\det(H) = D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \tag{6.4.351}$$

En revenant aux dérivées partielles ces conditions, appelées "test de la derivée seconde", se réécrivent comme suit :

- Définie positive (minimum local) si :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \text{ et } \det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right)^2 > 0 \tag{6.4.352}$$

  Ou sous forme condensée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \tag{6.4.353}$$

- Définie négative (maximum local) si :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \text{ et } \det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right)^2 > 0 \tag{6.4.354}$$

  Ou sous forme condensée :

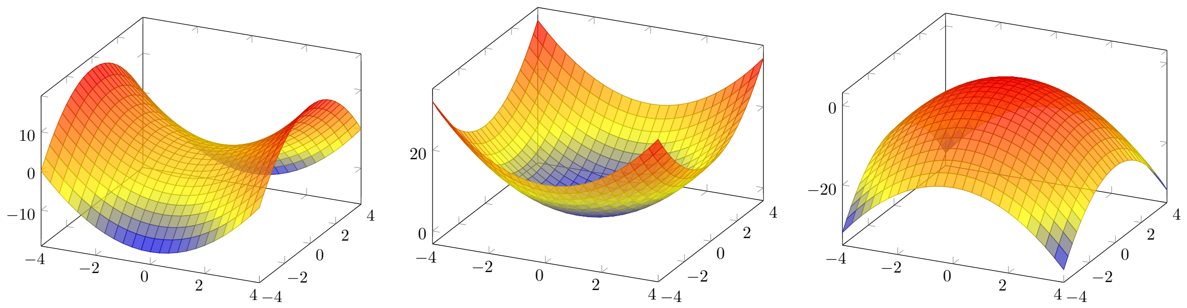
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \tag{6.4.355}$$

- Indéfinie (point col) si :

$$\det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right)^2 < 0 \tag{6.4.356}$$

  Ou sous forme condensée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \tag{6.4.357}$$



(a) Point col (b) Minimum local (c) Maximum local

FIG. 6.68 – Types de points stationnaires (test de la dérivée seconde des formes quadratiques)

En cours de traduction de l'anglais

En conclusion nous voyons que le signe du déterminant de la matrice hessienne ainsi que celui de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ nous permettent d'obtenir une condition suffisante pour déterminer si nous sommes en présence d'un extremum local.

Si nous considérons maintenant une matrice symétrique générale 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (6.4.358)$$

Il devrait être presque évident pour le lecteur que cette matrice induit, au sens de la matrice hessienne, la forme quadratique :

$$\mathrm{Q}_A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (6.4.359)$$

Si $y = 0$, alors nous avons $\mathrm{Q}_A(x, 0) = ax^2$ (parabole), donc nous devons certainement avoir $a > 0$ pour que A soit définie positive.

Les exemples suivants illustrent qu'en général, il est difficile de déterminer si une matrice symétrique est définie positive à partir de l'inspection de ses composantes.

✍**Exemples :**

E1. Comme premier exemple, considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4.360)$$

Dès lors :

$$\mathrm{Q}_A(x, y) = x^2 + y^2 + 8xy \quad (6.4.361)$$

et nous avons quels que soient (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \text{ but } \det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\right)^2 < 0 \quad (6.4.362)$$

Par conséquent, même si toutes les entrées de A sont positives, A n'est pas définie positive.

E2. Considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.4.363)$$

Dès lors :

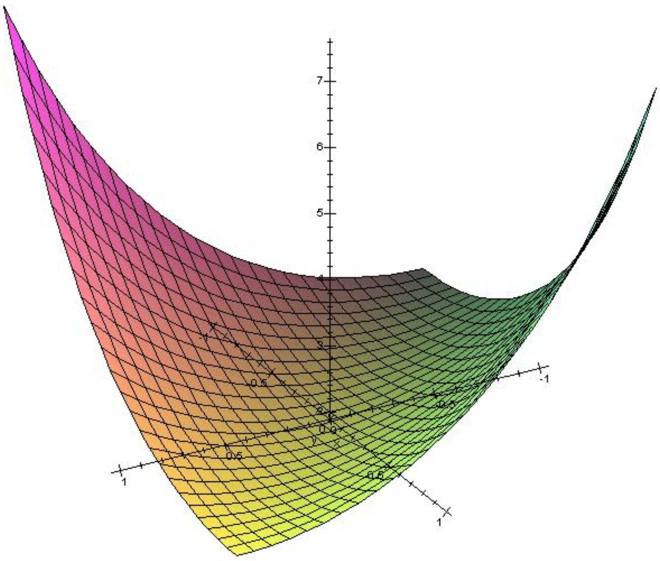
$$\mathrm{Q}_A(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy = x^2 - 2xy + y^2 + 3y^2 = (x - y)^2 + 3y^2 \quad (6.4.364)$$

qui peut être vu comme étant toujours non-négative. De plus, $\mathrm{Q}_A(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $y = 0$, donc pour tous les vecteurs non nuls (x, y), $\mathrm{Q}_A(x, y) > 0$ et A est définie positive, même si A n'a pas toutes les entrées positives.

En ... anglais

E3. Posons :

$$f(x,y)=e^{x-y}+e^{y-x} \tag{6.4.365}$$



Nous avons :

$$\vec{\nabla} f(x,y)=(e^{x-y}-e^{y-x},-e^{x-y}+e^{y-x}) \tag{6.4.366}$$

ce qui donne les points critiques (x,x) pour tout $x\in\mathbb{R}$. Nous avons également :

$$\mathrm{H}f(x,y,z)=\begin{bmatrix} e^{x-y}+e^{y-x} & -e^{x-y}-e^{y-x} \\ -e^{x-y}-e^{y-x} & e^{x-y}+e^{y-x} \end{bmatrix} \tag{6.4.367}$$

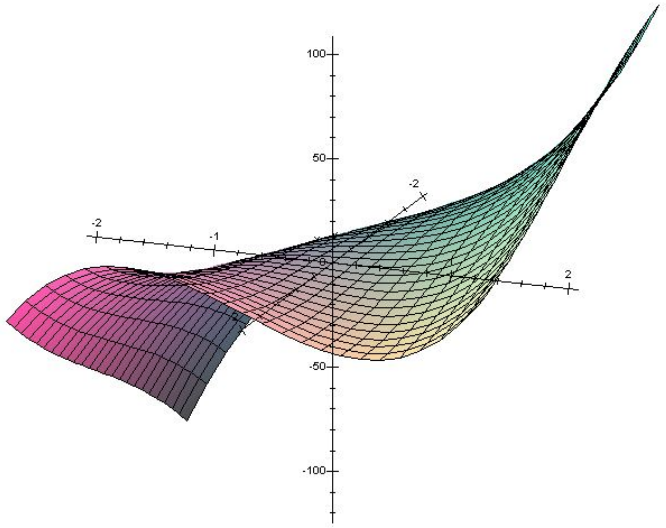
Dès lors :

$$\Delta_1=e^{x-y}+e^{y-x}>0, \quad \Delta_2=(e^{x-y}+e^{y-x})^2-(-e^{x-y}-e^{y-x})^2=0 \tag{6.4.368}$$

C'est-à-dire que $\mathrm{H}f(x,x)$ est semi-positive définie, ce qui fait de (x,x) un minimiseur global de $f(x,y)$.

E4. Considérons :

$$f(x,y)=x^3-12xy+8y^3 \tag{6.4.369}$$



Nous avons :

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12y, \quad -12x + 24y^2) \tag{6.4.370}$$

ce qui donne les points critiques $(0,0)$ et $(2,1)$. Nous avons également :

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48x \end{bmatrix} \tag{6.4.371}$$

et dès lors :

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{H}f(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{bmatrix} \tag{6.4.372}$$

Nous voyons que $\mathrm{H}f(2,1)$ est définie positive, car ses principaux mineurs sont positifs, mais que $\mathrm{H}f(0,0)$ ne l'est pas, car $\Delta_1 = 0$ et $\Delta_2 = -144$. Autrement dit, $\mathrm{H}f(0,0)$ est indéfinie, donc $(0,0)$ est un point de col.

De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,y) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x,y) = -\infty \tag{6.4.373}$$

donc $f(x,y)$ n'a pas de minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons cependant conclure que $(2,1)$ est un minimum local strict.

Il convient de souligner que si la hessienne est semi-définie positive ou semi-définie négative à un point critique, alors nous ne pouvons pas conclure que le point critique est nécessairement un minimum, un maximum ou un point de col de la fonction.

6.4.2.6.4 Reste de Lagrange

Il peut y avoir un intérêt pour certaines applications numériques (voir section Méthodes Numériques page ??) de connaître l'erreur d'approximation du polynôme $P_n(x)$ par rapport à la fonction $f(x), \forall x$.

Définissons pour cela un "reste" $R_n(x)$, tel que :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{6.4.374}$$

La fonction $R_n(x)$ est nommée "resste de Lagrange" ou "résidu de Lagrange" ou encore "erreur de Lagrange".

Théorème 6.22. Considérons maintenant une fonction $f(x)$ qui est $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle qui contient x_0. Pour une valeur x de l'intervalle, différente de x_0, nous nous proposons de démontrer qu'il existe un nombre z situé entre x_0 et x tel que :

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} \tag{6.4.375}$$

Démonstration 6.22.1. Soit une fonction $g(t)$ une fonction définie par la différence d'une fonction $f(x)$ supposée connue et une approximation de Taylor de cette même fonction :

$$\begin{aligned} g(t) =& f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{(n+1)} \right) \\ =& f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} \right) \end{aligned} \tag{6.4.376}$$

avec bien sûr :

$$R_n(x)\frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x-t)}{(n+1)!} \tag{6.4.377}$$

Nous voyons que $g(t)$ s'annule bien pour la valeur $t = x$.

Dérivons maintenant $g(t)$ par rapport à t, nous trouvons :

$$\begin{aligned} g'(t) =& -f'(t) - f'(t)(-1) - f''(t)(x-t) - f''(t)(x-t)(-1) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 \\ &+ \cdots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_n(x)(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \end{aligned} \tag{6.4.378}$$

Après simplification :

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_n(x)(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \tag{6.4.379}$$

Selon le théorème de Rolle (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1441), il existe une valeur pour laquelle la dérivée s'annule. Donc :

$$0 = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + R_n(x)(n+1)\frac{(x-z)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \tag{6.4.380}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons simplifier l'équation par $(x-z)^n$:

$$R_n(x)\frac{(n+1)}{(x-x_0)^{n+1}}-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}=0 \tag{6.4.381}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$R_n(x)-\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0 \tag{6.4.382}$$

et nous trouvons donc pour maximum de R_n :

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{6.4.383}$$

■ Q.E.D.

Nous voyons que plus le polynôme $P_n(x)$ est de degré élevé, plus il approxime la fonction $f(x)$ avec exactitude. Que se passe-t-il lorsque $n\rightarrow+\infty$? :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{6.4.384}$$

Supposons que $f(x)$ admette des dérivées de tout ordre (ce que nous notons $\mathcal{C}^n$) pour toutes les valeurs d'un intervalle quelconque contenant et soit le reste de Lagrange R_n de $f(x)$ en x_0. Si, quel que soit x dans l'intervalle :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty}R_n(x)=0 \tag{6.4.385}$$

alors $f(x)$ est exactement représentée par $P(x)$ sur l'intervalle.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.22.2. La démonstration découle simplement de l'expression de $P_n(x)$ lorsque $n\rightarrow+\infty$.

Effectivement, si nous prenons une infinité de termes pour $P_n(x)$, la correspondance avec la fonction approchée est parfaite et donc le reste est nul.

■ Q.E.D.

Le polynôme :

$$\boxed{P(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k} \tag{6.4.386}$$

est appelé "polynôme de Taylor" ou "série de Taylor". Si $x_0=0$, il est appelé "polynôme de Maclaurin" ou "série de Maclaurin".

6.4.2.6.5 Formule de Taylor avec reste intégral

Nous allons voir ici un théorème qui nous sera utile dans le chapitre de Statistique pour relier la loi de Poisson et la loi du Khi-2 qui est utilisée dans les logiciels statistique pour le test de Poisson des événements rares (c'est la seule application pratique utilisée dans les entreprises qui nous est connue à ce jour).

Remarque

Si quelqu'un possède une démonstration plus pédagogique dont le début fait un peu moins "formule tombée du ciel", nous sommes preneurs !

Théorème 6.23. Soit $f(x)$ une application $n+1$ fois dérivable dans l'intervalle $[a,b]$. Nous avons alors :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{1}{k!}\int_a^b(b-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t \tag{6.4.387}$$

où il est important (pour la bonne compréhension de ce que nous ferons dans la section de Statistiques) que le lecteur remarque dans le développement que quand la dérivée s'arrête au n-ième terme dans la série, l'intégrale (le reste) a un facteur $1/n!$, une puissance en n et une dérivée en $n+1$. Donc in extenso, comme nous allons le démontrer ci-après, si nous arrêtons le développement des termes à $n-1$, l'intégrale (le reste) aura un facteur $1/(n-1)!$, une puissance en $n-1$ et une dérivée n-ième.

Démonstration 6.23.1. La démonstration se fait par récurrence. Nous considérons d'abord la formule tombée du ciel :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{1}{k!}\int_a^b(b-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t \tag{6.4.388}$$

Nous montrons qu'elle est correcte pour $k=0$ et ensuite nous faisons une récurrence sur k pour $k\in\mathbb{N}$.

Pour $k=0$, nous avons la relation bien connue (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1490) :

$$f(b)-f(a)=\int f'(t)\mathrm{d}t \tag{6.4.389}$$

Supposons la propriété vraie pour $k<n$:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{1}{k!}\int_a^b(b-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t \tag{6.4.390}$$

Nous intégrons par parties (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1511) le terme :

$$\frac{1}{k!}\int_a^b(b-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t \tag{6.4.391}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors :

$$\frac{1}{k!}\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{(k+1)!}(b-t)^{k+1}f^{(k+1)(t)}\right]_a^b + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)\mathrm{d}t \quad (6.4.392)$$

d'où :

$$\begin{gathered}f(b)-f(a)=\\(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a)+\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b (b-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)\mathrm{d}t\end{gathered} \quad (6.4.393)$$

■ Q.E.D.

6.4.2.6.6 Théorème d'inversion de Lagrange

En analyse mathématique, le "théorème d'inversion de Lagrange", également connu sous le nom de "formule de Lagrange-Bürmann", donne le développement en série de Taylor de la fonction inverse d'une fonction analytique.

Pour information, ce théorème a été démontré par Lagrange et généralisé par Hans Heinrich Bürmann, tous deux à la fin du 118e siècle (calendrier holocène). Il existe également une démonstration relativement simple utilisant une analyse complexe et une intégration de contours. Nous utiliserons ici une démonstration encore plus simple trouvée par Pierre-Simon de Laplace à la même époque en 11780 (calendrier holocène).

Ce théorème nous sera utile lors de notre détermination de l'Équation du Temps et de son célèbre Analemme correspondant (voir page **??**).

Le théorème d'inversion de Lagrange donne le développement en série d'une fonction implicitement définie. L'application de ce théorème permet, entre autres, d'obtenir une solution numérique à l'équation de Kepler $E=M+e\sin(E)$ (voir **??**), ou d'écrire des développements utiles du problème à deux corps.

Voici comment le théorème est énoncé :

Théorème 6.24. Soit y une fonction de deux variables x et α et d'une fonction f infiniment différentiable de la forme : $y=x+\alpha f(y)$ avec α petit.

Alors :

$$y=x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}f^k(x) \quad (6.4.394)$$

Comme dit précédemment, nous nous proposons ici de le prouver par une méthode basée sur les dérivées partielles, trouvée par Pierre-Simon Laplace.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.24.1. Nous commençons par développer $y(x,\alpha)$ au voisinage de $\alpha=0$.

Pour cela, nous utilisons la série de Taylor univariée prouvée plus haut et nous obtenons :

$$y(x,\alpha=0)=\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}y(x,0)=x+\sum_{k\geq 1}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}y(x,0) \tag{6.4.395}$$

Nous devons maintenant également prouver d'abord un résultat intermédiaire, à savoir :

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=f(y)\frac{\partial y}{\partial x} \tag{6.4.396}$$

Pour cela, nous partons de $y=x+\alpha f(y)$, et le réorganisons comme suit :

$$y(x,\alpha)-x-\alpha f(y(x,\alpha))=0 \tag{6.4.397}$$

Donc :

$$\frac{\partial y}{\partial x}-1-\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}\left[1-\alpha f'(y)\right]=1 \tag{6.4.398}$$

et respectivement :

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}-f(y(x,\alpha))-\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial y}{\partial\alpha}\left[1-\alpha f'(y)\right]=f(y)=1\cdot f(y) \tag{6.4.399}$$

D'où le mélange des deux résultats :

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}\left[1-\alpha f'(y)\right]=\frac{\partial y}{\partial x}\left[1-\alpha f'(y)\right]f(y) \tag{6.4.400}$$

Après simplification :

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=f(y)\frac{\partial y}{x} \tag{6.4.401}$$

Nous avons maintenant un deuxième résultat intermédiaire, à savoir le fait que pour $n>0$, nous avons :

$$\frac{\partial^n y}{\partial\alpha^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(f^n(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{6.4.402}$$

Pour le démontrer, nous utiliserons le premier résultat intermédiaire à la manière du physicien/ingénieur (...) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right)=f(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f^2(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{6.4.403}$$

Donc par récurrence :

$$\frac{\partial^n y}{\partial\alpha^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(f^n(y)\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{6.4.404}$$

Maintenant, avec ce résultat, nous pouvons passer à l'étape finale ! Notez que pour $(x,0)$ nous avons :

$$y=x+\alpha f(y)=x \tag{6.4.405}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ainsi :

$$\frac{\partial y}{\partial x}=1 \tag{6.4.406}$$

et en utilisant la relation que nous venons d'obtenir par récurrence :

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}y(x,0)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(f^n(x)\right) \tag{6.4.407}$$

et comme indiqué ci-dessus :

$$y(x,\alpha=0)=x+\sum_{k\geq 1}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial \alpha^k}y(x,0) \tag{6.4.408}$$

nous obtenons finalement (gardez à l'esprit que c'est pour α proche de zéro !) :

$$\boxed{y=x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}f^k(x)} \tag{6.4.409}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

6.4.2.7 Séries de Fourier (séries trigonométriques)

Définition (#6.4.220) : Nous appelons "série trigonométrique" une série de la forme :

$$a_0\cdot\cos(0\cdot x)+b_0\cdot\sin(0\cdot x)+a_1\cdot\cos(x)+b_1\cdot\sin(x)+\cdots a_n\cdot\cos(nx)+b_0\cdot\sin(nx) \tag{6.4.410}$$

ou sous une forme plus compacte :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_0\sin(nx)\right) \tag{6.4.411}$$

Les constantes a_n, b_n sont les coefficients de la série trigonométrique plus souvent nommés "coefficients de Fourier".

Remarque

Nous avions déjà fait mention de ce type de série lors de notre étude des types de polynômes existants puisque les séries de Fourier ne sont au fait que des polynômes trigonométriques (voir section Calcul Algébrique page 1377). Par ailleurs, nous avons vu comme exemple dans la section d'Analyse Fonctionnelle lors de notre étude du produit scalaire fonctionnel que les fonctions sinus et cosinus constituaient les bases d'un espace vectoriel.

Si la série converge, sa somme est une fonction périodique $f(x)$ de période $T=2\pi$, étant donné que $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ sont des fonctions périodiques de période 2π. De sorte que :

$$f(x)=f(x+2\pi) \tag{6.4.412}$$

Posons maintenant le problème suivant : Nous nous donnons une fonction connue, périodique quelconque $f(x)$ continue par morceaux de période 2π. Nous nous demandons s'il existe une série trigonométrique convergeant vers $f(x)$ moyennant des conditions sur cette série.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$, périodique et de période 2π, puisse être effectivement représentée par une série trigonométrique convergeante vers $f(x)$ dans l'intervalle $[0,T]$, c'est-à-dire qu'elle soit la somme de cette série :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) \tag{6.4.413}$$

Supposons que l'intégrale de la fonction du premier membre de cette égalité soit égale à la somme des intégrales des termes de la série ci-dessus. Ceci aura lieu, par exemple, si nous supposons que la série trigonométrique proposée converge absolument, c'est-à-dire que la série numérique suivante converge (de par la propriété bornée des fonctions trigonométriques) :

$$|a_0|+|b_0|+|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\ldots+|a_n|+|b_n| \tag{6.4.414}$$

La série :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) \tag{6.4.415}$$

est alors majorable et peut être intégrée terme à terme de 0 à T (où $T=2\pi$) ce qui nous permet de déterminer les différents coefficients de Fourier. Mais avant de commencer exposons les intégrales suivantes qui nous très seront utiles par la suite :

$$\text{(I)}\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_0^T\cos(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_0^T\sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x=0\end{cases}\qquad\text{(II)}\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\cos^2(kx)\mathrm{d}x=\frac{T}{2}\\ \displaystyle\int_0^T\cos(kx)\sin(kx)\mathrm{d}x=0\\ \displaystyle\int_0^T\sin^2(kx)\mathrm{d}x=\frac{T}{2}\end{cases} \tag{6.4.416}$$

avec $n,k\in\mathbb{N}$ et $n\neq k$ avec $n,k\in\mathbb{N}$ et $n=k$

Avant de continuer, démontrons la valeur que prennent ces six intégrales (suite à la demande des lecteurs). Mais d'abord, rappelons que comme $n,k\in\mathbb{N}$ alors :

$$(n+k)=w\in\mathbb{N}\quad\text{et}\quad(n-k)=v\in\mathbb{Z} \tag{6.4.417}$$

1. Nous procédons en utilisant les relations trigonométriques remarquables (voir section Trigonométrie page 2502) et les primitives des fonctions trigonométriques élémentaires

En cours de traduction de l'anglais

(voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1513) :

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^T \big(\cos(nx+kx)+\cos(nx-kx)\big)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(nx+kx)}{n+k}-\frac{\sin(nx-kx)}{n-k}\right)\Bigg|_0^T\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(nx+kx)}{n+k}-\frac{\sin((n-k)x)}{n-k}\right)\Bigg|_0^T\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(wx)}{w}-\frac{\sin(vx)}{v}\right)\Bigg|_0^T\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(wT)}{w}-\frac{\sin(vT)}{v}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(w0)}{w}-\frac{\sin(v0)}{v}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(wT)}{w}-\frac{\sin(vT)}{v}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{0}{w}-\frac{0}{v}\right)=0\end{aligned} \tag{6.4.418}$$

car comme nous l'avons vu dans la section de Trigonométrie $\sin(k\pi)=0, k\in\mathbb{Z}$ et comme $T=2\pi$, les deux différences précédentes ont tous les termes qui sont nuls tel qu'au final :

$$\int_0^T \cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x=0 \tag{6.4.419}$$

En cours de traduction de l'anglais

2. Pour la deuxième intégrale, nous procédons selon les mêmes techniques et mêmes propriétés des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^T \big(\sin(nx+kx)+\sin(nx-kx)\big)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(nx+kx)}{n+k}-\frac{\cos(nx-kx)}{n-k}\right)\Bigg|_0^T\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(wx)}{w}-\frac{\cos(vx)}{v}\right)\Bigg|_0^T\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(wT)}{w}-\frac{\cos(vT)}{v}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(w0)}{w}-\frac{\cos(v0)}{v}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)-\left(-\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{6.4.420}$$

3. Et nous continuons ainsi pour la troisième, toujours selon les mêmes propriétés :

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^T \big(\cos(nx-kx)-\cos(nx+kx)\big)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(nx-kx)}{n-k}-\frac{\sin(nx+kx)}{n+k}\right)\Bigg|_0^T\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(vx)}{v}-\frac{\sin(wx)}{w}\right)\Bigg|_0^T\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(vT)}{v}-\frac{\sin(wT)}{w}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(v0)}{v}-\frac{\sin(w0)}{w}\right)=0\end{aligned} \tag{6.4.421}$$

4. . Encore une fois selon les mêmes méthodes (cela devient routinier...) pour d'abord $k\neq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos^2(kx)\mathrm{d}x &= \int_0^T \left(\frac{1+\cos(2kx)}{2}\right))\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^T \cos(2kx)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x\Big|_0^T+\frac{1}{4k}\sin(2kx)\Big|_0^T\\ &= \frac{1}{2}(T-0)+\frac{1}{4k}\big(\sin(2kT)-\sin(2k\cdot 0)\big)\\ &= \frac{1}{2}T+\frac{1}{4k}(0-0)=\frac{T}{2}\end{aligned} \tag{6.4.422}$$

et pour $k=0$ il vient immédiatement :

$$\int_0^T \cos^2(0\cdot x)\mathrm{d}x=\int_0^T \mathrm{d}x=T \tag{6.4.423}$$

5. Encore une fois... (bientôt au bout...) pour $k\neq 0$ d'abord :

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(kx)\sin(kx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^T \big(\sin(kx+kx)+\sin(kx-kx)\big)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^T \sin(2kx)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2kx)}{2k}\right)\Bigg|_0^T=-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos(2kx)}{k}\right)\Bigg|_0^T\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos(2kT)}{k}-\frac{\cos(2k\cdot 0)}{k}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\right)=0\end{aligned} \tag{6.4.424}$$

et pour $k=0$ il vient immédiatement :

$$\int_0^T \cos(kx)\sin(kx)\mathrm{d}x=0 \tag{6.4.425}$$

En cours de traduction de l' anglais

6. Et enfin la dernière (...) :

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin^2(kx)\mathrm{d}x &= \int_0^T \left(\frac{1-\cos(2kx)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2kx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x\Big|_0^T - \frac{1}{2k}\sin(2kx)\Big|_0^T \\ &= \frac{1}{2}(T-0) - \frac{1}{2k}\big(\sin(2kT)-\sin(2k\cdot 0)\big) = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2k}(0-0) \\ &= \frac{T}{2}\end{aligned} \quad (6.4.426)$$

Ce petit travail fait, revenons maintenant à nos moutons... Pour déterminer les coefficients a_n multiplions les deux membres de l'égalité :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big) \quad (6.4.427)$$

par $\cos(kx)$:

$$f(x)\cos(kx) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(a_n\cos(nx)\cos(kx) + b_n\sin(nx)\cos(nx)\big) \quad (6.4.428)$$

La série du second membre de l'égalité est majorable, étant donné que ses termes ne sont pas supérieurs en valeur absolue aux termes de la série positive convergente. Nous pouvons donc l'intégrer terme à terme sur tout segment borné de 0 à T :

$$\int_0^T f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\int_0^T \cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x + b_n\int_0^T \sin(nx)\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \quad (6.4.429)$$

Nous avons démontré plus haut que quelles que soient les valeurs entières que prennent k ou n le deuxième terme de la parenthèse est toujours nul. Il ne reste alors plus que :

$$\int_0^T f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x \quad (6.4.430)$$

Or, nous avons démontré plus haut que l'intégrale à droite est toujours nulle si n et k sont différents. Il ne reste alors que le cas où n et k sont égaux. C'est-à-dire :

$$\int_0^T f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = a_k\int_0^T \cos(kx)\cos(kx)\mathrm{d}x = a_k\int_0^T \cos^2(kx)\mathrm{d}x \quad (6.4.431)$$

Dans cette situation, nous avons d'abord le cas particulier où k est nul. Dans ce cas :

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = a_0\int_0^T \mathrm{d}x = a_0 T \quad (6.4.432)$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x \tag{6.4.433}$$

Il est évident que le coefficient a_0 représente donc la moyenne du signal ou de sa composante continue si elle existe.

Dans le cas où k n'est pas nul, nous avons :

$$\int_0^T f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = a_k\int_0^T \cos^2(kx)\mathrm{d}x = a_k\frac{T}{2} \tag{6.4.434}$$

D'où nous tirons :

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x \tag{6.4.435}$$

Pour déterminer les coefficients b_n nous procédons de la même manière mais en multipliant cette fois-ci les deux membres de l'égalité par $\sin(kx)$:

$$f(x)\sin(kx) = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(a_n\cos(nx)\sin(kx) + b_n\sin(nx)\sin(kx)\big) \tag{6.4.436}$$

La série du second membre de l'égalité est majorable, étant donné que ses termes ne sont pas supérieurs en valeurs absolues aux termes de la série positive convergente. Nous pouvons donc l'intégrer terme à terme sur tout segment borné de 0 à T :

$$\int_0^T f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\int_0^T \cos(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x + b_n\int_0^T \sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x\right) \tag{6.4.437}$$

Nous avons démontré plus haut que quelles que soient les valeurs entières que prennent k ou n le deuxième terme de la parenthèse est toujours nul. Il ne reste alors plus que :

$$\int_0^T f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(b_n\int_0^T \sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x\right) \tag{6.4.438}$$

Or, nous avons démontré plus haut que l'intégrale à droite est toujours nulle si n et k sont différents. Il ne reste alors que le cas où n et k sont égaux. C'est-à-dire :

$$\int_0^T f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = b_k\int_0^T \sin(kx)\sin(kx)\mathrm{d}x = b_k\int_0^T \sin^2(kx)\mathrm{d}x \tag{6.4.439}$$

Dans cette situation, nous avons d'abord le cas particulier où k est nul. Mais nous voyons de suite que nous avons une indétermination par zéro. Il vaut mieux alors considérer le cas général d'où nous tirons :

$$\int_0^T f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = b_k\int_0^T \sin^2(kx)\mathrm{d}x = b_k\frac{T}{2} \tag{6.4.440}$$

En cours de traduction de l'anglais

D'où nous tirons aisément que :

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x \qquad (6.4.441)$$

Dès lors, pour la situation où k est nul le coefficient est alors nul !

Donc finalement les coefficients de Fourier sont donc déterminés par les intégrales :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \qquad (6.4.442)$$

Mais comme c'est embêtant d'avoir trois résultats pour les coefficients nous allons jouer un peu avec la définition de la série de Fourier.

Effectivement en sommant de 1 à $+\infty$ plutôt que de 0 à $+\infty$ nous avons :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) \qquad (6.4.443)$$

Ce qui permet alors de n'avoir qu'à se rappeler de (a_0 inclus donc !) :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \qquad (6.4.444)$$

Les physiciens ont quant à eux pour habitude de noter ces deux dernières relations sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\omega kt)\mathrm{d}t \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(\omega kt)\mathrm{d}t \end{aligned} \qquad (6.4.445)$$

Cette décomposition possible de toute fonction périodique continue par morceaux approchée par une somme infinie de fonctions trigonométriques (sinus ou cosinus) consistant en une fonction fondamentale et ses harmoniques est appelée "théorème de Fourier" ou encore "théorème de Fourier-Dirichlet".

En cours de traduction de l' anglais

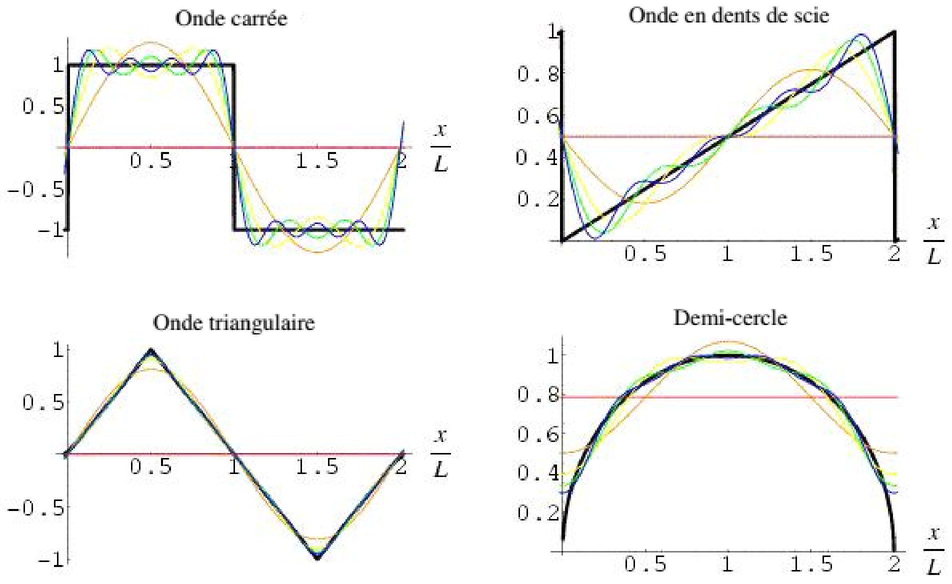


FIG. 6.69 – Exemples de quelques séries de Fourier (source : Mathworld)

Il peut aussi arriver que parfois nous connaissions la série de Fourier et que nous recherchions la fonction originale $f(x)$. Comme exemple complémentaire, considérons que nous voulons calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos(nx) \tag{6.4.446}$$

Cela revient donc à rechercher le $f(x)$ original de la série de Fourier ci-dessus.

Il s'ensuit donc que $a_0=0$ et $b_n=0$ et :

$$\frac{1}{n}=a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \tag{6.4.447}$$

Mais pour autant que nous sachions, il n'y a pas de moyen facile d'extraire $f(x)$ qui semble exact ! Donc en utilisant la trigonométrie hyperbolique (voir section Trigonométrie page 2515), nous écrivons :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos(nx)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}nx}}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\mathrm{i}nx}}{n} \tag{6.4.448}$$

Maintenant, ces séries de puissance peuvent être identifiées comme des développements de Maclaurin de $-\ln(1-z)$ (voir la preuve ci-dessus) avec $z=e^{\mathrm{i}x}$ pour le premier terme et $z=e^{-\mathrm{i}x}$ pour le second terme.

Dès lors :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos(nx)=-\frac{1}{2}\left[\ln(1-e^{\mathrm{i}x})+\ln(1-e^{-\mathrm{i}x})\right]\\
&=-\ln\left((1-e^{\mathrm{i}x})(1+e^{-\mathrm{i}x})\right)^{1/2}=-\ln\left(1-e^{-\mathrm{i}x}-e^{\mathrm{i}x}+e^{\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}x}\right)^{1/2}\\
&=-\ln\left(2-e^{-\mathrm{i}x}-e^{\mathrm{i}x}\right)^{1/2}=-\ln\left(2-2\cos(x)\right)^{1/2}=-\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{6.4.449}$$

En cours de traduction de l'anglais

La série de Fourier permet donc implicitement de représenter toutes les fréquences contenues dans un signal périodique dont la fonction est connue mathématiquement. On se demande bien pourquoi parler des séries de Fourier quand, dans la pratique, nous ne connaissons pas vraiment la représentation mathématique de ce signal ? Cela nous amènera à mieux comprendre le concept de la transformée de Fourier à temps discret, que nous verrons un peu plus loin, qui n'a nul besoin d'une représentation mathématique d'un signal continu échantillonné dans le temps.

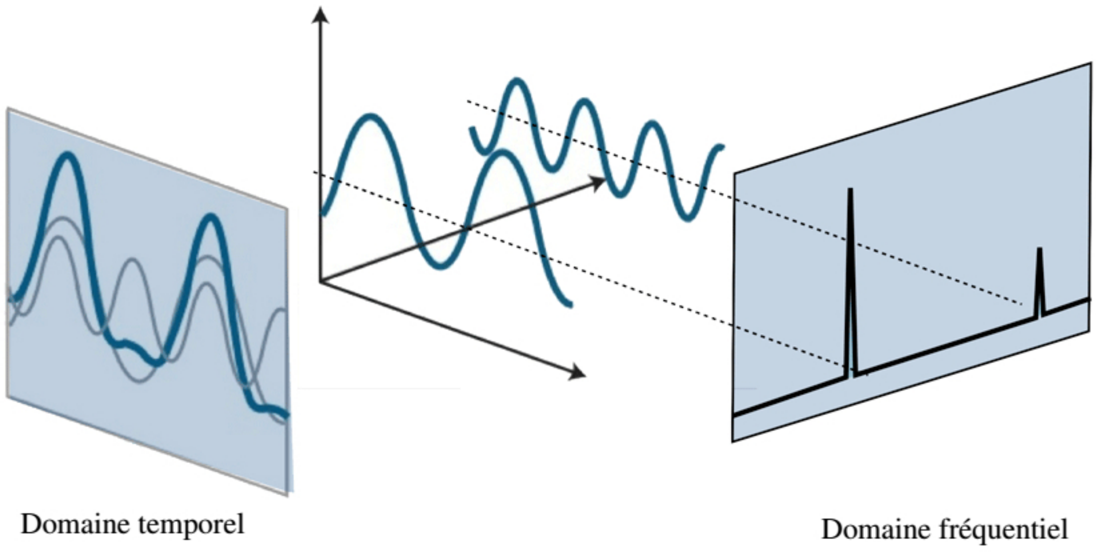


FIG. 6.70 – **Domaine temporel et domaine fréquentiel**

Nous constatons par ailleurs que si $f(x)$, soit la fonction périodique dont nous cherchons l'expression en série trigonométrique de Fourier, est paire alors la série devra être paire aussi et donc ne comporter que des termes en cosinus (le cosinus étant pour rappel une fonction paire) ce qui implique que $b_n=0$ et dans le cas contraire d'une fonction impaire $a_n=0$ (le sinus étant pour rappel une fonction impaire) !

En cours de traduction

Il convient de noter, et c'est important pour la suite, que comme nous l'avons vu dans la section de Calcul Algébrique lors de notre étude des polynômes trigonométriques (voir section 1377), les séries de Fourier pouvaient donc s'écrire sous la forme complexe suivante (en changeant un peu les notations et en passant la somme à l'infini) :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \qquad (6.4.450)$$

et nous avions vus (toujours dans la section de Calcul Algébrique) que :

$$a_0=2c_0 \qquad a_n=c_n+c_{-n} \qquad b_n=\mathrm{i}(c_n-c_{-n}) \qquad (6.4.451)$$

Soit :

$$c_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2} \qquad (6.4.452)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x - \frac{2}{T}\mathrm{i}\int\limits_0^T f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x}{2} \\ &= \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)\big(\cos(nx) - \mathrm{i}\sin(nx)\big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6.4.453}$$

Donc :

$$c_n = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \tag{6.4.454}$$

Ou plus généralement :

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T+t_0} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x} \tag{6.4.455}$$

Donc si nous prenons le fameux cas où $t_0 = -T/2$, nous obtenons :

$$c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \tag{6.4.456}$$

Évidemment, les deux relations ci-dessus sont le coefficient de Fourier du point de vue "domaine temporel". Nous verrons dans la section de Génie Electrique qu'il existe un équivalent si l'on travaille avec des séries de Fourier dans le "domaine fréquentiel".

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Lors de la décomposition d'un signal continu, nous disons abusivement que les coefficients représentent chacun (implicitement) une fréquence distincte associée à une amplitude que nous visualisons sur un graphique par des lignes verticales. Ce graphique représente le "spectre en fréquences" du signal décomposé. Nous pouvons également adjoindre une autre représentation qui se nomme "spectre de phase". Ce spectre nous donne la phase du signal harmonique (en avance ou en retard de phase).

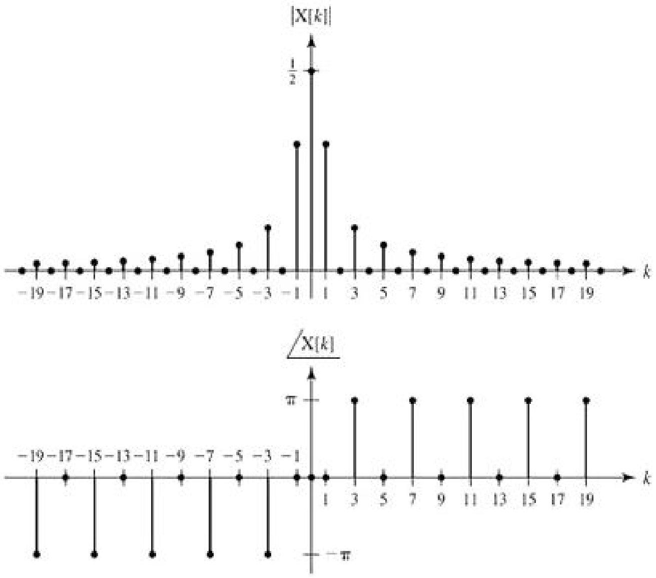


FIG. 6.71 – **Exemple d'amplitudes et de fréquences associées aux différents coefficients**

Voyons maintenant comment décomposer un signal périodique connu en plusieurs signaux d'amplitudes et de fréquences distinctes.

Prenons comme exemple, un signal à onde carrée périodique défini sur une période $T = 2$ et d'amplitude A tel que :

$$f(t) = \begin{cases} -A & -1 < t < 0 \\ A & 0 < t < 1 \end{cases} \quad (6.4.457)$$

À la période $T = 2$ correspond comme nous le savons une pulsation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \quad (6.4.458)$$

Calculons en premier lieu les coefficients c_k à l'aide de l'intégrale permettant de déterminer ces coefficients (le choix des bornes de l'intégrale suppose donc que le signal est périodique par construction !) :

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-\mathrm{i}kwt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-\mathrm{i}k\pi t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} -Ae^{-\mathrm{i}k\pi t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} Ae^{-\mathrm{i}k\pi t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{-A}{2}\left(\int_{-1}^{0} e^{-\mathrm{i}k\pi t}\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} e^{-\mathrm{i}k\pi t}\mathrm{d}t\right) = \frac{-A}{2}\left(\frac{-1}{ik\pi}\right)\left[e^{-\mathrm{i}k\pi t}\Big|_{-1}^{0}\right] + \frac{A}{2}\left(\frac{-1}{\mathrm{i}k\pi}\right)\left[e^{-\mathrm{i}k\pi t}\Big|_{0}^{1}\right]\\ &= \frac{A}{2\mathrm{i}k\pi}\left[1-e^{-\mathrm{i}k\pi}\right] - \frac{A}{2\mathrm{i}k\pi}\left[e^{-\mathrm{i}k\pi}-1\right] = \frac{A}{2}\left[\frac{1-e^{-\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k\pi} + \frac{e^{-\mathrm{i}k\pi}-1}{-\mathrm{i}k\pi}\right]\\ &= \frac{A}{\mathrm{i}k\pi}\left[1-\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}k\pi}+e^{-\mathrm{i}k\pi}\right)\right] = \frac{A}{\mathrm{i}k\pi}\left[1-\cos(k\pi)\right]\end{aligned} \tag{6.4.459}$$

En prenant $k=2$, nous avons :

$$c_2 = \frac{A}{i2\pi}\left[1-\frac{1}{2}\left(e^{i2\pi}+e^{-i2\pi}\right)\right] = 0 \tag{6.4.460}$$

De même pour $k=4,6,8$ ainsi que pour tout nombre pair.

Pour ce qui est des nombres impairs, nous aurons :

$$c_1 = \frac{A}{\mathrm{i}\pi}\left[1-\frac{1}{2}\left(e^{i\pi}+e^{-i\pi}\right)\right] = \frac{2A}{i\pi}, \quad c_3 = \frac{A}{\mathrm{i}3\pi}\left[1-\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}3\pi}+e^{-i3\pi}\right)\right] = \frac{2A}{\mathrm{i}3\pi} \tag{6.4.461}$$

Les coefficients seront alors :

$$c_k = \begin{cases} 0 & k \text{ pair} \\ \dfrac{2A}{\mathrm{i}k\pi} & k \text{ impair}\end{cases} \tag{6.4.462}$$

Il y a un seul hic dans cette relation, le coefficient c_0 ne peut être calculé selon cette relation car on peut voir que si $k=0$ dans le résultat ci-haut, nous aurons une valeur infinie et c'est du moins impossible. Le coefficient est soit nul ou non nul mais jamais infini (au moins en physique car cela impliquerait une énergie infinie).

Pour trouver le coefficient c_0, nous devons calculer l'intégrale pour $k=0$. Le coefficient est alors déterminé par :

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-\mathrm{i}k\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-A)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(A)\mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{6.4.463}$$

Le spectre en "fréquence" (attention à l'abus de langage !) et en amplitude sera alors de la forme suivante pour $k = -5 \ldots +5$ et $A = 1$ les fréquences nulles n'étant pas représentées :

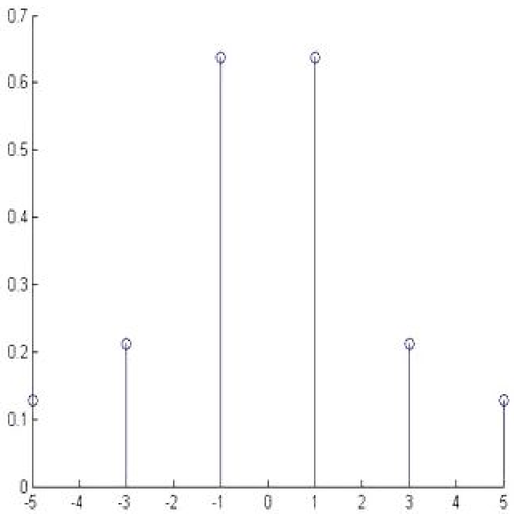
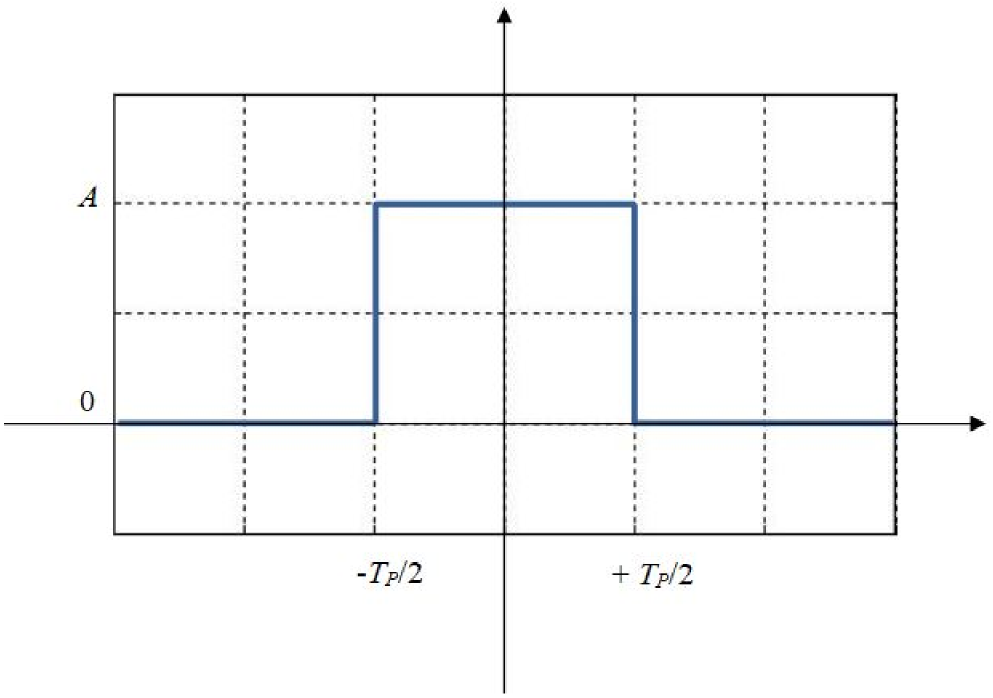


FIG. 6.72 – Spectre de fréquence des coefficients de la série de Fourier

E2. Considérons un autre cas célèbre ! La décomposition du signal du carré d'amplitude A et de largeur T_p (cette fonction est parfois notée $\Pi_P(t)$) et de période T :



$$f(t) = \begin{cases} A & -T_P/2 \geq t \geq +T_P/2 \\ 0 & |t| > T_P/2 \end{cases} \tag{6.4.464}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-\mathrm{i}k\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T_P/2}^{+T_P/2} Ae^{-\mathrm{i}k\omega t}\mathrm{d}t = \frac{A}{-\mathrm{i}k\omega T}\left[e^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-T_P/2}^{+T_P/2}\right] = \frac{A}{-\mathrm{i}k2\pi fT}\left[e^{-\mathrm{i}k\omega\frac{T_P}{2}} - e^{\mathrm{i}k\omega\frac{T_P}{2}}\right] \\ &= \frac{A}{-\mathrm{i}k2\pi fT}\left[e^{-\mathrm{i}k2\pi f\frac{T_P}{2}} - e^{\mathrm{i}k2\pi f\frac{T_P}{2}}\right] = \frac{A}{k\pi}\left[\frac{e^{\mathrm{i}k\pi fT_P} - e^{-\mathrm{i}k\pi fT_P}}{2\mathrm{i}}\right] = \frac{A}{k\pi}\sin(k\pi fT_P) \\ &= AfT_p\frac{\sin(k\pi fT_P)}{k\pi fT_P} = \frac{A}{k\pi}\mathrm{sinc}(kfT_p) \end{aligned} \tag{6.4.465}$$

Donc nous retombons sur une version discrète de la fameuse fonction sinus cardinal (voir section Trigonométrie page 2500) !

L'abus de parler de fréquences pour les coefficients de Fourier amène donc à avoir des fréquences négatives en abscisse... mais ce n'est qu'une question de vocabulaire (il n'y a aucun rapport direct avec les vraies fréquences) auquel il faut s'habituer.

Le spectre d'amplitude et de phase se calcule selon les relations :

$$|c_k| = \sqrt{(\Re(c_k))^2 + (\Im(c_k))^2} \quad \text{et} \quad \angle\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Im(c_k)}{\Re(c_k)}\right) \tag{6.4.466}$$

Il est alors relativement aisé de remarquer que si T tend vers un nombre de plus en plus grand, les pics du spectre se rapprochent de plus en plus. Ainsi, lorsque T tend vers l'infini le spectre devient continu. ! ! !

Le spectre de phase donnera ce qui suit pour les valeurs impaires :

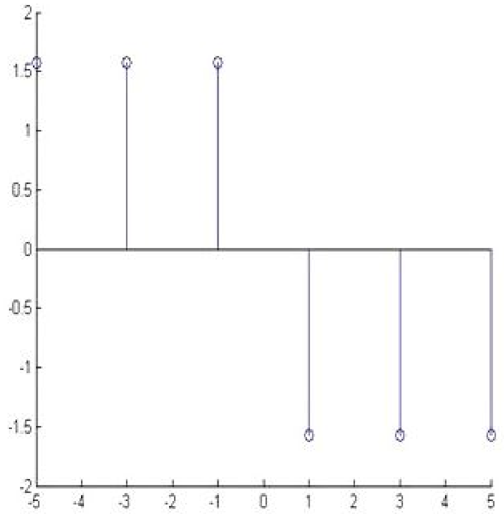


FIG. 6.73 – **Spectre de phase des coefficients de la série de Fourier**

Il est même possible pour l'exemple d'obtenir relativement facilement le spectre des fréquences dans Microsoft Excel 11.8346 (le lecteur pourra trouver un exemple beaucoup plus détaillé et intéressant dans le serveur d'exercices sur les Suites et Séries) ! ! !

Effectivement, il suffit pour cela d'échantillonner par exemple notre signal 128 fois (Microsoft Excel 11.8346 a besoin 2^n de échantillons et ne fonctionne que sous cette condition !). Nous divisons alors l'intervalle $-1 < t < 0$ en 64 échantillons et idem pour l'intervalle $0 > t > 1$:

En cours de traduction de l'anglais

	A	B
1	t	A
2	-1	-1
3	-0.9844	-1
4	-0.9688	-1
5	-0.9531	-1
6	-0.9375	-1
7	-0.9219	-1
8	-0.9063	-1
9	-0.8906	-1
10	-0.875	-1
11	-0.8594	-1
58	-0.125	-1
59	-0.1094	-1
60	-0.0938	-1
61	-0.0781	-1
62	-0.0625	-1
63	-0.0469	-1
64	-0.0313	-1
65	-0.0156	-1
66	0.01563	1
67	0.03125	1
68	0.04688	1
69	0.0625	1
70	0.07813	1
71	0.09375	1
72	0.10938	1
117	0.8125	1
118	0.82813	1
119	0.84375	1
120	0.85938	1
121	0.875	1
122	0.89063	1
123	0.90625	1
124	0.92188	1
125	0.9375	1
126	0.95313	1
127	0.96875	1
128	0.98438	1
129	1	1

FIG. 6.74 – **Échantillonnage signal**

En cours de tra n de l' anglais

Ce qui donne sous forme graphique (attention ! pour que la transformée de Fourier discrète fonctionne bien dans Microsoft Excel 11.8346, il faut que la fréquence d'échantillonnage - correspondant au nombre de mesures dans une seconde - soit au moins 100 fois supérieure à la fréquence du signal d'origine sinon quoi le résultat peut être aberrant !) :

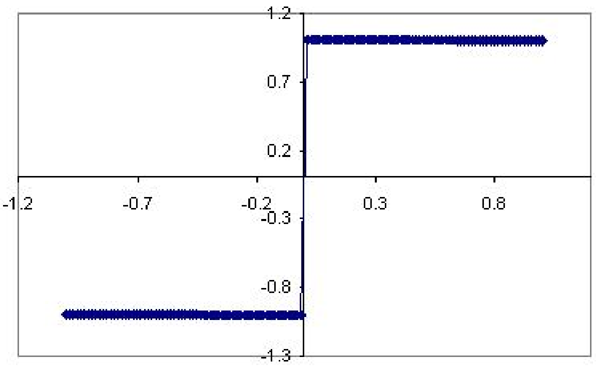


FIG. 6.75 – **Représentation graphique de la série de données sous Microsoft Excel 11.8346**

Ensuite, il suffit d'aller dans le menu **Outils/Utilitaire d'Analyse** et choisir l'option **Analyse de Fourier** :

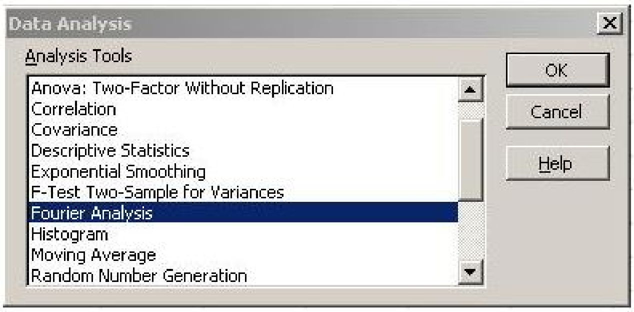


FIG. 6.76 – **Capture de la boîte de dialogue de l'Utilitaire d'analyse de Microsoft Excel 11.8346**

Vient ensuite la boîte de dialogue suivante qu'il faut remplir comme indiqué (on voit que l'abscisse n'a aucune importance !) :

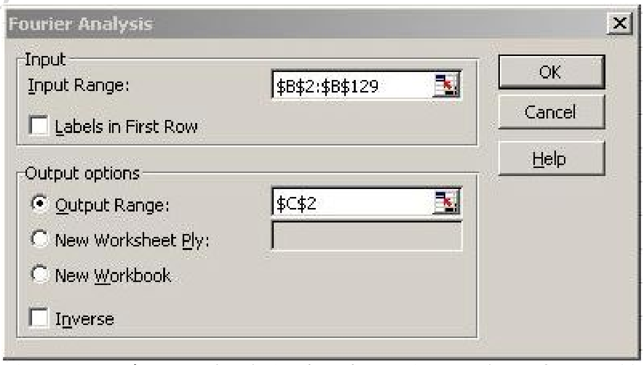


FIG. 6.77 – **Paramètres de l'outil *Analyse de Fourier* de Microsoft Excel 11.8346**

Vient alors le tableau suivant pour les coefficients :

En cours de traduction de l'anglais

	A	B	C
1	t	A	C_n
2	-1	-1	0
3	-0.9844	-1	-1.99999999999994+81.4709677441666i
4	-0.9688	-1	0
5	-0.9531	-1	-1.99999999999996+27.1133384847048i
6	-0.9375	-1	0
7	-0.9219	-1	-1.99999999999997+16.2155716073538i
8	-0.9063	-1	0
9	-0.8906	-1	-1.99999999999997+11.5262840102376i
10	-0.875	-1	0

62	-0.0625	-1	0
63	-0.0469	-1	-1.99999999999998+0.147528863044911i
64	-0.0313	-1	0
65	-0.0156	-1	-1.99999999999993+4.90972442178759E-
66	0.01563	1	0
67	0.03125	1	-2-4.90972442178546E-002i
68	0.04688	1	0
69	0.0625	1	-2-0.147528863044895i
70	0.07813	1	0
71	0.09375	1	-2-0.246676472273474i

En cours de traduction anglais

62	-0.0625	-1	0
63	-0.0469	-1	-1.99999999999998+0.147528863044911i
64	-0.0313	-1	0
65	-0.0156	-1	-1.99999999999993+4.90972442178759E-
66	0.01563	1	0
67	0.03125	1	-2-4.90972442178546E-002i
68	0.04688	1	0
69	0.0625	1	-2-0.147528863044895i
70	0.07813	1	0
71	0.09375	1	-2-0.246676472273474i

FIG. 6.78 – Coefficients de Fourier correspondants au signal échantillonné avec Microsoft Excel 11.8346

Il reste à calculer le module des nombres complexes avec la fonction `MODULE.COMPLEXE( )` de Microsoft Excel 11.8346 et de diviser le résultat par 128 pour chacun des coefficients c_n mais nous voyons déjà que chaque coefficient pair est nul ce qui correspond bien au résultat théorique obtenu plus haut !

Nous avons alors en mettant l'indice n en face de chaque module :

	A	B	C	D	E
1	t	A	C_n	$\lvert C_n \rvert$	n
2	-1	-1	0	0	0
3	-0.9844	-1	-1.99999999999994+81.4709677441666i	0.6366837	-1
4	-0.9688	-1	0	0	-2
5	-0.9531	-1	-1.99999999999996+27.1133384847048i	0.2123985	-3
6	-0.9375	-1	0	0	-4
7	-0.9219	-1	-1.99999999999997+16.2155716073538i	0.1276441	-5
8	-0.9063	-1	0	0	-6
9	-0.8906	-1	-1.99999999999997+11.5262840102376i	0.0913946	-7
10	-0.875	-1	0	0	-8
60	-0.0938	-1	0	0	-58
61	-0.0781	-1	-1.99999999999999+0.246676472273487i	0.0157434	-59
62	-0.0625	-1	0	0	-60
63	-0.0469	-1	-1.99999999999998+0.147528863044911i	0.0156675	-61
64	-0.0313	-1	0	0	-62
65	-0.0156	-1	-1.99999999999993+4.90972442178759E-	0.0156297	-63
66	0.01563	1	0	0	64
67	0.03125	1	-2-4.90972442178546E-002i	0.0156297	63
68	0.04688	1	0	0	62
69	0.0625	1	-2-0.147528863044895i	0.0156675	61
70	0.07813	1	0	0	60
71	0.09375	1	-2-0.246676472273474i	0.0157434	59
121	0.875	1	-2.00000000000003-8.90640444882881i	0.0713141	9
122	0.89063	1	0	0	8
123	0.90625	1	-2.00000000000003-11.5262840102376i	0.0913946	7
124	0.92188	1	0	0	6
125	0.9375	1	-2.00000000000005-16.2155716073538i	0.1276441	5
126	0.95313	1	0	0	4
127	0.96875	1	-2.00000000000009-27.1133384847049i	0.2123985	3
128	0.98438	1	0	0	2
129	1	1	-2.00000000000032-81.4709677441667i	0.6366837	1

FIG. 6.79 – **Module des coefficients complexes de l'exemple de Transformée de Fourier avec Microsoft Excel 11.8346**

En construction anglais

Et en traçant un graphique à points (toujours dans Microsoft Excel 11.8346) un peu personnalisé des colonnes D et E, nous obtenons finalement (nous avons restreint l'axe des abscisses à $[-5, +5]$ pour en faciliter la lecture) :

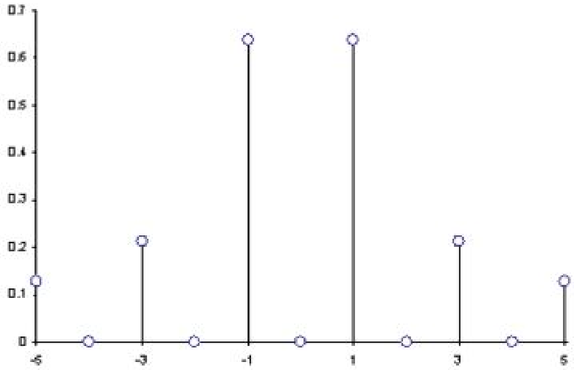


FIG. 6.80 – **Spectre de fréquence avec Microsoft Excel 11.8346**

À comparer avec les calculs théoriques (graphique déjà présenté plus haut)... :

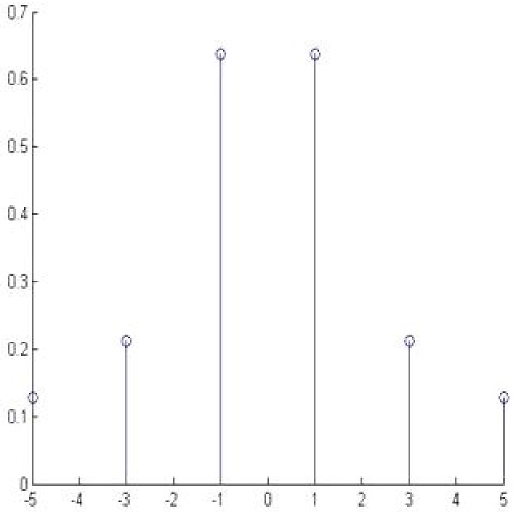


FIG. 6.81 – **Spectre de fréquence calculé plus haut à la main**

Ou de manière plus générale et pédagogique :

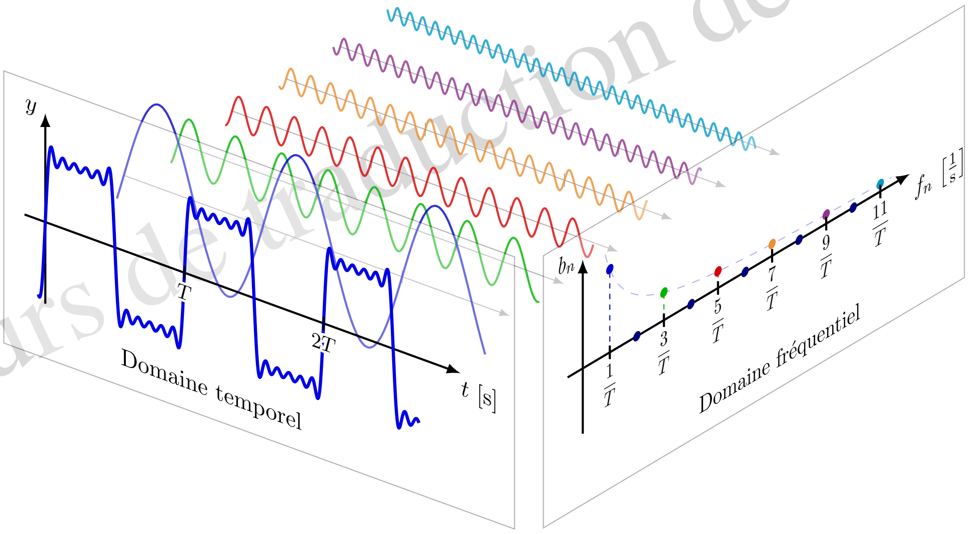


FIG. 6.82 – **Approche pédagogique pour visualiser la transformée de Fourier (author : Izaak Neutelings)**

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Prenons un autre exemple identique au précédent mais sous une autre approche. Nous définissons une fonction périodique de période $T=2\pi$ comme suit :

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ +1 & 0\leq x\leq \pi\end{cases} \tag{6.4.467}$$

Calculons les coefficients de Fourier (nous translatons les bornes des intégrales puisque la fonction est périodique rien ne nous en empêche !) :

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cos(nx)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}-1\cos(nx)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi}-\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{\pi}^{2\pi}\right)=0\end{aligned} \tag{6.4.468}$$

et :

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\sin(nx)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}-1\sin(nx)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi}+\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{\pi}^{2\pi}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{\pi}^{2\pi}-\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}\left(\cos(nx)\Big|_{\pi}^{2\pi}-\cos(nx)\Big|_0^{\pi}\right)\\&=\frac{1}{n\pi}(\cos(2\pi n)-\cos(\pi n)-\cos(\pi n)+1)=\frac{1}{n\pi}(\cos(2\pi n)-2\cos(\pi n)+1)\end{aligned} \tag{6.4.469}$$

Nous remarquons que b_n vaut 0 pour n pair et vaut $4\pi/n$ pour n impair. La série de Fourier de la fonction considérée s'écrit donc :

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\sin(nx)\\&=4\pi\left[\frac{\sin(x)}{1}+\frac{\sin(x3)}{3}+\frac{\sin(5x)}{5}+\ldots+\frac{\sin(2x+1)}{2x+1}+\ldots\right]\end{aligned} \tag{6.4.470}$$

Ce qui dans Maple 4.00b s'écrit :

```
>S:=(4/Pi)*Sum(sin((2*n+1)*x)/(2*n+1),n=0..N);
```

et que nous pouvons tracer à l'aide de la fonction :

```
>plot(subs(N=4,S),subs(N=8,S),subs(N=16,S),x=-Pi..Pi,
color=[red,green,blue],numpoints=200);
```

Ce qui donne trois tracés pour 4, 8 et respectivement 16 termes de la série en rouge, vert et bleu :

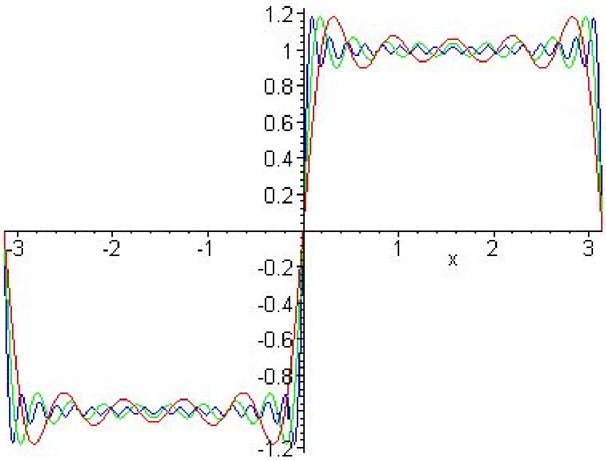


FIG. 6.83 – **Exemple de série de Fourier dans Maple 4.00b avec 4, 8 et 16 termes**

Pour 50 termes nous obtenons :

```
> plot(subs(N=50,S),x=-Pi..Pi,numpoints=800);
```

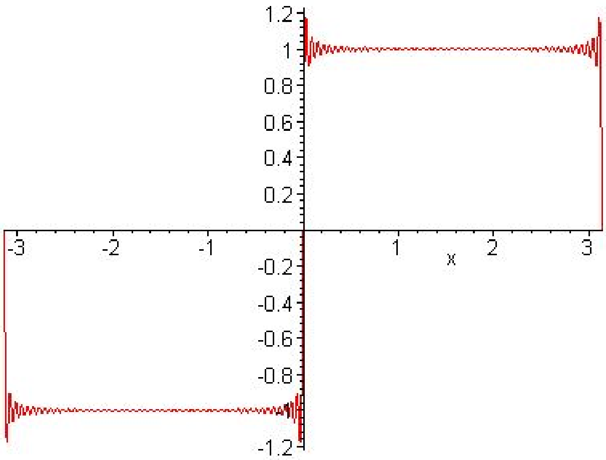


FIG. 6.84 – **Exemple de série de Fourier dans Maple 4.00b avec 50 termes**

Nous voyons les effets de bord appelés "phénomène de Gibbs". Il est possible de montrer que ceux-ci se produisent à la valeur de l'abscisse correspondant à $x = \pi/2n$ et que et que le pic culmine à ± 1.179 pour toute valeur de n. Voyons cela !

Nous venons donc de montrer que :

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\sin(nx)\\&=4\pi\left[\frac{\sin(x)}{1}+\frac{\sin(x3)}{3}+\frac{\sin(5x)}{5}+\ldots\frac{\sin(2x+1)}{2x+1}+\ldots\right]\end{aligned}\tag{6.4.471}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^x[\cos(t)+\cos(3t)+\ldots+\cos(2n+1)]\,\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[e^{\mathrm{i}t}+e^{3\mathrm{i}t}+\ldots+e^{\mathrm{i}(2n+1)t}\right]\mathrm{d}t\tag{6.4.472}$$

en utilisant la démonstration faite plus haut comme quoi :

$$S_n=x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n-1}=\frac{x^{2n+1}-x}{x^2-1}\tag{6.4.473}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[e^{\mathrm{i}t}+e^{3\mathrm{i}t}+\ldots+e^{\mathrm{i}(2n+1)t}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{e^{(2n+1)\mathrm{i}t}-e^{\mathrm{i}t}}{e^{2\mathrm{i}t}-1}\right]\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{e^{\mathrm{i}t}\left(e^{2n\mathrm{i}t}-1\right)}{e^{\mathrm{i}t}\left(e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}\right)}\right]\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{e^{2n\mathrm{i}t}-1}{e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}}\right]\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{6.4.474}$$

Rappelons que lors de notre étude des nombres complexes (voir section Nombres page 241) nous avions démontré que :

$$\sin(x)=\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\tag{6.4.475}$$

Ce qui nous amène donc à :

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{e^{2n\mathrm{i}t}-1}{e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}}\right]\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{e^{2n\mathrm{i}t}-1}{2\mathrm{i}\sin(t)}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{\cos(2nt)+\mathrm{i}\sin(2nt)-1}{2\mathrm{i}\sin(t)}\right]\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{\cos(2nt)}{\mathrm{i}\sin(t)}+\frac{\mathrm{i}\sin(2nt)}{\mathrm{i}\sin(t)}-\frac{1}{\mathrm{i}\sin(t)}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^x\Re\left[-\frac{\mathrm{i}\cos(2nt)}{\sin(t)}+\frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}+\frac{\mathrm{i}}{\sin(t)}\right]\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^x\Re\left[\frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}-\mathrm{i}\frac{\cos(2nt)-1}{\sin(t)}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{6.4.476}$$

Nous allons nous intéresser aux petites valeurs de x. Donc nous pouvons alors faire un développement au première ordre en Maclaurin du dénominateur (mais pas du numérateur à cause de la présence du n) :

$$f(x)\cong\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2nt)}{t}\mathrm{d}t\tag{6.4.477}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous faisons un changement de variable :

$$f(x) \cong \frac{2}{\pi}\int_0^{2nx} \frac{\sin(s)}{\frac{s}{2n}}\frac{\mathrm{d}s}{2n} = \int_0^{2nx} \frac{\sin(s)}{s}\mathrm{d}s = \int_0^{2nx} \mathrm{sinc}(s)\mathrm{d}s \qquad (6.4.478)$$

où nous avons utilisé la notation traditionnelle du "sinus cardinal" dans la dernière relation (car cette fraction est fréquente en physique raison pour laquelle elle a une notation spécifique).

Comme ce qui nous intéresse est de déterminer le maximum du phénomène (la perturbation) de Gibbs, nous voyons que celle-ci a lieu dans le cas particulier que nous avons présenté (voir figure ci-dessus) à chaque multiple de π et comme le dénominateur de l'expression de l'intégrale va diminuer en fonction que le multiple est plus grand, il vient que le plus grand maximum est au point où $2nx = \pi$ (le point 0 à l'opposé va annuler l'intégrale donc il faut l'éliminer de notre choix). Nous avons alors :

$$f_{\text{Gibbs}}(x) \cong \int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{s}\mathrm{d}s \qquad (6.4.479)$$

et la valuation de cette intégrale ne peut être faire que numériquement à notre connaissance, il vient :

$$f_{\text{Gibbs}}(x) \cong 1.179 \qquad (6.4.480)$$

Soit environ 18% au-dessus de la valeur limite attendue.

En cours de traduction de l'anglais

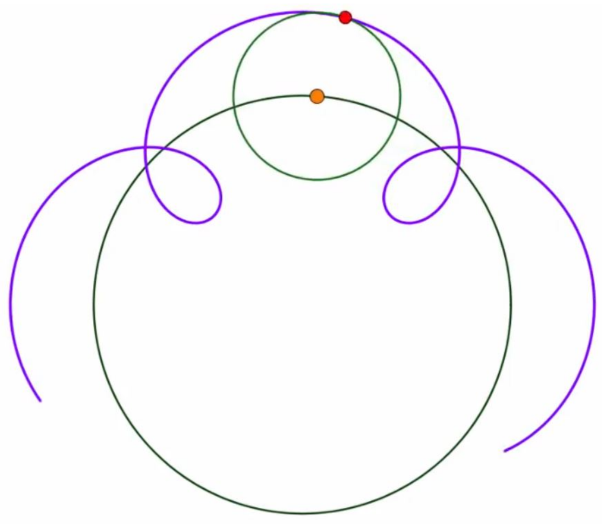
6.4.2.7.1 Séries de Fourier génératives d'art

Avant de continuer sur des sujets mathématiques relativement difficiles sur les séries de Fourier, ouvrons une parenthèse dont le but ici est de sortir de la science de cette citation :

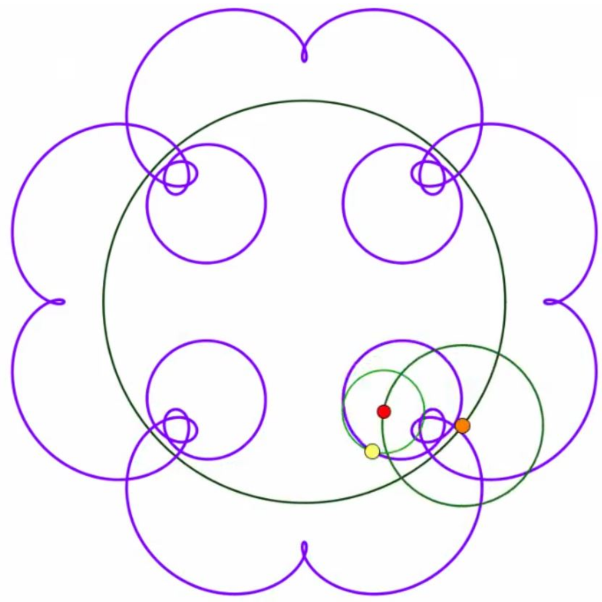
> *Avec quatre paramètres, je peux dessiner un éléphant.*
>
> J. Von Neumann

quote 6.4:1729.#48

Avec l'ordinateur il est facile de dessiner des choses à l'aide de points se déplaçant sur un cercle, eux-mêmes centrés sur un autre cercle comme illustré ci-dessous (une épicycloïde) :

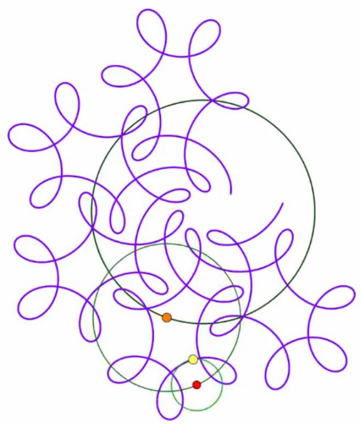


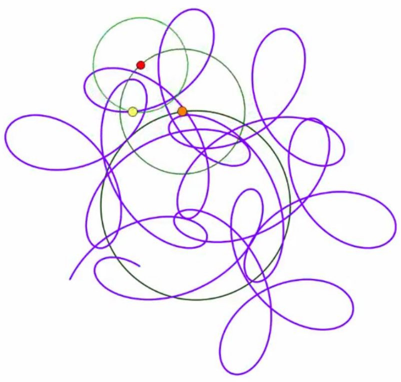
ou un exemple plus compliqué :



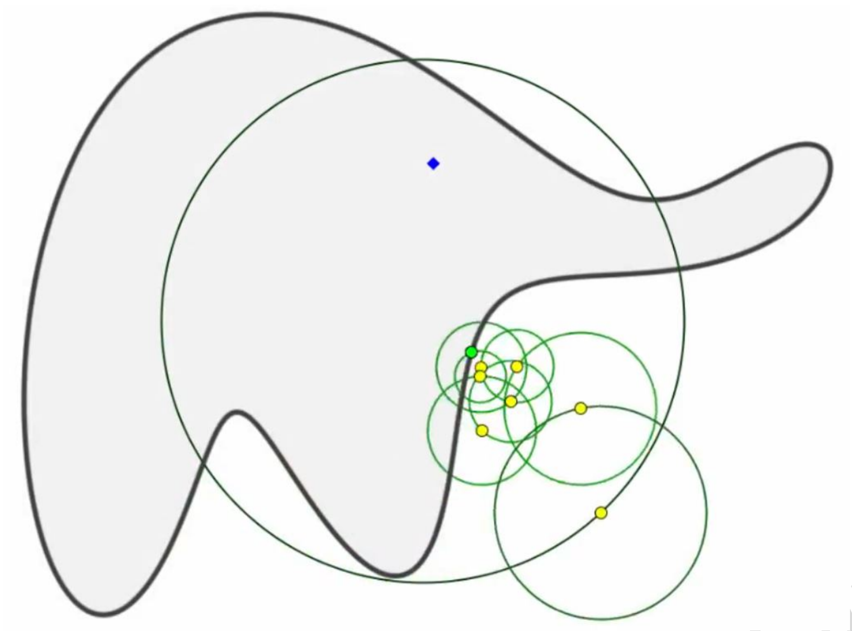
En cours de l'anglais

Évidemment comme les exemples ci-dessus, les résultats changent en fonction de la vitesse de rotation de chaque point sur son cercle :



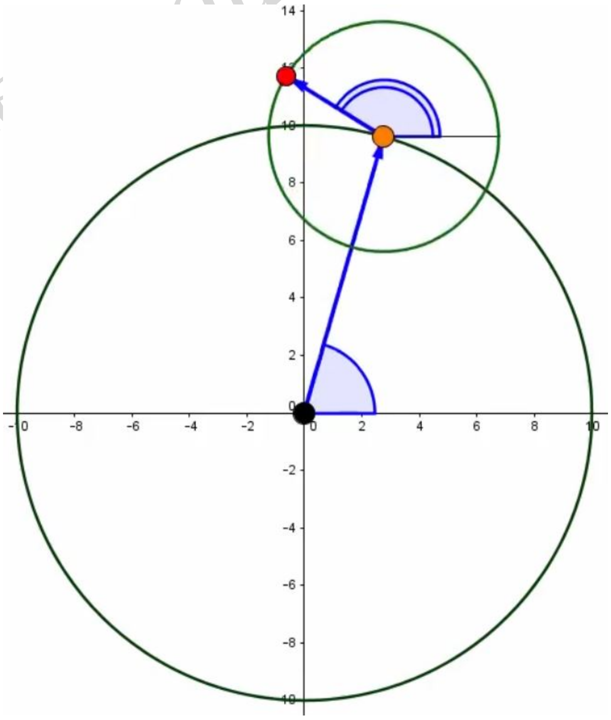


ou un cas avec huit cercles (chacun d'eux a un point se déplaçant à une vitesse de rotation spécifique) :



est basé en fait sur une série de Fourier !

Pour comprendre pourquoi, considérons l'exemple suivant :



En cours de traduction de l'anglais

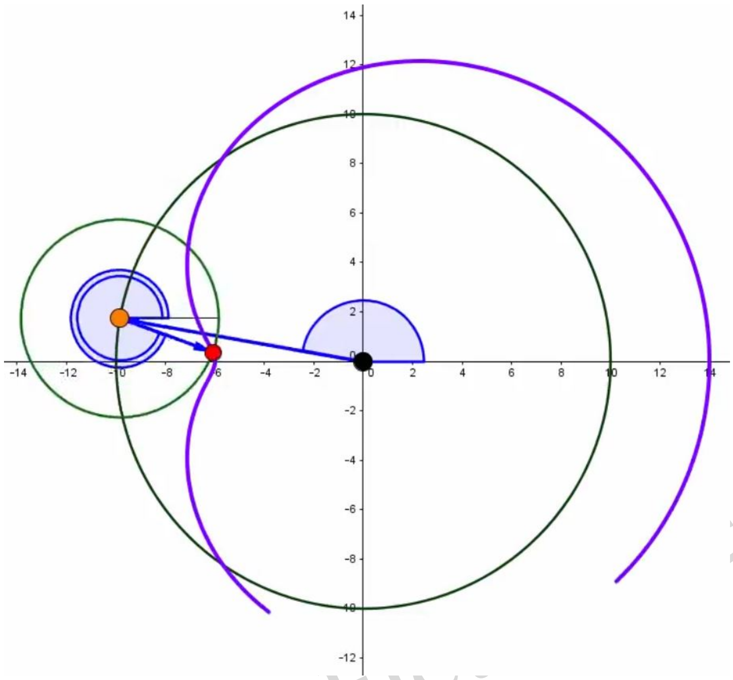
Le premier point est décrit évidemment par l'équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} 10\cos(t) \\ 10\sin(t) \end{pmatrix} \tag{6.4.481}$$

et le second point donc par (s'il tourne deux fois plus vite que l'angle dans le cercle principal) :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\cos(t) + 4\cos(2t) \\ 10\sin(t) + 4\sin(2t) \end{pmatrix} \quad (6.4.482)$$

C'est l'équation paramétrique de l'épicycloïde suivante :



Dans le cas général, nous avons :

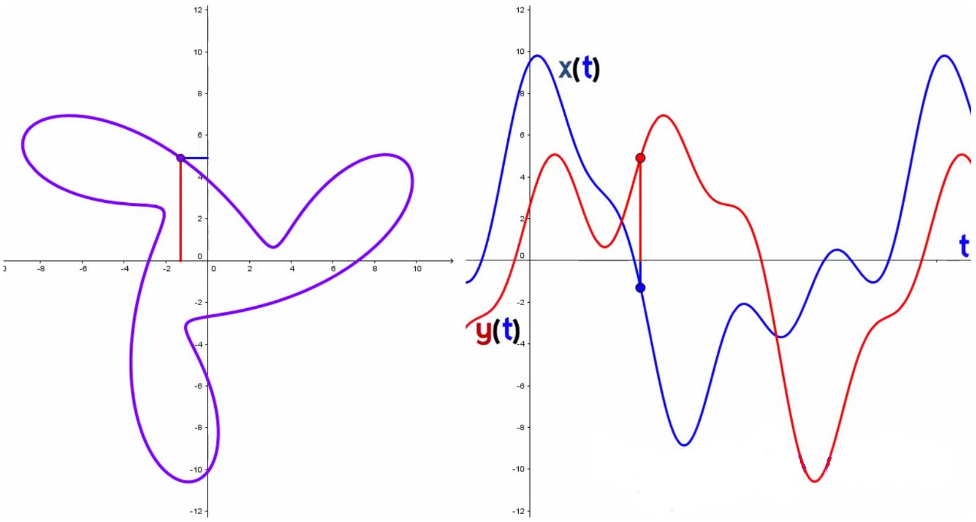
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\cos(n_1 t + \varphi_{x1}) + a_2\cos(n_2 t + \varphi_{x2}) + \ldots + a_N\cos(n_N t + \varphi_{x3}) \\ a_0 + a_1\sin(n_1 t + \varphi_{y1}) + a_2\sin(n_2 t + \varphi_{y2}) + \ldots + a_N\sin(n_N t + \varphi_{y3}) \end{pmatrix} \quad (6.4.483)$$

où a_i est le rayon des cercles et n est la vitesse des différents cercles (pulsation).

Mais la question est plutôt l'inverse. À partir d'une courbe donnée, comment trouver les valeurs des paramètres ?

L'idée est assez simple. Il s'agit de suivre respectivement chaque coordonnée en fonction d'une autre comme illustré ci-dessous, où la forme fermée est transformée en deux courbes :

En cours de traduc... l'anglais



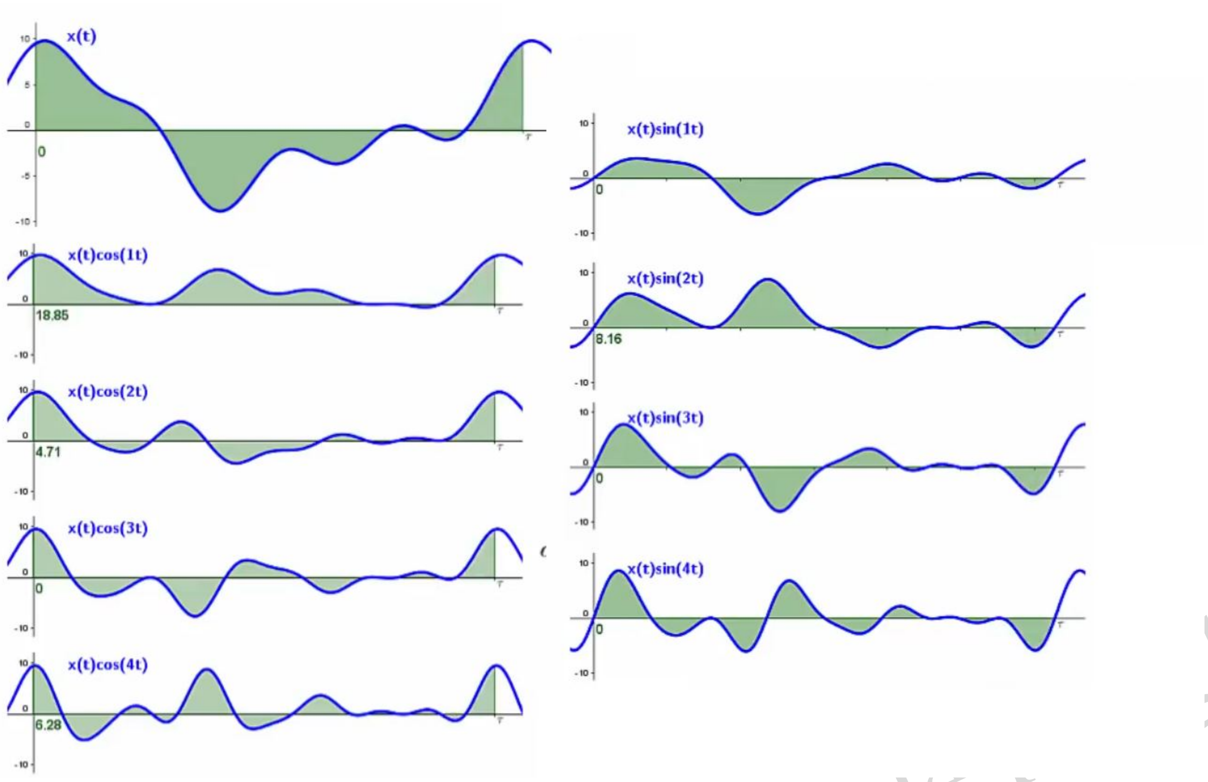
et comme nous l'avons vu lors de notre étude de la série de Fourier, nous savons construire la série de Fourier de telles courbes !

Nous savons que les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\forall k \neq 0, a_k &= \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \\
\forall k \neq 0, b_k &= \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)\sin(kt)\mathrm{d}t \\
\text{et } a_0 &= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t)\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{6.4.484}$$

Si nous faisons cela numériquement par exemple avec $x(t)$:

En cours de traduction de l' anglais



Qui donne :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\mathrm{d}t = 0\\
a_1 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\cos(1t)\mathrm{d}t = 6\\
b_1 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\sin(1t)\mathrm{d}t = 0\\
a_2 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\cos(2t)\mathrm{d}t = 1.5\\
b_2 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\sin(2t)\mathrm{d}t = 2.6\\
a_3 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\cos(3t)\mathrm{d}t = 0\\
b_3 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\sin(3t)\mathrm{d}t = 0\\
a_4 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\cos(4t)\mathrm{d}t = 2\\
b_4 &= \frac{2}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} x(t)\sin(4t)\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
\tag{6.4.485}
$$

Dès lors :

$$
x(t) \cong 6\cos(t) + 1.5\cos(2t) + 2\cos(4t) + 2.6\sin(2t) \tag{6.4.486}
$$

En cours de traduction de ...lais

et en utilisant la même procédure, nous pourrions trouver :

$$a_2 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} y(t)\cos(2t)\mathrm{d}t = 2.6 \quad b_1 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} y(t)\sin(1t)\mathrm{d}t = 6$$
$$b_2 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} y(t)\sin(2t)\mathrm{d}t = -1.5 \quad b_4 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} y(t)\sin(4t)\mathrm{d}t = 2 \tag{6.4.487}$$

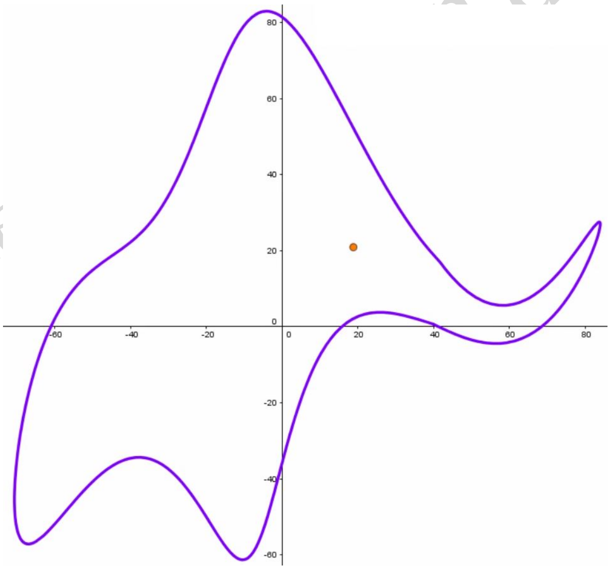
Par conséquent :

$$y(t) \cong 2.6\cos(2t) + 6\sin(t) - 1.5\sin(2t) + 2\sin(4t) \tag{6.4.488}$$

Nous voyons cependant que $x(t)$ n'a pas que des termes cosinus et que $y(t)$ n'a pas que des termes sinus. Alors en jouant un peu avec les identités trigonométriques élémentaires, nous pouvons trouver (ce n'est pas absolument une transformation nécessaire mais ainsi ça ce sera en adéquation avec l'expression générale donnée plus haut) :

$$\begin{aligned} x(t) &= 6\cos(t) + 3\cos(2t - 60^\circ) + 2\cos(4t) \\ y(t) &= 6\sin(t) + 3\sin(2t + 120^\circ) + 2\sin(4t) \end{aligned} \tag{6.4.489}$$

Revenons maintenant sur le défi de l'éléphant à quatre paramètres. Un résultat satisfaisant est :



En cours de ... de l' anglais

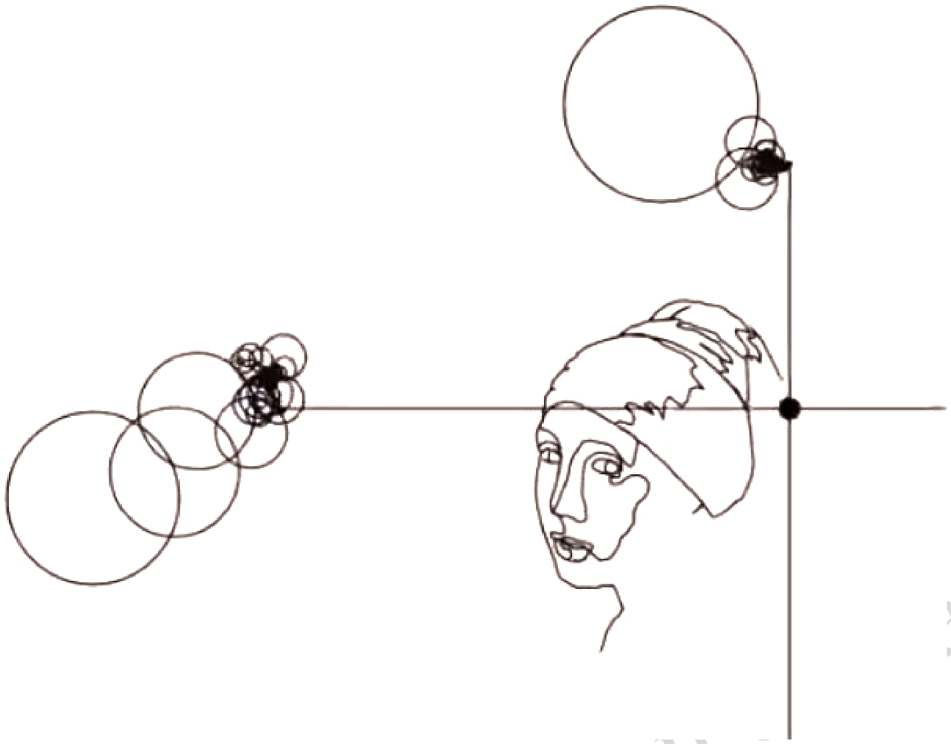
En prenant :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re(a)\cos(t) + \Re(b)\sin(t) + \Re(c)\sin(2t) + \Re(d)\sin(3t) \\ y(t) &= \Im(a)\sin(t) + \Im(b)\sin(2t) + \Im(c)\cos(3t) + \Im(d)\cos(5t) \end{aligned} \tag{6.4.490}$$

avec les quatre paramètres :

$$\begin{aligned} a &= -60 + 50\mathrm{i} \\ b &= 30 + 18\mathrm{i} \\ c &= -8 - 12\mathrm{i} \\ d &= 10 + 14\mathrm{i} \end{aligned} \tag{6.4.491}$$

Certaines personnes s'amusent à faire d'autres choses :



Remarque

Si le lecteur veut voir comment nous traçons l'éléphant de Fermi, il peut se référer à notre livre compagnon sur le logiciel `R`.

6.4.2.7.2 Puissance d'un signal

Un signal périodique possède une énergie infinie et une puissance moyenne nulle (voir section Génie Électrique page ??). Sa puissance moyenne sur une période est alors définie par :

$$P_f = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{6.4.492}$$

Si nous développons cette équation, nous avons :

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\bar{f}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_T f(t)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\bar{c}_k e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\bar{c}_k\int_T f(t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\bar{c}_k c_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 \end{aligned} \tag{6.4.493}$$

Cela signifie que la puissance d'un signal à temps continu périodique est égale à la somme des coefficients de Fourier au carré. C'est ce que nous nommons le "théorème de Parseval". Cela signifie que si nous avons un signal quelconque que nous pouvons décomposer en série de Fourier, nous pouvons connaître la puissance de ce signal uniquement à l'aide des coefficients spectraux.

Dans la réalité, comme nous ne pouvons déterminer mathématiquement l'expression de ce signal, nous utilisons la discrétisation ou l'échantillonnage et ensuite à l'aide d'une transformée de Fourier discrète, nous pouvons calculer la puissance de ce signal en utilisant uniquement les coefficients spectraux. Cela nous donne une caractéristique du signal.

Indiquons aussi le résultat suivant qui nous sera utile dans le chapitre de Thermodynamique pour l'étude du corps noir et qui est aussi intimement liée à des propriétés très importantes la fonction zêta de Riemmann :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}\right| = \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{a_k^2+b_k^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^2+b_k^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(a_k^2+b_k^2\right)+\frac{1}{4}\left(a_0^2+b_0^2\right)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \\ &= \frac{1}{4}a_0^2+2\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \end{aligned} \tag{6.4.494}$$

La relation suivante :

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)} \tag{6.4.495}$$

est appelée "égalité de Parseval".

Suivant la définition de la série de Fourier et de la définition du coefficient a_0 qui en découle immédiatement, nous avons aussi fréquemment dans la littérature :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2 = a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \tag{6.4.496}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.4.2.7.3 Transformée de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil très puissant pour l'analyse de signaux périodiques par exemple, mais l'ensemble des fonctions périodiques est petit comparé à l'ensemble des fonctions que nous rencontrons dans les problèmes physiques. Ainsi, allons-nous introduire un nouvel outil d'analyse extrêmement puissant qui s'étend à une classe de fonctions plus générale et qui ont des applications très importantes en traitement du signal, traitement d'image, traitement du son, finance des marchés et statistiques avancées ! !

Remarque

De nombreux enseignants et auteurs associent les séries de Fourier et les transformées de Fourier au domaine de l'analyse fonctionnelle. C'est exact en fait mais il nous a semblé plus approprié de mettre l'étude des bases de ces deux sujets dans cette section car c'est quand même étroitement liés aux Suites et Séries. Cependant, les sujets qui suivent normalement l'étude de la Transformée de Fourier, c'est-à-dire : les Transformées de Laplace, les Transformées de Hilbert et autres seront abordés dans la section d'Analyse Fonctionnelle de ce livre (voir page 2280). L'étude de la transformée de Fourier Rapide se trouve dans la section d'Informatique Théorique.

La transformée de Fourier (TF) est ainsi utilisée tant pour les signaux périodiques que pour les signaux apériodiques.

Pour cela, nous repartons de notre étude sur les séries de Fourier en notation complexe d'une fonction périodique de période T en considérant que celle-ci devient de plus en plus grande jusqu'à la faire tendre vers $T \to +\infty$. Dès lors les raies spectrales se rapprochent peu à peu pour se transformer en un spectre continu.

Ainsi, reprenons les expressions démontrées ci-avant :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \tag{6.4.497}$$

que nous pouvons écrire de manière équivalente sous la forme traditionnelle suivante (dans laquelle il est d'usage de mettre le facteur $1/T$ plutôt dans $f(t)$) :

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t} \qquad c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t}\mathrm{d}t \tag{6.4.498}$$

et écrivons encore cela pour des besoins ultérieurs sous la forme suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} c_n e^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t} \qquad c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t}\mathrm{d}t \tag{6.4.499}$$

et posons naturellement :

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} \tag{6.4.500}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, quand $T \to +\infty$, la pulsation tend vers zéro et nous avons $\omega_n \to \omega$ car nous passons de valeurs discrètes à valeurs continues qui parcourent l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ (pour tous les k). Donc de :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2\pi}{T}c_k e^{\mathrm{i}\omega_n t} \qquad c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega_n t}\mathrm{d}t \tag{6.4.501}$$

nous passons à la limite soit :

$$T \to +\infty \qquad \omega_n \to \omega \tag{6.4.502}$$

et cela implique aussi que :

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi\Delta n}{T} \underset{T\to+\infty}{=} \mathrm{d}\omega \tag{6.4.503}$$

Nous obtenons ainsi pour les coefficients (nous changeons de notation car l'ancienne est inadaptée) :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.4.504}$$

et pour la série infinie (dont la somme devient une intégrale) :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{6.4.505}$$

Attention!!! Pour faire la différence entre la fonction donnée et son équivalent dont nous cherchons l'expression en somme infinie, nous les noterons dorénavant différemment. Ainsi, il vient :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.4.506}$$

Donc la série de Fourier discrète devient une fonction continue.

Définitions (#6.4.221) :

D1. Nous appelons "transformée de Fourier" (TF) de f, ou plus rigoureusement "transformée de Fourier continue", la relation :

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.4.507}$$

notée parfois aussi sous la forme suivante :

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.4.508}$$

appelée aussi parfois "densité spectrale d'amplitude".

En cours de traduction de l' anglais

D2. Nous appelons "transformée de Fourier inverse" (TFI), ou plus rigoureusement transformée de fourier inverse en temps continu" (CTIFT), de F la relation :

$$\mathcal{F}^{-1}\big(F(\omega)\big)(t)=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{6.4.509}$$

Toute technique de transformation de ce type (car il y en a plusieurs comme nous le verrons dans la section d'Analyse Fonctionnelle !) s'appelle une "transformation intégrale".

Remarque

Il existe plusieurs façons d'écrire la transformée de Fourier selon le choix de la valeur initiale de T ! Le lecteur doit également savoir qu'il est assez courant en physique d'inverser les définitions... la transformée de Fourier peut être désignée comme la transformée de Fourier inverse et réciproquement...

Certains physiciens préfèrent symétriser ces deux expressions en mettant le même coefficient dans les deux sens, qui sera par exemple $1/\sqrt{2}$. Cela donnera :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\omega)=F(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\ \mathcal{F}^{-1}\big(F(\omega)\big)(t)=f(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{6.4.510}$$

Donnons également la forme tridimensionnelle qui nous servira de nombreuses fois en mécanique ondulatoire, électrodynamique, optique ondulatoire ou encore dans les divers section de physique quantique du présent livre :

$$\mathcal{F}(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iiint f(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\vec{k}\circ\vec{r}}\mathrm{d}^3r \qquad f(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iiint \mathcal{F}(\vec{k})e^{\mathrm{i}\vec{k}\circ\vec{r}}\mathrm{d}^3k \tag{6.4.511}$$

Pour que les choses soient peut-être plus claires, montrons de manière générale que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ précédemment écrite est une isométrie (conserve la "norme" - ou le "module" si vous préférez...).

Théorème 6.25. Pour toute fonction f,g nous avons le produit scalaire fonctionnel :

$$f\circ\mathcal{F}(g)=\mathcal{F}^{-1}(f)\circ g \tag{6.4.512}$$

Mais puisque les fonctions sont dans l'espace des complexes, comme nous l'avons vu dans le chapitre de Calcul Vectoriel, nous devons alors utiliser la notation du produit hermitien :

$$\langle f|\mathcal{F}(g)\rangle=\langle\mathcal{F}^{-1}(f)|g\rangle \tag{6.4.513}$$

Rappelons quand même que :

$$\langle f|g\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(\vec{r})\overline{g(\vec{r})}\mathrm{d}^nr \tag{6.4.514}$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.25.1. Nous voulons donc démontrer l'égalité :

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r})\overline{g(\vec{r})}\mathrm{d}^n r \tag{6.4.515}$$

Soit explicitement :

$$\langle f|\mathcal{F}(g)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r})\overline{\mathcal{F}(g)}\mathrm{d}^n r \tag{6.4.516}$$

Mais les variables à intégrer doivent être les mêmes et pour que $\mathcal{F}(g)$ soit implicitement dépendante de $\vec{r}$ il faut donc prendre la transformée de Fourier en $\vec{k}$. Tel que :

$$\mathcal{F}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iiint f(\vec{k})e^{-\mathrm{i}\vec{k}\circ\vec{r}}\mathrm{d}^3 k \tag{6.4.517}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle f(\vec{r})|\mathcal{F}(g)(\vec{r})\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r})\overline{\mathcal{F}(g)}\mathrm{d}^n r\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r})\overline{\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{k})e^{-\mathrm{i}\vec{k}\circ\vec{r}}d^n k\right)\mathrm{d}^n r}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r})\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{g(\vec{k})e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\circ\vec{r}}\mathrm{d}^n k\right)\mathrm{d}^n r\end{aligned} \tag{6.4.518}$$

Soit en utilisant le théorème de Fubini (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1500) :

$$\begin{aligned}\langle f|\mathcal{F}(g)\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{g(\vec{k})}\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r})e^{\mathrm{i}\vec{k}\circ\vec{r}}\mathrm{d}^n r\right)\mathrm{d}^n k\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{g(\vec{k})}\mathcal{F}^{-1}(f)(\vec{k})\mathrm{d}^n k = \langle\mathcal{F}^{-1}(f),g\rangle\end{aligned} \tag{6.4.519}$$

A l'aide de ce résultat, nous avons donc aussi démontré (c'est immédiat) :

$$\langle\mathcal{F}(f),\mathcal{F}(g)\rangle = \langle\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)),g\rangle = \langle f,g\rangle \tag{6.4.520}$$

Nous n'avons pas précisé les bornes : elles sont infinies dans chaque définition (nous intégrons sur tous les $\vec{k}$ ou $\vec{r}$ possibles).

■ Q.E.D.

Voyons maintenant deux propriétés intéressantes de la transformée de Fourier :

P1. Si la fonction f est une fonction paire (voir section d'Analyse Fonctionnelle page 2186),

En cours de traduction de l'anglais

il vient une simplification de la transformée telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\left(e^{\mathrm{i}\omega t}+e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.4.521}$$

P2. Si f est impaire, nous procédons de la même manière que ci-dessus et nous obtenons :

$$\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\omega) = -\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \tag{6.4.522}$$

P3. Propriété très importante des transformées de Fourier qui nous sera utile en finance (voir section Économie page ??) et également dans le cadre de l'étude de l'équation de la chaleur (voir section Thermodynamique page ??).

Rappelons d'abord que la transformée de Fourier est donnée par :

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\omega) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.4.523}$$

Nous souhaitons voir ce qu'il se passe si :

$$\mathcal{F}\big(\partial_t f(t)\big)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_t f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.4.524}$$

En faisant une intégration par parties (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1511) :

$$\int\limits_{a}^{b} f(t)g'(t)\mathrm{d}t = f(t)g(t)|_a^b + \int\limits_{a}^{b} f'(t)g(t)\mathrm{d}t \tag{6.4.525}$$

il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big(\partial_t f(t)\big)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}\partial_t f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}\omega^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{i}\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{i}\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\omega\mathcal{F}(\omega)\end{aligned} \tag{6.4.526}$$

En cours de traduction de l' anglais

où nous nous sommes mis dans la situation avec :

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)=0 \qquad (6.4.527)$$

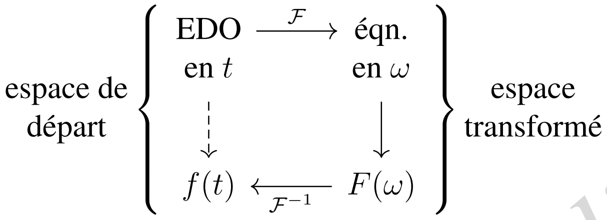
Donc :

$$\boxed{\mathcal{F}\big(\partial_t f(t)\big)=\mathrm{i}\omega\mathcal{F}(\omega)} \qquad (6.4.528)$$

De manière générale :

$$\boxed{\mathcal{F}\big(\partial_t^n f(t)\big)=(\mathrm{i}\omega)^n\mathcal{F}(\omega)} \qquad (6.4.529)$$

Cette propriété peut être utile pour le schéma suivant :



la l' anglais

Remarque

La branche de "l'analyse harmonique", ou "analyse de Fourier 2D", est la branche des mathématiques qui étudie la représentation des fonctions ou des signaux comme superposition d'ondes de base. Elle approfondit et généralise les notions de série de Fourier et de transformée de Fourier. Les ondes de base s'appellent les harmoniques, d'où le nom de la discipline. Durant ces deux derniers siècles, elle a eu de nombreuses applications en physique et en économie sous le nom "d'analyse spectrale", et connaît des applications récentes notamment en traitement des signaux, mécanique quantique, neurosciences, stratigraphie, statistiques...

En c

✍ **Exemples :**

E1. Voyons donc un exemple (parmi les deux fondamentaux) d'une transformée de Fourier que nous retrouvons en physique quantique aussi bien qu'en optique ondulatoire. Nous allons calculer la transformée de Fourier (spectre) de la fonction suivante (impulsion rectangulaire) :

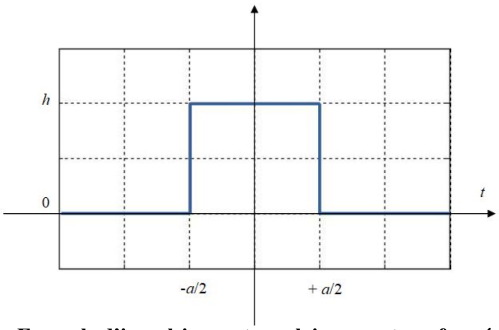


FIG. 6.85 – **Exemple d'impulsion rectangulaire pour transformée de Fourier**

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} he^{-\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}t\\ &= h\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-\mathrm{i}2\pi ft}\mathrm{d}t = -\frac{h}{\mathrm{i}2\pi f}\left[e^{-\mathrm{i}2\pi ft}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = -\frac{h}{\mathrm{i}2\pi f}\left(e^{-\mathrm{i}\pi fa} - e^{\mathrm{i}\pi fa}\right)\\ &= -\frac{h}{\mathrm{i}2\pi f}\left(e^{\mathrm{i}(-\pi fa)} - e^{\mathrm{i}(\pi fa)}\right) = -\frac{h}{\mathrm{i}2\pi f}(-2\mathrm{i}\sin(\pi fa)) = h\frac{\sin(\pi fa)}{\pi f}\\ &= ha\frac{\sin(\pi fa)}{\pi fa} = h\cdot a\cdot \mathrm{sinc}(\pi fa)\end{aligned} \quad (6.4.530)$$

où sinc est le sinus cardinal comme nous le savons déjà (voir section Trigonométrie page 2500). Nous retombons donc sur le sinus cardinal (si nous prenons le module au carré) de la décomposition d'une onde monochromatique diffractée par une fente rectangulaire. Ainsi, il semble possible d'étudier les phénomènes de diffraction en utilisant la transformée de Fourier et ce domaine se nomme "l'optique de Fourier". Nous reviendrons là-dessus dans la section d'Analyse Fonctionnelle quand nous approfondirons les transformées de Fourier.

Nous remarquerons que le spectre (décrit par la fonction sinus cardinal sinc) passe par zéro chaque fois que le sinus cardinal s'annule, c'est-à-dire, chaque fois que la fréquence est un multiple de $1/a$.

Le spectre de cette impulsion illustre deux points importants concernant les signaux de durée limitée :

P1. Un signal de courte durée possède un spectre large bande

P2. À un spectre étroit correspond un signal de longue durée

E2. La transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est donnée par :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \quad (6.4.531)$$

Considérons la fonction intégrable de type Gaussienne :

$$f(t) = e^{-at^2} \quad (6.4.532)$$

avec $a > 0$ défini sur $\mathbb{R}$.

Nous voulons calculer sa transformée de Fourier car il s'agit d'un cas très important et en particulier utile pour la résolution de l'équation de la chaleur que nous traiterons dans le chapitre de Thermodynamique et pour résoudre l'équation différentielle de Black & Scholes dans la section d'Économie.

L'astuce assez géniale, si nous voulons éviter de faire de l'analyse complexe sur 3 pages A4, consiste à remarquer que $F(\omega)$ est solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$y'(\omega)+\frac{\omega}{2a}y=0 \tag{6.4.533}$$

où y est une fonction de ω.

En effet en dérivant $F(\omega)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}F'(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-at^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-at^2}\left(-\mathrm{i}te^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\mathrm{i}te^{-at^2}\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.4.534}$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}F'(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}\omega t}\left(-\mathrm{i}te^{-at^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{i}e^{-at^2}}{2a}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\left(\frac{\mathrm{i}e^{-at^2}}{2a}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{-\omega}{2a}\frac{1}{\sqrt{2a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}\omega t}e^{-at^2}\mathrm{d}t=-\frac{\omega}{2a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-at^2}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.4.535}$$

Nous reconnaissons l'expression de la transformée de Fourier de f. Par conséquent :

$$F'(\omega)=-\frac{\omega}{2a}F(\omega) \tag{6.4.536}$$

Ceci montre que $F(\omega)$ est bien solution de l'équation différentielle ci-dessus.

Nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral que la solution générale de cette équation différentielle est donnée par :

$$y=Ae^{-G(\omega)} \tag{6.4.537}$$

où $A\in\mathbb{R}$. Et comme dans le cas présent :

$$g(x)=\frac{\omega}{2a} \tag{6.4.538}$$

La primitive $G(x)$ est donc facile à calculer et il vient :

$$y=Ae^{-\dfrac{\omega^2}{4a}} \tag{6.4.539}$$

Par conséquent :

$$F(\omega)=Ae^{-\dfrac{\omega^2}{4a}} \tag{6.4.540}$$

Pour déterminer la constante A il suffit de remarquer que :

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-at^2}e^{-\mathrm{i}0t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-at^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}} \tag{6.4.541}$$

et donc :

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\dfrac{\omega^2}{4a}} \tag{6.4.542}$$

Il est alors d'usage de dire que la transformation de Fourier d'une Gaussienne est une autre Gaussienne.

E3. Ce dernier exemple est très important pour comprendre l'échantillonnage de Nyquist (voir section Génie Électrique page ??). Nous considérons une impulsion carrée dans le domaine fréquentiel :

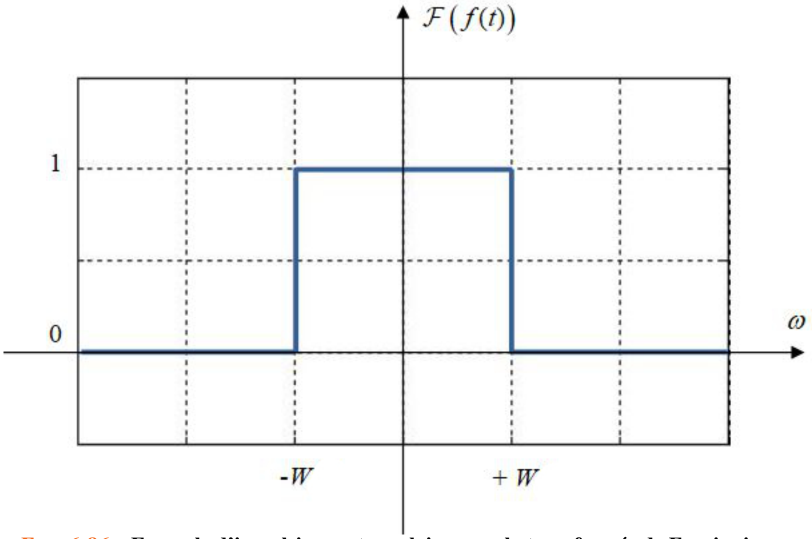


FIG. 6.86 – **Exemple d'impulsion rectangulaire pour la transformée de Fourier inverse**

Calculons sa transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-W}^{+W}1\cdot e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}t}\left[e^{\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-W}^{+W}\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}t}\left(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)=\frac{1}{\pi t}\sin(Wt)=\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wt)\end{aligned} \tag{6.4.543}$$

Il y a quelque chose d'important à remarquer ici (ou à retenir... peu importe...)!!! Tout d'abord, nous savons que sinc est égal à 1 à $t=0$. Mais nous savons aussi qu'à chaque

fois que $Wt = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons $\text{sinc} = 0$. Donc, à chaque fois que $t = k\pi/W$ nous avons :

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}(Wt) = 0 \tag{6.4.544}$$

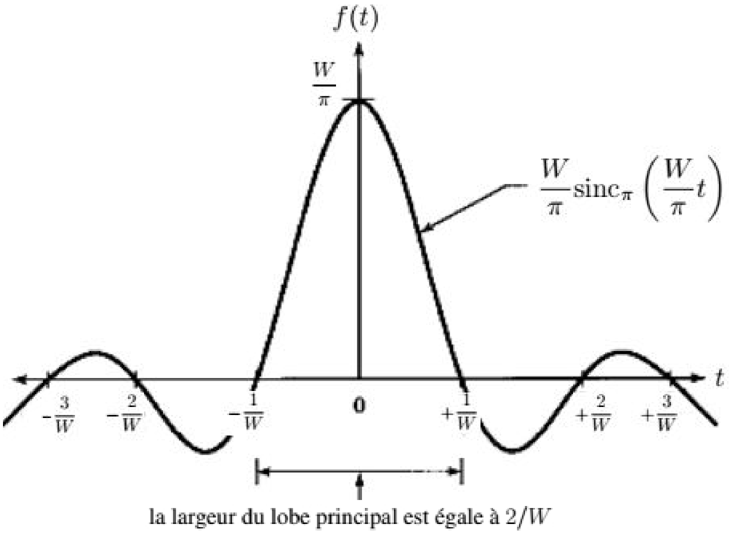
Pour rendre les choses plus agréables, les ingénieurs en traitement du signal aiment écrire plutôt le résultat précédent sous la forme :

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\pi\frac{W}{\pi}t\right) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}_\pi\left(\frac{W}{\pi}t\right) \tag{6.4.545}$$

et comme vous l'avez sûrement remarqué... cela introduit un nouveau type de sinus cardinal (sic... !). Vous pouvez vous demander pourquoi.... ? ? ? ? ? C'est assez facile. Écrit de cette façon, le sinc_π s'annule pour :

$$t = \frac{k}{W} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{6.4.546}$$

C'est plus joli.... et cela a même un nom : la "fonction sinc normalisée" et donne le tracé bien connu suivant en traitement du signal pour l'étude du théorème d'échantillonnage de Nyquist :



Nous verrons beaucoup d'autres transformées de Fourier dans la section Analyse Fonctionnelle page 2295.

6.4.2.8 Séries de Bessel

Les fonctions de Bessel sont très utiles dans de nombreux domaines de pointe de la physique faisant intervenir des équations différentielles délicates à résoudre. Les domaines dans lesquels nous les trouvons le plus souvent sont la calorimétrie (conduction de la chaleur), la physique nucléaire (physique de réacteurs), et la mécanique des fluides.

Ces séries sont cependant très peu détaillées dans les écoles universitaires et il est souvent du rôle de l'élève de chercher les compléments d'informations dont il a besoin sur le sujet dans la bibliothèque de son école. Nous avons voulu présenter ici les développements permettant d'éviter cette démarche tout en restant chez soi devant son ordinateur (de plus les livres sur le sujet sont assez rares...).

Remarque

Nous parlons habituellement par abus de langage des "fonctions de Bessel" au lieu des "séries de Bessel".

Il existe une quantité non négligeable de fonctions de Bessel mais nous allons nous restreindre à l'étude de celles qui sont les plus utilisées en physique et en particulier dans la présent livre.

En cours de traduction de l'anglais

6.4.2.8.1 Fonction de Bessel d'ordre zéro

La fonction connue sous le nom de "fonction de Bessel d'ordre zéro", est définie par la série de puissances suivante :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots \quad (6.4.547)$$

C'est lors de l'étude des propriétés de dérivation et d'intégration que Bessel a trouvé que cette série de puissance est une solution à une équation différentielle que l'on retrouve assez fréquemment en physique. C'est pourquoi elle porte son nom.

Si u_r représente le r-ème terme de la série, nous voyons aisément que :

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{-x^2}{(2r)^2} \quad (6.4.548)$$

qui tend vers zéro quand $r \to +\infty$, quelle que soit la valeur de x. Cela a pour conséquence que la série converge pour toutes les valeurs de x. Comme il s'agit d'une série de puissance positive, la fonction $J_0(x)$ et toutes ses dérivées sont continues pour toutes valeurs de x, réelles ou complexes.

6.4.2.8.2 Fonction de Bessel d'ordre n

La fonction , connue sous le nom de "fonction de Bessel d'ordre n", est définie, lorsque n est un entier positif, par la série de puissance suivante :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right) \quad (6.4.549)$$

qui converge pour toutes valeurs de x, réelles ou complexes.

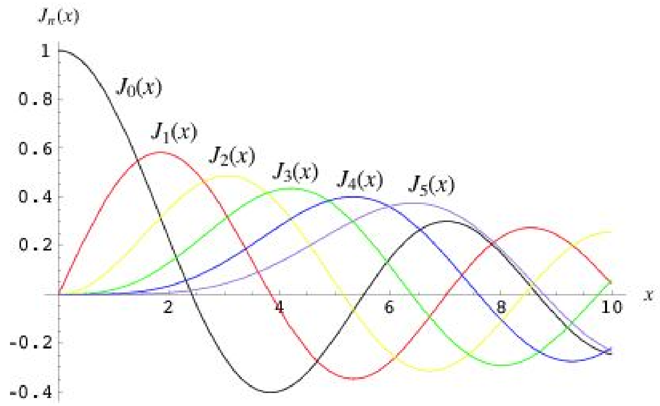


FIG. 6.87 – Tracé de quelques fonctions de Bessel d'ordre n (source : Wikipédia)

En cours de traduction de l'anglais

et dans Microsoft Excel 11.8346 ou Maple 4.00b la fonction précédente se trouve sous le nom BESSELJ( ). Par exemple pour obtenir le graphique précédent dans Maple 4.00b, il suffit d'écrire :

```
>plot([BesselJ(0,x),BesselJ(1,x),BesselJ(2,x),BesselJ(3,x)],x=0..20);
```

Voyons qu'en particulier, pour $n = 1$ nous avons :

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{x^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \ldots \quad (6.4.550)$$

et quand $n = 2$:

$$J_2(x) = \frac{x^2}{2\cdot 4} - \frac{x^4}{2^2\cdot 4\cdot 6} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6\cdot 8} - \frac{x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8\cdot 10} + \ldots \quad (6.4.551)$$

Nous pouvons noter que $J_n(x)$ est une fonction paire de x quand n est pair, et impaire quand n est impair (voir section Analyse Fonctionnelle page 2186).

Si nous jouons à faire de l'ingénierie mathématique par essais et erreurs successifs, nous trouvons que :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x^n}{2^n n!}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right) \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left((-1)^k\cdot(???)\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \quad (6.4.552)$$

Sur la base de cette approche par essais et erreurs, nous utilisons l'expression ci-dessus en factorisant uniquement le terme $(x/2)^{2k}$:

$$\begin{aligned}J_0 &= 1-\frac{1}{1}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{2^4}-\frac{1}{36}\frac{x^6}{2^6}+\ldots\\ J_1 &= \frac{x}{2\cdot 1!}\left(1-\frac{x^2}{2^2\cdot 2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 3}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 4}+\ldots\right)\\ &= \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3}\frac{x^4}{2^4}-\frac{1}{6^2\cdot 4}\frac{x^6}{2^6}+\ldots\right)\\ J_2 &= \ldots\end{aligned} \tag{6.4.553}$$

Donc, finalement, nous voyons à nouveau après des essais et des erreurs (au lieu de faire 5 pages de développements mathématiques comme le font les mathématiciens) que :

$$J_n=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{6.4.554}$$

Plus généralement pour n non entier, nous utilisons la fonction Gamma d'Euler (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$J_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{6.4.555}$$

Cela est aussi parfois noté par de purs mathématiciens (...) :

$$J_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{6.4.556}$$

Maintenant en différenciant la fonction $J_0(x)$ et en comparant le résultat avec la suite $J_1(x)$, nous voyons sans trop de peine que :

$$\frac{\mathrm{d}J_0(x)}{\mathrm{d}x}=-J_1(x) \tag{6.4.557}$$

Nous retrouvons également sans trop de difficulté, la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}xJ_1(x)=xJ_0(x) \tag{6.4.558}$$

Remarque

En général par raisonnement récursif, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^nJ_n(x)\right)=x^nJ_{n-1}(x) \tag{6.4.559}$$

Dès lors :

$$x^nJ_n(x)=\int_0^x y^nJ_{n-1}(y)\mathrm{d}y \tag{6.4.560}$$

Cette dernière relation nous sera utile dans la section d'Optique ondulatoire pour notre étude de la diffraction d'ouverture circulaire (disque d'Airy).

En cours de traduction de l'anglais

En utilisant le fait que :

$$\frac{\mathrm{d}J_0(x)}{\mathrm{d}x} = -J_1(x) \quad (6.4.561)$$

et en l'incluant dans la précédente relation, nous trouvons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}J_0(x)}{\mathrm{d}x}\right) + xJ_0(x) = 0 \quad (6.4.562)$$

ou écrit autrement :

$$x\frac{\mathrm{d}^2J_0(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}J_0(x)}{\mathrm{d}x} + xJ_0(x) = 0 \quad (6.4.563)$$

$y = J_0(x)$ est donc une solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + xy = 0 \quad (6.4.564)$$

ou écrit autrement :

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = 0 \quad (6.4.565)$$

ou encore :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0 \quad (6.4.566)$$

Une solution à une équation de Bessel de paramètre n qui n'est pas un multiple de $J_n(x)$ est appelée "fonction de Bessel du second type". Supposons que u soit une telle fonction et posons $v = J_0(x)$; alors d'après la relation :

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = 0 \quad (6.4.567)$$

nous avons :

$$xu'' + u' + xu = 0 \quad \text{et} \quad xv'' + v' + xv = 0 \quad (6.4.568)$$

En multipliant la première relation par v et la seconde par u et après soustraction, nous obtenons :

$$x(u''v - uv'') + u'v - uv' = 0 \quad (6.4.569)$$

nous avons donc aussi :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u'v - uv') = u''v + u'v' - u'v' - uv'' = u''v - uv'' \quad (6.4.570)$$

nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(u'v - uv')] = 0 \quad (6.4.571)$$

En cours de traduction de l' anglais

Effectivement car si nous développons, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(u'v-uv')] &= 1\cdot u'v+xu''v+xu'v'-1\cdot uv'-xu'v'-xuv''\\ &= x(u''v+u'v'-u'v'-uv'')+u'v-uv'\\ &= x(u''v-uv'')+u'v-uv'=0\end{aligned} \tag{6.4.572}$$

Pour que l'égalité :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(u'v-uv')]=0 \tag{6.4.573}$$

soit satisfaite, nous avons :

$$x(u'v-uv')=c^{te}=B \tag{6.4.574}$$

En divisant par xv^2, nous avons :

$$\frac{(u'v-uv')}{v^2}=\frac{B}{xv^2} \tag{6.4.575}$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{B}{xv^2} \tag{6.4.576}$$

de suite, par intégration il vient :

$$\frac{u}{v}=A+B\int\frac{1}{xv^2}\mathrm{d}x \tag{6.4.577}$$

où A est une constante. Consécutivement nous avons, puisque $v=J_0(x)$:

$$u=AJ_0(x)+BJ_0(x)\int\frac{1}{xJ_0^2(x)}\mathrm{d}x \tag{6.4.578}$$

où rappelons-le, A et B sont des constantes, et $B\neq 0$ si u n'est pas un multiple de $J_0(x)$ par définition !

Si dans la dernière relation, $J_0(x)$ est remplacé par son expression en termes de série nous avons :

$$\frac{1}{xJ_0^2(x)}=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}+\frac{5x^3}{32}+\ldots \tag{6.4.579}$$

Pour ceux qui veulent vérifier cette dernière relation (je n'aime pas ce genre de calculs algébriques) avec Maple 4.00b il suffit d'écrire :

```
>1/x*taylor(1/(series(BesselJ(0,x),x))^2,x=0,5);
```

Dès lors :

$$\begin{aligned}J_0(x)\int\frac{1}{xJ_0^2(x)}\mathrm{d}x &= J_0(x)\left[\log(x)+\frac{x^2}{4}+\frac{5x^4}{128}+\ldots\right]\\ &= J_0(x)\log(x)+\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\ldots\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{5x^4}{128}+\ldots\right)\\ &= J_0(x)\log(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{128}+\ldots\end{aligned} \tag{6.4.580}$$

En cours de traduction de l'anglais

consécutivement si nous posons :

$$Y_0(x) = J_0(x)\log(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \ldots \tag{6.4.581}$$

où $Y_0(x)$ est une fonction de Bessel particulière du second type appelée "fonction de Bessel-Neumann du second type d'ordre nul".

Identiquement au fait que $J_0(x) \to 0$ quand $x \to 0$, l'expression $Y_0(x)$ à cause du terme $\log(x)$ quand x est petit tend $Y_0(x) \to -\infty$ vers quand $x \to +0$.

Finalement, il vient de ce que nous avons vu précédemment que $J_0(x)$ et $Y_0(x)$ sont des solutions indépendantes de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0 \tag{6.4.582}$$

La solution générale étant donc :

$$y = AJ_0(x) + BY_0(x) \tag{6.4.583}$$

où A, B sont des constantes arbitraires et $x > 0$ afin que $Y_0(x)$ soit réel.

Si nous remplaçons x par kx, où k est une constante, l'équation différentielle devient :

$$\frac{1}{k^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{kx}\frac{\mathrm{d}y}{k\mathrm{d}x} + y = 0 \tag{6.4.584}$$

en multipliant le tout par k^2, nous trouvons la forme générale de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + k^2y = 0 \tag{6.4.585}$$

dont la solution générale est :

$$y = AJ_0(kx) + BY_0(kx) \tag{6.4.586}$$

où $k > 0$ afin que $Y_0(kx)$ soit réel quand $x > 0$.

Au fait, les fonctions de Bessel viennent des solutions de l'équation différentielle étudiée précédemment et solutionnées par la "méthode de Frobenius". Posons :

$$L_y \equiv \left(x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)y \tag{6.4.587}$$

et faisons la substitution :

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = x^\rho + c_1x^{\rho+1} + c_2x^{\rho+2} + c_3x^{\rho+3} + \ldots \tag{6.4.588}$$

en substituant dans Ly, nous obtenons :

$$Ly = \rho^2x^{\rho-1} + (\rho+1)^2c_1x^\rho + \left[(\rho+2)^2c_2 + 1\right]x^{\rho+1} + \left[(\rho+3)^2c_3 + c_1\right]x^{\rho+1} \tag{6.4.589}$$

En cours de traduction de l' anglais

Choisissons maintenant les c_i afin de satisfaire l'équation différentielle tels que :

$$\begin{aligned}(\rho+1)^2c_1&=0\\(\rho+2)^2c_2+1&=0\\(\rho+3)^2c_3+c_1&=0\\&\ldots\end{aligned} \tag{6.4.590}$$

Dès lors, à moins que ρsoit un entier négatif, nous avons :

$$\begin{aligned}&c_1=c_3=c_5=c_7=\ldots=0\\&c_2=-\frac{1}{(\rho+2)^2}\\&c_4=-\frac{c_2}{(\rho+4)^2}=\frac{1}{(\rho+2)^2(\rho+4)^2}\\&\ldots\end{aligned} \tag{6.4.591}$$

En substituant ces valeurs dans la relation :

$$y=x^\rho+c_1x^{\rho+1}+c_2x^{\rho+2}+c_3x^{\rho+3}+\ldots \tag{6.4.592}$$

nous obtenons :

$$\boxed{y=x^\rho\left(1-\frac{x^2}{(\rho+2)^2}+\frac{1}{(\rho+2)^2(\rho+4)^2}-\cdots\right)} \tag{6.4.593}$$

Dès lors :

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=Ly=\rho^2x^{\rho-1} \tag{6.4.594}$$

Si nous posons $\rho=$ dans l'avant-dernière relation, nous obtenons :

$$y=x^\rho\left(1-\frac{x^2}{(\rho+2)^2}+\frac{1}{(\rho+2)^2(\rho+4)^2}-\cdots\right)=J_0(x) \tag{6.4.595}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.4.2.8.3 Équation différentielle de Bessel d'ordre n

Nous avons défini les séries de Bessel comme étant :

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^nn!}\left(1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot(2n+2)(2n+4)}-\cdots\right) \tag{6.4.596}$$

Posons :

$$y=J_n(x)2^nn!=x^n-\frac{x^{n+2}}{2(2n+2)}+\frac{x^{n+4}}{2\cdot4(2n+2)(2n+4)}-\cdots \tag{6.4.597}$$

et dérivons ainsi :

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=n^2x^n-\frac{(n+2)^2x^{n+2}}{2(2n+2)}+\frac{(n+4)^2x^{n+4}}{2\cdot4(2n+2)(2n+4)}-\cdots \tag{6.4.598}$$

Mais nous avons aussi :

$$n^2y = n^2x^n - \frac{n^2x^{n+2}}{2(2n+2)} + \frac{n^2x^{n+4}}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \quad (6.4.599)$$

Par soustraction :

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - n^2y = -x^{n+2} + \frac{x^{n+4}}{2(2n+2)} - \cdots = -x^2y \quad (6.4.600)$$

Ce qui donne finalement :

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (6.4.601)$$

Ce qui s'écrit également :

$$\boxed{x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - n^2)y = 0} \quad (6.4.602)$$

qui est appelée "l'équation différentielle de Bessel d'ordre n" ou plus simplement "équation de Bessel". Au fait, la plupart des écoles ou sites Internet donnent cette équation différentielle comme une définition et pourtant il est clair qu'il y a un raisonnement rigoureux derrière cette équation.

La solution est donc du type :

$$y = 2^n n! J_n(x) \quad (6.4.603)$$

ce qui s'écrit encore parfois en utilisant la fonction gamma d'Euler (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$y = 2^n\Gamma_0(n)J_n(x) = c^{te}J_n(x) \quad (6.4.604)$$

Il s'ensuit que :

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2J_n(x)}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}J_n(x)}{\mathrm{d}x} + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0 \quad (6.4.605)$$

et donc que $y = J_n(x)$ est solution de cette équation différentielle.

Nous nous rabattrons sur une telle équation différentielle lors de notre étude de l'équation d'onde d'un tambour circulaire (voir section Mécanique Ondulatoire page ??), lors de notre étude de la physique des réacteurs nucléaires (voir section Physique Nucléaire) et enfin lors de notre étude de l'auto-flambage (voir section Génie Mécanique page ??).

6.4.3 Critères de convergences

Lorsque nous étudions une série, l'une des questions fondamentales est celle de la convergence ou de la divergence de cette série.

En cours de traduction de l'anglais

Si une série converge, son terme général tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \tag{6.4.606}$$

ou évidemment généralement :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c^{te} \tag{6.4.607}$$

Ce critère est nécessaire mais non suffisant pour établir la convergence d'une série. Par contre, si ce critère n'est pas rempli, on est absolument sûr que la série ne converge pas (donc elle diverge !).

Trois méthodes sont proposées pour approfondir le critère de convergence :

1. Le test de l'intégrale
2. La règle d'Alembert
3. La règle de Cauchy

Dans les paragraphes suivants, nous admettrons des séries à termes positifs. Le cas de la série alternée sera vu ultérieurement.

6.4.3.1 Test de l'intégrale

Le test intégral de convergence est une méthode utilisée pour tester des séries infinies de termes non négatifs pour la convergence. Il a été développé par Colin Maclaurin et Augustin-Louis Cauchy et est parfois connu sous le nom de "test de Maclaurin–Cauchy".

Soit la série à termes positifs décroissants :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{6.4.608}$$

c'est-à-dire :

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \tag{6.4.609}$$

et soit une fonction continue décroissante telle que :

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n \tag{6.4.610}$$

Alors la série infinie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \tag{6.4.611}$$

converge vers un nombre réel si et seulement si l'intégrale impropre :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{6.4.612}$$

En cours de traduction de l'anglais

est finie. En d'autres termes, si l'intégrale diverge, alors la série diverge également !

Remarque

En aucun cas l'intégrale ne donne la valeur de la somme de la série ! Le test de l'intégrale donne simplement une indication sur la convergence de la série. Avant de faire le test de l'intégrale, il est important de vérifier que les termes de la série soient strictement décroissants afin de remplir la condition $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$.

✍**Exemple :**

La série harmonique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tag{6.4.613}$$

diverge parce que (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1513) :

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{d}n = \ln(n)\Big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) \rightarrow +\infty \tag{6.4.614}$$

Donc cette série harmonique ne converge pas.

En cours de traduction

6.4.3.2 Règle D'Alembert

Le "test du ratio" est aussi un test (ou "critère") de convergence d'une série du type :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{6.4.615}$$

où chaque terme est un nombre réel ou complexe et a_n est différent de zéro lorsque n est grand. Le test a été publié pour la première fois par Jean le Rond d'Alembert et est parfois appelé "test du rapport d'Alembert" ou "test du rapport de Cauchy".

La forme habituelle du test utilise la limite :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \tag{6.4.616}$$

Le test du ratio affirme que :

1. si $L < 1$ alors la série converge absolument ;
2. si $L > 1$ alors la série ne converge pas ;
3. si $L = 1$ ou si la limite n'existe pas, alors le test n'est pas concluant, car il existe à la fois des séries convergentes et divergentes qui satisfont ce cas

et nous définissons le "rayon de convergence" par :

$$R = \frac{1}{L} \tag{6.4.617}$$

Pour la preuve supposons que :

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \tag{6.4.618}$$

Remarque

En réalité cette règle est normalement sans valeur absolue. Le cas avec la valeur absolue comme ci-dessus est nommé "test de convergence absolue" et appliqué au cas plus général d'une série alternative telle que :

$$a_1 + |-a_2| + a_3 + |-a_4| + \ldots + |-a_n| + \ldots \qquad (a_n > 0) \tag{6.4.619}$$

Si une série alternée de termes est absolument convergente, la série absolue qui s'ensuit converge également.

Par conséquent, le test de convergence absolue est une généralisation de la règle d'Alembert mais la plupart du temps nous ne faisons aucune distinction entre les deux.

Nous pouvons alors montrer que la série converge absolument en montrant que ses termes finiront par devenir inférieurs à ceux d'une certaine série géométrique convergente. Pour ce faire, posons :

$$r = \frac{L+1}{2} \tag{6.4.620}$$

Alors r est strictement compris entre L et 1, et :

$$|a_{n+1}| < r|a_n| \tag{6.4.621}$$

pour n suffisamment grand (par exemple, n supérieur à N).

Dès lors :

$$|a_{n+i}| < r^i |a_n| \tag{6.4.622}$$

pour chaque $n > N$ et $i > 0$, et dès lors :

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |a_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{N+i}| < \sum_{i=1}^{+\infty} r^i |a_{N+1}| = |a_{N+1}| \sum_{i=1}^{+\infty} r^i = |a_{N+1}| \frac{r}{1-r} < +\infty \tag{6.4.623}$$

Autrement dit, la série converge absolument.

Par contre, si $L > 1$, alors :

$$|a_{n+1}| > |a_n| \tag{6.4.624}$$

pour n suffisamment grand, tel que la limite de la somme soit non nulle. La série diverge donc.

En cours de traduction anglais

✍**Exemple :**

Soit la suite géométrique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \tag{6.4.625}$$

Nous obtenons le quotient :

$$L=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{0.5^{n+1}}{0.5^n}=0.5 \tag{6.4.626}$$

Donc la série onverge !

Évidemment certaines applications pratiques donnent (peuvent) donner par exemple :

$$L=\lim_{n\rightarrow+\infty}\sqrt[n]{a_n} \tag{6.4.627}$$

et certains praticiens appellent cela la "règle de convergence de Cauchy"... (à ne pas confondre avec le test de convergence de Cauchy qui sera étudié dans la section Fractales à la page

✍**Exemple :**

Faisons maintenant un dernier exemple important. Nous avons étudié plus tôt au-dessus les séries de Bessel. Mais il peut ne pas être évident que ce soit des séries convergentes. Montrons que c'est bien le cas pour J_0, c'est-à-dire pour :

$$J_0=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}k!^2} \tag{6.4.628}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}L&=\lim_{k\rightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{k\rightarrow+\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}x^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2}\cdot\frac{2^{2k}k!^2}{(-1)^k x^{2k}}\right|\\&=\lim_{k\rightarrow+\infty}\left|\frac{x^{2k+2}}{2^{2k+2}[(k+1)!]^2}\cdot\frac{2^{2k}(k!)^2}{x^{2k}}\right|\\&=\lim_{k\rightarrow+\infty}\left|\frac{x^{2k}x^2}{2^{2k}2^2(k+1)!(k+1)!}\cdot\frac{2^{2k}k!k!}{x^{2k}}\right|=\lim_{n\rightarrow+\infty}\left|\frac{x^2k!k!}{4(k+1)k!(k+1)k!}\right|\\&=\lim_{k\rightarrow+\infty}\left|\frac{x^2}{4(k+1)(k+1)}\right|=\lim_{k\rightarrow+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\left|\frac{x^2}{4}\right|=\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{x^2}{4(k+1)^2}\\&=0\end{aligned} \tag{6.4.629}$$

6.4.3.3 Test des séries alternées

Le test des séries alternées est une méthode utilisée pour prouver qu'une série alternée avec des termes qui diminuent en valeur absolue est une série convergente. Le test a été utilisé par Gottfried Leibniz et est parfois appelé "test de Leibniz", "régle de Leibniz ou le "critére de Leibniz ".

Une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \tag{6.4.630}$$

où tous les a_n sont positifs ou tous les a_n sont négatifs, est nommé une "série alternée".

Le test des séries alternées dit alors : si a_n décroît de manière monotone et que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \tag{6.4.631}$$

alors la série alternée converge.

Il y a beaucoup d'autres tests du même genre comme le test de Raabe, le test de Bertrand, le test de Gauss, le test de Kummer, etc.

6.4.3.4 Théorème du point fixe

Le théorème du point fixe n'est pas vraiment utile en physique (implicitement il est indispensable mais les physiciens utilisent souvent des outils mathématiques dont les propriétés ont déjà été validées au préalable par des mathématiciens), cependant nous le retrouvons en théorie du chaos (les vortex, tourbillons, etc...) ainsi qu'en informatique théorique (voir chapitre traitant des fractales en particulier le triangle de Sierpinski). Nous ne saurions donc que recommander au lecteur de prendre le temps de lire et de comprendre les explications et développements qui vont suivre.

Soit (X,d), un espace métrique complet (voir sections Topologie page 2429 ou Fractales page ??) et soit une application strictement contractante de constante L (voir les fonctions lipschitziennes dans la section de Topologie page 2438), alors il existe un unique point $\omega \in X$ tel que :

$$T(\omega) = \omega \tag{6.4.632}$$

ω est alors dit le "point fixe" de T (pensez par exemple au cas $\cos(x) = x$). De plus si nous notons par :

$$T^n(x) = \underbrace{T(T(T\ldots T}_{n \text{ fois}}(x)\ldots)) \tag{6.4.633}$$

l'image de x par le n-ème itéré de T, nous avons alors :

$$\omega = \lim_{t\to\infty}\left(T^n(x)\right) \quad \forall x \in X \tag{6.4.634}$$

En cours de traduction de l' anglais

et la vitesse de convergence peut d'ailleurs être estimée par :

$$\mathrm{d}\big(\omega, T^n(x)\big) \leq \mathrm{d}\big(x, T(x)\big)\frac{L^n}{1-L} \qquad (6.4.635)$$

Du fait que nous restreignons notre étude à l'itération d'une fonction, nous parlons de "théorème du point fixe de Banach" qui donne un critère général garantissant que, s'il est satisfait, la procédure d'itération d'une fonction donne un point fixe.

Remarque

Vous pouvez vous amuser avec votre calculatrice de poche ou celle de votre système d'exploitation en choisissant un nombre au hasard et en en prenant le cosinus de manière itérative. Vous verrez que vous tendrez vers 0.74 et donc que in extenso il s'agit de la solution de $\cos(x) = x$.

Démonstration 6.25.2. Soit $x \in X$. Nous considérons la suite $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. Nous allons d'abord montrer que cette suite est une suite de Cauchy (voir plus haut dans le présent chapitre ce qu'est une suite de Cauchy).

En appliquant l'inégalité triangulaire (voir section Calcul Vectoriel page 1805) plusieurs fois nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\big(T^{n+k}(x), T^n(x)\big) \leq &\mathrm{d}\big(T^{n+k}(x), T^{n+k-1}(x)\big) + \mathrm{d}\big(T^{n+k-1}(x), T^{n+k-2}(x)\big)\\ &+\cdots+\mathrm{d}\big(T^{n+1}(x), T^n(x)\big)\end{aligned} \qquad (6.4.636)$$

Or :

$$\mathrm{d}\big(T^{n+1}(x), T^n(x)\big) \leq L\cdot\mathrm{d}\big(T^n(x), T^{n-1}(x)\big) \leq \cdots \leq L^n\cdot\mathrm{d}\big(T(x), x\big) \qquad (6.4.637)$$

Donc :

$$\mathrm{d}\big(T^{n+k}(x), T^n(x)\big) \leq (L^{n+k-1} + L^{n+k-2} + \cdots + L^n)\cdot\mathrm{d}\big(T(x), x\big) = L^n\cdot d\big(T(x), x\big)\cdot(1 + L + L^2 + \ldots + L^{k-1}) \qquad (6.4.638)$$

et comme :

$$(1 + L + L^2 + \ldots + L^{k-1}) \leq \frac{1-L^k}{1-L} \leq \frac{1}{1-L} \qquad (6.4.639)$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}\big(T^{n+k}(x), T^n(x)\big) \leq \frac{L^n}{1-L}\cdot\mathrm{d}\big(T(x), x\big) \qquad (6.4.640)$$

Pour finir :

$$0 \leq L \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{L^n}{1-L} = 0 \qquad (6.4.641)$$

c'est-à-dire que dans un premier temps $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et nous posons :

$$\omega = \lim_{n\to+\infty} T^n(x) \qquad (6.4.642)$$

En cours de traduction de l'anglais

À présent, nous vérifions que ω est bien un point fixe de T. En effet T est uniformément continue (car lipschitzienne - voir le section de Topologie page 2438) donc à fortiori continue ainsi :

$$\omega = \lim_{n\to+\infty} T^n(x) = \lim_{n\to+\infty} T\big(T^{n-1}(x)\big) \underbrace{=}_{\text{as } T \text{ is continuous}} T\left(\lim_{n\to+\infty} T^{n-1}(x)\right) = T(\omega) \qquad (6.4.643)$$

Il reste à vérifier que ω est l'unique point fixe (du coup nous aurons démontré que ω ne dépend pas du choix de x). Supposons que nous ayons aussi alors :

$$\mathrm{d}(y,\omega) = \big(T(y), T(\omega)\big) \leq L\cdot \mathrm{d}(y,\omega) \Rightarrow \mathrm{d}(y,\omega) = 0 \Rightarrow y = \omega \qquad (6.4.644)$$

Une estimation de la vitesse de convergence est donnée par :

$$\mathrm{d}\big(T^{n+k}(x), T^n(x)\big) \leq \frac{L^n}{1-L}\cdot \mathrm{d}\big(T(x), x\big) \qquad (6.4.645)$$

$\mathrm{d}(,)$ est continue par rapport à chacune des variables donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{d}\big(T^{n+k}(x), T^n(x)\big) = \mathrm{d}\left(\lim_{k\to\infty} T^{n+k}(x), T^n(x)\right) = \mathrm{d}\big(\omega, T^n(x)\big) \qquad (6.4.646)$$

et les limites préservent les inégalités (non strictes) donc :

$$\mathrm{d}\big(\omega, T^n(x)\big) \leq \frac{L^n}{1-L}\mathrm{d}\big(T(x), x\big) \qquad (6.4.647)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

6.4.4 Fonctions génératrices

Pour certains modèles mathématiques de gestion des risques financiers (voir section Économie page ??) et aussi pour les transformations d'intégrales des fonctions de Bessel (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1543) nous aurons besoin dans ce livre d'une introduction en douceur aux fonctions génératrices !

6.4.4.1 Fonctions génératrices ordinaires (transformation d'une séquence en série)

Rappelons d'abord que nous avons prouvé plus haut que le développement général de Maclaurin d'une fonction était donné par :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{6.4.648}$$

C'est-à-dire $x\cong 0$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\ldots \tag{6.4.649}$$

Dans le cas de notre étude, écrivons cette dernière relation sous la forme :

$$\boxed{G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=\sum_k a_kx^k} \tag{6.4.650}$$

Nous disons alors que la relation ci-dessus est la "fonction génératrice ordinaire" des suites de nombres $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$ dans le paramètre formel x. Et cela nous est égal si cela diverge ou pas !

Parce que la fonction génératrice est une expression algébrique qui encode la séquence et nous permet de la manipuler d'une manière qui n'est pas possible sous d'autres formes. Plusieurs fois, si la séquence que vous regardez est "intéressante" (et ce mot a beaucoup d'interprétations...), la fonction génératrice a une forme courte et simple.

La fonction génératrice nous permet de dériver des formules pour la séquence, des identités impliquant la séquence, d'estimer les valeurs et bien plus encore, comme nous le verrons plus loin.

Une chose à ne jamais oublier : la fonction génératrice n'est pas la séquence et la séquence n'est pas la fonction génératrice. Ce n'est pas la même chose. L'un est une séquence, l'autre une expression algébrique !

Si vous avez une séquence, vous pouvez dire "la fonction génératrice de la séquence" pour faire référence à l'objet algébrique. Si vous avez une fonction génératrice, vous pourriez dire "la séquence de coefficients de la fonction génératrice" afin de faire référence à la séquence.

Essayons maintenant un exemple compagnon, la séquence composée de tous les 1 :

$$1,1,1,1,1,1,1,\ldots \tag{6.4.651}$$

En cours de traduction de l' anglais

La fonction génératrice est donc la série géométrique que nous avons prouvée plus haut implicitement (explicitement vous pouvez voir la preuve à la page 2399) :

$$1+1x+1x^2+1x^3+\ldots=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x} \tag{6.4.652}$$

Le prochain exemple compagnon simple serait les entiers positifs :

$$1,2,3,4,5,\ldots \tag{6.4.653}$$

Celle-ci a pour fonction génératrice :

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \tag{6.4.654}$$

Nous observons maintenant que la dérivée de cette fonction génératrice est la la fonction génératrice elle-même :

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x} \tag{6.4.655}$$

Effectivement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3+\ldots)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \tag{6.4.656}$$

Dès lors, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \tag{6.4.657}$$

Nous concluons que :

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k \tag{6.4.658}$$

Nous ne pouvons pas utiliser exactement la même astuce pour déterminer la fonction génératrice de la séquence :

$$1,4,9,16,25 \tag{6.4.659}$$

car si nous prenons la dérivée de :

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \tag{6.4.660}$$

alors nous n'avons pas tout à fait les carrés des entiers. Mais le lecteur attentif remarquera que si nous multiplions d'abord cette dernière relation par x puis prenons la dérivée alors nous avons :

$$\begin{aligned}1+4x+9x^2+16x^3+\ldots&=1^2+2^2x+3^2x+4^2x^3+\ldots\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots))\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)\end{aligned} \tag{6.4.661}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^2x^k=\frac{1+x}{(1-x)^3} \tag{6.4.662}$$

Il est facile avec un logiciel comme Maple de contrôler que la suite de Maclaurin de $(1+x)/(1-x)^3$ est égale à la fonction génératrice et donc de nous donner les coefficients a_i de la suite !

Voyons maintenant un exemple non trivial... C'est la suite de Fibonacci donnée pour rappel (voir page 1640) par (chaque terme est égal à la somme des deux précédents) :

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots \tag{6.4.663}$$

Nous dénoterons la fonction génératrice de cette suite $F(x)$ donc :

$$F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\ldots \tag{6.4.664}$$

où $F_0=F_1=1$ et $F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$ pour $k\geq 2$. Dès lors, nous pouvons voir :

$$\begin{aligned}F(x)&=1+x+\sum_{k=2}^{+\infty}F_kx^k=1+x+\sum_{k=2}^{+\infty}(F_{k-1}+F_{k-2})x^k\\&=1+x+\sum_{k=2}^{+\infty}F_{k-1}x^k+\sum_{k=2}^{+\infty}F_{k-2}x^k\\&=1+x+(x^2+2x^3+3x^4+\ldots)+(x^2+x^3+2x^4+3x^5+\ldots)\\&=1+xF(x)+x^2F(x)\end{aligned} \tag{6.4.665}$$

Puisque nous avons compris que :

$$F(x)=1+xF(x)+x^2F(x) \tag{6.4.666}$$

alors :

$$F(x)-xF(x)-x^2F(x)=1 \tag{6.4.667}$$

et cela peut être réécrit comme :

$$F(x)(1-x-x^2)=1 \tag{6.4.668}$$

et dès lors :

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2} \tag{6.4.669}$$

Il est toujours surprenant que la fonction génératrice des nombres de Fibonacci ait une formule aussi compacte. Mais encore une fois, en utilisant par exemple un logiciel comme Maple et en faisant le développement de Maclaurin de la fonction ci-dessus, vous obtiendrez une série dont les coefficients a_k correspondent à la suite de Fibonacci !

En cours de traduction de l'anglais

Mais continuons à investiguer... ! Nous avons donc le dénominateur :

$$1-x-x^2 \tag{6.4.670}$$

qui peut être factorisé en supposant que l'équation :

$$1-x-x^2=0 \tag{6.4.671}$$

a des solutions ! Nous avons rapidement trouvé que les racines sont données par :

$$x_{1,2}=-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \tag{6.4.672}$$

Nous reconnaissons ici les valeurs négatives du nombre d'or φ et de son conjugué (voir plus haut page 1369).

Par conséquent, le dénominateur peut être écrit comme (en utilisant la relation entre le nombre d'or et son conjugué) :

$$\begin{aligned}1-x-x^2&=(x-(-\varphi_1))(x-(-\varphi_2))=(x+\varphi_1)(x+\varphi_2))=\varphi_1\varphi_2\left(\frac{x}{\varphi_1}+1\right)\left(\frac{x}{\varphi_2}+1\right)\\&=\varphi\left(-\frac{1}{\varphi}\right)\left(\frac{x}{\varphi_1}+1\right)\left(\frac{x}{\varphi_2}+1\right)=-\left(\frac{x}{\varphi_1}+1\right)\left(\frac{x}{\varphi_2}+1\right)\\&=-\left(-x\varphi_2+1\right)\left(-x\varphi_1+1\right)=-\left(1-x\varphi_1\right)\left(1-x\varphi_2\right)\end{aligned} \tag{6.4.673}$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=-\frac{1}{\left(1-x\varphi_1\right)\left(1-x\varphi_2\right)} \tag{6.4.674}$$

Décomposons cette fraction (le signe $-$ est maintenant dans les constantes A et B) :

$$F(x)=-\frac{1}{(1-x\varphi_1)(1-x\varphi_2)}=\frac{A}{(1-x\varphi_1)}+\frac{B}{(1-x\varphi_2)} \tag{6.4.675}$$

où A, B doivent être trouvés. Clairement, nous avons :

$$1=A(1-x\varphi_2)+B(1-x\varphi_1) \tag{6.4.676}$$

Par identification, nous avons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}A+B&=1\\-Ax\varphi_2-Bx\varphi_1&=-x(A\varphi_2+B\varphi_1)=0\end{aligned} \tag{6.4.677}$$

Dès lors :

$$A+B=1 \tag{6.4.678}$$

$$A\varphi_2+B\varphi_1=0 \tag{6.4.679}$$

Ou écrit explicitement :

$$A+B=1 \tag{6.4.680}$$

En cours de traduction de l'anglais

$$-\frac{A}{\varphi}+B\varphi=0 \tag{6.4.681}$$

La solution de ce système linéaire est simple et donnée par :

$$A=\frac{\varphi^2}{\varphi^2+1}=\frac{\varphi_1}{\varphi_1-\varphi_2} \qquad B=\frac{1}{\varphi^2+1}=\frac{-\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2} \tag{6.4.682}$$

Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{A}{(1-x\varphi_1)}+\frac{B}{(1-x\varphi_2)}=\frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\left(\frac{\varphi_1}{(1-x\varphi_1)}-\frac{\varphi_2}{(1-x\varphi_2)}\right)\\&=\frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\left(\varphi_1\frac{1}{(1-x\varphi_1)}-\varphi_2\frac{1}{(1-x\varphi_2)}\right)\end{aligned} \tag{6.4.683}$$

Ensuite, nous utilisons un autre résultat assez famieux, le développement de Taylor suivant :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \tag{6.4.684}$$

pour $|x|<1$. En utilisant ce résultat, nous pouvons voir que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}F_kx^k=F(x)=\frac{1}{\varphi_1-\varphi_2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(\varphi_1^{k+1}-\varphi_2^{k+1})x^k\right) \tag{6.4.685}$$

Dès lors :

$$F_k=\frac{\varphi_1^{k+1}-\varphi_2^{k+1}}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{\varphi_1^{k+1}-\varphi_2^{k+1}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] \tag{6.4.686}$$

Et donc :

$$\boxed{F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]} \tag{6.4.687}$$

Ce résultat est parfois nommé la "formule de Fibonacci de Binet".

6.4.4.1.1 Composition de fonctions génératrices

Maintenant, si nous avons deux fonctions génératrices :

$$G_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k \qquad \text{et} \qquad G_2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_kx^k \tag{6.4.688}$$

pour deux séquences d'entiers $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$ et $b_0,b_1,b_2,b_3,\ldots$, il existe plusieurs façons de combiner ces deux séquences et d'obtenir des fonctions génératrices pour la nouvelle séquence correspondante.

En cours de traduction de l' anglais

- Somme : Si nous additionnons les fonctions génératrices nous avons que :

$$A(x)+B(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k)x^k \tag{6.4.689}$$

est une fonction génératrice de la série :

$$a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots \tag{6.4.690}$$

- Produit : Cependant, si nous multiplions les deux fonctions génératrices, nous avons :

$$\begin{aligned}G_1(x)G_2(x)&=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)\\&=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+\ldots\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\ldots+a_0b_n)x^n\end{aligned} \tag{6.4.691}$$

Cela peut se résumer dans l'expression :

$$G_1(x)G_2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_{k-i}b_i\right) \tag{6.4.692}$$

Un autre cas particulier du produit de la fonction génératrice est le produit :

$$\frac{1}{1-x}G(x) \tag{6.4.693}$$

C'est le produit de deux fonctions génératrices, la première étant la fonction génératrice :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \tag{6.4.694}$$

par :

$$G_1(x)G_2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_{k-i}b_i\right) \tag{6.4.695}$$

Le produit de ceux-ci est une fonction génératrice de la série (comme tous les $a_i=1$) :

$$b_0, b_0+b_1, b_0+b_1+b_2, b_0+b_1+b_2+b_3, \ldots \tag{6.4.696}$$

- Dérivée : Nous avons déjà vu quelques exemples de l'utilisation de la dérivée dans les exemples précédents.

Souvenez-vous maintenant que nous avons prouvé que :

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k \tag{6.4.697}$$

Dès lors, par le fait que :

$$\frac{1}{1-x}G(x) \tag{6.4.698}$$

En cours de traduction de l'anglais

a pour fonctin génératrice :

$$b_0, b_0+b_1, b_0+b_1+b_2, b_0+b_1+b_2+b_3, \ldots \tag{6.4.699}$$

nous avons alors que :

$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{(1-x)^2} \tag{6.4.700}$$

est alors la fonction génératrice pour la séquence de la somme des n premiers entiers positifs :

$$1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \ldots \tag{6.4.701}$$

En particulier, le coefficient de x^k est :

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) \tag{6.4.702}$$

Nous savons aussi qu'en prenant la dérivée de $1/(1-x)^2$, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{(1-x^2)}=2\cdot 1+3\cdot 2x+4\cdot 3x^2+5\cdot 4x^3+\ldots \tag{6.4.703}$$

Dès lors en divisant cette équation par deux, nous avons :

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)(k+1)}{2}x^k \tag{6.4.704}$$

Il faut savoir que le coefficient de x^k dans $1/(1-x)^3$ est égal à $(k+1)(k+2)/2$ et que c'est égal à la somme des $k+1$ premiers entiers, dès lors :

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{6.4.705}$$

6.4.4.2 Fonctions génératrices multivariées

Rappelez-vous que dans la section d'Algèbre que nous avons prouvé que :

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a+1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2+2ab+1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{6.4.706}$$

peut être exprimé sous une forme condensée qui fait intervenir le coefficient binomial (voir page 1348) :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}C_p^n a^{n-p}b^p \tag{6.4.707}$$

alors c'est ce que nous appelons une "fonction génératrice multivariée". Elle fonctionne comme les autres fonctions génératrices avec lesquelles nous avons travaillé précédemment, sauf qu'elle a deux paramètres.

En cours de traduction de l' anglais

6.4.4.3 Fonctions génératrices fonctionnelles

Jusqu'à présent, nous avons des fonctions génératrices qui donnent des valeurs scalaires. Mais une famille plus générale sont les "fonctions génératrices fonctionnelles" qui donnent des fonctions au lieu de simples scalaires.

Une fonction génératrice d'une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ est évidemment une série de puissance du type :

$$G(x,t)=\sum_n f_n(x)t^n \tag{6.4.708}$$

dont les coefficients sont maintenant fonction de x.

Voyons les deux exemples qui nous seront utiles dans les sections d'Économie, d'Optique Ondulatoire et aussi de Calcul Différentiel et Intégral !

Commençons par l'exemple le plus important impliquant les probabilités et en particulier la distribution de Poisson telle qu'utilisée dans le modèle First Boston Credit Risk Metric dans la section Economie !

Rappelons que la fonction de densité de la loi de Poisson, c'est-à-dire la probabilité que N soit égal à n, est donnée par (voir section page Statistiques 674) :

$$P(n)=\frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \tag{6.4.709}$$

pour $n=0,1,2,\ldots$.

La fonction génératrice de probabilité est égale à :

$$P_N(t)=P(n=0)+P(n=1)t+P(n=2)t^2+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}t^n \tag{6.4.710}$$

Nous connaissons aussi le développement en série infinie de Maclaurin suivant :

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+u\frac{u^4}{4!}+\ldots= \tag{6.4.711}$$

Et si nous réécrivons :

$$P_N(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}t^n \tag{6.4.712}$$

de la manière suivante :

$$P_N(t)=e^{-\mu}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mu t)^n}{n!} \tag{6.4.713}$$

Et en supposant en outre le développement de Maclaurin ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mu t)^n}{n!}=e^{\mu t} \tag{6.4.714}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce qui implique :

$$P_N(t)=e^{-\mu}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mu t)^n}{n!}=e^{-mu}e^{\mu t}=e^{\mu(t-1)} \qquad (6.4.715)$$

C'est la fonction génératrice de probabilités d'une distribution de Poisson que nous utiliserons pour notre étude du modèle CreditRisk.

Et maintenant pour notre étude de l'Optique Ondulatoire (en particulier la diffraction de Fresnel pour une ouverture circulaire !) cherchons la fonction génératrice fonctionnelle des fonctions de Bessel de première espèce !

Théorème 6.26. La fonction génératrice de la suite de fonctions de Bessel de première espèce, d'ordre entier, est :

$$G(x,t)=e^{(x/2)(t-1/t)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)t^n \qquad (6.4.716)$$

Démonstration 6.26.1. Pour obtenir une expression pour $J_n(x)$, nous utilisons la série de Maclaurin pour e^x pour obtenir :

$$\begin{aligned}G(x,t)=e^{xt/2}e^{-x/(2t)}&=\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^r t^r\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\left(\frac{x}{2t}\right)^s=\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^r t^r\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^s t^{-s}\\&=\sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^2}{r!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{r+s}t^{r-s}\end{aligned} \qquad (6.4.717)$$

Faisons maintenant le changement de variable : $n=r-s$.

Donc l'expression dans la somme devient :

$$\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}t^n \qquad (6.4.718)$$

Alors il est évident que comme l'intervalle de r et s est $]-\infty,+\infty[$ nous avons pour l'intervalle de n aussi : $]-\infty,+\infty[$. La première somme est donc facile à déterminer :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}t^n \qquad (6.4.719)$$

Mais comme nous pouvons le voir dans l'expression de la somme ci-dessus, nous ne nous débarrassons pas de la variable de sommation s. Il y a donc bien évidemment une seconde somme manquante sur la variable s ! L'intervalle de sommation pour s n'est pas évident à première vue...

Ce qui est sûr, c'est que s est toujours dans l'intervalle $[0,+\infty]$ (valeurs positives) si nous regardons le terme $s!$ au dénominateur. Mais ce qui fait problème, c'est la borne inférieure de la somme. Donc, si nous regardons attentivement la relation dans la somme ci-dessus, nous avons

En cours de traduction de l'anglais

un terme $(n+s)!$. Évidemment $n+s$ ne doit jamais être négatif ! Il vient donc que si $n<0$, nous devons avoir $n+s\geq 0$, c'est-à-dire quand $n<0$, s doit commencer à $-n$. Finalement :

$$G(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=\max(0,-n)}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}t^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{s=\max(0,-n)}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\right]t^n \quad (6.4.720)$$

C'est-à-dire :

$$G(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)t^n \quad (6.4.721)$$

où les J_n sont la fonction de Bessel de première espèce.

■ Q.E.D.

Dès lors, pour $n\geq 0$:

$$J_n(x)=\sum_{s=\max(0,-n)}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \quad (6.4.722)$$

Et pour $n<0$:

$$J_{-n}(x)=\sum_{s=n}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{((-n)+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{(-n)+2s}=\sum_{s=n}^{+\infty}\frac{(-1)^s}{(s-n)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s} \quad (6.4.723)$$

En utilisant un décalage d'indice, nous obtenons :

$$J_{-n}(x)=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{s+n}}{((s+n)-n)!(s+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2(s+n)}=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{s+n}}{s!(s+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}=(-1)^nJ_n(x) \quad (6.4.724)$$

En cours de traduction de l' anglais

~95 %
44 votes, 64.09%

6.5. Calcul Vectoriel

Le calcul vectoriel ou "analyse vectorielle" est une branche des mathématiques qui étudie les champs de scalaires et de vecteurs suffisamment réguliers des espaces euclidiens (voir définition plus loin).

L'importance du calcul vectoriel provient de son utilisation intensive en physique et dans les sciences de l'ingénieur. C'est de ce point de vue que nous le présenterons, et c'est pourquoi nous nous limiterons le plus souvent au cas de l'espace usuel à trois dimensions. Dans ce cadre, un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur (à trois composantes réelles), tandis qu'un champ de scalaires y associe un réel.

Il existe une quantité phénoménale de séries et de théories à leur sujet, mais on citera surtout les séries de Taylor (utilisées presque partout dans les sciences appliquées), les séries de Fourier (théorie du signal, statistique, mécanique ondulatoire ou physique quantique) et les séries de Bessel (très importantes en physique nucléaire !) que nous ferons une brève étude ici et qui se poursuivra dans la section d'Analyse Fonctionnelle.

> ✍**Exemple :**
>
> Imaginons par exemple l'eau d'un lac. La donnée de sa température en chaque point forme un champ de scalaires, celle de sa vitesse en chaque point, un champ de vecteurs (voir définition plus loin).

Des notions physiques telles que la force ou la vitesse sont caractérisées par une direction, un sens et une intensité. Ce triple caractère est mis en évidence par les flèches. Celles-ci sont à l'origine de la notion de vecteur et en constituent l'exemple le plus suggestif. Bien que leur nature soit essentiellement géométrique, c'est leur aptitude à se lier les unes aux autres, donc leur comportement algébrique, qui retiendra principalement notre attention. Partagé en classes d'équivalence l'ensemble qu'elles forment représente le modèle classique d'un "espace vectoriel". Un de nos premiers objectifs est la description détaillée de ce modèle.

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Avant de lire ce qui va suivre, nous conseillons au lecteur d'avoir au moins parcouru en diagonale le chapitre traitant de la théorie des ensembles dans la section d'arithmétique. Nous y définissons ce qu'est un "espace vectoriel" en utilisant les outils de la théorie des ensembles. Ce concept bien que non absolument indispensable vaut la peine quand même de s'y attarder pour voir comment deux domaines des mathématiques s'imbriquent et aussi histoire... d'aborder les choses au moins un peu rigoureusement.

R2. L'analyse vectorielle contient beaucoup de termes et de définitions qu'il faut apprendre par coeur. Ce travail est pénible mais malheureusement nécessaire...

6.5.1 Notion de Flèche

Définition (#6.5.222) : Nous notons U l'espace ordinaire de la géométrie élémentaire et $P, Q, \ldots$ ses points. Nous appellerons "flèche" tout segment de ligne orienté (dans l'espace). La flèche d'origine P (point d'origine) et d'extrémité Q (point terminal) sera notée $\overrightarrow{PQ}$ ou abrégée par une seule lettre (latine ou grecque) choisie arbitrairement comme par exemple : $\overrightarrow{F}$ ou $\vec{F}$.

Remarque

Dans la norme ISO 80000-2 :2009 il est autorisé de représenter les vecteurs par une lettre en gras.

Nous considérerons comme évident que toute flèche est caractérisée par sa direction, son sens (car pour une direction donnée elle peut pointer dans deux sens), son intensité ou grandeur (longueur) et ainsi que son origine.

Dans le calcul vectoriel (ou multivariable), nous traiterons des fonctions de deux ou trois variables (généralement x, y ou x, y, z, respectivement). Le graphe de la flèche de coordonnées (x, y), se trouve dans l'espace euclidien, qui dans le système de coordonnées cartésien se compose de tous les doublets ordonnés de nombres réels (a, b). Puisque l'espace euclidien peut être tridimensionnel (et plus ou moins sûr !), nous le dénotons par $\mathbb{R}^3$.

Le graphe de la flèche est constitué des points (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$. Le système de coordonnées tridimensionnel de l'espace euclidien ne peut être représenté sur une surface plane, telle que cette page ou un tableau noir, qu'en donnant l'illusion de trois dimensions, de la manière illustrée dans la figure ci-dessous :

En cours de traduction de l'anglais

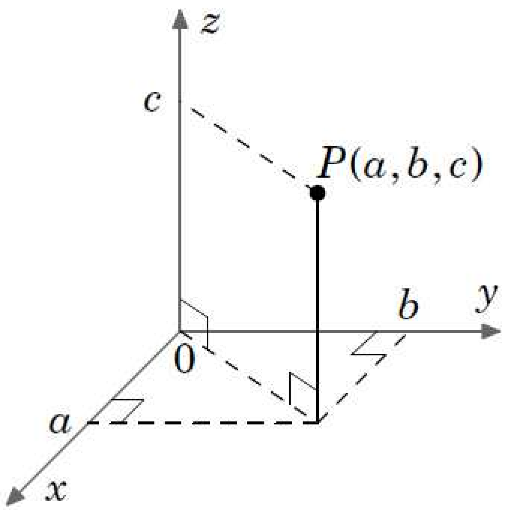


FIG. 6.88 – Exemple d'un flèche dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$

L'espace euclidien a trois axes de coordonnées mutuellement perpendiculaires (x, y et z) et trois plans de coordonnées mutuellement perpendiculaires : le plan xy, le plan yz et le plan xz :

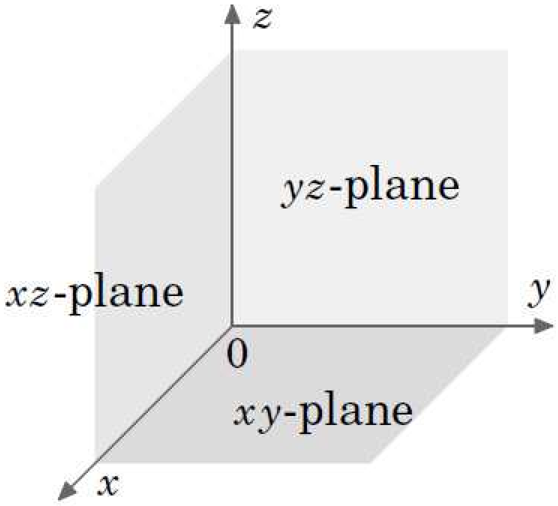


FIG. 6.89 – Plans mutuellement perpendiculaires dans $\mathbb{R}^3$

En cours de traduction de l'anglais

Le système de coordonnées illustré ci-dessus est parfois stupidement appelé "système de coordonnées droitier", car il est possible, à l'aide de la main droite, de pointer l'index dans le sens positif de l'axe x, le majeur dans le sens positif de l'axe y et le pouce dans le sens positif de l'axe z, comme ci-dessous :

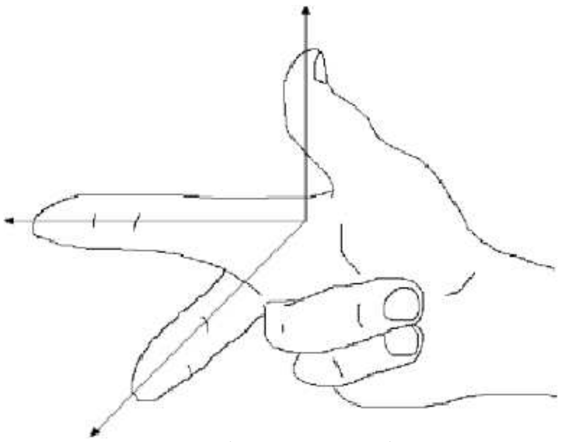


FIG. 6.90 – Système de coordonnées droitier

6.5.2 Ensemble de Vecteurs

Definitions (#6.5.223) :

D1. Nous disons que deux flèches sont des "flèches équivalentes" si elles ont la même direction, le même sens et la même intensité.

D2. Nous disons que deux flèches sont des "flèches colinéaires" si elles ont seulement la même direction.

Partageons l'ensemble des flèches en classes d'équivalence : deux flèches appartiennent à une même classe si et seulement si elles sont équivalentes.

Dès lors :

Définitions (#6.5.224) :

D1. Chaque classe d'équivalence de flèches dont le point origine et le point terminal sont distincts est un "vecteur"" ou plutôt un "vecteur libre" car son origine n'est pas prise en compte (si son origine est bien définie, alors nous avons un "vecteur borné").

D2. Les flèches dégénérées (c'est-à-dire de la forme $\overrightarrow{PP}$) sont nommées "vecteur zéro" et notées $\vec{0}$ lorsqu'elles ont une direction indéfinie et orientation et intensité nulle (origine et point terminal ne sont pas distincts).

L'ensemble des vecteurs sera lui désigné par $\mathbb{V}$. Il faut souligner que les éléments de $\mathbb{V}$ sont des classes de flèches et non pas des flèches individuelles. Il est cependant clair qu'une flèche quelconque suffit à déterminer la classe à laquelle elle appartient et il est donc naturel de l'appeler "représentant de la classe"" du vecteur.

Traçons le représentant d'un vecteur $\vec{y}$ à partir de l'extrémité d'un représentant d'un vecteur $\vec{x}$. La flèche dont l'origine est celle du représentant de $\vec{x}$ et l'extrémité celle du représentant

En cours de traduction de l' anglais

de $\vec{y}$ détermine un vecteur que nous noterons : $\vec{x}+\vec{y}$. L'opération qui associe à tout couple de vecteurs leur somme s'appelle "addition vectorielle"".

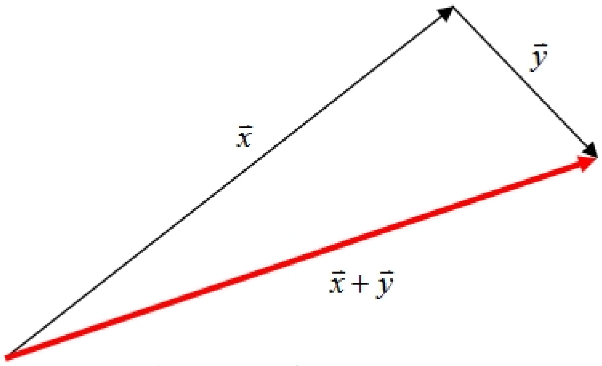


FIG. 6.91 – Exemple d'une somme de deux vecteurs

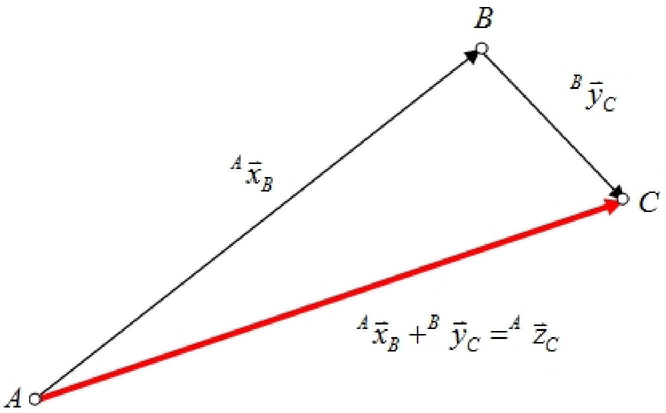


FIG. 6.92 – Exemple de somme de deux vecteurs avec notation d'usage en robotique

En cours de rédaction anglais

À l'aide d'une figure, il est facile de montrer que l'opération d'addition vectorielle est associative et commutative, autrement dit, que :

$$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) \quad (6.5.1)$$

et :

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x} \quad (6.5.2)$$

Il est en outre évident que le vecteur nul $\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition vectorielle, autrement dit, que :

$$\vec{x}+\vec{0}=\vec{x} \quad \text{et} \quad \vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0} \quad (6.5.3)$$

où $-\vec{x}$ désigne le vecteur opposé de $\vec{x}$, c'est-à-dire le vecteur dont les représentants ont la même direction et la même intensité que ceux de $\vec{x}$, mais le sens opposé.

Définitions (#6.5.225) :

D1. Deux vecteurs dont la somme est nulle sont alors nommés "vecteurs opposés" puisque la seule chose qui les différencie est leur orientation...

D2. Il s'ensuit que si deux vecteurs ou plus ont la même direction, la même intensité et la même orientation alors nous disons qu'ils sont des "vecteurs égaux".

L'opération inverse de l'addition vectorielle est la soustraction vectorielle. Soustraire un vecteur revient à additionner le vecteur opposé.

Remarques

R1. L'addition s'étend, par récurrence, au cas d'une famille finie quelconque de vecteurs. En vertu de l'associativité, ces additions successives peuvent être effectuées dans n'importe quel ordre, ce qui justifie l'écriture sans parenthèses.

R2. La multiplication entre deux vecteurs est un concept qui n'existe pas. Par contre, comme nous le verrons un peu plus loin, nous pouvons multiplier les vecteurs par certaines propriétés d'autres vecteurs que nous appelons la "norme" et encore d'autres petites choses...

6.5.2.1 Pseudo-Vecteurs

En physique, lors de l'énoncé de ce que nous appelons le "principe de Curie"" (voir section Principes page ??), les physiciens font mention de ce qu'ils appellent des "pseudo-vecteurs". Il s'agit du vocabulaire simple pour parler de quelque chose de tout aussi trivial mais fondamentalement peu de gens en font vraiment usage. Mais il peut quand même être utile de présenter de quoi il s'agit.

Au fait, vecteurs et pseudo-vecteurs se transforment de la même manière dans une rotation ou une translation (nous verrons plus tard dans la section d'Algèbre Linéaire comment effectuer mathématiquement ces transformations). Il n'en est pas de même dans la symétrie par rapport à un plan ou à un point. Dans ces transformations nous avons par définition les propriétés suivantes :

P1. Un vecteur est transformé en son symétrique.

P2. Un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé de son symétrique.

Voici une figure avec des exemples types (le choix des lettres représentant les vecteurs n'est pas dû au hasard; elles sont un clin d'oeil aux propriétés des champs électriques et magnétiques étudiés dans la section d'Électromagnétisme du présent livre) :

En cours de traduction de l' anglais

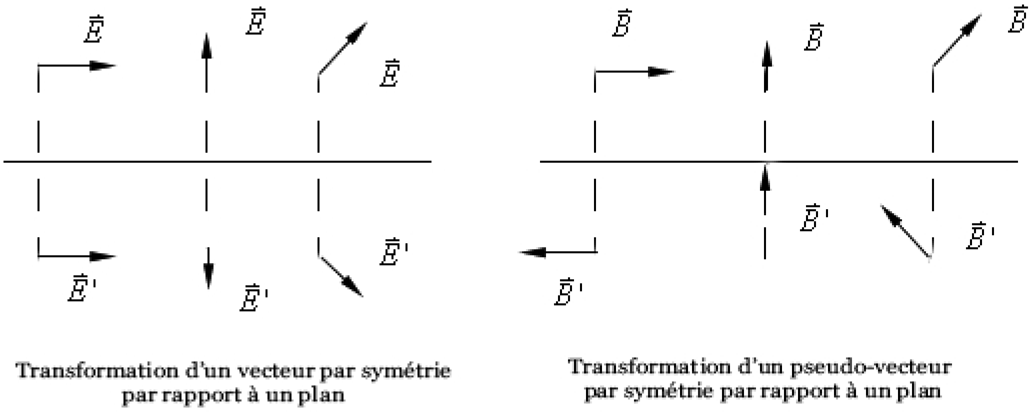


FIG. 6.93 – Différences de transformations entre un vecteur et un pseudo-vecteur

Un exemple pratique bien connu est un pseudo-vecteur que nous étudierons en détail beaucoup plus loin et résultant d'une opération nommée "produit vectoriel" (voir page 1808) :

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix} \tag{6.5.4}$$

Et pour voir pourquoi le résultat est un pseudo-vecteur, considérons le cas simple particulier :

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{6.5.5}$$

Maintenant, si nous effectuons une opération symétrique du plan XOZ, nous obtenons :

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \tag{6.5.6}$$

Donc comme nous pouvons le voir le vecteur résultant du produit vectoriel est un pseudo-vecteur car sous transformation du plan son orientation change !

Un vecteur résultant d'une opération mathématique de symétrie qui ne change pas son orientation est nommé un "vecteur polaire" mais en fait presque tout le monde dit simplement "vecteur".

Maintenant que nous avons une idée de ce que sont les vecteurs, nous pouvons commencer à effectuer certaines des opérations algébriques habituelles sur eux et c'est ce que nous appelons "l'algèbre vectorielle".

En cours de traduction de l' anglais

6.5.2.2 Vecteur Normal

Le "vecteur normal", noté $\vec{N}$ ou $\vec{n}$, à une surface est un vecteur qui est perpendiculaire à une surface ou une courbe en un point donné. Lorsque des vecteurs normaux sont considérés sur des surfaces fermées ou des courbes fermées, la normale pointant vers l'intérieur (pointant vers l'intérieur de la surface) et la normale pointant vers l'extérieur sont généralement distinguées.

Le vecteur unitaire obtenu en normalisant le vecteur normal (c'est-à-dire en divisant un vecteur normal non nul par sa norme vectorielle) est le "vecteur normal unitaire"[12].

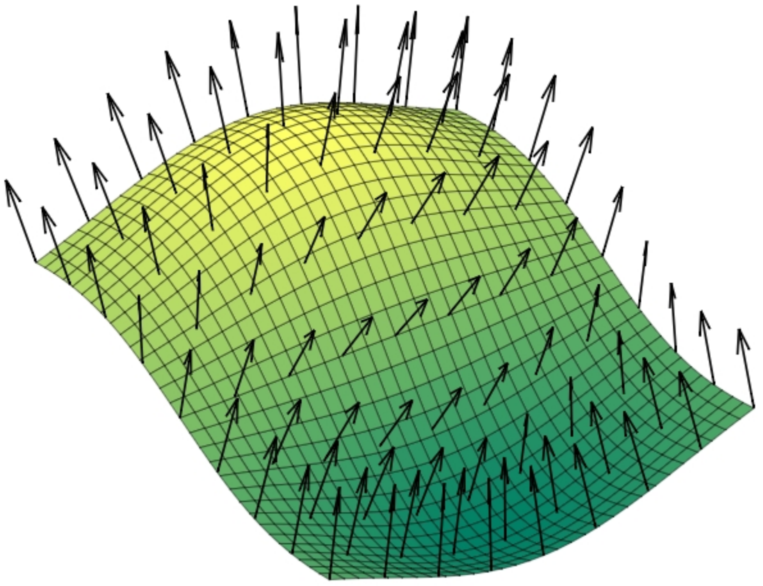


FIG. 6.94 – **Un champ vectoriel de normales à une surface**

En cours de l'anglais

Dans le cas tridimensionnel, une "surface normale", ou simplement une "normale", à une surface en un point P est un vecteur perpendiculaire au plan tangent à cette surface en P. Le mot "normale" est également utilisé comme adjectif : une ligne *normale* à un plan, la composante *normale* d'une force, le vecteur *normal*, etc.

Nous verrons et prouverons en détail dans cette section et bien d'autres, comment calculer explicitement différents vecteurs normaux à des courbes et des surfaces.

Par exemple que le vecteur normal à deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donné par le produit vectoriel (voir plus bas page 1808) :

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad (6.5.7)$$

Ou la normale à une courbe paramétrique en Géométrie Différentielle à la page **??** est donnée par :

$$\vec{N} = R\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \qquad (6.5.8)$$

[12]Il faut veiller à ne pas confondre les termes "norme de vecteur" (longueur du vecteur), "vecteur normal" (vecteur perpendiculaire) et "vecteur normalisé" (vecteur de longueur unitaire)

Ou le vecteur normal d'un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ dans la section Géométrie Analytique à la page 2779 est donnée par :

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad (6.5.9)$$

Ou le gradient perpendiculaire aux isolignes d'une surface donnée par la fonction cartésienne $f(x,y,z)=0$ de classe de continuité $\mathcal{C}^1$ comme nous le verrons plus bas à la page 1844 :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\\dfrac{\partial f}{\partial y}\\\dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} \quad (6.5.10)$$

et ainsi de suite...

6.5.2.3 Multiplication par un scalaire

L'expression vectorielle $\alpha\cdot\vec{x}$ nommée "produit vectoriel $\vec{x}$ par le scalaire α" est définie comme suit :

Definition (#6.5.226) : Prenons une flèche représentative de $\vec{x}$ et construisons un flèche de même direction, de même sens ou de sens opposé, suivant que α est positif ou négatif, et d'intensité $|\,\alpha\,|$ (valeur absolue de α) fois l'intensité de la flèche initiale. La flèche ainsi obtenue est un représentant du vecteur :

$$\alpha\cdot\vec{x} \quad (6.5.11)$$

Si nous posons $\alpha=0$ ou $\vec{x}=0$, nous écrivons alors :

$$\alpha\cdot\vec{x}=\vec{0} \quad (6.5.12)$$

L'opération qui consiste à effectuer le produit d'un scalaire par un vecteur est appelé en général "multiplication par un scalaire".

Nous vérifions aisément que la multiplication par un scalaire est associative et distributive par rapport à l'addition numérique vectorielle, autrement dit que :

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{x})&=(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{x}\\(\alpha+\beta)\cdot\vec{x}&=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{x}\end{aligned} \quad (6.5.13)$$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul ne change pas sa direction si le scalaire est positif mais si le scalaire est négatif le vecteur aura toujours la même direction mais son orientation sera opposée.

De cette définition, nous avons que deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles (notés par $\vec{v}\,||\,\vec{w}$)) si l'un est un scalaire multiple de l'autre. Vous pouvez considérer la multiplication scalaire d'un

En cours de traduction de l' anglais

vecteur comme un étirement ou une réduction du vecteur, et comme un retournement du vecteur dans la direction opposée si le scalaire est un nombre négatif.

Voyons un exemple concret mondialement connu (du moins par ceux ayant un minimum d'éducation...) d'utilisation de vecteurs avec des scalaires (probablement aussi l'exemple le plus simple) :

6.5.2.3.1 Règle de trois

Revenons un peu sur la "règle de trois"" (appelée parfois "règle des rapports et proportions" ou encore "méthode de réduction à l'unité") souvent définie dans les petites classes de manière intuitive mais sans démonstration digne de ce nom. Cette règle est certainement l'algorithme le plus usité de par le monde qui sert à identifier un quatrième nombre quand trois sont donnés et que les quatre nombres sont linéairement dépendants.

La règle de trois est dérivée sous deux versions :

V1. Simple et directe si les grandeurs sont directement proportionnelles

V2. Simple et inverse si les grandeurs sont inversement proportionnelles

et lorsque deux variables X et Y sont proportionnelles nous le notons :

$$X \propto Y \tag{6.5.14}$$

Théorème 6.27. Supposons maintenant que X puisse prendre les valeurs x_1, x_2. Y prendra les valeurs linéairement dépendantes y_1, y_2 alors le rapport proportionnel suivant s'applique :

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = c^{te}} \tag{6.5.15}$$

et est appelé "rapport simple et direct".

Démonstration 6.27.1. Soient deux vecteurs colinéaires $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2)$ et donc proportionnels à un facteur λ près tels que :

$$\vec{x} = \lambda \vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \tag{6.5.16}$$

■ Q.E.D.

Remarque

Si ce rapport n'est pas égal, alors il faut passer à l'utilisation d'autres outils tels que la régression et in extenso l'extrapolation.

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

E1. À Lausanne (Suisse) les sacs poubelles sont taxés et les tarifs suivants sont appliqués : un sac de 17 [L] est 1.- et celui de 110 [L] est 3.80.-. Rapporté à 17 [L] le prix du litre de déchet du sac de 110 [L] est alors :

$$\frac{3.80}{110}\cdot 17 \cong 0.58.\text{-} \tag{6.5.17}$$

Soit environ 60% du prix du sac de 17 [L] (ensuite allez chercher une explication... ? ? ?).

E2. Si la Terre a un rayon d'environ $6'371$ kilomètres et la Lune un rayon d'environ $1'737.4$ kilomètres et que les deux sont actuellement distants en moyenne d'environ $384'400$ kilomètres, quelle serait la distance Terre-Lune et la taille de la Lune si la Terre était réduite au rayon d'un ballon de football de 11.25 centimètres.

Le rayon de la Lune serait donc (tout a été converti en centimètres) :

$$\frac{11.25}{6,371\cdot 10^6}\cdot 1,737.4\cdot 10^6 \cong 3[\text{cm}]$$

et la distance Terre-Lune deviendra :

$$\frac{11.25}{6,371\cdot 10^6}\cdot 384,400\cdot 10^6 \cong 678[\text{cm}]$$

Théorème 6.28. Le rapport proportionnel suivant :

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}=c^{te}} \tag{6.5.18}$$

est appelé "rapport simple et inverse"

Démonstration 6.28.1. Soient deux vecteurs colinéaires $\vec{x}=(x_1,x_2),\vec{y}=(y_1,y_2)$ et donc proportionnels à un facteur près λ tel que :

$$\vec{x}=\lambda\vec{y}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\dfrac{1}{y_1}\\\dfrac{1}{y_2}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\lambda=y_1x_1=y_2x_2\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1} \tag{6.5.19}$$

Ceci est souvent noté dans les petites classes ainsi :

$$\begin{aligned}x_1\;(a)&\longrightarrow y_1\;(b)\\x_2\;(c)&\longrightarrow y_2\;(d)\end{aligned} \tag{6.5.20}$$

Dès lors :

$$y_2=\frac{y_1\cdot x_2}{x_1}\Leftrightarrow d=\frac{b\cdot c}{a} \tag{6.5.21}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction Opera Magistris

Remarque

Si ce rapport n'est pas égal (donc : non inverse proportionnel), alors il faut passer à d'autres outils comme le rapport simple et direct, ou les techniques de régression et verbatim : extrapolation.

En gros, il suffit que nous connaissions trois variables sur les quatre pour résoudre cette simple équation du premier degré.

Les conversions de monnaies ou d'unités de mesure se font à l'aide de la règle de trois simple directe ou indirecte. Les calculs de parités (calcul prévisionnel fait par un importateur d'un certain pays ayant ses propres unités de mesures et de monnaie, qui recherche parmi plusieurs offres étrangères - dans des systèmes d'unités de mesures et de monnaies qui diffèrent de l'importateur - laquelle est la plus avantageuse ou inversement) se font également avec la règle de trois.

Dans de tels calculs, les agents du marché des changes ont remarqué que la plupart du temps les valeurs des ratios étaient proches de l'unité. Ils ont donc été naturellement amenés à définir le "pourcentage" comme la proportion d'une grandeur par rapport à une autre, mesurée à la centaine (du moins la majorité du temps...). Rappelez-vous (voir la section Nombres page 233) :

- Soit un nombre $x \in \mathbb{R}$ alors sa notation en pourcentage sera :

$$x\% = x \cdot 100 \tag{6.5.22}$$

- Soit un nombre $x \in \mathbb{R}$ alors sa notation en pour-mille sera :

$$x‰ = x \cdot 1,000 \tag{6.5.23}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.5.3 Espaces Vectoriels

Définition (#6.5.227) : Nous appelons "espace vectoriel" un ensemble E d'éléments désignés par $\vec{x}, \vec{y}, \ldots$ et appelés "vecteurs", muni d'une "structure algébrique vectorielle" définie par la donnée de l'addition (soustraction) vectorielle et la multiplication par un scalaire. Ces deux opérations satisfaisant les lois d'associativité, de commutativité, de distributivité, d'élément neutre et d'opposé comme nous l'avons déjà vu dans la section de Théorie des Ensembles.

Pour plus d'informations sur ce qu'est un espace vectoriel dans le sens "ensembliste" le lecteur devra se reporter à la section de Théorie des Ensembles page 429 où ce concept est défini avec plus de rigueur (il serait redondant de le répéter ici et de toute façon ce n'est pas crucial car les propriétés sont relativement intuitives).

Pour tout entier positif n, a_i désignera l'ensemble des n-uplets de nombres disposés en colonne :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{6.5.24}$$

ou comme un vecteur ligne (vecteur colonne qui a été **T**ransposé) :

$$\vec{v}^T = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n) \quad (6.5.25)$$

et $\mathbb{R}^n$ fournit clairement une structure d'espace vectoriel. Les vecteurs de cet espace seront nommés comme nous le savons déjà : "vecteurs". Ils sont souvent désignés plus brièvement par :

$$\vec{v} = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \quad (6.5.26)$$

ou encore plus brièvement par :

$$(a_i) \quad (6.5.27)$$

Le nombre a_i est parfois nommé "terme" ou "composante d'indice i" de (a_i).

Maintenant, sauf indication contraire, les vecteurs seront toujours les éléments d'un espace vectoriel E.

6.5.3.1 Combinaisons Linéaires

Définition (#6.5.228) : Nous appelons "combinaison linéaire" des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ tout vecteur de la forme :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n \quad (6.5.28)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres appelés "coefficients de la combinaison linéaire".

Lorsqu'un vecteur peut être exprimé de la manière ci-dessus, nous disons que le vecteur est dans sa "forme de composantes".

Le vecteur nul $\vec{0}$ est la combinaison linéaire de $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n$ avec tous les coefficients égaux à zéro. Nous parlons dès lors de "combinaison linéaire triviale".

Définition (#6.5.229) : Nous appelons "combinaison convexe", toute combinaison linéaire dont les coefficients sont non négatifs et de somme égale à 1. L'ensemble des combinaisons convexes de deux points P et Q d'un espace ponctuel P_0 (ayant une origine) est le segment de droite P et Q, noté traditionnellement $\overline{PQ}$. Pour s'en rendre compte, il suffit d'écrire :

$$\alpha P + (1 - \alpha Q) = Q + \alpha(P - Q) \quad (6.5.29)$$

et de faire varier α de 0 à 1 et de constater que tous les points du segment sont ainsi obtenus.

Si le vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n$ et chacun de ces vecteurs $\vec{x}_i$ est une combinaison linéaire d'un ensemble de vecteurs indépendants $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k$, alors il pourrait être évident que $\vec{v}$ est aussi une combinaison linéaire de $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_k$.

Définition (#6.5.230) : Un nombre n de vecteurs non nuls sont "coplanaires" si l'un d'eux est une combinaison linéaire des autres. Par exemple, trois vecteurs sont coplanaires si l'un d'eux est dans le plan défini par les deux autres.

En cours de traduction de l' anglais

6.5.3.2 Sous-espaces vectoriels

Définition (#6.5.231) : Nous appelons "sous-espace vectoriel V de E" tout sous-ensemble de E qui est lui-même un espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies dans E.

Un sous-espace vectoriel V, en tant qu'espace vectoriel, ne peut être vide puisqu'il comprend au moins un vecteur, à savoir son vecteur nul, celui-ci étant d'ailleurs forcément le vecteur nul de E. En outre, en même temps que les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ (s'il en contient d'autres que le vecteur nul), il comprend également toutes leurs combinaisons linéaires $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$.

Inversement, nous voyons aussitôt que tout sous-ensemble jouissant de ces propriétés est un sous-espace vectoriel. Nous avons ainsi établi la proposition suivante :

Un sous ensemble V de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si V est non vide et $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ appartient à V pour tout paire de vecteurs de V et tout paire $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$.

6.5.3.3 Famille Génératrices

Il en découle que si nous avons une famille de vecteurs $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k$ peut être un sous-espace vectoriel V de E, plus précisément le plus petit sous-espace vectoriel de E comprenant $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k$.

Les vecteurs $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k$ qui satisfont à la condition ci-dessus sont appelés "générateurs" de V et la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k)$ est appelée "famille génératrice" de V. Nous disons aussi que ces vecteurs ou cette famille "engendrent V".

Remarque

Le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est formé de tous les multiples de ce vecteur. Nous appelons un tel sous-espace "droite vectorielle". Un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs non multiples l'un de l'autre est appelé "plan vectoriel".

En cours de traduction de l' anglais

6.5.3.4 Dépendances et Indépendances linéaires

Ce qui va suivre est très important en physique : nous conseillons donc au futur physicien ou ingénieur de prendre vraiment le temps de bien lire les développements.

Si $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ sont trois vecteurs de E^3 dont les représentants ne sont pas parallèles à un même plan (par convention une flèche d'intensité nulle est parallèle à tout plan), alors tout vecteur de peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3 \tag{6.5.30}$$

où $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ appartiennent typiquement à $\mathbb{R}$.

Par exemple, le vecteur $\vec{x}$ ci-dessus (mais peut également être obtenu pour différentes valeurs de α_i !) :

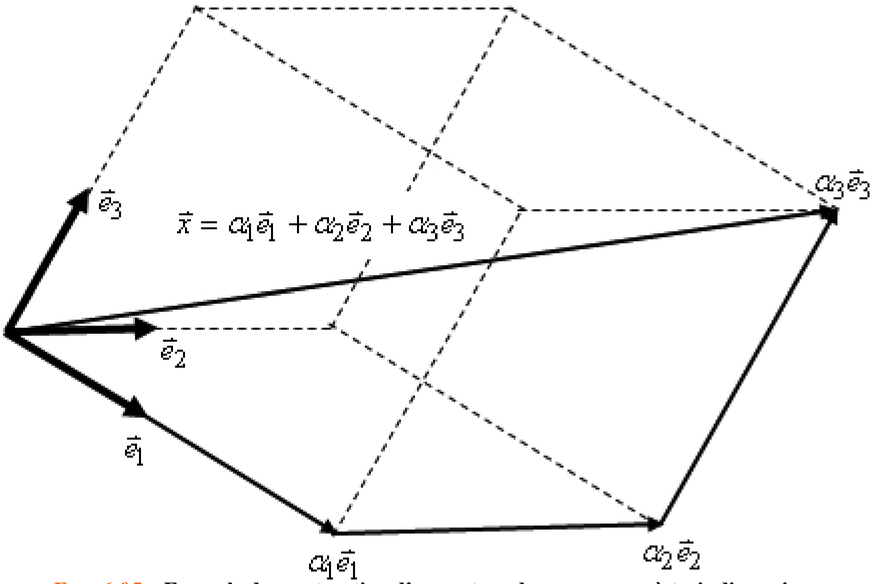


FIG. 6.95 – **Exemple de construction d'un vecteur dans un espace à trois dimensions**

En cours de traduction de l'anglais

En particulier, la seule possibilité d'obtenir le vecteur nul $\vec{0}$ comme combinaison linéaire $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de est d'attribuer la valeur triviale 0 aux coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Réciproquement, si pour trois vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de E^3 la relation :

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0} \tag{6.5.31}$$

implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, aucun des vecteurs ne peut être combinaison linéaire des deux autres, autrement dit, leurs représentants ne sont pas parallèles à un même plan.

Sur la base de ces observations, nous allons étendre la notion d'absence de parallélisme à un même plan au cas d'un nombre quelconque de vecteurs d'un espace vectoriel E.

Nous disons que les vecteur $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ sont "linéairement indépendants" si la relation :

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{e}_k = \vec{0} \tag{6.5.32}$$

implique nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, autrement dit, si la combinaison linéaire triviale est la seule combinaison linéaire de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ qui soit nulle. Dans le cas contraire, nous disons que les vecteurs sont "linéairement dépendants".

Si l'attention est fixée sur la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ plutôt que sur les termes dont elle est constituée, nous disons que celle-ci est une "famille libre" ou "famille liée" suivant que les vecteurs sont linéairement indépendants ou dépendants.

6.5.3.5 Base d'un espace vectoriel

Définition (#6.5.232) : Nous disons qu'une famille finie de vecteurs est une base de E si et seulement si :

1. Elle est libre.

2. Elle engendre E.

D'après cette définition, toute famille libre $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ est une base du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

✍**Exemple :**

Si nous considérons $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel (voir section Théorie des Ensembles page 429), alors puisque tous les éléments de $\mathbb{C}$ s'écrivent $a+ib$, les éléments qui engendrent $\mathbb{C}$ sont 1 et i (les deux sont libres).

Une base de $\mathbb{C}$ (qui est de dimension 2) comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est donc la famille finie libre $\{1, \mathrm{i}\}$.

Pour qu'une famille de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ soit une base de E, il faut et il suffit donc que tout vecteur $\vec{x}$ de E s'exprime de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{6.5.33}$$

La relation ci-dessus est une décomposition de $\vec{x}$ suivant la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ où les coefficients sont les composantes de $\vec{x}$ dans cette base. En présence d'une base, tout vecteur est donc entièrement déterminé par ses composantes.

Proposition :

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les composantes de $\vec{x}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ celles de $\vec{y}$, alors :

$$x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n \tag{6.5.34}$$

sont les composantes de $\vec{x}+\vec{y}$.

En d'autres termes, additionner deux vecteurs revient à additionner leurs composantes et multiplier un vecteur par un scalaire revient évidemment à multiplier ses composantes par ce même scalaire. La base est donc un outil important car elle permet d'effectuer les opérations sur les vecteurs au moyen d'opérations sur les nombres.

En cours de traduction anglais

✍**Exemple :**

Les vecteurs-colonnes suivants de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\1\end{pmatrix} \tag{6.5.35}$$

forment un base que nous appelons "base canonique" de $\mathbb{R}^n$ (nous travaillerons dans les espaces complexes dans un autre chapitre de livre).

Remarque

Dans le cadre de l'espace à trois dimensions, les bases sont très souvent assimilées à un trièdre (effectivement si vous reliez les extrémités des trois vecteurs par des traits vous obtiendrez un trièdre imaginaire).

6.5.3.6 Angles Directeurs

Il est clair qu'un seul angle ne peut décrire la direction d'un vecteur dans l'espace. Nous utilisons alors la notion de ""angles directeurs". Il s'agit de mesurer l'angle du vecteur $\vec{U}$ par rapport à chacun des axes positifs de la base :

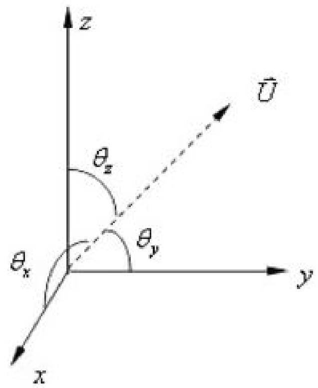


FIG. 6.96 – **Représentation des agnles directeurs**

si :

$$\vec{U}=(u_1,u_2,u_3)=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k} \tag{6.5.36}$$

Alors par définition :

$$\begin{aligned}u_1=x=\|\vec{U}\|\cos(\theta_x)\\u_2=y=\|\vec{U}\|\cos(\theta_y)\\u_3=z=\|\vec{U}\|\cos(\theta_z)\end{aligned} \tag{6.5.37}$$

En cours de traduction de ... is

Les valeurs

$$\begin{aligned}\cos(\theta_x)&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos(\theta_y)&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos(\theta_z)&=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned} \tag{6.5.38}$$

sont appelées les "cosinus directeurs" de $\vec{x}$.

Les trois angles mentionnés ne sont pas complètement indépendants. En effet, deux suffisent pour déterminer complètement la direction d'un vecteur dans l'espace, le troisième pouvant se déduire de la relation suivante (obtenue à partir du calcul de la norme du vecteur, concept que nous verrons un peu plus loin) :

$$\cos^2(\theta_x)+\cos^2(\theta_y)+\cos^2(\theta_z)=1 \tag{6.5.39}$$

Dès lors, les cosinus directeurs sont les composantes scalaires d'un vecteur de norme unitaire $\vec{u}$ ayant la même direction que $\vec{U}$:

$$\frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}=\vec{u}=\big(\cos(\theta_x),\cos(\theta_y),\cos(\theta_z)\big) \tag{6.5.40}$$

6.5.3.7 Dimensions d'un espace vectoriel

Nous disons que E est de "dimension finie" s'il est engendré par une famille finie de vecteurs. Dans le cas contraire, nous disons que E est de "dimension infinie" (nous aborderons ce type d'espaces dans une autre section). Tout espace vectoriel de dimension finie et non réduit au vecteur nul admet une base. En fait, de toute famille génératrice d'un tel espace nous pouvons extraire une base.

La dimension d'un espace vectoriel est notée :

$$\dim(E) \tag{6.5.41}$$

Tout espace vectoriel E de dimension finie non nulle n peut être mis en correspondance biunivoque (c'est-à-dire en bijection) avec $\mathbb{R}^n$. Il suffit de choisir une base de E et de faire correspondre à tout vecteur $\vec{x}$ de E le vecteur-colonne dont les termes sont les composantes de $\vec{x}$ dans la base choisie (c'est du blabla de mathématicien mais ce sera utile quand nous aborderons des espaces plus complexes) :

$$\begin{array}{cc} E & \mathbb{R}^n \\ \vec{x}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\Leftrightarrow & \begin{pmatrix}0\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{pmatrix}\end{array} \tag{6.5.42}$$

En cours de traduction de l'anglais

Cette correspondance conserve les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire que nous avons déjà vues ; en d'autres termes, elle permet d'effectuer les opérations sur les vecteurs par des opérations sur les nombres.

Remarque

Nous disons alors que E et $\mathbb{R}^n$ sont "isomorphes" ou que la correspondance est un isomorphisme (voir section Théorie des Ensembles page 441).

6.5.3.8 Prolongement d'une famille libre

Théorème 6.29. Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ une famille libre et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$ une famille génératrice de E. Si $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ n'est pas une base de E, nous pouvons extraire une sous-famille

$$(\vec{v}_{i1}, \vec{v}_{i2}, \ldots, \vec{v}_{il})$$

de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$ de telle manière que la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \vec{v}_{i1}, \vec{v}_{i2}, \ldots, \vec{v}_{il})$ soit une base de E.

Remarque

Un tel théorème a son utilité lors de passage d'espace mathématique ayant des propriétés données à un autre espace ayant des propriétés mathématiques différentes.

Démonstration 6.29.1. Nous supposons qu'au moins un des vecteurs $\vec{v}_i$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$, sinon $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ engendrerait E et serait donc une base possible de E. Notons ce vecteur $\vec{v}_{i1}$. La famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \vec{v}_{i1})$ est alors une famille libre. En effet, la relation :

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k + \beta_1 \vec{v}_{i1} = \vec{0} \tag{6.5.43}$$

implique alors tout d'abord que $\beta_1 = 0$, autrement $\vec{v}_{i1}$ serait combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$, et ensuite $\alpha_i = 0$ puisque les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ sont linéairement indépendants.

Si la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \vec{v}_{i1})$ engendre E, elle est une base possible de E et le théorème est démontré. Dans le cas contraire, le même raisonnement nous assure l'existence d'un autre vecteur $\vec{v}_{i2}$ .... Si la nouvelle famille en découlant n'est pas une base de E, alors le procédé d'extraction de vecteurs $\vec{v}_i$ of $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$ se poursuit.Lorsqu'il s'arrête, nous aurons obtenu un "prolongement" de $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ en une famille libre engendrant E, c'est-à-dire une base de E.

■ Q.E.D.

Il en retourne un corollaire :

Tout espace vectoriel de dimension finie et non réduit au vecteur nul admet une base. En fait, de toute famille génératrice d'un tel espace, nous pouvons donc extraire une base.

En cours de traduction de l'anglais

6.5.3.9 Rang d'une famille finie

Définition (#6.5.233) : Nous appelons "rang d'une famille" de vecteurs la dimension, notée $\text{rk}(S)$, du sous-espace vectoriel S de E qu'elle engendre.

Théorème 6.30. Le rang d'une famille de vecteurs $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ est inférieur ou égal à k et il est égal à k si et seulement si cette famille est libre.

Démonstration 6.30.1. Écartons d'abord le cas trivial où le rang de la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ est nul. D'après le corollaire vu précédemment, nous pouvons alors extraire de cette famille une base du sous-espace vectoriel qu'elle engendre. Le rang est donc inférieur ou égal à k suivant que $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ est une famille liée ou non.

■ Q.E.D.

6.5.3.10 Sommes directes

Définition (#6.5.234) : Nous disons que la somme $S+T$ de deux sous-espaces vectoriels S et T de E (cas particulier appliqué à un espace de dimensions 2 !) est une "somme directe" si :

$$S \cap T = \left\{\vec{0}\right\} \tag{6.5.44}$$

Dans ce cas, nous la notons :

$$S \oplus T \tag{6.5.45}$$

En d'autres termes, la somme de deux sous-espaces vectoriels S et T de E est directe si la décomposition de tout élément de $S+T$ en somme d'un élément de S et d'un élément de T est unique.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Par exemple, le plan XY, un espace vectoriel bidimensionnel, peut être considéré comme la somme directe de deux espaces vectoriels unidimensionnels, à savoir les axes X et Y. Dans cette somme directe, les axes x et y ne se croisent qu'à l'origine (le vecteur zéro). L'addition est définie par coordonnées, c'est-à-dire :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{6.5.46}$$

qui est identique à l'addition vectorielle.

Ce concept de décomposition trivial va nous être très utile dans certains théorèmes dont le plus important dans ce livre est certainement le théorème spectral (voir section d'Algèbre Linéaire page 1976) qui a des implications importantes en statistiques ! ! !

De la somme directe nous pouvons introduire la notion de "sous-espace complémentaire" appelé encore "sous-espace supplémentaire" (selon les pays...) :

Théorème 6.31. Supposons que E soit de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel S de E, il existe un sous-espace vectoriel T (non unique) de E tel que E soit somme directe de S et T. Nous disons alors que T est un "sous-espace complémentaire" de S dans E.

Démonstration 6.31.1. Écartons d'abord les cas triviaux où $S=\left\{\vec{0}\right\}$ et $S=E$.Le sous-espace vectoriel S admet une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_k)$, où k est inférieur à la dimension n de E. Par le théorème du prolongement d'une famille libre, cette base peut se prolonger en une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_k,\vec{e}_{k+1},\ldots,\vec{e}_n)$ of E. Soit Tle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{e}_{k+1},\ldots,\vec{e}_n)$. Si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque de E, alors $\vec{x}=\vec{s}+\vec{t}$, où $\vec{s}$ est un vecteur de S et $\vec{t}$ un vecteur T. En outre $S\cap T=\left\{\vec{0}\right\}$, car aucun vecteur, excepté le vecteur nul, ne peut être combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k$ et des vecteurs $\vec{e}_{k+1},\ldots,\vec{e}_n$. Nous en concluons donc que :

$$E=S\oplus T \tag{6.5.47}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

6.5.3.11 Espaces affines

En mathématiques, un espace affine $G=\mathrm{A}\mathbb{R}^n$ est une structure géométrique indépendante des notions de distance et de mesure des angles, ne gardant que les propriétés liées au parallélisme et au rapport des longueurs pour les segments de ligne parallèles car leur point d'origine n'est pas $=(0,0)$.

L'espace G de la géométrie élémentaire est à la fois commun et à l'origine du concept "d'espace affine" que nous allons introduire car lorsque des étudiants commencent à apprendre la géométrie à l'école primaire, ils l'apprennent (la grande majorité du temps) sans aucun point de référence $=(0,0)$.

Dans un espace affine, il n'y a donc pas de point distingué qui serve d'origine. Par conséquent, aucun vecteur n'a d'origine fixe et aucun vecteur ne peut être associé de manière unique à un point. Dans un espace affine, il y a à la place des "vecteurs de déplacement", également nommés "vecteurs de translation" ou simplement des translations, entre deux points de l'espace.

Cet espace G est associé à "l'espace vectoriel" géométrique V par la correspondance entre flèches et vecteurs étudiés jusqu'ici ! La définition suivante ne fait que mettre en évidence les traits dominants de cette correspondance :

Définition (#6.5.235) : Soit U un ensemble non vide d'éléments que nous appellerons "points" et désignerons par les lettres $P,Q,\ldots$; soit en outre E un espace vectoriel. Supposons qu'à tout couple de points (P,Q) corresponde un vecteur noté $\overrightarrow{PQ}$. Nous disons alors que U est un "espace affine" d'espace directeur (ou dit simplement abusivement de "direction") E si les conditions suivantes sont satisfaites :

C1. Pour tout point P, la correspondance entre couples (P,Q) et vecteurs $\vec{x}$ défini par un seul point plus le point d'origine est bijectif, autrement dit, pour tout vecteur $\vec{x}$ il existe un point Q et un seul tel que nous puissions définir un vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

C2. Pour tout triplet de points (P, Q, R) :

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \tag{6.5.48}$$

C'est la fameuse "relation de Chasles" (dont on retrouvera un pseudo-équivalant dans la section de Calcul Différentiel Et Intégral).

C3. Si P est un point et $\vec{x}$ un vecteur, pour exprimer que Q est l'unique point tel que $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$, nous écrivons :

$$Q = P + \vec{x} \tag{6.5.49}$$

Bien qu'un peu abusive, cette écriture est conforme à l'usage et suggère bien le sens de l'opération qu'elle désigne.

✍**Exemple :**

Ci-dessous un exemple "artistique" d'un espace affine $U = \mathrm{A}\mathbb{R}^2$ où il n'y a pas d'origine et où toute extrémité d'une droite peut être considérée comme l'origine d'un vecteur :

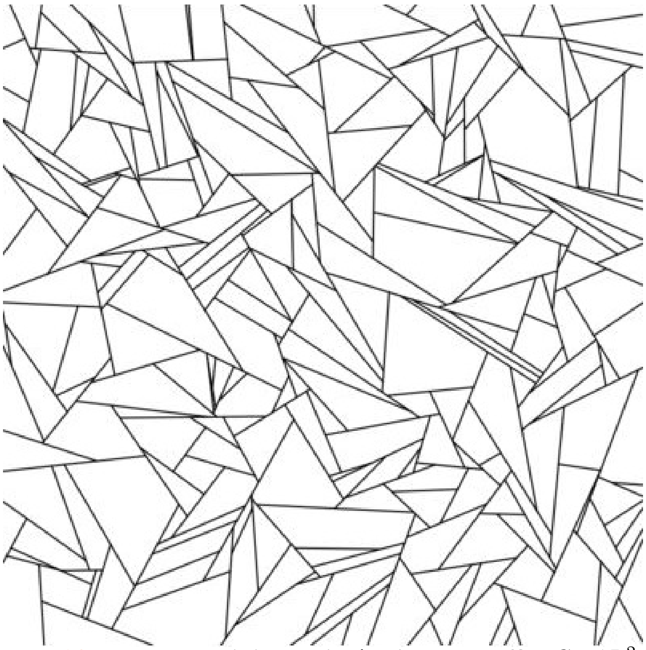


FIG. 6.97 – **Exemple artistique mais réel d'un espace affine $G = \mathrm{A}\mathbb{R}^2$**

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition d'espace affine :

P1. Pour tout point P, $P + (\vec{x} + \vec{y}) = (P + \vec{x}) + \vec{y}$

P2. Pour tout point P, $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$. Cela résulte de la condition $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ dans le cas où nous avons $P = Q = R$.

P3. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$. Il suffit de poser $R = P$ dans la relation de Chasles $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

P4. Règle du parallélogramme :

Soit le polygone de sommets (dans le sens des aiguilles d'une montre) P, P', Q, Q' et arêtes $\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PQ}$:

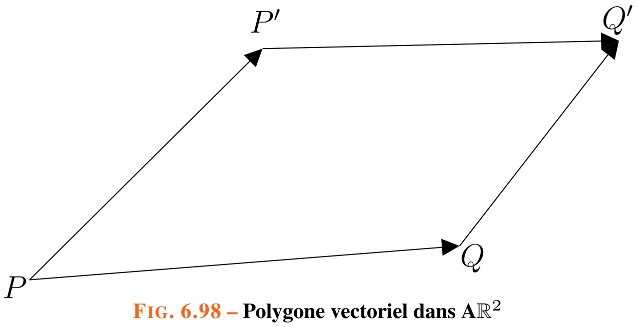


FIG. 6.98 – **Polygone vectoriel dans $\mathrm{A}\mathbb{R}^2$**

Nous avons :

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} \quad (6.5.50)$$

si et seulement si :

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} \quad (6.5.51)$$

ce qui donnerait alors un parallélogramme !

En effet, en remplaçant R par Q' dans la relation de Chasles il vient :

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'} \quad (6.5.52)$$

et en faisant de même mais en remplaçant R par Q' et Q par P' nous avons :

$$\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ'} \quad (6.5.53)$$

Nous avons alors en égalisant ces deux dernières relations :

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} \quad (6.5.54)$$

Ce qui force l'égalité susmentionnée que nous voulions démontrer.

Précédemment, nous avons vu ce qui faisait qu'un espace G pouvait être muni d'une structure d'espace vectoriel (nous avons vu que nous disons que ce dernier était dès lors "vectorialisé"). Dans le cas général d'un espace affine G, le procédé est le même :

Nous choisissons un point quelconque O de G. La correspondance entre couples (O, P) et vecteurs de l'espace directeur E étant alors biunivoque nous définissons l'addition de points et la multiplication d'un point par un scalaire par les opérations correspondantes sur les vecteurs de E. Muni de ces deux opérations, G devient un espace vectoriel, appelé "vectorialisé de G relativement à O". Nous désignerons cet espace par V et appellerons O "l'origine".

Vu la manière dont les opérations ont été définies, il résulte que V est isomorphe à l'espace directeur E :

$$P = \overset{V}{\mathrm{O}} + \vec{x} \leftrightarrow \overset{E}{\vec{x}} \quad (6.5.55)$$

En cours de traduction de l' anglais

Toutefois, cet isomorphisme dépend du choix de l'origine O et en pratique cette origine est choisie sur base de données inhérentes aux problèmes posés. Par exemple, si une transformation affine admet un point invariant (qui ne bouge pas), il y a avantage à choisir ce point comme origine.

Remarques

R1. Lorsque nous parlons de dimension d'un espace affine, nous parlons de la dimension de son espace directeur.

R2. L'espace G de la géométrie élémentaire est un espace affine de type $\mathrm{A}\mathbb{R}^2$. En effet, sa direction est l'espace géométrique G et les conditions de définition d'un espace affine sont satisfaites.

R3. Un espace affine est un ensemble d'éléments avec une fonction de différence. Cette différence est une fonction binaire, qui prend deux points P et Q (tous deux dans G) et produit un élément (un vecteur) $\vec{v}$ d'un espace vectoriel E. Nous écrivons $\vec{v}=P-Q$. De plus, cette fonction de différence doit garantir que, pour tout point P dans E, elle contient $P-P=\vec{0}$, où $\vec{0}$ est le vecteur nul de E.

Pour les personnes qui veulent en savoir plus sur les espaces affines (et les sujets connexes), nous recommandons vivement la lecture de l'excellent ouvrage français suivant [4].

6.5.4 Espaces Vectoriels Euclidiens

En cours de traduction de l'anglais

Avant de définir ce qu'est un espace vectoriel euclidien, nous allons au préalable définir quelques outils mathématiques et quelques concepts.

Nous pouvons, en choisissant une unité de longueur, mesurer l'intensité de chaque flèche, autrement dit, déterminer sa longueur. Nous pouvons aussi mesurer l'écart angulaire de deux flèches (ou vecteurs) quelconques d'origine commune (non nécessairement distinctes) en prenant comme unité de mesure d'angle par exemple le radian (voir section Trigonométrie page 2486). La mesure de cet écart est alors un nombre compris entre 0 et π, appelé "angle" des deux flèches. Si les deux flèches ont même direction et même sens, leur angle est nul et si elles ont même direction et sens opposé, ce même angle est π.

Les flèches représentatives d'un même vecteur $\vec{x}$ ont toutes la même longueur. Nous désignerons cette longueur, appellée "norme" ou "module", par la notation[13] :

$$\boxed{\|\vec{x}\|} \tag{6.5.56}$$

donné explicitement dans le cas à trois dimensions par la distance euclidienne si l'origine du vecteur coïncide avec l'origine O de la base vectorielle :

$$\|\vec{x}\|=\left\|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{6.5.57}$$

[13] Ceci est une notation en réalité simplifiée car comme nous le verrons bien plus tard dans ce livre, il existe plusieurs types de normes !

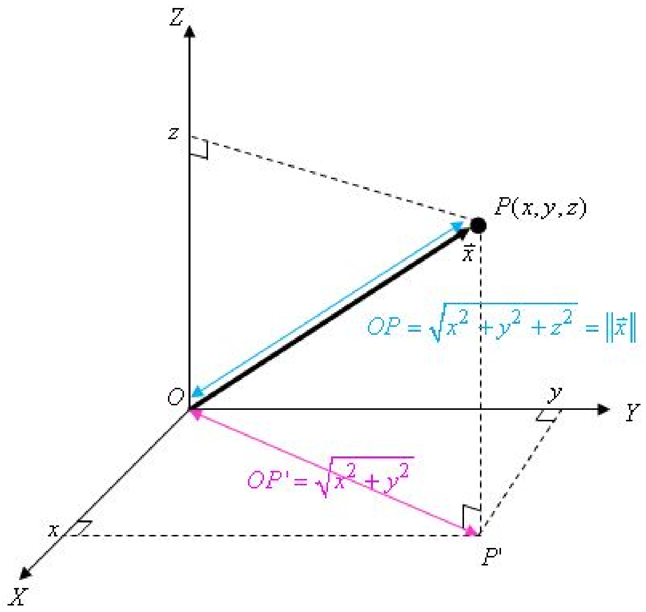


FIG. 6.99 – **Détails du calcul de la norme dans un repère orthogonal $\mathbb{R}^3$**

En cours de traduction de l'anglais

Si $\vec{x}$ est un vecteur non nul, nous pouvons construire un vecteur de norme unitaire $\vec{u}$ de même direction et orientation (colinéaire) par l'opération suivante très utilisée en physique :

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \qquad (6.5.58)$$

Nous appellerons "angle des vecteurs non nuls $\vec{x}$ et $\vec{y}$" l'angle de deux flèches d'origine commune représentant l'une $\vec{x}$ et l'autre $\vec{y}$.

Cependant, un peu plus rigoureusement une "norme" est définie sur un espace vectoriel réel (ou complexe) E, ce qui fait que nous parlons alors de "espace vectoriel normé", est une application :

$$f\left(\|\ \|\right) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+ \qquad (6.5.59)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

P1. Positivité :

$$\forall \vec{x} \in E \quad \|\vec{x}\| \geq 0 \qquad (6.5.60)$$

P2. Linéarité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in E \quad \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \qquad (6.5.61)$$

où nous prenons le module de la constante si celle-ci n'est plus dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ mais dans les complexes $\mathbb{C}$.

P3. Nullité (souvent associée à la propriété P1) :

$$\forall \vec{x} \in E \quad \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0 \qquad (6.5.62)$$

P4. Inégalité de Minkowski (inégalité triangulaire) :

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in E \quad \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\| \tag{6.5.63}$$

Que nous allons démontrer un peu plus bas.

Remarqus

R1. Ces propriétés sont principalement imposées par notre approche intuitive de l'espace euclidien (espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels $\mathbb{R}$ et muni d'un produit scalaire que nous verrons plus loin) et de son interprétation géométrique ((par le fait que c'est aussi un espace affine $\mathrm{A}\mathbb{R}^n$).

R2. Nous démontrerons un peu plus loin la propriété P4 sous la dénomination "d'inégalité triangulaire" et nous ferons une étude un peu plus générale de cette inégalité sous la dénomination "d'inégalité de Minkowski" dans le chapitre de Topologie.

6.5.4.1 Produit scalaire

En ... de traduction de l' anglais

Définition (#6.5.236) : Un "espace vectoriel euclidien" de dimension n, est un espace vectoriel (réel et de dimension finie pour les puristes) possédant une opération particulière, le "produit scalaire" que nous noterons (notation spécifique à ce livre) en ce qui concerne le cas particulier des vecteurs :

$$\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos(\theta)=\vec{x}\circ\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \tag{6.5.64}$$

Remarques

R1. Nous trouvons dans certains ouvrages (pour information) la notation $(\vec{x}|\vec{y})$ ou encore $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle$ lors de la généralisation de cette définition comme nous le verrons un peu plus loin. Selon la norme ISO 80000-2 :2009 *Signes et symboles mathématiques à utiliser dans les sciences naturelles et la technologie* il faudrait écrire le produit scalaire $a\cdot b$. En utilisant la notation d'Algèbre Linéaire que nous verrons plus tard, le produit scalaire s'écrit parfois aussi : $\vec{x}^T\vec{y}$.

R2. Le produit scalaire a une importance énorme dans l'ensemble du domaine des mathématiques et de la physique ; ainsi nous le retrouvons dans le calcul différentiel et intégral (de par le produit scalaire fonctionnel), en topologie, en physique quantique, en analyse du signal etc. Il convient donc de bien comprendre ce qui va suivre.

R3. Le produit scalaire peut être vu comme une projection de la longueur d'un vecteur sur la longueur d'un autre.

Ce produit scalaire possède les propriétés suivantes (dont la plupart découlent de la définition même du produit scalaire) dans un espace euclidien :

P1. Commutativité : $\vec{x}\circ\vec{y}=\vec{y}\circ\vec{x}$

P2. Associativité : $\alpha(\vec{x}\circ\vec{y})=(\alpha\vec{x})\circ\vec{y}=\vec{x}\circ(\alpha\vec{y})$

P3. Distributivité : $\vec{x}\circ(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\circ\vec{y}+\vec{x}\circ\vec{z}$

P4. Non-dégénération : $\vec{x}\circ\vec{y}=0$ alors $\forall\vec{x}\neq\vec{0}\Rightarrow\vec{y}=\vec{0}$

P5. Carré scalaire : $\|\vec{x}\|^2=\vec{x}\circ\vec{x}$ et $\vec{x}\circ\vec{x}>0$ si $\vec{x}\neq\vec{0}$

P6. Bi-linéarité : $(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\circ\vec{z}=\alpha(\vec{x}\circ\vec{z})+\beta(\vec{y}\circ\vec{z})$

Seule cette dernière propriété nécessite peut-être une démonstration (de plus un des résultats de la démonstration nous servira à démontrer une autre propriété très importante du produit scalaire) :

Démonstration 6.31.2. Soit :

$$\text{proj}_x\vec{y}=\|\vec{y}\|\cos(\theta)\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}=\cos(\theta)\left(\frac{\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^2}\right)\vec{x}=\cos(\theta)\left(\frac{\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{x}\|}{\vec{x}\circ\vec{x}}\right)\vec{x} \quad (6.5.65)$$

qui constitue la "projection orthogonale vectorielle" (le x en indice du projeter signifiant "le vecteur $\vec{x}$") du vecteur $\vec{y}$ sur la normalisation à l'unité du vecteur $\vec{x}$.

A l'aide du produit scalaire, le vecteur $\text{proj}_x\vec{y}$ peut être exprimé autrement il suffit de prendre la relation que nous avons vue plus haut :

En cours
tion de l'anglais

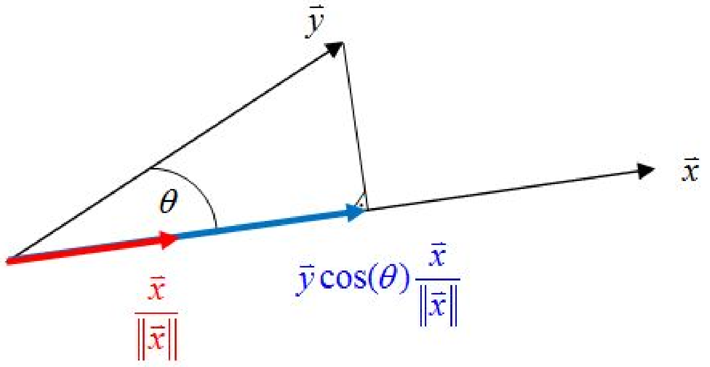


FIG. 6.100 – **Représentationg géométrique du produit scalaire (projection)**

$$\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos(\theta)=\vec{x}\circ\vec{y}\Leftrightarrow\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos(\theta)=\vec{x}\circ\vec{y} \quad (6.5.66)$$

et de l'introduire dans $\text{proj}_x\vec{y}$ pour obtenir :

$$\text{proj}_x\vec{y}=\cos(\theta)\left(\frac{\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{x}\|}{\vec{x}\circ\vec{x}}\right)\vec{x}=\frac{\vec{x}\circ\vec{y}}{\vec{x}\circ\vec{x}}\vec{x} \quad (6.5.67)$$

La norme de $\text{proj}_x\vec{y}$ s'écrit :

$$\|\text{proj}_x\vec{y}\|=\frac{|\vec{x}\circ\vec{y}|}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{x}\|}\|\vec{x}\|=\frac{|\vec{x}\circ\vec{y}|}{\|\vec{x}\|} \quad (6.5.68)$$

Si $\vec{x}$ est unitaire, les relations de projections précédentes se simplifient et deviennent :

$$\text{proj}_x\vec{y} = (\vec{x}\circ\vec{y})\vec{x} \quad \text{et} \quad \|\text{proj}_x\vec{y}\| = |\vec{x}\circ\vec{y}| \tag{6.5.69}$$

Par des considérations géométriques élémentaires (distributivité du produit scalaire), il est facile de se rendre compte que :

$$\text{proj}_v(\vec{x}+\vec{y}) = \text{proj}_v\vec{x} + \text{proj}_v\vec{y} \quad \text{et} \quad \text{proj}_v\alpha\vec{x} = \alpha\text{proj}_v\vec{x} \tag{6.5.70}$$

Si nous revenons maintenant à la démonstration de :

$$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\circ\vec{z} = \alpha(\vec{x}\circ\vec{z}) + \beta(\vec{y}\circ\vec{z}) \tag{6.5.71}$$

Nous avons donc dans un premier temps :

$$\text{proj}_v(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \text{proj}_v\alpha\vec{x} + \text{proj}_v\beta\vec{y} = \alpha\text{proj}_v\vec{x} + \beta\text{proj}_v\vec{y} \tag{6.5.72}$$

et, d'après la définition de la propriété de la projection orthogonale, il vient alors immédiatement en faisant la correspondance terme à terme :

$$\begin{gathered}\text{proj}_v(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \text{proj}_v\alpha\vec{x} + \text{proj}_v\beta\vec{y} = \alpha\text{proj}_v\vec{x} + \beta proj_v\vec{y} \\ \frac{(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\circ\vec{z}}{\vec{z}\circ\vec{z}}\vec{z} = \alpha\frac{\vec{x}\circ\vec{z}}{\vec{z}\circ\vec{z}}\vec{z} + \beta\frac{\vec{y}\circ\vec{z}}{\vec{z}\circ\vec{z}}\vec{z}\end{gathered} \tag{6.5.73}$$

D'où la propriété P6 qui s'ensuit par multiplication des deux membres $\vec{z}\circ\vec{z}$ de l'égalité par et après simplification par $\vec{z}$.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Définitions (#6.5.237) :

D1. Un espace vectoriel E est dit espace vectoriel proprement euclidien" si $\forall\vec{x}\in E \quad \|\vec{x}\| > 0$.

D2. Nous disons que les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des "vecteurs orthogonaux" s'ils sont non nuls et que leur produit scalaire est nul (leur angle est égal à $\pi/2$).

D3. Une base de vecteurs $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ est dite "base orthonormale" si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et unitaires (donc constituant une famille libre).

Remarque

Nous verrons dans la section de Calcul Tensoriel (nous aurions pu le faire ici aussi mais bon...) comment à partir d'un ensemble de vecteurs indépendants construire une base orthogonale. C'est ce que le lecteur pourra trouver sous le nom de "méthode d'orthogonalisation de (Gram-)Schmidt" (voir page 2033).

Par un raisonnement géométrique relativement simple, nous voyons que tout vecteur est la somme de ses projections orthogonales sur les vecteurs d'une base orthonormale, autrement dit, si $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_2) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormale dans $\mathbb{R}^3$ par exemple :

$$\vec{x} = (\vec{x}\circ\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x}\circ\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{x}\circ\vec{e}_3)\vec{e}_3 = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{2} + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \tag{6.5.74}$$

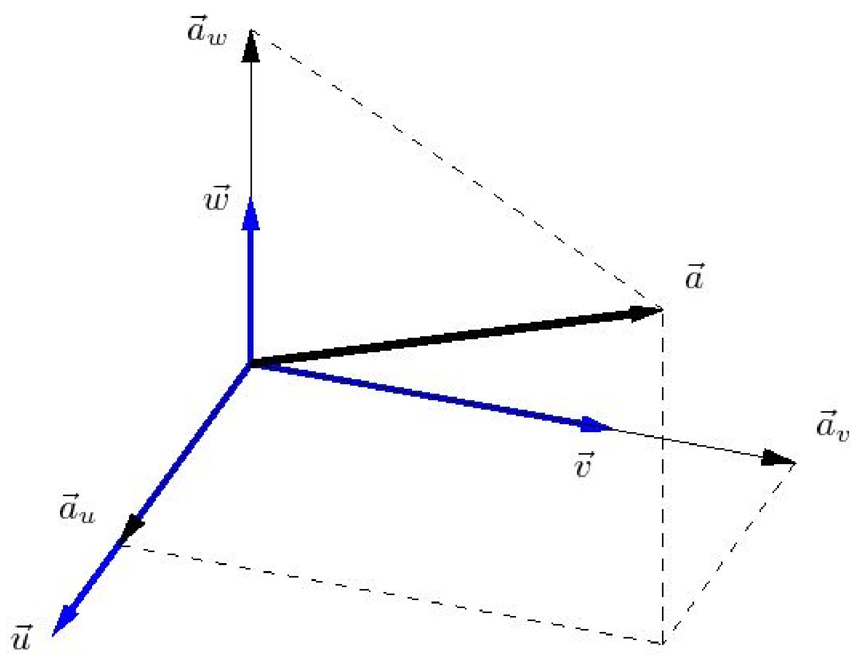


FIG. 6.101 – **Exemple de projection de base orthonormée**

Cette décomposition s'obtient également par la propriété de P6 du produit scalaire. En effet, étant données les composantes $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ d'un vecteur $\vec{x}$ dans notre base orthonormale :

$$\begin{aligned}\vec{x} \circ \vec{e}_1 &= (x_1 \circ \vec{e}_1 + x_2 \circ \vec{e}_2 + x_3 \circ \vec{e}_3) \circ \vec{e}_1 \\ &= x_1(\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1) + x_2(\vec{e}_2 \circ \vec{e}_1) + x_3(\vec{e}_3 \circ \vec{e}_1) \\ &= x_1\end{aligned} \tag{6.5.75}$$

puisque $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = 1$ et $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 0$. Nous obtenons alors immédiatement :

$$\vec{x} \circ \vec{e}_2 = x_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{x} \circ \vec{e}_3 = x_3 \tag{6.5.76}$$

d'où la décomposition.

Étant données les composantes (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans une base orthonormale canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nous savons que nous pouvons écrire le produit scalaire sous la forme :

$$\vec{x} \circ \vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \circ (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \tag{6.5.77}$$

par la propriété P6 du produit scalaire :

$$\vec{x} \circ \vec{y} = x_1\vec{e}_1 \circ (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) + x_2\vec{e}_2 \circ (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) + x_3\vec{e}_3 \circ (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \tag{6.5.78}$$

en utilisant la propriété P1 et à nouveau P6 :

$$\begin{aligned}&\vec{x} \circ \vec{y} = x_1(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \circ \vec{e}_1 + x_2(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \circ \vec{e}_2 + x_3(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \circ \vec{e}_3 \\ &\Rightarrow \\ &(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \circ \vec{e}_1 = y_1\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \circ \vec{e}_1 + y_3\vec{e}_3 \circ \vec{e}_1 = y_1\|\vec{e}_1\|^2 = y_1 \\ &(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \circ \vec{e}_2 = y_1\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 + y_2\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 \circ \vec{e}_2 = y_2\|\vec{e}_2\|^2 = y_2 \\ &(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \circ \vec{e}_3 = y_1\vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 + y_2\vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 + y_3\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = y_3\|\vec{e}_3\|^2 = y_3\end{aligned} \tag{6.5.79}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce qui nous donne finalement la fameuse et importante décomposition :

$$\vec{x} \circ \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{6.5.80}$$

C'est l'une des relations les plus importantes dans le domaine du calcul vectoriel, que nous nommons "produit scalaire canonique".

Remarque

L'angle θ du produit scalaire est parfois noté par :

$$\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y}) \tag{6.5.81}$$

Prouvons maintenant avec un cas bidimensionnel simple une propriété que les physiciens aiment beaucoup pour caractériser une application linéaire orthogonale (voir section Algèbre Linéaire page 1927) : que le produit scalaire est invariant sous toute transformation orthogonale (alors abusivement dit "invariant par changement de base...").

Considérons pour cela un vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et la matrice de rotation 2D (voir section Nombres page 2628) :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{6.5.82}$$

Calculons maintenant :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos(\theta) - x_2\sin(\theta) \\ x_1\sin(\theta) + x_2\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{6.5.83}$$

Considérons donc maintenant deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dont nous avons prouvé juste au-dessus que leur produit scalaire est donné par :

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{6.5.84}$$

Et après la transformation orthogonale choisie nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{a}' \circ \vec{b}' &= \begin{pmatrix} a_1\cos(\theta) - a_2\sin(\theta) \\ a_1\sin(\theta) + a_2\cos(\theta) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1\cos(\theta) - b_2\sin(\theta) \\ b_1\sin(\theta) + b_2\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= (a_1\cos(\theta) - a_2\sin(\theta))(b_1\cos(\theta) - b_2\sin(\theta)) \\ &+ (a_1\sin(\theta) + a_2\cos(\theta))(b_1\sin(\theta) + b_2\cos(\theta)) \\ &= a_1b_1\cos^2(\theta) - a_2b_1\sin(\theta)\cos(\theta) - a_1b_2\cos(\theta)\sin(\theta) + a_2b_2\sin^2(\theta) \\ &+ a_1b_1\sin^2(\theta) + a_2b_1\cos(\theta)\sin(\theta) + a_1b_2\sin(\theta)\cos(\theta) + a_2b_2\cos^2(\theta) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 = \vec{a} \circ \vec{b} \end{aligned} \tag{6.5.85}$$

Ainsi, le produit scalaire est bien invariant sous cette rotation qui est un cas 2D particulier de transformation orthogonale et en fait sous toute autre transformation orthogonale.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le produit scalaire, ne doit pas être confondu avec la "multiplication par élément par élément" de deux vecteurs définis par :

$$\vec{x} \diamond \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{pmatrix} \tag{6.5.86}$$

6.5.4.1.1 Inégalité de Cauchy–Schwarz

En mathématiques, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une inégalité utile rencontrée dans de nombreux contextes différents, tels que l'algèbre linéaire, l'analyse, les probabilités, les statistiques et d'autres domaines (il suffit de lire ce livre entièrement pour avoir une idée de l'immense étendue de son application...). Elle est considérée comme l'une des inégalités les plus importantes de toutes les mathématiques ! ! !

La relation :

$$(\vec{x} \circ \vec{y}) \circ (\vec{x} \circ \vec{y}) = \vec{x} \circ \vec{x} + \vec{x} \circ \vec{y} + \vec{y} \circ \vec{x} + \vec{y} \circ \vec{y} = \vec{x} \circ \vec{x} + \vec{y} \circ \vec{y} + 2\vec{x} \circ \vec{y} \tag{6.5.87}$$

s'écrit également trivialement sous la forme suivante si nous utilisons la notion de norme et la définition du produit scalaire :

$$(\vec{x} \circ \vec{y}) \circ (\vec{x} \circ \vec{y}) = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \circ \vec{y} \tag{6.5.88}$$

Il est intéressant de remarquer que si les deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux, nous retrouvons le résultat d'un théorème fameux : le théorème de Pythagore (qui n'a pas été trouvé par Pythagore pour rappel... et ce premier est un personnage probablement n'ayant jamais existé pour de vrai) !

Effectivement, dès lors nous avons si les deux vecteurs sont orthogonaux :

$$\vec{x} \circ \vec{y} = 0 \tag{6.5.89}$$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2} \tag{6.5.90}$$

Cette relation est très importante en physique-mathématique. Il faut s'en souvenir !

Théorème 6.32. Nous appelons également "inégalité de Cauchy-Schwarz" l'inégalité, valable pour tout choix des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, la relation :

$$\boxed{|\vec{x} \circ \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \tag{6.5.91}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$|\vec{x} \circ \vec{y}|^2 \leq (\vec{x} \circ \vec{x}) \cdot (\vec{y} \circ \vec{y}) \tag{6.5.92}$$

En cours de traduction de l'anglais

D'abord nous considérerons comme évident que l'égalité n'a lieu qu'en cas de colinéarité des deux vecteurs.

Démonstration 6.32.1. Nous nous plaçons dans le cas où $\vec{x},\vec{y}\neq\vec{0}$. Alors, pour $\lambda\in\mathbb{R}$ nous avons trivialement selon les propriétés du produit scalaire :

$$(\vec{x}+\lambda\vec{y})\circ(\vec{x}+\lambda\vec{y})=\vec{x}\circ\vec{x}+2\lambda\vec{x}\circ\vec{y}+\lambda^2\vec{y}\circ\vec{y}\geq 0 \tag{6.5.93}$$

Il s'agit donc d'une simple équation du deuxième degré où la variable est λ. En se rappelant de ce que nous avons vu lors de notre étude des polynômes du deuxième degré (voir section Calcul Algébrique page 1351) la relation précédente (le fait qu'elle soit toujours supérieure ou égale à zéro) est satisfaite que si le discriminant est négatif ou nul. En d'autres termes, si :

$$4(\vec{x}\circ\vec{y})^2-4(\vec{x}\circ\vec{x})(\vec{y}\circ\vec{y})\leq 0 \tag{6.5.94}$$

Soit après simplification :

$$(\vec{x}\circ\vec{y})^2-(\vec{x}\circ\vec{x})(\vec{y}\circ\vec{y})\leq 0\Rightarrow(\vec{x}\circ\vec{y})^2\leq(\vec{x}\circ\vec{x})(\vec{y}\circ\vec{y}) \tag{6.5.95}$$

■ Q.E.D.

Lorsque E est $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit avec les composantes des vecteurs :

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2} \tag{6.5.96}$$

Dans le cas particulier où $\forall i, b_i=1$ elle devient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leq n\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{6.5.97}$$

ou encore :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{6.5.98}$$

ce qui montre que le carré de la moyenne arithmétique est inférieur ou égal à la moyenne arithmétique des carrés. Ce résultat est important pour l'étude des statistiques !

Par ailleurs, en vertu de la propriété du cosinus et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous pouvons écrire :

$$-1\leq\frac{\vec{x}\circ\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}\leq 1 \tag{6.5.99}$$

relation que nous retrouvons également dans le cadre de l'étude des statistiques (voir section Statistiques page 604).

En cours de traduction de l' anglais

6.5.4.1.2 Inégalités Triangulaires

En majorant $2\vec{x}\circ\vec{y}$ par $2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ (de par l'inégalité de Cauchy-Schwarz !) et en mettant ceci dans la relation établie déjà précédemment :

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\vec{x}\circ\vec{y} \qquad (6.5.100)$$

nous obtenons :

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2\leq\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|=(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2 \qquad (6.5.101)$$

qui nous ammène immédiatement en prenant la racine carrée à "l'inégalité triangulaire" (très utile dans l'étude des suites et séries pour l'étude des convergences ainsi qu'en topologie) :

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|} \qquad (6.5.102)$$

Le concept peut également être illustré comme suit :

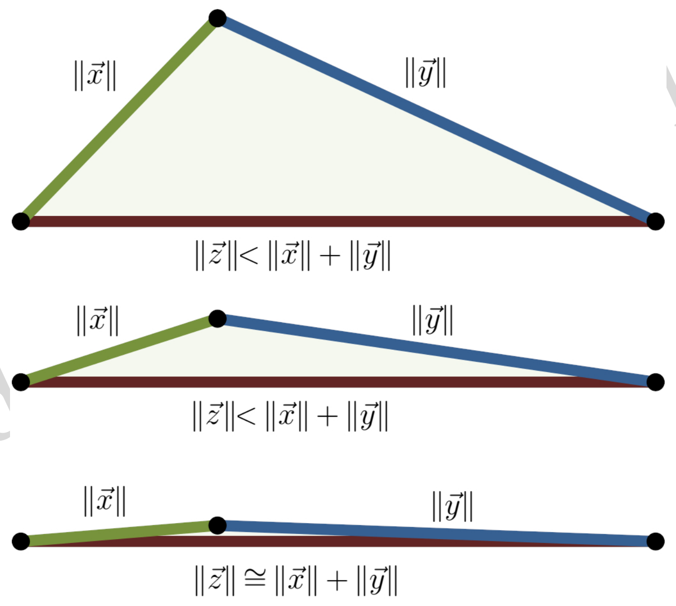


FIG. 6.102 – **Illustration de l'inégalité triangulaire**

Et évidemment dans le cas limite (quand tous les vecteurs sont sur la même droite), nous avons : $\|\vec{z}\|=\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$.

Remarque

La généralisation de cette inégalité relativement aux propriétés des normes telles que nous le verrons dans la section de Topologie, donne ce que nous appelons "l'inégalité de Minkowski".

En appliquant une fois l'inégalité triangulaire aux vecteurs $\vec{x}$ et $(\vec{y}-\vec{x})$ et une autre fois aux vecteurs $(\vec{y})$ et $(\vec{x}-\vec{y})$ nous obtenons la variante :

$$\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\|\leq\|\vec{x}-\vec{y}\| \qquad (6.5.103)$$

En cours d'anglais

6.5.4.1.3 Produit Scalaire (Général)

Voyons maintenant une autre manière un peu plus générale (s'appliquant à des vecteurs ou fonctions), formelle et abstraite pour définir le produit scalaire tout en tentant de rester le plus simple possible (attention dans le cas général la notation du produit scalaire change !).

Tout d'abord, le lecteur doit savoir que, comme nous le verrons dans la section d'Analyse Fonctionnelle, tous les concepts étudiés jusqu'à présent dans cette section peuvent également s'appliquer à une catégorie particulière de fonctions ! Ouiiiiii ! ! ! Ajouter, soustraire des fonctions comme on le fait avec des vecteurs est évident mais il faut savoir que certaines fonctions plus ou moins compliquées sont colinéaires ou orthogonales (pensez aux fonctions affines !) et de plus il n'y a pas de limite à $\mathbb{R}$ mais peut être étendu à $\mathbb{C}$ facilement et donc l'ensemble de départ du produit scalaire.

Tout d'abord, le lecteur doit savoir que, comme nous le verrons dans la section d'Analyse Fonctionnelle, tous les concepts étudiés jusqu'à présent dans cette section peuvent également s'appliquer à une catégorie particulière de fonctions ! Oui ! ! ! Ajouter, soustraire des fonctions comme on le fait avec des vecteurs est évident mais il faut savoir que certaines fonctions plus ou moins compliquées sont colinéaires ou orthogonales (pensez aux fonctions affines !) et de plus elles ne sont pas limitées à $\mathbb{R}$ mais peuvent être étendue à $\mathbb{C}$ facilement et donc l'ensemble de départ du produit scalaire.

Pour ne pas trop compliquer les choses, nous nous concentrerons ici uniquement sur une généralisation simple du produit scalaire aux vecteurs (nous reviendrons sur le case des fonctions dans la section de l'Analyse Fonctionnelle plus tard).

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#6.5.238) : Soit E un espace vectoriel réel (encore une fois nous nous concentrons ici uniquement sur des vecteurs simples pour le moment). Une "forme bilinéaire symétrique positive" sur E aussi appelée "produit interne", est une application :

$$\phi : \begin{cases} E\times E \mapsto \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto \langle x|y\rangle \end{cases} \qquad (6.5.104)$$

qui vérifie par définition :

P1. La positivité :

$$\forall \vec{x}\in E: \qquad \phi(\vec{x},\vec{x})=\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle \geq 0\in\mathbb{R} \qquad (6.5.105)$$

P2. La nullité (définie) :

$$\forall \vec{x}\in E: \qquad \phi(\vec{x},\vec{x})=\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle = 0 \Rightarrow \vec{x}=0 \qquad (6.5.106)$$

P3. La symétrie (définie) :

$$\forall (\vec{x},\vec{y})\in E^2: \qquad \phi(l\vec{x},\vec{y})=\phi(\vec{y},\vec{x}) \Leftrightarrow \langle l\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle\vec{y}|\vec{x}\rangle \qquad (6.5.107)$$

P4. La bilinéarité (forme bilinéaire) avec, dans l'ordre, la ""linéarité à gauche" et "linéarité à droite" :

$$\forall (\vec{x},\vec{y},\vec{z})\in E^3, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2: \begin{cases} \langle\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}|\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle+\mu\langle\vec{y}|\vec{z}\rangle \\ \langle\vec{x}|\lambda\vec{y}+\mu\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\mu\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle \end{cases} \qquad (6.5.108)$$

P... Et ainsi de suite... nous avons les six mêmes propriétés que le produit scalaire car les deux sont identiques si nous nous concentrons uniquement sur les vecteur dans $\mathbb{R}$.

Remarque

À nouveau (!), ces propriétés sont principalement imposées par notre approche intuitive de l'espace euclidien et de son interprétation géométrique.

Définition (#6.5.239) : Un espace E muni d'un produit scalaire est appelé en général (avec comme domaine de définition $\mathbb{C}$) un "espace préhilbertien". Si E est de dimension finie, nous parlons alors "d'espace euclidien"".

Remarque

Si E est un espace euclidien, alors si le déterminant $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est égal à ± 1 (voir section Algèbre Linéaire page 1935) nous parlons alors "espace euclidien orienté".

Nous verrons dans notre étude de la Topologie (voir section du même nom page 2427) que les propriétés du produit scalaire sont les briques de bases pour définir une norme et donc une distance dans un espace métrique. Cette distance sera alors donnée selon ce que nous avons obtenu dans la section de Topologie :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\| \tag{6.5.109}$$

Définition (#6.5.240) : Nous disons qu'un espace E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un "espace Hilbertien" ou "espace de Hilbert" si cet espace est complet pour la métrique définie ci-dessus.

En d'autres termes, avoir un espace métrique muni donc d'une distance générée par un produit scalaire est une chose. Ensuite, avoir une distance mesurable en est une autre. Un espace de Hilbert a donc des distances mesurables au sens topologique du terme car l'ensemble sur lequel on travaille est continu et n'importe quel point peut-être approché indéfiniment (imaginez avoir une règle et que vous ne puissiez pas avec cette règle approcher les points qui définissent les dimensions de votre objet... ce serait gênant...). Donc sans espace complet une grande partie des théorèmes de l'analyse fonctionnelle ne pourraient pas être utilisés dans l'étude des espaces vectoriels et cela serait très gênant en physique quantique ondulatoire par exemple...

Formellement, rappelons qu'un espace métrique est complet si toutes les suites de Cauchy (voir section Suites et Séries page 1635) de cet espace sont convergentes (voir section Fractales page ??) dans un espace métrique (voir section Topologie page 2429).

En cours de traduction de l'anglais

6.5.4.2 Produit Vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est une opération propre à la dimension 3. Pour l'introduire, il faut préalablement orienter l'espace destiné à le recevoir. L'orientation étant définie au moyen de la notion de "déterminant", nous commencerons par une brève introduction à l'étude de cette notion. Cette étude sera reprise plus tard dans le détail lors de l'analyse des systèmes linéaires dans la section d'Algèbre Linéaire.

Définition (#6.5.241) : Nous appelons "déterminant" des vecteurs-colonnes de $\mathbb{R}^2$ (pour la forme générale du déterminant se reporter à la section d'Algèbre Linéaire page 1935) :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{6.5.110}$$

et nous notons :

$$\det([\vec{a},\vec{b}]) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{6.5.111}$$

le nombre (produit soustrait en croix) :

$$\det([\vec{a},\vec{b}]) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{6.5.112}$$

Nous appelons déterminant des vecteurs-colonnes de $\mathbb{R}^3$ (encore une fois, voir la section d'Algèbre Linéaire pour une généralisation) :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{6.5.113}$$

et nous notons :

$$\det([\vec{a},\vec{b},\vec{c}]) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{6.5.114}$$

le nombre :

$$\begin{aligned} \det([\vec{a},\vec{b},\vec{c}]) &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned} \tag{6.5.115}$$

Ainsi, la fonction qui associe à tout couple de vecteurs-colonnes de $\mathbb{R}^2$ (à tout triplet de vecteurs-colonnes de $\mathbb{R}^3$) son déterminant est appelée "déterminant d'ordre 2" (respectivement "déterminant d'ordre 3").

Comme nous le prouverons dans la section d'Algèbre Linéaire le déterminant a la propriété d'être multiplié par -1 si l'un des vecteurs colonnes est remplacé par son opposé ou si deux de ses vecteurs colonnes sont échangés. De plus, le déterminant est non nul si et seulement si ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants (la preuve - qui a une grande importance en Mathématiques Appliquées - est quelques lignes plus bas et une généralisation peut être trouvée dans la section Algèbre Linéaire).

En cours de traduction de l' anglais

Définition (#6.5.242) : Soit x_1,x_2,x_3 et y_1,y_2,y_3 les composantes respectives des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans la base orthonormale $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Nous appelons "produit vectoriel" de $\vec{x}$ et $\vec{y}$, et nous notons indistinctement dans la majorité des livres :

$$\vec{x}\times\vec{y} \tag{6.5.116}$$

et dans un minorité d'autres (...) :

$$\vec{x}\wedge\vec{y} \tag{6.5.117}$$

le vecteur :

$$\vec{x}\times\vec{y}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{e}_1+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{e}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{e}_3 \tag{6.5.118}$$

ou sous forme de composantes :

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-x_3&x_2\\x_3&0&-x_1\\-x_2&x_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \tag{6.5.119}$$

La forme matricielle ci-dessus nous sera très utile dans la section Mécanique pour la construction de la Matrice Inertielle.

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. La première notation est la notation internationale due à Gibbs (que nous utiliserons tout au long de ce livre), la deuxième est la notation française due à Burali-Forti (assez embêtante car se confond avec l'opérateur ET en logique).

R2. Il est assez embêtant de retenir par coeur les relations qui forment le produit vectoriel habituellement. Mais heureusement il existe au moins trois bons moyens mnémotechniques :

1. Le plus rapide consiste à retrouver l'une des expressions des composantes du produit vectoriel et ensuite par décrémentation des indices (en recommençant à 3 lorsque qu'on arrive à 0) de connaître toutes les autres composantes. Encore faut-il trouver un moyen simple de se souvenir par coeur d'une des composantes... Un bon moyen est la propriété mathématique suivante de deux vecteurs colinéaires permettant facilement de retrouver la troisième composante (celle selon l'axe Z) :

   Soit deux vecteurs colinéaires dans un même plan, alors :

   $$\vec{x}=\lambda\vec{y}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0 \tag{6.5.120}$$

   Nous retrouvons donc bien l'expression de la troisième composante du produit vectoriel de deux vecteurs (non nécessairement colinéaires... eux !).

   Ou si vous voulez ne retenir que le premier composant donné en lettres par $z_x=x_yy_z-x_zy_y$, les indices donnent "xyzzy" (comme un nom de personne...). Les deuxième et troisième équations peuvent être obtenues à partir de la première en faisant simplement pivoter verticalement les indices, $x\rightarrow y\rightarrow z\rightarrow x$.

2. La seconde méthode mais que nous verrons lors de notre étude du calcul tensoriel consiste à utiliser le symbole d'antisymétrie (également appelé "tenseur de Levi-Civita"). Cette méthode est certainement la plus esthétique d'entre toutes mais pas nécessairement la plus rapide à développer. Nous donnons ici juste l'expression sans plus d'explications pour l'instant (elle est également utile pour l'expression du déterminant par extension) :

$$(\vec{x}\times\vec{y})_i=\varepsilon_{ijk}x_j y_k \tag{6.5.121}$$

3. Cette dernière méthode est assez simple et triviale aussi mais elle utilise implicitement la première méthode et le lecteur doit se rappeler comment calculer un déterminant de dimension 2×2. L'idée est la suivante : la i-ème composante de $\vec{x}\times\vec{y}$ est le déterminant des deux vecteurs-colonnes desquels nous avons retiré le i-ème terme, le deuxième déterminant étant cependant pris avec le signe "$-$" tel que :

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{e}_3 \tag{6.5.122}$$

Il est important, même si c'est relativement simple, de se rappeler que les différents produits vectoriels pour les vecteurs d'une base orthogonale sont (et particulièrement pour une base canonique) d'abord :

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_1=\vec{e}_2\times\vec{e}_2=\vec{e}_3\times\vec{e}_3=\vec{0} \tag{6.5.123}$$

et aussi :

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\quad \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,\quad \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2 \tag{6.5.124}$$

Ces relations peuvent être condensées à l'aide du symbole de fonction de Dirac (voir section Calcul Tensoriel page 2015) :

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j=\delta_{ij} \tag{6.5.125}$$

Le produit vectoriel jouit aussi propriétés suivantes que nous allons démontrer de suite après :

P1. Antisymétrie :

$$\vec{x}\times\vec{y}=-(\vec{y}\times\vec{x}) \tag{6.5.126}$$

P2. Linéarité :

$$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\times\vec{z}=\alpha(\vec{x}\times\vec{z})+\beta(\vec{y}\times\vec{z}) \tag{6.5.127}$$

P3. Si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants (très important !) :

$$\vec{x}\times\vec{y}\neq\vec{0} \tag{6.5.128}$$

P5. Non associativité :

$$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})\neq(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} \tag{6.5.129}$$

En cours de traduction de l'anglais

P4. Distributivité par la somme :

$$\vec{x}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{x}\times\vec{a}+\vec{x}\times\vec{b} \tag{6.5.130}$$

Les deux premières propriétés découlent directement de la définition et la propriété P4 se vérifié aisément en développant les composantes et en comparant les résultats obtenus.

Démontrons ensuite la troisième propriété qui est très importante en algèbre linéaire (section suivante) et la cinquième (car demandée par un lecteur).

Théorème 6.33. Si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants (condition très importante !) :

$$\vec{x}\times\vec{y}\neq\vec{0} \tag{6.5.131}$$

Démonstration 6.33.1. Soient deux vecteurs $\vec{x}(x_1,x_2,x_3)$ et $\vec{y}(y_1,y_2,y_3)$. Si les deux vecteurs sont linéairement dépendants alors il existe un α tel que nous puissions écrire :

$$\vec{y}=\alpha\vec{x} \tag{6.5.132}$$

Si nous développons le produit vectoriel des deux vecteurs dépendants à un facteur près α, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{x}\times\vec{y}&=\vec{x}\times\alpha\vec{x}\\&=(x_2\alpha x_3-x_3\alpha x_2)\vec{e}_1+(x_3\alpha x_1-x_1\alpha x_3)\vec{e}_2+(x_1\alpha x_2-x_2\alpha x_1)\vec{e}_3\end{aligned} \tag{6.5.133}$$

Il va sans dire que le résultat ci-dessus est égal au vecteur nul $\vec{0}$ si effectivement les deux vecteurs sont linéairement dépendants.

■ Q.E.D.

Théorème 6.34. Le produit vectoriel est distributif sur la somme..

Démonstration 6.34.1.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)&=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2(a_3+b_3)-x_3(a_2+b_2)\\x_3(a_1+b_1)-x_1(a_3+b_3)\\x_1(a_2+b_2)-x_2(a_1+b_1)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x_2a_3-x_3a_2\\x_3a_1-x_1a_3\\x_1a_2-x_2a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2b_3-x_3b_2\\x_3b_1-x_1b_3\\x_1b_2-x_2b_1\end{pmatrix}=\vec{x}\times\vec{a}+\vec{x}\times\vec{b}\end{aligned} \tag{6.5.134}$$

■ Q.E.D.

Si nous supposons maintenant que les deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants et non nuls, nous pouvons démontrer les deux propriétés suivantes du produit vectoriel :

Théorème 6.35. La résultante d'un produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ donne un vecteur orthogonal (perpendiculaire) à $\vec{x}$ et $\vec{y}$ s'ils ne sont pas nuls.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.35.1. Pour prouver cela, nous écrivons simplement le développement en utilisant le produit scalaire :

$$\vec{x}\circ(\vec{x}\times\vec{y})=x_1\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}-x_2\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & x_1 & y_2\\ x_2 & x_2 & y_2\\ x_3 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=0 \tag{6.5.135}$$

Cette équation montre que le vecteur $\vec{x}$ est perpendiculaire au vecteur résultant du produit vectoriel entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

■ Q.E.D.

Théorème 6.36. Le produit vectoriel a pour norme (module) :

$$\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\sin(\theta) \tag{6.5.136}$$

où θ est l'angle entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Démonstration 6.36.1. Pour prouver cela nous écrivons simplement le développement de la norme du produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2&=(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\&=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\\&=\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2-\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2\cos^2(\theta)=\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2(1-\cos^2(\theta))=\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2\sin^2(\theta)\end{aligned} \tag{6.5.137}$$

Finalement :

$$\boxed{\|\vec{x}\times\vec{y}\|=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\sin(\theta)} \tag{6.5.138}$$

■ Q.E.D.

Nous remarquerons que dans le cas où E est l'espace vectoriel euclidien, la norme du produit vectoriel représente l'aire (surface) du parallélogramme construit sur des représentants $\vec{x}$ et $\vec{y}$ d'origine commune.

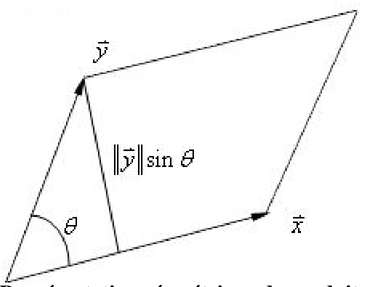


FIG. 6.103 – **Représentation géométrique du produit vectoriel**

Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants, le triplet $(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y})$ et donc aussi le triplet $(\vec{x},\vec{y},\vec{y}\times\vec{x})$ sont directs.

En cours de traduction de l'anglais

En effet, $(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3)$ étant les composantes de $\vec{x} \times \vec{y}$ (dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$), le déterminant de passage de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à $(\vec{x} \times \vec{y}, \vec{x}, \vec{y})$ (par exemple) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \qquad (6.5.139)$$

Ce déterminant est donc positif, puisqu'au moins un des z_i n'est pas nul, d'après la troisième propriété d'indépendance linéaire du produit vectoriel.

Voici encore quelques propriétés très importantes d'utilité pratique du produit vectoriel (en physique particulièrement et dans ce livre en général) qui sont triviales à vérifier si les développements sont effectués (nous pouvons les faire sur demande si jamais !) :

P1. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \circ \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \circ \vec{y})\vec{z}$

Remarque

Cette dernière relation est parfois appelée la "règle de Grassmann", ou plus couramment "double produit vectoriel" et il est important de noter que sans les parenthèses le résultat n'est pas unique !

Prouvons cette identité ! D'abord la partie gauche est égale à :

$$\begin{aligned} \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) &= \vec{x} \times \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = \vec{x} \times \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2(y_1 z_2 - y_2 z_1) - x_3(y_3 z_1 - y_1 z_3) \\ x_3(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ x_1(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_2(y_2 z_3 - y_3 z_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (6.5.140)$$

Et pour la partie droite :

$$\begin{aligned} (\vec{x} \circ \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \circ \vec{y})\vec{z} &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3)\vec{y} - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)\vec{z} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_1 \\ (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_2 \\ (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_1 \\ (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_2 \\ (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 z_1 y_1 + x_2 z_2 y_1 + x_3 z_3 y_1 - x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 \\ x_1 z_1 y_2 + x_2 z_2 y_2 + x_3 z_3 y_2 - x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_2 - x_3 y_3 z_2 \\ x_1 z_1 y_3 + x_2 z_2 y_3 + x_3 z_3 y_3 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 z_2 y_1 + x_3 z_3 y_1 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 \\ x_1 z_1 y_2 + x_3 z_3 y_2 - x_1 y_1 z_2 - x_3 y_3 z_2 \\ x_1 z_1 y_3 + x_2 z_2 y_3 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (6.5.141)$$

et donc nous voyons qu'il y a bien égalité !

P2. $(\vec{x} \times \vec{y}) \circ (\vec{z} \times \vec{v}) = (\vec{x} \circ \vec{z})(\vec{y} \circ \vec{v}) - (\vec{x} \circ \vec{v})(\vec{y} \circ \vec{z})$

P3. $(\vec{x} \times \vec{y}) \circ \vec{z} = -(\vec{x} \times \vec{z}) \circ \vec{y}$

P4. $(\vec{x} \times \vec{y}) \circ \vec{z} = \vec{x} \circ (\vec{y} \times \vec{z})$

En cours de traduction de Opera Magistris

P5. $\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2=(\vec{x}\circ\vec{x})^2(\vec{y}\circ\vec{y})^2-(\vec{x}\circ\vec{y})^2$

La dernière identité est liée au théorème de Pythagore (voir section Géométrie Euclidienne page 2590). En effet, nous le voyons mieux en réécrivant :

$$\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2+(\vec{x}\circ\vec{y})^2=\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \tag{6.5.142}$$

Cela peut être vu à partir des définitions du produit vectoriel et du produit scalaire, comme suit :

$$\vec{x}\times\vec{y}=ab\vec{n}\sin(\theta) \tag{6.5.143}$$
$$\vec{x}\circ\vec{y}=xy\cos(\theta) \tag{6.5.144}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.5.4.3 Produite Mixte (triple produit)

Nous pouvons étendre la définition du produit vectoriel à un autre type d'outil mathématique que nous appelons le "produit mixte" :

Définition (#6.5.243) : Nous appelons "produit mixte", aussi parfois appelé "triple produit scalaire", des vecteurs $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ le double produit :

$$\vec{x}\circ(\vec{y}\times\vec{z}) \tag{6.5.145}$$

souvent condensé sous la notation suivante :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] \tag{6.5.146}$$

D'après ce que nous avons vu lors de la définition du produit scalaire et vectoriel, le produit mixte peut également s'écrire :

$$\boxed{\vec{x}\circ(\vec{y}\times\vec{z})=[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\times\vec{z}\|\cos(\alpha)=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|\sin(\theta)\cos(\alpha)} \tag{6.5.147}$$

Nous remarquerons que dans le cas où E est l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, la valeur absolue du produit mixte symbolyse le volume (orienté) du parallélépipède, construit sur des représentants $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ d'origine commune.

Il est assez trivial que le produit mixte est une extension à trois dimensions du produit vectoriel. Effectivement, dans l'expression du produire mixte, le produit vectoriel représente la surface de base du parallélépipède et le produit scalaire projette un des vecteurs sur le vecteur résultant du produit vectoriel ce qui donne la hauteur h du parallélépipède.

En cours de traduction de l'anglais

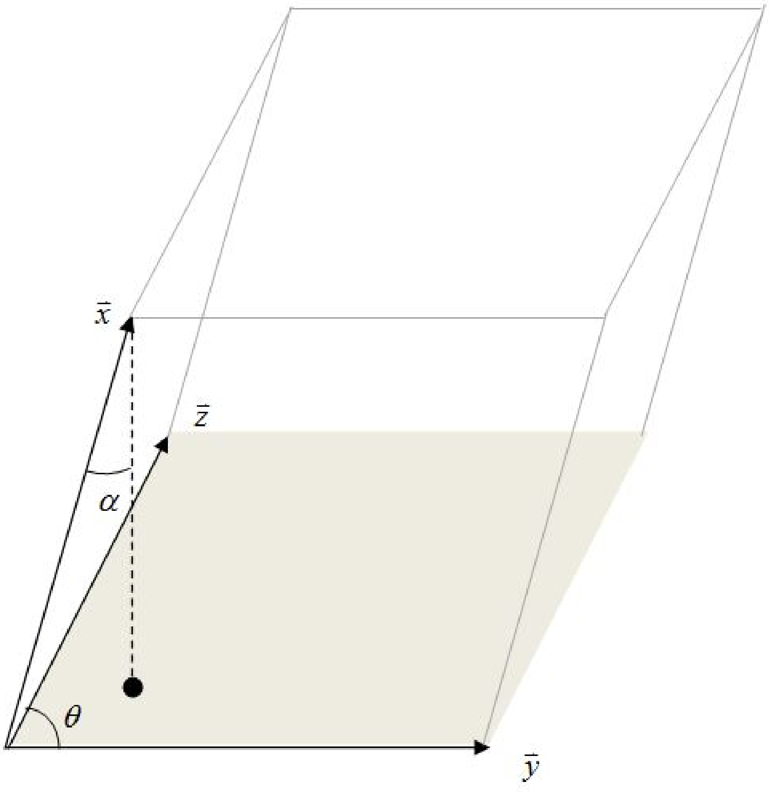


FIG. 6.104 – **Illustration du produit mixte**

Si nous développons :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=\vec{x}\begin{pmatrix}y_2z_3-y_3z_2\\ y_3z_1-y_1z_3\\ y_1z_2-y_2z_1\end{pmatrix}=x_1(y_2z_3-y_3z_2)+x_2(y_3z_1-y_1z_3)+x_3(y_1z_2-y_2z_1) \quad (6.5.148)$$

ainsi le produit triple peut aussi être compris comme le déterminant d'une matrice 3×3 (donc aussi son inverse) ayant les trois vecteurs soit comme lignes soit comme colonnes (voir section Algèbre Linéaire page 1942) :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \quad (6.5.149)$$

Par les propriétés commutatives du produit scalaire, nous avons :

$$(\vec{x}\times\vec{y})\circ\vec{z}=\vec{z}\circ(\vec{x}\times\vec{y}) \quad (6.5.150)$$

et le lecteur vérifiera sans peine (nous pouvons écrire les détails sur demande) qu'en développant les composantes nous avons :

$$(\vec{x}\times\vec{y})\circ\vec{z}=\vec{x}\circ(\vec{y}\times\vec{z}) \quad (6.5.151)$$

Le produit mixte jouit également des propriétés que le lecteur ne devrait avoir aucun mal à vérifier en développant les composantes mis à part peut-être la troisième qui découle des propriétés du produit scalaire et vectoriel (nous pouvons développer sur demande si jamais !) :

P1. $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=[\vec{z},\vec{x},\vec{y}]=[\vec{y},\vec{z},\vec{x}]=-[\vec{y},\vec{x},\vec{z}]=-[\vec{z},\vec{y},\vec{x}]=-[\vec{x},\vec{z},\vec{y}]$

P2. $[\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z},\vec{v}]=\alpha[\vec{x},\vec{z},\vec{v}]+\beta[\vec{y},\vec{z},\vec{v}]$

P3. $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]\neq 0$ si et seulement is $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ sont indépendents.

P4. $(\vec{x}\times\vec{y})\times(\vec{z}\times\vec{v})=[\vec{x},\vec{y},\vec{v}]\cdot\vec{z}-[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]\cdot\vec{v}$

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Nous reviendrons sur le produit mixte lors de notre étude du calcul tensoriel car il permet d'arriver à un résultat très intéressant en particulier en ce qui concerne la Relativité Générale !

6.5.5 Espaces Vectoriels Fonctionnels

Soit $\mathcal{C}^k_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions réelles k-fois dérivables (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1479) dans l'intervalle fermé $[a,b]$. Nous désignerons les éléments de cet ensemble par les lettres $\vec{f},\vec{g},\ldots$.

La valeur de $\vec{f}$ au point t sera bien évidemment notée $\vec{f}(t)$. Dire que $\vec{f}=\vec{g}$ équivaudra donc à dire que :

$$\vec{f}=\vec{g},\quad \forall t\in[a,b] \tag{6.5.152}$$

De manière abrégée, nous écrirons $\vec{f}(t)\equiv\vec{g}(t)$, le symbole $\equiv$ indiquant ainsi que les deux membres sont égaux pour tout t de l'intervalle $[a,b]$.

Considérons les deux opérations suivantes :

- $\vec{f}(t)+\vec{g}(t)$ définie par la relation $(\vec{f}+\vec{g})(t)\equiv\vec{f}(t)+\vec{g}(t)$
- $\alpha\vec{f}$ définie par la relation $(\alpha\vec{f})(t)=\alpha\vec{f}(t)$

Ces deux opérations satisfont à toutes les conditions des vecteurs d'un espace vectoriel que nous avons déjà définies au début de cette section (associativité, commutativité, vecteur nul, vecteur opposé, distributivité, élément neutre) et munissent donc $\mathcal{C}^k_{[a,b]}$ d'une structure d'espace vectoriel. Le vecteur nul de cet espace étant bien évidemment la fonction nulle et l'opposé de $\vec{f}$ étant la fonction $-\vec{f}$.

Il est intéressant de constater que $\mathcal{C}^k_{[a,b]}$ en tant qu'espace vectoriel est une généralisation de $\mathbb{R}^n$ au cas continu. Nous pouvons en effet concevoir tout vecteur $\vec{v}=(a_i)$ de $\mathbb{R}^n$ sous la forme d'une fonction réelle définie dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$: la valeur de cette fonction au point i est tout simplement a_i.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Les polynômes de degré n et à une inconnue forment aussi un exemple d'espace vectoriel fonctionnel de dimension $n+1$ tel que pour chaque coefficient du polynôme correspond une composante vectorielle telle que :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\mapsto\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\\\vdots\\a_1\\a_0\end{pmatrix} \tag{6.5.153}$$

Le champ d'application privilégié de la théorie abstraite du produit scalaire est constitué par les espaces vectoriels fonctionnels. Nous appelons ainsi "produit scalaire canonique" dans $\mathcal{C}_{[a,b]}(\mathbb{R}^2)$ l'opération définie par la relation :

$$\vec{f}\circ\vec{g}=\int_a^b\vec{f}(t)\vec{g}(t)\mathrm{d}t \tag{6.5.154}$$

Cette opération définit bien un produit scalaire, les propriétés de ce dernier sont vérifiées (sur demande des lecteurs nous pouvons écrire les démonstrations) et, en outre, l'intégrale :

$$\vec{f} \circ \vec{f} = \|\vec{f}\|^2 = \int_a^b \vec{f}^2(t)\mathrm{d}t \tag{6.5.155}$$

est positive si la fonction $\vec{f}$ continue n'est pas identiquement nulle.

Techniquement, cette dernière relation s'écrit lorsque dans $\mathbb{R}^2$:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\vec{f} \circ \vec{f}} = \int_a^b |f|^2(t)\mathrm{d}t \tag{6.5.156}$$

Nous donnerons plus de précisions sur cette norme et son produit scalaire associé et avec exemple dans la section Analyse Fonctionnelle.

En cours de traduction de l' anglais

6.5.6 Espaces Vectoriels Hermitiens

L'objectif de ce qui va suivre, comme tout le reste dans ce livre, n'est pas de faire une étude détaillée du sujet des espaces vectoriels complexes (dans $\mathbb{C}$) mais juste de donner le bagage et le vocabulaire minimum nécessaire à l'étude de certaines théories physiques comme la physique quantique par exemple.

Lorsque les scalaires qui apparaissent dans la définition de la notion d'espace vectoriel sont des nombres complexes (dans $\mathbb{C}$ comme vu dans la sections ur les Nombres), et non plus uniquement des nombres réels, nous parlons alors de "espaces vectoriels complexes".

Remarque

Rigoureusement dans la communication courante, il devrait systématiquement être fait mention si nous parlons d'espace vectoriel réel ou d'espace vectoriel complexe...

Donnons quelques exemples d'espaces vectoriels complexes célèbres (car beaucoup pensent qu'ils sont inutiles) :

✍**Exemples :**

E1. L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ des vecteurs-colonnes à n composantes complexes ($\mathbb{C}^1$ étant évidemment identifié à $\mathbb{C}$). Nous rencontrerons, entre autres, de tels vecteurs dans la section de Physique Quantique Relativiste.

E2. L'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes $\mathbb{C}$ en une indéterminée. Nous rencontrerons ce genre d'espaces dans les sections de Physique Quantique Ondulatoire ou encore de Chimie Quantique.

E3. L'espace vectoriel des fonctions complexes d'une variable réelle ou complexe continue ou non. Nous rencontrerons fréquemment de tels espaces vectoriels dans la section de Mécanique Ondulatoire et surtout dans la section d'Électrodynamique.

Il s'agit ici d'adapter ce que nous avons fait précédemment aux espaces vectoriels complexes. L'exemple suivant nous montre que nous ne pouvons pas transposer telles quelles les définitions précédentes. En effet, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. Comme pour $\mathbb{R}^n$, nous pourrions être tentés de définir un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{C}^n, \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \quad : \quad \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1+\ldots+x_ny_n \tag{6.5.157}$$

avec $x_i,y_i\in\mathbb{C}$.

Malheureusement, nous nous apercevons que cette définition n'est pas satisfaisante car nous aurions alors :

$$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle = x_1^2+\ldots+x_n^2 \tag{6.5.158}$$

En anglais

et cette quantité n'est pas en général un nombre réel dans l'espace des complexes (prenez par exemple des composantes étant des exponentielles complexes) ce qui viole la propriété de positivité du produit scalaire et donc empêche d'introduire tout concept de distance. Ce qui est évidemment un gros problème dans notre perception réelle du monde.

Nous ne pourrions donc plus définir une norme dans $\mathbb{C}^n$ en posant :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \tag{6.5.159}$$

Pour que $\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle$ soit un nombre réel positif nous voyons qu'il faudrait plutôt définir le produit scalaire comme ceci :

$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n : \quad \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \vec{x} \circ \bar{\vec{y}} = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n} \tag{6.5.160}$$

Dans ce cas nous avons alors :

$$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle = x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \tag{6.5.161}$$

qui est bien un nombre réel positif. À partir de là, nous pouvons à nouveau définir une norme sur l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ en posant :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} \tag{6.5.162}$$

Nous allons à présent montrer comment définir un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe dans le cas général.

6.5.6.1 Produit hermitien interne

Définition (#6.5.244) : Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe (!). Nous appelons "produit scalaire" ou plus exactement "produit hermitien" sur $\mathcal{H}$, une application :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \\ (\vec{x}, \vec{y}) \quad \mapsto \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle \end{cases} \tag{6.5.163}$$

qui satisfait (il y a plus des propriétés mais nous nous concentrerons uniquement sur celles dont nous avons besoin pour une application pratique dans ce livre et en particulier pour la section de Physique Quantique Ondulatoire) :

P1. Positivité :

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{H} : \quad \phi(\vec{x}, \vec{x}) = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle \geq 0 \in \mathbb{R}^+ \tag{6.5.164}$$

P2. Nullité (définie) :

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{H} : \quad \phi(\vec{x}, \vec{x}) = \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0 \tag{6.5.165}$$

P3. Symétrie hermitienne :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{H}^2 : \quad \phi(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{\phi(\vec{y}, \vec{x})} \Leftrightarrow \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \overline{\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle} \tag{6.5.166}$$

En cours de traduction de l'anglais

P4. La bilinéarité (forme bilinéaire) change un peu aussi... ce qui fait que nous parlons alors de "sesquilinéarité". Nous parlons alors, dans l'ordre, d'anti-linéarité à gauche et de linéarité à droite tel que :

$$\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\in\mathcal{H}^3,\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\begin{cases}\langle\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}|\vec{z}\rangle=\bar{\lambda}\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle+\bar{\mu}\langle\vec{y}|\vec{z}\rangle\\\langle\vec{x}|\lambda\vec{y}+\mu\vec{z}\rangle=\lambda\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\mu\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle\end{cases}\tag{6.5.167}$$

Remarques

R1. Certains mathématiciens mettent l'anti-linéarité à droite. C'est simplement une question de convention qui n'a aucune importance et qui existe à cause d'un manque de normes dans le domaine des mathématiques.

R2. Le lecteur remarquera peut-être sans peine que si les éléments des définitions précédentes sont tous dans $\mathbb{R}$ alors la sesquilinéarité se réduit à la bilinéarité et le caractère hermitien à la symétrie. Donc le produit hermitien se réduit au produit scalaire.

R3. Nous souhaitons donner pour l'instant uniquement le minimum sur le vaste sujet que sont les espaces vectoriels complexes afin que le lecteur puisse lire sans trop de peine le début du chapitre de Physique Quantique Ondulatoire.

Lorsque nous munissons un espace vectoriel complexe d'un produit scalaire alors au même titre qu'un espace vectoriel réel devient un espace vectoriel euclidien ou préhilbertien, l'espace vectoriel complexe devient donc ce que nous appelons un "espace vectoriel hermitien" (terme assez souvent utilisé dans la section de Physique Quantique Ondulatoire).

Définition (#6.5.245) : Encore une fois, nous disons qu'un espace $\mathcal{H}$ muni d'un produit hermitien $\langle\vec{x}|\lambda\vec{y}+\mu\vec{z}\rangle$ est un "espace de Hilbert" si cet espace est complet pour la métrique définie ci-dessus.

Ainsi, les espaces de Hilbert sont une généralisation comprenant les produits scalaires et produits hermitiens des espaces euclidiens, préhilbertiens et hermitiens.

En cours de traduction de Opera Magistris

6.5.6.2 Inégalité hermitienne de Cauchy-Schwarz

Considérons maintenant la généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que nous avons déja prouvée mais seuelement pour le cas particulier de vecteurs réels à la page 1803.

Considérons $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs complexes. Alors pour $\vec{y}\neq\vec{0}$ et pour tout nombre complexe λ, nous avons par définition le produit scalaire hermitien (rappelons que $z\bar{z}=|z|^2$) :

$$0\leq\langle\vec{x}-\lambda\vec{y},\vec{x}-\lambda\vec{y}\rangle=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle-\lambda\langle\vec{y},\vec{x}\rangle-\bar{\lambda}\langle\vec{x},\vec{y}\rangle+|\lambda|^2\langle\vec{y},\vec{y}\rangle\tag{6.5.168}$$

Maintenant prenons :

$$\lambda=\frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle}{\langle\vec{y},\vec{y}\rangle}\tag{6.5.169}$$

Alors l'inégalité hermitienne de Cauchy-Schwarz découle facilement de :

$$0 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \left| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \right|^2 \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \tag{6.5.170}$$

étant donné que simplifié, cela donne :

$$0 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \tag{6.5.171}$$

Et une fois réarrangé :

$$\boxed{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \tag{6.5.172}$$

L'égalité a lieu quand $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ (λ complexe). Alors, nous avons trivialement :

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 = |\lambda|^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \lambda \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \tag{6.5.173}$$

Cette version complexe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous sera utile pour dériver la version complexe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales (voir page 2367) qui a une place importante en Analyse Complexe et donc en Physique Quantique !

6.5.6.3 Types d'Espaces Vectoriels

Pour résumer tout cela :

- Nous appelons "espace préhilbertien" (réel ou complexe) tout espace vectoriel, de dimension finie ou non, muni d'un produit scalaire.
- Nous appelons "espace de Hilbert" (réel ou complexe) tout espace préhilbertien complet (en tant qu'espace normé).
- Nous appelons "espace euclidien", noté $\mathcal{E}^n$, tout espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.
- Nous appelons "espace hermitien", noté $\mathcal{H}^n$, tout espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire.

En cours de traduction de l'anglais

6.5.7 Systèmes de Coordonnées

Nous allons aborder ici, l'aspect des changements de coordonnées des composantes de vecteurs non pas d'une base à une autre (pour cela il faut aller voir la section d'Algèbre Linéaire) mais d'un système de coordonnées à un autre. Ce type de transformation a un fort potentiel en physique (ainsi qu'en mathématique) lorsque nous souhaitons simplifier l'étude de systèmes physiques dont les équations deviennent plus facilement manipulables dans d'autres systèmes de coordonnées.

Définition (#6.5.246) : En mathématiques, un système de coordonnées" permet de faire correspondre à chaque point d'un espace à n dimensions, un m-uplet de scalaires.

Remarque

Dans beaucoup de cas, les scalaires considérés sont des nombres réels, mais il est possible d'utiliser des nombres complexes ou des éléments d'un quelconque corps (voir section Théorie des Ensembles page 427). Plus généralement, les coordonnées peuvent provenir d'un anneau ou d'une autre structure algébrique apparentée.

Bien que nous soyons dans un chapitre et dans une section de ce livre à propos des mathématiques pures, nous nous permettrons dans ce qui va suivre de faire une liaison directe avec la physique pour ce qui concerne les expressions de la vitesse et de l'accélération dans différents systèmes de coordonnées (désolé pour les matheux...). Effectivement, notre expérience d'enseignement nous a montré que cela aide les lecteurs (la plupart du temps des étudiants) à mieux comprendre les différents concepts abstraits.

En cours de traduction de l'anglais

6.5.7.1 Système de coordonnées cartésiennes (rectangulaires)

Nous ne souhaitons pas trop nous attarder sur ce système car il est bien connu de tout le monde habituellement. Rappelons cependant que la plupart du temps, en physique, les systèmes cartésiens dans lesquels nous travaillons sont $\mathbb{R}^2$ (deux dimensions spatiales), ou $\mathbb{R}^3$ (trois dimensions spatiales) voir même $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{C}^4$ (trois dimensions spatiales et une temporelle) lorsque nous travaillons en relativité. Le nombre de dimensions peut être plus élevé comme par exemple avec la théorie de Kaluza-Klein (cinq dimensions) fusionnant la Relativité Générale et l'Électromagnétisme ou bien plus encore avec la Théorie des Cordes (plus de 20 dimensions ! ! !).

Dans $\mathbb{R}^3$ (cas le plus fréquent), il y a trois vecteurs de base notés traditionnellement :

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \tag{6.5.174}$$

Ou plus explicitement :

$$\boxed{\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \tag{6.5.175}$$

Dans ce système, la position d'un point P (repérable par un vecteur $\vec{x}$ par exemple) est définie par le triplet de nombres nommé "coordonnées" (ou plus généralement "composantes") et notée

(typiquement en calcul tensoriel) :

$$(x_1, x_2, x_3) \tag{6.5.176}$$

et en physique plus conventionnellement :

$$(x, y, z) \tag{6.5.177}$$

où habituellement la coordonnée (z) représente la hauteur (la verticale), la coordonnée (x) la largeur et la coordonnée (y) la longueur (évidemment ces choix sont complètement arbitraires).

Ce point P peut être repéré par un vecteur noté arbitrairement $\vec{r}$ dans la base $\vec{e}_i$ par la relation (utilisant la notation tensorielle) :

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \tag{6.5.178}$$

et si la base est canonique (orthonormale) telle que :

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{6.5.179}$$

nous écrivons :

$$\vec{r} = x^i \vec{e}_i = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{6.5.180}$$

En physique, si nous travaillons avec des coordonnées, c'est toujours pour pouvoir déterminer l'emplacement d'un élément comme l'illustre la figure ci-dessous :

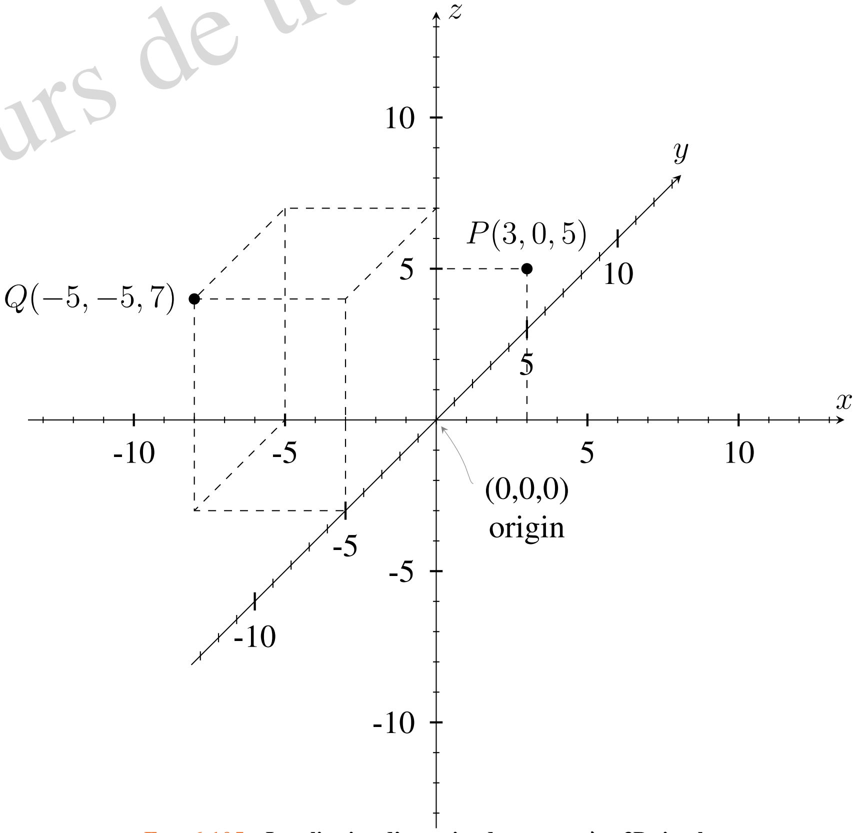


Fig. 6.105 – Localisation d'un point dans un repère 3D simple

En cours de traduction de l'anglais

Or, comme nous le verrons plus rigoureusement dans la section de Mécanique Analytique, le physicien travaille avec les notions suivantes (chaque élément dépendant souvent du temps) :

- Position : $\vec{r} = \left(x(t), y(t), z(t), t \right)$
- Vitesse : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} = \vec{v} = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t \right)$
- Accélération : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \left(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t), t \right)$

Maintenant voyons comment s'expriment ces différentes notions dans des systèmes tels que les coordonnées sphériques, cylindriques et polaires (n'oubliez pas que nous restons pour tous dans un espace plat euclidien ! ! !).

En cours de traduction de l' anglais

6.5.7.2 Système de coordonnées sphériques

Le choix de commencer avec ce système de coordonnées n'est pas un hasard. Il a pour avantage d'être une généralisation des systèmes cylindrique et polaire dont nous retrouverons par la suite plus facilement les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération [14].

Nous représentons traditionnellement (en Suisse... et ce conformément à la norme ISO 31-11) un système à coordonnées sphériques de la façon suivante :

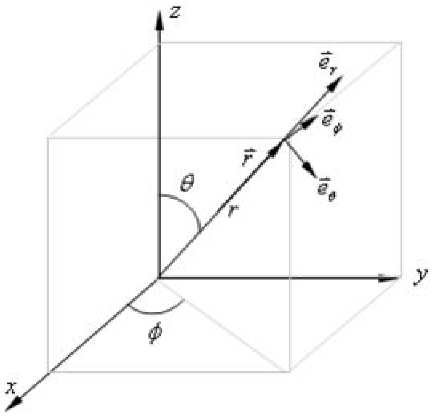


FIG. 6.106 – **Représentation du système de coordonnées sphériques**

Nous voyons très clairement si nous connaissons bien les relations trigonométriques élémentaires (voir la section du même nom dans le chapitre sur la Géométrie) que nous avons les transformations :

$$\begin{aligned}
&r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad 0 \leq r < +\infty \\
&\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \quad 0 \leq \theta < \pi, r \neq 0 \\
&\phi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r\sin\theta}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{r\sin\theta}\right), \quad 0 \leq \phi < 2\pi, r \neq 0
\end{aligned} \tag{6.5.181}$$

où les deux angles θ, ϕ sont respectivement la colatitude ($\pi/2-\theta$ est la latitude) et la longitude :

[14]Deux ensembles couramment utilisés de "coordonnées curvilignes orthogonales" sont les coordonnées polaires cylindriques et les coordonnées polaires sphériques.

En cours de traduction de l'anglais

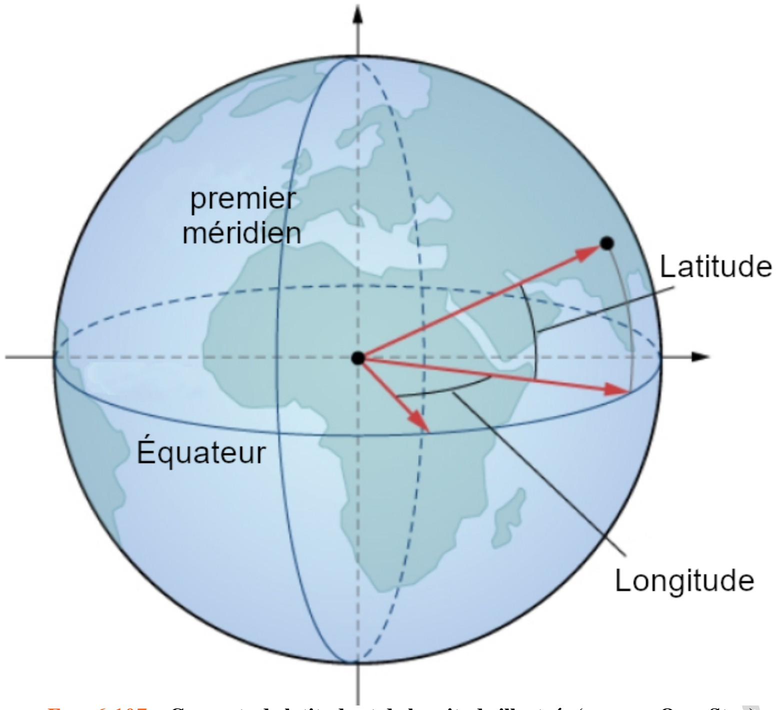


FIG. 6.107 – Concepts de latitude et de longitude illustrés (source : OpenStax)

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons inversement :

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \quad y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \quad z = r\cos(\theta) \tag{6.5.182}$$

Attention ! Selon la convention d'angle dans la figure anté-précédente, le lecteur peut trouver une expression différente pour x, y, z dans d'autres ouvrages. Une autre convention typique est par exemple :

$$x = r\cos(\theta)\cos(\phi) \quad y = r\sin(\theta)\cos(\phi) \quad z = r\sin(\phi)$$

Maintenant il nous faut trouver les expressions qui relient les vecteurs de la base sphérique que nous choisissons de noter $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ avec les vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{r} = \frac{r\sin(\theta)\cos(\phi)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\phi)\vec{e}_y + r\cos(\theta)\vec{e}_z}{r}\\
&= \sin(\theta)\cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\vec{e}_y + \cos(\theta)\vec{e}_z\\
\vec{e}_\phi &= \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\sin(\theta)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta)}\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\theta)\cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sin(\theta)}\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\sin(\phi)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sin(\theta)}\begin{pmatrix}0\\ \sin(\theta)\cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix} = -\vec{e}_x\sin(\phi) + \vec{e}_y\cos(\phi)\\
\vec{e}_\theta &= \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \begin{pmatrix}-\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\phi)\cos(\theta) - 0\cdot\sin(\theta)\sin(\phi)\\ 0\cdot\sin(\theta)\cos(\phi) - (-\sin(\phi))\cos(\theta)\\ -\sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\phi)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\phi)\cos(\theta)\\ \sin(\phi)\cos(\theta)\\ -\sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\phi)\end{pmatrix} = \vec{e}_x\cos(\theta)\cos(\phi) + \vec{e}_y\cos(\theta)\sin(\phi) - \vec{e}_z\sin(\theta)
\end{aligned} \tag{6.5.183}$$

Indiquons qu'en divisant par $\sin(\theta)$ le deuxième vecteur de base, nous nous assurons ainsi de par les propriétés de la norme du produit vectoriel que :

$$\|\vec{e}_\phi\| = \|\vec{e}_z\| \cdot \|\vec{e}_r\| \sin(\phi) = 1 \quad (6.5.184)$$

sera bien normalisé à l'unité comme prévu (car nous savons depuis le début que si nous prenons un système de coordonnées orthogonales directes, le produit des normes des vecteurs de base doit être égal à 1) !

Pour des besoins ultérieurs, déterminons les différentielles partielles de chacune de ces coordonnées :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0}\\
&\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_x \cos(\theta)\cos(\phi) + \vec{e}_y \cos(\theta)\sin(\phi) - \vec{e}_z \sin(\theta) = \vec{e}_\theta\\
&\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \sin(\theta)\sin(\phi) + \vec{e}_y \sin(\theta)\cos(\phi) = (-\vec{e}_x \sin(\theta) + \vec{e}_y \cos(\phi))\sin(\theta) = \vec{e}_\phi \sin(\theta)\\
&\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} = \vec{0}\\
&\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta} = \vec{0}\\
&\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \cos(\phi) - \vec{e}_y \sin(\phi) = -(\vec{e}_r \sin(\theta) + \vec{e}_\theta \cos(\theta))\\
&\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = \vec{0}\\
&\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_x \sin(\theta)\cos(\phi) - \vec{e}_y \sin(\theta)\sin(\phi) - \vec{e}_z \cos(\theta) = -\vec{e}_r\\
&\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \cos(\theta)\sin(\phi) + \vec{e}_y \cos(\theta)\cos(\phi) = \vec{e}_\phi \cos(\theta)
\end{aligned} \quad (6.5.185)$$

Nous allons également utiliser plus tard (pour l'étude des opérateurs vectoriels plus bas et pour la géodésique de la sphère dans la section de Mécanique Analytique) la variation $\mathrm{d}\vec{r}$ exprimée en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(r\vec{e}_r) = \vec{e}_r \mathrm{d}r + r\mathrm{d}\vec{e}_r = \vec{e}_r \mathrm{d}r + r\left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi\right)\\
= \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\theta r\mathrm{d}\theta + \vec{e}_\phi r \sin(\theta)\mathrm{d}\phi
\end{aligned} \quad (6.5.186)$$

Ou plus explicitement :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (6.5.187)$$

Tout cela peut être mis sous une forme matricielle célèbre comme (cela s'applique aussi automatiquement à la composante du vecteur unitaire) :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (6.5.188)$$

En cours de traduction de l' anglais

Pour exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées sphériques, nous aurons également besoin des dérivées par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r&=\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}\dot{\phi}=\vec{e}_\theta\dot{\theta}+\vec{e}_\phi\dot{\phi}\sin(\theta)\\ \dot{\vec{e}}_\theta&=\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\phi}\dot{\phi}=-\vec{e}_r\dot{\theta}+\vec{e}_\phi\dot{\phi}\cos(\theta)\\ \dot{\vec{e}}_\phi&=\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial\phi}\dot{\phi}=-(\vec{e}_r\sin(\dot{\theta})+\vec{e}_\theta\cos(\dot{\theta}))\dot{\phi}\end{aligned}\tag{6.5.189}$$

Donc si nous faisons maintenant un peu de physique, nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{v}=\dot{\vec{r}}&=\begin{pmatrix}\mathrm{d}_t(r\sin(\theta)\cos(\phi))\\ \mathrm{d}_t(r\sin(\theta)\sin(\phi))\\ \mathrm{d}_t(r\cos(\theta))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{r}\sin(\theta)\cos(\phi)+r\cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta}-r\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}\\ \dot{r}\sin(\theta)\sin(\phi)+r\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\theta}+r\sin(\theta)\cos(\phi)\dot{\phi}\\ \dot{r}\cos(\theta)-r\sin(\theta)\dot{\theta}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}\dot{r}+\begin{pmatrix}r\cos(\theta)\cos(\phi)\\ r\cos(\theta)\sin(\phi)\\ -r\sin(\theta)\end{pmatrix}\dot{\theta}+\begin{pmatrix}-r\sin(\theta)\sin(\phi)\\ r\sin(\theta)\cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix}\dot{\phi}\\ &=\vec{e}_r\dot{r}+r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \cos(\theta)\sin(\phi)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix}\dot{\theta}+r\sin(\theta)\begin{pmatrix}-\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix}\dot{\phi}=\vec{e}_r\dot{r}+r\vec{e}_\theta\dot{\theta}+r\sin(\theta)\vec{e}_\phi\dot{\phi}\end{aligned}\tag{6.5.190}$$

Ceci nous amène à (nous aurons besoin de cette relation principalement dans la section d'Astrophysique) :

$$\boxed{\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+\vec{e}_\theta r\dot{\theta}+\vec{e}_\phi r\dot{\phi}\sin(\theta)}\tag{6.5.191}$$

Il est intéressant de remarquer que nous arrivons au même résultat en passant par la méthode suivante qui est peut-être moins intuitive :

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{e}}r+\dot{r}\vec{e}_r\tag{6.5.192}$$

et en y substituant la dérivée obtenue plus haut :

$$\dot{\vec{e}}_r=\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}\dot{r}+\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}\dot{\phi}=\vec{e}_\theta\dot{\phi}+\vec{e}_\phi\dot{\phi}\sin(\theta)\tag{6.5.193}$$

En cours de traduction de l'anglais

En ce qui concerne l'accélération nous obtenons :

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}_t\left(\dot{r}\sin(\theta)\cos(\phi)+r\cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta}-r\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}\right)\\ \mathrm{d}_t\left(\dot{r}sin(\theta)\sin(\phi)+r\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\theta}+r\sin(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta}\right)\\ \mathrm{d}_t\left(\dot{r}\cos(\theta)-r\sin(\theta)\dot{\theta}\right)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\left(\ddot{r}\sin(\theta)\cos(\phi)+\dot{r}\cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta}-\dot{r}\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}\right)+\\ \left(\dot{r}\cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta}-r\sin(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta}\dot{\theta}+r\cos(\theta)\cos(\phi)\ddot{\theta}-r\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\\ -\left(\dot{r}\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}+r\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}\dot{\theta}+r\sin(\theta)\cos(\phi)\dot{\phi}\dot{\phi}+r\sin(\theta)\sin(\phi)\ddot{\phi}\right)\\ \\ \left(\ddot{r}\sin(\theta)\sin(\phi)+\dot{r}\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\theta}+\dot{r}\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}\right)\\ +\left(\dot{r}\cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\theta}-r\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\theta}\dot{\theta}+r\cos(\theta)\sin(\phi)\ddot{\theta}+r\cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\\ +\left(\dot{r}\sin(\theta)\cos(\phi)\dot{\phi}+r\cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\phi}\dot{\theta}-r\sin(\theta)\sin(\phi)\dot{\phi}\dot{\phi}+r\sin(\theta)\sin(\phi)\ddot{\phi}\right)\\ \\ \left(\ddot{r}\cos(\theta)-\dot{r}\sin(\theta)\dot{\theta}\right)-\left(\dot{r}\sin(\theta)\dot{\theta}+r\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\theta}+r\sin(\theta)\dot{\theta}\right)\end{pmatrix}$$
$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}\right)\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \cos(\theta)\sin(\phi)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix}$$
$$+\left(2\dot{r}\sin(\theta)\dot{\phi}+2r\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi}+r\sin(\theta)\ddot{\phi}\right)\begin{pmatrix}-\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix}+r\sin(\theta)\dot{\phi}^2\begin{pmatrix}-\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta+\left(2\dot{r}\sin(\theta)\dot{\phi}+2r\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi}+r\sin(\theta)\ddot{\phi}\right)\vec{e}_\phi-r\sin(\theta)\dot{\phi}^2\begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\\ 0\end{pmatrix} \tag{6.5.194}$$

Or, nous avons :

$$\begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\phi)\sin^2(\theta)+\cos(\phi)\cos^2(\theta)\\ \sin(\phi)\sin^2(\theta)+\sin(\phi)\cos^2(\theta)\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=\sin(\theta)\begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}+\cos(\theta)\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \cos(\theta)\sin(\phi)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix} \tag{6.5.195}$$
$$=\sin(\theta)\vec{e}_r+\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

Donc il vient :

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta+\left(2\dot{r}\sin(\theta)\dot{\phi}+2r\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi}+r\sin(\theta)\ddot{\phi}\right)\vec{e}_\phi$$
$$-r\sin(\theta)\dot{\phi}^2\left(\sin(\theta)\vec{e}_r+\cos(\theta)\vec{e}_\theta\right) \tag{6.5.196}$$

Dès lors :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}=&\vec{e}_r(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta))+\vec{e}_\theta(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\\ &+\vec{e}_\phi(r\ddot{\phi}\sin(\theta)+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta)+2\dot{r}\dot{\phi}\sin(\theta))\end{aligned}} \tag{6.5.197}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.5.7.2.1 Distance orthodromique

Nous allons maintenant voir une application puissante et simple du calcul vectoriel (notamment du produit scalaire à coordonnées sphériques !). Le lecteur verra plus loin dans la section de Mécanique Analytique que la géodésique de la sphère est l'équation des grands cercles (cercles sur la sphère dont les centres coïncident avec le centre de la sphère).

Mais sans connaître ce résultat, et même sans en avoir besoin, nous souhaitons calculer la "distance du grand cercle" ou "distance orthodromique" qui est la distance la plus courte entre deux points sur la surface d'une sphère (à ne pas confondre avec la "distance loxodromique" qui est la ligne droite que l'on trace sur un plan de projection de Mercator de la Terre ! - une ligne à cap constant - pas le chemin le plus court sur une sphère), mesurée le long de la surface de la sphère :

FIG. 6.108 – Distance orthodromique (distance du grand cercle)

En cours de ... l'anglais

À travers deux points quelconques d'une sphère qui ne sont pas directement opposés l'un à l'autre, il existe un grand cercle unique. Les deux points séparent le grand cercle en deux arcs. La longueur de l'arc le plus court est la distance orthodromique entre les points. Un grand cercle doté d'une telle distance est nommé "cercle riemannien" en géométrie riemannienne.

Considérons deux points à la surface d'une sphère P_1 et P_2 et leurs latitude et longitude respectives tels qu'ils soient définis par :

$$P_1 = (\text{latitude}, \text{longitude}) = (\theta_1, \phi_1) \qquad P_2 = (\text{latitude}, \text{longitude}) = (\theta_2, \phi_2) \tag{6.5.198}$$

Dès lors en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} P_1 &= (R\sin(\theta_1)\cos(\phi_1), R\sin(\theta_1)\sin(\phi_1), R\cos(\theta_1)) \\ P_2 &= (R\sin(\theta_2)\cos(\phi_2), R\sin(\theta_2)\sin(\phi_2), R\cos(\theta_2)) \end{aligned} \tag{6.5.199}$$

Soit en prenant les vecteurs ayant pour origine le centre de la sphère :

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= R\sin(\theta_1)\cos(\phi_1)\vec{i} + R\sin(\theta_1)\sin(\phi_1)\vec{j} + R\cos(\theta_1)\vec{k} \\ \vec{P}_2 &= R\sin(\theta_2)\cos(\phi_2)\vec{i} + R\sin(\theta_2)\sin(\phi_2)\vec{j} + R\cos(\theta_2)\vec{k} \end{aligned} \tag{6.5.200}$$

La Terre est presque sphérique, donc les formules de distance orthodromique donnent la distance entre les points à la surface de la Terre (à vol d'oiseau) correcte à 0.5% environ.

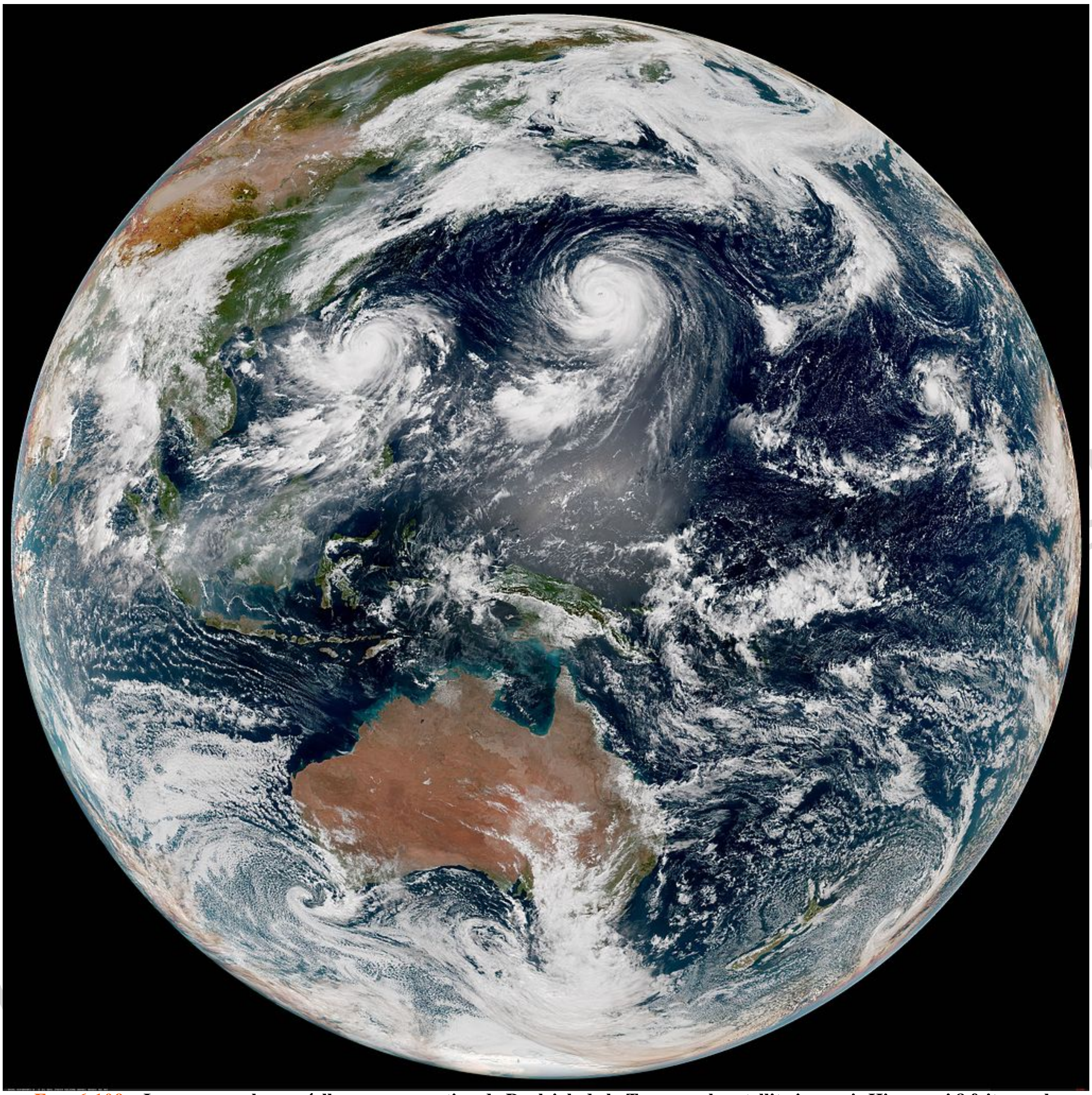


FIG. 6.109 – Image en couleurs réelles avec correction de Rayleigh de la Terre par le satellite japonais Himawari 8 faite par le capteur AHI (année 12015 selon le calendrier holocène)

Nous faisons maintenant le produit scalaire et utilisons l'identité trigonométrique :

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 \circ \vec{P}_2 &= RR\left(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right)\\ &= R^2\left[\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\left(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\right)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right]\\ &= R^2\left[\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_2-\phi_1)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right]\end{aligned} \quad (6.5.201)$$

En fonction de l'angle que nous noterons α nous savons que le produit scalaire a aussi pour expression :

$$\vec{P}_1 \circ \vec{P}_2 = R^2\cos(\alpha) \quad (6.5.202)$$

Par identification de cette dernière relation avec la relation antérieur-précédent, nous obtenons :

$$R^2\cos(\alpha)=R^2\left[\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_2-\phi_1)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right] \quad (6.5.203)$$

D'où après simplification :

$$\alpha=\arccos\left(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_2-\phi_1)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right) \quad (6.5.204)$$

Comme nous savons que la circonférence du cercle est donnée par $P=2\pi R$ (voir section de Trigonométrie) alors les longueurs d'arc par unité d'angle sont données par :

$$l=R\alpha \quad (6.5.205)$$

Donc, finalement, nous obtenons la relation de distance orthodromique :

$$\boxed{l=R\arccos\left(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_2-\phi_1)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right)} \quad (6.5.206)$$

Cela peut être trouvé dans la littérature sous différentes formes à cause de la convention des angles sphériques comme déjà mentionné lors de notre introduction des coordonnées sphériques à la page 1826.

La relation ci-dessus fonctionne bien (nous ferons une application numérique plus tard !) et nous pouvons voir de nombreuses personnes la copier dans des tableurs ou des logiciels d'intelligence d'affaires (business intelligence) pour exécuter une sorte d'analyse géostatistique. Cependant, vous pouvez rencontrer une autre relation dans la pratique (à nouveau utilisée dans divers logiciels de tableur) qui est assez ancienne et donne le même résultat. La raison pour laquelle les deux sont utilisés est que les gens copient/collent la première relation trouvée grâce aux moteurs de recherche Internet sans rechercher s'il existe plusieurs façons de calculer une même chose. La relation que nous allons voir existe car à une époque où l'ordinateur n'existait pas elle était plus simple à utiliser grâce à des tables numériques créés par des humains...

En cours de traduction de l'anglais

6.5.7.2.1.1 Distance de Haversine

Le terme "haversine", qui vient apparemment de "half versed sine" en anglais (il s'agit d'une fonction trigonométrique applée "sinus verse" multipliée par un facteur $1/2$), permet de déterminer la distance du grand cercle entre deux points d'une sphère, à partir de leurs longitudes et latitudes. Pour dériver la distance de haversine, nous supposons que nous disposons de deux points P_1 et P_2 déterminés par leurs paires latitude-longitude respectives : $P_1(\theta_1,\phi_1),P_2(\theta_2,\phi_2)$. En coordonnées cartésiennes, nous avons $P_1=P_1(x_1,y_1,z_1)$ et $P_2=P_2(x_2,y_2,z_2)$, où x,y et z sont déterminés par les coordonnées sphériques utilisant l'autre convention typique :

$$\begin{aligned}x&=R\cos(\theta)\cos(\phi)\\y&=R\cos(\theta)\sin(\phi)\\z&=R\sin(\theta)\end{aligned} \quad (6.5.207)$$

La distance euclidienne d entre P_1 et P_2 est donnée par le théorème tridimensionnel de Pythagore :

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \quad (6.5.208)$$

La majeure partie de notre travail consistera à calculer cette distance en termes de coordonnées sphériques. En convertissant les coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques, nous obtenons :

$$\begin{aligned}d^2 &= (R\cos(\theta_1)\cos(\phi_1) - R\cos(\theta_2)\cos(\phi_2)^2 + (R\cos(\theta_1)\sin(\phi_1) - R\cos(\theta_2)\sin(\phi_2))^2\\ &+ (R\sin(\theta_1) - R\sin(\theta_2))^2\\ &= R^2\left[\cos^2(\theta_1)\cos^2(\phi_1) - 2\cos(\theta_1)\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\cos(\phi_2) + \cos^2(\theta_2)\cos^2(\phi_2)\right.\\ &+ \cos^2(\theta_1)\sin^2(\phi_1) - 2\cos(\theta_1)\sin(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\phi_2) + \cos^2(\theta_2)\sin^2(\phi_2)\\ &\left.+\sin^2(\theta_1) - 2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)\right]\\ &= R^2(2 - 2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\phi_1-\phi_2) - 2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2))\end{aligned} \tag{6.5.209}$$

Dès lors :

$$\frac{d^2}{R^2} = 2 - 2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\phi_1-\phi_2) - 2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \tag{6.5.210}$$

La distance est pour des raisons historiques (de calcul) souvent représentée dans les termes de la soi-disant "fonction de haversine" définie par :

$$\text{haversine}(A) = \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-\cos(A)}{2} \tag{6.5.211}$$

Cela dit que $\cos(A) = 1 - 2\text{haversine}(A)$.

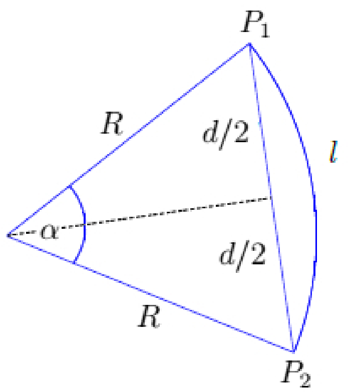
Revenant à la relation pour d^2/R^2 ci-dessus, nous continuons, en introduisant la nouvelle notation et en utilisant les identités trigonométriques habituelles :

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{R^2} &= 2 - 2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\phi_1-\phi_2) - 2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\\ &= 2 - 2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)(1 - 2\text{haversine}(\phi_1-\phi_2)) - 2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\\ &= 2 - 2\cos(\theta_1-\theta_2) + 4\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{haversine}(\phi_1-\phi_2)\\ &= 4\text{haversine}(\theta_1-\theta_2) + 4\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{haversine}(\phi_1-\phi_2)\end{aligned} \tag{6.5.212}$$

Dès lors :

$$\left(\frac{d}{2R}\right)^2 = \text{haversine}(\theta_1-\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{haversine}(\phi_1-\phi_2) \tag{6.5.213}$$

Remarquez maintenant qu'en suivant la figure ci-dessous :



En cours de traduction de l'anglais

nous avons :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{d}{2R}\Leftrightarrow\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\text{haversine}(\alpha)=\left(\frac{d}{2R}\right)^2 \tag{6.5.214}$$

Alors :

$$\text{haversine}(\alpha)=\text{haversine}(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{haversine}(\phi_1-\phi_2) \tag{6.5.215}$$

Mais rappelez-vous que nous recherchons l dans la figure ci-dessus. Donc comme $l=R\alpha$, et donc $\alpha=l/R$, nous avons :

$$\text{haversine}\left(\frac{l}{R}\right)=\text{haversine}(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{haversine}(\phi_1-\phi_2) \tag{6.5.216}$$

Remarque

Sur Wikipédia, cette dernière relation est notée :

$$\text{hav}\left(\frac{d}{r}\right)=\text{hav}(\varphi_2-\varphi_1)+\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\,\text{hav}(\lambda_2-\lambda_1)$$

Explicitement :

$$\sin^2\left(\frac{l}{2R}\right)=\text{haversine}(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{haversine}(\phi_1-\phi_2) \tag{6.5.217}$$

Dès lors :

$$l=2R\arcsin\left(\sqrt{\text{haversine}(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\text{haversine}(\phi_1-\phi_2)}\right) \tag{6.5.218}$$

Ou encore plus explicitement nous avons alors la "distance de haversine" :

$$l=2R\arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\sin^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)}\right) \tag{6.5.219}$$

Le calcul de la distance orthodromique entre deux points est si importante en navigation que les anciens produisaient des tableaux donnant les valeurs de la fonction haversine et aussi de l'inverse de la fonction haversine. Cela a rendu la vie des marins beaucoup plus facile. Calculer la distance l impliquait seulement de rechercher deux valeurs de cosinus et deux valeurs de haversine, de les additionner et de les multiplier correctement, de rechercher l'inverse de la fonction haversine et de multiplier par R - c'est fait !

La raison pour laquelle la fonction Haversine est passée de mode est qu'avec l'aide de calculatrices et d'ordinateurs, il est assez facile de travailler avec les méthodes de calcul précédentes. C'est pourquoi vous ne trouvez pas de bouton Haversine sur une calculatrice normale.

En cours de traduction de ... is

✍**Exemple :**

Comparons le résultat des deux relations établies plus haut ! C'est-à-dire :

$$l=2R\arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\sin^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)}\right)$$

et :

$$l=R\arccos\left(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_2-\phi_1)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right)$$

Essayons ! Liverpool a une latitude 53.4° et une longitude -3° (-0.052 [rad]), et New York a une latitude 40.71° et une longitude -74°. Ceux-ci sont mesurés en degrés. Les convertir en radians (multiplier par $\pi/180$) donne $\theta_{\text{L}}=0.932^\circ$ et $\phi_{\text{L}}=-0.052^\circ$ pour Liverpool, et $\theta_{\text{NY}}=0.71^\circ$ et $\phi_{\text{NY}}=-1.291^\circ$ pour New York (arrondi à trois décimales).

En les connectant à la relation haversine, avec le rayon de la Terre $R=6371$, nous obtenons :

$$l=2\cdot 6371\cdot\arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{0.932-(-0.052)}{2}\right)+\cos(0.932)\cos(0.71)\sin^2\left(\frac{(-0.052)-(-1.291)}{2}\right)}\right)\cong 5323\text{ [km]}$$

et avec la deuxième méthode, nous obtenons le même résultat (rappelez-vous que nous l'avons établi en utilisant une autre convention pour la définition des coordonnées sphériques, c'est pourquoi nous devons prendre l'angle complémentaire) :

$$l=R\arccos\left(\sin(\pi/2-0.932)\sin(\pi/2-0.71)\cos((-1.291)-(-0.052))+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right)\cong 5323\text{ [km]}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.5.7.3 Système de coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques (très utile dans l'étude des systèmes à mouvements hélicoïdaux) est assez semblable à celui des coordonnées sphériques puisqu'il peut être vu comme une tranche de la sphère.

Soit le schéma :

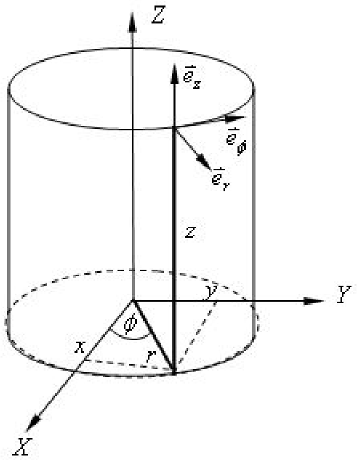


FIG. 6.110 – **Représentation du système de coordonnées cylindriques**

En cours de traduction de l' anglais

Attention ! ! ! Le vecteur $\vec{r}$ est contrairement au cas sphérique précédent uniquement défini dans le plan XY ou un plan qui lui est parallèle !

Il vient sans peine qu'en coordonnées cylindriques $r > 0$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \quad \phi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \text{ et } \phi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \tag{6.5.220}$$

et inversement :

$$x = r\cos(\phi) \quad y = r\sin(\phi) \quad z = z \tag{6.5.221}$$

Maintenant il nous faut trouver les expressions qui relient les vecteurs de la base cylindrique que nous choisissons de noter $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ (au lieu de $\vec{r}, \vec{\phi}, \vec{z}$ comme cela se fait traditionnellement) avec les vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Nous avons, identiquement à ce que nous avons fait pour les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{r} = \vec{e}_x\cos(\phi) + \vec{e}_y\sin(\phi) \\ \vec{e}_\phi &= \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{\sin(\phi)} = -\vec{e}_x\sin(\phi) + \vec{e}_y\cos(\phi) \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned} \tag{6.5.222}$$

Ou plus explicitement :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\\ 0\end{pmatrix}, \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{6.5.223}$$

Tout cela peut être mis sous une forme matricielle célèbre comme (cela s'applique aussi automatiquement à la composante du vecteur unitaire) :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \tag{6.5.224}$$

Indiquons qu'en divisant par $\sin(\phi)$ le second vecteur de base $\vec{e}_\phi$, nous nous assurons de par les propriétés de la norme du produit vectoriel que :

$$\|\vec{e}_\phi\| = \|\vec{e}_z\| \cdot \|\vec{e}_r\| \sin(\phi) = 1 \tag{6.5.225}$$

sera bien normalisé à l'unité comme attendu (comme nous savons depuis le début que lorsque nous prenons un système de coordonnées orthogonales directes, le produit des normes des vecteurs de base doit être égal à 1) ! Dans le cas des coordonnées cylindriques l'angle étant de toute façon droit, nous ne serions pas obligé d'indiquer cette division, mais nous avons fait ce choix par souci d'homogénéité avec les développements précédents...

Remarque

Il est important de noter que le produit vectoriel de deux vecteurs de base donne toujours le troisième vecteur de base perpendiculaire (comme pour les coordonnées cartésiennes et sphériques donc !).

Pour des besoins ultérieurs, déterminons les différentielles partielles de chacune de ces coordonnées :

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \sin(\phi) + \vec{e}_y \cos(\phi) = \vec{e}_\phi \quad ; \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_x \cos(\phi) - \vec{e}_y \sin(\phi) = -\vec{e}_r \quad ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0 \end{gathered} \tag{6.5.226}$$

Nous allons également utiliser plus tard (pour l'étude des opérateurs vectoriels) la variation $\mathrm{d}\vec{r}$ exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(r\vec{e}_r) = \vec{e}_r\mathrm{d}r + r\mathrm{d}\vec{e}_r = \vec{e}_r\mathrm{d}r + r\left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = \vec{e}_r\mathrm{d}r + r\vec{e}_\phi\mathrm{d}\phi \tag{6.5.227}$$

Pour exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cylindriques, nous aurons également besoin des dérivées par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}\dot{z} = \vec{e}_\phi\dot{\phi} \\ \dot{\vec{e}}_\phi &= \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z}\dot{z} = -\vec{e}_r\dot{\phi} \\ \dot{\vec{e}}_z &= \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}\dot{z} = \vec{0} \end{aligned} \tag{6.5.228}$$

Donc si nous faisons maintenant un peu de physique, nous avons (rappelons que la composante z est indépendante des autres composantes cylindriques) :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{z}} = \vec{e}_r\dot{r} + \dot{r}\vec{e}_r + \vec{e}_z\dot{z} + \dot{\vec{e}}_z z \tag{6.5.229}$$

En cours de traduction anglais

ce qui nous amène à :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \vec{e}_\phi r\dot{\phi} + \vec{e}_z\dot{z} \qquad (6.5.230)$$

Pour l'accélération nous obtenons (exactement la même démarche que pour déterminer l'expression de la vitesse) :

$$\vec{a} = \vec{e}_r\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) + \vec{e}_\phi\left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right) + \vec{e}_z\ddot{z} \qquad (6.5.231)$$

6.5.7.4 Système de coordonnées polaires

Le système de coordonnées polaires est très semblable à celui des coordonnées cylindriques puisqu'il peut être vu comme un retranchement d'une dimension (la hauteur) du système cylindrique (nous retrouverons souvent ce système dans les section de Mécanique Classique, Physique Quantique Corpusculaire et d'Astronomie).

Soit la figure :

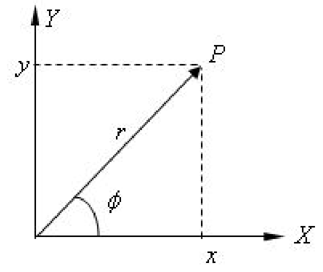


FIG. 6.111 – **Représentation du système de coordonnées polaires**

En cours de tr de l'anglais

Ainsi, il vient sans peine qu'en coordonnées polaires pour $r > 0$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \phi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \qquad \phi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \quad \text{et} \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (6.5.232)$$

et inversement :

$$x = r\cos(\phi) \qquad y = r\sin(\phi) \qquad (6.5.233)$$

Remarque

En physique, nous utilisons fréquemment l'équation paramétrique précédente du cercle de la manière suivante impliquant le temps t et la pulsation (comme constante) ω :

$$\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\vec{e}_x + r\sin(\omega t)\vec{e}_y \qquad (6.5.234)$$

Dès lors :

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t)} \qquad (6.5.235)$$

Maintenant il nous faut trouver les expressions qui relient les vecteurs de la base polaire que nous avons choisis de noter $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi$ (au lieu de $\vec{r}, \vec{\phi}$ comme cela ce fait traditionnellement) avec les vecteurs de la base cartésienne $\vec{e}_x, \vec{e}_y$. Nous avons identiquement à ce que nous avions fait pour les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{r} = \vec{e}_x \cos(\phi) + \vec{e}_y \sin(\phi) \\ \vec{e}_\phi &= \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{\sin(\theta)} = -\vec{e}_x \sin(\phi) + \vec{e}_y \cos(\phi)\end{aligned} \quad (6.5.236)$$

Ou plus explicitement :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos(\phi) \\ \sin(\phi)\end{pmatrix}, \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin(\phi) \\ \cos(\phi)\end{pmatrix} \quad (6.5.237)$$

Encore une fois, en divisant par $\sin(\theta)$ le second vecteur de base $\vec{e}_\phi$, nous nous assurons des propriétés de la norme du produit vectoriel que :

$$\|\vec{e}_\phi\| = \|\vec{e}_z\| \cdot \|\vec{e}_r\| \sin(\theta) = 1 \quad (6.5.238)$$

sera bien normalisé à l'unité (car nous savons dès le départ que si nous prenons un repère orthogonal direct, le produit des normes des vecteurs de base doit être égal à 1) !. Dans le cas de coordonnées polaires l'angle étant de toute façon droit, nous ne serions pas obligés d'indiquer cette division, mais nous avons fait ce choix par cohérence avec les développements précédents.

En cours de traduction de l'anglais

Pour des besoins ultérieurs, déterminons les différentielles partielles de chacune de ces coordonnées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} &= -\vec{e}_x \sin(\phi) + \vec{e}_y \cos(\phi) = \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} &= -\vec{e}_x \cos(\phi) - \vec{e}_y \sin(\phi) = -\vec{e}_r\end{aligned} \quad (6.5.239)$$

Nous allons également utiliser plus tard (pour l'étude des opérateurs vectoriels) la variation $\mathrm{d}\vec{r}$ exprimée en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}(r\vec{e}_r) = \vec{e}_r \mathrm{d}r + r\mathrm{d}\mathrm{d}\vec{e}_r = \vec{e}_r \mathrm{d}r + r\left(\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi\right) \\ &= \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\phi r \mathrm{d}\phi\end{aligned} \quad (6.5.240)$$

Pour exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées polaires, nous aurons également besoin des dérivées par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}\dot{\phi} = \vec{e}_\phi \dot{\phi} \\ \dot{\vec{e}}_\phi &= \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}\dot{\phi} = -\vec{e}_r \dot{\phi}\end{aligned} \quad (6.5.241)$$

Donc si nous faisons maintenant un peu de physique, nous avons :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{e}}_r r + \dot{r}\vec{e}_r \quad (6.5.242)$$

ce qui nous amène à :

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+\vec{e}_\phi r\dot{\phi} \qquad (6.5.243)$$

où le premier terme est la composante radiale de la vitesse et le second la composante tangentielle de la vitesse (angulaire). L'expression de la vitesse en coordonnées polaires est très importante en astronomie puisqu'elle permet de calculer assez facilement l'énergie cinétique :

$$E_c=\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}\right) \qquad (6.5.244)$$

Pour l'accélération nous obtenons :

$$\vec{a}=\vec{e}_r(\ddot{r}-\dot{\phi}^2r)+\vec{e}_\phi(2\dot{r}\dot{\phi}+r\ddot{\phi}) \qquad (6.5.245)$$

où le premier terme est l'accélération radiale, le second l'accélération centripète, le troisième l'accélération de Coriolis et le quatrième l'accélération tangentielle.

En cours de traduction de l' anglais

6.5.8 Opérateurs Différentiels

Définition (#6.5.247) : Définir un champ scalaire, vectoriel ou tensoriel, dans un volume V, c'est définir une application qui, à tout point $\vec{r}$ de ce volume V, associe respectivement une grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle.

Ainsi, l'application f qui, à tout point de V, de coordonnées spatiales x, y, z associe la valeur scalaire $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ est un champ scalaire dans V.

En chaque point d'un volume traversé par un fluide en mouvement, le vecteur qui coïncide à chaque instant avec la vitesse de la particule changeante qui passe en ce point à ce même instant définit un champ vectoriel 3D, éventuellement variable dans le temps. Les champs ainsi définis constituent un outil mathématique de base dans l'ensemble de la physique.

Remarque

Lorsque nous représentons graphiquement un champ scalaire, l'ensemble des points continus de valeur égale constitue ce que l'on appelle des "isolignes" ou plus couramment "courbes de niveau".

Les champs vectoriels sont particulièrement un outil important pour décrire de nombreux concepts physiques, tels que la gravitation et l'électromagnétisme, qui affectent le comportement des objets sur une grande région d'un plan ou de l'espace. Ils sont également utiles pour faire face à des comportements à grande échelle tels que les tempêtes atmosphériques ou les courants océaniques profonds.

Par exemple, la figure ci-dessous montre un champ gravitationnel exercé par deux objets astronomiques, comme une étoile et une planète ou une planète et une lune. En tout point de la figure, le vecteur associé à un point donne la force gravitationnelle nette[15] exercé par les deux objets sur un objet de masse unitaire. Les vecteurs de plus grande magnitude sur la figure sont les vecteurs les plus proches de l'objet le plus grand. Le plus gros objet a une plus grande masse, il exerce donc une force gravitationnelle de plus grande ampleur que le plus petit objet.

En cours de traduction de l'anglais

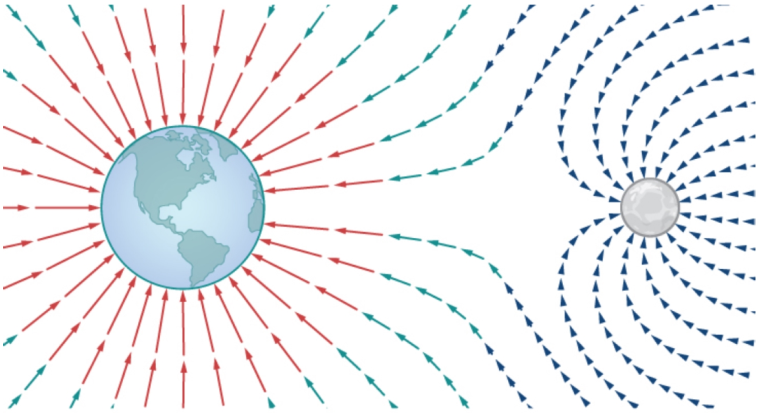


FIG. 6.112 – Exemple de champ vectoriel gravitationnel (source : OpenStax)

Un autre exemple est la figure ci-dessous qui montre la vitesse d'une rivière en des points de

[15]Nous le verrons lors de notre étude de la Relativité Générale que la force gravitationnelle est fictive et nous devrions plutôt utiliser l'expression "interaction gravitationnelle".

sa surface. Le vecteur associé à un point donné de la surface de la rivière donne la vitesse de l'eau en ce point. Étant donné que les vecteurs à gauche de la figure sont de faible amplitude, l'eau s'écoule lentement sur cette partie de la surface. Au fur et à mesure que l'eau se déplace de gauche à droite, elle rencontre des rapides autour d'un rocher. La vitesse de l'eau augmente et un tourbillon se produit dans une partie des rapides.

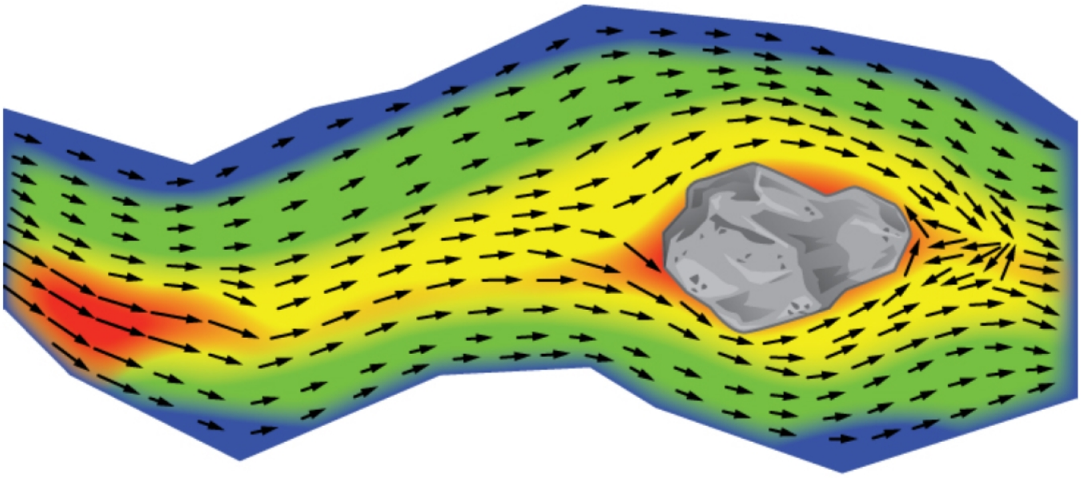


FIG. 6.113 – Exemple de champ vectoriel de vitesse (source : OpenStax)

Le gradient, la divergence et la rotation sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre qui seront introduits ici. Cela signifie qu'ils n'impliquent que les dérivées premières partielles (ou simplement "différentielles") des champs, contrairement, par exemple, à l'opérateur de Laplace (laplacien) qui implique des dérivées partielles d'ordre 2.

En cours de traduction de l'anglais

6.5.8.1 Gradients d'un champ scalaire

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un champ de scalaires et le transforme en un champ de vecteurs. Intuitivement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire, et l'intensité de cette variation. Par exemple, le gradient de l'altitude est dirigé selon la ligne de plus grande pente et sa norme augmente avec la pente.

Soit un champ scalaire tridimensionnel $f(x,y,z)$, où x et y et z sont les coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace. Lorsque M se déplace dans l'espace selon le vecteur $\mathrm{d}\vec{r}$ de composantes $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ le champ scalaire f varie de $\mathrm{d}f$ selon la différentielle totale :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \tag{6.5.246}$$

À partir de cette relation, nous pouvons définir "l'opérateur gradient" d'un champ scalaire tel que :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \circ \mathrm{d}\vec{r} = \vec{\nabla}(f) \circ \mathrm{d}\vec{r} \tag{6.5.247}$$

où :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) \tag{6.5.248}$$

est un terme vectoriel appelé le "gradient du champ scalaire f". Pour condenser l'écriture, nous utilisons parfois le symbole $\vec{\nabla}$ nommé le "nabla du champ scalaire f".

Le vecteur obtenu par le calcul du gradient a les quatre propriétés suivantes :

P1. Les composantes du gradient représentent la variation (pente) de la fonction f selon les différentes directions de l'espace.

P2. Le gradient est perpendiculaire aux isolignes de la fonction f.

P3. La direction du gradient (et donc sa norme) est la variation maximale de f.

P4. La direction du gradient montre les valeurs où f augmente.

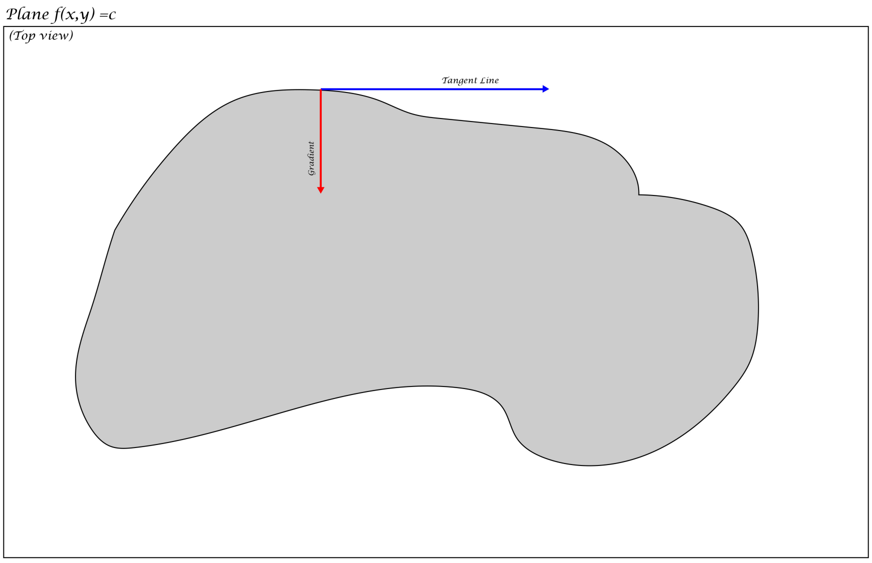
Suite à la demande de certains lecteurs, démontrons quelques-unes de ces propriétés !

Soit $t \mapsto C(t)$ une isoligne. Alors $t \mapsto f(c(t)) = c^{te}$ et dès lors :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(c(t)) = \vec{\nabla}_{c(t)}\left(f(t)\right) \circ c'(t) \tag{6.5.249}$$

ce qui prouve que le gradient est orthogonal à la tangente de l'isoligne (propriété P2). Ceci peut être illustré comme suit :

En cours de traduction de l'anglais



En cours de traduction anglais

Remarque

En d'autres termes : le gradient $\vec{\nabla}_{x_0,y_0} f$ d'une fonction $f(x,y)$ à x_0, y_0 est perpendiculaire à la tangente de la level-set $f(x,y)=0$ de la fonction en x_0, y_0.

Revenons à :

$$\vec{\nabla}(f) \circ \mathrm{d}\vec{r} \tag{6.5.250}$$

Qu'il est de tradition de noter :

$$D_u f = \|\vec{\nabla}(f)\| \cdot \|\mathrm{d}\vec{r}\| \cos(\theta) \tag{6.5.251}$$

appelée "dérivée directionnelle". Sa valeur est évidemment maximale si $\theta = 0$, c'est-à-dire que le gradient est colinéaire à la variation $\mathrm{d}\vec{r}$. Par conséquent, la direction (et donc la norme) de la plus grande augmentation de f, souvent nommée direction de "la plus grande montée", est la même direction que le vecteur gradient ! ! Ainsi nous avons démontré la propriété P3.

Évidemment, la dérivée directionnelle prend sa plus grande valeur négative si $\theta = \pi$ (ou 180 degrés). Par conséquent, la direction de la plus grande diminution de f est la direction opposée au vecteur de gradient et souvent nommée direction de la "la plus grande descente".

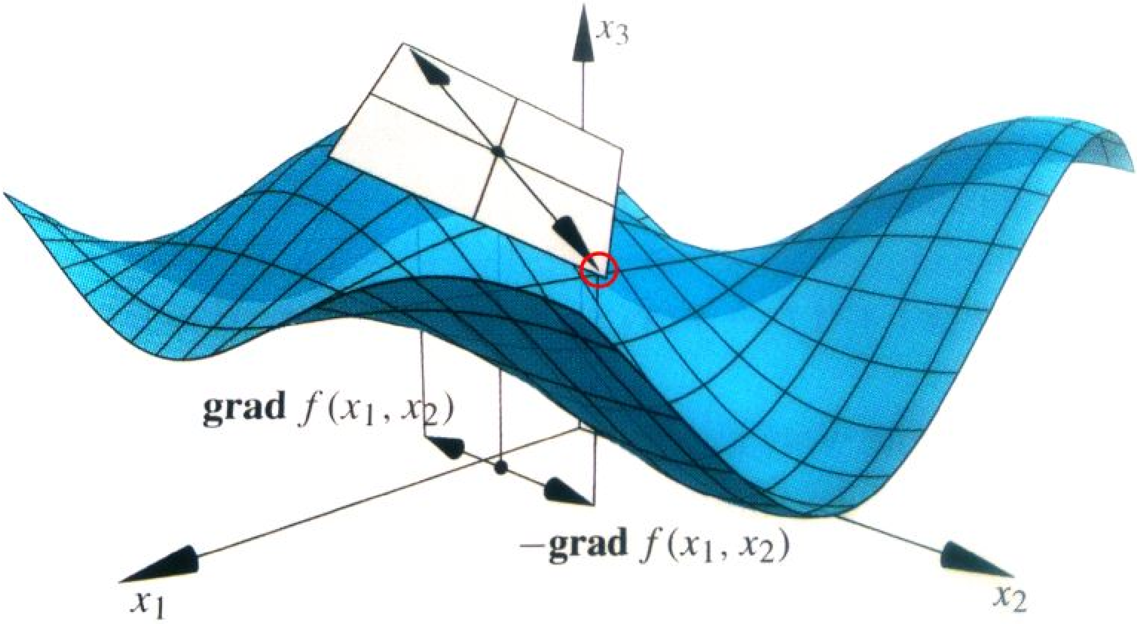


FIG. 6.114 – **Plus grande descente et plus grande montée du gradient**

En cours de traduction de l'anglais

Si $\theta=\pi/2$ alors il n'y a pas de changement d'altitude dans cette direction et nous sommes alors sur une "isocline".

La propriété P4 peut être expliquée sans formalisme comme suit :

- Si la fonction diminue selon une variable, alors la dérivée partielle est négative, donc la composante du vecteur du gradient pour cette variable pointe dans la direction négative - ce qui signifie que cela accroit la valeur de la fonction.
- Si la fonction augmente selon une variable, alors la dérivée partielle est positive, donc la composante du vecteur du gradient pour cette variable pointe dans la direction positive - ce qui signifie décroit la valeur de la fonction.

Alors peu importe quel est le profil de la fonction, le gradient, par définition, pointe dans la direction croissante. En effet, lorsque $f(x,y)$ est décroissante selon les x, la fonction décroît au fur et à mesure que l'on avance dans x. Mais comme la dérivée partielle par rapport à x est négative, la composante x du gradient pointe vers l'origine (recul de x), c'est-à-dire dans la direction qui fait augmenter f.

De la définition et de la différentielle totale, nous obtenons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z=\vec{\nabla}(f)_x\circ\mathrm{d}x+\vec{\nabla}(f)_y\mathrm{d}y+\vec{\nabla}(f)_z\mathrm{d}z \qquad (6.5.252)$$

Cela nous amène à poser que :

$$\vec{\nabla}(f)_x=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x \qquad \vec{\nabla}(f)_y=\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad \vec{\nabla}(f)_z=\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \qquad (6.5.253)$$

et de sorte que finalement l'opérateur du "gradient en coordonnées cartésiennes" est donné par :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{6.5.254}$$

Finalement, nous voyons que le gradient d'un champ scalaire $f(x, y, z)$ est le champ vectoriel dont les composantes en chaque point sont les trois dérivées du champ scalaire f par rapport aux coordonnées tridimensionnelles, notées ici par x, y, z et que par sa direction, et sa norme, le vecteur gradient d'un champ scalaire en un point comporte donc des indications sur la façon dont le champ varie autour de ce point.

Remarque

Une des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ vectoriel soit le gradient d'un champ scalaire f est que ce champ vectoriel soit irrotationnel (voir plus bas l'opérateur rotationnel d'un champ vectoriel).

✍**Exemple :**

Trouvons la direction pour laquelle la directionnelle de :

$$f(x, y,) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 \tag{6.5.255}$$

à $(-2, 3)$ est un maximum et quelle est sa valeur maximale ?

En cours de traduction français

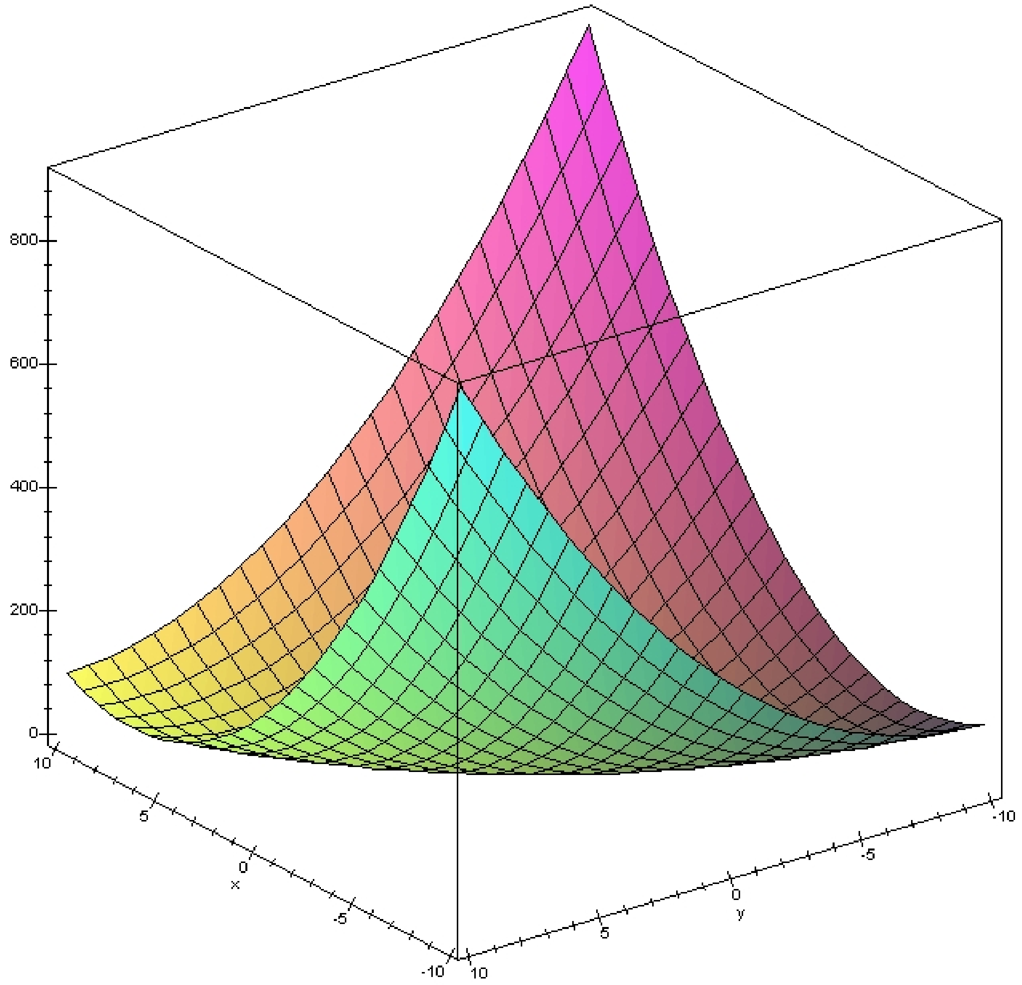


FIG. 6.115 – plot Maple de $f(x,y,)=3x^2-4xy+2y^2$

La valeur maximale de la dérivée directionnelle se produit comme nous venons de le prouver lorsque $\vec{\nabla}f$ et le vecteur unitaire $\mathrm{d}\vec{r}$ pointent dans la même direction.

Nous commençons donc par calculer $\vec{\nabla}f(x,y)$:

$$\vec{\nabla}f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}(3x^2-4xy+2y^2)=\begin{pmatrix}6x-4y\\ -4x+4y\end{pmatrix} \tag{6.5.256}$$

Ensuite, nous évaluons le gradient à $(-2,3)$:

$$\vec{\nabla}f(-2,3)=\begin{pmatrix}6(-2)-4(3)\\ -4(-2)+4(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\ 20\end{pmatrix} \tag{6.5.257}$$

Nous devons trouver un vecteur unitaire qui pointe dans la même direction que $\vec{\nabla}f(-2,3)$, donc l'étape suivante consiste à diviser $\vec{\nabla}f(-2,3)$ par sa norme (la valeur de cette norme étant aussi la valeur maximale de la dérivée directionnelle au point $(-2,3)$), ce qui donne :

$$\frac{\vec{\nabla}f(-2,3)}{\|\vec{\nabla}f(-2,3)\|}=\frac{1}{\sqrt{(-24)^2+(20)^2}}\begin{pmatrix}-24\\ 20\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{976}}\begin{pmatrix}-24\\ 20\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}-0.768\\ 0.640\end{pmatrix} \tag{6.5.258}$$

Comme le vecteur unitaire ci-dessus est un vecteur dans le plan, rien ne nous empêche de calculer l'angle qu'il fait avec l'axe. En appliquant la trigonométrie élémentaire, nous obtenons si nous dénotons cet angle par θ :

$$\cos(\theta)=\frac{-0.768}{1}=-0.768 \quad \text{or} \quad \sin(\theta)=\frac{0.640}{1}=0.640 \tag{6.5.259}$$

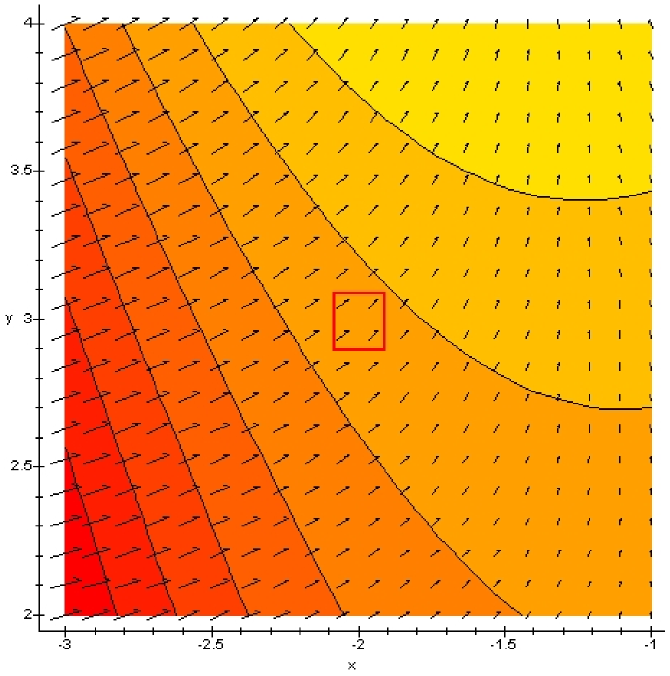
Puisque le cosinus est négatif et le sinus est positif, l'angle doit être dans le deuxième quadrant. Par conséquent :

$$\theta=\pi-\arcsin(0.640)\cong 2.45\,[\text{rad}] \tag{6.5.260}$$

soit environ 114.5916 degrés (ou vu du point de vue du premier quadrant : 39.792 degrés).

Avec Maple 4.00b nous pouvons avoir une investigation plus détaillée et générale du calcul que nous venons de faire :

```
>with(plots):
>with(linalg):
>Pa:=contourplot(3*x^3-4*x*y+2*y^2,x=-3..-1,y=2..4,filled=true):
>Pb:=fieldplot(grad(3*x^3-4*x*y+2*y^2,vector([x,y])),x=-3..-1,y=2..4):
>display(Pa,Pb);
```



Après avoir défini le gradient en coordonnées cartésiennes x, y, z nous devons nous intéresser à l'expression de cet opérateur dans d'autres systèmes de coordonnées. Il est fréquent en physique d'avoir à utiliser les coordonnées cylindriques, polaires et sphériques pour simplifier l'étude formelle de systèmes physiques. Ainsi, si nous faisons référence à notre étude des systèmes de coordonnées, nous avons (rappel) d'abord en coordonnées polaires :

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{e}_r\mathrm{d}r+\vec{e}_\phi r\mathrm{d}\phi \tag{6.5.261}$$

Or, avec la définition du gradient en coordonnées cartésiennes, nous avons en coordonnées polaires la définition suivante :

$$df = \vec{\nabla}(f) \circ d\vec{r} \tag{6.5.262}$$

Si nous exprimons la différentielle totale exacte (voir section de Calcul Différential et Intégral page 1449) de df nous obtenons les relations suivantes :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi = \vec{\nabla}(f) \circ d\vec{r} = \vec{\nabla}(f) \circ (\vec{e}_r dr + \vec{e}_\phi r d\phi) \tag{6.5.263}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la relation :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi = \vec{\nabla}(f) \circ (\vec{e}_r dr + \vec{e}_\phi r d\phi) = \vec{\nabla}(f)_r dr + \vec{\nabla}(f)_\phi r d\phi \tag{6.5.264}$$

donc :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi = \vec{\nabla}(f)_r dr + \vec{\nabla}(f)_\phi r d\phi \tag{6.5.265}$$

ce qui nous amène à :

$$\vec{\nabla}(f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad ; \quad \vec{\nabla}(f)_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} \tag{6.5.266}$$

Ainsi le "gradient en coordonnées polaires" s'exprime comme :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)} \tag{6.5.267}$$

Occupons-nous maintenant de l'expression du gradient en coordonnées cylindriques. Rappelons que lors de l'étude des différents systèmes de coordonnées nous avons obtenu pour les coordonnées cylindriques :

$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\phi r d\phi + \vec{e}_z dz \tag{6.5.268}$$

Donc nous savons déjà que l'expression du gradient en coordonnées cylindriques sera identique à celle en coordonnées polaires à l'exception de l'ajout de la composante verticale z indépendante des autres coordonnées. Ainsi, nous obtenons l'opérateur "gradient en coordonnées cylindriques" :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)} \tag{6.5.269}$$

Occupons-nous maintenant de l'expression du gradient en coordonnées sphériques. Rappelons que lors de l'étude des différents systèmes de coordonnées nous avons obtenu pour les coordonnées sphériques :

$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\phi r \sin(\theta) d\phi \tag{6.5.270}$$

Or, avec la définition du gradient en coordonnées cartésiennes, nous avons en coordonnées sphériques la définition suivante :

$$df = \vec{\nabla}(f) \circ d\vec{r} \tag{6.5.271}$$

En cours de traduction de l'anglais

Si nous exprimons la différentielle totale de $\mathrm{d}f$ nous obtenons les relations suivantes :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi+\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta=\vec{\nabla}(f)\circ \mathrm{d}\vec{r}=\vec{\nabla}(f)\circ \mathrm{d}(\vec{e}_r\mathrm{d}r+\vec{e}_\theta r\mathrm{d}\theta+\vec{e}_\phi r\sin(\theta)\mathrm{d}\phi) \quad (6.5.272)$$

Ce qui nous permet d'obtenir la relation (nous utilisons maintenant la notation qui use de l'opérateur "nabla") :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi+\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta&=\vec{\nabla}(f)\circ d(\vec{e}_r\mathrm{d}r+\vec{e}_\theta r\mathrm{d}\theta+\vec{e}_\phi r\sin(\theta)\mathrm{d}\phi)\\&=\vec{\nabla}(f)_r\mathrm{d}r+\vec{\nabla}(f)_\theta r\mathrm{d}\theta+\vec{\nabla}(f)_\phi r\sin(\theta)\mathrm{d}\phi\end{aligned} \quad (6.5.273)$$

La relation :

$$\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi+\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta=\vec{\nabla}(f)_r\mathrm{d}r+\vec{\nabla}(f)_\theta r\mathrm{d}\theta+\vec{\nabla}(f)_\phi r\sin(\theta)\mathrm{d}\phi \quad (6.5.274)$$

Nous impose :

$$\vec{\nabla}(f)_r=\frac{\partial f}{\partial r}\quad ;\quad \vec{\nabla}(f)_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\quad ;\quad \vec{\nabla}(f)_\phi=\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (6.5.275)$$

Ainsi, l'opérateur "gradient en coordonnées sphériques" s'exprime comme :

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi},\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \quad (6.5.276)$$

Nous avons donc finalement vu toutes les expressions de l'opérateur gradient dans les systèmes cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques.

✍**Exemple :**

Voyons maintenant un exemple visuel des développements précédents dans Maple 4.00 avec une fonction consistant en un cas évidemment particulier : $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)$.

```
> with(linalg):
> with(plots):
> plot3d(sin(x)*sin(y),x=-3..3,y=-3..3,axes=framed);
```

En cours de traduction de l'anglais

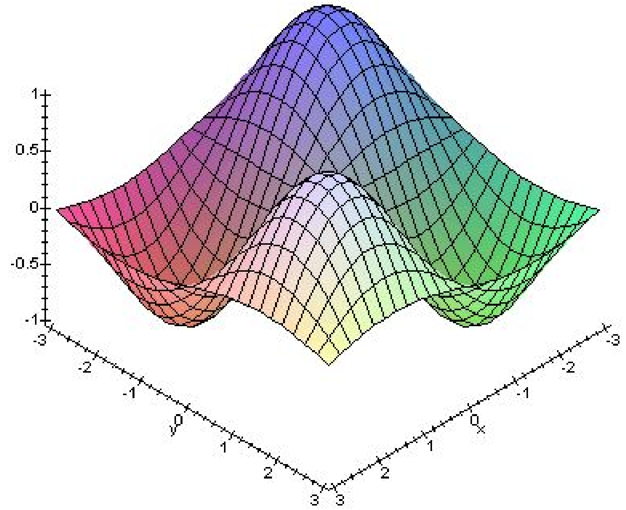


FIG. 6.116 – **Graphique de la fonction prise comme exemple**

Et nous affichons maintenant les isolignes :

```
>contourplot3d(sin(x)*sin(y),x=-3..3,y=-3..3,filled=true,
axes=framed,coloring=[red,blue],style=patch);
```

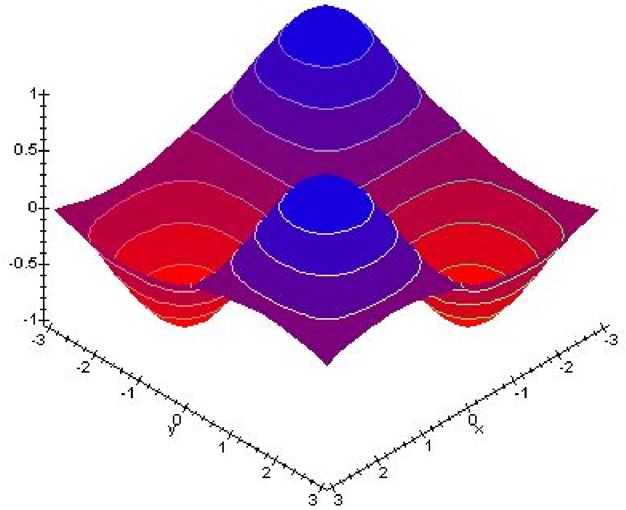


FIG. 6.117 – **Fonction avec ses isolignes**

Et maintenant, nous traçons le vecteur gradient avec une projection plane et nous voyons qu'ils sont bien perpendiculaires aux isolignes :

```
>Pa:=contourplot(sin(x)*sin(y),x=-3..3,y=-3..3,contours=10,
coloring=[red,blue],filled=true):
>Pb:=fieldplot(grad(sin(x)*sin(y),vector([x,y])),x=-3..3,y=-3..3,
arrows=THICK):
>display(Pa,Pb);
```

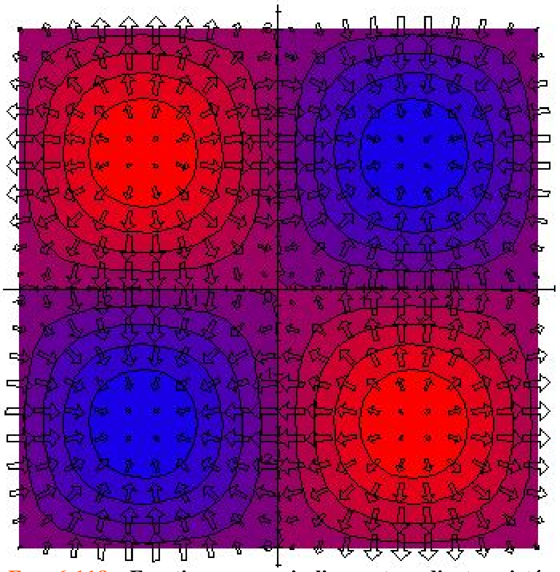


FIG. 6.118 – **Fonction avec ses isolignes et gradient projeté**

Et avec une perspective 3D :

```
>campo:=fieldplot3d([diff(sin(x)*sin(y),x),diff(sin(x)*sin(y),
y),0],x=-3..3,y=-3..3, z=-3..3,axes=framed,arrows=THICK);
>superf:=plot3d(sin(x)*sin(y),x=-3..3,y=-3..3):
> display(campo,superf);
```

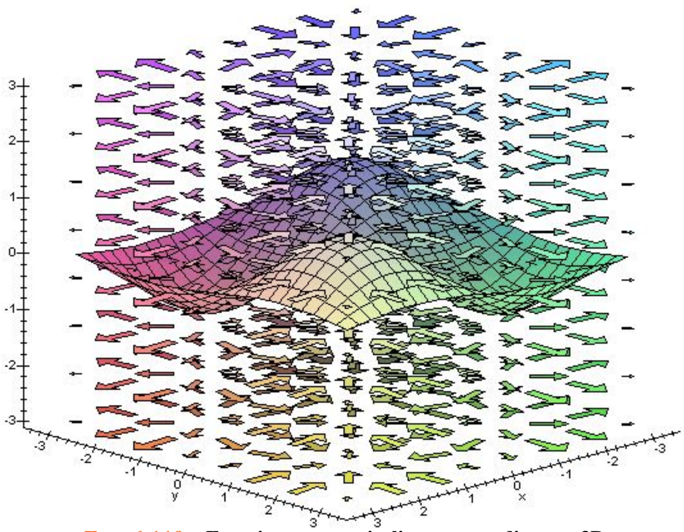


FIG. 6.119 – **Fonction avec ses isolignes et gradient en 3D**

Vu d'au-dessus avec une petite rotation :

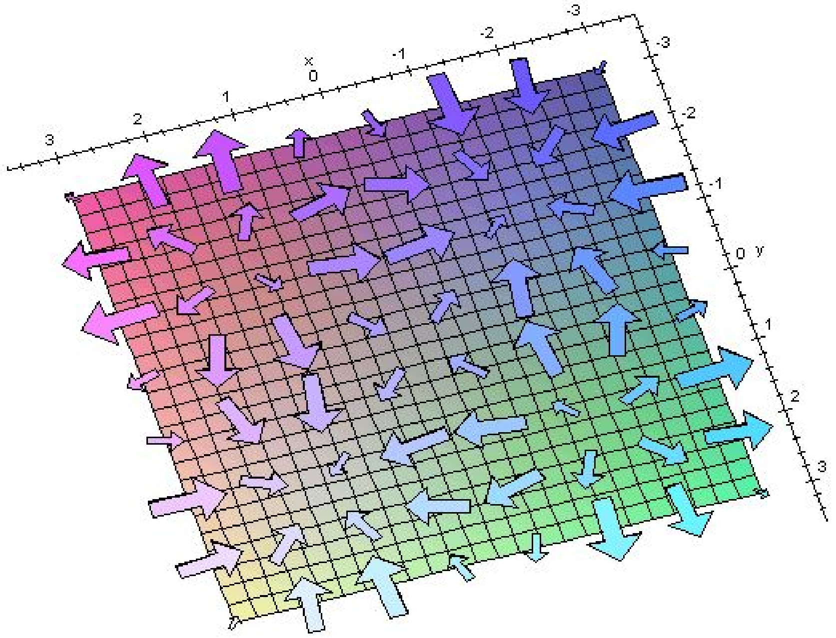


FIG. 6.120 – **Rotation de la fonction avec ses isolignes et gradients**

Comme nous le verrons lors de notre étude des potentiels retardés électromagnétiques (voir page **??**), si nous définissons $\partial_t \vec{z} = \vec{z}$ alors nous obtenons deux résultats qui peuvent ne pas être très intuitif pour certains lecteurs. Le premier résultat est que :

$$\vec{\nabla}(z) = \frac{\vec{z}}{z}$$

et :

$$\frac{\vec{z}}{z} v = \vec{v}$$

6.5.8.2 Gradients d'un champ de vecteurs

Le gradient d'un champ vectoriel $\vec{f}(x,y,z):\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ est le champ nommé "champ tensoriel" défini par les neuf relations suivantes en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}(\vec{f}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (6.5.277)$$

Nous utiliserons un tel gradient lors de notre étude dans le chapitre de Génie Météo de l'effet Papillon dont l'origine vient de la détermination des équations de Navier-Stokes en Mécanique des Milieux Continus ainsi que dans la section de Méthodes Numériques lors de notre étude de la méthode d'optimisation de Gauss-Newton.

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons les 4 relations suivantes en coordonnées polaires :

$$\vec{\nabla}(\vec{f})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_1}{\partial \phi}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_2}{\partial \phi}\end{bmatrix} \tag{6.5.278}$$

Nous avons les 9 relations suivantes en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}(\vec{f})\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_2}{\partial \phi} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_3}{\partial \phi} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z}\end{bmatrix} \tag{6.5.279}$$

Nous avons les 9 relations suivantes en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}(\vec{f})\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_1}{\partial \phi}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_2}{\partial \phi}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_3}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_3}{\partial \phi}\end{bmatrix} \tag{6.5.280}$$

Nous avons donc finalement vu toutes les expressions du gradient d'un champ vectoriel dans les systèmes cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques.

6.5.8.3 Divergences d'un champ de vecteurs

La divergence s'applique à un champ de vecteurs et le transforme en un champ de scalaires. Il s'agit donc d'une application typiquement de $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$. Intuitivement, et dans les cas le plus courant, la divergence d'un champ vectoriel exprime sa tendance à provenir ou converger vers certains points.

Remarque

Souvent les non-initiés confondent l'opérateur gradient et divergence. Pour marquer la différence il faut se rappeler que la divergence d'un vecteur est un nombre alors que le gradient est un vecteur ! Le gradient indique la direction dans laquelle la variation est la plus importante et son amplitude. La divergence dit simplement ce qui sort d'un point donné.

Cependant, il faut distinguer deux contributions à la divergence que nous définirons rigoureusement un peu plus loin : l'une due aux variations de direction appelée la "divergence directionnelle" et l'autre due aux variations de modules (norme) appelée la "divergence modulaire". Ainsi, pour des champs simples, nous pouvons imaginer des cas où la divergence ne serait que modulaire et d'autres, où elle ne serait que directionnelle. Nous pourrions aussi construire un champ où les deux types de divergence coexistent, mais d'effets contraires (convergence modulaire et divergence directionnelle par exemple).

En cours de traduction de l'anglais

Prenons par exemple un vecteur $\vec{f}$ de l'espace et faisons lui traverser une surface S quelconque. Les physiciens assimilent alors la quantité qui se dirige suivant la normale à la surface au flux de $\vec{f}$ à travers S.

Pour se convaincre de cette analogie nous pouvons imaginer un fluide coulant sur une surface plane, le flux à travers la surface est évidemment nul, par contre si le fluide coule verticalement à travers une surface horizontale le flux sera maximal. Il est alors immédiat de vouloir représenter le flux par le produit scalaire de $\vec{f}$ avec la normale $\vec{n}$ de la surface S.

Remarque

Il faut toujours prendre garde à la direction de $\vec{n}$ car en un point quelconque d'une surface S nous avons en général deux normales $\vec{n}$.

Si la surface est plane la normale $\vec{n}$ est la même partout mais si elle change suivant les endroits, nous nous intéresserons alors à un petit élément de surface $\mathrm{d}S$.

Si un petit élément de flux est défini par :

$$\mathrm{d}\Phi=(\vec{f}\circ\vec{n})\mathrm{d}S \qquad (6.5.281)$$

alors le flux total sera donné par :

$$\Phi=\int\limits_S(\vec{f}\circ\vec{n})\mathrm{d}S \qquad (6.5.282)$$

ce qui est parfois noté (c'est un peu abusif mais pourquoi pas...) :

$$\Phi=\int\limits_S\vec{f}\mathrm{d}\vec{S} \qquad (6.5.283)$$

Supposons maintenant que notre vecteur $\vec{f}$ déplace un point de l'espace $M(x,y,z)$ en $M'(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$ à travers un parallélépipède rectangle de côtés $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$:

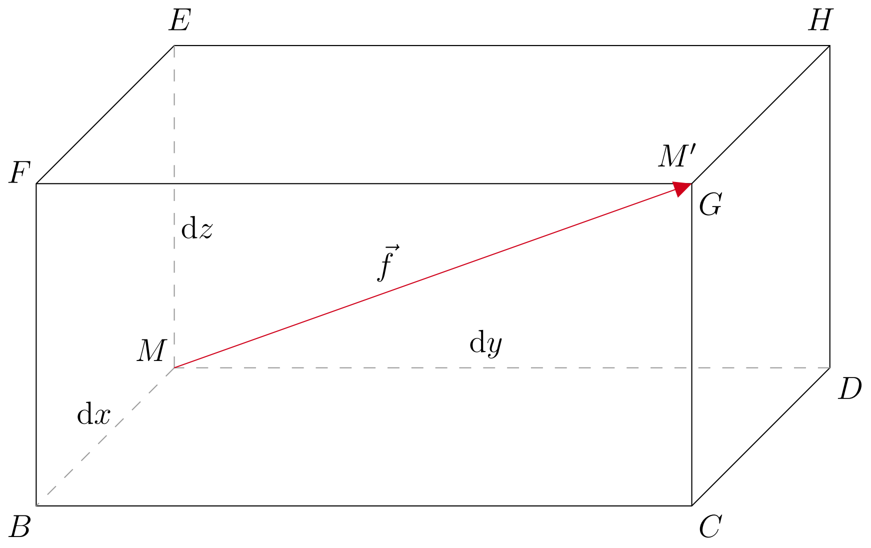


FIG. 6.121 – **Déplacement du vecteur à travers un parallélépipède**

En cours de traduction de l' anglais

Nous pouvons décomposer le mouvement (flux) à travers chaque face du parallélépipède (décompositions dans la base orthonormée). Par exemple, si nous nous intéressons à l'élément décomposé du flux à travers la face $(\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ décrite par les sommets $BCFG$ nous avons bien évidemment $\vec{n}=(1,0,0)$.

Il nous faut encore déterminer comment représenter le flux $\vec{f}$ pour cette direction. Comme le flux est une fonction, c'est-à-dire que chacune de ces composantes peut être dépendante des trois composantes de l'espace (si nous prenons le cas particulier d'une fonction dans $\mathbb{R}^3$) nous avons :

$$\vec{f}=\begin{pmatrix} f_x(x,y,z)\\ f_y(x,y,z)\\ f_z(x,y,z)\end{pmatrix} \tag{6.5.284}$$

Remarque

Ceux qui ne sont pas convaincus peuvent aller lire le début de la section d'Électrodynamique où nous prenons le champ électrique comme (excellent) exemple.

Alors la variation du flux selon x sera donnée par :

$$\vec{f}_x=\begin{pmatrix} f_x(x+\mathrm{d}x,y,z)\\ f_y(x+\mathrm{d}x,y,z)\\ f_z(x+\mathrm{d}y,y,z)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} f_x(x,y,z)\\ f_y(x,y,z)\\ f_z(x,y,z)\end{pmatrix} \tag{6.5.285}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Phi_x&=((\vec{f})_x\circ\vec{n}_x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\Big(f_x(x+\mathrm{d}x,y,z)-f_x(x,y,z)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial f_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
\mathrm{d}\Phi_y&=((\vec{f})_y\circ\vec{n}_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\Big(f_y(x,y+\mathrm{d}y,z)-f_x(x,y,z)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\partial f_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
\mathrm{d}\Phi_z&=((\vec{f})_z\circ\vec{n}_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Big(f_z(x,y,z+\mathrm{d}z)-f_x(x,y,z)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\partial f_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{6.5.286}$$

Dès lors en sommant :

$$\mathrm{d}\Phi=\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathbf{div}(\vec{f})\mathrm{d}V=\vec{\nabla}\circ\vec{f}\mathrm{d}V \tag{6.5.287}$$

Par rapport à la première expression de Φ, le terme $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est donc un élément de volume et non plus de surface. Nous avons aussi un résultat intéressant :

$$\Phi=\int\limits_V\left(\vec{\nabla}\circ\vec{f}\right)\mathrm{d}V=\int\limits_S\left(\vec{f}\circ\vec{n}\right)\mathrm{d}S \tag{6.5.288}$$

dont l'écriture plus explicite et plus rigoureuse devrait être (pour bien mettre en évidence que la surface fermée considérée est la frontière du volume fermé étudié) :

$$\Phi=\iiint_V(\vec{\nabla}\circ\vec{f})\mathrm{d}V=\oiint_S(\vec{f}\circ\vec{n})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.5.289}$$

ou plus communément écrit :

$$\boxed{\Phi=\iiint_V(\vec{\nabla}\circ\vec{f})\mathrm{d}V=\oiint_S\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{S}} \tag{6.5.290}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Voir les cas pratiques dans la section d'Électrodynamique où par exemple pour le champ électrique la divergence est nulle pour une charge sphérique libre car les vecteurs pointent dans des directions différentes (divergence directionnelle) et les normes décroissent comme l'inverse du carré du rayon (convergence modulaire). Les deux contributions sont en oppositions et donc la divergence totale est nulle.

Le développement ci-dessus est appelé "théorème d'Ostrogradsky" ou "théorème de Gauss-Ostrogradsky" ou plus simplement "théorème de la divergence" et définit en fait la divergence totale de dans un volume comme le flux de à travers les "parois" du volume fermé (surface fermée Gauss), ce qu'exprime bien le nom "divergence".

Maintenant, revenons sur la relation précédente mais en extrayant un vecteur unitaire du champ $\vec{f}$ tel que :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \circ (f\vec{u}))\mathrm{d}V = \oiint_S (f\vec{u}) \circ \mathrm{d}\vec{S} \tag{6.5.291}$$

où maintenant f est un champ scalaire. Cela peut être réécrit trivialement en utilisant la règle de la derivée en chaine et la commutativité du produit scalaire :

$$\iiint_V (\vec{\nabla}(f) \circ \vec{u} + f\vec{\nabla} \circ \vec{u})\mathrm{d}V = \left(\oiint_S f\mathrm{d}\vec{S}\right) \circ \vec{u} \tag{6.5.292}$$

Dans le cas particulier d'un champ uniforme, nous avons :

$$\vec{\nabla} \circ \vec{u} = 0 \tag{6.5.293}$$

Il reste alors :

$$\iiint_V \vec{\nabla}(f) \circ \vec{u}\mathrm{d}V = \left(\oiint_S f\mathrm{d}\vec{S}\right) \circ \vec{u} \tag{6.5.294}$$

Le produit scalaire étant distributif par rapport à la somme de vecteurs, nous pouvons réécrire cela comme :

$$\left(\iiint_V \vec{\nabla}(f)\mathrm{d}V\right) \circ \vec{u} = \left(\oiint_S f\mathrm{d}\vec{S}\right) \circ \vec{u} \tag{6.5.295}$$

et nous obtenons alors le "théorème du gradient[16]" :

$$\boxed{\iiint_V \vec{\nabla}(f)\mathrm{d}V = \oiint_S f\mathrm{d}\vec{S}} \tag{6.5.296}$$

Nous définissons l'opérateur "divergence" par la relation suivante (la notation tensorielle a été utilisée afin d'abréger l'écriture) dans un espace à n dimensions :

$$\mathrm{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \circ \vec{f} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{6.5.297}$$

[16]Comme il est applicable uniquement dans le cas de champs uniformes, il n'est pas beaucoup utilisé dans la pratique.

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, nous avons pour l'opérateur "divergence en coordonnées cartésiennes" :

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{6.5.298}$$

Si la divergence d'un champ vectoriel est identiquement nulle en tous les points d'un référentiel eulérien[17], le triple flux intégral de ce champ à travers un volume V sera :

$$\Phi=\iiint_V(\vec{\nabla}\circ\vec{f})\mathrm{d}V=0 \tag{6.5.299}$$

Il s'ensuit que le flux de ce champ vectoriel à travers les bords du volume est nul, c'est-à-dire que le flux entrant compense le flux sortant. On dit qu'un tel champ de vecteurs ayant une divergence nulle a un "flux conservatif".

Pour déterminer l'expression de l'opérateur de divergence en coordonnées polaires rappelons les relations démontrées plus haut :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r&=\frac{\vec{r}}{r}=\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y}{r}=\vec{e}_x\cos(\phi)+\vec{e}_y\sin(\phi)\\ \vec{e}_\phi&=\frac{\vec{e}_z\times\vec{e}_r}{\sin(\theta)}=-\vec{e}_x\sin(\phi)+\vec{e}_y\cos(\phi)\end{aligned} \tag{6.5.300}$$

Soit à présent une fonction vectorielle $\vec{f}:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\vec{f}=f_x\vec{e}_x+f_y\vec{e}_y=f_r\vec{e}_r+f_\theta\vec{e}_\theta \tag{6.5.301}$$

Connaissant l'expression de $\vec{e}_r,\vec{e}_\phi$ en fonction de $\vec{e}_x,\vec{e}_y$, à partir de l'expression ci-dessus nous en déduisons :

$$\begin{aligned}f_x&=\cos(\phi)f_r-\sin(\phi)f_\phi\\ f_y&=\sin(\phi)f_r+\cos(\phi)f_\phi\end{aligned} \tag{6.5.302}$$

La divergence de $\vec{f}$ étant définie dans le cas bidimensionnel par :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y} \tag{6.5.303}$$

nous avons alors :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f}=\vec{\nabla}(f_x)\circ\vec{e}_x+\vec{\nabla}(f_y)\circ\vec{e}_y \tag{6.5.304}$$

Le premier terme vaut (application du gradient en coordonnées polaires !) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f_x)\circ\vec{e}_x&=\left(\frac{\partial f_x}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial\phi}\vec{e}_\phi\right)\circ\vec{e}_x\\ &=\frac{\partial f_x}{\partial r}\vec{e}_r\circ\vec{e}_x+\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial\phi}\vec{e}_\phi\circ\vec{e}_x\\ &=\frac{\partial f_x}{\partial r}\cos(\phi)-\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial\phi}\sin(\phi)\end{aligned} \tag{6.5.305}$$

[17] La spécification eulérienne du champ d'écoulement est une façon d'examiner le mouvement des fluides qui se concentre sur des emplacements spécifiques dans l'espace à travers lequel le fluide s'écoule comme le temps passe. Cela peut être visualisé en s'asseyant sur la rive d'une rivière et en regardant l'eau passer à l'emplacement fixé.

En cours de traduction de l' anglais

de la même façon nous obtenons (nous pouvons détailler sur demande) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f_y)\circ\vec{e}_y&=\frac{\partial f_y}{\partial r}\vec{e}_r\circ\vec{e}_y+\frac{1}{r}\frac{\partial f_y}{\partial\phi}\vec{e}_\phi\circ\vec{e}_y\\&=\frac{\partial f_y}{\partial r}\sin(\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial f_y}{\partial\phi}\cos(\phi)\end{aligned}\tag{6.5.306}$$

En additionnant les deux termes et en exprimant les dérivées partielles des fonctions f_x, f_y en fonction des dérivées partielles des fonctions f_r, f_ϕ à l'aide des relations :

$$\begin{aligned}f_x&=\cos(\phi)f_r-\sin(\phi)f_\phi\\f_y&=\sin(\phi)f_r+\cos(\phi)f_\phi\end{aligned}\tag{6.5.307}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\circ\vec{f}=&\frac{\partial f_x}{\partial r}\cos(\phi)-\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial(\phi)}\sin(\phi)+\frac{\partial f_y}{\partial r}\sin(\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial f_y}{\partial\phi}\cos(\phi)\\=&\cos^2(\phi)\frac{\partial f_r}{\partial r}-\cos(\phi)\sin(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin(\phi)\left(-\sin(\phi)f_r+\cos(\phi)\frac{\partial f_r}{\partial\phi}-\cos(\phi)f_\phi-\sin(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}\right)\\&+\sin^2(\phi)\frac{\partial f_r}{\partial r}+\sin(\phi)\cos(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos(\phi)\left(\cos(\phi)f_r+\sin\phi\frac{\partial f_r}{\partial\phi}-\sin(\phi)f_\phi+\cos(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

Après simplification :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f}=\frac{\partial f_r}{\partial r}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}\tag{6.5.309}$$

L'expression de l'opérateur "divergence en coordonnées polaires" est alors :

$$\boxed{\vec{\nabla}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)}\tag{6.5.310}$$

Pour déterminer l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées cylindriques rappelons les relations :

$$\begin{aligned}\vec{e}_r&=\frac{\vec{r}}{r}=\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y}{r}=\vec{e}_x\cos(\phi)+\vec{e}_y\sin(\phi)\\\vec{e}_\phi&=\frac{\vec{e}_z\times\vec{e}_r}{\sin(\phi)}=-\vec{e}_x\sin(\phi)+\vec{e}_y\cos(\phi)\\\vec{e}_z&=\vec{e}_z\end{aligned}\tag{6.5.311}$$

Soit à présent une fonction vectorielle $\vec{f}:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$. Nous avons :

$$\vec{f}=f_x\vec{e}_x+f_y\vec{e}_y+f_z\vec{e}_z=f_r\vec{e}_r+f_\phi\vec{e}_\phi+f_z\vec{e}_z\tag{6.5.312}$$

Connaissant l'expression de $\vec{e}_r,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z$ en fonction de $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$, à partir de l'expression ci-dessus nous en déduisons :

$$\begin{aligned}f_x&=\cos(\phi)f_r-\sin(\phi)f_\phi\\f_y&=\sin(\phi)f_r+\cos(\phi)f_\phi\\f_z&=f_z\end{aligned}\tag{6.5.313}$$

En cours de traduction de l'anglais

La divergence de $\vec{f}$ étant définie dans le cas tri-dimensionnel par :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{6.5.314}$$

nous avons alors :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f}=\vec{\nabla}(f_x)\circ\vec{e}_x+\vec{\nabla}(f_y)\circ\vec{e}_y+\vec{\nabla}(f_z)\circ\vec{e}_z \tag{6.5.315}$$

Le premier terme vaut (application du gradient en coordonnées polaires !) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f_x)\circ\vec{e}_x&=\left(\frac{\partial f_x}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial \phi}\vec{e}_\phi+\frac{\partial f_x}{\partial z}\vec{e}_z\right)\circ\vec{e}_x\\&=\frac{\partial f_x}{\partial r}\vec{e}_r\circ\vec{e}_x+\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial \phi}\vec{e}_\phi\circ\vec{e}_x+\frac{\partial f_x}{\partial z}\vec{e}_z\circ\vec{e}_x\\&=\frac{\partial f_x}{\partial r}\cos(\phi)-\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial \phi}\sin(\phi)\end{aligned} \tag{6.5.316}$$

de la même façon nous obtenons (nous pouvons détailler sur demande) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f_y)\circ\vec{e}_y&=\frac{\partial f_y}{\partial r}\vec{e}_r\circ\vec{e}_y+\frac{1}{r}\frac{\partial f_y}{\partial \phi}\vec{e}_\phi\circ\vec{e}_y+\frac{\partial f_y}{\partial z}\vec{e}_z\circ\vec{e}_y\\&=\frac{\partial f_y}{\partial r}\sin(\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial f_y}{\partial \phi}\cos(\phi)\end{aligned} \tag{6.5.317}$$

et pour le dernier :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f_z)\circ\vec{e}_z&=\frac{\partial f_z}{\partial r}\vec{e}_r\circ\vec{e}_z+\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial \phi}\vec{e}_\phi\circ\vec{e}_z+\frac{\partial f_z}{\partial z}\vec{e}_z\circ\vec{e}_z\\&=\frac{\partial f_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{6.5.318}$$

En additionnant les trois termes et en exprimant les dérivées partielles des fonctions f_x, f_y, f_z en fonction des dérivées partielles des fonctions f_r, f_ϕ, f_z à l'aide des relations :

$$\begin{aligned}f_x&=\cos(\phi)f_r-\sin(\phi)f_\phi\\f_y&=\sin(\phi)f_r+\cos(\phi)f_\phi\\f_z&=f_z\end{aligned} \tag{6.5.319}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\circ\vec{f}=\frac{\partial f_x}{\partial r}\cos(\phi)-\frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial \phi}\sin(\phi)+\frac{\partial f_y}{\partial r}\sin(\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial f_y}{\partial \phi}\cos(\phi)+\frac{\partial f_z}{\partial z}\\&=\cos^2(\phi)\frac{\partial f_r}{\partial r}-\cos(\phi)\sin(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin(\phi)\left(-\sin(\phi)f_r+\cos(\phi)\frac{\partial f_r}{\partial \phi}-\cos(\phi)f_\phi-\sin(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}\right)\\&+\sin^2(\phi)\frac{\partial f_r}{\partial r}+\sin(\phi)\cos(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos(\phi)\left(\cos\phi f_r+\sin(\phi)\frac{\partial f_r}{\partial \phi}-\sin(\phi)f_\phi+\cos(\phi)\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial f_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{6.5.320}$$

Après simplification :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f}=\frac{f_r}{\partial r}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r}\frac{f_\phi}{\partial \phi}+\frac{f_z}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rf_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{f_\phi}{\partial \phi}+\frac{f_z}{\partial z} \tag{6.5.321}$$

En cours de traduction de l' anglais

L'expression de l'opérateur "divergence en coordonnées cylindriques" est alors :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{6.5.322}$$

Pour obtenir l'expression de la divergence en coordonnées sphériques, rappelons les relations :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \sin(\theta)\cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\vec{e}_y + \cos(\theta)\vec{e}_z \\
\vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x\sin(\phi) + \vec{e}_y\cos(\phi) \\
\vec{e}_\theta &= -\vec{e}_x\cos(\theta)\cos(\phi) - \vec{e}_y\cos(\theta)\sin(\phi) - \vec{e}_z\sin(\theta)
\end{aligned} \tag{6.5.323}$$

Soit à présent une fonction vectorielle $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Nous avons :

$$\vec{f} = \vec{f}_x\vec{e}_x + \vec{f}_y\vec{e}_y + \vec{f}_z\vec{e}_z = \vec{f}_r\vec{e}_r + \vec{f}_\theta\vec{e}_\theta + \vec{f}_\phi\vec{e}_\phi \tag{6.5.324}$$

Connaissant l'expression de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ en fonction de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, à partir de l'expression ci-dessus nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
f_x &= \sin(\theta)\cos(\phi)f_r + \cos(\theta)\sin(\phi)f_\theta - \sin(\phi)f_\phi \\
f_y &= \sin(\theta)\sin(\phi)f_r + \cos(\theta)\sin(\phi)f_\theta + \cos(\phi)f_\phi \\
f_z &= \cos(\theta)f_r - \sin(\theta)f_\theta
\end{aligned} \tag{6.5.325}$$

La divergence de $\vec{f}$ étant définie par dans le cas tri-dimensionnel par :

$$\vec{\nabla} \circ \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{6.5.326}$$

Nous avons :

$$\vec{\nabla} \circ f = \vec{\nabla}(f_x) \circ \vec{e}_x + \vec{\nabla}(f_y) \circ \vec{e}_y + \vec{\nabla}(f_z) \circ \vec{e}_z \tag{6.5.327}$$

Le premier terme vaut (application du gradient en coordonnées sphériques) :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(f_x) \circ \vec{e}_x &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_x}{\partial \phi}\vec{e}_\phi\right) \circ \vec{e}_x \\
&= \frac{\partial f_x}{\partial r}\vec{e}_r \circ \vec{e}_x + \frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \circ \vec{e}_x + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_x}{\partial \phi}\vec{e}_\phi \circ \vec{e}_x \\
&= \frac{\partial f_x}{\partial r}\sin(\theta)\cos(\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_x}{\partial \theta}\cos(\theta)\cos(\phi) - \frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_x}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{6.5.328}$$

de la même façon nous obtenons (nous pouvons détailler sur demande) :

$$\vec{\nabla}(f_y) \circ \vec{e}_y = \frac{\partial f_y}{\partial r}\sin(\theta)\sin(\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_y}{\partial \theta}\cos(\theta)\sin(\phi) + \frac{\cos(\phi)}{r\sin\theta}\frac{\partial f_y}{\partial \phi} \tag{6.5.329}$$

et enfin pour le troisième et dernier :

$$\vec{\nabla}(f_z) \circ \vec{e}_z = \frac{\partial f_z}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial \theta}\sin(\theta) \tag{6.5.330}$$

En cours de traduction de l' anglais

En additionnant les trois termes et en exprimant les dérivées partielles des fonctions f_x, f_y, f_z en fonction des dérivées partielles des fonctions f_r, f_θ, f_ϕ à l'aide des relations :

$$\begin{aligned} f_x &= \sin(\theta)\cos(\phi) f_r + \cos(\theta)\cos(\phi) f_\theta - \sin(\phi) f_\phi \\ f_y &= \sin(\theta)\sin(\phi) f_r + \cos(\theta)\sin(\phi) f_\theta + \cos(\phi) f_\phi \\ f_z &= \cos(\theta) f_r - \sin(\theta) f_\theta \end{aligned} \tag{6.5.331}$$

Nous obtenons (nous pouvons développer les détails intermédiaires sur demande) :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi} + \frac{\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} f_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{2}{r} f_r \tag{6.5.332}$$

Nous remarquons que nousp pouvons regrouper des termes dépendant d'une même variable en utilisant la propriété de la dérivée, nous obtenons donc pour l'expression de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{f} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(f_\theta\sin(\theta))}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} \tag{6.5.333}$$

et donc l'opérateur de "divergence en coordonnées sphériques" est :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2}{\partial r}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)} \tag{6.5.334}$$

Nous avons donc finalement vu toutes les expressions de la divergence d'un champ vectoriel dans les systèmes cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques.

Gardez à l'esprit que pour "voir" la divergence sur un tracé de champ vectoriel, il faut regarder ce qui arrive à l'amplitude des vecteurs lorsque vous vous déplacez le long du flux du champ vectoriel. Si le champ vectoriel augmente en amplitude à mesure que vous vous déplacez le long du flux d'un champ vectoriel, alors la divergence est positive. Si le champ vectoriel diminue en amplitude à mesure que vous vous déplacez le long du flux d'un champ vectoriel, la divergence est négative. Si le champ vectoriel ne change pas d'amplitude lorsque vous vous déplacez le long du flux du champ vectoriel, alors la divergence est nulle. N'oubliez pas non plus que la divergence d'un champ vectoriel est souvent une quantité variable et changera en fonction de l'emplacement.

En cours de traduction de l' anglais

6.5.8.4 Rotationnels d'un champ de vecteurs

Le "rotationnel" d'un champ de vecteurs peut être vu (c'est une simplification !) comme le champ de vecteurs dont les lignes de champs sont perpendiculaires à celles dont nous avons calculé le rotationnel comme le montre l'exemple particulier ci-dessous (nous verrons un cas académique détaillé un peu plus bas) :

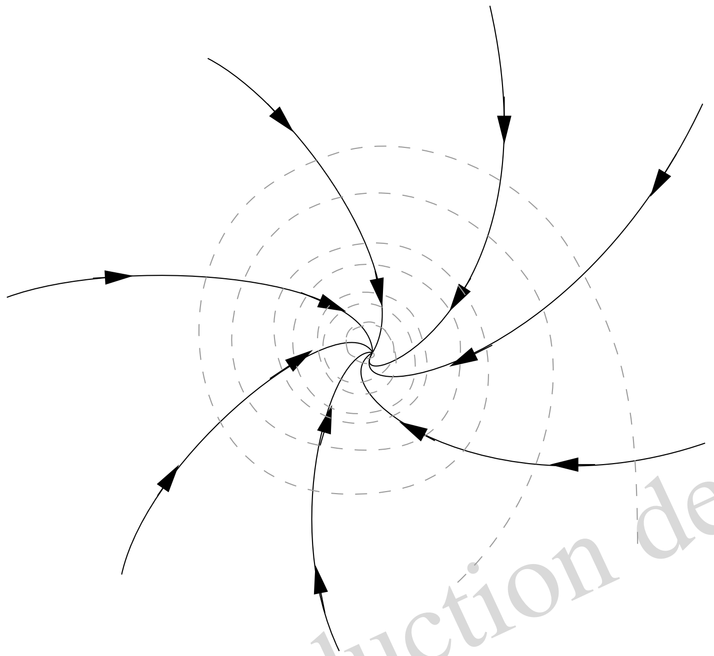


FIG. 6.122 – **Exemple de rotationnel d'un champ de vecteurs**

D'une manière un peu plus technique, le rotationnel est un opérateur vectoriel qui décrit la rotation infinitésimale d'un champ vectoriel de dimension 3. A chaque point du champ, la rotation de ce point est représentée par un vecteur. Les attributs de ce vecteur (longueur et direction) caractérisent la rotation en ce point. La direction de la rotation est l'axe de rotation, tel que déterminé par la règle de la main droite, et l'amplitude du rotationnel est l'amplitude de la rotation.

Le rotationnel transforme ainsi un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. Plus difficile à se représenter précisément que le gradient et la divergence, il exprime intuitivement la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point (la manière dont il est tordu).

Donnons avant d'aborder les trucs mathématiques et aussi les exemples mathématiques deux exemples de la vie courante :

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Dans une tornade, le vent tourne autour de l'oeil du cyclone et le champ vectoriel vitesse du vent a un rotationnel non nul autour de l'oeil.

E2. Le rotationnel du champ des vitesses d'un disque qui tourne à vitesse constante est constant, dirigé selon l'axe de rotation et orienté de telle sorte que la rotation ait lieu, par rapport à lui, dans le sens direct.

Un champ de vecteurs est dit "irrotationnel" lorsque le rotationnel de ce champ est identiquement nul en tous les points de l'espace. Dans le cas contraire, nous disons qu'il est "tourbillonnaire"

Dans le cas usuel où dx représente un élément de longueur, l'unité du rotationnel est alors l'unité du champ considéré divisée par une unité de longueur. Par exemple, en mécanique des fluides : l'unité du rotationnel d'un champ de vitesse est le radian par unité de temps, comme une vitesse angulaire !

La divergence donne certaines indications sur le comportement d'un vecteur ou d'un champ de vecteurs : comment il se dirige par rapport à la normale et comment il traverse les surfaces, mais c'est insuffisant. Prenons un champ qui aurait la forme d'un cylindre et un autre champ qui aurait la forme d'une hélice de même diamètre que le cylindre. S'ils se dirigent dans la même direction leur divergence sera identique alors que les mouvements sont bien différents. Il faut donc que nous déterminions la manière dont le champ est courbé quand il traverse une surface : ceci va être déterminé par la circulation (comme le travail d'une force par exemple) du vecteur le long d'une courbe fermée, obtenue avec la somme des produits scalaires $\vec{f} \circ \mathrm{d}\vec{r}$ sur le contour fermé (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1561) :

$$\oint \vec{f} \circ \mathrm{d}\vec{r} \tag{6.5.335}$$

En fait cela revient au même de regarder comment est tordu le vecteur par rapport à la normale à la surface ce qui nous amène à définir le "rotationnel" ou "vecteur tourbillon" en écrivant :

$$\oint \vec{f} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_S \mathrm{rot}(\vec{f}) \circ \mathrm{d}\vec{S} \tag{6.5.336}$$

qui établit donc une relation entre l'intégrale curviligne et l'intégrale de surface (on transforme donc une intégrale curviligne sur un parcours fermé en une intégrale de surface délimitée par ledit parcours).

Théorème 6.37. En d'autres termes, le rotationnel se calcule en utilisant le fait que la circulation autour d'un circuit (chemin) élémentaire fermé d'un champ de vecteurs est égal au flux de son rotationnel à travers la surface élémentaire immédiate engendrée par ce circuit (chemin).

Ceci est le "théorème de Stokes" (qui est plus rigoureusement démontrable avec un formalisme mathématique assez lourd) qui est donc en fait une définition de l'opérateur rotationnel dont nous allons chercher l'expression mathématique explicite maintenant !

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.37.1. Soit un champ vectoriel $\vec{f}$ défini dans un espace donné. Nous voulons donc calculer la circulation de $\vec{f}$ autour d'un contour fermé C :

$$\oint \vec{f} \circ \mathrm{d}\vec{r} \tag{6.5.337}$$

Nous choisissons comme contour C le contour d'un rectangle infinitésimal de côté $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ plongé dans $\mathbb{R}^3$ et parallèle au plan xy (remarquez que nous parcourons le contour de façon a toujours avoir la surface à notre gauche) :

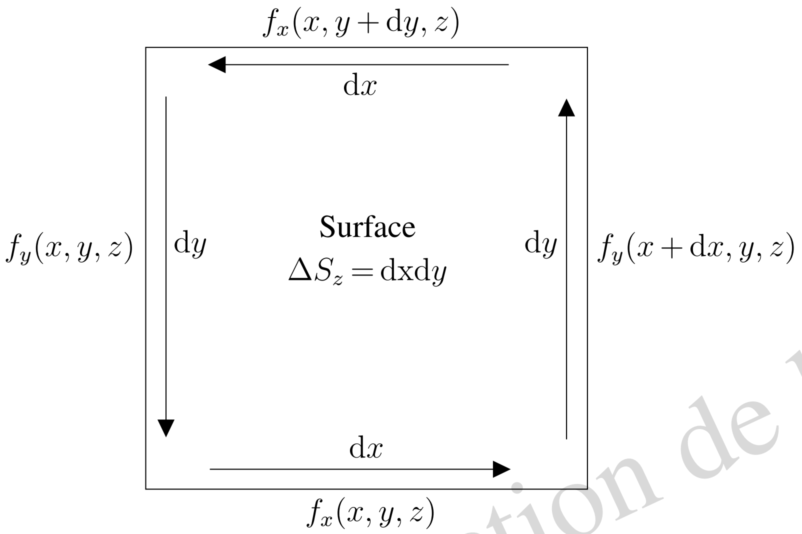


FIG. 6.123 – Contour d'intégration

Pour les deux côtés horizontaux, la contribution à la circulation est :

$$f_x(x, y, z)\mathrm{d}x - f_x(x, y+\mathrm{d}y, z)\mathrm{d}x \tag{6.5.338}$$

Ce qui nous autorise à écrire :

$$\frac{f_x(x, y, z) - f_x(x, y+\mathrm{d}y, z)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\partial f_x}{\partial y}\mathrm{d}S_z \tag{6.5.339}$$

De même, pour les côtés verticaux :

$$\frac{f_y(x+\mathrm{d}x, y, z) - f_y(x, y, z)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\partial f_y}{\partial x}\mathrm{d}S_z \tag{6.5.340}$$

Ainsi, nous avons la circulation selon z :

$$(\vec{f} \circ \mathrm{d}\vec{r})_z = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}S_z \tag{6.5.341}$$

Ce qui s'écrit aussi sous la forme générale traditionnelle suivante :

$$\oint_C (f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y) = \int_S \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}S_z \tag{6.5.342}$$

En cours de traduction de l'anglais

et constitue le non moins fameux "théorème de Green" ou appelé encore "théorème de Green-Riemann" que nous retrouverons dans la section d'Analyse Complexe.

Le théorème de Green est un cas particulier du théorème de Stokes (variété générale), mais une généralisation à 2 dimensions du théorème fondamental de l'analyse. Mais dit d'une autre manière : la rotation totale à l'extérieur d'une fonction (courbe fermée) est égal à la somme des petites rotations à l'intérieur de la fonction (courbe fermée).

Et que nous écrirons dans le cas qui nous intéresse :

$$\int_S \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}S_z := \int_S \mathrm{rot}(\vec{f})_z \mathrm{d}S_z \tag{6.5.343}$$

Par permutation circulaire nous obtenons alors :

$$\mathrm{rot}(\vec{f})=\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \tag{6.5.344}$$

Soit sous forme vectorielle condensée :

$$\mathrm{rot}(\vec{f})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_z}{\partial y}-\dfrac{\partial f_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z}-\dfrac{\partial f_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x}-\dfrac{\partial f_x}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{6.5.345}$$

Ce qui permet de mieux comprendre la notation, ou la définition non intuitive du rotationnel dans beaucoup d'ouvrages et qui est :

$$\mathrm{rot}(\vec{f})=\vec{\nabla}\times\vec{f} \tag{6.5.346}$$

soit le produit vectoriel de l'opérateur gradient avec le champ vectoriel !

Donc nous avons finalement démontré le théorème de Stokes, ou aussi nommé sous cette forme "théorème du rotationnel", qui donne bien :

$$\oint \vec{f}\circ \mathrm{d}\vec{r}=\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{f}\right)\circ \mathrm{d}\vec{S} \tag{6.5.347}$$

et en même temps le rotationnel en coordonnées cartésiennes.

Le théorème de Stokes classique ci-dessus peut être énoncé en une phrase : l'intégrale de chemin d'un champ vectoriel sur une boucle est égale au flux de sa boucle à travers la surface fermée.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

La relation ci-dessus n'est en fait pas le "théorème de Stokes" mais un cas particulier de celui-ci nommé "théorème de Kelvin-Stokes". Le vrai théorème de Stokes est donné par (sans preuve) :

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega \qquad (6.5.348)$$

et dit que l'intégrale d'une forme différentielle ω sur le bord d'une variété orientable Ω est égale à l'intégrale de sa dérivée extérieure $\mathrm{d}\omega$ sur l'ensemble de Ω. C'est la généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel aux dimensions N.

C'est la forme la plus générale et conceptuellement pure du théorème de Stokes, dont le théorème fondamental du calcul (cas 1D), le théorème fondamental des intégrales de ligne, le théorème de Green (cas 2D), le théorème (original) de Stokes (cas 3D) et le théorème de divergence sont tous des cas particuliers !

✍**Exemples :**

E1. Prenons le champ vectoriel, qui dépend linéairement de x et y :

$$\vec{f}(x,y,z) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y \qquad (6.5.349)$$

Sa représentation visuelle ressemble à ceci dans Maple 4.00b :

```
 >with(DEtools): with(plots):
>fieldplot([y, -x], x=-5..5, y=-5..5,arrows = medium,
color = sqrt(x^2 + y^2),thickness=2,labels=['x','y'],
title='Simple vector field');
```

En cours de relecture... (watermark fragments: "En co", "glais")

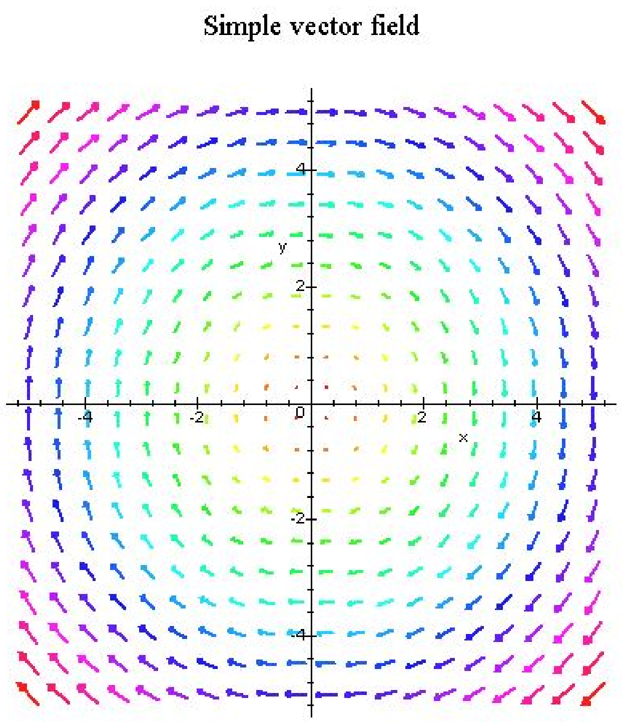


Fig. 6.124 – Exemple de champ de vecteur dans Maple 4.00b

Par simple inspection visuelle, nous pouvons voir que le champ vectoriel ci-dessus tourne. Si nous plaçons une roue à aubes n'importe où, nous voyons immédiatement sa tendance à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. En utilisant la règle de la main droite, nous nous attendons à ce que la rotation soit dans la page. Si nous voulons garder un système de coordonnées droitier, dans la page nous serons dans la direction négative z. L'absence de directions x et y est analogue à l'opération de produit vectoriel.

Si nous calculons le rotationnel :

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}=0\cdot\vec{e}_x+0\cdot\vec{e}_y+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}y\right)\vec{e}_z=-2\vec{e}_z \quad (6.5.350)$$

Avec Maple 4.00b nous obtenons ce résultat algébrique avec les commandes suivantes :

```
>with(linalg):
>f:=[y,-x,0];v:=[x,y,z];
>curl(f,v);
```

Comme nous n'avons pas encore eu le temps de trouver un moyen simple de tracer le champ vectoriel rotationnel résultant dans la version 4.00b de Maple, nous allons prendre l'image fournie par Wikipedia :

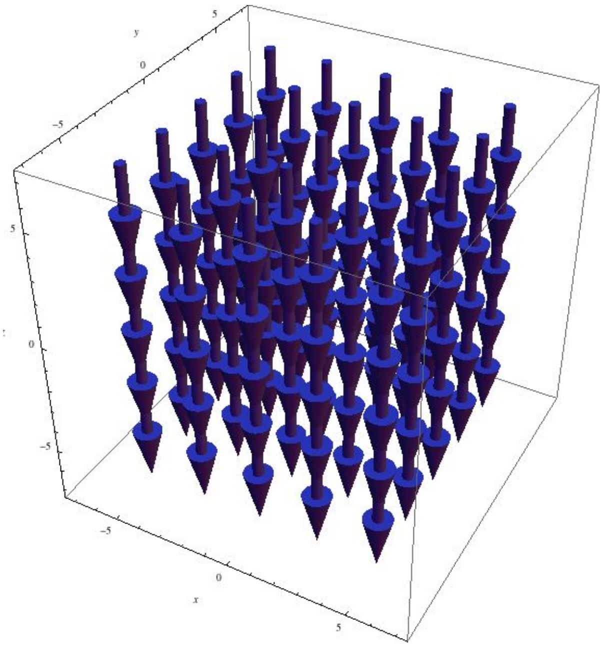


FIG. 6.125 – **Rotationnel du champ vectoriel précédent (source : Wikipédia)**

E2. Supposons maintenant que nous considérions un champ vectoriel légèrement plus compliqué :

$$\vec{f}(x,y,z) = -x^2\vec{e}_y \tag{6.5.351}$$

Sa représentation visuelle :

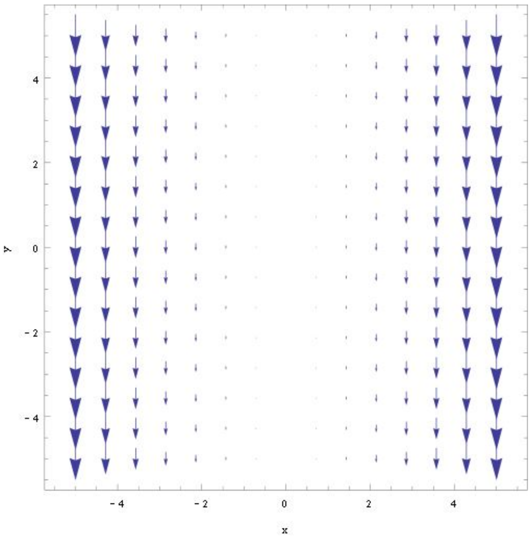


FIG. 6.126 – **Deuxième exemple de champ vectoriel (source : Wikipédia)**

Nous pourrions ne pas voir de rotation au premier regard, mais si nous observons attentivement sur la droite, nous voyons un champ plus grand à, disons, $x=4$ qu'à $x=3$. Intuitivement, si nous y placions une petite roue à aubes, le "courant" plus important sur son côté droit ferait tourner la roue à aubes dans le sens des aiguilles d'une montre, ce qui correspond à une rotation dans le sens négatif z. En revanche, si nous regardons un point à gauche et y plaçons une petite roue à aubes, le "courant" plus grand sur son côté

gauche ferait tourner la roue à aubes dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, ce qui correspond à une rotation dans le sens positif de la direction z. Vérifions notre supposition en faisant le calcul :

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}=0\cdot\vec{e}_x+0\cdot\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial x}(-x^2)\vec{e}_z=-2x\vec{e}_z \tag{6.5.352}$$

En effet le rotationnel est dans le sens positif z pour x négatif et dans le sens négatif z pour x positif, comme prévu. Comme cette rotation n'est pas la même en tout point, sa représentation visuelle est un peu plus intéressante :

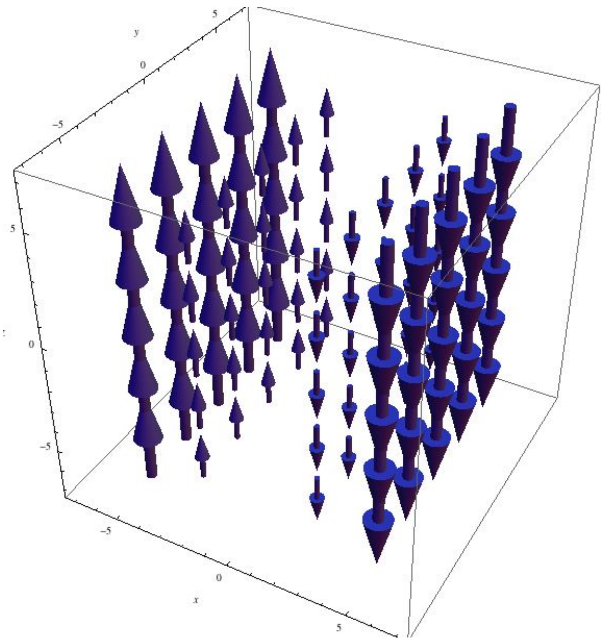


FIG. 6.127 – **Rotationnel du champ vectoriel précédent (source : Wikipédia)**

Cherchons maintenant à déterminer l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques (le rotationnel en coordonnées polaires n'étant pas définissable dans $\mathbb{R}^2$ à notre connaissance).

En réutilisant la même technique que pour le rotationnel en coordonnées cartésiennes, nous écrivons la circulation de $\vec{f}$ le long d'un contour correspondant à un petit morceau $P_1P_2P_3P_4$ d'un cylindre orthogonal (orienté dans la direction de l'axe des z) :

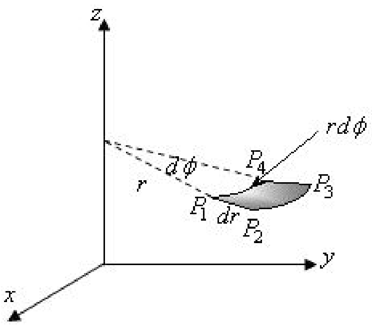


FIG. 6.128 – **Représentation du morceau de cylindre** $P_1P_2P_3P_4$

Nous avons alors en fixant z (attention le $\mathrm{d}\vec{r}$ n'a rien à voir avec le r du rayon du cylindre... la notation peut être confuse j'en suis désolé !) :

$$\begin{aligned}(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_1P_2}&=f_r(r,\phi,z)\mathrm{d}r\\(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_2P_3}&=f_\phi(r+\mathrm{d}r,\phi,z)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\phi\\(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_3P_4}&=-f_r(r,\phi+\mathrm{d}\phi,z)\mathrm{d}r\\(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_4P_1}&=-f_\phi(r,\phi,z)r\mathrm{d}\phi\end{aligned}\tag{6.5.353}$$

La circulation totale donne donc après regroupement des termes :

$$\begin{aligned}\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r}&=f_r(r,\phi,z)\mathrm{d}r+f_\phi(r+\mathrm{d}r,\phi,z)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\phi-f_r(r,\phi+\mathrm{d}phi,z)\mathrm{d}r-f_\phi(r,\phi,z)r\mathrm{d}\phi\\&=r\left[f_\phi(r+\mathrm{d}r,\phi,z)-f_\phi(r,\phi,z)\right]\mathrm{d}\phi+f_\phi(r+\mathrm{d},\phi,z)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r-\left[f_r(r,\phi+\mathrm{d}\phi,z)\right]\mathrm{d}r\end{aligned}\tag{6.5.354}$$

Nous ne pouvons pas à cette étape directement comparer avec le rotationnel car il nous est difficile de faire apparaître la différentielle de la surface si nous regardons les différentielles qui apparaissent actuellement dans la circulation. Le mieux est alors de tout diviser par $r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r}\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r}\\&=\frac{f_\phi(r+\mathrm{d}r,\phi,z)-f_\phi(r,\phi,z)}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{r}\frac{f_r(r,\phi+\mathrm{d}\phi,z)-f_r(r,\phi,z)}{\mathrm{d}\phi}+\frac{1}{r}f_\phi(r+\mathrm{d}r,\phi,z)\\&\underset{\substack{\mathrm{d}r\to0\\\mathrm{d}\phi\to0}}{=}\left(\frac{\partial f_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}f_\phi(r,\phi,z)-\frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\phi}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial(rf_\phi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\phi}\end{aligned}\tag{6.5.355}$$

Donc :

$$\mathrm{rot}(\vec{f})_z=\frac{1}{r}\frac{\partial(rf_\phi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\phi}\tag{6.5.356}$$

Maintenant nous déterminons le rotationnel en fixant ϕ. Le problème revient à avoir donc un rectangle dans l'espace que nous parcourons pour déterminer la circulation. Or, nous savons déjà ce qu'est le résultat du rotationnel pour un rectangle en coordonnées cartésiennes selo l'axe z :

$$\mathrm{rot}(\vec{f})_z=\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\tag{6.5.357}$$

à la différence que dans les coordonnées cylindriques il faut substituer z par ϕ, x par y, y par r, f_y par f_r et finalement f_x par f_z (ce choix s'impose toujours simplement parce que la circulation se fait de telle manière que la surface soit toujours à notre gauche). Ce qui nous donne :

$$\mathrm{rot}(\vec{f})_\phi=\frac{\partial f_r}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial r}\tag{6.5.358}$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver la composante du rotationnel en r (soit quand r est fixé). Le calcul est alors plus délicat puisqu'il s'agit de parcourir (positivement toujours !) une surface courbée par la variation de l'angle ϕ.

Nous avons alors en fixant r :

$$\begin{aligned}(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_1P_2}&=f_\phi(r,\phi,z)r\mathrm{d}\phi\\(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_2P_3}&=f_z(r,\phi+\mathrm{d}\phi,z)\mathrm{d}z\\(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_3P_4}&=-f_\phi(r,\phi,z+\mathrm{d}z)r\mathrm{d}\phi\\(\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r})_{P_4P_1}&=-f_z(r,\phi,z)\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{6.5.359}$$

En cours de traduction de l'anglais

la circulation totale donne donc après regroupement des termes :

$$\begin{aligned}\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r} &= f_z(r,\phi+\mathrm{d}\phi,z)\mathrm{d}z - f_z(r,\phi,z)\mathrm{d}z - rf_\phi(r,\phi,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}\phi + rf_\phi(r,\phi,z)\mathrm{d}\phi \\ &= \left[f_z(r,\phi+\mathrm{d}\phi,z) - f_z(r,\phi,z)\right]\mathrm{d}z - r\left[f_\phi(r,\phi,z+\mathrm{d}z) - f_\phi(r,\phi,z)\right]\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{6.5.360}$$

Nous ne pouvons pas à cette étape directement comparer avec le rotationnel car il nous est difficile de faire apparaître la différentielle de la surface si nous regardons les différentielles qui apparaissent actuellement dans la circulation. Le mieux est alors tout diviser par $r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$:

$$\frac{1}{r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z}\vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{r}\frac{f_z(r,\phi+\mathrm{d}\phi,z) - f_z(r,\phi,z)}{\mathrm{d}\phi} - \frac{f_\phi(r,\phi,z+\mathrm{d}z) - f_\phi(r,\phi,z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial\phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z} \tag{6.5.361}$$

Donc finalement :

$$\mathrm{rot}(\vec{f})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial\phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z} \tag{6.5.362}$$

Et nous avons finalement le "rotationnel en coordonnées cylindriques" dans sa globalité est donné par :

$$\boxed{\mathrm{rot}(\vec{f}) = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_z}{\partial\phi} - \dfrac{\partial f_\phi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rf_\phi)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_r}{\partial\phi}\end{pmatrix}} \tag{6.5.363}$$

Le lecteur pourrait aisément vérifier que ce résultat est simplement le gradient en coordonnées cylindriques appliqué au champ vectoriel $\vec{f}$.

Pour s'en persuader, montrons maintenant directement l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques en montrant ceci via le produit vectoriel du gradient en coordonnées sphériques avec le champ vectoriel $\vec{f}$.

D'abord rappelons que nous avons obtenu pour le gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{6.5.364}$$

Donc il vient :

$$\vec{\nabla}\times\vec{f} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}f_r \\ f_\theta \\ f_\phi\end{pmatrix} \tag{6.5.365}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce que nous pouvons aussi écrire en décomposant à l'aide des vecteurs de base :

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}=\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\times(f_r\vec{e}_r+f_\theta\vec{e}_\theta+f_\phi\vec{e}_\phi)$$
$$\begin{aligned}\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\times\vec{f}&=\vec{e}_r\times\frac{\partial\vec{f}}{\partial r}+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\times\frac{\partial\vec{f}}{\partial\theta}+\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin(\theta)}\times\frac{\partial\vec{f}}{\partial\phi}\\&=\vec{e}_r\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_\phi}{\partial r}\vec{e}_\phi+f_r\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r}+f_\theta\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r}+f_\phi\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial r}\right)\\&+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}\vec{e}_theta+\frac{\partial f_\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\phi+f_r\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}+f_\theta\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}+f_\phi\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial\theta}\right)\\&+\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin(\theta)}\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial\phi}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi+f_r\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\phi}+f_\theta\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\phi}+f_\phi\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}\tag{6.5.366}$$

A l'aide des dérivées partielles que nous avions démontrées lors de notre introduction plus haut du système de coordonnées sphériques il vient :

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\times\vec{f}=\\&=\vec{e}_r\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_\phi}{\partial r}\vec{e}_\phi+0+0+0\right)\\&+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\phi+f_r\vec{e}_\theta+f_\theta(-\vec{e}_r)+0\right)\\&+\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin(\theta)}\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial\phi}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi+f_r\sin(\theta)\vec{e}_\phi+f_\theta\cos(\theta)\vec{e}_\phi+f_\phi\left[-(\vec{e}_r\sin(\theta)+\vec{e}_\theta\cos(\theta))\right]\right)\end{aligned}\tag{6.5.367}$$

Les produits vectoriels avec les vecteurs colinéaires s'annulent. Il reste donc :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{f}&=\vec{e}_r\times\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f_\phi}{\partial r}\vec{e}_\phi\right)\\&+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\phi+f_\theta(-\vec{e}_r)\right)\\&+\frac{\vec{e}_\phi}{r\sin(\theta)}\times\left(\frac{\partial f_r}{\partial\phi}\vec{e}_r+\frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\vec{e}_\theta+f_\phi\left[-(\vec{e}_r\sin(\theta)+\vec{e}_\theta\cos(\theta))\right]\right)\end{aligned}\tag{6.5.368}$$

Comme le produit vectoriel de deux vecteurs de base donne le vecteur orthogonal correspondant (positivement ou négativement) nous avons alors :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{f}&=\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\vec{e}_\phi-\frac{\partial f_\phi}{\partial r}\vec{e}_\theta\right)\\&+\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\vec{e}_\phi+\frac{1}{r}\frac{\partial f_\phi}{\partial\theta}\vec{e}_r-\frac{f_\theta}{r}\vec{e}_\phi\right)\\&+\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_r}{\partial\phi}\vec{e}_\theta-\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\vec{e}_r-\frac{f_\phi}{r}\vec{e}_\theta+\frac{f_\phi\vec{e}_r\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)\end{aligned}\tag{6.5.369}$$

En regroupant les termes il vient :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{f}=\vec{e}_r&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_\phi}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}+\frac{f_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\right)+\vec{e}_\theta\left(-\frac{f_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f_r}{\partial\phi}-\frac{f_\phi}{r}\right)\\&+\vec{e}_\phi\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\theta}-\frac{f_\theta}{r}\right)\end{aligned}\tag{6.5.370}$$

En cours de traduction de l' anglais

Soit en simplifiant :

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}=\frac{\vec{e}_r}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)f_\phi)-\frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\right)+\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial f_r}{\partial\phi}-\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}(rf_\phi)\right)+\frac{e_p\vec{h}i}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta)-\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right) \tag{6.5.371}$$

Ainsi, nous obtenons finalement le "rotationnel en coordonnées sphériques" :

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)f_\phi)-\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_r}{\partial\phi}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rf_\phi)\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rf_\theta)-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_r}{\partial\theta}\end{pmatrix} \tag{6.5.372}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.5.8.5 Laplaciens d'un champ scalaire (opérateur de Laplace)

Le laplacien d'un champ scalaire $\phi(x_1, x_2, x_3)$ est le champ scalaire qui mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et sa moyenne autour de ce point. En d'autres termes, la dérivée partielle deuxième mesure les variations de la pente au point étudié dans un entourage immédiat et selon une dimension à la fois. Si la dérivée partielle deuxième est nulle selon x, alors la pente est constante dans un entourage immédiat et selon cette dimension, cela implique que la valeur de la fonction au point étudié est la moyenne de son entourage (selon une dimension).

Le lecteur pourra par ailleurs retrouver des applications pratiques de cet opérateur dans les sections d'Analyse Complexe, de Chimie Quantique, d'Astronomie, d'Électrodynamique, de Génie Marin & Météo, de Mécanique Ondulatoire, de Physique Quantique Des Champs et de Physique Quantique Ondulatoire.

Cet opérateur est définit à partir de la divergence du gradient et nous le notons (écriture tensorielle) :

$$\Delta \cdot f = \vec{\nabla}^2 f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \vec{\nabla} \circ (\vec{\nabla} \cdot \phi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{6.5.373}$$

Le laplacien est nul, ou assez petit, lorsque la fonction varie. Les fonctions vérifiant "l'équation de Laplace" :

$$\Delta \cdot \phi = 0 \tag{6.5.374}$$

sont appelées "fonctions harmoniques".

Donc l'opérateur "laplacien en coordonnées cartésiennes" est de par cette définition, donné par :

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tag{6.5.375}$$

Le laplacien d'un champ scalaire et dans d'autres systèmes de coordonnées est un peu plus long à développer. Il existe plusieurs méthodes et parmi celles existantes j'ai choisi celles dont le type de raisonnement et les outils utilisés semblaient pertinents. Il est intéressant d'aborder différentes stratégies mais bien sûr il existe des méthodes plus simples que celle présentée ci-dessous.

Soit le laplacien en coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$ d'un champ scalaire f :

$$\vec{\nabla}^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \tag{6.5.376}$$

Pour déterminer cette expression en coordonnées polaires, nous allons utiliser la différentielle totale et la règle de chaîne en coordonnées polaires (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1465) :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{6.5.377}$$

En cours de traduction de l' anglais

donc pour une dérivée seconde :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\\ &=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\phi}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}x^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\end{aligned} \quad (6.5.378)$$

or, nous avons pour les coordonnées polaires :

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6.5.379)$$

d'où pour la dérivée première :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{r^2} \quad (6.5.380)$$

et pour la dérivée seconde :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{r-\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}}{r^2}=\frac{r-\left(\dfrac{x}{r}\right)x}{r^2}=\frac{y^2}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\phi^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{y}{r^2}\right)=-y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(r^2\right)=-y\left(-\frac{2x}{r^4}\right)=\frac{2xy}{r^4} \quad (6.5.381)$$

dès lors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\phi}\left(\frac{x}{r}\right)\left(-y\frac{y}{r^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\partial r}\left(\frac{x}{r}\right)\left(-\frac{y}{r^2}\right)\\ +\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\left(-\frac{y}{r^2}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial\phi}\left(\frac{2xy}{r^4}\right)\end{aligned} \quad (6.5.382)$$

et compte tenu que les dérivées partielles secondes sont continues, alors les dérivées croisées sont égales selon le théorème de Schwarz (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1453) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial r}=\frac{\partial^2 f}{\partial\phi\partial r} \quad (6.5.383)$$

Dès lors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\phi}\left(-\frac{2xy}{r^3}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\left(\frac{y^2}{r^4}\right)+\frac{\partial f}{\partial\phi}\left(\frac{2xy}{r^4}\right) \quad (6.5.384)$$

De façon similaire, nous aurons :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{y^2}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\phi}\left(\frac{2xy}{r^3}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{x^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\left(\frac{x^2}{r^4}\right)+\frac{\partial f}{\partial\phi}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right) \quad (6.5.385)$$

d'où l'expression du laplacien en coordonnées polaires en sommant les deux dernières expressions :

$$\vec{\nabla}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \quad (6.5.386)$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc l'opérateur "laplacien scalaire en coordonnées polaires" est finalement donné par :

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \tag{6.5.387}$$

Pour trouver l'expression du laplacien scalaire en coordonnées sphériques, nous allons utiliser l'intuition du physicien et les notions de similitude.

Nous allons tout d'abord nous aider de la figure ci-dessus pour savoir de quoi l'on parle :

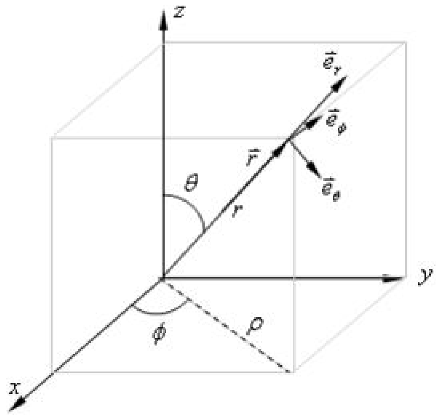


FIG. 6.129 – Représentation du système de coordonnées sphériques

Rappelons que les relations entre coordonnées cartésiennes et sphériques sont données par les relations :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan(\phi) &= \frac{y}{x} \\ \cos(\theta) &= \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{aligned} \tag{6.5.388}$$

Nous allons considérer maintenant les similitudes suivantes :

1. Coordonnées cylindriques :

$$x = \rho\cos(\phi) \quad \text{et} \quad y = \rho\sin(\phi) \tag{6.5.389}$$

2. Coordonnées sphériques :

$$z = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \rho = r\sin(\theta) \tag{6.5.390}$$

Construisons un tableau de correspondance :

$$\begin{array}{rcccc} \text{Cyl :} & x & \rho & \phi & y \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Sph :} & z & r & \theta & \rho \end{array} \tag{6.5.391}$$

En cours de traduction de l'anglais

L'objectif est de jouer avec cette correspondance avec d'abord le laplacien en coordonnées cylindriques où l'on a soustrait des deux côtés de l'égalité le terme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{6.5.392}$$

Utilisons notre petit tableau de correspondance et nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{6.5.393}$$

Le deuxième terme de l'égalité de cette dernière relation est l'équivalent sphérique du terme #1 du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}_{\#1}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \phi^2} \tag{6.5.394}$$

Maintenant examinons le terme : $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$

Identiquement, lorsque nous avons déterminé la relation :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi\Rightarrow\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{6.5.395}$$

nous obtenons :

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} \tag{6.5.396}$$

avec :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho}\quad\text{et}\quad\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{\rho^2} \tag{6.5.397}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}=\frac{y}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}+\frac{x}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} \tag{6.5.398}$$

Si nous jouons encore avec le tableau de correspondance, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}=\frac{\rho}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{z}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{6.5.399}$$

Nous divisons cette relation des deux côtés par ρ et ainsi nous obtenons :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{z}{\rho r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{6.5.400}$$

Nous avons donc ci-dessus l'équivalent sphérique du terme #2 du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}_{\#1}+\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}}_{\#2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{6.5.401}$$

En cours de traduction de l' anglais

Le troisième et dernier terme est très simple à déterminer. Nous remplaçons ρ par $r\sin(\theta)$ afin d'obtenir :

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\rightarrow\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \tag{6.5.402}$$

En rassemblant tous les termes obtenus précédemment, nous obtenons enfin la forme étendue du Laplacien scalaire en coordonnées sphériques si utilisé en physique (voir les sections correspondantes dans le présent livre) :

$$\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\cot(\phi)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{6.5.403}$$

Nous pouvons raccourcir cette expression en factorisant les termes :

$$\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cot(\phi)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{6.5.404}$$

Si nous condensons encore un peu, nous obtenons l'expression finale de l'opérateur "Laplacien en coordonnées sphériques" appelé aussi simplement "Laplacien sphérique" :

$$\boxed{\vec{\nabla}^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}} \tag{6.5.405}$$

6.5.8.6 Laplaciens d'un champ vectoriel

Comme pour le Laplacien d'un champ scalaire, le Laplacien d'un champ vectoriel n'est qu'un système de notation très commode pour condenser l'écriture des composantes d'un champ.

Le lecteur pourra par ailleurs retrouver des applications pratiques de cet opérateur dans les sections d'Électrocinétique, d'Électrodynamique et de Mécanique Des Milieux Continus.

Ainsi, le Laplacien vectoriel est souvent défini par (introduisant par la même occasion les différentes notations existantes) :

$$\Delta\vec{f}=\vec{\nabla}^2\vec{v}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{f}\right)-\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{f}\right) \tag{6.5.406}$$

Nous allons par ailleurs démontrer que dans le cas particulier des coordonnées cartésiennes, le Laplacien d'un champ vectoriel a pour composantes le Laplacien scalaire de chacune des composantes.

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons donc en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{f}&=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{f}\right)-\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{f}\right)=\vec{\nabla}\left(\partial_x f_1+\partial_y f_2+\partial_z f_3\right)-\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}\partial_y f_3-\partial_z f_2\\ \partial_z f_1-\partial_x f_3\\ \partial_x f_2-\partial_y f_1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\partial_x\partial_x f_1+\partial_x\partial_y f_2+\partial_x\partial_z f_3\\ \partial_y\partial_x f_1+\partial_y\partial_y f_2+\partial_y\partial_z f_3\\ \partial_z\partial_x f_1+\partial_z\partial_y f_2+\partial_z\partial_z f_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\partial_y(\partial_x f_2-\partial_y f_1)-\partial_z(\partial_z f_1-\partial_x f_3)\\ \partial_z(\partial_y f_3-\partial_z f_2)-\partial_x(\partial_x f_2-\partial_y f_1)\\ \partial_x(\partial_z f_1-\partial_x f_3)-\partial_y(\partial_y f_3-\partial_z f_3)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\partial_x\partial_x f_1+\partial_x\partial_y f_2+\partial_x\partial_z f_3-\partial_y\partial_x f_2+\partial_y\partial_y f_1+\partial_z\partial_z f_1-\partial_z\partial_x f_3\\ \partial_y\partial_x f_1+\partial_y\partial_y f_2+\partial_y\partial_z f_3-\partial_z\partial_y f_3+\partial_z\partial_z f_2+\partial_x\partial_x f_2-\partial_x\partial_y f_1\\ \partial_z\partial_x f_1+\partial_z\partial_y f_2+\partial_z\partial_z f_3-\partial_x\partial_z f_1+\partial_x\partial_x f_3-\partial_y\partial_y f_3+\partial_y\partial_z f_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\partial_x\partial_x f_1+\partial_y\partial_y f_1+\partial_z\partial_z f_1\\ \partial_x\partial_x f_1+\partial_y\partial_y f_2+\partial_z\partial_z f_2\\ \partial_x\partial_x f_1+\partial_y\partial_y f_2+\partial_z\partial_z f_3\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{6.5.407}$$

et donc le "laplacien d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes", est bien le laplacien laplacien scalaire de chacune des composantes :

$$\Delta\vec{f}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i^2}\end{pmatrix}\tag{6.5.408}$$

Ou plus explicitement :

$$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\end{pmatrix}\tag{6.5.409}$$

Le laplacien d'un champ de vecteurs, appelé fréquemment "laplacien vectoriel", en d'autres systèmes de coordonnées est assez simple à obtenir à partir de la connaissance du laplacien d'un champ scalaire dans ces mêmes coordonnées.

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\vec{f}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{f})-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f})=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r+\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi+\partial_z f_z\right)-\nabla\times\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\partial_\phi f_z-\partial_z f_\phi\\ \partial_z f_r-\partial_r f_z\\ \frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)+\partial_r(\partial_z f_z)\\ \frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)+\frac{1}{r}\partial_\phi(\partial_z f_z)\\ \partial_z\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\partial_z\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)+\partial_z\partial_z f_z\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\right)-\partial_z(\partial_z f_r-\partial_r f_z)\\ \partial_z\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_z-\partial_z f_\phi\right)-\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\right)\\ \frac{1}{r}\partial_r r(\partial_z f_r-\partial_r f_z)-\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_z-\partial_z f\phi\right)\end{pmatrix} \tag{6.5.410}$$

Pour la simplification (faute de place) concentrons-nous d'abord sur la première ligne :

$$\begin{aligned}&\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)+\partial_r(\partial_z f_z)-\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\right)+\partial_z(\partial_z f_r-\partial_r f_z)\\
&=\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)-\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\right)+\partial_z^2 f_r\\
&=-\frac{1}{r^2}\partial_r r f_r+\frac{1}{r}\partial_r^2 r f_r-\frac{1}{r^2}\partial_\phi f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r\partial_\phi f_\phi-\frac{1}{r^2}\partial_\phi\partial_r r f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\\
&=-\frac{1}{r^2}f_r-\frac{1}{r}\partial_r f_r+\frac{1}{r}\partial_r^2 r f_r-\frac{1}{r^2}\partial_\phi f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r\partial_\phi f_\phi-\frac{1}{r^2}\partial_\phi\partial_r f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\\
&=-\frac{1}{r^2}f_r-\frac{1}{r}\partial_r f_r+\frac{1}{r}\partial_r^2 r f_r-\frac{2}{r^2}\partial_\phi f\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\\
&=-\frac{1}{r^2}f_r-\partial 1 r\partial_r f_r+\frac{1}{r}\partial_r f_r+\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r f_r-\frac{2}{r^2}\partial_\phi f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\\
&=-\frac{1}{r^2}f_r+\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r f_r-\frac{2}{r^2}\partial_\phi f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\\
&=-\frac{1}{r^2}f_r+\frac{1}{r}\partial_r f_r+\partial_r^2 f_r-\frac{2}{r^2}\partial_\phi f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\end{aligned} \tag{6.5.411}$$

En cours de traduction de l'anglais

et ensuite sur la deuxième ligne :

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)+\frac{1}{r}\partial_\phi(\partial_z f_z)-\partial_z\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_z-\partial_z f_\phi\right)+\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\right)\\
&=\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)+\frac{1}{r}\partial_\phi\partial_z f_z-\partial_z\frac{1}{z}\partial_\phi f_z+\partial_z^2 f_\phi+\partial_r\frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\partial_r\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\\
&=\frac{1}{r^2}\partial_\phi\partial_r r f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi+\frac{1}{r}\partial_\phi\partial_z f_z-\frac{1}{r}\partial_z\partial_\phi f_z+\partial_z^2 f_\phi+\partial_r\frac{1}{r}\partial_r r f_\phi-\partial_r\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\\
&=\frac{1}{r^2}\partial_\phi\partial_r r f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi+\partial_r\frac{1}{r}r f_\phi-\partial_r\frac{1}{r}\partial_\phi f_r\\
&=\frac{1}{r^2}\partial_\phi f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi r\partial_r f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi-\frac{1}{r^2}\partial_r r f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r^2 r f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi f_r-\frac{1}{r}\partial_r\partial_\phi f_r\\
&=\frac{2}{r^2}\partial_\phi f_r+\frac{1}{r}\partial_\phi\partial_r f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi f_\phi+\partial_z^2 f_\phi-\frac{1}{r^2}f_\phi-\frac{1}{r}f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r^2 r f_\phi-\frac{1}{r}\partial_r\partial_\phi f_r\\
&=\frac{2}{r^2}\partial_\phi f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi-\frac{1}{r^2}f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r f_\phi\\
&=\frac{2}{r^2}\partial_\phi f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi-\frac{1}{r^2}f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r f_\phi+\partial_r^2 f_\phi
\end{aligned}
\tag{6.5.412}
$$

Et enfin la troisième et dernière ligne :

$$
\begin{aligned}
&=\partial_z\left(\frac{1}{r}\partial_r r f_r\right)+\partial_z\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_\phi\right)+\partial_z\partial_z f_z-\frac{1}{r}\partial_r r(\partial_z f_r-\partial_r f_z)+\frac{1}{r}\partial_\phi\left(\frac{1}{r}\partial_\phi f_z-\partial_z f_\phi\right)\\
&=\frac{1}{r}\partial_z\partial_r r f_r+\partial 1r\partial_z\partial_\phi f_\phi+\partial_z^2 f_z-\partial 1r\partial_r r\partial_z f_r+\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r f_z+\frac{1}{r^2}\partial_p hi^2 f_z-\frac{1}{r}\partial_\phi\partial_z f_\phi\\
&=\frac{1}{r}\partial_z\partial_r r f_r+\partial_z^2 f_z-\frac{1}{r}\partial_r r\partial f_r+\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r f_z+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_z\\
&=\frac{1}{r}\partial_z f_r+\frac{1}{r}\partial_z r\partial_r f_r+\partial_z^2 f_z-\frac{1}{r}\partial_z f_r-\partial_r\partial_z f_r+\frac{1}{r}\partial_r f_z+\partial_r^2 f_z+\partial 1r^2\partial_\phi^2 f_z\\
&=\frac{1}{r}\partial_z r\partial_r f_r+\partial_z^2 f_z-\partial_r\partial_z f_r+\frac{1}{r}\partial_r f_z+\partial_r^2 f_z+\frac{1}{2}\partial_\phi^2 f_z\\
&=\partial_z\partial_r f_r+\partial_z^2 f_z-\partial_r\partial_z f_r+\frac{1}{r}\partial_r f_z+\partial_r^2 f_z+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_z\\
&=\partial_z^2 f_z+\frac{1}{r}\partial_r f_z+\partial_r^2 f_z+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_z
\end{aligned}
\tag{6.5.413}
$$

Ce qui donne donc pour le "laplacien vectoriel en coordonnées cylindriques" tel que nous pouvons le trouver dans les tables ou formulaires :

$$
\Delta\vec{f}=\begin{pmatrix}
-\dfrac{1}{r^2}f_r+\dfrac{1}{r}\partial_r f_r+\partial_r^2 f_r-\dfrac{2}{r^2}\partial_\phi f_\phi+\dfrac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\\
\dfrac{2}{r^2}\partial_\phi f_r+\dfrac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi-\dfrac{1}{r^2}f_\phi+\dfrac{1}{r}\partial_r f_\phi+\partial_r^2 f_\phi\\
\partial_z^2 f_z+\dfrac{1}{r}\partial_r f_z+\partial_r^2 f_z+\dfrac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_z
\end{pmatrix}
\tag{6.5.414}
$$

Pour finir en beauté et dans la joie et la bonne humeur faisons les calculs joyeux et détaillés du laplacien vectoriel en coordonnées sphériques (c'est long mais c'est juste pour s'assurer que

En cours de traduction de l'anglais

l'on retrouve ce qu'il y a dans les tables et formulaires).

$$
\begin{aligned}
\Delta\vec{f}=&\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{f})-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f})=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2f_r)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\right)\\
&-\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\phi)-\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta\\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_r-\dfrac{1}{r}\partial_r(rf_\phi)\\ \dfrac{1}{r}\partial_r(rf_\theta)-\dfrac{1}{r}\partial_\theta f_r\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\partial_r\left(\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2f_r)\right)+\partial_r\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)\right)+\partial_r\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\right)\\ \dfrac{1}{r}\partial_\theta\left(\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2f_r)\right)+\dfrac{1}{r}\partial_\theta\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)\right)+\dfrac{1}{r}\partial_\theta\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)\partial_\phi f_\phi}\right)\\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\dfrac{1}{r^2}\partial_r(r^2f_r)\right)+\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)\right)+\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\right)\end{pmatrix}\\
&-\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta\left(\sin(\theta)\left(\dfrac{1}{r}\partial_r(rf_\theta)-\dfrac{1}{r}\partial_\theta f_r\right)\right)-\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\dfrac{1}{r}\partial_\phi f_r-\dfrac{1}{r}\partial_r(rf_\phi)\right)\\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\phi)-\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta\right)-\dfrac{1}{r}\partial_r\left(r\left(\dfrac{1}{r}\partial_r(rf_\theta)-\dfrac{1}{r}\partial_\theta f_r\right)\right)\\ \dfrac{1}{r}\partial_r\left(r\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_r-\dfrac{1}{r}\partial_r(rf_\phi)\right)\right)-\dfrac{1}{r}\partial_\theta\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta f_\phi)-\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.5.415}
$$

En cours de traduction de l'anglais

Concentrons-nous sur la première ligne (attention ! ça va être long...) :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r\sin(\theta)}\cos(\theta)\partial_r f_\theta-\frac{1}{r\sin(\theta)}\sin(\theta)\partial_\theta\partial_r f_\theta+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\cos(\theta)}{r}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta\partial_\theta f_\theta\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=\partial_r\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r)\right)-\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_r\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)\\
&-\frac{\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{1}{r^2}\partial_\theta f_\theta-\frac{\cot(\theta)}{r}\partial_r f_\theta-\frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r f_\theta+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=\partial_r\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r)\right)-\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cos(\theta)f_\theta-\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta f_\theta+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_r f_\theta+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_r\partial_\theta f_\theta\\
&-\frac{\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{1}{r^2}\partial_\theta f_\theta-\frac{\cot(\theta)}{r}\partial_r f_\theta-\frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r f_\theta+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=\partial_r\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r)\right)-\frac{\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{1}{r^2}\partial_\theta f_\theta+\frac{\cot(\theta)}{r}\partial_r f_\theta+\frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta f_\theta\\
&-\frac{\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{1}{r^2}\partial_\theta f_\theta-\frac{\cot(\theta)}{r}\partial_r f_\theta-\frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r f_\theta+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=\partial_r\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r)\right)-\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=-\frac{2}{r^3}\partial_r(r^2 f_r)+\left(\frac{1}{r^2}\partial_r^2(r^2 f_r)\right)\\
&-\frac{2\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{2}{r^2}\partial_\theta f_\theta\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=-\frac{2}{r^3}2rf_r-\frac{2}{r^3}r^2\partial_r f_r+\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(2rf_2+r^2\partial_r f_r)\right)\\
&-\frac{2\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{2}{r^2}\partial_\theta f_\theta+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=-\frac{4}{r^2}f_r-\frac{2}{r}\partial_r f_r+\frac{1}{r^2}2f_r+\frac{1}{r^2}2r\partial_r f_r+\frac{1}{r^2}2r\partial_r^2 f_r\\
&-\frac{2\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{2}{r^2}\partial_\theta f_\theta+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&=-\frac{2}{r^2}f_r+\frac{2}{r}\partial_r f_r+\underbrace{\partial_r^2 f_r}_{=\frac{1}{r}\partial_r^2(rf_r)}-\frac{2\cot(\theta)}{r^2}f_\theta-\frac{2}{r^2}\partial_\theta f_\theta+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r-\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi
\end{aligned}
\tag{6.5.416}
$$

En cours de traduction de l'anglais

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2}{r^2}f_r + \frac{1}{r}\partial_r^2(rf_r)\\
&- \frac{2\cot(\theta)}{r^2}f_\theta - \frac{2}{r^2}\partial_\theta f_\theta + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_r + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_r - \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi
\end{aligned}
\tag{6.5.417}
$$

voilà pour la première ligne... Attaquons-nous maintenant à la deuxième ligne toujours dans la joie et la bonne humeur... :

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r)\right) + \frac{1}{r}\partial_\theta\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)\right) + \frac{1}{r}\partial_\theta\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\right)\\
&- \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta f_\phi) - \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta\right) + \frac{1}{r}\partial_r\left(r\left(\frac{1}{r}\partial_r(rf_\theta) - \frac{1}{r}\partial_\theta f_r\right)\right)\\
&= \frac{1}{r^3}\partial_\theta\partial_r r^2 f_r - \frac{1}{r^2}\frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\phi - \frac{1}{r^2}\frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\phi\\
&+ \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\phi - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta\sin(\theta)f_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r(\partial_r(rf_\theta) - \partial_\theta f_r)\\
&= \frac{1}{r^3}\partial_\theta 2rf_r + \frac{1}{r^3}\partial_\theta r^2\partial_r f_r - \frac{1}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\theta\sin(\theta)f_\theta + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta^2(\sin(\theta)f_\theta) - \frac{1}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\\
&+ \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\phi - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta\sin(\theta)f_\phi + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r(f_\theta + r\partial_r f_\theta - \partial_\theta f_r)\\
&= \frac{2}{r^2}\partial_\theta f_r + \frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r f_r - \frac{1}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\cos(\theta)f_\theta - \frac{1}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(\theta)\partial_\theta f_\theta + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta^2(\sin(\theta)f_\theta)\\
&- \frac{1}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\phi - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi\cos(\theta)f_\phi -\\
&\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi\sin(\theta)\partial_\theta f_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r r\partial_r f_\theta - \frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta f_r\\
&= \frac{2}{r^2}\partial_\theta f_r - \frac{1}{r^2}\cot^2(\theta)f_\theta - \frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\theta + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\cos(\theta)f_\theta + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\sin(\theta)\partial_\theta f_\theta\\
&- \frac{2}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\phi - \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta f_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r^2(rf_\theta)\\
&= \frac{2}{r^2}\partial_\theta f_r - \frac{1}{r^2}\cot^2(\theta)f_\theta - \frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\theta - \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\sin(\theta)f_\theta + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cos(\theta)\partial_\theta f_\theta\\
&+ \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cos(\theta)\partial_\theta f_\theta + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\sin(\theta)\partial_\theta^2 f_\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\phi\\
&- \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta f_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r^2(rf_\theta)\\
&= \frac{2}{r^2}\partial_\theta f_r - \frac{\cot^2(\theta)}{r^2}f_\theta + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\theta - \frac{1}{r^2}f_\theta + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r^2(rf_\theta)\\
&= \frac{2}{r^2}\partial_\theta f_r - \frac{1}{r^2}(\cot^2(\theta) - 1)f_\theta + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\theta + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\cot(\theta}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r^2(rf_\theta)\\
&= \frac{2}{r^2}\partial_\theta f_r - \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}f_\theta + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\theta + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\cot(\theta)}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\theta + \frac{1}{r}\partial_r^2(rf_\theta)
\end{aligned}
\tag{6.5.418}
$$

En cours de traduction de l'anglais

et enfin un dernier effort pour la troisième et dernière ligne :

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r)\right)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\theta)\right)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\phi\right)\\
&-\frac{1}{r}\partial_r\left(r\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_r-\frac{1}{r}\partial_r(rf_\phi)\right)\right)+\frac{1}{r}\partial_\theta\left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\phi)-\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta\right)\\
&=\frac{1}{r^3\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_r r^2 f_r+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta\sin(\theta)f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi\\
&-\frac{1}{r}\partial_r\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\partial_\phi f_r-\partial_r r f_\phi\right)+\frac{1}{r}\partial_\theta\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta f_\theta\\
&=\frac{1}{r^3\sin(\theta)}\partial_\phi 2rf_r+\frac{1}{r^3\sin(\theta)}\partial_\phi r^2\partial_r f_r+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi+\cos(\theta)f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi\sin(\theta)\partial_\theta f_\theta\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi-\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_r\partial_\phi f_r+\frac{1}{r}\partial_r\partial_r f_\phi\\
&-\frac{1}{r}\frac{\cos(\theta)}{r\sin^2(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\phi)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\theta(\sin(\theta)f_\phi)+\frac{1}{r}\frac{\cos(\theta)}{r\sin^2(\theta)}\partial_\phi f_\theta-\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\theta\\
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_r f_r+\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta f_\theta\\
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_r f_r+\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta f_\theta\\
&+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2-\partial 1r\sin(\theta)\partial_r\partial_\phi f_r+\frac{1}{r}\partial_r\partial_r r f_\phi\\
&=-\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)f_\phi)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\theta(\sin(\theta)f_\phi)+\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta-\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi f_\theta\\
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi\partial_\theta f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r\partial_r r f_\phi\\
&-\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\cos(\theta)f_\phi-\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\sin(\theta)\partial_\theta f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\cos(\theta)f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\sin(\theta)\partial_\theta f_\phi\\
&+\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta-\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\partial_\phi\partial_\theta\\
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{2\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r\partial_r r f_\phi\\
&-\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\cos(\theta)f_\phi-\frac{\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\sin(\theta)\partial_\theta f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\cos(\theta)f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\sin(\theta)\partial_\theta f_\phi\\
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{2\cot(\theta)}{r^2\sin(theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r\partial_r f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r f_\phi\\
&-\frac{\cot^2(\theta)}{r^2}f_\phi-\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\cos(\theta)f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\partial_\theta\sin(\theta)\partial_\theta f_\phi\\
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{2\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r\partial_r f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r f_\phi+\partial_r^2 f_\phi-\frac{\cot^2(\theta)}{r^2}f_\phi\\
&-\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\phi-\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\sin(\theta)f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cos(\theta)\partial_\theta f_\phi+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cos(\theta)\partial_\theta f_\phi\\
&+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\sin(\theta)\partial_\theta^2 f_\phi
\end{aligned}
\tag{6.5.419}
$$

En cours de traduction de l' anglais

$$\begin{aligned}
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{2\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi+\underbrace{\frac{2}{r}\partial_r f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r^2 f_\phi}=\frac{1}{r}\partial_r^2 r f_\phi\\
&-\frac{\cot^2(\theta)}{r^2}f_\phi-\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\phi-\frac{1}{r^2}f_\phi+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\phi+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_\phi\\
&=\frac{2}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_r+\frac{2\cot(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\partial_\phi f_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi^2 f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r^2 r f_\phi-\frac{1}{r^2}f_\phi(\cot^2(\theta)+1)\\
&+\frac{\cot(\theta)}{r^2}\partial_\theta f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f_\phi
\end{aligned}\tag{6.5.420}$$

Ce qui donne donc pour le "laplacien vectoriel en coordonnées sphériques" tel que nous pouvons le trouver dans les tables ou formulaires :

$$\Delta\vec{f}=\begin{pmatrix}
-\dfrac{2f_r}{r^2}+\dfrac{\partial_r^2 r f_r}{r^2}-\dfrac{2\cot(\theta)f_\theta}{r^2}-\dfrac{2\partial_\theta f_\theta}{r^2}+\dfrac{\cot(\theta)\partial_\theta f_r}{r^2}+\dfrac{\partial_\theta^2 f_r}{r^2}+\dfrac{\partial_\phi^2 f_r}{r^2\sin^2(\theta)}-\dfrac{2\partial_\phi f_\phi}{r^2\sin^2(\theta)}\\
\dfrac{2\partial_\theta f_r}{r^2}-\dfrac{f_\theta}{r^2\sin^2(\theta)}+\dfrac{\cot(\theta)\partial_\theta f_\theta}{r^2}+\dfrac{\partial_\theta^2 f_\theta}{r^2}-\dfrac{2\cot(\theta)\partial_\phi f_\phi}{r^2\sin(\theta)}+\dfrac{\partial_\phi^2 f_\theta}{r^2\sin^2(\theta)}+\dfrac{\partial_r^2 r f_\theta}{r}\\
\dfrac{2\partial_\phi f_r}{r^2\sin(\theta)}+\dfrac{2\cot(\theta)\partial_\phi f_\theta}{r^2\sin(\theta)}+\dfrac{\partial_\phi^2 f_\phi}{r^2\sin^2(\theta)}+\dfrac{\partial_r^2 r f_\phi}{r}-\dfrac{f_\phi}{r^2\sin^2(\theta)}+\dfrac{\cot(\theta)\partial_\theta f_\phi}{r^2}+\dfrac{\partial_\theta^2 f_\phi}{r^2}
\end{pmatrix}\tag{6.5.421}$$

voilà voilà... pour les sceptiques...

6.5.8.7 Identités remarquables

Les opérateurs différentiels scalaires et vectoriels ont des identités remarquables très simples que nous retrouverons très souvent en physique dans le présent livre pour dans des cas pratiques très importants.

Voyons d'abord les relations qui n'ont aucun sens (au cas où vous tomberiez dessus sans faire exprès...) :

$$\text{rot}(\text{div}(\vec{f}))\quad\text{ou}\quad\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\circ\vec{f})\tag{6.5.422}$$

Pour la relation ci-dessus, le rotationnel d'une divergence n'existe pas puisque l'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel alors que la divergence est un scalaire.

$$\text{rot}(\Delta\cdot f)\quad\text{ou}\quad\vec{\nabla}\times(\Delta\cdot f)\tag{6.5.423}$$

Pour la relation ci-dessus, le rotationnel d'un laplacien scalaire n'existe pas puisque l'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel alors que par construction, le laplacien est un scalaire.

Ceci étant fait...! Voyons maintenant quelques propriétés remarquables sans démonstrations (cependant si vous en avez besoin car vous n'y arrivez pas seul, n'hésitez pas à nous contacter, nous compléterons) :

1. Par construction le Laplacien scalaire est la divergence du gradient du champ :

$$\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right)=\vec{\nabla}\circ\vec{\nabla}(f)=\vec{\nabla}^2 f=\Delta\cdot f\tag{6.5.424}$$

En cours de traduction de l'anglais

2. Le rotationnel du gradient est nul :

$$\text{rot}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right)=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=\vec{0} \tag{6.5.425}$$

Donc si le rotationnel d'une variable vectorielle est nul, la variable peut être exprimée comme le gradient d'un potentiel scalaire ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! C'est une propriété très importante (ou un "truc" selon le point de vue...) en Électromagnétisme et en Mécanique des fluides et en Physique Quantique !

Démonstration 6.37.2.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\end{pmatrix}=\vec{0} \tag{6.5.426}$$

■ Q.E.D.

3. Le rotationnel du produit vectoriel, relation utilisée parfois en Mécanique des Fluides (que nous utiliserons par ailleurs !), est égal à :

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)=\left(\vec{g}\circ\vec{\nabla}\right)\vec{f}-\vec{g}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{f}\right)-\left(\vec{f}\circ\vec{\nabla}\right)\vec{g}+\vec{f}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{g}\right) \tag{6.5.427}$$

Voyons comment obtenir ce résultat :

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.37.3.

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times(\vec{f}\times\vec{g}) =& \nabla\times\left((f_yg_z-f_zg_y)\,\vec{i}+(f_zg_x-f_xg_z)\,\vec{j}+(f_xg_y-f_yg_x)\,\vec{k}\right)\\
=& \left(\frac{\partial}{\partial y}(f_xg_y-f_yg_x)-\frac{\partial}{\partial z}(f_zg_x-f_xg_z)\right)\vec{i}\\
&+\left(\frac{\partial}{\partial z}(f_yg_z-f_zg_y)-\frac{\partial}{\partial x}(f_xg_y-f_yg_x)\right)\vec{j}\\
&+\left(\frac{\partial}{\partial x}(f_zg_x-f_xg_z)-\frac{\partial}{\partial y}(f_yg_z-f_zg_y)\right)\vec{k}\\
=& \left(\frac{\partial f_xg_y}{\partial y}-\frac{\partial f_yg_x}{\partial y}-\frac{\partial f_zg_x}{\partial z}+\frac{\partial f_xg_z}{\partial z}\right)\vec{i}\\
&+\left(\frac{\partial f_yg_z}{\partial z}-\frac{\partial f_zg_y}{\partial z}-\frac{\partial f_xg_y}{\partial x}+\frac{\partial f_yg_x}{\partial x}\right)\vec{j}\\
&+\left(\frac{\partial f_zg_x}{\partial x}-\frac{\partial f_xg_z}{\partial x}-\frac{\partial f_yg_z}{\partial y}+\frac{\partial f_zg_y}{\partial y}\right)\vec{k}\\
=& \left(f_x\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial f_x}{\partial y}g_y-f_y\frac{\partial g_x}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial y}g_x-f_z\frac{\partial g_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial z}g_x+f_x\frac{\partial g_z}{\partial z}+\frac{\partial f_x}{\partial z}g_z\right)\vec{i}\\
&+\left(f_y\frac{\partial g_z}{\partial z}+\frac{\partial f_y}{\partial z}g_z-f_z\frac{\partial g_y}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial z}g_y-f_x\frac{\partial g_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial x}g_y+f_y\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial x}g_x\right)\vec{j}\\
&+\left(f_z\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial f_z}{\partial x}g_x-f_x\frac{\partial g_z}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial x}g_z-f_y\frac{\partial g_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial y}g_z+f_z\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial y}g_y\right)\vec{k}\\
=& \left(f_x\left(\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)-\left(f_y\frac{\partial g_x}{\partial y}+f_z\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)g_x+\left(\frac{\partial f_x}{\partial y}g_y+\frac{\partial f_x}{\partial z}g_z\right)\right)\vec{i}\\
&+\left(f_y\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)-\left(f_x\frac{\partial g_y}{\partial x}+f_z\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)g_y+\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}g_x+\frac{\partial f_y}{\partial z}g_z\right)\right)\vec{j}\\
&+\left(f_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)-\left(f_x\frac{\partial g_z}{\partial x}+f_y\frac{\partial g_z}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)g_z+\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}g_x+\frac{\partial f_z}{\partial y}g_y\right)\right)\vec{k}\\
=& \left(f_x\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)-\left(f_x\frac{\partial g_x}{\partial x}+f_y\frac{\partial g_x}{\partial y}+f_z\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)g_x+\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}g_x+\frac{\partial f_x}{\partial y}g_y+\frac{\partial f_x}{\partial z}g_z\right)\right)\vec{i}\\
&+\left(f_y\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)-\left(f_x\frac{\partial g_y}{\partial x}+f_y\frac{\partial g_y}{\partial y}+f_z\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)g_y+\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}g_x+\frac{\partial f_y}{\partial y}g_y+\frac{\partial f_y}{\partial z}g_z\right)\right)\vec{j}\\
&+\left(f_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)-\left(f_x\frac{\partial g_z}{\partial x}+f_y\frac{\partial g_z}{\partial y}+f_z\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)g_z+\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}g_x+\frac{\partial f_z}{\partial y}g_y+\frac{\partial f_z}{\partial z}g_z\right)\right)\vec{k}\\
=& \left(g_x\frac{\partial}{\partial x}+g_y\frac{\partial}{\partial y}+g_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}\right)-\left(g_x\vec{i}+g_y\vec{j}+g_z\vec{k}\right)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)\\
&-\left(f_x\frac{\partial}{\partial x}+f_y\frac{\partial}{\partial y}+f_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(g_x\vec{i}+g_y\vec{j}+g_z\vec{k}\right)+\left(f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}\right)\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)\\
=& \left(\vec{g}\circ\vec{\nabla}\right)\vec{f}-\vec{g}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{f}\right)-\left(\vec{f}\circ\vec{\nabla}\right)\vec{g}+\vec{f}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{g}\right)
\end{aligned}
\tag{6.5.428}
$$

■ Q.E.D.

4. Le produit scalaire de deux rotationneles est égal à quelque chose d'ennuyant à d'écrire àvec une langue vivante :

$$(\vec{\nabla}\times\vec{x})\circ(\vec{\nabla}\times\vec{y})=\vec{y}\circ(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{x}))+\vec{\nabla}\circ(\vec{y}\times(\vec{\nabla}\times\vec{x}))\tag{6.5.429}$$

5. La divergence du rotationnel d'un champs vectoriel est toujours égal à zéro :

$$\text{div}\left(\text{rot}(\vec{f}\,)\right)=0\quad\text{or}\quad\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{f}\,)=0\tag{6.5.430}$$

Démonstration 6.37.4.

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{f}\,)=\vec{\nabla}\circ\left(\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}\right)=\vec{\nabla}\circ\begin{pmatrix}\partial_yf_3-\partial_zf_2\\ \partial_zf_1-\partial_xf_3\\ \partial_xf_2-\partial_yf_1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\partial_yf_3-\partial_zf_2\\ \partial_zf_1-\partial_xf_3\\ \partial_xf_2-\partial_yf_1\end{pmatrix}=\partial_x(\partial_yf_3-\partial_zf_2)+\partial_y(\partial_zf_1-\partial_xf_3)+\partial_z(\partial_xf_2-\partial_yf_1)\\
&=\cancel{\partial_x\partial_yf_3}-\cancel{\partial_x\partial_zf_2}+\cancel{\partial_y\partial_z\partial_zf_1}-\cancel{\partial_y\partial_xf_3}+\cancel{\partial_z\partial_xf_2}-\cancel{\partial_z\partial_yf_1}=0
\end{aligned}
\tag{6.5.431}
$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

6. Le rotationnel du rotationnel d'un champ vectoriel est égal au gradient de la divergence de ce champ moins son Laplacien vectoriel : :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{f})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{f})) - \Delta\vec{f} \quad \text{or} \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{f}) - \Delta\vec{f} \tag{6.5.432}$$

Démonstration 6.37.5.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) &= \vec{\nabla}\times\left(\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}\right) = \vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}\partial_y f_3 - \partial_z f_2\\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3\\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\partial_y f_3 - \partial_z f_2\\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3\\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_y(\partial_x f_2 - \partial_y f_1) - \partial_z(\partial_z f_1 - \partial_x f_3)\\ \partial_z(\partial_y f_3 - \partial_z f_2) - \partial_x(\partial_x f_2 - \partial_y f_1)\\ \partial_x(\partial_z f_1 - \partial_x f_3) - \partial_y(\partial_y f_3 - \partial_z f_2)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.5.433}$$

Il est ensuite facile de vérifier que cette dernière égalité est égale à :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{f}) - \Delta\vec{f} &= \vec{\nabla}\,(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \Delta\vec{f} = \begin{pmatrix}\partial_x(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3)\\ \partial_y(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3)\\ \partial_z(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3)\end{pmatrix} - \Delta\vec{f}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3)\\ \partial_y(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3)\\ \partial_z(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\\ \partial_y(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\\ \partial_z(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x(\partial_y f_2 + \partial_z f_3) - \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\\ \partial_y(\partial_x f_1 + \partial_z f_3) - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\\ \partial_z(\partial_x f_1 + \partial_y f_2 +) - \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y(\partial_x f_2 - \partial_y f_1) - \partial_y(\partial_z f_1 - \partial_x f_3)\\ \partial_z(\partial_y f_3 - \partial_z f_2) - \partial_x(\partial_x f_2 - \partial_y f_1)\\ \partial_x(\partial_z f_1 - \partial_x f_3) - \partial_y(\partial_y f_3 - \partial_z f_2)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.5.434}$$

■ Q.E.D.

7. La multiplication de l'opérateur nabla par le produit scalaire de deux vecteurs est égale à... (voir ci-dessous), qui donne une relation très utile en mécanique des fluides :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{x}\circ\vec{y}) = \vec{x}\times(\vec{\nabla}\times\vec{y}) + \vec{y}\times(\vec{\nabla}\times\vec{x}) + (\vec{y}\circ\vec{\nabla})\cdot\vec{x} + (\vec{x}\circ\vec{\nabla})\cdot\vec{y} \tag{6.5.435}$$

8. Le produit scalaire du rotationnel d'un vecteur est la différence des opérateurs commutés tel que (nous pouvons fournir la preuve détaillée sur demande) :

$$\vec{x}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{y}) = \vec{y}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{x}) - \vec{\nabla}\circ(\vec{x}\times\vec{y}) \tag{6.5.436}$$

Nous réutiliserons cette dernière relation lors de notre étude en électromagnétisme de la pression de radiation (entre autres...).

En cours de traduction de l'anglais

9. Le gradient d'un produit vectoriel est la différence des opérateurs commutés tels que (nous pouvons aussi fournir la preuve détaillée sur demande) :

$$\vec{\nabla}(\vec{x}\times\vec{y})=\vec{y}\cdot(\text{rot}(\vec{x}))-\vec{x}\cdot(\text{rot}(\vec{y})) \tag{6.5.437}$$

Nous utiliserons cette dernière relation dans notre étude des supraconducteurs dans la section d'Électrocinétique à la page ??.

10. Considérons un vecteur $\vec{v}$ dont chaque composante dépend de x,y,z. Nous avons (le terme de gauche est nommé la "dérivée matérielle", voir section Mécanique des Milieux Continus page ??) :

$$(\vec{v}\circ\vec{\nabla})\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{v}^2-\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \tag{6.5.438}$$

Soit explicitement :

$$\left(\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\left\|\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\right\|^2-\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\right) \tag{6.5.439}$$

Ou même encore plus explicitement :

$$\left(\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)-\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\right) \tag{6.5.440}$$

Alors maintenant, pour prouver que l'égalité est vraie, nous allons développer la partie gauche et la partie droite. Commençons donc par la partie gauche :

$$\left(\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=(v_x\partial_x+v_y\partial_y+v_z\partial_z)\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} \tag{6.5.441}$$

Développons maintenant la partie droite :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)-\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\right)\\
&=\begin{pmatrix}v_x\partial_xv_x+v_y\partial_xv_y+v_z\partial_xv_z\\v_x\partial_yv_x+v_y\partial_yv_y+v_z\partial_yv_z\\v_x\partial_zv_x+v_y\partial_zv_y+v_z\partial_zv_z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}\partial_yv_z-\partial_zv_y\\\partial_zv_x-\partial_xv_z\\\partial_xv_y-\partial_yv_x\end{pmatrix}\right)\\
&=\begin{pmatrix}v_x\partial_xv_x+v_y\partial_xv_y+v_z\partial_xv_z\\v_x\partial_yv_x+v_y\partial_yv_y+v_z\partial_yv_z\\v_x\partial_zv_x+v_y\partial_zv_y+v_z\partial_zv_z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}v_y(\partial_xv_y-\partial_yv_x)-v_z(\partial_zv_x-\partial_xv_z)\\v_z(\partial_yv_z-\partial_zv_y)-v_x(\partial_xv_y-\partial_yv_x)\\v_x(\partial_zv_x-\partial_xv_z)-v_y(\partial_yv_z-\partial_zv_y)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}v_x\partial_xv_x+v_y\partial_xv_y+v_z\partial_xv_z-v_y\partial_xv_y+v_y\partial_yv_x+v_z\partial_zv_x-v_z\partial_xv_z\\v_x\partial_yv_x+v_y\partial_yv_y+v_z\partial_yv_z-v_z\partial_yv_z+v_z\partial_zv_y+v_x\partial_xv_y-v_x\partial_yv_x\\v_x\partial_zv_x+v_y\partial_zv_y+v_z\partial_zv_z-v_x\partial_zv_x+v_x\partial_xv_z+v_y\partial_yv_z-v_y\partial_zv_y\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}v_x\partial_xv_x+v_y\partial_yv_x+v_z\partial_zv_x\\v_y\partial_yv_y+v_z\partial_zv_y+v_x\partial_xv_y\\v_z\partial_zv_z+v_x\partial_xv_z+v_y\partial_yv_z\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.5.442}$$

et puis nous voyons que l'égalité tient !

En cours de traduction de l'anglais

11. Considérons maintenant une règle de composition utile dans les sections à venir (encore une fois sur des sujets de physique !). Pour cela, nous commençons par :

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{f}(x,y,z)}{g(x,y,z)}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(f_z/g)}{\partial y}-\dfrac{\partial(f_y/g)}{\partial z}\\ \dfrac{\partial(f_x/g)}{\partial z}-\dfrac{\partial(f_z/g)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial(f_y/g)}{\partial x}-\dfrac{\partial(f_x/g)}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{6.5.443}$$

En appliquant la règle de érivation des fonctions composées démontrée dans la section de Calcul Différentiel et Intégral :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}=\frac{g\partial_x f-f\partial_x g}{g^2} \tag{6.5.444}$$

nous avons alors :

$$\begin{aligned}\text{rot}\left(\frac{\vec{f}(x,y,z)}{g(x,y,z)}\right)&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(f_z/g)}{\partial y}-\dfrac{\partial(f_y/g)}{\partial z}\\ \dfrac{\partial(f_x/g)}{\partial z}-\dfrac{\partial(f_z/g)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial(f_y/g)}{\partial x}-\dfrac{\partial(f_x/g)}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{g^2}\begin{pmatrix}(g\partial_y f_z-f_z\partial_y g)-(g\partial_z f_y-f_y\partial_z g)\\(g\partial_z f_x-f_x\partial_z g)-(g\partial_x f_z-f_z\partial_x g)\\(g\partial_x f_y-f_y\partial_x g)-(g\partial_y f_x-f_x\partial_y g)\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{g}\begin{pmatrix}\partial_y f_z-\partial_z f_y\\ \partial_z f_x-\partial_x f_z\\ \partial_x f_y-\partial_y f_x\end{pmatrix}+\frac{1}{g^2}\begin{pmatrix}-f_z\partial_y g+f_y\partial_z g\\-f_x\partial_z g+f_z\partial_x g\\-f_y\partial_x g+f_x\partial_y g\end{pmatrix}=\frac{1}{g}\vec{\nabla}\times\vec{f}-\frac{1}{g^2}\vec{\nabla}(g)\times\vec{f}\\&=\frac{1}{g}\vec{\nabla}\times\vec{f}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{g}\right)\times\vec{f}\end{aligned} \tag{6.5.445}$$

Soit finalement :

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{f}(x,y,z)}{g(x,y,z)}\right)=\frac{1}{g}\vec{\nabla}\times\vec{f}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{g}\right)\times\vec{f} \tag{6.5.446}$$

ou écrit autrement :

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{f}(x,y,z)}{g(x,y,z)}\right)=\frac{1}{g}\vec{\nabla}\times\vec{f}+\vec{\nabla}\left(\frac{1}{g}\right)\times\vec{f} \tag{6.5.447}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.5.8.8 Résumé (des identités remarquables)

Dans le cadre de cet ouvrage, nous utiliserons les différentes notations présentées et résumées dans le tableau ci-dessous. Leur utilisation nous donne la possibilité dans le cadre des différentes théories d'éviter les confusions avec d'autres outils mathématiques. L'existence des ces différentes notations est ennuyeux, mais nous devons faire avec.

Type	Expression
Gradient d'un champ scalaire $A:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^3$	$\vec{\nabla}(f)\quad \vec{\nabla}\cdot f\quad \vec{\nabla}f\quad \overrightarrow{\text{grad}}(f)$
Gradient d'un champ vectoriel $A:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$	$\vec{\nabla}(\vec{f})$
Divergence d'un champ vectoriel $A:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$	$\vec{\nabla}\circ\vec{f}\quad \text{div}(\vec{f})$
Rotationnel d'un champ vectoriel $A:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$	$\vec{\nabla}\times\vec{f}\quad \text{rot}(\vec{f})$
Laplacien d'un champ scalaire $A:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$	$\Delta\cdot f\quad \vec{\nabla}^2 f\quad \vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\cdot f)$
Laplacien d'un champ vectoriel $A:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$	$\Delta\vec{f}$

TAB. 6.17 – **Résumé des opérateurs différentiels vectoriels**

En cours de traduction de l'anglais

Faisons maintenant un bref résumé des principaux opérateurs différentiels :

- Le gradient peut être assimilé à la "pente" (exemple : le champ électrique est la "pente" du potentiel électrostatique).

  Les différentes expressions de l'opérateur gradient (mises sous la forme de l'opérateur nabla) en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques sont les suivantes :

$$\begin{gathered}\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ \vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\\ \vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ \vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi},\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\end{gathered} \tag{6.5.448}$$

- La divergence caractérise un flux de quelque chose qui vient de quelque part, d'une source, ou qui y va. Si la divergence n'est pas nulle, c'est qu'il y a concentration autour d'un point, donc la densité augmente (ou diminue, c'est selon le signe). Ça peut être la densité de charges électriques ou bien la masse volumique. D'où le fameux théorème qui dit que le flux (ce qui passe dans une surface) est égal à l'intégrale de la divergence (ce qui reste).

  Les différentes expressions de l'opérateur divergence (mises sous la forme de l'opérateur nabla) en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques sont les sui-

vantes :

$$\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$
$$\vec{\nabla}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi},\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (6.5.449)$$
$$\vec{\nabla}=\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2}{\partial r},\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)}{\partial \theta},\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

- Le rotationnel caractérise l'existence d'un tourbillon (très utilisé en mécanique des fluides). S'il y a un tourbillon, on peut suivre une ligne de courant sur une courbe fermée (fermée du point de vue différentiel, pas du point de vue géométrique !) sans qu'elle change de sens : la circulation ne sera pas nulle (elle vaut l'intégrale du rotationnel).

  Les différentes expressions du rotationnel en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques sont les suivantes :

$$\text{rot}(\vec{f})=\vec{\nabla}\times\vec{f}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_z}{\partial y}-\dfrac{\partial f_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z}-\dfrac{\partial f_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x}-\dfrac{\partial f_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$
$$\text{rot}(\vec{f})=\vec{\nabla}\times\vec{f}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_z}{\partial \phi}-\dfrac{\partial f_\phi}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_r}{\partial z}-\dfrac{\partial f_z}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rf_\phi)}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_r}{\partial \phi}\end{pmatrix} \qquad (6.5.450)$$
$$\text{rot}(\vec{f})=\vec{\nabla}\times\vec{f}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)f_\phi)-\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_\theta}{\partial \phi}\\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f_r}{\partial \phi}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rf_\phi)\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rf_\theta)-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f_r}{\partial \theta}\end{pmatrix}$$

- Le Laplacien d'un champ scalaire est le champ scalaire qui mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et sa moyenne autour de ce point. En d'autres termes, la dérivée partielle deuxième mesure les variations de la pente au point étudiée dans un entourage immédiat et selon une dimension à la fois. Si la dérivée partielle deuxième est nulle selon une direction, alors la pente est constante dans un entourage immédiat et selon cette dimension, cela implique que la valeur de la fonction au point étudié est la moyenne de son entourage (selon une dimension).

  Les différentes expressions du Laplacien scalaire (mises sous la forme de l'opérateur

En cours de traduction de l' anglais

nabla) en coordonnées cartésiennes, polaires et sphériques sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\\ \vec{\nabla}^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)\\ \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\end{aligned} \tag{6.5.451}$$

- Comme pour le Laplacien d'un champ scalaire, le Laplacien d'un champ vectoriel n'est qu'un système de notation très commode pour condenser l'écriture des composantes d'un champ vectoriel.

  Les différentes expressions de l'opérateur Laplacian vectoriel (mises sous la forme l'opérateur nabla) en coordonnées cartésiennes, polaires et sphériques sont :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{f} &= \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i^2}\end{pmatrix}\\ \Delta\vec{f} &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{r^2}f_r+\frac{1}{r}\partial_r f_r+\partial_r^2 f_r-\frac{2}{r^2}\partial_\phi f_\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_r+\partial_z^2 f_r\\ \frac{2}{r^2}\partial_\phi f_r+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi+\partial_z^2 f_\phi-\frac{1}{r^2}f_\phi+\frac{1}{r}\partial_r f_\phi+\partial_r^2 f_\phi\\ \partial_z^2 f_z+\frac{1}{r}\partial_r f_z+\partial_r^2 f_z+\frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 f_z\end{pmatrix}\\ \Delta\vec{f} &= \begin{pmatrix}-\frac{2f_r}{r^2}+\frac{\partial_r^2 r f_r}{r^2}-\frac{2\cot(\theta)f_\theta}{r^2}-\frac{2\partial_\theta f_\theta}{r^2}+\frac{\cot(\theta)\partial_\theta f_r}{r^2}+\frac{\partial_\theta^2 f_r}{r^2}+\frac{\partial_\phi^2 f_r}{r^2\sin^2(\theta)}-\frac{2\partial_\phi f_\phi}{r^2\sin^2(\theta)}\\ \frac{2\partial_\theta f_r}{r^2}-\frac{f_\theta}{r^2\sin^2(\theta)}+\frac{\cot(\theta)\partial_\theta f_\theta}{r^2}+\frac{\partial_\theta^2 f_\theta}{r^2}-\frac{2\cot(\theta)\partial_\phi f_\phi}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\partial_\phi^2 f_\theta}{r^2\sin^2(\theta)}+\frac{\partial_r^2 r f_\theta}{r}\\ \frac{2\partial_\phi f_r}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\cot(\theta)\partial_\phi f_\theta}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\partial_\phi^2 f_\phi}{r^2\sin^2(\theta)}+\frac{\partial_r^2 r f_\phi}{r}-\frac{f_\phi}{r^2\sin^2(\theta)}+\frac{\cot(\theta)\partial_\theta f_\phi}{r^2}+\frac{\partial_\theta^2 f_\phi}{r^2}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.5.452}$$

En cours de traduction de l' anglais

Et nous avons aussi la liste suivante d'identités remarquables :

$$\text{rot}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right)=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=\vec{0} \tag{6.5.453}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{x})\circ(\vec{\nabla}\times\vec{y})=\vec{y}\circ(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{x}))+\vec{\nabla}\circ(\vec{y}\times(\vec{\nabla}\times\vec{x})) \tag{6.5.454}$$

$$\text{div}\left(\text{rot}(\vec{f})\right)=0 \quad \text{or} \quad \vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{f})=0 \tag{6.5.455}$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{f}))=\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{f}))-\Delta\vec{f} \quad \text{or} \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{f})-\Delta\vec{f} \tag{6.5.456}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{x}\circ\vec{y})=\vec{x}\times(\vec{\nabla}\times\vec{y})+\vec{y}\times(\vec{\nabla}\times\vec{x})+(\vec{y}\circ\vec{\nabla})\cdot\vec{x}+(\vec{x}\circ\vec{\nabla})\cdot\vec{y} \tag{6.5.457}$$

$$\vec{x}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{y})=\vec{y}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{x})-\vec{\nabla}\circ(\vec{x}\times\vec{y}) \tag{6.5.458}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{x}\times\vec{y})=\vec{y}\cdot(\text{rot}(\vec{x}))-\vec{x}\cdot(\text{rot}(\vec{y})) \tag{6.5.459}$$

$$(\vec{v}\circ\vec{\nabla})\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{v}^2-\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \tag{6.5.460}$$

Enfin, terminons ce résumé avec tous les théorèmes que nous avons obtenus jusqu'à présent dans cette section et qui sont nommés "théorèmes intégraux du premier ordre" :

- Théorème du gradient (uniquement pour des champs uniformes) :

$$\iiint_V \vec{\nabla}(f)\mathrm{d}V = \oiint_S f\mathrm{d}\vec{S} \tag{6.5.461}$$

- Théorème d'Ostrogradsky (théorème de divergence) :

$$\Phi = \iiint_V (\vec{\nabla}\circ\vec{f})\mathrm{d}V = \oiint_S \vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{S} \tag{6.5.462}$$

- Théorème de Green (théorème de Green-Riemann) :

$$\oint_C (f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y) = \int_S \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}S_z \tag{6.5.463}$$

- Théorème de Stokes (théorème du rotationnel) :

$$\oint \vec{f}\circ\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{f}\right)\circ\mathrm{d}\vec{S} \tag{6.5.464}$$

En cours de traduction de l' anglais

Gardez à l'esprit qu'il sont tous des cas particuliers du théorème de Stokes (théorème général de la variété[18]) y compris le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral !

Dès lors, le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (1D), le théorème de Green (2D) et le théorème de divergence (3D) (c'est-à-dire le théorème original de Stokes) peuvent tous être énoncés respectivement par la phrase paramétrée suivante (toujours un cas particulier du théorème général des variétés de Stokes) : Les [changements, rotations, flux] total à l'extérieur sont égaux à la somme des petits [changements, rotations, flux] à l'intérieur.

~95 %
99 votes, 84.44%

[18] Si un jour nous avons le temps d'écrire le LaTeX pour fournir un exemple détaillé, nous le ferons ! Mais en fait, cela n'apporte pas trop d'intérêt pour un ingénieur.

6.6. Algèbre Linéaire

Il y a plusieurs manières d'aborder l'Algèbre Linéaire. D'abord une manière pragmatique (nous commencerons par celle-ci car notre expérience nous a montré que c'est celle qui semblait le mieux marcher chez les étudiants) et une manière plus formelle que nous présenterons aussi après la première. Il convient d'abord de prévenir le lecteur que l'algèbre linéaire est un outil puissant de calcul que l'on retrouve énormément dans la pratique économique et industrielle dans les domaines suivants (voir les sections respective du présent livre pour des exemples concrets) : Statistique, Électrotechnique, Finance des marchés, Méthodes numériques d'optimisation, Optique, Physique Quantique, Électrodynamique, Relativité, Mécanique des fluides, Apprenstissage Machine, Data Science, etc. Il est alors nécessaire d'y attacher une attention particulière à ce sujet !

D'abord répondons à deux questions d'un lecteur : Pourquoi l'Algèbre Linéaire s'appelle ainsi ? Et existe-t-il une algèbre non linéaire ?

Voici nos réponses :

1. Cela s'appelle "Algèbre Linéaire" car il fallait d'abord bien choisir un nom... et aussi parce que c'est une généralisation de l'algèbre scalaire mais avec des vecteurs où les applications ne sont plus des fonctions de scalaires mais des matrices dont l'effet est d'agir en tant que somme linéaire de vecteurs d'une base (du moins cela peut être interprété tel quel).

2. Officiellement et à notre connaissance il n'existe pas d'Algèbre Non Linéaire dans la même philosphie que ce que nous allons voir dans cette section. Il existe des mathématiciens qui auraient créés des "algèbres non linéaires" mais celles-ci n'ont rien à voir avec les matrices.

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, rappelons que nous avions étudié dans la section de Calcul Algébrique comment déterminer l'intersection (si elle existe) de l'équation de deux droites (nous pouvons étendre le problème bien évidemment à plus de deux droites) dans $\mathbb{R}^2$ données par :

$$y_1 = a_1 x + b_1 \quad \text{et} \quad y_2 = a_2 x + b_2 \tag{6.6.1}$$

où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

En cherchant donc la valeur de x pour laquelle :

$$y_1 = y_2 \tag{6.6.2}$$

ce qui nous amène à écrire :

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2 \Leftrightarrow x = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} \tag{6.6.3}$$

Cependant, il existe une autre manière de présenter le problème comme nous l'avons vu dans le chapitre d'Information Théorique (voir section Méthodes Numériques page ??). Effectivement, nous pouvons écrire le problème sous la forme d'un bloc d'équations :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x + b_1 \\ y_2 &= a_2 x + b_2 \end{aligned} \tag{6.6.4}$$

et comme nous cherchons $y_1 = y_2 = y$, nous avons :

$$\begin{aligned} y - a_1 x &= b_1 \\ y - a_2 x &= b_2 \end{aligned} \tag{6.6.5}$$

Cette écriture s'appelle comme nous l'avons présenté dans le chapitre de d'Informatique Théorique (voir section Méthodes Numériques page ??) un "système linéaire" que nous pouvons résoudre en soustrayant ou en additionnant les lignes entre elles (l'ensemble des solutions étant toujours égal), ce qui nous donne :

$$\begin{array}{r} y - a_1 x = b_1 \\ +y - a_2 x = b_2 \mid \cdot(-1) \\ \hline -a_1 x + a_2 x = b_1 - b_2 \end{array} \tag{6.6.6}$$

et nous voyons que nous retombons sur la solution :

$$x = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} \tag{6.6.7}$$

Il y donc deux manières de présenter un problème d'intersection de droites :

1. Sous forme d'équation
2. Sous forme de système

Nous allons nous intéresser dans une partie cette section à la deuxième méthode qui va nous permettre à l'aide des outils vus dans la section de Calcul Vectoriel de résoudre les intersections non plus d'une ou plusieurs droites mais d'une ou plusieurs droites et de plans, hyperplans dans respectivement $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$.

Évidemment, nous verrons que l'Algèbre Linéaire n'est pas seulement utilisée à cette fin, mais peut également être utilisée pour généraliser certains modèles mathématiques physiques ou pour exprimer des transformations géométriques de vecteurs ou de figures en 2D ou 3D ou également exprimer des chaînes de Markov, des propriétés particulières de la statistique multivariée, le calcul de certaines équations différentielles (pour l'ingénierie de la fiabilité par exemple) et bien plus encore ! De nombreux exemples sont donnés à travers le présent livre sur l'application de l'Algèbre Linéaire dans la vie réelle.

Avant d'attaquer la partie purement théorique, présentons un exemple très intéressant mais qui nécessite un concept – le déterminant – que nous démontrerons rigoureusement que bien plus loin en détails dans la présente section (il nous a semblé pédagogiquement plus judicieux d'aborder ce sujet maintenant plutôt que le lecteur doive attendre de parcourir des dizaines de

En cours de traduction de l'anglais

pages de développements mathématiques avant d'arriver à la définition rigoureuse du déterminant).

Considérons le système de deux équations linéaires à deux inconnues suivant (système d'intersection de plans) :

$$\begin{aligned}a_1x_1+b_1x_2&=c_1\\a_2x_1+b_2x_2&=c_2\end{aligned} \tag{6.6.8}$$

Si nous résolvons cela, nous obtenons rapidement (technique appelée "méthode de substitution") :

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{c_1-b_1x_2}{a_1}\\x_2&=\frac{c_2-a_2x_1}{b_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_1=\frac{c_1-b_1\left(\dfrac{c_2-a_2x_1}{b_2}\right)}{a_1}=\frac{b_2c_1-b_1c_2+b_1a_2x_1}{a_1b_2} \tag{6.6.9}$$

Il vient alors :

$$a_1b_2x_1-b_1a_2x_1=x_1(a_1b_2-b_1a_2)=b_2c_1-b_1c_2 \tag{6.6.10}$$

et donc au final :

$$x_1=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2} \tag{6.6.11}$$

et si nous définissons un peu à la vite un truc qui se nomme le "déterminant", dont nous verrons la provenance rigourusement plus loin, ainsi :

$$\begin{aligned}D\left(\vec{c},\vec{b}\right)&=D\left(\begin{bmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{bmatrix}\right)=c_1b_2-c_2b_1\\D\left(\vec{a},\vec{b}\right)&=D\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{bmatrix}\right)=a_1b_2-b_1a_2\end{aligned} \tag{6.6.12}$$

ou avec une autre notation plus courante :

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{c},\vec{b}\right)&=|\vec{c},\vec{b}|=c_1b_2-c_2b_1\\\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)&=|\vec{a},\vec{b}|=a_1b_2-b_1a_2\end{aligned} \tag{6.6.13}$$

nous avons alors :

$$x_1=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\det\left(\vec{c},\vec{b}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)} \tag{6.6.14}$$

Et en procédant de même, il vient :

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\frac{c_1-b_1x_2}{a_1}\\x_2&=\frac{c_2-a_2x_1}{b_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_2=\frac{c_2-a_2\left(\dfrac{c_1-b_1x_2}{a_1}\right)}{b_2}=\frac{a_1c_2-a_2c_1+a_2b_1x_2}{b_2a_1} \tag{6.6.15}$$

En cours de traduction de l' anglais

Il vient alors :

$$b_2a_1x_2 - a_2b_1x_2 = x_2(b_2a_1 - a_2b_1) = a_1c_2 - a_2c_1 \tag{6.6.16}$$

et donc au final nous avons

$$x_1 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\det\left(\vec{c},\vec{b}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\det\left(\vec{a},\vec{c}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)} \tag{6.6.17}$$

Il apparaît alors clair que si :

$$\det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \det\left(\vec{c},\vec{b}\right) = \det\left(\vec{a},\vec{c}\right) = 0 \tag{6.6.18}$$

le système a une infinité de solutions. À l'opposé, le système n'admet aucune solution si :

$$\det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left[\det\left(\vec{c},\vec{b}\right) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \det\left(\vec{a},\vec{c}\right) \neq 0\right] \tag{6.6.19}$$

Et si le lecteur réitère (joyeusement...) la procédure pour un système de trois équations à trois inconnues du type (intersection d'hyperplans) :

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3 \end{aligned} \tag{6.6.20}$$

Nous obtenons alors (après quelques opérations algébriques élémentaires) :

$$x_1 = \frac{\det\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}, x_2 = \frac{\det\left(\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}, x_3 = \frac{\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)} \tag{6.6.21}$$

avec :

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) &= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_3b_3 - c_1b_3a_3 \\ \det\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right) &= d_1b_2c_3 - d_1c_2b_3 - b_1d_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - c_1b_2d_3 \\ \det\left(\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right) &= a_1d_2c_3 - a_1c_2d_3 - b_1d_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - c_1b_2d_3 \\ \det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right) &= a_1b_2d_3 - a_1d_2b_3 - b_1a_2d_2 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - d_1b_2a_3 \end{aligned} \tag{6.6.22}$$

Il apparaît alors clair que si :

$$\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \det\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right) = \det\left(\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right) = \det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right) = 0 \tag{6.6.23}$$

le système a une infinité de solutions. À l'opposé, le système n'admet aucune solution si :

$$\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0 \text{ et } \left[\det\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right) \neq 0 \text{ ou } \det\left(\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right) \neq 0\right] \tag{6.6.24}$$

et ainsi de suite pour n équations à n inconnues.

Il y avait cependant une condition à remplir : comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, nous ne pourrions pas résoudre un système d'équations à deux inconnues si nous n'avons qu'une seule équation. C'est la raison pour laquelle il faut et il suffit pour un système d'équations à n inconnues d'avoir au moins n équations. Ainsi, nous parlons de : "systèmes de n équations à n inconnues". Nous démontrerons aussi qu'il faut et il suffit que le déterminant soit non nul pour qu'un système linéaire, dont la matrice est carrée, ait une solution unique (le concept de "déterminant" sera introduit rigoureusement plus loin !) et donc que la matrice soit donc inversible (non singulière).

En cours de traduction de l'anglais

6.6.1 Systèmes Linéaires

Définitions (#6.6.248) :

D1. Nous appelons donc "système linéaire", ou simplement "système", toute famille d'équations de la forme :

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered} \tag{6.6.25}$$

où chaque ligne représente l'équation d'une droite, plan ou hyperplan (voir section Géométrique Analytique page 2777) et les a_{mn} sont les "coefficients du système", les b_m sont les "coefficients du second membre" et les x_n sont les "inconnues du système".

D2. Si le système à n équations à n iconnues et que ce système admet une solution unique, nous parlons alors de "système de Cramer" (11750 selon calendrier holocène).

D3. Si les coefficients du second membre sont tous nuls, nous disons alors que le système est un "système homogène" et alors celui-ci admet au moins la solution triviale où les x_n sont tous nuls. Sinon, nous disons que nous avons un "système inhomogène".

D4. Nous appelons "système homogène associé au système", le système d'équations que nous obtenons en substituant des zéros aux coefficients du second membre (b_m).

En cours de traduction de l'anglais

Rappelons les élément suivants :

- L'équation d'une droite (voir section Analyse Fonctionnelle page 2169) est donnée par :

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \tag{6.6.26}$$

en posant $x = x_1$ et $y = x_2$.

- L'équation d'un plan (voir section Géométrique Analytique page 2777) est donnée par :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \tag{6.6.27}$$

en posant $x = x_1, y = x_2, z = x_3$.

- L'équation d'un hyperplan est très facilement (si vous ne voyez pas comment faites le nous savoir nous le préciserons) généralisable à partir de la démonstration de celle du plan et nous obtenons ainsi :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{6.6.28}$$

en posant $x = x_1, y = x_2, z = x_3, \ldots$

Nous écrivons souvent un système linéaire sous la forme condensée suivante :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,2,3,\ldots,m} \tag{6.6.29}$$

Nous appelons "solution du système" ou "solution du système vectoriel" tout n-uplet $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i \quad i = 1,2,3,\ldots,m \tag{6.6.30}$$

Résoudre un système signifie trouver l'ensemble des solutions de ce système (on retrouve beaucoup ce type de systèmes dans des problèmes économiques, de recherche opérationnelle ou des plans d'expérience). Deux systèmes à n inconnues sont dits "systèmes équivalents" si toute solution de l'un est solution de l'autre, autrement dit, s'ils admettent le même ensemble de solutions. Nous disons parfois que les équations d'un système sont des "équations compatibles" ou "équations incompatibles", suivant que ce système admet au moins une solution ou n'en admet aucune.

Nous pouvons également donner bien sûr une interprétation géométrique à ces systèmes. Supposons que les premiers membres des équations du système soient non nuls. Alors, nous savons que chacune de ces équations représente un hyperplan d'un espace affine (voir section Calcul Vectoriel page 1793) de dimension n. Par conséquent, l'ensemble des solutions du système, regardé comme ensemble de n-uplets de coordonnées, représente une intersection finie d'hyperplans.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 - \ \ x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} \tag{6.6.31}$$

noté plus conventionellement dans les petites classes sous la forme :

$$\begin{cases} x \qquad\quad - 3z = -3 \\ 2x - 5y - \ \ z = -2 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases} \tag{6.6.32}$$

Aurait comme solutions les points représentant l'intersection des trois plans définis par les trois équations. Mais comme nous pouvons le voir visuellement avec Maple 4.00b à l'aide des commandes suivantes :

```
>with(plots):
>implicitplot3d(x-3*z=-3,2*x-5*y-z=-2,x+2*y-5*z=1,x=-3..3,
y=-3..3,z=-3..3);
```

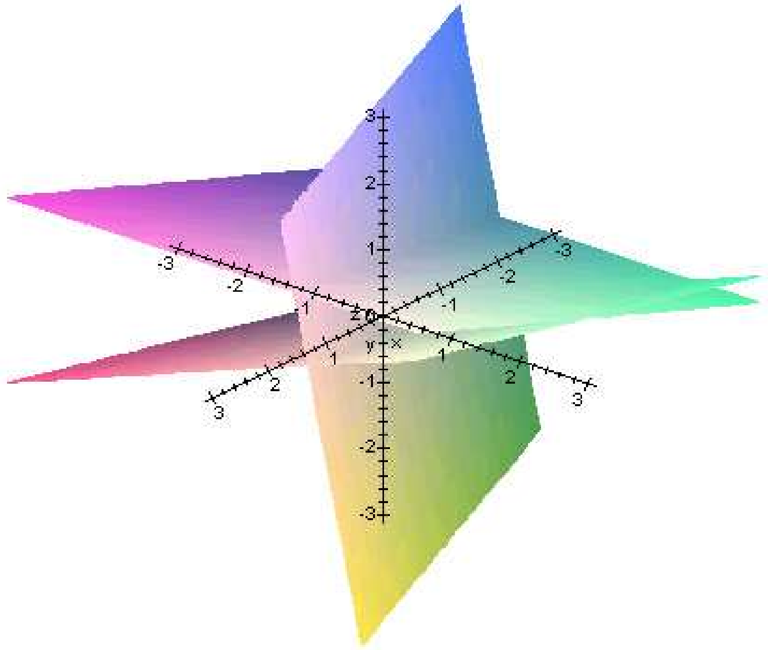


FIG. 6.130 – **Représentation d'un système de 3 équations à 3 inconnues avec Maple 4.00b**

Ce système n'a aucune solution. Ce qui peut soit se vérifier à la main, soit avec Maple 4.00b en écrivant :

```
>solve(x-3*z=-3,2*x-5*y-z=-2,x+2*y-5*z=1,x,y,z);
```

Remarque

Pour la méthode de résolution "classique" de ces systèmes, nous renvoyons le lecteur au chapitre traitant des Méthodes Numériques dans la section d'Informatique Théorique.

Enfin, signalons un cas important dans la pratique : les "systèmes surdéterminés" ou nous avons plus d'équations que d'inconnues.

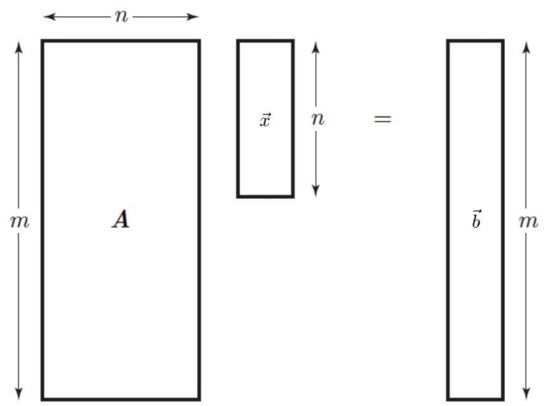


FIG. 6.131 – **Système surdéterminé**

Le première situation de ce type daterait du 118ème siècle (calendrier holocène) dans le cadre de l'étude de l'osciallation lunaire mais on retrouve également cette situation fréquemment

dans les laboratoire de R&D dans le cadre des techniques des plans d'expérience (voir section Génie Industriel page ??) ou encore dans les modèles par équations structurelles (voir section Méthodes Numériques).

Un système surdéterminé peut être noté :

$$X\vec{b} \approx \vec{y} \qquad (6.6.33)$$

où X est de dimension $n \times m$ et $\text{rank}(X \mid \vec{y}) > m$; c'est-à-dire que le système n'est pas consistent. Nous avons légèrement modifié la notation par rapport au système consistent $Ax = b$ que nous utilisions car nous avons maintenant à l'esprit des applications statistiques, et dans celles-ci la notation $y \approx X\beta$ est parfois plus courante. Le problème est de déterminer une valeur de b qui rende l'approximation proche dans un certain sens. Dans les applications de systèmes linéaires, nous appelons cela "l'ajustement" du système, qui est appelé un "modèle".

✍**Exemple :**

Considérons le cas particulier mais parlant ci-dessous de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad (6.6.34)$$

système qui sous forme de matrice et de vecteur s'écrira :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6.6.35)$$

ou dite sous "forme augmentée" de la manière suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (6.6.36)$$

et avec Maple 4.00b :

```
>with(plots):
>implicitplot(2*x+3*y=-1,-3*x+y=-2,-x+y=1,x=-3..3,y=-3..3);
```

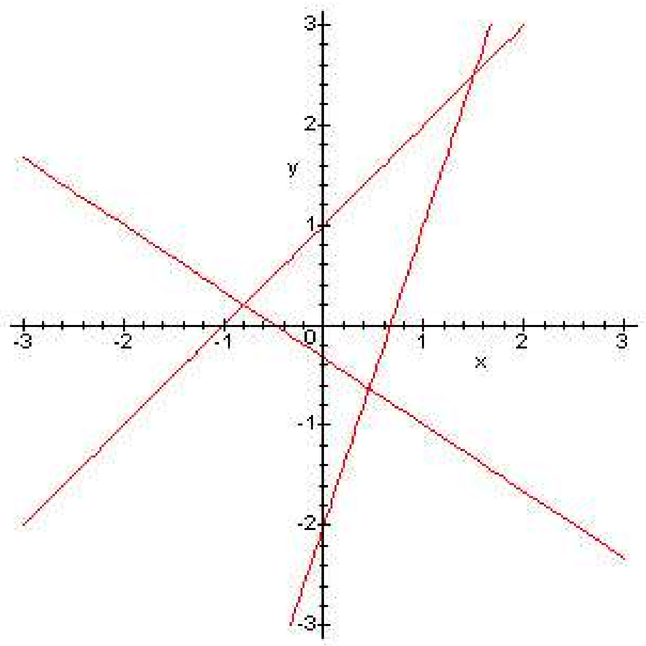


FIG. 6.132 – **Représentation d'un système de 3 équations à 2 inconnues avec Maple 4.00b**

Nous voyons bien sur le graphique ci-dessus que ce système particulier n'a pas de solution complète mais a une solution si nous prenons seulement le problème par paire d'équations... ce qui ne fait forcément pas avancer les choses...

Remarquez que nous venons de voir que le système pouvait s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.6.37}$$

Cela ressemble étrangement à un système de régression linéaire multiple (voir section Méthodes Numériques page ??) dont le vecteur colonne des inconnues peut être vu comme les coefficients de la droite recherchée. Nous avons alors démontré en détails dans la section de Méthodes Numériques que :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X\vec{\beta} = \vec{y} \tag{6.6.38}$$

Nous avons ensuite prouvé en détails dans la section Méthodes Numériques que :

$$\boxed{\vec{\hat{\beta}} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{y}} \tag{6.6.39}$$

à condition que la matrice carrée $X^T X$ soit, comme nous le verrons plus bas, inversible (non singulière). Depuis les travaux de Gauss sur le sujet il est considéré que cette approche (donc implicitement basée sur la régression des moindres carrés ordinaires[19]) reste encore aujourd'hui la meilleure approche pour résoudre de tels systèmes !

[19] Telle que nous avons trouvé $\vec{\beta}$ qui minimise $\|X\vec{\beta} - \vec{y}\|^2$

En cours de traduction en anglais

Dans le cas précédent, nous trouvons la pseudo-solution"" (c'est la terminologie officielle...) en faisant les calculs rapidement à la main (ou avec un tableur comme Microsoft Excel) :

Si la propriété d'inversibilité est satisfaite, nous trouvons une "pseudo-solution" (c'est la terminologie officielle...) en faisant les calculs rapidement à la main (ou avec un tableur comme Microsoft Excel) :

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.052 \\ -0.368 \end{pmatrix} \tag{6.6.40}$$

et en réinjectant ces valeurs dans le système initial, le lecteur comprendra très vite pourquoi nous parlons de "pseudo"-solution...

Remarque

Un lecteur nous a demandé pourquoi nous n'utilisons pas pour l'exemple ci-dessus uniquement la relation $\vec{\beta} = \vec{y}X^{-1}$? La réponse est simple ! Parce que X n'est pas une matrice carrée ou autrement dit... elle est dans notre exemple sur-déterminée c'est pourquoi nous ne pouvons trouver qu'une "pseudo-solution".

C'était donc la manière pragmatique de voir les choses... passons maintenant à la seconde façon un peu plus ... mathématique (mais qui reste relativement simple) :

En cours de traduction de l'anglais

6.6.2 Transformations Linéaires

Définition (#6.6.249) : Une "transformation linéaire" ou "application linéaire" A est une application d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F telle que avec K étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E: \quad & A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 \\ \forall \vec{x} \in E, a \in K: \quad & Aa\vec{x} = aA\vec{x} \end{aligned} \tag{6.6.41}$$

ceci constitue, pour rappel, un endomorphisme (voir section Théorie des Ensembles page 441).

La première propriété spécifie que la transformée d'une somme de vecteurs doit être égale à la somme des transformées, pour qu'elle soit linéaire. La deuxième propriété précise que la transformée d'un vecteur auquel nous avons appliqué un facteur d'échelle (homothétie) doit aussi être égale à ce facteur appliqué sur la transformée du vecteur original. Si l'une ou l'autre de ces deux propriétés n'est pas respectée, la transformation n'est alors pas linéaire.

Nous allons maintenant montrer que toute transformation linéaire peut être représentée par une matrice !

Soient les vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ de base pour E et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ ceux de F. Avec ces bases, nous pouvons représenter n'importe quels vecteurs $\vec{x} \in E, \vec{y} \in F$ avec les combinaisons linéaires suivantes (voir section Calcul Vectoriel page 1785) :

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{v}_j \qquad \vec{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{u}_i \tag{6.6.42}$$

Considérons la transformation linéaire A qui applique E sur F ($A: E \mapsto F$). Soit :

$$A(\vec{x}) = \vec{y} \tag{6.6.43}$$

que nous pouvons récrire ainsi plus explicitement :

$$A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{u}_i \tag{6.6.44}$$

Mais puisque A est un opérateur linéaire par définition, nous pouvons aussi écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{u}_i \tag{6.6.45}$$

En considérant maintenant que les vecteurs $A(\vec{v}_j)$ sont des éléments de F, nous pouvons les réécrire en tant qu'une combinaison linéaire de ses vecteurs de base :

$$A(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{u}_i \tag{6.6.46}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A(\vec{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{u}_i \tag{6.6.47}$$

En inversant l'ordre des sommations, nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{u}_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{u}_i \tag{6.6.48}$$

et en réarrangeant cette dernière relation, nous produisons le résultat :

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{u}_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i\right) = \vec{0} \tag{6.6.49}$$

Finalement, en se rappelant que les vecteurs de base $\vec{u}_i$ doivent être indépendants, nous pouvons conclure que leurs coefficients doivent forcément être nuls, donc :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i \tag{6.6.50}$$

Ce qui correspond au "produit matriciel" :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{6.6.51}$$

que nous pouvons noter :

$$A\vec{x} = \vec{y} \tag{6.6.52}$$

Autrement dit, toute transformation linéaire peut être décrite par une matrice A qu'il s'agit de multiplier avec le vecteur que nous voulons transformer, pour obtenir le vecteur résultant de la transformation.

En cours de traduction de l' anglais

6.6.3 Matrices

Nous appelons donc "matrice" à m lignes et n colonnes, ou "matrice de type $m \times n$" (le premier terme correspond toujours aux lignes et le second aux colonnes, pour s'en souvenir il existe un bon moyen mnémotechnique : le président LinColn - abréviation de Ligne et Colonne...), tout tableau de nombres d'un anneau $\mathbb{K}$ (la majorité du temps dans la pratique de l'ingénieur il s'agit d'anneau $\mathbb{R}$) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.6.53}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{c} \text{\# colonnes} \\ \text{\# lignes} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.6.54}$$

est une matrice 5×5.

Nous désignons souvent une matrice de type $m \times n$ plus brièvement par :

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{K} \tag{6.6.55}$$

ou simplement (a_{ij}). Dans un style plus formel :

$$\mathbb{K}^{m \times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{K} \forall i, j \right\} \tag{6.6.56}$$

La quantité a_{ij} est appelé "terme ou coefficient d'indices i, j". L'indice i étant appelé "indice de ligne" et l'indice j "indice de colonne".

Nous notons $M_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ dont les coefficients prennent leurs valeurs dans $\mathbb{K}$ (pouvant être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple).

Lorsque $m = n$, nous disons que (a_{ij}) est une "matrice carrée d'ordre n" :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.6.57}$$

Dans ce cas particulier, les termes $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelées "termes diagonaux de la matrice" et leur ensemble est noté :

$$\text{diag}(a_1, \ldots, a_n) \tag{6.6.58}$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous assignerons aux matrices des symboles propres, à savoir les lettres latines majuscules : $A, B, ...$ et aux matrices-colonnes des symboles à savoir les lettres minuscules vectorielles $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$; nous les appellerons d'ailleurs indifféremment "matrices-colonnes" ou "vecteurs-colonnes".

Nous nommons également une matrice avec une seule ligne une "matrice-ligne" et une matrice avec une seule colonne "matrice-colonne". Il est clair qu'une matrice-colonnen'est rien d'autre qu'un "vecteur colonne" ou simplement un "vecteurr" (voir section Calcul Vectoriel page ??). Par la suite, les lignes d'une matrice seront traitées comme des matrices-lignes et les colonnes comme des matrices-colonnes.

Plus formellement, soit $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice alors une "sous-matrice" de M est une matrice qui est faite d'un rectangle d'éléments de M. Les lignes et les colonnes sont des sous-matrices. En particulier :

- Une sous-matrice $m \times 1$ est nommée "vecteur colonne" de M. Le j-ème vecteur colonne est noté $\text{col}_j(M)$ ou $\vec{M}_j$ et $\vec{M}_{ij} = M_{ij}$ pour $1 \leq j \leq n$. Autrement dit :

$$\text{col}_j(M) = \vec{M}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\text{col}_1(A)|\text{col}_2(A)|\ldots|\text{col}_n(A)] \tag{6.6.59}$$

- Une sous-matrice $1 \times n$ de M est nommée "vecteur ligne" de M. Le i-ème vecteur ligne est noté $\text{lig}_i(M)$ et $(\text{lig}_i(M))_j = M_{ij}$ pour $1 \leq j \leq n$ autrement dit :

$$\text{row}_i(M) = [a_{i1}\; a_{i2}\; \cdots\; a_{in}] \Rightarrow M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{row}_1(M) \\ \text{row}_2(M) \\ \ldots \\ \text{row}_m(M) \end{pmatrix} \tag{6.6.60}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous nommons "matrice zéro", et nous notons 0_{mn} ou simplement $\mathbf{0}$ ou $\mathbb{O}$ (cette dernière notation est préférée dans ce livre !) toute matrice dans laquelle chaque terme est égal à zéro :

$$0_{mn} = \mathbf{0} = \mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6.61}$$

Les colonnes-matrices (c'est-à-dire les vecteurs-colonnes) nulles sont désignées par le symbole vecteur : $\vec{0}$.

Nous appelons "matrice unité d'ordre n" ou "matrice identité d'ordre n", et nous notons I_n, ou simplement $\mathbb{1}$, la matrice d'ordre n suivante :

$$I_n = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.6.62}$$

Cela peut également être écrit en utilisant la notation du delta de Kronecker δ_{ij} (voir section Calcul Tensoriel page 2015).

Attention ! Lorsque l'on travaille avec des matrices à coefficients complexes il faut toujours utiliser le terme "matrice identité" plutôt que "matrice unitaire" car dans le domaine des nombres complexes la matrice unitaire est un autre objet mathématique et il faut si possible éviter toute confusion !

Nous verrons plus loin que la matrice zéro agit comme élément neutre de l'addition matricielle et la matrice unité comme élément neutre pour la multiplication matricielle.

Le ij-ième "matrice de base standard" pour $\mathbb{R}^{m\times n}$ est notée E_{ij} pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. La matrice E_{ij} est nulle dans toutes les entrées sauf pour le (i,j)-ième emplacement où elle a un 1. En d'autres termes, nous définissons $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Par conséquent, chaque matrice dans $\mathbb{R}^{m\times n}$ est une combinaison linéaire des E_{ij}.

Effectivement, $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ alors :

$$\begin{aligned}M=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} &= a_{11}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}+\ldots+a_{mn}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\\ &= a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+\ldots+a_{mn}E_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\end{aligned} \tag{6.6.63}$$

Le but du concept de matrice apparaîtra tout au long des textes qui suivront mais la raison immédiate de cette notion est simplement de permettre à certaines familles finies de nombres d'être conçues comme un tableau rectangulaire et de généraliser les théorèmes de physique aux espaces multidimensionnels.

En cours de traduction de l'anglais

6.6.3.1 Rang d'une matrice

Nous allons maintenant passer brièvement en revue la définition de "rang d'une famille finie" que nous avons déja vu dans la section Calcul Vectoriel à la page 1792.

Pour rappel, nous appelons "rang" d'une famille libre de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel S de E qu'elle engendre.

Définition (#6.6.250) : Étant données $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ les colonnes d'une matrice A, nous nommons "rang de A", et notons $\text{rk}(A)$, le rang de la famille de vecteurs $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$. Plus précisément, en algèbre linéaire, le rang d'une matrice A est la dimension de l'espace vectoriel engendré (ou parcouru) par ses colonnes. C'est la même que la dimension de l'espace engendré par ses lignes comme nous le verrons plus tard. C'est une mesure de la « non-dégénérescence » du système d'équations linéaires et de la transformation linéaire codée par A (voir plus haut !). Il existe plusieurs définitions équivalentes du rang. Le rang d'une matrice est l'une de ses caractéristiques les plus fondamentales !

Dans un langage un peu plus familier (...) le rang d'une matrice est donné par le nombre de matrices-colonnes qui ne peuvent s'exprimer par la combinaison et la multiplication par un scalaire d'autres matrices-colonnes de la même matrice ! !

Compte tenu de cette définition, il est presque évident que le rang d'une matrice est zéro si et seulement si la matrice est la matrice zéro $\mathbb{O}$.

Avant d'entrer dans des calculs plus formels, voyons déjà quelques exemples introductifs :

✍**Exemples :**

E1. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6.64}$$

a un rang de 2 : les deux premières lignes sont linéairement indépendantes, donc le rang est d'au moins 2, mais les trois lignes sont linéairement dépendantes (la première est égale à la somme des deuxième et troisième) donc le rang doit être inférieur à 3.

E2. La matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{6.6.65}$$

a un rang de 1 : il y a des colonnes non nulles, donc le rang est positif, mais toute paire de colonnes est linéairement dépendante. De même, la transposition :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{6.6.66}$$

de A a un rang de 1. En effet, puisque les vecteurs colonnes de A sont les vecteurs lignes de la transposée de A, l'affirmation que le rang colonne d'une matrice est égal à son rang ligne équivaut à l'affirmation que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée, soit :

$$\boxed{\text{rk}(A) = \text{rk}(A^T)} \tag{6.6.67}$$

Les exemples ci-dessus montrent que l'énoncé selon lequel le rang de colonne d'une matrice est égal à son rang de ligne est équivalent à l'énoncé selon lequel le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposition.

Pour résumer :

- Matrices de rang 0. Il n'y a qu'une seule matrice de rang zéro d'une taille donnée, à savoir la matrice nulle.

- Matrices de rang 1. Une matrice de rang un est précisément une matrice non nulle du type supposé dans l'exemple ci-dessus - toutes les lignes sont des multiples les unes des autres.

  Une définition équivalente d'une matrice $m\times n$ de rang 1 est le produit extérieur $\vec{u}\vec{v}^T$ d'un m-vecteur $\vec{u}$ et d'un n-vecteur $\vec{v}$:

$$A=\vec{u}\vec{v}^T=\begin{bmatrix} - & u_1\vec{v}^T & - \\ - & u_2\vec{v}^T & - \\ & \vdots & \\ - & u_m\vec{v}^T & - \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1\vec{u} & v_2\vec{u} & \cdots & v_n\vec{u} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{6.6.68}$$

  Notez que chaque ligne est un multiple de $\vec{v}^T$, et chaque colonne est un multiple de $\vec{u}$.

- Matrices de range 2. Une matrice de rang deux n'est qu'une superposition (c'est-à-dire une somme) de deux matrices de rang 1 :

$$A=\vec{u}\vec{v}^T+\vec{w}\vec{z}^\top=\begin{bmatrix} - & u_1\vec{v}^T+w_1\vec{z}^T & - \\ - & u_2\vec{v}^T+w_2\vec{z}^T & - \\ & \vdots & \\ - & u_m\vec{v}^T+w_m\vec{z}^T & - \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} | & | \\ \vec{u} & \vec{w} \\ | & | \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} - & \vec{v}^T & - \\ - & \vec{z}^T & - \end{bmatrix} \tag{6.6.69}$$

- Matrices de rang k. La définition générale du rang de matrice devrait maintenant être claire : une matrice A a le rang k si elle peut être écrite comme la somme de k matrices de rang un, et ne peut pas être écrite comme la somme de $k-1$ ou moins de matrices de rang un.

  Reformulée en termes de multiplication matricielle, une définition équivalente est que A peut être écrite comme, ou "factorisé dans", le produit d'une matrice Y longue et fine $(m\times k)$ et d'une matrice Z^T courte et longue $(k\times n)$ (et que A ne peut pas être factorisé de la même manière par le produit de matrices $m\times(k-1)$ et $(k-1)\times n$).

  Il existe de nombreuses définitions équivalentes du rang d'une matrice A. Les deux conditions suivantes sont équivalentes entre elles et à la définition ci-dessus (l'une quelconque des trois conditions implique les deux autres) :

  1. Le plus grand sous-ensemble linéairement indépendant de colonnes de A a la taille k. Autrement dit, toutes les n colonnes de A apparaissent comme des combinaisons linéaires de seulement k d'entre elles.
  2. Le plus grand sous-ensemble linéairement indépendant de lignes de A a la taille k. Autrement dit, toutes les lignes m de A apparaissent comme des combinaisons linéaires de seulement k d'entre elles.

  Il est clair que la première condition implique la deuxième et la troisième : si $A=YZ^T$, alors toutes les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des k colonnes de Y, et toutes de les lignes de A sont des combinaisons linéaires des lignes k de Z^T.

Avant de continuer nous voudrions indiquer au lecteur que plus tard nous prouverons que si les lignes d'une matrice sont indépendantes, son déterminant (calculable seulement pour des matrices carrées $n\times n$ est alors non nul $\det(A)\neq 0$ et donc rk$(A)=n$ et évidemment rk$(A)=1$ quand $\det(A)=0$.

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#6.6.251) : Une matrice est dite de "plein rang" si son rang est égal au plus grand possible pour une matrice de mêmes dimensions, qui est le minimum du nombre de lignes et de colonnes (ie $\text{rk}(A) = \min(m, n)$). Une matrice est dite "rang déficient" si elle n'est pas de rang plein.

Remarque

S'il y a des difficultés à déterminer le rang d'une matrice il existe une technique nommée "échelonnage de matrice" que nous verrons juste en dessous et qui permet de faire ce travail très rapidement.

Déefinition (#6.6.252) : Nous appelons "matrice associée au système" :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{6.6.70}$$

l'objet mathématique défini par :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.6.71}$$

c'est-à-dire la matrice A dont les termes sont les coefficients du système. Nous appelons "matrice du second membre du système linéaire", ou simplement "second membre du système", la matrice-colonne dont les termes sont les coefficients du second membre de ce système. Nous appelons également "matrice augmentée associée au système" la matrice obtenue de A en ajoutant $\vec{b} = (b_i)$ comme $(n+1)$-ème colonne.

Si nous considérons maintenant un système de matrice associée A et de second membre $\vec{b}$. Désignons toujours par $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ les colonnes de A. Le système s'écrit alors de manière équivalente sous la forme d'une équation vectorielle linéaire :

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b} \tag{6.6.72}$$

Maintenant rappelons un théorème que nous avons vu dans la section de Calcul Vectoriel : pour que le rang d'une famille de vecteurs $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ soit égal au rang de la famille augmentée $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{y})$, il faut et il suffit que le vecteur $\vec{y}$ soit combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$.

Il s'ensuit que notre système linéaire sous forme vectorielle admet au moins une solution $(\vec{x}_1^0, \vec{x}_2^0, \ldots, \vec{x}_n^0)$ si le rang de la famille $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ est égal au rang de la famille augmentée $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b})$ et cette solution est unique si et seulement si le rang de la famille $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ est égal à n.

Ainsi, pour qu'un système linéaire de matrice associée A et de second membre $\vec{b}$ admette au moins une solution, il faut et il suffit que le rang de A soit égal au rang de la matrice augmentée $(A|\vec{b})$. Si cette condition est remplie, le système admet une seule solution si et seulement si le

En cours de traduction de l'anglais

rang de A est égal au nombre d'inconnues autrement dit, les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Nous disons qu'une matrice est "échelonnée" si ses lignes satisfont aux deux conditions suivantes :

C1. Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles

C2. L'indice de colonne du premier terme non nul de toute ligne non nulle est supérieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne qui la précède (la premier nombre non nul depuis la gauch est appelé le "pivot").

Ces deux conditions impliquent que toutes les entrées dans une colonne en dessous d'un coefficient principal sont des zéros.

Une matrice échelonnée non nulle est donc de la forme (en ajoutant et en soustrayant des lignes entre elles) :

$$\begin{bmatrix} \underline{|a_{1j_1}} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \underline{|a_{2j_2}} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \underline{|a_{1j_r}} & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6.73}$$

où $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ et $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ sont des termes non nuls. Bien entendu, les lignes nulles terminales peuvent manquer.

Les colonnes d'indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$ d'une matrice échelonnée sont clairement linéairement indépendantes. Envisagées comme des vecteurs-colonnes de $\mathbb{R}^2$, elles forment donc une base de cet espace vectoriel. En considérant les autres colonnes également comme des vecteurs-colonnes de $\mathbb{R}^n$, nous en déduisons qu'elles sont nécessairement combinaison linéaire de celles d'indice $j_1, j_2, \ldots, j_r$ et donc que le rang de la matrice A échelonnée est $\text{rk}(A) = r$.

Nous noterons que r est aussi le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée et également le rang de la famille des lignes de cette matrice, puisque les lignes non nulles sont dès lors manifestement indépendantes (nous avons prouvé dans la section Calcul Vectoriel que le rang des lignes et des colonnes a la même valeur avec les mêmes propriétés d'indépendance).

Nous pouvons dès lors nous autoriser un certain nombre d'opérations élémentaires (supplémentaires) sur les lignes des matrices qui nous seront fort utiles et ce, sans changer son rang :

P1. Nous pouvons permuter les lignes.

Remarqie

Comme nous le savons, la matrice est juste une représentation graphique esthétique d'un système linéaire. Ainsi, permuter deux lignes ne change aucunement le système.

P2. Multiplier une ligne par un scalaire non nul.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Cela ne changeant en rien l'indépendance linéaire des vecteurs-lignes.

P3. Additionner à une ligne originelle, un multiple d'une autre.

Remarque

La ligne originelle disparaîtra au profit de la nouvelle qui est indépendante de toutes les (anciennes) autres. Le système reste ainsi linéairement indépendant.

Toute matrice peut être transformée en une forme d'échelon de ligne par une séquence finie des propriétés précédentes. Voici comment :

1. Pivoter la matrice
   (a) Trouver le pivot, c'est-à-dire la première entrée non nulle dans la première colonne de la matrice.
   (b) Interchanger les lignes, en déplaçant la ligne pivot vers la première ligne.
   (c) Multiplier chaque élément de la ligne pivot par l'inverse du pivot, de sorte que le pivot soit égal à 1.
   (d) Ajouter des multiples de la ligne pivot à chacune des lignes inférieures, de sorte que chaque élément de la colonne pivot des lignes inférieures soit égal à 0.
2. Pour obtenir la matrice sous forme d'échelon de ligne, répéter le pivotement.
   (a) Répéter la procédure à partir de l'étape 1 ci-dessus, en ignorant les lignes de pivot précédentes.
   (b) Continuer jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de pivots à traiter.
3. Pour obtenir la matrice sous forme d'échelon de ligne réduit, traitez les entrées non nulles au-dessus de chaque pivot.
   (a) Identifier la dernière ligne ayant un pivot égal à 1, et définir celle-ci comme la ligne de pivot.
   (b) Ajouter des multiples de la ligne pivot à chacune des lignes supérieures, jusqu'à ce que chaque élément au-dessus du pivot soit égal à 0.
   (c) En remontant la matrice, répéter ce processus pour chaque ligne.

Il est donc évident que les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas le rang de la famille des lignes de cette matrice. Or, nous avons observé que le rang de la famille des lignes d'une matrice échelonnée est égal au rang de la famille des colonnes, c'est-à-dire au rang de cette matrice (encore une fois vous pouvez vous référer à la section de Calcul Vectoriel pour la démonstration). Nous en concluons que le rang de n'importe quelle matrice de type $m \times n$ est également le rang de la famille des lignes de cette matrice.

En cours de traduction de l'anglais

Comme corollaire de cette conclusion, il apparaît que :

$$\text{rk}(A) = \min(m,n) \tag{6.6.74}$$

Lors de la résolution de systèmes linéaires de m équations à n inconnues il apparaît, comme nous l'avons déjà fait remarquer tout au début de cette section, qu'il doit y avoir au moins un nombre égal d'équations que d'inconnues ou plus rigoureusement : le nombre d'inconnues doit être inférieur ou égal au nombre d'équations tel que :

$$\boxed{n = \text{rk}(A|\vec{b}) \leq m} \tag{6.6.75}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.6.3.2 Opération sur les Matrices

Rappelons que nous avons vu lors de notre étude du Calcul Vectoriel que les opérations de multiplication d'un vecteur par un scalaire, d'addition ou soustraction de vecteurs entre eux et l'opération de produit scalaire formait dans le sens ensembliste du terme un "espace vectoriel" (voir section Théorie des Ensembles page 429) possédant ainsi aussi une "structure algébrique vectorielle". Ceci sous la condition que les vecteurs aient bien sûr les mêmes dimensions (ce constat n'étant pas valable si au lieu du produit scalaire nous prenions le produit vectoriel).

Au même titre que les vecteurs, nous pouvons multiplier une matrice par un scalaire et additionner celles-ci entre elles (tant qu'elles ont les mêmes dimensions...) mais en plus, nous pouvons aussi multiplier deux matrices entre elles sous certaines conditions que nous définirons ci-après. Cela fera également de l'ensemble des matrices dans le sens ensembliste du terme, un espace vectoriel sur le corps K (étant le plus souvent $\mathbb{R}$ en ingénierie) et possédant ainsi aussi une "structure algébrique vectorielle".

Ainsi, un vecteur pourra aussi être vu comme une matrice particulière de dimension $m \times n$ et opérer dans l'espace vectoriel des matrices. En gros..., le calcul vectoriel n'est qu'un cas particulier de l'algèbre linéaire ! ! ! C'est ainsi qu'à l'école, les jeunes apprennent (après l'algèbre de base) le calcul vectoriel d'abord et l'algèbre linéaire plus tard (et certains se pencheront sur le calcul tensoriel bien après).

En cours de traduction de l'anglais

D1. Soient $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Nous appelons "somme de A et B" la matrice $C \in M_{mn}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \tag{6.6.76}$$

C'est-à-dire explicitement :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & b_{mm}+b_{mn} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.6.77}$$

D2. Soient $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire (nous pourrions aussi prendre $\mathbb{C}$ si nous le voulions). Nous appelons "produit de A par by λ" la matrice dont les coefficients sont :

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \tag{6.6.78}$$

C'est-à-dire explicitement :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.6.79}$$

Avec les deux définitions précédentes, nous pouvons en fait conclure que l'espace / ensemble de matrices est un espace vectoriel et a donc une structure algébrique vectorielle.

D3. Soient E, F, G trois espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ et deux applications linéaires f et g (voir la section de Théorie Des Ensembles pour un rappel).

Notons A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et B la matrice de g relativement aux bases $\mathcal{F}, \mathcal{G}$. Alors la matrice C de $g \circ f$ (voir la définition d'une fonction composée dans la section d'Analyse Fonctionnelle) relativement aux bases $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ est égale au produit de B par A noté BA.

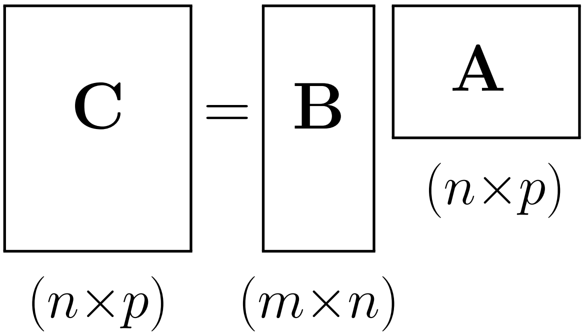
$$\begin{aligned} &E \overset{f}{\mapsto} F \overset{g}{\mapsto} G \quad \text{et} \quad E \overset{g\circ f}{\mapsto} G \\ &E \overset{A}{\mapsto} F \overset{B}{\mapsto} G \quad \text{et} \quad E \overset{BA=C}{\mapsto} G \end{aligned} \tag{6.6.80}$$

Donc soient $B \in M_{mn} \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{np} \in \mathbb{R}$, nous appelons "produit matriciel" ou "multiplication matricielle" de B par A et nous notons BA, la matrice $C \in M_{mp}\mathbb{R}$ dont les coefficients sont :

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji} \qquad 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq m \tag{6.6.81}$$

Il est important de remarquer que contrairement à l'addition, A et B peuvent avoir des dimensions différentes. Toutefois ! le nombre de lignes de A doit être égal au nombre de colonnes de B, comme l'indique l'indice n des deux matrices. Donc dans le produit BA, si B est une matrice $m \times n$, A doit être une matrice $n \times p$, quel que soit p ! ! !

Schématiquement :



ou encore plus explicitement (schéma de Falk) :

En cours de traduction de l'anglais

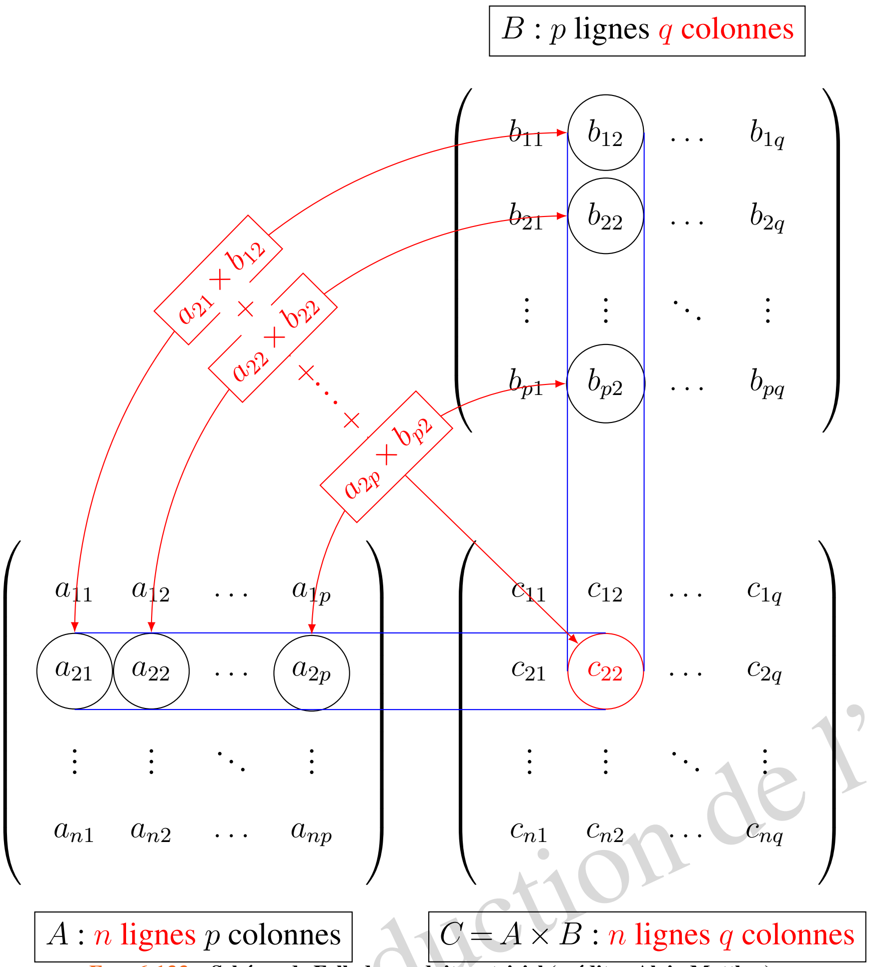


FIG. 6.133 – Schéma de Falk du produit matriciel (crédits : Alain Matthes)

En cours de traduction de l'anglais

En notant par des lettres latines majuscules les matrices et par les lettres grecques minuscules les scalaires, le lecteur vérifiera aisément (nous pouvons rajouter les démonstrations sur demande) les relations suivantes (les matrices sont supposées avoir des dimensions adéquates) :

P1. Distributivité à gauche : $A(B+C)=AB+AC$

P2. Distributivité à droite : $(A+B)C=AC+BC$

P3. Association de mise à l'échelle : $(\lambda A)B=A(\lambda A)$

P4. Associativité : $(AB)C=A(BC)$

P5. Non-commutativité : $BA\neq AB$

P6. Élément absorbant : $A\mathbb{O}=\mathbb{O}$

P7. Élément neutre pour l'addition : $A+\mathbb{O}=A$

Il est surtout important de se rappeler de la propriété P5 comme quoi la multiplication matricielle n'est pas commutative (pour les dimensions supérieures à 1 bien évidemment...) et de la propriété P4 comme qoui la mutliplication matricielle est assocative.

Concernant la démonstration générale que l'assertion de commutativité est fausse il faut passer par un exemple numérique (car même le cas général sans le remplacement des termes algébriques par des valeurs numériques ne vous montrera pas grand chose...)..

Remarque

L'ensemble des matrices carrées $M_{nn} \in \mathbb{R}$ d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni de la somme et la multiplication usuelles des matrices forme un anneau (voir section Théorie des Ensembles page 423). C'est vrai plus généralement si les coefficients des matrices sont pris dans un anneau quelconque : par exemple l'ensemble des matrices $M_{nn} \in \mathbb{Z}$ à coefficients entiers est un anneau.

Un lecteur nous a demandé de prouver la propriété d'associativité. Alors commençons !

Soient $A \in M_{kl}(\mathbb{C}), B \in M_{lm}(\mathbb{C}), C \in M_{mn}(\mathbb{C})$, alors pour $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$, nous avons bien (nous utilisons l'expression explicite de la multiplication matricielles des composantes vue plus haut plusieurs fois comme vous pourrez le constater) :

$$\begin{aligned}(A(BC))_{ij} &= \sum_{p=1}^{l} A_{ip}(BC)_{pj} = \sum_{p=1}^{l} A_{ip}\left(\sum_{q=1}^{m} B_{pq}C_{qi}\right) = \sum_{p=1}^{l}\sum_{q=1}^{m} A_{ip}B_{pq}C_{qi} \\ &= \sum_{q=1}^{m}\left(\sum_{p=1}^{l} A_{ip}B_{pq}\right)C_{qj} = \sum_{q=1}^{m}(AB)_{iq}C_{qj} = \sum_{q=1}^{m}(AB)_{iq}C_{qj} = ((AB)C)_{ij}\end{aligned} \tag{6.6.82}$$

6.6.3.3 Type de Matrices

Afin de simplifier les notations et la longueur des calculs nous allons introduire ici les matrices types que le lecteur pourra rencontrer tout au long de sa lecture de ce livre (et pas que dans la partie de mathématiques pures !).

Certaines définitions ne seront que des rappels !

Nous notons $M_{mn}(\mathbb{K})$ toutes les matrices $m \times n$ dont les coefficients prennent des valeurs dans K (typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple).

Définitions (#6.6.253) :

D1. Quand $m = n$, nous disons que $M_{nn}(\mathbb{K}) = (a_{ij})$ est une "matrice carrée d'ordre n" :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.6.83}$$

D2. Nous appelons "matrice zéro", et nous notons 0_{mn} ou simplement $\mathbf{0}$ ou $\mathbb{O}$ (cette dernière notation est préférée dans ce livre !) toute matrice dans laquelle chaque terme est égal à

En cours de traduction de l'anglais

zéro :

$$0_{mn} = \mathbf{0} = \mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.6.84)$$

Les colonnes-matrices nulles sont désignées par le symbole vectoriel : $\vec{0}$.

D3. Nous appelons "matrice d'identité d'ordre n" ou "matrice d'unité d'ordre n", et nous notons I, ou simplement $\mathbb{1}$, la matrice carrée d'ordre n :

$$I_n = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.6.85)$$

Elle peut également être écrite en utilisant la notation delta de Kronecker δ_{ij} (voir section Calcul Tensoriel page 2015).

Remarque

Même si nous ne l'utilisons en fait que pour deux applications pratiques dans ce livre (Analyse en composantes principales et Positionnement multidimensionnel), et que nous ne la retrouvons pas souvent dans d'autres manuels, cette dernière définition ne doit pas être confondue avec la matrice nommée "matrice d'unités", et définie pour une matrice carrée $n \times n$ par :

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.6.86)$$

D4. Nous appelons "matrice diagonale" toute matrice carrée $A \in M_{nn} \in \mathbb{K}$ dont seule la diagonale a des éléments non nuls :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6.6.87)$$

Formellement :

$$\forall i,j \in \{1,n\} : \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \qquad (6.6.88)$$

La notation traditionnelle d'une matrice diagonale est :

$$D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\} := \text{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \qquad (6.6.89)$$

D5. Nous appelons "matrice triangulaire inférieure" une matrice carrée dont toutes les entrées au-dessus de la diagonale principale sont nulles :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{ij} & 0 & 0 \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.6.90}$$

Formellement

$$\forall i,j \in \{1,n\}: \quad i<j \Rightarrow a_{ij}=0 \tag{6.6.91}$$

De même, une matrice carrée est appelée "matrice triangulaire supérieure" si toutes les entrées sous la diagonale principale sont nulles :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.6.92}$$

Formellement :

$$\forall i,j \in \{1,n\}: \quad j<i \Rightarrow a_{ij}=0 \tag{6.6.93}$$

Une "matrice triangulaire" est une matrice triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure. Une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure est bien évidemment appelée "matrice diagonale".

Si une matrice triangulaire supérieure a été obtenue par une matrice "échélonnée", nous pouvons parfois trouver la notation suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{|a_{1j_1}} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \underline{|a_{2j_2}} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \underline{|a_{1j_r}} & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6.94}$$

D6. Une "matrice de Toeplitz" (du nom d'Otto Toeplitz) ou "matrice à constante diagonale", est une matrice dans laquelle chaque diagonale descendante de gauche à droite est constante. Par exemple, la matrice suivante est une matrice de Toeplitz :

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{bmatrix} \tag{6.6.95}$$

Toute matrice A de dimension $n\times n$ de la forme :

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \tag{6.6.96}$$

En cours de traduction de l'anglais

est une matrice de Toeplitz. Si l'élément i,j de A est noté $A_{i,j}$, alors nous avons :

$$A_{i,j} = A_{i+1,j+1} \tag{6.6.97}$$

Nous rencontrerons une telle matrice dans notre étude de l'analyse des séries temporelles et surtout lorsque nous démontrerons les équations de Yule-Walker (voir section de Sciences Sociales page ??).

D7. Soit M_{nn} une matrice carrée. La matrice M_{nn} est nommée "matrice inversible" ou "matrice régulière" ou "matrice non singulière" si et seulement si M_{nn}^{-1} est telle que :

$$M_{nn}M_{nn}^{-1} = I_n = \mathbb{1} \tag{6.6.98}$$

Si tel n'est pas le cas, nous disons que M_{nn} est une "matrice singulière". Nous démontrerons plus tard que pour qu'une matrice carrée soit inversible (non singulière) il faut que son déterminant soit nul.

Cette définition est fondamentale, elle a des conséquences extrêmement importantes dans toute l'algèbre linéaire et aussi dans la physique (résolution de système linéaires, déterminant, vecteurs et valeurs propres, etc.) il convient donc de s'en souvenir.

Démontrons maintenant une propriété utile des matrices inversibles associée à la propriété d'associativité de la multiplication matricielle :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{6.6.99}$$

Effectivement :

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left(A\left(BB^{-1}\right)\right)A^{-1} = (A\mathbb{1})A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1} \tag{6.6.100}$$

D8. Soit une matrice $A_{mn} := A$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.6.101}$$

Nous appelons "matrice transposée" de $A = A_{mn}$, la matrice notée $A^T = A_{nm}$ (le T en exposant est selon les ouvrages en majuscule ou en minuscule et soit à gauche, soit à droite mais la norme ISO 80000-2 :2009 *Signes et symboles mathématiques à utiliser dans les sciences naturelles et la technologie* recommande la majuscule et l'exposant en haut à droite[20]), pour laquelle nous transposons les lignes en colonnes et les colonnes en lignes :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{6.6.102}$$

Voici quelques propriétés intéressantes (qui nous seront par ailleurs utiles plus tard lors d'un théorème fameux et aussi lors de l'étude de la régression linéaire multiple dans la section de Méthodes Numériques !) de la transposée :

[20] Malheureusement, de nombreux ouvrages, en particulier publiés aux États-Unis, désignent la transposition par un prime : A'

En cours de traduction de l'anglais

P1. $(A^T)^T$

P2. $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

P3. $(AB)^T = B^T A^T$

P4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \exists A^{-1}$

P5. $A\vec{x} \circ \vec{y} = \vec{x} A^T \vec{y}$

La matrice transposée est très importante en physique, statistiques et finance et évidemment en mathématiques dans le cadre de la théorie des groupes et symétries ! Il convient donc aussi de se souvenir de sa définition.

Comme la troisième propriété est la plus utilisée dans les différentes sections de ce livre, démontrons-la en considérant $A \in M_{lm} \in \mathbb{C}$, $B \in M_{mn} \in \mathbb{C}$:

Démonstration 6.37.6. Rappelons la relation explicite de multiplication matricielle vue précédemment :

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} B_{ki} A_{jk} \quad (6.6.103)$$

Mais dans cette dernière égalité, nous remarquons que nous parcourons B en ligne et A en colonne pour un i et un j fixes et nous savons alors que cela correspond à la multiplication matricielle AB, donc :

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ki} A_{jk} = (AB)_{ji} = ((AB)^T)_{ij} \quad (6.6.104)$$

Enfin nous avons bien :

$$((AB)^T)_{ij} = (B^T A^T)_{ij} \quad (6.6.105)$$

■ Q.E.D.

Et pour les mêmes raisons, démontrons l'avant-dernière propriété.

Démonstration 6.37.7. Premièrement, il est trivial que si A est inversible :

$$AA^{-1} = I_n \quad (6.6.106)$$

et en faisant la transposée de part et d'autre de l'égalité nous trouvons (nous utilisons la propriété démontrée juste avant) :

$$(A^{-1})^T A^T = I_n \quad (6.6.107)$$

Cette dernière égalité montre bien évidemment que $(A^{-1})^T$ est l'inverse de A^T, c'est-à-dire :

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad (6.6.108)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Enfin, une dernière et importante propriété des matrices transposées, est que étant donné une matrice A (carrée ou non, symétrique ou non), la multiplication par sa propre transposée donne une matrice symétrique.

La preuve est assez simple et très utile pour le théorème SVD (décomposition en valeurs singulières) :

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T \quad (6.6.109)$$

D9. Soit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (6.6.110)$$

une matrice d $M_{mn}(\mathbb{C})$. Nous appelons "matrice adjointe" de A, la matrice de $M_{mn}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix} \quad (6.6.111)$$

qui est donc la complexe conjuguée de la matrice transposée ou si vous préférez... la transposée de la matrice conjuguée A (dans le cas de coefficient réels... on se passera de la conjuguer !). Pour simplifier les écritures nous la notons simplement $A^\dagger$ (écriture fréquente en physique quantique et algèbre ensembliste)..

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Relation triviale (qui est souvent utilisée en physique quantique des champs) déjà démontrée juste avant et évidemment juste lorsque les composantes sont dans $\mathbb{C}$:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (6.6.112)$$

D10. Par définition, une matrice est dite "matrice hermitiquex" ou "matrice hermitienne" ou "matrice self-adjointe" ou encore "matrice autoadjointe"... si elle est égale à son adjointe (matrice transposée conjuguée) tel que :

$$A = A^\dagger \quad (6.6.113)$$

D11. Soit A une matrice carrée $M_{nn}(\mathbb{R})$, la "trace" de A notée $\text{tr}(A)$ est définie par la somme des termes de la diagonale (très utile dans certaines techniques statistiques) :

$$\boxed{\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}} \quad (6.6.114)$$

Quelques relations utiles y relatives (dont nous pouvons rajouter les démonstrations détaillées sur demande) :

$$\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (6.6.115)$$

et :

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA) \quad \forall A \in M_{mn}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{nm}(\mathbb{R}) \tag{6.6.116}$$

D12. Une matrice A est appelée "matrice nilpotente" si en la multipliant successivement par elle-même elle peut donner zéro. Explicitement, s'il existe un entier k tel que :

$$A^k=0 \tag{6.6.117}$$

Si la matrice A multipliée par elle-même donne A ... alors nous parlons d'une "matrice idempotente".

De telles matrices sont par exemple très courantes dans les chaînes de Markov lorsque la matrice de transition contient des probabilités (voir les sections Probabilités et Théorie des Graphes).

Remarque

Pour se souvenir de ce mot, nous le décomposons en "nil" pour nulle et "potent" pour potentiel. Ainsi, quelque chose de nilpotent est donc quelque chose qui est potentiellement nul...

D13. Une matrice A est dite "matrice orthogonale" si ses éléments sont réels et si elle obéit à :

$$A^{-1}=A^T \tag{6.6.118}$$

ce qui se traduit par (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker) :

$$A^TA=AA^T=\mathbb{1}=[\delta_{ij}] \tag{6.6.119}$$

Les vecteurs colonnes de la matrice A_i sont donc orthogonaux les uns aux autres car l'opération résultante ci-dessus peut être vue comme un produit scalaire ligne-colonne tel que pour une matrice carrée $n\times n$:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik}A_{in}=\delta_{kn} \qquad 1\leq k\leq n \tag{6.6.120}$$

Donc une matrice orthogonale représente aussi une base orthogonale !

Remarque

Lorsque les données numériques sont stockées de la manière habituelle dans une matrice X, la matrice X^TX, et ses propriétés jouent souvent un rôle important dans l'analyse statistique et en particulier dans les techniques de régression. Une matrice de cette forme est nommée "matrice Gramienne".

Un exemple courant en mathématique est la matrice de la base canonique orthonormée (voir section Calcul Vectoriel page 1789) :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{6.6.121}$$

En cours de traduction de ...is

ou encore une matrice relativement connue en physique quantique (voir section Informatique Quantique page ??) :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{6.6.122}$$

Remarques

R1. C'est typiquement le cas de la matrice de la base canonique, ou de toute matrice diagonalisable.

R2. Si au lieu de simplement prendre une matrice à coefficients réels, on prend des coefficients complexes avec sa matrice complexe transposée (matrice adjointe), nous disons alors (malheureusement... car cela fait confusion avec le nom d'une autre matrice déjà définie) que A est une "matrice unitaire" si elle satisfait la relation précédente !

Nous reviendrons plus tard, après avoir présenté les concepts de vecteurs et valeurs propres, sur un cas particulier et très important de matrices orthogonales (appelées "matrices de translations").

Signalons encore une autre propriété importante en géométrie, physique et statistiques des matrices orthogonales.

Théorème 6.38. Soit $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$, où A est une matrice orthogonale et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Alors f (respectivement A) est une isométrie. C'est-à-dire que :

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \tag{6.6.123}$$

Donc en d'autres termes : Les matrices orthogonales sont des applications linéaires qui préservent la norme (la distance) ! ! !

Démonstration 6.38.1. En se souvenant que $\vec{x} \circ \vec{y}$ est la même chose en notation d'Algèbre Linéaire que $\vec{x}^T\vec{y}$ nous avons alors :

$$\begin{aligned}\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|^2 &= (f(\vec{x}) - f(\vec{y})) \circ (f(\vec{x}) - f(\vec{y})) = (A\vec{x} - A\vec{y}) \circ (A\vec{x} - A\vec{y}) \\ &= A(\vec{x} - \vec{y}) \circ A(\vec{y} - \vec{y}) = (A^T A(\vec{x} - \vec{y})) \circ (\vec{x} - \vec{y}) = (\vec{x} - \vec{y}) \circ (\vec{x} - \vec{y})\end{aligned} \tag{6.6.124}$$

et nous avons bien :

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \tag{6.6.125}$$

■ Q.E.D.

D14. Soit une matrice carrée $A \in M_{nn}$. La matrice A est dite "matrice symétrique" si et seulement si :

$$A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \tag{6.6.126}$$

Nous retrouverons cette définition dans la section de Calcul Tensoriel.

En cours de traduction de l'anglais

D15. Soit une matrice carrée $A \in M_{nn}$. La matrice A est dite "matrice anti-symétrique" aussi parfois nommé "matrice asymétrique"...) si et seulement si :

$$a_{ij} = -a_{ji} \tag{6.6.127}$$

ce qui impose que :

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{mm} = 0 \tag{6.6.128}$$

En électromagnétisme, le tenseur de champ électromagnétique a des composants qui peuvent être écrits comme une matrice antisymétrique 4×4. En mécanique classique, la propension d'un solide à tourner dans différentes directions est décrite par le tenseur d'inertie qui est symétrique. Le tenseur énergie-impulsion de l'électrodynamique est également symétrique. La plupart des métriques dans les équations de champ d'Einstein en Relativité Générale sont symétriques, mais nous pouvons également construire des métriques antisymétriques. Les matrices sont partout si vous les cherchez !

Remarque

Nous prouverons dans la section de Calcul Tensoriel (page 2061) que toute matrice carrée est formée par la somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.

D16. Soient E un espace vectoriel, de dimension n et deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E :

$$\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n), \mathcal{B}'(\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \ldots, \vec{e}_n\,') \tag{6.6.129}$$

Nous appelons "matrice de passage" de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et nous noterons P la matrice de $M_{nn}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$ sur la base $\mathcal{B}'$ (voir plus loin le traitement détaillé des changements de base pour plus d'infos).

Nous considérons le vecteur $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de E qui s'écrit dans les bases $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}'(\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \ldots, \vec{e}_n\,')$ suivant les relations :

$$\mathcal{B} : \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \qquad \mathcal{B}' : \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{e}_i\,' \tag{6.6.130}$$

Avec :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} \tag{6.6.131}$$

le vecteur de K^n formé des composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ et respectivement le vecteur formé des composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors :

$$X' = P^{-1} X \tag{6.6.132}$$

relation pour laquelle la démonstration détaillée sera donnée plus loin lors de notre étude des changements de base. Nous avons également :

$$X = PX' \tag{6.6.133}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Si lorsqu'un vecteur est donné et que sa base n'est pas spécifiée, c'est qu'il s'agit dès lors implicitement de la base canonique :

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.134)$$

qui laisse invariant la multiplication par un vecteur quelconque et lorsque la base utilisée est notée $(\vec{e}_i)$ et n'est pas spécifiée, c'est qu'il s'agit également de la base canonique.

R2. Si un vecteur est donné par rapport à la base canonique, ces composantes sont dites "covariantes", dans le cas contraire, où si elles sont exprimées après suite dans une autre base non canonique, alors nous disons que les composantes sont "contravariantes" (pour plus de précisions sur le sujet voir la section de Calcul Tensoriel).

D17. Une matrice est appelée "matrice définie-positive" (ce qui nous sera utile dans la section de Méthodes Numériques pour certaines techniques d'ingénierie importantes ainsi que dans la finance quantitative pour l'estimation qualitative de la matrice de corrélation) si :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0 \wedge \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Longrightarrow \vec{x} = 0 \quad (6.6.135)$$

ou plus simplement si $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad (6.6.136)$$

et "matrice semi-positive" or "matrice définie semi-positive" si :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0 \quad (6.6.137)$$

Nous avons déjà prouvé qu'une matrice semi-positive a ses valeurs propres qui sont toutes positives OU nulles, alors que si elle est définie positive ses valeurs propres sont toutes positives ET non nulles (voir section Géométrie Analytique 2771).

Notez que cela implique que si une matrice A est inversible, alors $B = A^T A$ est définie positive.

En effet (même si nous avons déjà vu indirectement cette preuve dans la section Statistiques à la page 597), B est définie positive si pour tout $\vec{x}$ non nul nous avons :

$$\vec{x}^T B \vec{x} > 0 \quad (6.6.138)$$

Maintenant si nous avons A tel que $B = A^T A$, alors en utilisant les propriétés des matrices transposées :

$$\vec{x}^T B \vec{x} = \vec{x}^T (A^T A) \vec{x} = (A\vec{x})^T (A\vec{x}) = \|A\vec{x}\| \quad (6.6.139)$$

Mais :

$$\|A\vec{x}\| \geq 0 \quad (6.6.140)$$

En cours de traduction de l'anglais

Si A est inversible, $\|A\vec{x}\| = 0$ uniquement quand $\vec{x} = 0$.

Démontrons aussi que l'inverse d'une matrice définie positive est également définie positive (propriété importante pour la distance de Mahalonobis que nous verrons à la page 2448 par exemple !).

Rappelons tout d'abord que si A est positive-définie, alors nous avons prouvé (voir section page Statistiques 598) que son déterminant n'est jamais nul et que donc qu'elle est toujours inversible.

Dans un second temps, nous prouverons plus bas à la page 1976 lors de notre étude du théorème spectral que pour une matrice positive-définie M nous avons :

$$\det(M) = \prod_i \lambda_i \tag{6.6.141}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de i (positives et non nulles pour les matrices positives définies !). Mais aussi plus bas lors de notre étude du déterminant à la page 1944, nous prouverons pour une matrice M que :

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} \tag{6.6.142}$$

Dès lors :

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\prod_i \lambda_i} = \prod_i \frac{1}{\lambda_i} \tag{6.6.143}$$

Et comme pour une matrice positive-définie nous avons tout $\lambda_i > 0$, alors M^{-1} est aussi définie-positif puisque tout $1/\lambda_i > 0$ et donc $\det(M^{-1})$ est également strictement positif.

Nous pouvons étendre la définition ci-dessus de sorte qu'en général une matrice M est dite :

- "positive définie" si pour tout vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{x}^T M \vec{x} > 0$. Ceci est parfois noté $M \succ \vec{0}$
- "positive semi-définie" si $\vec{x}^T M \vec{x} \geq 0$. Ceci est parfois noté $M \succeq \vec{0}$
  - "négative non-définie" si elle est positive définie ou positive semi-définie[21]
- "négative définie" si pour tout vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{x}^T M \vec{x} < \vec{0}$. Ceci est parfois noté $M \prec \vec{0}$
- "négative semi-définie" si $\vec{x}^T M \vec{x} \leq \vec{0}$. Ceci est parfois noté $M \preceq \vec{0}$
  - "positive non-définie" si elle est négative définie ou semi-négative définie
- "indéfinie" si elle n'est aucune de ces dernières.

D18. La "comatrice", appelée aussi parfois "matrice adjointe", d'une matrice carrée est la transposée de sa matrice de cofacteurs (voir plus bas page 1946) :

$$\text{adj}(A) = C^T = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)^T_{1 \leq i,j \leq n} \tag{6.6.144}$$

[21]Définie non-négative et définie semi-positive sont les mêmes concepts, mais comme vous pouvez lire cette expression de temps en temps dans certains manuels scolaires...

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Considérons une matrice a 3×3 :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \tag{6.6.145}$$

Sa matrice de cofacteurs est :

$$C=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix} \tag{6.6.146}$$

où :

$$\begin{vmatrix} a_{im} & a_{in}\\ a_{jm} & a_{jn}\end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{im} & a_{in}\\ a_{jm} & a_{jn}\end{pmatrix} \tag{6.6.147}$$

Sa matrice adjointe est la transposée de sa matrice des cofacteurs :

$$\text{adj}(A)=C^T=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix} \tag{6.6.148}$$

D19. Une matrice carrée symétrique dont toutes les composantes sont positives et seulement des zéros sur la diagonale est nommée "matrice de distance" ou même parfois une "matrice de similarité par paires" (nous rencontrerons plusieurs fois ce type de matrice dans les techniques de Data Mining lors de notre étude des Méthodes Numériques dans la section du même nom). La plupart du temps cette matrice contient les distances, prises deux à deux, entre les éléments d'un ensemble (indexés par le numéro de ligne et de colonne de la matrice correspondante). Selon l'application concernée, la distance utilisée pour définir cette matrice peut ou non être une métrique.

Un type célèbre d'une telle matrice est la matrice de distance euclidienne. Si D_x^2 est une matrice de distance euclidienne et que les points $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sont définis sur un espace de dimension m, alors les éléments de A sont donnés par :

$$D_x^2=[d_{ij}^2]=\|x_i-x_j\|_2^2 \tag{6.6.149}$$

où $\|\ldots\|_2$ indique la 2-norme $\mathbb{R}^m$ sur :

$$D_x^2 = \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & \ldots & d_{1n}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & \ldots & d_{2n}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & \ldots & d_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & d_{n3}^2 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6.150}$$

D20. Une matrice est appelée "matrice creuse" si elle contient un nombre significatif de valeurs nulles. Dans les méthodes numériques, il existe des algorithmes qui utilisent cette spécificité pour optimiser le stockage de ce type de matrices (utilisées dans les cubes OLAP[22] et l'ingénierie financière).

$$\begin{bmatrix} 11 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 66 & 77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 88 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 99 \end{bmatrix} \tag{6.6.151}$$

La matrice creuse ci-dessus ne contient que 9 éléments non nuls, avec 26 éléments nuls. Sa parcimonie est de 74% et sa densité de 26%.

D21. Une "matrice de blocs" (également appelée "matrice partitionnée") est une matrice du genre :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{6.6.152}$$

où A, B, C et D sont des matrices, nommées "blocs", telles que :

- A et B ont le même nombre de lignes
- C et D ont le même nombre de lignes
- A et C ont le même nombre de colonnes
- B et D ont le même nombre de colonnes

Idéalement, une matrice bloc est obtenue en coupant une matrice deux fois : une fois verticalement et une fois horizontalement. Chacune des quatre pièces résultantes est un bloc.

✍**Exemples :**

E1. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.6.153}$$

[22] Acronyme de OnLine Analytical Processing.

En cours de traduction de l'anglais

peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (6.6.154)$$

où :

$$\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & D = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.6.155)$$

E2. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (6.6.156)$$

peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (6.6.157)$$

où :

$$\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} & D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.6.158)$$

Un fait important à propos des matrices de blocs est que leur multiplication peut être effectuée comme si leurs blocs étaient des scalaires, en utilisant la règle standard de multiplication matricielle :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix} \qquad (6.6.159)$$

La seule mise en garde est que tous les blocs impliqués dans une multiplication (par exemple, AE, BG, CE) doivent être conformes. Par exemple, le nombre de colonnes de A et le nombre de lignes de E doivent coïncider.

De nombreuses preuves en algèbre linéaire sont grandement simplifiées si l'on peut facilement traiter les déterminants (voir la section qui suit) des matrices de blocs, c'est-à-dire des matrices qui sont subdivisées en blocs qui sont eux-mêmes des matrices.

Enfin, pour clore cette énumération des types de matrices, rappelons que nous avons vu la "matrice de corrélation" à la page 612, la matrice de "quasi-corrélation" à la page 597 et aussi la matrice d'information de Fisher à la page 826.

En cours de ... lais

6.6.3.4 Déterminants

Nous allons nous intéresser aux déterminants dupoint de vue du physicien (celui de mathématicien étant assez rébarbatif...). En physique (que ce soit en mécanique classique ou physique quantique des champs), en chimie ou en ingénierie, nous aurons fréquemment des systèmes linéaires à résoudre. Or, nous avons vu maintenant qu'un système linéaire :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \tag{6.6.160}$$

peut être écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX=B \tag{6.6.161}$$

En cours de traduction de l'anglais

et nous savons que les seuls systèmes linéaires résolubles (dans le sens qu'ils ont une unique solution ! ! !) sont ceux qui ont autant d'équations que d'inconnues et leur déterminant qui est non nul ! Ainsi, la matrice A doit être une matrice carrée M_{mm}.

Si une solution existe, il existe alors une matrice-colonne (ou "vecteur") X tel que $AX=B$ ce qui implique :

$$X=A^{-1}B \tag{6.6.162}$$

Qu'impose cette relation ? Eh bien c'est relativement simple mais à la fois très très important : pour qu'un système linéaire ait une solution unique, il faut que la matrice A soit inversible (non singulière) ! Quel rapport avec le déterminant alors ? C'est simple : les mathématiciens ont cherché comment s'écrivaient les inverses des matrices de systèmes linéaires dont ils savaient qu'il y avait une solution unique et ils sont arrivés après tâtonnements successifs à déterminer une sorte de formule qui permette de vérifier si la matrice est inversible (non singulière) ou non. Une fois cette formule trouvée, ils ont formalisé (comme ils savent si bien le faire...), avec une très bonne rigueur, le concept entourant cette formule qu'ils ont appelé "déterminant". Ils y sont tellement bien arrivés d'ailleurs qu'on oublie parfois qu'ils ont procédé ainsi...

Remarque

Si une matrice d'un système linéaire n'est pas inversible (non singulière), cela a pour conséquence qu'il existe soit aucune solution, soit une infinité de solutions (comme à l'habitude quoi...)

Nous allons ci-dessous d'abord nous intéresser à la manière de construire le déterminant en définissant un type d'application particulière. Ensuite, après avoir vu un exemple simple et interprétable du calcul d'un déterminant, nous nous attacherons à déterminer la formule de celui-ci dans le cas général. Enfin, une fois ceci fait, nous verrons quelle est la relation qui lie l'inverse d'une matrice et le déterminant.

Dans ce qui suit tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie et sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (ceux qui le préfèrent pourront prendre $\mathbb{R}$ comme corps de base, de fait nous pourrions prendre un corps quelconque).

D'abord nous allons faire un petit peu de mathématique (un peu rébarbative) avant de passer à du concret.

Soit V un espace vectoriel, nous écrirons V^n au lieu de $V \times V \times \ldots \times V$. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_3)$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^n$. $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définitions (#6.6.254) :

D1. Une "application multilinéaire" sur un espace V est par définition une application $\varphi: V^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est linéaire en chacune de ces composantes. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}&\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{j-1}, \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}, \vec{x}_{j+1}, \ldots, \vec{x}_n)\\&=\lambda\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{j-1}, \vec{u}, \vec{x}_{j+1}, \ldots, \vec{x}_n)+\mu\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{j-1}, \vec{v}, \vec{x}_{j+1}, \ldots, \vec{x}_n)\end{aligned} \tag{6.6.163}$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\vec{x}_i, \vec{u}, \vec{v} \in V$ où les $\vec{x}_i$ sont des vecteurs.

Remarque

Une application multilinéaire non nulle n'est pas une application linéaire de l'espace V^n dans $\mathbb{R}^n$. Sauf si $n=1$. Effectivement, cela se vérifie de par la définition de l'application linéaire versus celle de l'application multilinéaire :

$$\lambda\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) \neq \varphi(\lambda\vec{x}_1, \lambda\vec{x}_2, \ldots, \lambda\vec{x}_n) \tag{6.6.164}$$

$$\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)+\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) \neq \varphi(2\vec{x}_1, 2\vec{x}_2, \ldots, 2\vec{x}_n) \tag{6.6.165}$$

D2. Une "application multilinéaire alternée" sur V est par définition une application multilinéaire qui vérifie la condition suivante :

$$\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \vec{x}_{j+2}, \ldots, \vec{x}_n)=-\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{j+1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+2}, \ldots, \vec{x}_n) \tag{6.6.166}$$

pour tout $j=1 \ldots n, \vec{x}_j \in V$. Ainsi la permutation de deux vecteurs qui se suivent change le signe de φ.

Théorème 6.39. Ainsi, si φ est une application multilinéaire, alors φ est alternée si et seulement si $\forall \vec{j} \in V, j=1 \ldots n$ nous avons :

$$\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+2}, \ldots, \vec{x}_n)=0 \tag{6.6.167}$$

ou dans un cas plus simple :

$$\varphi(\vec{x}_j, \vec{x}_j)=0 \tag{6.6.168}$$

Démonstration 6.39.1. Si φ est alternée nous avons par définition :

$$\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+1}, \vec{x}_{j+2}, \ldots, \vec{x}_n)=-\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{j+1}, \vec{x}_j, \vec{x}_{j+2}, \ldots, \vec{x}_n) \tag{6.6.169}$$

Donc en réarrangeant :

$$\varphi(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_j,\vec{x}_{j+1},\vec{x}_{j+2},\ldots,\vec{x}_n)+\varphi(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_{j+1},\vec{x}_j,\vec{x}_{j+2},\ldots,\vec{x}_n)=0 \tag{6.6.170}$$

Et φ est une application multilinéaire nous pouvons écrire :

$$2\varphi(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_j,\vec{x}_{j+1},\vec{x}_{j+2},\ldots,\vec{x}_n)=0 \tag{6.6.171}$$

■ Q.E.D.

et voilà ce qui nous intéresse :

D3. Un "déterminant" est par définition (par imposition) une application multilinéaire alternée :

$$D:\underbrace{\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n}_{n\text{ times}}\mapsto\mathbb{R} \tag{6.6.172}$$

vérifiant de plus :

$$D(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)=\det(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)=1 \tag{6.6.173}$$

En cours de traduction vers l'anglais

Remarque

Les colonnes d'une matrice carrée forment n vecteurs et nous voyons donc qu'un déterminant D sur $\mathbb{R}^n$ induit une application de $M_n(\mathbb{R})\mapsto\mathbb{R}$ (où $M_n(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices carrées $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$) définie par :

$$D(M)=D(\vec{m}_1,\vec{m}_2,\ldots,\vec{m}_n) \tag{6.6.174}$$

où $\vec{m}_i$ est la i-ème colonne de M.

Étudions le cas $n=2$. Si D est un déterminant, pour tout vecteur :

$$\vec{x}=\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2 \qquad \vec{y}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2 \tag{6.6.175}$$

nous avons :

$$D(\vec{x},\vec{y})=D(\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2,\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2) \tag{6.6.176}$$

Comme D est multilinéaire, nous avons :

$$\begin{aligned}D(\vec{x},\vec{y})&=D(\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2,\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2)=\lambda D(\vec{e}_1,\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2)+\mu D(\vec{e}_2,\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2)\\&=\lambda(\alpha D(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+\beta D(\vec{e}_1,\vec{e}_2))+\mu(\alpha D(\vec{e}_2,\vec{e}_1)+\beta D(\vec{e}_2,\vec{e}_2))\\&=\lambda\alpha D(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+\lambda\beta D(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+\mu\alpha D(\vec{e}_2,\vec{e}_1)+\mu\beta D(\vec{e}_2,\vec{e}_2)\end{aligned} \tag{6.6.177}$$

est comme elle est alternée, nous avons :

$$D(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=0 \qquad D(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=0 \tag{6.6.178}$$

il reste :

$$D(\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2,\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2)=\lambda\beta D(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+\mu\alpha D(\vec{e}_2,\vec{e}_1) \tag{6.6.179}$$

et nous avons :

$$D(\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2,\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2)=\lambda\beta D(\vec{e}_1,\vec{e}_2)-\mu\alpha D(\vec{e}_1,\vec{e}_2) \tag{6.6.180}$$

Et finalement :

$$D(\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2,\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2)=\lambda\beta-\mu\alpha \tag{6.6.181}$$

En fait, nous venons de démontrer que si un déterminant existe, il est unique et de la forme indiquée ci-dessus, il faudrait encore vérifier que l'application ainsi définie satisfait les propriétés d'un déterminant, mais ce dernier point est immédiat.

Ainsi, si :

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{6.6.182}$$

est une matrice nous avons donc (remarquez les trois notations courantes pour le déterminant que vous pouvez trouver dans divers manuels et même dans le présent livre en fonction du contexte et des traditions) :

$$D(M)=\det(M)=|M|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{6.6.183}$$

Donnons une interprétation géométrique du déterminant. Soient $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

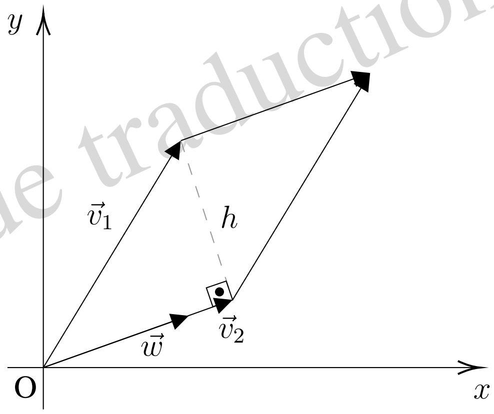


FIG. 6.134 – Interprétation géométrique du déterminant

Le vecteur $\vec{w}$ est obtenu en projetant $\vec{v}_1$ sur $\vec{v}_2$ et nous avons donc :

$$\vec{w}=\frac{\vec{v}_1\circ\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 \text{ et } \|\vec{h}_2\|^2=\|\vec{v}_1\|^2-\|\vec{v}_2\|^2=\|\vec{v}_1\|^2-\frac{(\vec{v}_1\circ\vec{v}_2)^2}{\|\vec{v}_2\|^4}\|\vec{v}_2\|^2=\|\vec{v}_1\|^2-\frac{(\vec{v}_1\circ\vec{v}_2)^2}{\|\vec{v}_2\|^2} \tag{6.6.184}$$

L'aire du parallélogramme ci-dessus est donc :

$$S=\|\vec{v}_2\|\cdot\|\vec{h}\|=\|\vec{v}_2\|\left(\|\vec{v}_1\|^2-\frac{(\vec{v}_1\circ\vec{v}_2)^2}{\|\vec{v}_2\|^2}\right)^{1/2}=\left(\|\vec{v}_1\|^2\|\vec{v}_2\|^2-(\vec{v}_1\circ\vec{v}_2)^2\right)^{1/2} \tag{6.6.185}$$

si :

$$\vec{v}_1=\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_2=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2 \tag{6.6.186}$$

En cours de traduction de l'anglais

alors :

$$S^2=\left(\lambda^2+\mu^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=\lambda^2\beta^2+\mu^2\alpha^2-2\lambda\alpha\mu\beta=(\lambda\beta-\mu\alpha)^2 \qquad (6.6.187)$$

et donc :

$$S=|\lambda\beta-\mu\alpha|=|D(\vec{v}_1,\vec{v}_2)|=\left|\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & \alpha\\ \mu & \beta\end{bmatrix}\right)\right| \qquad (6.6.188)$$

Ainsi le déterminant représente au signe près l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ lorsque ceux-ci sont linéairement indépendants. Nous pouvons généraliser ce résultat à une dimension n quelconque, en particulier, pour $n=3$, le déterminant de trois vecteurs linéairement indépendants représente le volume du parallélépipède défini par ces derniers comme nous l'avons déjà prouvé lors de notre étude du produit mixte dans la section de Calcul Vectoriel à la page 1815.

Le cas plus général de l'expression du déterminant est un peu plus délicat à établir. Il faut pour cela que nous définissions une application bijective particulière mais simple que nous avions déjà rencontrée dans la section sur les Statistiques.

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#6.6.255) : Soit $F_n=\{1,2,\ldots,n\}, n\in\mathbb{N}^*$ nous appelons "permutation" de F_n toute application bijective de F_n dans F_n :

$$\sigma:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\} \qquad (6.6.189)$$

Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations (applications bijectives) possibles de $\{1,2,\ldots,n\}$. $\mathcal{S}_n$ contient bien évidemment... (voir notre étude de la combinatoire dans la section de Probabilités) $n!$ éléments. La donnée d'un élément σ de $\mathcal{S}_n$ est définie par les données successives de :

$$\sigma(1)\ (\sigma(1)\in F_n) \qquad (6.6.190)$$

$$\sigma(2)\ \ (\sigma(2)\in F_n-\{\sigma(1)\}) \qquad (6.6.191)$$

$$\ldots\sigma(n)\ \ (\sigma(n)\in F_n-\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n-1)\}) \qquad (6.6.192)$$

Etant donnée une suite d'éléments ordonnée (croissants) $\{1,2,\ldots,n\}, n\in\mathbb{N}^*$, nous appelons "inversion", toute permutation d'éléments dans la suite ordonnée (donc la suite ne sera plus ordonnée du tout...). Nous notons par $I(\sigma)$ le nombre d'inversions.

Nous disons que la permutation σ est paire (impaire) si $I(\sigma)$ est pair (impair). Nous appelons "signature" de σ, le nombre noté $\varepsilon(\sigma)$ et défini par $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{I(\sigma)}$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon(\sigma)=\begin{cases}+1 & \text{si la permutation } \sigma \text{ est paire}\\ -1 & \text{si la permutation } \sigma \text{ est impaire}\end{cases} \qquad (6.6.193)$$

Nous avons maintenant les outils en place nécessaires à définir de manière générale la formule du déterminant !

Définition (#6.6.256) : Soit :

$$A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_{nn}(\mathbb{K}) \qquad (6.6.194)$$

Nous appelons "déterminant d'une matrice carrée A" de dimension n, et nous notons $\det(A)$ (ou parfois $D(A)$ ou encore dans le domaine des statistiques simplement $|A|$), le scalaire défini par (nous verrons quelques exemples concrets plus loin) :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \tag{6.6.195}$$

appelé parfois "formule de Leibniz pour déterminants" ou "formule de Laplace". Cette relation semble avoir été obtenue dans le passé par tâtonnements et par induction pour les plus grandes dimensions.

En cours de traduction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}\in M_{22}(\mathbb{K})$, considérons les $2!=2$ permutations des seconds indices (des entiers $1,2$) pris dans leur ensemble :

$$12 \qquad 21$$

Nous calculons les signatures de σ. Voici le schéma de cette règle (rappel : nous disons donc... qu'il y a "inversion", si dans une permutation, un entier supérieur précède un entier inférieur) :

$\sigma(1)\sigma(2)$	$\underbrace{12}_{\sigma(1)\sigma(2)}$	$\underbrace{21}_{\sigma(1)\sigma(2)}$
Nombre d'inversions	0	1
Permutation	paire	impaire
$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{I(\sigma)}$	$+1$	-1

TAB. 6.18 – **Inversions et permutations d'un déterminant d'ordre** 2

Dès lors nous avons :

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\\ &= \underbrace{a_{11}a_{22}}_{\varepsilon(\sigma)=+1\begin{cases}\sigma(1)=1\\ \sigma(2)=2\end{cases}} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{\varepsilon(\sigma)=-1\begin{cases}\sigma(1)=2\\ \sigma(2)=1\end{cases}}\end{aligned} \tag{6.6.196}$$

Ce qui correspond bien à ce que nous avions vu initialement. Rappelez-vous au passage que nous allons bientôt démontrer que le déterminant d'une matrice carrée doit être nul pour que la matrice soit inversible (non singulière) !

E2. Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}\in M_{33}(\mathbb{K})$, considérons les $3!=6$ permutations des seconds indices (des entiers $1,2,3$) pris dans leur ensemble :

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 31 \quad 312 \quad 321$$

Nous calculons les signatures de σ. Voici le schéma de cette règle (rappel : nous disons donc... qu'il y a "inversion", si dans une permutation, un entier supérieur précède un entier inférieur) :

$\sigma(1)\sigma(2)$	123	132	213	231	312	321
Nombre d'inversions	0	1	1	2	2	3
Permutation	paire	impaire	impaire	paire	paire	impaire
$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{I(\sigma)}$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1

TAB. 6.19 – **Inversions et permutations d'un déterminant d'ordre** 3

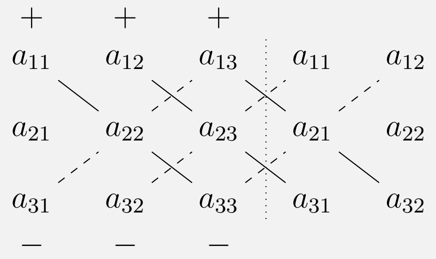
Donc nous avons :

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\\ &= a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned} \tag{6.6.197}$$

D'après la formule ci-dessus, chaque terme est sous la forme $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ où le deuxième indice j_1, j_2, j_3 est une permutation de $1,2,3$. Par exemple, le premier terme a $1,2,3$ comme seconds indices ; le deuxième terme a $1,3,2$; le troisième terme a $2,1,3$, etc.
Le signe de chaque terme est le signe de la permutation. Par exemple, le signe de $1,2,3$ est clairement $+1$. Pour le second terme, $1,3,2$ est obtenu à partir de $1,2,3$ par une transposition $2,3 \to 3,2$, donc le signe est -1, etc.

Remarque

Certaines personnes apprennent par coeur une méthode nommée "règle de Sarrus" pour calculer les déterminants d'ordre trois comme le précédent et donnée par :



Nous lui préférerons dans le présent livre la formulation générale du déterminant applicable à tous les ordres.

Voyons quelques propriétés et corollaires de cette formulation du déterminant :

P1. Soit $M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n, nous ne changeons pas la valeur du déterminant de M_n :

(a) Lorsque nous effectuons une opération élémentaire sur les colonnes de M_n.

(b) Lorsque nous effectuons une opération élémentaire sur les lignes de M_n.

Démonstration 6.39.2. Si $M_n = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ alors M_n est composée de n vecteurs colonnes :

$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix} \tag{6.6.198}$$

Effectuer une opération élémentaire sur les colonnes de M_n revient à additionner $\lambda v_i, i \in \{1,\ldots,n\}$ à une des colonnes v_n de M_n. Soit la matrice obtenue en additionnant λv à la

j-ème colonne de M_n, nous avons :

$$\det(M'_n) = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \lambda v_i, \ldots, v_n) \qquad (6.6.199)$$

Par multilinéarité (finalement la démonstration n'est vraiment pas bien dure) :

$$\det(M') = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + \lambda \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \qquad (6.6.200)$$

et comme le déterminant est alterné :

$$\lambda \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0 \Leftarrow \det(M'_n) = \det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \det(M_n) \qquad (6.6.201)$$

Pour ce qui est des opérations élémentaires sur les lignes il suffit de considérer la transposée (c'est à pleurer tellement c'est simple mais il fallait y penser).

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

P2. Soit $M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n et soit $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\boxed{\det(\lambda M_n) = \lambda^n \det(M_n)} \qquad (6.6.202)$$

Démonstration 6.39.3. Comme précédemment, il suffit de remarquer que si $v_1, \ldots, v_n$ sont les vecteurs colonnes constituant la matrice M_n alors $\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n$ sont ceux qui constituent λM_n et :

$$\det(\lambda M_n) = \det(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) \qquad (6.6.203)$$

L'application étant n-linéaire, nous aboutissons à l'égalité :

$$\det(\lambda M_n) = \lambda^n \det(v_1, \ldots, v_n) = \lambda^n \det(M_n) \qquad (6.6.204)$$

■ Q.E.D.

P3. Soit $M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n.Nous changeons le signe du déterminant de M_n si :

- Nous permutons deux de ses colonnes
- Nous permutons deux de ses lignes

Démonstration 6.39.4. M_n est constituée des n vecteurs $v_1, .., v_n$. Le déterminant de M_n est égal au déterminant de ces n. Permuter deux colonnes de M_n revient à permuter les deux vecteurs correspondant. Supposons que les vecteurs permutés soit le i-ème et le j-ème, l'application déterminant étant alternée, nous avons :

$$\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \qquad (6.6.205)$$

Pour ce qui est des lignes, il suffit de considérer la transposée de M_n pour arriver au même résultat !

■ Q.E.D.

P4. Soit $A, B \in M_n \in (\mathbb{C})$ alors :

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)} \tag{6.6.206}$$

La démonstration peut se faire à notre connaissance aux moins de deux manières différentes, la première est assez indigeste et abstraite nous la laisserons aux mathématiciens (...) même si elle a l'avantage d'être générale, la seconde plus simple, consiste à vérifier cette assertion pour différentes matrices carrées (la manière dont les ingénieurs le feraient...) :

Démonstration 6.39.5.

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot B) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}\right) \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{11}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{11}) \\
&= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} \\
&- \cancel{a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - \cancel{a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}} \\
&= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} \\
&= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12}
\end{aligned} \tag{6.6.207}$$

et :

$$\begin{aligned}
\det(A)\det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12}
\end{aligned} \tag{6.6.208}$$

Les calculs donnent donc des résultats qui sont bien identiques. Nous pouvons vérifier ainsi pour des matrices carrées de dimensions supérieures.

■ Q.E.D.

P5. Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$ est inversible (non singulière) si et seulement si $\det(A) \neq 0$ (c'est la propriété la plus importante parmi toutes).

Démonstration 6.39.6. Si A est inversible (non singulière), nous avons :

$$\boxed{\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det(\mathbb{1}) = \det(A)\det\left(A^{-1}\right) \Rightarrow \det(A) \neq 0} \tag{6.6.209}$$

■ Q.E.D.

Notons que comme $\det(\mathbb{1}) = 1$, il s'ensuite immédiatement que :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{6.6.210}$$

Il s'agit de la propriété la plus importante des matrices dans le cadre de la physique théorique car si A est un système linéaire, le calcul de son déterminant permet de savoir si celui-ci a des solutions uniques. Dans le cas contraire, comme nous en avons déjà fait mention, soit le système n'a aucune solution, soit une infinité !

Il faut considérer aussi un cas particulier important ! Soit le système suivant :

$$A \cdot B = 0 \Longrightarrow B = 0 \tag{6.6.211}$$

En cours de traduction de l' anglais

où $A \in M_n(\mathbb{K}) \neq 0$ et $B \in M_n(\mathbb{K}) \neq 0$ sont à déterminer. Il est clair..., que A soit inversible (non singulière) ou non, la solution triviale est $A \cdot B = 0$. Cependant..., imaginons un cas de physique théorique où nous avons $A \cdot B = 0$ mais pour lequel nous savons que $A \in M_n(\mathbb{K}) \neq 0$ et pour lequel nous imposons $B \in M_n(\mathbb{K}) \neq 0$. Dans ce cas, il nous faut éliminer la solution triviale $B = 0$. De plus, calculer l'inverse (s'il existe) de la matrice A ne nous ramènera à rien de concret mis à part $B = 0$ à ce qui bien évidemment ne nous satisfait pas. La seule solution est alors de se débrouiller pour que les coefficients a_{ij} de la matrice A soient tels que son déterminant soit nul et donc la matrice non inversible ! L'intérêt ? Eh, bien d'avoir une infinité de solutions possibles (de B donc !) qui satisfont $A \cdot B = 0$. Nous aurons besoin de cette méthodologie en mécanique quantique ondulatoire, lorsque nous déterminerons l'existence des antiparticules par l'intermédiaire de l'équation de Dirac linéarisée. Il faudra donc s'en rappeler !

P6. Deux matrices "conjuguées" (attention, pas dans le sens complexe du terme) ont le même déterminant.

Démonstration 6.39.7. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, et $P \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice de passage d'une base à une autre (voir plus loin le traitement des changements de bases), nous avons alors :

$$\det(B) = \det\left(P^{-1}AP\right) = \underbrace{\det(P^{-1})}_{=(\det(P))^{-1}} \det(A)\det(P) = \det(A) \tag{6.6.212}$$

$$\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} \tag{6.6.213}$$

■ Q.E.D.

P7. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$:

Démonstration 6.39.8.

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \overline{a_{1,\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot \overline{a_{n,\sigma(n)}} \tag{6.6.214}$$

Or (trivial... simple multiplication de tous les coefficients) :

$$\overline{a_{1,\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot \overline{a_{n,\sigma(n)}} = \overline{a_{\sigma^{-1}(1),1}} \cdot \ldots \cdot \overline{a_{\sigma^{-1}(n),n}} \tag{6.6.215}$$

Puisque (trivial) $\varepsilon(\sigma^-1) = \varepsilon(\sigma)$ et que $x, y \in \mathbb{C} : \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$ (voir section Nombres page 245) nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}\det(\bar{A}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \overline{a_{\sigma^{-1}(1),1}} \cdot \ldots \cdot \overline{a_{\sigma^{-1}(n),n}} = \overline{\sum_{\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n),n}} \\ &= \overline{\det(A)}\end{aligned} \tag{6.6.216}$$

■ Q.E.D.

P8. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\det(A^T) = \det(A) \tag{6.6.217}$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.39.9. Ben... c'est la même chose que pour la propriété précédente mais sans les valeurs conjuguées... De fait, nous montrons de la même manière, la même propriété pour $A \in M_n(\mathbb{C})$.

■ Q.E.D.

P9. Soit une matrice $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, nous noterons la A_{ij} matrice obtenue à partir de A en effaçant la i-ème ligne et la j-ème colonne (notation très importante à ne pas oublier pour la suite !!!). A_{ij} appartient donc à $M_{n-1}(\mathbb{C})$. Alors pour tout $i=1\ldots n$:

$$\boxed{\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\det(A_{ij})} \qquad (6.6.218)$$

où le terme :

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\det(A_{ij}) \qquad (6.6.219)$$

est nommé "cofacteur[23]" ou "déterminant partiel", $\det(A_{ij})$ est nommé le "mineur", et l'ensemble de la relation encadrée ci-dessus est nommé "théorème d'expansion des cofacteurs".

Démonstration 6.39.10. Pour la démonstration définissons l'application :

$$\varphi : M_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}, \varphi(A) := \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) \qquad (6.6.220)$$

Il est relativement facile de voir que φ est multilinéaire (il suffit de considérer $(-1)^{i+j}a_{ij}$ comme une simple constante et ensuite par extension de la définition du déterminant... trop facile...).

Montrons cependant qu'elle est alternée (dans ce cas, c'est un déterminant qui a toutes les propriétés d'un... déterminant !).

Soient a_k, a_{k+1} deux vecteurs colonne de A qui se suivent. Supposons que $a_k=a_{k+1}$, il faut montrer que dans ce cas $\varphi(A)=0$ (qui découle de la définition d'une application alternée).

Nous avons premièrement (c'est obligatoire de par la définition) si nous n'effaçons aucune des colonnes j étant k ou $k+1$:

$$\det(A_{ij})=0 \quad \text{si } j\neq k,k+1 \qquad (6.6.221)$$

et nous avons bien évidemment si nous enlevons respectivement la colonne k et la colonne $k+1$:

$$\det(A_{ik})=\det(A_{i(k+1)}) \quad \text{et} \quad A_{i,k}=A_{i,k+1} \qquad (6.6.222)$$

Donc :

$$\varphi(A)=(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{ik})+(-1)^{i+(k+1)}a_{i(k+1)}\det(A_{i(k+1)})=0 \qquad (6.6.223)$$

C'est donc OK. L'application φ est alternée et multilinéaire, il s'agit donc bien d'un déterminant !

Nous venons donc de démontrer que φ est un déterminant et par unicité $\varphi(A)=\det(A)$ nous avons pour tout $A\in M_n(\mathbb{C})$.

[23] À partir de tous les cofacteurs, nous pouvons construire une "matrice des cofacteurs" contenant tous les C_{ij}.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Remarque

Donc enfin nous avons vu maintenant en détails les notions de cofacteur qui doivent permettre au lecteur de comprendre la notion de "matrice adjointe" (ou "comatrice") que nous avions introduit au début de cette section à la page 1931.

Si nous prenons la matrice 2×2 suivante :

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6.6.224}$$

nous obtenons :

$$\text{adj}(A)=C^T=\left((-1)^{i+j}\det(A_{ij})\right)^T_{1\leq i,j\leq n}=\text{adj}(A)=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{6.6.225}$$

Ou si nous prenons la matrice 3×3 suivante (déjà utilisée dans un exemple précédent !) :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{6.6.226}$$

Alors la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$C=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{6.6.227}$$

Et nous remarquons quelque chose qui peut être généralisé : si A est symétrique, alors $C=C^T$.

✍**Exemple :**

Voyons un exemple de cette méthode en calculant le déterminant de :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \text{i} \end{pmatrix} \tag{6.6.228}$$

En cours de traduction de l' anglais

Développons la seconde ligne ($i=2$). Nous avons :

$$\begin{aligned}\det(A)&=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&-1&\mathrm{i}\end{bmatrix}\\&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\det(A_{ij})=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}\cdot a_{2j}\cdot\det(A_{2j})\\&=(-1)^3\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\-1&\mathrm{i}\end{pmatrix}+(-1)^4\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&3\\1&\mathrm{i}\end{pmatrix}+(-1)^5\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\\&=-2\cdot(2\mathrm{i}+3)+\mathrm{i}-3=-3\mathrm{i}-9\end{aligned}\quad(6.6.229)$$

Développons selon la première colonne en guise de vérification (on ne sait jamais...) :

$$\begin{aligned}\det(A)=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&0\\1&-1&\mathrm{i}\end{bmatrix}&=\det\begin{bmatrix}1&0\\-1&\mathrm{i}\end{bmatrix}-2\cdot\det\begin{bmatrix}2&3\\-1&\mathrm{i}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix}\\&=\mathrm{i}-2(2\mathrm{i}+3)-3=-3\mathrm{i}-9\end{aligned}\quad(6.6.230)$$

Ou le lecteur peut vérifier dans Maple 4.00b en utilisant :

```
>with(linalg):
>det(array([[1,2,3],[2,1,0],[1,-1,I]]));
```

Le calcul déterminé ci-dessus est donc exponentiel car si par exemple nous devons calculer le déterminant d'une matrice d'ordre $n=10$ alors le déterminant sera développé en une somme de 10 termes, dont chacun contient le déterminant d'une matrice d'ordre $n=9$, qui est un cofacteur de la matrice de départ. Si nous développons n'importe lequel de ces déterminants, nous obtenons une somme de 9 déterminants dont chacun contient le déterminant d'une matrice d'ordre $n=8$. A ce stade, il y a donc 90 déterminants de matrices d'odre 8 à calculer. Le processus pourrait se poursuivre jusqu'à ce qu'il ne reste que des déterminants d'ordre 2. Et alors là nous devinons que le nombre de matrices d'ordre 2 est très conséquent !

P10. Comme nous le prouverons lors de notre étude du théorème spectral plus bas à la page 1976, pour une matrice M définie positive nous avons :

$$\det(M)=\prod_i\lambda_i>0\quad(6.6.231)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice M. Et pour une matrice semi-positive définie M nous avons :

$$\det(M)=\prod_i\lambda_i\geq 0\quad(6.6.232)$$

Définition (#6.6.257) : Soit m,n deux entiers positifs quelconques et A une matrice $m\times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $k\leq\min(m,n)$ un "mineur d'ordre k" de A est un détermi-

nant du type :

$$\det \begin{bmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{bmatrix} \qquad (6.6.233)$$

avec $1 \leq i_1 < \ldots \leq m$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$.

Dans le cas particulier d'une matrice d'ordre $n > 1$ la définition est plus simple : le mineur M_{ij} de l'élément a_{ij} est le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ que nous obtenons en supprimant la ligne i et la colonne j. Par conséquent, pour calculer le mineur d'un élément, nous supprimons la ligne et la colonne auxquelles appartient l'élément, et nous calculons le déterminant de la matrice carrée restante.

Remarque

La formule de Leibniz des déterminants n'est pas la façon dont vos libraires informatiques calculent les déterminants. C'est plus un outil théorique, en fait c'est probablement l'un des moyens les plus lents de calculer le déterminant. L'élimination gaussienne (voir section Méthodes Numériques page ??) est un moyen rapide et relativement simple de faire un tel calcul !

En cours de traduction de ...

6.6.3.4.1 Dérivée d'un déterminant relativement à un paramètre

Voyons maintenant un résultat qui nous sera fort utile dans la section de Relativité Générale :

Soit une matrice carrée $n \times n$ avec des fonctions $g_{ij} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables au moins une fois. Posons $g := \det(G)$ avec $G = (g_{ij})$. Nous voulons calculer $\mathrm{d}_t g$. Soit g_i le i-ème vecteur colonne de la matrice G. Utilisons la formule :

$$g = \det(g_1, \ldots, g_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) g_{\sigma_{\sigma(1),1}} \cdot \ldots \cdot g_{\sigma(n),n} \qquad (6.6.234)$$

Sachant que la dérivée de $g_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot g_{\sigma(n),n}$ est (dérivée de n produits) :

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}g_{\sigma(1),1}}{\mathrm{d}t} \cdot g_{\sigma(2),2} \cdots g_{\sigma(n),n} + g_{\sigma(1),1} \cdot \frac{\mathrm{d}g_{\sigma(2),2}}{\mathrm{d}t} \cdot g_{\sigma(3),3} \cdot \ldots \cdot g_{\sigma(n),n} + \ldots \\ &+ g_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot g_{\sigma(n-1),n-1} \cdot \frac{\mathrm{d}g_{\sigma(n),n}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \qquad (6.6.235)$$

nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = &\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \frac{\mathrm{d}g_{\sigma(1),1}}{\mathrm{d}t} \cdot g_{\sigma(2),2} \cdots g_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot g_{\sigma(1),1} \cdot \frac{\mathrm{d}g_{\sigma(2),2}}{\mathrm{d}t} \cdot g_{\sigma(3),3} \cdot \ldots \cdot g_{\sigma(n),n} \\ &+ \ldots + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot g_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot g_{\sigma(n-1),n-1} \cdot \frac{\mathrm{d}g_{\sigma(n),n}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \qquad (6.6.236)$$

Si nous regardons la première somme ci-dessus, nous remarquons que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \frac{\mathrm{d}g_{\sigma(1),1}}{\mathrm{d}t} \cdot g_{\sigma(2),2} \cdots g_{\sigma(n),n} = \det(g_1', g_2, \ldots, g_n) \qquad (6.6.237)$$

où g'_1 est la dérivée du vecteur g_1. De même pour les sommes suivantes. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\det(g'_1,g_2,\ldots,g_n)+\det(g_1,g'_2,\ldots,g_n)+\ldots+\det(g_1,g_2,\ldots,g'_n) \quad (6.6.238)$$

Développons encore ! Considérons le terme $\det(g'_1,g_2,\ldots,g_n)$ ci-dessus. Si nous le développons par rapport à la première colonne, nous obtenons :

$$\det(g'_1,g_2,\ldots,g_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\cdot\frac{\mathrm{d}g_{i,1}}{\mathrm{d}t}\cdot\det(G_{i,1}) \quad (6.6.239)$$

De même, en développant le j-ème terme de la somme ci-dessus par rapport à la j-ème colonne nous avons :

$$\det(g_1,\ldots,g'_j,\ldots,g_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}\cdot\frac{\mathrm{d}g_{i,j}}{\mathrm{d}t}\cdot\det(G_{i,j}) \quad (6.6.240)$$

Si nous posons :

$$\alpha_{ij}:=(-1)^{i+j}\cdot\det(G_{i,j}) \quad (6.6.241)$$

nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot\frac{\mathrm{d}g_{i,j}}{\mathrm{d}t} \quad (6.6.242)$$

Ce qui s'écrit en notation tensorielle (voir section Calcul Tensoriel page 2011) :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\alpha_{ij}\cdot\frac{\mathrm{d}g_{i,j}}{\mathrm{d}t} \quad (6.6.243)$$

Nous avons aussi :

$$b_{ji}=\frac{1}{\det(G)}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det(G_{i,j})=\frac{\alpha_{ij}}{\det(G)}=\frac{\alpha_{ij}}{g} \quad (6.6.244)$$

où b_{ji} est le coefficient se trouvant à la j-ème ligne, i-ème colonne de la matrice G^{-1}. Changeons la notation tel que :

$$g^{ij}=b_{ji}=\frac{\alpha_{ij}}{g} \quad (6.6.245)$$

L'expression de la dérivée devient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=g\cdot\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}g^{ij}\cdot\frac{\mathrm{d}g_{i,j}}{\mathrm{d}t} \quad (6.6.246)$$

qui s'écrit en notation tensorielle :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=g\cdot g^{ij}\cdot\frac{\mathrm{d}g_{i,j}}{\mathrm{d}t} \quad (6.6.247)$$

Ce résultat, finalement assez simple, nous sera utile dans le chapitre de Calcul Tensoriel, pour construire les outils nécessaires à l'étude de la relativité générale et à la détermination de l'équation d'Einstein des champs. Il convient donc de s'en rappeler !

En cours de traduction de l' anglais

6.6.3.4.2 Dérivée du logarithme d'un déterminant

Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée. Pour une fonction $f:\mathbb{R}^{n\times n}\mapsto\mathbb{R}$, définissons sa dérivée f' comme une matrice $n\times n$ où l'entrée de la ligne i et la colonne j est $\partial f/\partial m_{ij}$.

Pour certaines fonctions f, la dérivée f' a une belle forme. Nous allons montrer maintenant une dérivée matricielle que nous rencontrerons dans la section de Méthodes Numériques lors de notre étude du modèle de Mixture Gaussiennes et de l'Analyse Fsactorielle :

$$[\log(\det(M))]' = \frac{\mathrm{d}\log(\det(M))}{\mathrm{d}M} = (M^{-1})^T \tag{6.6.248}$$

Ici, nous restreignons le domaine de la fonction aux M avec déterminant positif (typiquement le cas des matrices de variances-covariances !). Notez qu'il n'est pas intuitif que la dérivée d'une fonction scalaire d'une matrice soit égale à une autre matrice...

Avant de passer à la preuve, nous devons rappeler certains termes. Pour une matrice M :

- Le mineur (i,j) de M, noté $\det(M_{ij})$, est le déterminant de la matrice $(n-1)\times(n-1)$ qui reste après suppression la i-ème ligne et la j-ème colonne de M
- La matrice cofacteur de M, notée C, est une matrice $n\times n$ telle que $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$
- La matrice adjointe de M, notée $\text{adj}(M) = C^T = ((-1)^{i+j}\det(M_{ij}))^T_{1\leq i,j\leq n}$, est simplement la transposée de C.

Ces termes sont utiles car ils concernent à la fois les déterminants et les inverses de la matrice. Si M est inversible, alors comme nous l'avons prouvé précédemment :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\text{adj}(M) = \frac{1}{\det(M)}C^T \tag{6.6.249}$$

ainsi :

$$\left(M^{-1}\right)^T_{ij} = \frac{1}{\det(M)}C_{ij} \tag{6.6.250}$$

D'autre part, par le théorème d'expansion des cofacteurs du déterminant démontré plus haut (comme pour une matrice symétrique $C = C^T$) :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot m_{ij}\cdot\det(M_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}C_{ij} \tag{6.6.251}$$

Donc par la règle de la dérivée d'un produit :

$$\frac{\partial(\det(M))}{\partial m_{ij}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial m_{ij}}{\partial m_{ik}}C_{ij} + m_{ij}\frac{\partial C_{ij}}{\partial m_{ik}} \tag{6.6.252}$$

En cours de traduction de l'anglais

Si $k \neq j$, alors $\partial m_{ij}/\partial X_{ik} = 0$, sinon il est égal à 1. Cela signifie que le premier terme ci-dessus se réduit à C_{ik}. Pour tout k, les éléments de M qui affectent C_{ij} sont ceux qui ne se trouvent pas sur la ligne i ou la colonne j. Donc, $\partial C_{ij}/\partial m_{ik} = 0$ pour tout j ! Ainsi :

$$\frac{\partial(\det(M))}{\partial m_{ij}} = C_{ij} \tag{6.6.253}$$

En rassemblant tout cela avec une application de la règle de la dérivation des fonctions composées, nous obtenons (en utilisant pour la dernière égalité la relation 6.6.3.4.2) :

$$[\log(\det(M))]'_{ij} = \frac{1}{\det(M)} \frac{\partial(\det(M))}{\partial m_{ij}} = \frac{1}{\det(M)} C_{ij} = \left(M^{-1}\right)^T_{ij} \tag{6.6.254}$$

comme demandé !

6.6.3.4.3 Règle de Cramer

Résolvons d'abord un système linéaire général simple 2 par 2 en utilisant la substitution pour voir comment la règle de Cramer apparaît (ceci sera évidemment considéré comme une preuve informelle !).

Pour cela on part du système suivant (n'oubliez pas qu'un tel système s'écrit traditionnellement $A\vec{x} = \vec{b}$) :

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \tag{6.6.255}$$

En multipliant les deux côtés de la première équation par a_2, et les deux côtés de la deuxième équation par a_1, puis en soustrayant, nous trouvons que :

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) y = a_1 c_2 - c_1 a_2 \tag{6.6.256}$$

En admettant que $a_1 b_2 - b_1 a_2$ n'est pas 0, nous trouvons que :

$$y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{6.6.257}$$

La formule pour x peut être dérivée de la même manière de sorte que nous ayons :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \tag{6.6.258}$$

Si nous notons x par x_1 et y par x_2, alors nous voyons que nous avons :

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} \tag{6.6.259}$$

En cours de traduction de l'anglais

où nous définissons A_k comme étant la matrice $n \times n$ obtenue en remplaçant la k-ème colonne de A par le terme inhomogène $\vec{b}$.

Les règles pour des matrices 3×3 sont similaires. Étant donné :

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 \end{aligned} \tag{6.6.260}$$

ce qui en notation matricielle donne :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ d_3 \end{pmatrix} \tag{6.6.261}$$

Ensuite, les valeurs de x, y et z (après quelques manipulations algèbriques ennuyeuses) peuvent être trouvées comme suit :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \tag{6.6.262}$$

Puis en notant à nouveau x par x_1, y par x_2 et z par x_3 nous avons encore (n'oubliez pas qu'un tel système s'écrit traditionnellement $A\vec{x}=vecb$) :

$$x_k=\frac{\det(A_k)}{\det(A)} \tag{6.6.263}$$

où nous définissons A_k comme étant la matrice $n \times n$ obtenue en remplaçant la k-ème colonne de A par le terme inhomogène $\vec{b}$.

Mais passons maintenant à la preuve générale. Mais avant... certains lecteurs diront peut-être que c'est inutile ! En fait pas vraiment ! Il y a des applications assez importantes dans le domaine du Calcul Tensoriel (par exemple la divergence d'un champ tenseur qui a certaines applications en Relativité Générale avancée[24]), ou dans le calcul de dérivées implicitement[25]. Mais ce sont toutes des applications assez abstraites. En effet ! Ainsi, le lecteur doit savoir que l'application pratique la plus connue est l'utilisation dans la prévision et l'analyse de séries chronologiques dans le domaines de l'économie d'entreprise (plus généralement dans tout domaine financier avancé) pour l'étude du coefficient d'autocorrélation partielle du processus autorégressif (à travers les équation de Yule-Walker).

Théorème 6.40. Si $A\vec{x}=\vec{b}$ est un système linéaire d'équations avec $\vec{x}=[x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n]^T$ et $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $\det(A)\neq 0$ alors on trouve les solutions :

$$x_i=\frac{\det(A_i)}{\det(A)} \tag{6.6.264}$$

où nous définissons A_i comme étant la matrice $n \times n$ obtenue en remplaçant la i-ième colonne de A par le terme inhomogène $\vec{b}$.

[24]Ne le cherchez pas dans ce livre !
[25]En fait, il n'est pas non plus nécessaire de lire ce livre entièrement !

En cours de traduction de l'anglais

Comme il y a beaucoup de façons différentes de démonter ce théroème, la meilleure et la plus simple selon nous est celle fournie par PlanetMath.org et écrite par quelqu'un sous le pseudonyme `rmilson` le 12013-03-22 (calendrier holocène) pour lequel nous fournissons ici un simple copier/coller (car tout nous semble parfait et c'est aussi une façon très astucieuse de faire la démonstration... !) :

Démonstration 6.40.1. Puisque nous supposons que $\det(A) \neq 0$, par les propriétés du déterminant nous savons que A est inversible.

Nous affirmons que cela implique que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution unique. Notez que $A^{-1}\vec{b}$ est une solution puisque :

$$A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = \vec{b} \quad (6.6.265)$$

nous savons donc qu'une solution existe.

Soit $\vec{s}$ une solution arbitraire de l'équation, donc $A\vec{s} = \vec{b}$. Mais alors :

$$\vec{s} = (A^{-1}A)\vec{s} = A^{-1}(A\vec{s}) = A^{-1}\vec{b} \quad (6.6.266)$$

nous voyons donc que $A^{-1}\vec{b}$ est la seule solution.

Pour chaque entier i, $1 \leq i \leq n$, soit a_i la i-ème colonne de A, soit e_i la i-ème colonne de la matrice identité I_n, et soit X_i la matrice obtenue à partir de $\mathbb{1}_n$ en remplaçant la colonne i par le vecteur colonne $\vec{x}$.

Nous savons que pour toute matrice A, B que la k-ème colonne du produit AB est simplement le produit de A et de la k-ème colonne de B. Observons également que :

$$Ae_k = a_k \quad (6.6.267)$$

pour $k = 1, \ldots, n$. Donc, par multiplication, nous avons :

$$\begin{aligned} AX_i &= A(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{x}, \vec{e}_{i+1}, \ldots, \vec{e}_n) \\ &= (A\vec{e}_1, \ldots, A\vec{e}_{i-1}, A\vec{x}, A\vec{e}_{i+1}, \ldots, A\vec{e}_n) \\ &= M_i \end{aligned} \quad (6.6.268)$$

Puisque X_i est $\mathbb{1}_n$ avec la colonne i remplacée par $\vec{x}$, nous allons calculer le déterminant de X_i avec le développement du cofacteur donné. Pour cela, rappelons la relation d'expansion des cofacteurs que nous venons de démontrer plus tôt et qui était pour rappel :

$$\det(A_i) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (6.6.269)$$

peut être utilisé pour calculer le déterminant uniquement pour le cofacteur (ligne) $j = i$ tel que pour X_i :

$$\det(X_i) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{ij} \det(X_{ij}) \quad (6.6.270)$$

En cours de traduction de l' anglais

Si nous choisissons de calculer cette somme uniquement pour une ligne donnée i, nous savons que $x_{ij} \neq 0$ uniquement pour $i = j$, alors la relation précédente se réduit à :

$$\det(X_i) = (-1)^{i+i} x_{ii} \det(X_{ii}) = (-1)^{2i} x_i \det(X_i) = 1 \cdot x_i \det(X_i) = x_i \det(\mathbb{1}_{n-1}) = x_i \cdot 1 = x_i \tag{6.6.271}$$

Ainsi de par la propriété multiplicative du déterminant :

$$\det(M_i) = \det(AX_i) = \det(A)\det(X_i) = \det(A) x_i \tag{6.6.272}$$

nous obtenons :

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)} \tag{6.6.273}$$

et si nous notons M_i par A_i, nous obtenons la fameuse "règle de Cramer" :

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}} \tag{6.6.274}$$

comme requis !

■ Q.E.D.

6.6.3.4.4 Cofacteur d'un déterminant et matrice inverse

En cours de traduction de l' anglais

Terminons notre étude des déterminants par la "cerise sur le gâteau" en donnant une relation très importante dans de nombreux domaines de l'ingénierie, de la physique et des mathématiques qui relie l'inverse des coefficients d'une matrice à des mineurs d'ordre n (nous utiliserons cette relation plus loin).

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible (non singulière). Notons $A = (a_{ij})$ et $A^{-1} = (b_{ij})$. Alors :

$$\boxed{b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})} \tag{6.6.275}$$

Démonstration 6.40.2. Notons a_k le k-ème vecteur colonne de la matrice A. Sachant que $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$ (sous des hypothèses connues), nous avons (trivial) :

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_k \tag{6.6.276}$$

Calculons maintenant $\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, e_j, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. D'abord en développant relativement à la k-ème colonne que nous avons trouvée (puisqu'un seul des coefficients de e_j n'est pas nul et que l'unique non nul est égal à l'unité) :

$$\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, e_j, a_{k+1}, \ldots, a_n) = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) \tag{6.6.277}$$

De plus (propriétés du déterminant) :

$$\det(a_1,\ldots,a_{k-1},e_j,a_{k+1},\ldots,a_n)=\det\left(1,\ldots,a_{k-1},\sum_{l=1}^{n} b_{lj}a_l,a_{k+1},\ldots,a_n\right)$$
$$=\sum_{l=1}^{n} b_{lj}\underbrace{\det(a_1,\ldots,a_{k-1},a_l,a_{k+1},\ldots,a_n)}_{=0 \text{ si } l\neq k}=b_{kj}\det(A) \quad (6.6.278)$$

Dès lors :

$$(-1)^{j+k}\det(A_{jk})=b_{kj}\det(A) \quad (6.6.279)$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{b_{kj}=\frac{1}{\det(A)}(-1)^{j+k}\det(A_{jk})} \quad (6.6.280)$$

Cette dernière relation est parfois notée :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) \quad (6.6.281)$$

où "adj" signifie adjacent.

■ Q.E.D.

E... duction de l' anglais

✍**Exemples :**

E1. Inverse d'une matrice générale 2×2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (6.6.282)$$

Nous voulons calculer l'inverse de la matrice 2×2 suivante :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (6.6.283)$$

en utilisant la méthode des cofacteurs prouvée précédemment !

Nous calculons d'abord le déterminant :

$$\det(A)=|A|=2\cdot 5-4\cdot 3=10-12=-2 \quad (6.6.284)$$

et après les cofacteurs ! Nous commençons par le premier cofacteur (c'est vraiment simple dans le cas d'une matrice 2×2 car le mineur est simplement un scalaire et donc le déterminant du mineur est égal au scalaire lui-même !) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\det(A_{11})=(-1)^2\cdot 5=5$$

Passons au cofacteur suivant :

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\det(A_{21})=(-1)^3\cdot 3=-3$$

Passons encore une fois au cofacteur suivant :

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\det(A_{12})=(-1)^3\cdot 4=-4$$

Et maintenant le dernier cofacteur :

$$\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\det(A_{22})=(-1)^4\cdot 2=2$$

Pour résumer tous les cofacteurs :

$$\begin{aligned}C_{11}&=(-1)^2\cdot 5=5\\C_{12}&=(-1)^3\cdot 3=-3\\C_{21}&=(-1)^3\cdot 4=-4\\C_{22}&=(-1)^4\cdot 2=2\end{aligned}\tag{6.6.285}$$

Finalement comme :

$$b_{ij}=\frac{1}{\det(A)}\cdot(-1)^{i+j}\cdot\det\left(A_{ji}\right)\tag{6.6.286}$$

Nous avons :

$$B=A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}5 & -4\\-3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5/2 & 2\\3/2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.5 & 2\\1.5 & -1\end{bmatrix}\tag{6.6.287}$$

Nous voyons donc que la méthode d'inversion de matrice de cofacteurs a une complexité algorithmique d'ordre $\mathcal{O}(n!)$. C'est une approche très coûteuse !

E2. Inverse d'une matrice générale 3×3 :

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\\a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}\\a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}}\tag{6.6.288}$$

E3. Inverse d'une matrice générale 4×4 :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}\tag{6.6.289}$$

et :

$$\begin{aligned}\det(A) = & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\ & - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}\end{aligned} \tag{6.6.290}$$

alors il existe une matrice inverse de A, et c'est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\end{pmatrix} \tag{6.6.291}$$

où :

$$\begin{aligned}
b_{11} &= a_{22}a_{33}a_{44} + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{22}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44} - a_{24}a_{33}a_{42} \\
b_{12} &= a_{12}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{34}a_{42} - a_{14}a_{32}a_{43} \\
b_{13} &= a_{12}a_{23}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{44} - a_{14}a_{23}a_{42} \\
b_{14} &= a_{12}a_{24}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{34} + a_{14}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{34} - a_{13}a_{24}a_{32} - a_{14}a_{22}a_{33} \\
b_{21} &= a_{21}a_{34}a_{43} + a_{23}a_{31}a_{44} + a_{24}a_{33}a_{41} - a_{21}a_{33}a_{44} - a_{23}a_{34}a_{41} - a_{24}a_{31}a_{43} \\
b_{22} &= a_{11}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{31}a_{43} - a_{11}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{33}a_{41} \\
b_{23} &= a_{11}a_{24}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{41} - a_{11}a_{23}a_{44} - a_{13}a_{24}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{43} \\
b_{24} &= a_{11}a_{23}a_{34} + a_{13}a_{24}a_{31} + a_{14}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{24}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{34} - a_{14}a_{23}a_{31} \\
b_{31} &= a_{21}a_{32}a_{44} + a_{22}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{42} - a_{21}a_{34}a_{42} - a_{22}a_{31}a_{44} - a_{24}a_{32}a_{41} \\
b_{32} &= a_{11}a_{34}a_{42} + a_{12}a_{31}a_{44} + a_{14}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{31}a_{42} \\
b_{33} &= a_{11}a_{22}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{41} \\
b_{34} &= a_{11}a_{24}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{34} + a_{14}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{34} - a_{12}a_{24}a_{31} - a_{14}a_{21}a_{32} \\
b_{41} &= a_{21}a_{33}a_{42} + a_{22}a_{31}a_{43} + a_{23}a_{32}a_{41} - a_{21}a_{32}a_{43} - a_{22}a_{33}a_{41} - a_{23}a_{31}a_{42} \\
b_{42} &= a_{11}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{31}a_{42} - a_{11}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{32}a_{41} \\
b_{43} &= a_{11}a_{23}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{43} + a_{13}a_{22}a_{41} - a_{11}a_{22}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{42} \\
b_{44} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned} \tag{6.6.292}$$

Voici le pseudo-code d'inversion de matrice par la méthode des cofacteurs :

Algorithm 2: Inversion matricielle à l'aide de la méthode des déterminants et des cofacteurs

Input: Matrice carrée A
Output: Matrice Inverse A^{-1}

```
Function MatrixInverse(A) :
    detA ← Determinant(A)
    if detA = 0 then return "La matrice est non inversible"

    n ← nombre de lignes/colonnes dans A comme variable globale
    C ← matrice de taille n × n pour stocker l'inverse
    for j ← 1 to n do
        for i ← 1 to n do
            minorMat ← Minor(A, j, i)
            C[i][j] ← (−1)^(i+j) · Determinant(minorMat)/detA
        end
    end
    return C
Function Determinant(A) :
    if n = 1 then
        return A[1][1]
    else if n = 2 then
        return A[1][1] · A[2][2] − A[1][2] · A[2][1]
    detA ← 0
    for j ← 1 to n do
        detA ← detA + (−1)^(1+j) · A[1][j] · Determinant(Minor (A, 1, j))
    end
    return detA
Function Minor(A, row, col) :
    C ← création d'une nouvelle matrice de dimension (n − 1) × (n − 1)
    r, c ← 0
    for i ← 1 to n do
        if i = row then  jump iteration

        for j ← 1 to n do
            if j = col then  jump iteration

            if i < row then
                r ← i
            else if i >= row then
                r ← i − 1
            if j < col then
                c ← j
            else if j >= col then
                c ← j − 1
            C[r][c] ← A[i][j]
        end
    end
    return C
```

En cours de traduction de l' anglais

Pour une application pratique simple, détaillée et importante dans l'industrie (car sinon dans tout ce livre on inversera rarement de petites matrices), le lecteur pourra se référer à la section d'Informatique Théorique dans la partie concernant la régression linéaire multiple.

Indiquons également les propriétés importantes suivantes où A et B sont toutes deux des matrices carrées inversibles $M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ (la première devrait être évident, la seconde a déjà été présentée plus tôt mais non prouvée et la troisième est importante pour la preuve du facteur d'inflation de la variance que nous démontrerons dans la section d'Informatique Théorique à la page **??**) :

$$\begin{aligned}(\lambda A)^{-1} &= \lambda^{-1}A^{-1}\\ (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T\\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}\end{aligned} \qquad (6.6.293)$$

Démontrons la dernière propriété en utilisant la propriété d'associativité :

Démonstration 6.40.3.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n \qquad (6.6.294)$$

Ce qui prouve que $B^{-1}A^{-1}$ est bien l'inverse de AB où I_n (également notée $\mathbb{1}$ pour rappel) est une matrice diagonale (également carrée) de dimension n.

■ Q.E.D.

6.6.3.4.5 Déterminant de matrices bloc-diagonale ou bloc-triangulaire

Pour notre étude de l'Analyse Factorielle, nous aurons besoin de calculer le déterminant de deux types particuliers de matrices triangulaires en blocs.

Nous devrons d'abord calculer déterminant de matrices bloc-triangulaire supérieur de la forme :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbb{O} & D \end{bmatrix} \qquad (6.6.295)$$

où A et D sont des matrices carrées. Et d'autre part d'une matrice bloc-triangulaire inférieur de la forme :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (6.6.296)$$

Cependant, pour calculer le déterminant de ces matrices, nous devons d'abord montrer comment calculer le déterminant d'une matrice bloc-diagonale du type suivant :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \qquad (6.6.297)$$

où $\mathbb{1}$ est dans ce cas particulier un 1×1, c'est-à-dire $\mathbb{1} = 1$. Supposons que A est $k \times k$. Alors Γ est de dimension $(k+1)(k+1)$.

Pour la preuve, nous utiliserons la relation démontrée plus haut :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \qquad (6.6.298)$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.40.4. Donc nous avons besoin de calculer :

$$\det(\Gamma)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+1}}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{k+1}\Gamma_{i\sigma(i)} \tag{6.6.299}$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes les permutations des premiers $k+1$ nombres naturels.

Dans le cas particulier ci-dessus, nous pouvons réécrire ceci comme suit :

$$\det(\Gamma)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+1}}\varepsilon(\sigma)\underbrace{\Gamma_{(k+1)\sigma(k+1)}}_{=1}\underbrace{\prod_{i=1}^{k}\Gamma_{i\sigma(i)}}_{\prod_{i=1}^{k}A_{i\sigma(i)}}=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k}}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{k}A_{i\sigma(i)}=\det(A) \tag{6.6.300}$$

Remarque

Rappelons pour aider à comprendre ce que nous venons de faire que nous sommes généralement dans une situation similaire à la suivante ci-dessous où $a_{33}=1, a_{31}=a_{13}=a_{23}=a_{32}=0$:

$$\begin{aligned}\det(A)&=\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{4}a_{i\sigma(i)}\\&=a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}-a_{12}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{pmatrix}+a_{13}\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned} \tag{6.6.301}$$

D'après la formule ci-dessus, chaque terme est sous la forme $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ où le second indice j_1,j_2,j_3 est une permutation de $1,2,3$. Par exemple, le premier terme a $1,2,3$ comme seconds indices ; le deuxième terme a $1,3,2$; le troisième terme a $2,1,3$, etc.

Le signe de chaque terme est le signe de la permutation. Par exemple, le signe $1,2,3$ est clairement $+1$. Pour le second terme, $1,3,2$ est obtenu à partir de $1,2,3$ par une transposition $2,3\rightarrow 3,2$, donc le signe est -1, etc.

On voyons évidemment que dans le cas $a_{33}=1, a_{31}=a_{13}=a_{23}=a_{32}=0$, la relation ci-dessus se réduit à :

$$\begin{aligned}\det(A)&=\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{4}a_{i\sigma(i)}\\&=a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22}&0\\0&1\end{pmatrix}-a_{12}\det\begin{pmatrix}a_{21}&0\\0&1\end{pmatrix}+0\det\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\0&0\end{pmatrix}\\&=a_{11}a_{22}\cdot 1-a_{11}\cdot 0\cdot 0-a_{12}a_{21}\cdot 1+a_{12}\cdot 0\cdot 0+0\cdot a_{21}\cdot 0-0\cdot a_{22}\cdot 0\\&=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{aligned} \tag{6.6.302}$$

Le résultat pour le cas où $\mathbb{1}$ n'est pas 1×1 est prouvé récursivement. Par exemple, si $\mathbb{1}$ vaut

2×2, nous avons :

$$\det\begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\det(A) \tag{6.6.303}$$

et de manière analogue pour les plus grandes dimensions.

■ Q.E.D.

La preuve pour le cas où :

$$\Gamma=\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{A}\end{bmatrix} \tag{6.6.304}$$

est similaire à celle qui vient d'être fournie.

Ok maintenant que nous avons ce résultat, démontrons le déterminant suivant :

$$\det(\Gamma)=\det\begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & D\end{bmatrix}=\det(A)\det(D) \tag{6.6.305}$$

Démonstration 6.40.5. Supposons que A est de dimension $k\times k$ et D est de dimension $l\times l$, de sorte que C est de dimension $l\times k$ et $\mathbb{O}$ de dimension $k\ foisl$. Dans ce qui suit, nous désignerons par $\mathbb{1}_k$ une matrice identité $k\times k$ et par $\mathbb{O}_{lk}$ une matrice nulle de dimension $l\times k$. Notez que (dans le but de décomposer la matrice ci-dessus Γ en produit de matrices de blocs triangulaires !) :

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} A & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & \mathbb{1}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ C & \mathbb{1}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & D\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} A\mathbb{1}_k+\mathbb{O}_{kl}C & A\mathbb{O}_{kl}+\mathbb{O}_{kl}\mathbb{1}_l \\ \mathbb{O}_{lk}\mathbb{1}_k+\mathbb{1}_lC & \mathbb{O}_{lk}\mathbb{O}_{kl}+\mathbb{1}_l\mathbb{1}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & D\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} A & \mathbb{O}_{kl} \\ C & \mathbb{1}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & D\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} A\mathbb{1}_k+\mathbb{O}_{kl}\mathbb{O}_{lk} & A\mathbb{O}_{kl}+\mathbb{O}_{kl}D \\ C\mathbb{1}_k+\mathbb{1}_l\mathbb{O}_{kl} & C\mathbb{O}_{kl}+\mathbb{1}_lD\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & D\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.6.306}$$

Ainsi, de manière similaire à la preuve précédente avec les matrices de blocs diagonales et les matrices de blocs triangulaires :

$$\begin{aligned}\det(\Gamma)&=\det\begin{bmatrix} A & \mathbb{O} \\ C & D\end{bmatrix}=\det\left(\begin{bmatrix} A & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & \mathbb{1}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ C & \mathbb{1}_l\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & D\end{bmatrix}\right)\\
&=\det\left(\begin{bmatrix} A & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & \mathbb{1}_l\end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ C & \mathbb{1}_l\end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{O}_{kl} \\ \mathbb{O}_{lk} & D\end{bmatrix}\right)\\
&=\det(A)\det(\mathbb{1}_l)\det(\mathbb{1}_k)\det(\mathbb{1}_l)\det(\mathbb{1}_l)\det(D)\\
&=\det(A)\det(D)\end{aligned} \tag{6.6.307}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

6.6.3.4.6 Inverse et Déterminant d'une matrice symétrique partitionnée

Nous allons prouver ici un ensemble de relations dont nous aurons (encore une fois...) besoin pour notre étude de l'Analyse Factorielle dans la section Statistiques.

Divisons une matrice A symétrique $n \times n$ A en quatre blocs :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{6.6.308}$$

La matrice inverse $B = A^{-1}$ peut également être divisée en quatre blocs :

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \tag{6.6.309}$$

Ici, nous supposons que les dimensionnalités de ces blocs sont :

- A_{11} et B_{11} sont de dimensions $p \times p$
- A_{22} et B_{22} sont de dimensions $q \times q$
- $A_{12} = A_{21}^T$ et $B_{12} = B_{21}^T$ sont de dimensions $p \times q$

avec $p + q = n$.

Alors ce que nous voulons prouver en premier (et après nous pourrons nous concentrer sur le problème du déterminant inverse) c'est que les composantes de l'inverse d'une matrice symétrique partitionnée sont données par :

$$\begin{aligned} B_{11} &= \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ B_{22} &= \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ B_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} \\ B_{12} &= -A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{6.6.310}$$

En cours de traduction de l'anglais

c'est-à-dire (c'est sous cette forme que nous retrouvons cela dans la plupart des livres) :

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} & \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix} \tag{6.6.311}$$

Remarque

Le terme $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ semble être nommé le "complément de Schur" de A_{22} en A. Idem pour le terme $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ qui semble aussi s'appeler "complément de Schur" de A_{11} dans A.

Démonstration 6.40.6. Nous commençons avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_n = AA^{-1} = AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_q \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.6.312}$$

Égalisons chacun des quatre blocs pour obtenir :

$$\begin{array}{lll} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\mathbb{1}_p & \text{alors} & B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} \\ A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\mathbb{O} & \text{alors} & B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\mathbb{O} & \text{alors} & B_{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} \\ A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\mathbb{1}_q & \text{alors} & B_{22}=A_{22}^{-1}-A_{22}^{-1}A_{21}B_{12} \end{array} \tag{6.6.313}$$

Nous injectons B_{21} dans B_{11} pour obtenir :

$$B_{11}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} \tag{6.6.314}$$

Nous résolvons pour B_{11} pour obtenir :

$$B_{11}=\left(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} \tag{6.6.315}$$

En appliquant l'identité matricielle de Woodburry (voir ci-dessous page 2007) donnée pour rappel par :

$$(A+UBV^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(B^{-1}+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1} \tag{6.6.316}$$

à cette expression, nous obtenons aussi l'autre expression du théorème, c'est-à-dire :

$$A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \tag{6.6.317}$$

De même nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} B_{22}&=\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \\ B_{21}&=-A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} \\ B_{12}&=-A_{11}^{-1}A_{12}\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}^{-1}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{6.6.318}$$

■ Q.E.D.

Voyons maintenant comment calculer le déterminant d'une matrice symétrique partitionnée, donné par :

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\det(A_{22})\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})=\det(A_{11})\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \tag{6.6.319}$$

Démonstration 6.40.7. Considérons d'abord une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix} \tag{6.6.320}$$

où A,B,C,D ont une dimension $n\times n$. Nous commençons en considérant la multiplication à gauche par une matrice telle que :

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbb{1} & A^{-1}B \\ C & D\end{bmatrix} \tag{6.6.321}$$

Considérons maintenant la multiplication à gauche suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ -C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1} & A^{-1}B \\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbb{1} & A^{-1}B \\ \mathbb{O} & D-CA^{-1}B\end{bmatrix} \tag{6.6.322}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc (en partant du début) en une seule ligne, cela signifie que nous avons :

$$\left(\begin{bmatrix}\mathbb{1} & \mathbb{0}\\ -C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{-1} & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & \mathbb{1}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{1} & A^{-1}B\\ \mathbb{0} & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}\tag{6.6.323}$$

Cela signifie donc qu'après réorganisation :

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}\mathbb{1} & \mathbb{0}\\ -C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{-1} & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & \mathbb{1}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{1} & A^{-1}B\\ \mathbb{0} & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}\tag{6.6.324}$$

Et il est donc assez immédiat que :

$$\left(\begin{bmatrix}\mathbb{1} & \mathbb{0}\\ -C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{-1} & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & \mathbb{1}\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}A & \mathbb{0}\\ C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\tag{6.6.325}$$

Tel qu finalement :

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & \mathbb{0}\\ C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{1} & A^{-1}B\\ \mathbb{0} & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}\tag{6.6.326}$$

De même nous obtenons :

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{1} & B\\ \mathbb{0} & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-BD^{-1} & \mathbb{0}\\ D^{-1}C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\tag{6.6.327}$$

Pour résumer :

$$\boxed{\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & \mathbb{0}\\ C & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{1} & A^{-1}B\\ \mathbb{0} & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{1} & B\\ \mathbb{0} & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-BD^{-1} & \mathbb{0}\\ D^{-1}C & \mathbb{1}\end{bmatrix}}\tag{6.6.328}$$

C'est un résultat qu'il nous fallait avant de nous attaquer au coeur du sujet qui nous intéresse !

En effet, d'après le résultat ci-dessus, cela signifie que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & \mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{1} & A_{11}^{-1}A_{12}\\ \mathbb{0} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathbb{1} & A_{12}\\ \mathbb{0} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & \mathbb{0}\\ A_{22}^{-1}A_{21} & \mathbb{1}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.6.329}$$

Comme vu plus haut (page 1944), nous avons :

$$\boxed{\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)}\tag{6.6.330}$$

et (page 1960) :

$$\det\begin{bmatrix}B & \mathbb{0}\\ X & C\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}B & X\\ \mathbb{0} & C\end{bmatrix}=\det(B)\det(C)\tag{6.6.331}$$

D'où l'égalité :

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\det(A_{22})\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})=\det(A_{11})\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\tag{6.6.332}$$

est démontrée

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

6.6.4 Changements de bases (référentiels)

Une base pour un espace vectoriel de dimension n est une séquence de n vecteurs $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ avec la propriété que chaque vecteur de l'espace peut être exprimée uniquement sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base (voir section Calcul Vectoriel page ??). Les représentations matricielles des opérateurs sont également déterminées par la base choisie ! Puisqu'il est souvent souhaitable de travailler avec plus d'une base pour un espace vectoriel, il est d'une importance fondamentale en algèbre linéaire de pouvoir transformer facilement des représentations coordonnées de vecteurs et d'opérateurs pris par rapport à une base en leurs représentations équivalentes par rapport à une autre base. Une telle transformation est nommée "changement de base".

Supposons maintenant que nous passions d'un repère $\mathcal{E}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ d'un espace V^n vers un autre espace $\mathcal{F}=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n)$ de ce même espace partageant la même origine O. Ainsi en deux dimension :

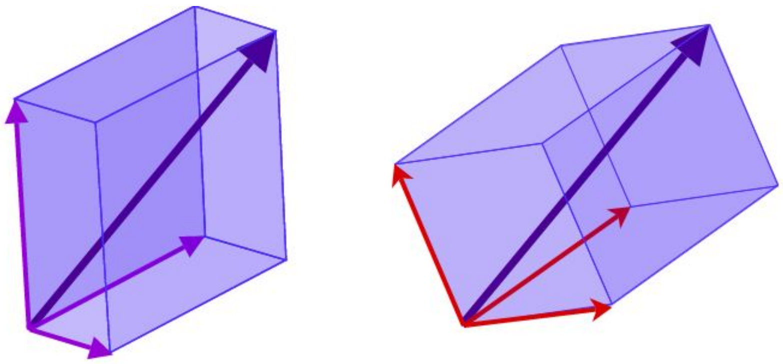


FIG. 6.135 – Un vecteur représenté dans deux bases différentes (flèches violettes et rouges) (source : Wikipedia)

En cours de tra ... : anglais

Décomposons le $\vec{f}_i$ dans la base $\mathcal{E}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_1 &= p_{11}\vec{e}_1+p_{21}\vec{e}_2+\ldots+p_{n1}\vec{e}_n\\
\vec{f}_2 &= p_{12}\vec{e}_1+p_{22}\vec{e}_2+\ldots+p_{n2}\vec{e}_n\\
\ldots\\
\vec{f}_n &= p_{1n}\vec{e}_1+p_{2n}\vec{e}_2+\ldots+p_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}
\qquad (6.6.333)
$$

Définition (#6.6.258) : Nous nommons "matrice de transition" la matrice (application linéaire) qui permet de passer de $\mathcal{E}\mapsto\mathcal{F}$ donnée par :

$$
P=\underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & \ddots & \vdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}}_{\vec{f}_1\quad \vec{f}_1\quad \cdots\quad \vec{f}_n}
\qquad (6.6.334)
$$

Théorème 6.41. Considérons maintenant le vecteur donné par :

$$
\vec{v}=x^i\vec{e}_i \qquad (6.6.335)
$$

Alors nous nous proposons de démontrer que les composantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{F}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = PY \tag{6.6.336}$$

soit explicitement :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = P^{-1}X \tag{6.6.337}$$

Remarque

La matrice P est inversible (non singulière), car ses colonnes sont linéairement indépendantes (ce sont les vecteurs $\vec{f}_i$ décomposés dans la base $\mathcal{E}$ et les $\vec{f}_i$ sont linéairement indépendants car ils forment une base !).

Démonstration 6.41.1. Prenons pour simplifier le cas $n = 2$ (la démonstration étant assez facilement généralisable) avec $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{6.6.338}$$

Nous avons donc $\vec{v} = x^i\vec{e}_i$ et nous cherchons à exprimer $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{F}$ tel que $\vec{v} = y^i\vec{f}_i$. Nous allons donc chercher l'application linéaire qui relie ces deux relations telles que :

$$x^i\vec{e}_i = y^i\vec{f}_i \tag{6.6.339}$$

Soit écrit de manière explicite :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 = y_1(p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2) + y_2(p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2) \\ &= p_{11}y_1\vec{e}_1 + p_{21}y_1\vec{e}_2 + p_{12}y_2\vec{e}_1 + p_{22}y_2\vec{e}_2 = (p_{11}y_1 + p_{12}y_2)\vec{e}_1 + (p_{12}\vec{y}_1 + p_{22}y_2)\vec{e}_2 \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{6.6.340}$$

d'où :

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{11}y_1 + p_{12}y_2 \\ x_2 &= p_{21}y_1 + p_{22}y_2 \end{aligned} \tag{6.6.341}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{6.6.342}$$

Donc P (si elle existe !) est bien la matrice qui permet d'exprimer les composantes d'un vecteur d'une base en celles d'une autre base telle qu'en écriture vectorielle nous ayons :

$$\vec{x} = P\vec{y} \tag{6.6.343}$$

En cours de traduction de Opera Magistris

■ Q.E.D.

Théorème 6.42. Considérons maintenant une application linéaire $g : V^n \mapsto V^n$. Soit A sa matrice dans la base $\mathcal{E}$, et B sa matrice dans la base $\mathcal{F}$ (de même dimension). Alors nous pourrions avoir :

$$\boxed{B = P^{-1}AP} \tag{6.6.344}$$

ce qui revient aussi à écrire :

$$BP = AP \tag{6.6.345}$$

ou encore :

$$A = PBP^{-1} \tag{6.6.346}$$

S'il existe une matrice P satisfaisant ces relations, nous disons que A et B sont des "matrices semblables".

Démonstration 6.42.1. Reprenons le fait que plus haut nous ayons démontré qu'il est éventuellement possible de construire une matrice de passage P à partir du fait que :

$$\vec{v} = x^i \vec{e}_i = y^i \vec{f}_i \tag{6.6.347}$$

et posons :

$$g(\vec{v}) = x'^i \vec{e}_i = y'^i \vec{f}_i \tag{6.6.348}$$

Nous avons donc une fonction qui nous amène à écrire :

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \vec{y}' = B\vec{y} \tag{6.6.349}$$

D'autre part, nous avons (ce que nous avons démontré tout à l'heure) :

$$\vec{x} = P\vec{y} \qquad \vec{x}' = P\vec{y} \tag{6.6.350}$$

Dès lors :

$$\vec{y}' = P^{-1}\vec{x}' = P^{-1}(A\vec{x}) = P^{-1}(A(P\vec{y})) = (P^{-1}AP)\vec{y} = B\vec{y} \tag{6.6.351}$$

d'où :

$$B = P^{-1}AP \tag{6.6.352}$$

et comme nous l'avons vu dans notre étude du déterminant, les déterminants de A, B sont égaux et donc invariants. Nous reviendrons plus tard sur une formulation similaire lors de notre étude du théorème spectral plus bas.

■ Q.E.D.

Au niveau du vocabulaire, nous disons lorsque nous somme en présence d'une relation matricielle ayant une telle structure de dire que : A est "conjuguée" à la matrice B.

En cours de traduction de l'anglais

6.6.5 Valeurs et Vecteurs propres

Définition (#6.6.259) : Une "valeur propre" est par définition (nous retrouverons cette définition dans l'introduction à l'algèbre quantique dans le cadre de la section de Physique Quantique Ondulatoire) une valeur λ appartenant à un corps $\mathbb{K}$ tel que soit une matrice carrée $A \in M_{mm}(\mathbb{K})$ nous ayons :

$$\exists \vec{X} \in M_{m1}(\mathbb{K}) \quad \vec{X} \neq \vec{0} \text{ et } A\vec{X} = \lambda\vec{X} \tag{6.6.353}$$

et réciproquement qu'un vecteur $\vec{X} \in M_{m1}(\mathbb{K})$ est un "vecteur propre" si et seulement si :

$$\vec{X} \neq \vec{0}, \exists \lambda \in \mathbb{K}, A\vec{X} = \lambda\vec{X} \tag{6.6.354}$$

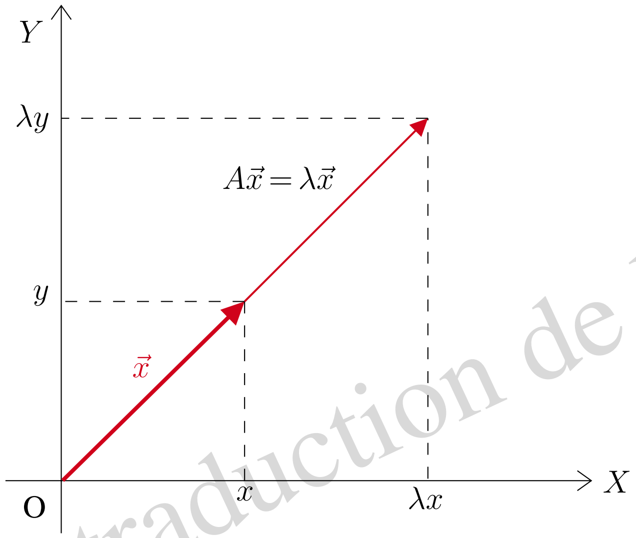


FIG. 6.136 – Interprétation géométrique du vecteur propre et de la valeur propre dans $\mathbb{R}^2$

En cours de traduction de l' anglais

L'avantage majeur de ces concepts sera la possibilité d'étudier une application linéaire, ou tout autre objet lié à une représentation matricielle, dans une représentation simple grâce à un changement de base sur laquelle la restriction de A est une simple homothétie (typiquement la résolution de systèmes d'équations différentielles simples).

Remarque

Cette définition peut être généralisée à l'analyse fonctionnelle (donc elle ne s'applique pas seulement à l'algèbre matricielle) aussi en définissant le "spectre d'un endomorphisme" comme l'ensemble :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \exists x \in E \backslash \{0\} : f(x) = \lambda x\} \tag{6.6.355}$$

En d'autres termes : lorsqu'une transformation (application d'une matrice) agit sur un vecteur, elle modifie la direction de ce vecteur excepté pour certaines matrices particulières qui ont des valeurs propres !

Ainsi, l'ensemble des valeurs propres d'une matrice $A \in M_{mm}(\mathbb{K})$ est appelé "spectre de A" et satisfait au système homogène nommé "équation matrice-valeurs propres" :

$$\boxed{(A - \lambda I_n)\vec{X} = \vec{0}} \tag{6.6.356}$$

ou (peu importe cela revient au même !) :

$$(\lambda I_n - A)\vec{X} = \vec{0} \tag{6.6.357}$$

où I_n (aussi noté parfois par le symbole : $\mathbb{1}$) est pour rappel une matrice diagonale unitaire (et donc aussi carrée) de dimension n. Ce système nous le savons (démontré plus haut) admet des solutions non triviales, donc $\vec{X} \neq \vec{0}$ ou $(\lambda I_n - A) \neq \vec{0}$, si et seulement si (nous verrons de nombreux exemples en physique) :

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6.6.358}$$

soit que la matrice $A - \lambda I_n$ est non inversible (singulière).

Le déterminant $\det(A - \lambda I_n)$ est donc un polynôme en λ de degré n et peut donc avoir aux maximum n solutions/valeurs propres comme nous l'avons démontré lors de notre étude des polynômes (voir section Calcul Algébrique page 1351) et est appelé "polynôme caractéristique" de A et l'équation $\det(A - \lambda I_n)$ est appelée "équation caractéristique de A" ou "équations aux valeurs propres".

Pour la petite parenthèse, il est sympathique de remarquer que nous avons toujours dans le développement de $\det(A - \lambda I_n)$ la trace de la matrice $\text{tr}(A)$ et le déterminant $\det(A)$ qui apparaissent. Voyons deux exemples de cela :

Exemples :

E1. Commençons avec le cas $n = 2$:

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{tr(A)}} \lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}_{\text{det(A)}} \tag{6.6.359}$$

$\det(A)$ Ainsi, pour une matrice carré de dimension 2, les valeurs propres sont (simple résolution de l'équation du deuxième degré) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{2} = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{(\text{tr}(A)^2 + 4\det(A)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\text{tr}(A)^2 + 4\det(A)}}{2} \end{aligned} \tag{6.6.360}$$

E2. Pour une matrice de dimension $n = 3$, nous avons :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda^3 + \underbrace{(a_{11} + a_{22} + a_{33})}_{\text{tr(A)}} \lambda^2 \\ &- (a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22} - a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21} - a_{31}a_{13})\lambda \\ &+ \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{31}a_{32}a_{12} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}}_{\det(A)} \end{aligned} \tag{6.6.361}$$

et là... la solution finale (les racines) est beaucoup moins simple dans le cas général...

ction de l'anglais

Remarquons aussi au passage (nous généraliserons le résultat qui en découle lors de notre étude du théorème spectral) que puisque multiplier le système homogène :

$$(\lambda I_n - A)\vec{X} = \vec{0} \tag{6.6.362}$$

par -1 des deux côtés de l'égalité ne change rien au problème, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
&\det(A-\lambda I_2)=0 \Rightarrow\\
&\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21})\\
&= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{\text{tr}(A)}\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0
\end{aligned} \tag{6.6.363}$$

Puisque nous savons que les valeurs propres sont solutions de chacun des polynômes ci-dessus, nous avons alors :

$$\lambda^2 - \underbrace{(a_{11} - a_{22})}_{\text{tr}(A)}\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0 \tag{6.6.364}$$

Soit par correspondace terme à terme il vient le résultat important en Statistique (particulièrement dans les techniques numériques) et que nous démontrerons donc de façon plus générale plus tard avec le théorème spectral :

$$\boxed{\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i} \tag{6.6.365}$$

Si nous regardons $(\lambda I_n - A)$ comme une application linéaire f, puisque ce sont les solutions non triviales qui nous intéressent, nous pouvons alors dire que les valeurs propres sont les éléments λ tels que :

$$\ker(f) = \ker(\lambda I_n - A) \neq \{\vec{0}\} \tag{6.6.366}$$

et que le Kernel (noyau) constitue "l'espace propre" de A de la valeur propre λ dont les éléments non nuls sont les vecteurs propres ! Ceci est noté dans certains ouvrages par :

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda Id) = \{x \in E; f(x) = \lambda x\} \tag{6.6.367}$$

Ah et en passant... l'ensemble de tous les vecteurs propres est appelé le "spectre" de l'application f.

En mathématiques, le concept de vecteur propre est une notion algébrique qui s'applique donc à une application linéaire d'un espace dans lui-même. Il correspond à l'étude des axes privilégiés, selon lesquels l'application se comporte comme une dilatation, multipliant les vecteurs par une même constante. Ce rapport de dilatation/homothétie est donc la "valeur propre", les vecteurs auxquels il s'applique "vecteurs propres", réunis en un "espace propre".

Une autre manière de voir la chose :

- Un vecteur est dit "vecteur propre" par une application linéaire s'il est non nul et si l'application ne fait que modifier sa taille sans changer sa direction.

En cours de traduction de l'anglais

- Une "valeur propre" associée à un "vecteur propre" est le facteur de modification de taille, c'est à dire le nombre par lequel il faut multiplier le vecteur pour obtenir son image. Ce facteur peut être négatif (renversement du sens du vecteur) ou nul (vecteur transformé en un vecteur de longueur nulle).

  On peut donc dire que la valeur propre λ "scalarise" l'application A pour le vecteur propre $\vec{X}$.

- Un "espace propre" associé à une "valeur propre" est l'ensemble des vecteurs propres qui ont une même valeur propre et le vecteur nul. Ils subissent tous la multiplication par le même facteur.

Remarque

En mécanique, nous étudions les fréquences propres et les modes propres des systèmes oscillants (voir section Mécanique Ondulatoire page ??). En Analyse Fonctionnelle, une fonction propre est un vecteur propre pour un opérateur linéaire, c'est-à-dire une application linéaire agissant sur un espace de fonctions (voir section Analyse Fonctionnelle page 2144). En géométrie ou en optique, nous parlons de directions propres pour rendre compte de la courbure des surfaces ((voir section Géométries Non-Euclidiennes page 2643). En théorie des graphes, une valeur propre est simplement une valeur propre de la matrice d'adjacence du graphe (voir section Théorie des Graphes page 2997).

Donc comme le déterminant de $\det(A-\lambda I_n)$ est un polynôme sur λ alors les λ_i sont aussi des racines du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I-n)&=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)\\&=(-1)(\lambda-\lambda_1)(-1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(-1)(\lambda-\lambda_n)\\&=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)\end{aligned} \tag{6.6.368}$$

Dès lors :

$$\boxed{\det(A-\lambda I_n)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)} \tag{6.6.369}$$

C'est une relation parfois utilisée dans certains modèles statistiques (par exemple la MANOVA !).

Avant de clore cette petite introduction sur les valeurs et vecteurs propres (nous y reviendrons plus loin), indiquons que puisqu'un vecteur propre doit satisfaire le système homogène :

$$(A-\lambda I_n)\vec{X}=\vec{0} \tag{6.6.370}$$

Rien ne nous empêche alors de multiplier le vecteur propre par une constante k qui le normalise à l'unité (technique souvent utilisée en statistique et méthodes numériques pour améliorer la précision flottante des algorithmes) puisque :

$$(A-\lambda I_n)k\vec{X}=(A-\lambda I_n)\vec{U}=k\cdot\vec{0}=\vec{0} \tag{6.6.371}$$

En cours de traduction anglais

Ainsi dans la pratique est d'usage si le vecteur propre s'explicite par exemple par :

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{6.6.372}$$

De le normaliser à l'unité en écrivant :

$$\vec{U}=\frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{pmatrix} \tag{6.6.373}$$

Pour la section de Physique Quantique Ondulatoire et plus particulièrement pour l'étude du moment cinétique et du spin, nous devons prouver que étant donné un opérateur agissant sur un vecteur propre, alors si nous élevons l'opérateur au carré, cela entraîne l'élévation au carré de la valeur propre.

Démonstration 6.42.2. Soit :

$$Ax=\lambda x \tag{6.6.374}$$

Dès lors :

$$A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)=\lambda^2 x \tag{6.6.375}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

6.6.5.1 Matrices de rotations et Valeurs propres

Maintenant que nous avons vu ce qu'était une valeur et un vecteur propre, revenons sur un type particulier de matrices orthogonales qui nous seront particulièrement utiles dans notre étude des quaternions (voir section Nombres page 259), des groupes et symétries (voir section Algèbre Ensembliste page 1398) et de la physique des particules (voir section Physique des Particules page ??).

Nous notons, selon ce qui a été vu dans la section d'Algèbre Ensembliste, $\text{O}(n)$ l'ensemble des matrices $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ orthogonales, c'est-à-dire vérifiant :

$$A^TA=\mathbb{1} \tag{6.6.376}$$

Que nous notons aussi parfois pour rappel de la maniere suivante :

$$A^TA=I \tag{6.6.377}$$

Les colonnes et les lignes d'une matrice orthogonale forment des bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire habituel.

Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1 (la rotation conserves angles et volumes), effectivement $A^T A = I$ entraîne :

$$\det(A^T)\det(A) = \det(A^T A) = \det(I) = 1 \tag{6.6.378}$$

Une matrice de rotation avec un déterminant $+1$ est une "rotation propre", et une avec un déterminant négatif -1 est une "rotation impropre", c'est-à-dire une réflexion combinée à une rotation propre.

✍**Exemple :**

Calculons maintenant explicitement le déterminant d'une matrice de rotation 2×2 (voir section Nombres page256) et 3×3 (voir section Géométrie Euclidienne page 2629) comme il est demandé par de nombreux étudiants sur divers forums Internet.

Nous considérons donc d'abord la matrice de rotation 2×2 et en utilisant la relation du déterminant prouvée précédemment, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\\ &= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - (-\sin(\alpha)\sin(\alpha)) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1\end{aligned} \tag{6.6.379}$$

Et pour une matrice de rotation choisie au hasard parmi les trois matrices de rotation 3×3 (voir section Géométrie Euclidienne page 2629), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\det(R_Z(\phi)) &= \left|\begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|\\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\\ &= \cos(\phi)\cos(\phi)\cdot 1 - \cos(\phi)\cdot 0\cdot 0 - \sin(\phi)(-\sin(\phi))\cdot 1 + \sin(\phi)\cdot 0\cdot 0\\ &+ 1\cdot(-\sin(\phi))\cdot 0 - 0\cdot 0\cos(\phi)\cdot 0\\ &= \cos(\phi)\cos(\phi) - \sin(\phi)(-\sin(\phi)) = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1\end{aligned} \tag{6.6.380}$$

Nous notons $\text{SO}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 (pour plus de détails voir la section d'Algèbre Ensembliste page page 1398). Montrons en trois points que si $A \in \text{SO}(3,\mathbb{R})$ alors A est la matrice d'une rotation par rapport à un axe passant par l'origine.

1. Toute valeur propre d'une matrice de rotation A (réelle ou complexe) est de module 1. En d'autres termes, la rotation conserve la norme :

   En effet, si λ est une valeur propre de vecteur propre $\vec{X}$, nous avons :

$$|\lambda|^2\|\vec{X}\|^2 = \|A\vec{X}\|^2 = \langle A\vec{X}|A\vec{X}\rangle = \langle\vec{X}|A^T A\vec{X}\rangle = \langle\vec{X}|\vec{X}\rangle = \|\vec{X}\|^2 \tag{6.6.381}$$

   ou en notant le produit scalaire avec la notation habituelle du présent livre :

$$|\lambda|^2\|\vec{X}\|^2 = \|A\vec{X}\|^2 = A\vec{X}\circ A\vec{X} = \vec{X}\circ A^T A\vec{X} = \vec{X}\circ\vec{X} = \|\vec{X}\|^2 \tag{6.6.382}$$

   donc $|\lambda| = 1$

2. Il existe une droite dans l'espace qui sert d'axe de rotation et tout vecteur sur cette droite ne subit aucune rotation.

   Notons $\vec{X}$ un vecteur propre normé de valeur propre 1 (c.à.d un vecteur tel que $A\vec{X}=\vec{X}$). Comme le lecteur l'aura peut-être compris (lire jusqu'au bout !), la droite engendrée par $\vec{x}$ que l'on notera $\langle\vec{X}\rangle$ constitue notre axe de rotation.

   En effet, tout vecteur sur $\langle\vec{X}\rangle$ est envoyé sur lui-même par l'application A. Dans ce cas l'espace orthogonal noté $\langle\vec{X}\rangle^{\perp}$ qui est de dimension deux est le plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

3. Tout vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation reste, après une rotation, perpendiculaire à cet axe. En d'autres termes, $\langle\vec{X}\rangle$ est invariant par application de A.

   En effet, si $\vec{w}\in\langle\vec{x}\rangle$ alors, $w=A^TAw=A^Tw$ et pour tout $\vec{y}\in\langle\vec{X}\rangle^{\perp}$:

$$A\vec{y}\circ\vec{w}=\vec{y}\circ A^T\vec{w}=\vec{y}\circ\vec{w}=0 \qquad (6.6.383)$$

   c'est-à-dire $A\vec{y}\langle\vec{X}\rangle^{\perp}$. Donc $\langle\vec{X}\rangle^{\perp}$ est invariant par A.

   En fin de compte, la restriction de A à l'espace $\langle\vec{X}\rangle^{\perp}$ est une rotation !

En ... l'anglais

✍**Exemple :**

Soit $e^{\mathrm{i}\alpha}$ (voir la section sur les Nombres où la rotation par les complexes est démontrée) une valeur propre (dont le module est de 1 comme nous l'avons vu lors de notre étude des nombres complexes) de A restreinte à $\langle\vec{X}\rangle^{\perp}$.

Notons $\vec{w}=\vec{u}+\mathrm{i}\vec{v}$ un vecteur propre avec $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ de sorte que :

$$A\vec{w}=e^{\mathrm{i}\alpha}\vec{w} \qquad (6.6.384)$$

avec (comme nous l'avons déjà montré dans notre étude des nombres complexes) :

$$A=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \qquad (6.6.385)$$

où nous savons de par notre étude des nombres complexes, que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ forment une base orthogonale (pas nécessairement normée !) de $\langle\vec{X}\rangle^{\perp}$.

Remarque

Il est par ailleurs aisé de vérifier que cette matrice est orthogonale (si ce n'est pas le cas contactez-nous et ce sera détaillé !).

6.6.6 Théorème Spectral

Voyons maintenant un théorème très important relativement aux valeurs et vecteurs propres qui se nomme le "théorème spectral" qui nous sera très utile à nouveau en physique et en statistiques ainsi que dans les sections de Méthodes Numériques et Génie Industriel.

Pour résumer, les mathématiciens disent dans leur langage que le théorème spectral permet d'affirmer la diagonalisabilité d'endomorphismes[26] (de matrices) et justifie également la décomposition en valeurs propres (appelée aussi "décomposition en valeurs singulières" abrégée S.V.D.) que nous verrons plus loin lors de notre présentation des quelques techniques de décomposition de matrices.

Remarque

La décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) est cependant très générale, dans le sens où elle s'applique à toute matrice rectangulaire . La décomposition en valeurs propres, en revanche, ne fonctionne que pour certaines matrices carrées.

Pour simplifier la démonstration, nous ne traitons ici que les matrices réelles (avec les composantes dans $\mathbb{R}$) en évitant un maximum le langage des mathématiciens.

Nous noterons dans un premier temps $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Nous confondrons la matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ avec l'application linéaire induite sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ par :

$$\vec{v} \mapsto M\vec{v} \tag{6.6.386}$$

avec $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Rappel : Nous avons vu plus haut lors de l'étude des changements de base que si $(\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors la matrice de l'application linéaire M dans la base $(\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n)$ est :

$$S^{-1}MS \tag{6.6.387}$$

où S est la matrice formée par les vecteurs colonnes $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n$.

D'abord, nous vérifions simplement que si A est une matrice symétrique alors (c'est trivial mais cela peut se vérifier avec un exemple à dimension 2 très rapidement) :

$$(A\vec{u})\circ\vec{v} = \vec{u}\circ A^T\vec{v} = \vec{u}\circ A\vec{v} \tag{6.6.388}$$

Nous nous proposons maintenant d'étudier les propriétés suivantes d'une matrice M symétrique :

P1. Toutes les valeurs propres de M sont réelles.

[26] Ce qu'ils nomment aussi une "réduction d'endomorphisme"

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.42.3. Soit :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{6.6.389}$$

un vecteur propre a priori complexe de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons :

$$\bar{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} \tag{6.6.390}$$

le vecteur conjugué de $\vec{z}$. Nous avons alors :

$$\bar{\vec{z}}^T M \vec{z} = \bar{\vec{z}}^T \lambda \vec{z} = \lambda \|\vec{z}\|^2 \tag{6.6.391}$$

D'autre part vu que nous avons $M = \overline{M}$, nous avons :

$$\bar{\vec{z}}^T M \vec{z} = \bar{\vec{z}}^T \overline{M} \bar{\vec{z}} = \overline{\vec{z}^T M \vec{z}} = \overline{(M\vec{z})^T} \vec{z} = \overline{\lambda \vec{z}^T} \vec{z} = \bar{\lambda} \|\vec{z}\|^2 \tag{6.6.392}$$

Ëtant donné que $\vec{z} \neq \vec{0}$, nous avons $\lambda = \vec{\lambda}$ et dès lors, $\lambda \in \mathbb{R}$.

■ Q.E.D.

P2. Deux espaces propres de M relatifs à des valeurs propres différentes sont orthogonaux (en d'autres termes, les vecteurs propres sont indépendants).

Démonstration 6.42.4. Soit λ, μ deux valeurs propres distinctes de vecteurs propres correspondants $\vec{u}, \vec{v}$. Nous avons (ne pas oublier que M est symétrique !) :

$$\lambda(\vec{u} \circ \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \circ \vec{v} = (M\vec{u}) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ (M\vec{v}) = \vec{u} \circ (\mu \vec{v}) = \mu(\vec{u} \circ \vec{v}) \tag{6.6.393}$$

ainsi :

$$(\lambda - \mu) \cdot (\vec{u} \circ \vec{v}) = 0 \tag{6.6.394}$$

ce qui entraine :

$$(\vec{u} \circ \vec{v}) = 0 \tag{6.6.395}$$

■ Q.E.D.

Avant d'aller plus loin, il faut aussi prouver que si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et V et un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ invariant par rapport à M (c'est-à-dire qui satisfait pour tout $\vec{v} \in V : M\vec{v} \in V$) alors nous avons les propriétés suivantes :

P3. L'orthogonal de V noté bien évidemment $V^{\perp}$ (obtenu en appliquant la méthode de Gram-Schmidt vue dans la section Calcul Vectoriel à la page 2033) est aussi invariant à travers M.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.42.5. Soit $\vec{v}\in V$ et $\vec{w}\in V^{\perp}$ alors :

$$(M\vec{w})\circ\vec{v}=\vec{w}\circ\left(\underbrace{M\vec{v}}_{\in V}\right)=0 \qquad (6.6.396)$$

cela montre bien que $M\vec{w}\in V^{\perp}$.

■ Q.E.D.

P4. Si $(\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_k)$ est une base orthonormale de $\vec{V}^{\perp}$ alors la restriction de M à $V^{\perp}$ dans la base $(\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_k)$ est aussi symétrique.

Démonstration 6.42.6. Notons $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ la matrice de la restriction M de $V^{\perp}$ dans la base $(\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_k)$. Nous avons par définition pour tout $j=1\ldots k$ (car le vecteur résultant d'une application linéaire telle que M peut s'exprimer dans sa base) :

$$M\vec{w}_j=\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\vec{w}_i \qquad (6.6.397)$$

Ou :

$$(M\vec{w}_j)\circ\vec{w}_m=\left(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\vec{w}_i\right)\circ\vec{w}_m=\sum_{i=1}^{k}a_{ij}(\vec{w}_i\circ\vec{w}_m)=a_{mj} \qquad (6.6.398)$$

et comme :

$$\vec{w}_i\circ\vec{w}_m=0 \qquad (6.6.399)$$

si $i\neq m$ dans la base orthonormale.

D'un autre côté :

$$(M\vec{w}_j)\circ\vec{w}_m=\vec{w}_j\circ(M\vec{w}_m)=\vec{w}_j\circ\left(\sum_{i=1}^{k}a_{im}\vec{w}_i\right)=\sum_{i=1}^{k}a_{im}(\vec{w}_j\circ\vec{w}_i)=a_{jm} \qquad (6.6.400)$$

Dès lors :

$$a_{mj}=a_{jm} \qquad (6.6.401)$$

Cela montre que :

$$A=A^T \qquad (6.6.402)$$

■ Q.E.D.

Théorème 6.43. Nous allons maintenant pouvoir montrer que toute matrice symétrique $M\in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. C'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible S telle que le résultat du calcul :

$$S^{-1}MS \qquad (6.6.403)$$

donne une matrice diagonale !

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

En fait nous verrons, pour être plus précis, qu'il existe une matrice orthogonale S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale.

Rappel : S dite "orthogonale" signifie que $SS^T = I$ (où I est la matrice identité) ce qui équivaut à dire que les colonnes de S forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration 6.43.1. Nous prouvons l'affirmation par récurrence sur n. Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer. Supposons que l'affirmation soit vérifiée pour $k \leq n$ et prouvons là pour $k = n+1$. Soit $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ donc une matrice symétrique et λ une valeur propre de M.

Nous vérifions facilement que l'espace propre :

$$W = \ker(\lambda I_{n+1} - M) \tag{6.6.404}$$

est invariant par M (il suffit de prendre n'importe quelle application numérique) et que par la démonstration vue plus haut que $W^{\perp}$ est aussi invariant par M. De plus, nous savons (voir section Calcul Vectoriel page 1792), que $\mathbb{R}^{n+1}$ se décompose en somme directe :

$$\mathbb{R}^{n+1} = W \oplus W^{\perp} \tag{6.6.405}$$

Si :

$$\dim(W^{\perp}) = 0 \tag{6.6.406}$$

alors :

$$\mathbb{R}^{n+1} = W \tag{6.6.407}$$

et il suffit de prendre une base orthonormale de W pour diagonaliser M. En effet, si $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n+1})$ est une telle base, la matrice S formée par les vecteurs colonnes $\vec{w}_j$ ($j = 1 \ldots n+1$) est orthogonale et vérifie :

$$S^{-1}MS = S^{-1}\lambda S = \lambda I_{n+1} \tag{6.6.408}$$

et $S^{-1}MS$ est bien diagonale.

Supposons maintenant donc que $\dim(W^{\perp}) > 0$ et soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$ avec une base orthonormale de $W^{\perp}$. Notons A la matrice de la restriction de M à $W^{\perp}$ dans la base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$. A est aussi symétrique (selon la démonstration d'une des propriétés précédentes).

Par hypothèse de récurrence il existe une matrice orthogonale $H \in M_m(\mathbb{R})$ telle que $H^{-1}AH$ soit diagonale.

Notons par $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n+1-m})$ une base orthonormale de W et G la matrice formée par les vecteurs colonnes $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n+1-m}, \vec{u}_1, \ldots \vec{u}_m$. Alors, nous pouvons écrire que :

$$G^{-1}MG = \begin{bmatrix} \lambda I_{n+1-m} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \tag{6.6.409}$$

et G est aussi orthogonale par construction.

En cours de traduction de l'anglais

Considérons la matrice par blocs (matrice composée de matrices) suivante :

$$L=\begin{bmatrix} I_{n+1-m} & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}\in M_{n+1}(\mathbb{R}) \tag{6.6.410}$$

et posons :

$$S=GL \tag{6.6.411}$$

Il est évident que S est orthogonale car G et L le sont. Effectivement, si :

$$GG^T=I \qquad \text{et} \qquad LL^T=I \tag{6.6.412}$$

alors (ne pas oublier que la multiplication matricielle est associative ! ! !) :

$$(GL)(GL)^T=(GL)(L^TG^T)=G(LL^T)G^T=GIG^T=GG^T=I \tag{6.6.413}$$

De plus S vérifie :

$$\begin{aligned} S^{-1}MS&=L^{-1}(G^{-1}MG)L \\ &=\begin{bmatrix} I_{n+1-m} & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \lambda I_{n+1-m} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_{n+1-m} & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda I_{n+1-m} & 0 \\ 0 & H^{-1}AH \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.6.414}$$

Et alors :

$$\begin{bmatrix} \lambda I_{n+1-m} & 0 \\ 0 & H^{-1}AH \end{bmatrix} \tag{6.6.415}$$

est bien diagonale.

■ Q.E.D.

Pour finir voici donc enfin le fameux "théorème spectral" :

Théorème 6.44. Si $M\in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de M.

Démonstration 6.44.1. Nous avons donc vu dans les paragraphes précédents qu'il existe S orthogonale telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale si M est symétrique. Notons $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n$ les colonnes de S. La base $(\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ car S est orthogonale. Notant $\vec{e}_i$ le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et λ_i le i-ème coefficient diagonal de S^1MS nous avons sans supposer directement que λ_i est une valeur propre pour l'instant :

$$\lambda_i\vec{e}_i=(S^{-1}MS)\vec{e}_i=S^{-1}M\vec{c}_i \tag{6.6.416}$$

en multipliant par S des deux côtés de l'égalité nous avons :

$$\lambda_i S\vec{e}_i=M\vec{c}_i \tag{6.6.417}$$

et dès lors :

$$\lambda_i\vec{c}_i=M\vec{c}_i \tag{6.6.418}$$

ce qui montre que $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n$ sont des vecteurs propres et λ_i les valeurs propres.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Pour clore sur le théorème spectral, redémontrons donc un résultat vu plus haut mais qui avait été obtenu de façon peu rigoureuse (la somme des valeurs propres est égal à la trace d'une matrice) :

$$\text{tr}(A)=\sum_i \lambda_i \tag{6.6.419}$$

Rappelez-vous que le théorème spectral nous dit donc que pour tout matrice M symétrique, il existe une matrice orthogonale S telle que :

$$S^{-1}MS \tag{6.6.420}$$

est diagonale. Rien ne nous empêche alors de choisir la matrice diagonale résultante comme étant une matrice composée des valeurs propres dans la diagonale. Ce qui nous notons habituellement :

$$\Lambda=S^{-1}MS \tag{6.6.421}$$

et comme S est une matrice orthogonale réelle et que par définition nous avons qu'une matrice est orthogonale si et seulement si $A^{-1}=A^T$, alors nous trouvons la relation ci-dessous aussi fréquemment sous la forme suivante :

$$\boxed{\Lambda=S^TMS} \tag{6.6.422}$$

Communément appelée "décomposition spectrale".

Alors évidemment dès lors il faudra trouver S si M est imposé ou inversement. Bref, revenons à nos moutons et prenons la trace de cette relation :

$$\text{tr}(\Lambda)=\sum_i \lambda_i=\text{tr}(S^{-1}MS) \tag{6.6.423}$$

Alors en utilisant la propriété de la trace tr, de l'associativité de la multiplication matricielle, et de l'orthogonalité de S nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i=\text{tr}\left((S^{-1}M)S\right)=\text{tr}\left(S(S^{-1}M)\right)=\text{tr}\left((SS^{-1})M\right)=\text{tr}(I_nM)=\text{tr}(M) \tag{6.6.424}$$

Ce qui redémontre le résultat vu plus haut avec une condition qui pouvait ne pas être triviale : la matrice doit être symétrique (ou symétrisable) !

Nous avons aussi par extension :

$$M=S\Lambda S^{-1} \tag{6.6.425}$$

et donc en utilisant la propriété démontrée relativement au déterminant (lors de nos démonstrations des propriétés du déterminant) et aux matrices conjugées il vient :

$$\det(M)=\det(\Lambda S^{-1})=\det(S)\det(\Lambda)\det(S^{-1})=\det(S)\det(\Lambda)\det(S)^{-1}=\det(\Lambda) \tag{6.6.426}$$

et donc si M est symétrique nous avons la propriété :

$$\boxed{\det(M)=\det(\Lambda)=\prod \lambda_i} \tag{6.6.427}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Ce résultat est dans ce texte une forme particulière du cas plus général (donc également applicable aux matrices rectangulaires ou encore non orthogonales) et qui semble s'appeler le "théorème d'Eckart-Young"

✍**Exemple :**

Nous voulons montrer que :

$$M=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix} \tag{6.6.428}$$

nous supposons que nous savons que les paires valeur propre-vecteur propre sont :

$$\lambda_1=4 \qquad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=-2 \qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \tag{6.6.429}$$

Nous introduisons donc S et Λ comme suit :

$$S=[\vec{v}_1,\vec{v}_2]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} \tag{6.6.430}$$

Nous devons montrer que $M=S\Lambda S^{-1}$. C'est bien le cas puisque :

$$S\Lambda S^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}=M \tag{6.6.431}$$

Donc M est bien diagonalisable.

En cours ... anglais

6.6.7 Décompositions Matricielles

Dans la discipline mathématique de l'algèbre linéaire, une "décomposition matricielle" ou "factorisation matricielle" est une factorisation d'une matrice en un produit de matrices dans le but de simplifier des problèmes (typiquement pour simplifier la résolution de systèmes linéaires surtout lorsque les matrices à inverser sont énormes !) ou de faire émerger des propriétés intéressantes dans divers cas.

Il existe de nombreuses décompositions matricielles différentes. Chacune trouve son utilité dans une classe particulière de problèmes. Il existe à notre connaissance près de deux douzaines de techniques de décompositions matricielles. Cependant dans les textes qui vont suivre ci-dessous nous nous intéresserons uniquement aux techniques qui sont utilisées pour des applications concrètes explicites dans ce livre (principalement dans le domaine des Statistiques et par extensions en Ingénierie financière et aussi en Machine Learning).

6.6.7.1 Décomposition en Valeurs Singulières (DVS)

En cours de traduction de l'anglais

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice M $(m\times n)$ est la factorisation de M en produit de trois matrices :

$$M=UDV^T \tag{6.6.432}$$

où les colonnes de U $(m\times r)$ et V $(r\times n)$ sont orthonormées telles que[27] :

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} U_{ik}U_{ij}=\delta_{kj}\\ \sum_{i=1}^{r} V_{ik}V_{ij}=\delta_{kj}\end{gathered} \tag{6.6.433}$$

et la matrice D $(r\times r)$ est diagonale à entrées réelles positives (r est le rang de M, soit $K\leq \min\{m,n\}$).

Remarque

Si V est orthogonale, alors comme nous l'avons vu à la page 1927, nous avons $V^{-1}=V^T$, alors cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$M=UDV^{-1} \tag{6.6.434}$$

Le DVS est utile dans de nombreuses tâches telles que l'exploration de données, le traitement d'images et les méthodes numériques avancées.

Pour avoir un aperçu de la DVS, nous traitons les lignes d'une matrice $m\times n$ M comme m points dans un espace n-dimensionnel et considérons le problème de trouver le meilleur sous-espace k-dimensionnel par rapport à l'ensemble des points. Ici "meilleur" signifie minimiser la somme des carrés des distances perpendiculaires des points au sous-espace.

[27] Autrement dit, U et V sont des matrices de rotation telles que $U^TU=\mathbb{1}_{m\times m}$ et $V^TV=\mathbb{1}_{r\times r}$.

Commençons par un cas particulier du problème où le sous-espace est unidimensionnel : une ligne passant par l'origine. Nous verrons plus tard que le sous-espace de dimension k le mieux ajusté peut être trouvé par k applications de l'algorithme de ligne le mieux ajusté. Trouver la droite la mieux ajustée passant par l'origine par rapport à un ensemble de points $\{x_i | 1 \leq i \leq m\}$ dans le plan revient à minimiser la somme des carrés des distances des points à la droite. Ici, la distance est mesurée perpendiculairement à la ligne. Le problème est alors nommé comme on le sait : le "meilleur ajustement des moindres carrés" (voir section Méthodes Numériques page ??).

Considérons la projection de $\vec{x}_1$ sur une ligne passant par l'origine :

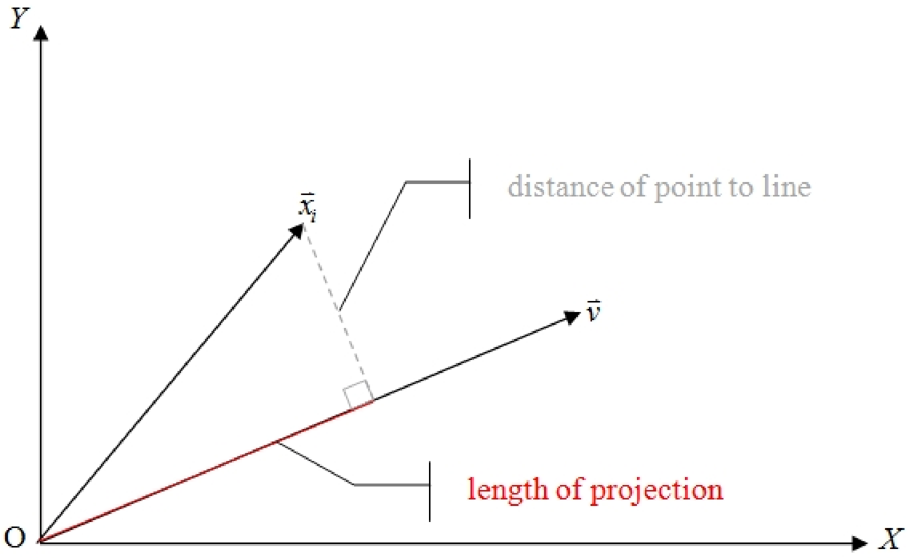


FIG. 6.137 – **La projection du point $\vec{x}_i$ sur la droite passant par l'origine dans la direction de $\vec{v}$**

En cours de
anglais

Alors en utilisant le théorème de Pythagore, nous obtenons :

$$\sqrt{x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \ldots + x_{in}^2}^2 = (\text{longueur de projection})^2 + (\text{distance du point à la ligne})^2 \quad (6.6.435)$$

C'est-à-dire :

$$x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \ldots + x_{in}^2 = (\text{longueur de projection})^2 + (\text{distance du point à la ligne})^2 \quad (6.6.436)$$

Dès lors (voir figure) :

$$(\text{distance of point to line})^2 = x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \ldots + x_{in}^2 - (\text{lenght of projection})^2 \quad (6.6.437)$$

Pour minimiser la somme des carrés de la distance à la ligne, nous pourrions minimiser :

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \ldots + x_{in}^2) \quad (6.6.438)$$

moins la somme du carré des longueurs des projections des points sur la droite. Cependant, $\sum_{i=1}^{m} (x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \ldots + x_{in}^2)$ est constant ! (indépendant de la droite), donc minimiser la somme des carrés des distances revient à maximiser la somme des carrés des longueurs des projections sur la droite. De même, pour les sous-espaces les mieux adaptés, nous pourrions maximiser la somme des longueurs au carré des projections sur le sous-espace au lieu de minimiser la somme des distances au carré au sous-espace.

6.6.7.1.1 Vecteurs et valeurs singulières

Nous allons maintenant construire les "vecteurs singuliers" (et aussi "valeurs singulières") d'une matrice M de dimension $m \times n$.

Considérons les lignes de M comme m points dans un espace de dimension d. Considérons la droite la mieux ajustée passant par l'origine. Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire le long de cette droite.

La longueur de la projection de $\vec{x}_i$, la i-ième ligne M, sur $\vec{v}$ est (voir section Calcul vectoriel page 1798) :

$$\|\text{proj}_v \vec{x}_i\| \qquad (6.6.439)$$

Que nous noterons pour la suite par (voir section Calcul vectoriel page 1798) :

$$|\vec{x}_i \circ \vec{v}| = \|\text{proj}_v \vec{x}_i\| \qquad (6.6.440)$$

Donc dans notre cas :

$$x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + \ldots + x_{in}^2 = |\vec{x}_i \circ \vec{v}| \qquad (6.6.441)$$

À partir de là, nous désignons la somme de toutes les longueurs des projections par :

$$\|\text{proj}_v M\| = \|M\vec{v}\|^2 \qquad (6.6.442)$$

La droite de meilleur ajustement est la maximisation de $\|M\vec{v}\|^2$ (c'est-à-dire : $\|M\vec{v}\|$) et donc la minimisation de la somme des distances au carré des points à la droite.

Avec ceci à l'esprit, nous définissons le "premier vecteur singulier $\vec{v}_1$", de M, qui est un vecteur, comme le meilleur ajustement à travers l'origine pour les points m dans l'espace de dimension n qui sont les lignes de M. Ainsi :

$$\vec{v}_1 = \max_{\|\vec{v}\|=1} \|M\vec{v}\| \qquad (6.6.443)$$

La valeur scalaire :

$$\sigma_1(M) = \|M\vec{v}_1\| \qquad (6.6.444)$$

est nommée la "première valeur singulière" de M. Remarquez que σ_1^2 est donc implicitement la somme des carrés des projections des points sur la droite déterminée par $\vec{v}_1$.

L'approche gourmande pour trouver cette fois non pas le meilleur ajustement de dimensions 1 mais du sous-espace de dimension 2 pour une matrice M, prend $\vec{v}_1$ comme premier vecteur de base pour le sous-espace 2-dimensionnel et trouve le meilleur sous-espace 2-dimensionnel contenant $\vec{v}_2$.

Ainsi, au lieu de chercher le meilleur sous-espace 2-dimensionnel contenant $\vec{v}_1$, cherchez un vecteur unitaire, noté $\vec{v}_2$, perpendiculaire à $\vec{v}_1$ qui maximise $\|M\vec{v}\|^2$ parmi tous ces vecteurs unitaires.

En utilisant la même stratégie pour trouver les meilleurs sous-espaces à trois dimensions et plus, nous définissons $\vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots$ de la même manière.

En cours de traduction de l'anglais

Le "deuxième vecteur singulier $\vec{v}_2$", est défini par la droite de meilleur ajustement perpendiculaire à $\vec{v}_1$:

$$\vec{v}_2 = \max_{\vec{v}\perp\vec{v}_1, \|\vec{v}\|=1} \|M\vec{v}\| \tag{6.6.445}$$

La valuer :

$$\sigma_2(M) = \|M\vec{v}_2\| \tag{6.6.446}$$

est appelée la "deuxième valeur singulière" de M.

Le "troisième vecteur singulier $\vec{v}_3$" est défini de manière similaire par :

$$\vec{v}_3 = \max_{\vec{v}\perp\vec{v}_1,\vec{v}_2, \|\vec{v}\|=1} \|M\vec{v}\| \tag{6.6.447}$$

et ainsi de suite...

Le processus s'arrête théoriquement lorsque nous avons trouvé $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ comme vecteur singulier qui satisfait :

$$\vec{v}_r = \max_{\vec{v}\perp\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_r, \|\vec{v}\|=1} \|M\vec{v}\| \tag{6.6.448}$$

Comme les $\vec{v}_i$ sont perpendiculaires, si nous appliquons M sur tous ces vecteurs, les vecteurs résultants seront également perpendiculaires entre eux !

Nous construisons donc les vecteurs :

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i(M)} M\vec{v}_i \tag{6.6.449}$$

qui sont tous des vecteurs perpendiculaires entre eux comme déjà mentionné et nommés "vecteurs singuliers gauches" de M quand les $\vec{v}_i$ seront nommés "vecteurs singuliers droits". Le théorème DVS expliquera pleinement la raison de ces termes.

Théorème 6.45. Soit M une matrice $m \times n$ avec les vecteurs singuliers droits $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$, les vecteurs singuliers gauche $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$, et les valeurs singulières correspondantes $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Alors, le "théorème de décomposition en valeurs singulières" (DVS) affirme que :

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T} \tag{6.6.450}$$

Démonstration 6.45.1. Nous partons naturellement de :

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \left(\frac{1}{\sigma_i} M\vec{v}_i\right) \vec{v}_i^T = \sum_{i=1}^{r} M\vec{v}_i\vec{v}_i^T = M\sum_{i=1}^{r} \vec{v}_i\vec{v}_i^T \tag{6.6.451}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

N'oubliez pas que $\vec{x}^T\vec{x}$ en Algèbre Linéaire donne un scalaire équivalent au "produit scalaire" ("produit intérieur"), lorsque à l'opposé $\vec{x}\vec{x}^T$ donne une matrice carrée nommée le "produit extérieur", ou parfois "Matrice de Gram ", défini par :

$$\vec{u}\vec{v}^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \\ u_4v_1 & u_4v_2 & u_4v_3 \end{bmatrix} \quad (6.6.452)$$

Considérons maintenant un cas particulier avec (comme je n'aime pas la preuve générale) :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{pmatrix} \quad (6.6.453)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i\vec{v}_i^T &= \begin{bmatrix} v_{11}^2 & v_{11}v_{21} & v_{11}v_{31} \\ v_{21}v_{11} & v_{21}^2 & v_{21}v_{31} \\ v_{31}v_{11} & v_{31}v_{21} & v_{31}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{12}^2 & v_{12}v_{22} & v_{12}v_{32} \\ v_{22}v_{12} & v_{22}^2 & v_{22}v_{32} \\ v_{32}v_{12} & v_{32}v_{22} & v_{32}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{13}^2 & v_{13}v_{23} & v_{13}v_{33} \\ v_{23}v_{13} & v_{23}^2 & v_{23}v_{33} \\ v_{33}v_{13} & v_{33}v_{23} & v_{33}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11}^2+v_{12}^2+v_{13}^2 & v_{11}v_{21}+v_{12}v_{22}+v_{13}v_{23} & v_{11}v_{31}+v_{12}v_{32}+v_{13}v_{33} \\ v_{21}v_{11}+v_{22}v_{12}+v_{23}v_{13} & v_{21}^2+v_{22}^2+v_{23}^2 & v_{21}v_{31}+v_{22}v_{32}+v_{23}v_{33} \\ v_{31}v_{11}+v_{32}v_{12}+v_{33}v_{13} & v_{31}v_{21}+v_{32}v_{22}+v_{33}v_{23} & v_{31}^2+v_{32}^2+v_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6.454)$$

Donc si nous observons bien le résultat est le même que si on définissions la matrice :

$$V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (6.6.455)$$

Nous pouvons donc voir que :

$$VV^T = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (6.6.456)$$

conduit au même résultat. On peut donc écrire :

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T = M \sum_{i=1}^{r} \vec{v}_i\vec{v}_i^T = M(VV^T) \quad (6.6.457)$$

Mais il ne faut pas oublier que si V est une matrice orthogonale, alors elle représente une base orthonormée et alors nous avons déjà prouvé plus haut que dans ce cas :

$$V^TV = VV^T = \mathbb{1} = [\delta_{ij}] \quad (6.6.458)$$

Dès lors :

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T = M(VV^T) = M\mathbb{1} = M \quad (6.6.459)$$

Et ce termine la preuve !

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Le lecteur doit également remarquer que :

$$M = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T \tag{6.6.460}$$

et :

$$\underset{(m\times n)}{M} = \underset{(m\times r)}{U} \underset{(r\times r)}{D} \underset{(r\times n)}{V^T} \tag{6.6.461}$$

également souvent noté $M = U\Sigma V^T$ (car Σ est la lettre majuscule de σ), sont des notations équivalentes pour la même chose (développez simplement la dernière explicitement et vous verrez que vous retomberez sur le même résultat[28]) ! La différence est que la notation avec la somme est la plus utilisée en Data Mining et celle avec les matrices en Statistiques.

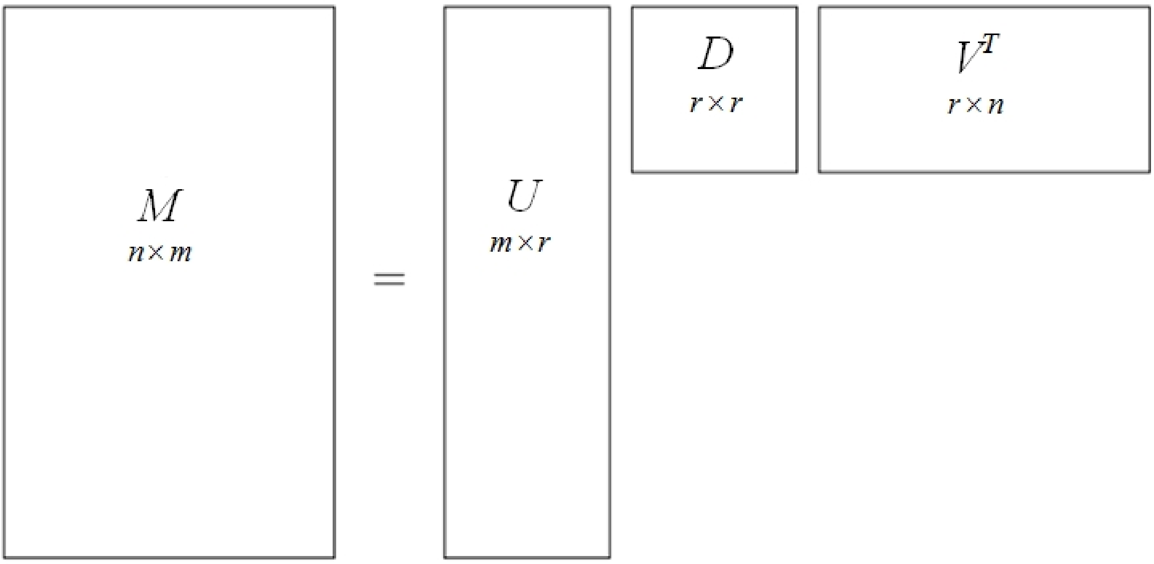


FIG. 6.138 – **Décomposition DVS d'une matrice** $m \times n$

Il est d'usage de construire la matrice D telle que la diagonale soit dans l'ordre décroissant d'amplitude et d'ordonner les vecteurs $\vec{v}_i$ dans l'ordre correspondant. La raison est assez facile à comprendre comme vous pouvez le voir dans l'exemple ci-dessous.

Il est important de savoir que ce n'est pas la seule décomposition possible d'une matrice. Il y en a beaucoup d'autres mais nous nous concentrerons dans ce qui va suivre uniquement sur les décompositions qui sont directement utiles aux sujets d'ingénierie présentés dans ce livre.

Remarque

Certains auteurs préfèrent travailler avec la norme des valeurs singulières, c'est-à-dire

[28] Sur demande nous pouvons écrire les détails

avec $\sqrt{\sigma_i}$, dès lors les valeurs singulières à gauche sont définies comme :

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} M\vec{v}_i \tag{6.6.462}$$

Sans que cela change le résultat de la preuve précédente qui sera simplement :

$$M = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\sigma_i}\vec{u}_i\vec{v}^T \tag{6.6.463}$$

Qui en Europe s'écrit fréquemment (mais peut prêter à confusion avec la notation des valeurs propres...) :

$$M = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\vec{u}_i\vec{v}^T \tag{6.6.464}$$

ou sous forme matricielle (...) :

$$M = U\Lambda^{1/2}V^T \tag{6.6.465}$$

Prenons un exemple pratique en traitement d'image de la DVS (réalisé par Jason Liu sous MATLAB™). L'image ci-dessous est une image composée de 400 vecteurs lignes uniques (le lecteur peut trouver l'exemple équivalent dans notre livre compagnon sur le logiciel R) :

En cours de rédaction de Opera Magistris

FIG. 6.139 – **Exemple DVS dans MATLAB™ image originale**

Que se passe-t-il si dans la somme :

$$M = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\sigma_i}\vec{u}_i\vec{v}^T \tag{6.6.466}$$

nous ne prenons que le premier plus grand vecteur singulier ? :

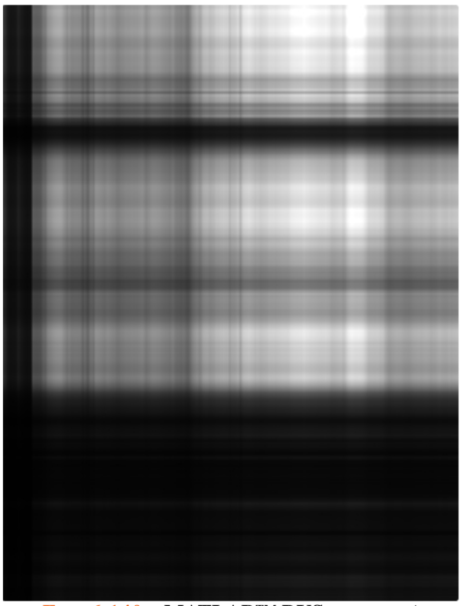


FIG. 6.140 – MATLAB™ DVS avec $r = 1$

Que se passe-t-il si nous prenons les deux premiers vecteurs singuliers ? :

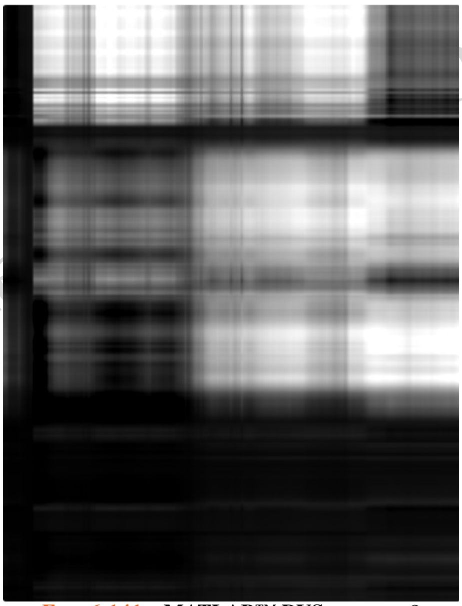


FIG. 6.141 – MATLAB™ DVS avec $r = 2$

...et si nous prenons les dix premiers vecteurs singuliers ? :

En cours de traduction de l' anglais

FIG. 6.142 – MATLAB™ DVS avec $r = 10$

...et si nous prenons les cinquante premiers vecteurs singuliers ? :

FIG. 6.143 – MATLAB™ DVS avec $r = 50$

En cours de traduction de l'anglais

Nous l'avons ! En utilisant 50 vecteurs singuliers nous obtenons une représentation décente de ce à quoi ressemble l'image avec 400 vecteurs.

Donc, comme nous pouvons le voir, la DVS est une excellente technique de réduction d'espace !

Remarque

Soit $U\Sigma V^T$ la décomposition en valeurs singulières d'une matrice A. Alors U est une matrice unitaire de dimension $m \times m$ (i.e. $U^T U = I$), Σ est une matrice diagonale de dimension $m \times n$ ($\Sigma_{ii} = \sigma_i(A)$), et V est une matrice unitaire $n \times n$ (i.e. $V^T V = I$). En

utilisant la norme de Frobenius (voir page 1601), nous avons :

$$\begin{aligned}\|A\|_F^2 &= \text{tr}\left(A^TA\right) = \text{tr}\left(\left(U\Sigma V^T\right)^T U\Sigma V^T\right) = \text{tr}\left(V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T\right)\\ &= \text{tr}\left(\Sigma^T\Sigma\right) = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2(A)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété de matrice unitaire et la propriété cyclique de trace.

6.6.7.1.2 Cas particulier de DVS pour les matrices symétriques

La DVS pour les matrices symétriques est le cas unique qui nous intéresse à des fins pratiques dans ce livre (pour l'ACP : Analyse en Composantes Principales). Nous ferons donc un focus particulier sur ce dernier cas.

Nous allons prouver ici en deux étapes que d'une part, pour une matrice symétrique, les vecteurs propres sont orthogonaux et d'autre part que les vecteurs singuliers et les valeurs singulières sont respectivement égaux aux vecteurs propres et aux valeurs propres des matrices symétriques.

Voyons la première étape ! En général, pour toute matrice, ses vecteurs propres (lorsqu'ils existent) ne sont PAS toujours orthogonaux les uns aux autres. Mais pour un type particulier de matrice, la matrice symétrique, les valeurs propres sont toujours réelles et les vecteurs propres correspondants sont toujours orthogonaux !

Démonstration 6.45.2. Prenons une matrice symétrique réelle M et deux valeurs propres distinctes de M, λ_1 et λ_2, telles que $M\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$ et :

$$M\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1 \quad \text{et} \quad M\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 \tag{6.6.467}$$

où $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont évidemment des vecteurs propres.

De $M\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$, nous obtenons :

$$\vec{x}_2^T M\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_2^T\vec{x}_1 \tag{6.6.468}$$

De $M\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$, nous obtenons de la même manière :

$$\vec{x}_1^T M\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_1^T\vec{x}_2 \tag{6.6.469}$$

Mais puisque M est symétrique :

$$\vec{x}_2^T M\vec{x}_1 = \vec{x}_2^T M^T\vec{x}_1 = (M\vec{x}_2)^T\,\vec{x}_1 = \vec{x}_1^T\,(M\vec{x}_2) = \vec{x}_1^T M\vec{x}_2 \tag{6.6.470}$$

Aussi, clairement $\vec{x}_1^T\vec{x}_2 = \vec{x}_2^T\vec{x}_1$. Ainsi :

$$\lambda_1\vec{x}_1^T\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_1^T\vec{x}_2\,(\lambda_1-\lambda_2)\left(\vec{x}_1^T\vec{x}_2\right) = 0 \tag{6.6.471}$$

Mais $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Donc :

$$\vec{x}_1^T\vec{x}_2 = \vec{x}_1^T \circ \vec{x}_2 = 0 \tag{6.6.472}$$

comme exigé.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Passons maintenant à la deuxième étape, pour cela considérons que A est une matrice symétrique $n \times n$. Alors la valeur maximale de $|A\vec{x}|$, où $\vec{x}$ s'étend sur des vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^n$, est la plus grande valeur singulière σ_1, et cela est réalisé lorsque $\vec{x}$ est un vecteur propre de $A^T A$ avec la valeur propre σ_1^2.

Démonstration 6.45.3. Soit $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ une base orthonormée pour $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $A^T A$ (en effet comme $A^T A$ est symétrique étant donné que $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ - ceci même si A n'est pas symétrique lui-même - alors d'après le résultat que nous venons de voir ci-dessous, les vecteurs propres sont orthogonaux) avec valeurs propres σ_i^2. Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors nous pouvons développer $\vec{x}$ dans cette base comme :

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n \tag{6.6.473}$$

pour les scalaires $\{c_1, \ldots, c_n\} \in \mathbb{R}$ puisque $\vec{x}$ est un vecteur unitaire, $\|\vec{x}\|^2 = 1$, ce qui signifie que (puisque les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont orthonormés) :

$$c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 1 \tag{6.6.474}$$

D'autre part :

$$\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x}) \circ (A\vec{x}) = (A\vec{x})^T \circ (A\vec{x}) = \vec{x}^T \circ A^T A\vec{x} = \vec{x} \circ \left(A^T A\vec{x}\right) \tag{6.6.475}$$

Par :

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n \tag{6.6.476}$$

puisque les $\vec{v}_i$ sont des vecteurs propres de $A^T A$ avec valeurs propres σ_i^2, nous avons :

$$A^T A\vec{x} = c_1\sigma_1^2\vec{v}_1 + \ldots + c_n\sigma_n^2\vec{v}_n \tag{6.6.477}$$

En prenant le produit scalaire avec :

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n \tag{6.6.478}$$

et en utilisant le fait que les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont orthonormés, nous obtenons :

$$\vec{x} \circ \left(A^T A\vec{x}\right) = \|A\vec{x}\|^2 = \sigma_1^2 c_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 c_n^2 \tag{6.6.479}$$

Puisque σ_1 est la plus grande valeur singulière, nous obtenons :

$$\|A\vec{x}\|^2 \leq \sigma_1^2 \left(c_1^2 + \ldots + c_n^2\right) \tag{6.6.480}$$

L'égalité tient encore lorsque $c_1 = 1$ et $c_2 = \ldots = c_n = 0$. Ainsi la valeur maximale de $\|A\vec{x}\|^2$ pour un vecteur unitaire $\vec{x}$ est la valeur propre σ_1^2, qui est atteinte quand $\vec{x} = \vec{v}_1$ (égalité entre le vecteur et un des vecteurs propres de $A^T A$).

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons de même montrer que σ_2 est le maximum de $\|A\vec{x}\|$ où $\vec{x}$ s'étend sur des vecteurs unitaires orthogonaux à $\vec{v}_1$. De même, σ_3 est le maximum de $\|A\vec{x}\|$ où $\vec{x}$ s'étend sur des vecteurs unitaires orthogonaux à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$; et ainsi de suite.

C'est pourquoi dans le cas de matrices symétriques (évidemment carrées), la DVS traditionnellement notée :

$$A = U\Sigma V^T \tag{6.6.481}$$

est alors notée (rappelons que Λ est la lettre majuscule de λ, cette dernière étant la notation traditionnelle des valeurs propres) :

$$\boxed{A = U\Lambda V^T} \tag{6.6.482}$$

Une question courante que l'on peut trouver sur les forums Internet est : *Pourquoi les valeurs singulières sont-elles toujours positives ?*

Pour répondre prenons une quelconque valeur singulière non nulle σ_i. Nous pouvons inverser le signe s'il est positif. Autrement dit, $-\sigma_i = -\sqrt{\lambda_i^2} = -\lambda_i$ où λ_i est une valeur propre de A^TA correspondant à un vecteur propre v_i. C'est-à-dire $A^TAv_i = \lambda_i^2 v_i$.

Qui peut nous empêcher d'écrire à la place $A^TA(-v_i) = \lambda_i^2(-v_i)$? Qu'est-ce que cela signifie est que nous pouvons inverser le signe d'une valeur singulière, mais nous devons ensuite aller à la matrice V et inverser le signe de sa colonne de vecteurs propres correspondante.

Par conséquent, il n'y a pas de façon unique d'écrire $A = UDV^T$. Mais si nous décidons que tous les σ_i sont non négatifs, alors "oui" il existe une façon unique d'écrire $A = UDV^T$. Bien sûr, tous les σ_i sont triés du plus grand au plus petit (sinon il y aurait un tas de possibilités en permutant deux colonnes quelconques de U et V et leurs valeurs propres correspondantes).

En cours de traduction de l'anglais

6.6.7.1.3 Décomposition orthogonale (décomposition spectrale par valeurs propres)

Revenons à :

$$M = UDV^T \tag{6.6.483}$$

Si M est symétrique, alors c'est une matrice carrée. Alors évidemment U et V sont aussi des matrices carrées de mêmes dimensions que celles de M.

Si M est symétrique, alors il est aussi évidemment égal à sa transposée M^T, donc si on fait la DVS de la transposition nous devrions obtenir la même décomposition que M^T telle que :

$$M = UDV^T = M^T = (UDV^T)^T \tag{6.6.484}$$

Mais comme nous l'avons prouvé lors de notre étude de la transposition matricielle, nous avons :

$$(UDV^T)^T = (V^T)^T D^T U^T \tag{6.6.485}$$

Mais nous devrions avoir l'égalité :

$$(V^T)^T D^T U^T = UDV^T \tag{6.6.486}$$

Dès lors :

$$U = V \tag{6.6.487}$$

Tel que pour les matrices symétriques M nous ayons :

$$\boxed{M = UDV^T = UDU^T = VDV^T} \tag{6.6.488}$$

Comme avant, V (tout comme U) est orthogonal mais maintenant c'est aussi une matrice carrée. Elle est donc inversible. Dans ce cas, pour rappel par définition (l'inverse d'une matrice orthogonale est par définition égale à sa transposée) :

$$U^{-1} = U^T \tag{6.6.489}$$

Si bien que finalement pour les matrices symétriques M, nous obtenons le cas particulier de DVS, nommée la "décomposition orthogonale" ou "décomposition spectrale en valeurs propres" :

$$\boxed{M = UDV^T = UDU^T = UDU^{-1}} \tag{6.6.490}$$

Également souvent notée pour la raison évidente déjà mentionnée ci-dessus :

$$M = U\Lambda V^T = U\Lambda U^T = U\Lambda U^{-1} \tag{6.6.491}$$

Attention à ne pas faire de confusion entre la décomposition en valeurs spectrales (DVS), également appelée décomposition en valeurs singulières, et la décomposition spectrale en valeurs propres (DSV) qui est le cas particulier des DVS mais pour les matrices symétriques carrées ! Cela signifie donc que pour que la DVS d'une matrice M soit égale à sa décomposition propre, nous avons besoin que M :

- Ait des vecteurs propres orthonormés (donc être soit une matrice réelle symétrique)
- Ait des valeurs propres positives (familièrement, il doit s'agir d'une vraie matrice et ne "retourne" rien)

Notons également que la racine carrée de M (écrite ici comme $M^{1/2}$) - telle que $M^{1/2}M^{1/2} = M$ - peut être facilement trouvée comme étant :

$$M^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T \tag{6.6.492}$$

En effet, nous pouvons facilement vérifier que cette égalité est correcte :

$$M^{1/2}M^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T U\Lambda^{1/2}U^T = U\Lambda^{1/2}\mathbb{1}\Lambda^{1/2}U^T = U\Lambda U^T = M \tag{6.6.493}$$

Un autre résultat utile pour plus tard (étude de la distribution statistique de la distance de Mahalanobis) est la décomposition en valeurs propres de l'inverse d'une matrice M en utilisant la relation sur les matrices inversibles prouvée à la page 1924 et la propriété associative de la matrice produit :

$$M^{-1} = \left(U\Lambda U^{-1}\right)^{-1} = \left(U^{-1}\right)^{-1}\Lambda^{-1}U^{-1} = U\Lambda^{-1}U^{-1} = U\Lambda^{-1}U^T = \sum_{k=1}^{n}\lambda^{-1}\vec{u}_i\vec{u}_i^T \tag{6.6.494}$$

6.6.7.2 Décomposition LU

Comme alternative à l'élimination gaussienne, une matrice non singulière A peut être écrite sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure (toutes les entrées au-dessus de la diagonale principale sont nulles) et toutes les entrées sur la diagonale principale sont égales à l'unité :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \quad (6.6.495)$$

Ceci est connu sous le nom de "décomposition LU" ou "factorisation LU" ou encore... "triangularisation triangulaire".

Remarque

La décomposition LU n'est pas unique : si $A = LU$, alors $A = LDD^{-1}U = (LD)(D^{-1}U) = L'U'$ est à nouveau une décomposition LU, si D est une matrice diagonale. Une hypothèse supplémentaire $l_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$, (imposer que L soit une matrice unitaire triangulaire inférieure) garantit l'unicité.

Par exemple (cas trois par trois) :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6.496)$$

U est une matrice triangulaire supérieure (toutes les entrées sous la diagonale principale sont nulles). Par exemple (cas trois par trois) :

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad (6.6.497)$$

La méthode de décomposition LU consiste à écrire le système $A\vec{x} = \vec{b}$ sous la forme $LU\vec{x} = \vec{b}$. Si $U\vec{x}$ s'écrit comme $\vec{y}$, le système devient $L\vec{y} = \vec{b}$. En raison de la forme de L (les matrices triangulaires rendent la solution simple), $\vec{y}$ peut être trouvé rapidement. Une fois cela fait, l'équation $U\vec{x} = \vec{y}$ peut être résolue pour $\vec{x}$.

Le plus délicat est probablement de trouver L et U. Pour une matrice A de dimensions 3×3.

Soit :

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{11}l_{21} & u_{12}l_{21} + u_{22} & u_{13}l_{21} + u_{23} \\ u_{11}l_{31} & u_{12}l_{31} + u_{22}l_{32} & u_{13}l_{31} + u_{23}l_{32} + u_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6.498)$$

En cours de traduction anglais

En égalisant les coefficents :

$$\begin{array}{lll} a_{11}=u_{11} \quad [1] & a_{12}=u_{12} \quad [4] & a_{13}=u_{13} \quad [7] \\ a_{21}=l_{21}u_{11} \quad [2] & a_{22}=l_{21}u_{12}+u_{22} \quad [5] & a_{23}=l_{21}u_{13}+u_{23} \quad [8] \\ a_{31}=l_{31}u_{11} \quad [3] & a_{32}=l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} \quad [6] & a_{33}=l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \quad [9] \end{array} \tag{6.6.499}$$

Ces équations peuvent être résolues comme suit :

- Résolution de [1] pour u_{11}
- Résolution de [2] pour l_{21}
- Résolution de [3] pour l_{31}
- Résolution de [4] pour u_{12}
- Résolution de [7] pour u_{13}
- Résolution de [5] pour u_{22}
- Résolution de [6] pour l_{32}
- Résolution de [8] pour u_{23}
- Résolution de [9] pour u_{33}

Cette procédure semble s'appeler "algorithme de Crout".

Comme exemple compagnon, résolvons :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} \tag{6.6.500}$$

Soit :

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \tag{6.6.501}$$

dès lors :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} \end{bmatrix} \tag{6.6.502}$$

donc, en comparant les coefficients :

$$\begin{array}{lll} u_{11}=-1 & u_{12}=1 & u_{13}=-1 \\ l_{21}=\frac{-2}{-1}=2 & u_{22}=4-2\cdot 1=2 & u_{23}=-2-2\cdot(-1)=0 \\ l_{31}=\frac{1}{-1}=-1 & l_{32}=\frac{1-(-1)\cdot 1}{2}=1 & u_{33}=4-(-1)\cdot(-1)-1\cdot 0=3 \end{array} \tag{6.6.503}$$

En cours de traduction de l'anglais

Soit écrit de façon plus générale pour U :

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= a_{12} \\ u_{13} &= a_{13} \\ u_{22} &= a_{22} - u_{12}l_{21} \\ u_{23} &= a_{23} - u_{13}l_{21} \\ u_{33} &= a_{33} - (u_{13}l_{31} + u_{23}l_{32}) \end{aligned} \tag{6.6.504}$$

et pour L :

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{1}{u_{11}}a_{21} \\ l_{31} &= \frac{1}{u_{11}}a_{31} \\ l_{32} &= \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - u_{12}l_{31}) \end{aligned} \tag{6.6.505}$$

Nous voyons qu'il existe un modèle de calcul, qui peut être exprimé par les relations suivantes :

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{kj}l_{ik} \qquad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{kj}l_{ik}) \tag{6.6.506}$$

Remarque

Nous remarquons dans la deuxième relation que pour obtenir le l_{ij} sous la diagonale, nous devons diviser par l'élément diagonal (pivot) u_{jj} , donc nous avons des problèmes lorsque u_{jj} est soit 0 ou très petit, ce qui conduit à une instabilité numérique.

Dès lors :

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{6.6.507}$$

L'équation $LU\vec{x} = \vec{b}$ devient $L\vec{y} = \vec{b}$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{6.6.508}$$

Donc (cette procédure est nommée "substitution directe") :

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & & & & & = & -2 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & = & -6 \\ -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & 9 \end{array} \qquad \begin{aligned} y_1 &= -2 \\ y_2 &= -2 \\ y_3 &= 9 \end{aligned} \tag{6.6.509}$$

Où, en général, nous pouvons voir que le motif est :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{l_{11}} \\ y_i &= \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_i\right) \qquad i = 2, 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{6.6.510}$$

En cours de correction de l'anglais

L'équation $U\vec{x}=\vec{y}$ devient :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{6.6.511}$$

Donc (cette procédure est nommée "substitution arrière") :

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ & & 2x_2 & & & = & -2 \\ & & & & x_3 & = & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=-1 \\ x_3=3 \end{array} \tag{6.6.512}$$

Où, en général, nous pouvons voir que le modèle est :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{u_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{u_{ii}}\left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right) \qquad i=n-1,n-2,\ldots,1 \end{aligned} \tag{6.6.513}$$

Pour les grandes matrices, cette procédure implique moins d'opérations que l'élimination gaussienne. Cependant, l'élimination gaussienne est probablement plus facile à programmer.

La matrice U est identique à la matrice triangulaire trouvée dans l'élimination gaussienne ; $\vec{y}$ est identique au membre de droite immédiatement avant la rétrosubstitution.

La décomposition LU peut être considérée comme la forme matricielle de l'élimination gaussienne. Les ordinateurs résolvent généralement des systèmes carrés d'équations linéaires en utilisant la décomposition LU, et c'est également une étape clé lors de l'inversion d'une matrice ou du calcul du déterminant d'une matrice. La décomposition LU a été introduite par le mathématicien Tadeusz Banachiewicz en 11938 (calendrier holocène).

En cours de traduction de l'anglais

6.6.7.3 Décomposition de Cholesky

La décomposition de Cholesky est une autre façon de résoudre des systèmes d'équations linéaires. Elle peut être nettement plus rapide et utilise moins de mémoire que la décomposition LU en exploitant la propriété des matrices symétriques. Cependant, il est nécessaire que la matrice en cours de décomposition soit hermitienne (ou symétrique à valeurs réelles et donc carrée) et définie positive.

Pour de nombreuses matrices symétriques (au sens strict pour les matrices définies positives[29] $\vec{x}^T A\vec{x}>0$ pour tout $\vec{x}\neq 0$ comme détaillé à la page 1930), la décomposition LU peut être effectuée en utilisant $U=L^T$. Donc :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=LU=L(L^T)=LL^T=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & l_{33} & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.6.514}$$

[29]N'oubliez pas que la matrice des variances-covariances est une matrice définie positive !

Ceci est connu sous le nom de "décomposition de Cholesky". Alors que la décomposition de Cholesky ne fonctionne que pour les matrices définies positives symétriques, la décomposition LU plus générale fonctionne pour n'importe quelle matrice carrée !

Comme exemple complémentaire, utilisons la méthode de Cholesky pour résoudre :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 17 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ -55 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} \tag{6.6.515}$$

Soit :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 17 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \tag{6.6.516}$$

in enxtenso :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 17 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2+l_{22}^2 & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} & l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2 \end{bmatrix} \tag{6.6.517}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} l_{11}^2 &= 4 & [1] \\ l_{11}l_{21} &= -2 & [2] \\ l_{11}l_{31} &= 2 & [3] \\ l_{21}^2+l_{22}^2 &= 17 & [4] \\ l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} &= -1 & [5] \\ l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2 &= 10 & [6] \end{aligned} \tag{6.6.518}$$

Plus les doublons de [2], [3] et [5] :

- De [1], $l_{11} = 2$,
- De [2], $l_{21} = -1$,
- De [3], $l_{31} = 1$,
- De [4], $l_{22} = 4$,
- De [5], $l_{32} = 0$,
- De [6], $l_{33} = 3$

Ainsi :

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{6.6.519}$$

En cours de traduction de l' anglais

Le système devient :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ -55 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{6.6.520}$$

in extenso :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ -55 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{6.6.521}$$

ainsi :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2y_1 & & & & & = & 14 \\ -y_1 & + & 4y_2 & & & = & -55 \\ y_1 & & & + & 3y_3 & = & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y_1=7 \\ y_2=-12 \\ y_3=0 \end{array} \tag{6.6.522}$$

$\vec{x}$ satisfait par exentesion :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.6.523}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ & & 4x_2 & & & = & -12 \\ & & & & 3x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-3 \\ x_3=2 \end{array} \tag{6.6.524}$$

Nous pouvons voir qu'à partir de l'exemple ci-dessus que les éléments diagonaux l_{kk} de L il y a un motif de calcul :

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}l_{22} \quad =\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}l_{33}=\sqrt{a_{33}-(l_{31}^2+l_{32}^2)} \tag{6.6.525}$$

Pour les éléments sous la diagonale (l_{ik} , où $i>k$) il existe également un schéma de calcul :

$$l_{21}=\frac{1}{l_{11}}a_{21}l_{31} \quad =\frac{1}{l_{11}}a_{31}l_{32}=\frac{1}{l_{22}}(a_{32}-l_{31}l_{21}) \tag{6.6.526}$$

Nous voyons que les deux cas ont un motif de calcul qui peut s'écrire respectivement :

$$l_{kk}=\sqrt{a_{kk}-\sum_{j=1}^{k-1}l_{kj}^2} \qquad l_{ik}=\frac{1}{l_{kk}}\left(a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1}l_{ij}l_{kj}\right) \tag{6.6.527}$$

Nous pouvons maintenant comprendre à quoi le concept de "définie positive" est nécessaire ! En effet, le fait que A soit positive définie garantit que toutes les racines carrées sont réelles. Nous pouvons également remarquer à partir des développements ci-dessus que L doit avoir des entrées diagonales positives[30] !

[30]Le lecteur ne doit cependant pas oublier que d'après ce que nous avons vu lors de notre étude des matrices définies positives, le fait que toutes les entrées soient positives et que la matrice soit symétrique ne suffit pas à la rendre définie positive

En cours de traduction de l' anglais

Supposons maintenant qu'une matrice A se factorise en $A = L^T L$. Alors :

$$\begin{aligned}\vec{x}^T A x &= \vec{x}^T L^T L\vec{x}\\ &= (L\vec{x})^T (L\vec{x})\\ &= \|L\vec{x}\|^2\\ &\geq 0\end{aligned} \tag{6.6.528}$$

Cela montre que A est semi-positive définie.

Si nous supposons en outre que L est carrée et triangulaire avec des entrées diagonales réelles positives, alors L est inversible, donc $L\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Dans ce cas, nous voyons que A est positive définie.

Certains livre utilisent la décomposition de Cholesky pour définir ce qui rend une matrice positive définie. En effet, ces livres disent seulement que toute matrice A qui peut uniquement être écrite sous une décomposition de Cholesky $A = L^T L$ sont des matrices positives définies.

Remarque

Les algorithmes ci-dessus montrent que toute matrice définie positive A a une décomposition de Cholesky. Ce résultat peut être étendu aux matrices semi-positives définies ! Cependant pour une matrice semi-positive définie il est possible mais pas sûr que la décomposition de Cholesky ne soit pas unique.

En cours de traduction

6.6.7.4 Décomposition QR

Une "décomposition QR", également appelée "factorisation QR", d'une matrice est une décomposition de toute matrice réelle A en un produit $A = QR$ d'une matrice orthogonale Q et d'une matrice triangulaire supérieure R :

$$\begin{aligned}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} = QR = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ 0 & r_{22} & \cdots & l_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}\\ = [\text{col}_1(Q)|\text{col}_2(Q)|\ldots|\text{col}_n(Q)][\text{col}_1(R)|\text{col}_2(R)|\ldots|\text{col}_n(R)]\end{aligned} \tag{6.6.529}$$

avec $\text{col}_i(Q) \circ \text{col}_j(Q) = 0, \forall i \neq j$ et (nous allons le démontrer de suite plus bas) $r_{ij} = \text{col}_i(Q) \circ \text{col}_j(A), \forall 1 \leq 1 \leq i \leq n$.

Il existe actuellement plusieurs méthodes pour calculer la décomposition QR, mais nous nous concentrerons ici sur le processus de Gram–Schmidt dont l'idée est décrite en détails à la page 2033.

Considérons donc le processus de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice A et

rappelons le résultat que nous avons obtenu lors de notre étude du processus de Gram-Schmidt :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{x}_1\\ \vec{e}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\vec{e}_1\circ\vec{x}_2}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{e_1}\vec{x}_2\\ \vec{e}_3 &= -\frac{\vec{e}_1\circ\vec{x}_3}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 - \frac{\vec{e}_2\circ\vec{x}_3}{\|\vec{e}_2\|^2}\vec{e}_2 + \vec{x}_3 = -\text{proj}_{e_1}\vec{x}_3 - \text{proj}_{e_2}\vec{x}_2 + \vec{x}_3\end{aligned} \tag{6.6.530}$$

Que nous allons réécrire dans notre cas :

$$\begin{aligned}&\vec{u}_1 = \text{col}_1(A)\\ &\vec{u}_2 = \text{col}_2(A) - \frac{\vec{u}_1\circ\text{col}_2(A)}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 = \text{col}_2(A) - \text{proj}_{u_1}\text{col}_2(A)\\ &\vec{u}_3 = -\frac{\vec{u}_1\circ\text{col}_3(A)}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{e}_1 - \frac{\vec{u}_2\circ\text{col}_3(A)}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 + \text{col}_3(A) = -\text{proj}_{u_1}\text{col}_3(A) - \text{proj}_{u_2}\text{col}_2(A) + \text{col}_3(A)\\ &\quad\vdots\\ &\vec{u}_k = \text{col}_k(A) - \sum_{j=1}^{k-1}\text{proj}_{u_j}\text{col}_k(A)\end{aligned} \tag{6.6.531}$$

Et dans la décomposition QR il est traditionnel de prendre :

$$\text{col}_i(Q) = \vec{e}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|} \tag{6.6.532}$$

Donc avec cette tradition on a (Q est non seulement orthogonal mais orthonormé !) :

$$Q = [\vec{e}_1|\vec{e}_2|\ldots|\vec{e}_n] \tag{6.6.533}$$

Avant de continuer, montrons un exemple complémentaire. Considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix} \tag{6.6.534}$$

Exécutons le processus de Gram-Schmidt avec les colonnes $\text{col}_1(A)$ et $\text{col}_2(A)$:

$$\begin{aligned}&\vec{u}_1 = \text{col}_1(A) = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\\ &\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\\ &\vec{u}_2 = \text{col}_2(A) - \text{proj}_{u_1} = \text{col}_2(A) - \frac{\vec{u}_1\circ\text{col}_2(A)}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 = \text{col}_2(A) - (\vec{e}_1\circ\text{col}_2(A))\vec{e}_1\\ &\quad = \begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix} - \frac{(-3+5)}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix} - \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}\\ &\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.6.535}$$

C'est ainsi que le processus de Gram-Schmidt produit la matrice Q. Voici une des méthodes pour trouver R dans ce qui va suivre.

En cours de traduction de l'anglais

Pour cela le lecteur doit comprendre (et voir !) qu'à chaque étape de la procédure de Gram-Schmidt, les opérations sur les vecteurs correspondent aux opérations colonnes A, qui correspondent à la multiplication par des matrices élémentaires sur la droite. Écrivons toutes ces matrices :

$$
\begin{aligned}
&A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}\\
&A\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 3\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 5\end{bmatrix}\\
&A\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 4\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 4\end{bmatrix}\\
&A\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=Q
\end{aligned}
\tag{6.6.536}
$$

De cela, nous obtenons (en utilisant les propriétés sur les matrices inverses) :

$$
\begin{aligned}
A&=Q\left(\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right)^{-1}\\
&=Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\
&=Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\
&=Q\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 4\sqrt{2}\end{bmatrix}=QR
\end{aligned}
\tag{6.6.537}
$$

Nous avons trouvé :

$$
R=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 4\sqrt{2}\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}
\tag{6.6.538}
$$

Vérifions la factorisation :

$$
QR=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\sqrt{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}=A
\tag{6.6.539}
$$

En cours de traduction de l'anglais

Réécrivons les égalités à l'aide de symboles, afin d'obtenir la relation générale :

$$\begin{aligned}
&A=[\text{col}_1(A),\text{col}_2(A)]=[\vec{u}_1,\text{col}_2(A)]\\
&A\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\|\vec{u}_1\|} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} & \text{col}_2(A)\end{bmatrix}=[\vec{e}_1,\text{col}_2(A)]\\
&A\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\|\vec{u}_1\|} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -(\vec{e}_1\circ\text{col}_2(A))\\ 0 & 1\end{bmatrix}=[\vec{e}_1,\text{col}_2(A)-(\vec{e}_1\circ\text{col}_2(A))\vec{e}_1]=[\vec{e}_1,\vec{u}_1]\\
&A\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\|\vec{u}_1\|} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -(\vec{e}_1\circ\text{col}_2(A))\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\|\vec{u}_2\|}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{e}_1, & \dfrac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}\end{bmatrix}=[\vec{e}_1,\vec{e}_2]=Q
\end{aligned}\tag{6.6.540}$$

De ceci nous obtenons :

$$\begin{aligned}
A&=Q\left(\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\|\vec{u}_1\|} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -(\vec{e}_1\circ\text{col}_2(A))\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\|\vec{u}_2\|}\end{bmatrix}\right)^{-1}\\
&=Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\|\vec{u}_2\|}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & -(\vec{e}_1\circ\text{col}_2(A))\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\|\vec{u}_1\|} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\
&=Q\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \|\vec{u}_2\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \vec{e}_1\circ\text{col}_2(A)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\vec{u}_1\| & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\
&=Q\begin{bmatrix}\|\vec{u}_1\| & \vec{e}_1\circ\text{col}_2(A)\\ 0 & \|\vec{u}_2\|\end{bmatrix}=QR
\end{aligned}\tag{6.6.541}$$

Cette relation pour R se généralise à toute valeur de n. Par exemple, si n était 3, R serait donnée par :

$$R=\begin{bmatrix}\|\vec{u}_1\| & \vec{e}_1\circ\text{col}_2(A) & \vec{e}_1\circ\text{col}_3(A)\\ 0 & \|\vec{u}_2\| & \vec{e}_2\circ\text{col}_2(A)\\ 0 & 0 & \|\vec{u}_3\|\end{bmatrix}\tag{6.6.542}$$

Sachant cela, il n'est pas nécessaire de réécrire tout le calcul à chaque fois. Nous pouvons simplement construire la matrice R au fur et à mesure du processus de Gram-Schmidt. Donc plus généralement :

$$R=\begin{bmatrix}\|\vec{u}_{11}\| & \vec{e}_1\circ\text{col}_2(A) & \cdots & \vec{e}_1\circ\text{col}_n(A)\\ 0 & \|\vec{u}_{22}\| & \cdots & \vec{e}_2\circ\text{col}_n(A)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \|\vec{u}_{mn}\|\end{bmatrix}\tag{6.6.543}$$

Il existe également un autre moyen d'obtenir R. En effet, le fait que Q ait des colonnes orthonormées peut être reformulé comme nous le savons sous la forme $Q^TQ=\mathbb{1}$. En particulier, Q a un inverse à gauche, à savoir Q^T. À partir de cela trouvons R :

$$A=QR\Rightarrow Q^TA=Q^TQR=R\tag{6.6.544}$$

Autrement dit, la relation :

$$R=Q^TA\tag{6.6.545}$$

En cours de traduction de l'anglais

tient, quelles que soient les dimensions de la matrice.

Si nous reprenons notre exemple, rappelons que nous avions :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix} \qquad Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{6.6.546}$$

Alors :

$$R=Q^TA=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix} \tag{6.6.547}$$

Pour résumer :

Factorisation	Restrictions	Propriétés des facteurs
SVD $A_{nm}=U_{nn}D_{nm}V_{mm}^T$	aucune	U orthogonale V orthogonale D non-négative
variations : pour A symétrique, $A=VCV^T$		
LU $A_{nn}=L_{nn}U_{nn}$	A carrée, (autres)	L triangulaire inférieure de rang complet U triangulaire supérieure
variations :	avec pivotement partiel, $A=LP$ avec pivotement complet, $P_1AP_2=LU$ $A=LDU$, avec D diagonale et $U_{ii}=1$	
QR $A_{nm}=Q_{nn}R_{nm}$	aucune	Q orthogonale R triangulaire supérieure
variations : "maigre" QR pour $n>m$, $A=Q_1R_1$		
Cholesky $A_{nn}=L_{nn}U_{nn}$	A non négative définie	L triangulaire inférieure de rang complet U triangulaire supérieure
Diagonale (ie orthogonale) $A_{nn}=V_{nn}C_{nn}V_{nn}^T$	A symétrique	V orthogonale C diagonale
Racine carrée $A_{nn}=(A_{nn}^{1/2})^2$	A non négative définie	$A_{nn}^{1/2}$ non négative définie

TAB. 6.20 – **Factorisations matricielles**

En cours de traduction de l'anglais

6.6.8 Identité matricielle de Woodbury et relation de Sherman-Morrison

"L'identité matricielle de Woodbury" donne l'inverse d'une matrice carrée $n \times n$ d'une matrice A modifiée par un terme perturbatif UBV^T :

$$(A+UBV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1}+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1} \qquad (6.6.548)$$

C'est un résultat très utile pour notre étude sur l'inverse et le déterminant d'une matrice symétrique partitionnée (elle-même utile pour l'outil statistique d'Analyse Factorielle). Elle a aussi d'autres applications pratiques comme pour la ACPP (Analyse en Composantes Principales Probabiliste) ou pour les modèles linéaires hiérarchiques !

La preuve est plutôt simple :

Démonstration 6.45.4.

$$\begin{aligned}
&(A+UBV^T)\left[A^{-1}-A^{-1}U(B^{-1}+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1}\right]\\
&=\left[\mathbb{1}-U\left(B^{-1}+V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1}\right]+\left[UBV^TA^{-1}-UBV^TA^{-1}U\left(B^{-1}+V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1}\right]\\
&=\mathbb{1}+UBV^TA^{-1}-\left[U\left(B^{-1}+V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1}+UBV^TA^{-1}U\left(B^{-1}+V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1}\right]\\
&=\mathbb{1}+UBV^TA^{-1}-\left(U+UBV^TA^{-1}U\right)\left(B^{-1}+V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1}\\
&=\mathbb{1}+UBV^TA^{-1}-UB\left(B^{-1}+V^TA^{-1}U\right)\left(B^{-1}+V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1}\\
&=\mathbb{1}+UBV^TA^{-1}-UBV^TA^{-1}=\mathbb{1}
\end{aligned} \qquad (6.6.549)$$

■ Q.E.D.

Prenons quelques cas particuliers :

- Si $U=V=\mathbb{1}$, nous obtenons alors :

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1} \qquad (6.6.550)$$

- Si $B=\mathbb{1}$, et posons $U=[\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m]$ et $V=[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m]$, nous obtenons alors l'inverse d'une matrice modifiée de rang n :

$$\left(A+UV^T\right)^{-1}=\left(A+\sum_{i=1}^{m}\vec{u}_i\vec{v}_i^T\right)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U\left(\mathbb{1}+V^TA^{-1}U\right)^{-1}V^TA^{-1} \qquad (6.6.551)$$

- Plus spécialement, lorsque $m=1$, $U=\vec{u}$ et $V=\vec{v}$ nous obtenons l'inverse de la matrice modifiée de rang 1 :

$$(A+\vec{u}\vec{v}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\vec{u}\vec{v}^TA^{-1}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}} \qquad (6.6.552)$$

Voyons deux démonstrations possibles de ce dernier cas ! Première démonstration possible :

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.45.5. Nous montrons d'abord que ce qui suit est une identité ($A=\mathbb{1}$) :

$$(\mathbb{1}+\vec{w}\vec{v}^T)^{-1}=\mathbb{1}-\frac{\vec{w}\vec{v}^T}{1+\vec{v}^T\vec{w}} \tag{6.6.553}$$

Pré-multipliant par $\mathbb{1}+\vec{w}\vec{v}^T$, le côté droit devient $\mathbb{1}$ ainsi que le côté gauche :

$$\mathbb{1}+\vec{w}\vec{v}^T-\frac{\vec{w}\vec{v}^T+\vec{w}\vec{v}^T\vec{w}\vec{v}^T}{1+\vec{v}^T\vec{w}}=\mathbb{1}+\vec{w}\vec{v}^T-\frac{\vec{w}\left(1+\vec{v}^T\vec{w}\right)\vec{v}^T}{1+\vec{v}^T\vec{w}}=\mathbb{1}+\vec{w}\vec{v}^T-\vec{w}\vec{v}^T=\mathbb{1} \tag{6.6.554}$$

Nous posons ensuite $\vec{u}=A\vec{w}$ dans :

$$(A+\vec{u}\vec{v}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\vec{u}\vec{v}^TA^{-1}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}} \tag{6.6.555}$$

et le membre de gauche de la relation à prouver devient :

$$\begin{aligned}\left(A+\vec{u}\vec{v}^T\right)^{-1}&=\left(A+A\vec{w}\vec{v}^T\right)^{-1}=\left(A\left(\mathbb{1}+\vec{w}\vec{v}^T\right)\right)^{-1}=\left(\mathbb{1}+\vec{w}\vec{v}^T\right)^{-1}A^{-1}\\&=\left(\mathbb{1}-\frac{\vec{w}\vec{v}^T}{1+\vec{v}^T\vec{w}}\right)A^{-1}\end{aligned} \tag{6.6.556}$$

Remplaçant $\vec{w}=A^{-1}\vec{u}$ nous obtenons la "relation de Sherman-Morrison" :

$$\left(A+\vec{u}\vec{v}^T\right)^{-1}=\left(\mathbb{1}-\frac{A^{-1}\vec{u}\vec{v}^T}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}}\right)A^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\vec{u}\vec{v}^TA^{-1}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}} \tag{6.6.557}$$

■ Q.E.D.

Et deuxième preuve possible :

Démonstration 6.45.6. Cette deuxième preuve est basée sur le problème suivant. En supposant qu'un système d'équations linéaires $A\vec{y}=\vec{b}$ est résolu pour obtenir $\vec{y}=A^{-1}\vec{b}$, nous voulons pour résoudre ce système :

$$(A+\vec{u}\vec{v}^T)\vec{x}=\vec{b} \tag{6.6.558}$$

Nous prémultiplions d'abord les deux côtés de cette équation par A^{-1} pour obtenir :

$$A^{-1}\left(A+\vec{u}\vec{v}^T\right)\vec{x}=\left(\mathbb{1}+A^{-1}\vec{u}\vec{v}^T\right)\vec{x}=\vec{x}+A^{-1}\vec{u}\vec{v}^T\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\vec{y} \tag{6.6.559}$$

Si nous définissons $\vec{w}=A^{-1}\vec{u}$ et $\alpha=\vec{v}^T\vec{x}$, l'équation ci-dessus peut être écrite comme :

$$\vec{x}+\vec{w}\alpha=\vec{y} \tag{6.6.560}$$

En prémultipliant les deux côtés par $\vec{v}^T$, nous obtenons :

$$\vec{v}^T\vec{x}+\vec{v}^T\vec{w}\alpha=\vec{v}^T\vec{y},\qquad \text{i.e.}\qquad \alpha+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}\alpha=\vec{v}^T\vec{y} \tag{6.6.561}$$

En résolvant pour α nous obtenons :

$$\alpha=\frac{\vec{v}^T\vec{y}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}} \tag{6.6.562}$$

En cours de traduction de l'anglais

En remplaçant α dans l'équation précédente par $\vec{x}$, nous obtenons :

$$\vec{x}=\vec{y}-\vec{w}\alpha=\vec{y}-\frac{\vec{w}\vec{v}^T\vec{y}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}}=A^{-1}\vec{b}-\frac{A^{-1}\vec{u}\vec{v}^TA^{-1}\vec{b}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}}=\left(A^{-1}-\frac{A^{-1}\vec{u}\vec{v}^TA^{-1}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}}\right)\vec{b} \quad (6.6.563)$$

Mais en résolvant l'équation $(\vec{A}+\vec{u}\vec{v}^T)\vec{x}=\vec{b}$ nous obtenons aussi :

$$\vec{x}=(A+\vec{u}\vec{v}^T)^{-1}\vec{b} \quad (6.6.564)$$

Nous avons alors :

$$(A+\vec{u}\vec{v}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\vec{u}\vec{v}^TA^{-1}}{1+\vec{v}^TA^{-1}\vec{u}} \quad (6.6.565)$$

■ Q.E.D.

~95 %

36 votes, 79.94%

En cours de traduction de l'anglais

6.7. Calcul Tensoriel

Le calcul vectoriel classique est une technique simple et efficace qui s'adapte parfaitement à l'étude des propriétés mécaniques et physiques de la matière dans l'espace euclidien à trois dimensions. Cependant, dans de nombreux domaines de la physique, il apparaît des grandeurs expérimentales qui ne peuvent plus être facilement représentées par de simples vecteurs-colonnes d'espaces vectoriels euclidiens. C'est le cas par exemple en mécanique des milieux continus, fluides ou solides, en électromagnétisme, relativité générale, etc.

Ainsi, dès la fin du 119e siècle (calendrier holocène), l'analyse des forces qui s'exercent à l'intérieur d'un milieu continu a conduit à mettre en évidence des grandeurs physiques caractérisées par neuf nombres représentant les forces de pression ou de tension internes (voir section Mécanique Des Milieux Continus à la page **??** pour les détails). La représentation de ces grandeurs nécessita l'introduction d'un nouvel être mathématique qui fut appelé "tenseur", par référence à son origine physique. Par la suite, à partir de des années 11900 (calendrier holocène), ce furent R. Ricci et T. Levi-Civita qui développèrent le calcul tensoriel ; puis l'étude des tenseurs permit un approfondissement de la théorie des espaces vectoriels et contribua au développement de la géométrie différentielle (voir section du même nom à la page 2822).

Le calcul tensoriel, appelé aussi parfois "géométrie différentielle absolue" a également pour avantage de se libérer de tous les systèmes de coordonnées et les résultats des développements mathématiques sont ainsi invariants (énorme allégement des calculs). Il n'y a plus alors à se préoccuper dans quel référentiel il convient de travailler et cela, est très intéressant en Relativité Générale.

Nous conseillons fortement au lecteur de très bien maîtriser les bases du calcul vectoriel et de l'algèbre linéaire telles qu'elles ont été présentées précédemment dans les sections précédentes (surtout parce que l'algèbre linéaire forme la colonne vértébrarle du calcul tensoriel !). Si nécessaire, nous avons choisi lors de la rédaction de cette section de revenir sur certains points vus dans la section Calcul Vectoriel et Algèbre Linéaire (composantes covariantes, composantes contravariantes, etc.).

Par ailleurs, si le lecteur a déjà parcouru l'étude des contraintes dans les solides (voir section Mécanique des Milieux Continus page **??**) ou du tenseur de Faraday (voir section Électrodnyamique page **??**) ou du tenseur d'énergie-impulsion (voir section Relativité Générale page **??**) ceci constituera un avantage pratique certain avant de parcourir ce qui va suivre. Par ailleurs, la rédaction des objets susmentionnés a été faite de telle manière que la notion de tenseur y soit introduite si possible (...) intuitivement.

Nous ne ferons que très peu d'exemples pratiques dans cette section. Effectivement les exemples concrets, vous l'aurez compris, viendront lorsque nous étudierons la mécanique des milieux continus, la relativité générale, la physique quantique des champs, l'électrodynamique, etc.

Un conseil peut-être : vous avez vu à plusieurs reprises dans la section Statistiques qu'écrire

En cours de traduction de l'anglais

avec des vecteurs et après réflexion avec une matrice était un moyen puissant de généraliser certains résultats importants. Pour cette section sur les tenseurs rappelez-vous que l'idée est la même mais on écrit avec des matrices et on généralise avec des tenseurs (vous comprendrez mieux ce petit adage une fois que vous aurez fini de lire toute cette section) !

6.7.1 Tenseur

Définition (simpliste #260) : Les "tenseurs" sont des objets mathématiques souvent représentés à tort (mais c'est pour des raisons pédagogiques pour les cours aux ingénieurs) comme généralisant les notions de vecteurs et de matrices. Ils ont été initiallement introduits en physique pour représenter l'état de contrainte et de déformation d'un volume soumis à des forces, d'où leur nom (tensions).

La définition rigoureuse, elle, nécessite (je pense personnellement) d'avoir d'abord lu la présente section dans son intégralité. Mais pour les impatients sachez qu'au fait un tenseur est grosso modo comme le déterminant d'une matrice carrée (voir section Algèbre Linéaire page 1935) ou comme le produit scalaire de vecteurs (voir section Algèbre Linéaire page 1798)... Eh oui ! C'est simplement une application T multilinéaire sur un espace de dimension donnée (correspondant au nombre de colonnes de la matrice/tenseurs) qui donne finalement un scalaire (d'un corps donné). Par exemple dans le cas bilinéaire un tenseur (dit alors "tenseur d'ordre 2") est défini par :

$$\begin{aligned} &T(\vec{u},\vec{v})\in\mathbb{R}\\ &T(\lambda\vec{u},\mu\vec{v})=\lambda\mu T(\vec{u},\vec{v})\\ &T(\vec{u}+\vec{w},\vec{v})=T(\vec{u},\vec{v})+T(\vec{w},\vec{v}) \end{aligned} \tag{6.7.1}$$

Par exemple pour deux vecteurs de dimension deux nous avons dans une base orthonormale en utilisant la propriétié de linéarité et de multiplication par un scalaire :

$$\begin{aligned} T(\vec{u},\vec{v})&=T\left(u^x\vec{e}_x+u^y\vec{e}_y,v^x\vec{e}_x+v^y\vec{e}_y\right)\\ &=T\left(u^x\vec{e}_x,v^x\vec{e}_x+v^y\vec{e}_y\right)+T\left(u^y\vec{e}_y,v^x\vec{e}_x+v^y\vec{e}_y\right)\\ &=T\left(u^x\vec{e}_x,v^x\vec{e}_x\right)+T\left(u^x\vec{e}_x,v^y\vec{e}_y\right)+T\left(u^y\vec{e}_y,v^x\vec{e}_x\right)+T\left(u^x\vec{e}_y,v^y\vec{e}_y\right)\\ &=u^xv^x\underbrace{T(\vec{e}_x,\vec{e}_x)}_{T_{xx}=1}+u^xv^y\underbrace{\cancel{T(\vec{e}_x,\vec{e}_y)}}_{T_{xy}=0}+u^yv^x\underbrace{T(\vec{e}_y,\vec{e}_x)}_{T_{yx}=0}+u^yv^y\underbrace{T(\vec{e}_y,\vec{e}_y)}_{T_{yy}=1}\\ &=u^xv^x \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

Et nous voyons que nous retombons sur l'expression du produit scalaire. Et en dans la pratique c'est malheureusement la matrice (dans le cas bilinéaire sinon ce n'est plus une matrice !) :

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy}\\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix}$$

qui est souvent appelée à tort (par souci de simplification de language) le "tenseur" au lieu de la "matrice associée à l'application tensorielle T".

Par exemple, nous avons démontré dans la section de Mécanique Des Milieux Continus que les forces normales et tangentielles dans un fluide étaient données par la relation :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \tag{6.7.3}$$

ce qui se notait sous la forme traditionnelle condensée suivante (où nous ne distinguons plus ce qui est tangentiel de ce qui est normal il y a donc une perte de clarté) :

$$N_i = \sigma_{ij} n_j \tag{6.7.4}$$

Nous faisons ainsi apparaître une grandeur mathématique σ_{ij} ayant 9 composantes, alors qu'un vecteur dans le même espace $\mathbb{R}^3$ en possède 3.

Cette notion est aussi beaucoup utilisée dans la section de Relativité Générale où nous avons démontré que le tenseur d'énergie-impulsion dans un cas particulièrement simple est donné par :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\gamma^2 c^2 & \rho\gamma^2 c v^x & \rho\gamma^2 c v^y & \rho\gamma^2 c v^z \\ \rho\gamma^2 c v^x & \rho\gamma^2 v^x v^x & \rho\gamma^2 v^x v^y & \rho\gamma^2 v^x v^z \\ \rho\gamma^2 c v^y & \rho\gamma^2 v^y v^x & \rho\gamma^2 v^y v^y & \rho\gamma^2 v^y v^z \\ \rho\gamma^2 c v^z & \rho\gamma^2 v^z v^x & \rho\gamma^2 v^z v^y & \rho\gamma^2 v^z v^z \end{bmatrix} \tag{6.7.5}$$

et satisfait à la relation non moins importante de conservation :

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{6.7.6}$$

Ou sinon, toujours dans la section de Relativité Générale, nous avons démontré que le tenseur de la métrique de Schwarzschild est :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2(\theta)) \end{bmatrix} \tag{6.7.7}$$

et donne donc "l'équation de la métrique" ou "l'intervalle invariant" (voir section Relativité Restreinte page ??) :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{6.7.8}$$

Signalons également que dans le chapitre de Relativité Restreinte nous avons démontré que le tenseur de transformation de Lorentz est donné par :

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{6.7.9}$$

qui sous forme condensée donne la transformation de composantes suivantes :

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \tag{6.7.10}$$

En cours de traduction de l'anglais

En ce qui concerne la transformation du champ électromagnétique nous avons également démontré que le tenseur de Faraday est donné par :

$$F^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 1 \end{bmatrix} \tag{6.7.11}$$

et permet donc de passer d'un référentiel à un autre à l'aide de la relation :

$$F'^{\mu\nu}=L^{\mu}_{\alpha}L^{\nu}_{\beta}F^{\alpha\beta} \tag{6.7.12}$$

Mais ce sont des tenseurs très simples qui peuvent être représentés sous formes de matrices. Il faut également savoir que ce n'est pas parce qu'une lecture d'une variable avec des indices semble indiquer que nous avons affaire à un tenseur que cela en est forcément un. Par exemple, la relation fameuse (très utilisée dans la section de Relativité Générale) :

$$\Gamma^{i}_{kj}=g^{il}\Gamma_{klj}=\frac{1}{2}g^{il}\left(\partial_k g_{lj}+\partial_j g_{kl}-\partial_l g_{kj}\right) \tag{6.7.13}$$

pourrait suggérer que le premier membre tout à gauche est un tenseur mais au fait il n'est est rien... ce n'est qu'un symbole... d'où son nom : symbole de Christoffel (et non pas : tenseur de Christoffel).

L'intérêt des tenseurs en physique est que leurs caractéristiques sont indépendantes des coordonnées choisies. Ainsi, une relation entre tenseurs dans une base sera vraie quelle que soit la base utilisée par la suite. C'est une caractéristique fondamentale pour la Relativité Générale (parmis d'autres) !

En cours de traduction de l'anglais

6.7.2 Notation Indicielle

Nous utilisons par la suite de nombreux symboles mathématiques : coordonnées, composantes de vecteurs et tenseurs, éléments de matrice, etc..., dont le nombre, dans chaque catégorie, est grand ou indéterminé. Pour distinguer les divers symboles d'une catégorie nous employons des indices. Par exemple, au lieu des variables traditionnelles x,y,z nous utiliserons éventuellement les grandeurs x_1,x_2,x_3 (comme nous l'avons déjà fait en algèbre linéaire). Cette notation devient indispensable lorsque nous avons des variables en nombre indéterminé.

Ainsi, si nous avons n variables, nous les noterons par $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Nous utiliserons également des indices supérieurs, selon les besoins ; par exemple, x^1,x^2,x^3. Afin d'éviter toute confusion avec l'écriture des puissances, la quantité x^i à la puissance p sera notée $(x^i)^p$. Lorsque le contexte écarte tout risque d'ambiguïté, l'utilisation des parenthèses n'est cependant pas fondamentalement nécessaire.

En calcul tensoriel il existe une convention de sommation qui consiste à utiliser le fait que l'indice répété, ci-dessous l'indice i, va devenir lui-même l'indication de la sommation. Nous écrivons alors, avec cette convention :

$$\sum_{i=1}^{n} x^i y^i = x^i y^i = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n \tag{6.7.14}$$

ce qui permet de condenser relativement bien les écritures.

Ainsi, pour représenter le système linéaire :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{6.7.15}$$

nous écrirons (remarquez bien comment s'écrivent les composantes de la matrice associée !) :

$$a_{ij}x_j = b_i \tag{6.7.16}$$

en spécifiant que c'est pour $n=3$.

Nous voyons sur cet exemple, combien la convention de sommation permet une écriture condensée et donc puissante.

La convention de sommation s'étend à tous les symboles mathématiques comportant des indices répétés. Ainsi la décomposition d'un vecteur $\vec{x}$ sur une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ s'écrit pour $n=3$ dès lors :

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x^i\vec{e}_i \tag{6.7.17}$$

En résumé, toute expression qui comporte un indice deux fois répété représente une somme sur toutes les valeurs possibles de l'indice répété.

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Nous nommons, pour des raisons évidentes que nous détaillerons plus loin, x^i la "composante contravariantet" du vecteur $\vec{x}$.

6.7.2.1 Sommation sur plusieurs indices

La convention de sommation (due à Einstein) s'étend au cas où figurent, en règle générale, plusieurs indices répétés en positions supérieure et inférieure dits "indices muets" dans un même monôme (souvent les physiciens omettent la règle de les mettre en position opposées comme ce sera aussi le cas souvent dans ce livre !). Soit par exemple, la quantité $A_i^j x^i x^j$, celle-ci représente la somme suivante pour i et j prenant les valeurs de 1 à 2 :

$$A_i^j x^i x^j = A_1^1 x^1 x^1 + A_2^1 x^1 x^2 + A_1^2 x^2 x^1 + A_2^2 x^2 x^2 \tag{6.7.18}$$

Ainsi, nous voyons facilement qu'une expression avec deux indices de sommation qui prennent respectivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$ comportera n^2 termes ; n^3 s'il y a trois indice de sommation etc.

Il faut faire cependant attention aux substitutions avec ce genre de notation car si nous supposons que nous avons la relation :

$$A = a_{ij} x^i y_j \quad \text{et} \quad x^i = c_{ij} y^j \tag{6.7.19}$$

alors pour obtenir l'expression de A uniquement en fonction des variables y^j, nous ne pouvons pas écrire :

$$A = a_{ij} c_{ij} y^i y_j \tag{6.7.20}$$

car cela ne revient pas à la même expression après développement puisque les indices muets sont systématiquement sommés de manières identiques et rigides (nous laissons au lecteur le soin de faire ce petit exercice de style). En d'autres termes, un même indice muet ne peut pas être répété plus de 2 fois.

6.7.2.2 Symbole de Kronecker

Ce symbole introduit par le mathématicien Kronecker, est le suivant (souvent utilisé en physique en général dans de nombreux domaines) :

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{6.7.21}$$

Ce symbole est appelé "symbole de Kronecker". Il permet avantageusement d'écrire, par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, de norme unité et orthogonaux entre eux, sous la forme :

$$\vec{e}_i \circ \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{6.7.22}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous retrouverons ce symbole dans de nombreux exemples de physique théorique (physique quantique ondulatoire, physique quantique des champs, relativité générale, mécanique des fluides, etc.).

Précisons qu'il existe une version généralisée du symbole de Kronecker :

$$\delta^{ij..l}_{mn..p}=\begin{bmatrix}\delta^i_m & \delta^i_n & \cdots & \delta^i_p\\ \delta^j_m & \delta^j_n & \cdots & \delta^j_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^l_m & \delta^l_n & \cdots & \delta^l_p\end{bmatrix} \tag{6.7.23}$$

Nous avons aussi par exemple :

$$\delta^{ijk}_{mnp}=\begin{bmatrix}\delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_p\\ \delta^j_m & \delta^j_n & \delta^j_p\\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_p\end{bmatrix}=\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mnp} \tag{6.7.24}$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita que nous allons définir immédiatement :

6.7.2.3 Symbole anti-symétrique (symbole de Levi-Civita)

Un autre symbole fort utile est le "symbole d'antisymétrie" ou appelé aussi "tenseur d'anti-symétrie" que nous retrouverons en Électrodynamique, en Relativité Générale et en Physique Quantique Relativiste dans la présent livre.

En mathématiques, en particulier en algèbre linéaire, en analyse tensorielle et en géométrie différentielle, le symbole Levi-Civita représente une collection de nombres; définie à partir du signe d'une permutation des entiers naturels $1,2,\ldots,n$, pour un entier positif n.

Les valeurs du symbole de Levi-Civita sont indépendantes de tout tenseur métrique et système de coordonnées. De plus, le terme spécifique "symbole" souligne qu'il ne s'agit pas d'un tenseur en raison de la façon dont il se transforme entre les systèmes de coordonnées, mais il peut être interprété comme un tenseur antisymétrique (un tenseur est antisymétrique sur (ou par rapport à) un sous-ensemble d'indices s'il alterne le signe (+/-) lorsque deux indices quelconques du sous-ensemble sont interchangés).

Dans le cas $n=2$, le symoble de Levi-Civita est défini par :

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}+1 & \text{si } (i,j) \text{ est } (1,2)\\ -1 & \text{si } (i,j) \text{ est } (2,1)\\ 0 & \text{si } i=j\end{cases} \tag{6.7.25}$$

Les valeurs peuvent être rangées dans une matrice antisymétrique 2×2 (nous voyons que nous nous rabattons sur la définition d'un tenseur antisymétrique) :

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{6.7.26}$$

L'utilisation du symbole 2D est relativement rare, bien que dans certains sujets spécialisés comme la supersymétrie et la théorie des twisteurs, il apparaisse dans le contexte des 2 spineurs. Les symboles Levi-Civita 3D et de dimension supérieure sont plus couramment utilisés.

En cours de traduction de l' anglais

En trois dimensions, le symbole Levi-Civita est défini comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3),(2,3,1) \text{ ou } (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (3,2,1),(1,3,2) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{si } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } k=i \end{cases} \tag{6.7.27}$$

i.e. ε_{ijk} vaut 1 si (i,j,k) est une permutation paire de $(1,2,3)$ ou dans l'ordre naturel $(1,2,3)$, -1 s'il s'agit d'une permutation impaire, et 0 si un index est répété. En trois dimensions seulement, les permutations cycliques de $(1,2,3)$ sont toutes des permutations paires, de même les permutations anti-cycliques sont toutes des permutations impaires. Cela signifie qu'en 3D il suffit de prendre des permutations cycliques ou anticycliques de $(1,2,3)$ et d'obtenir facilement toutes les permutations paires ou impaires.

Il peut également être exprimé avec le symbole Kronecker :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \tag{6.7.28}$$

Une représentation illustrative donne :

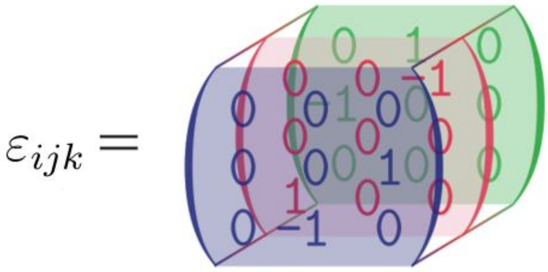


FIG. 6.144 – Symbole 3D de Lévi-Civita (source : Wikipédia)

En utilisant ce symbole, un déterminant d'ordre deux (voir section Algèbre Linéaire page 1935) s'écrit alors sous la forme avantageuse :

$$\det(A) = \det(a_{ij}) = \varepsilon_{ij} a_1^i a_2^j \tag{6.7.29}$$

et le produit vectoriel :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \varepsilon_{ijk} x_j y_k \tag{6.7.30}$$

où bien sûr, j et k sont sommés et où l'indice muet i est le numéro de la ligne du vecteur résultant (en cas de demande nous ferons les développements). En particulier, le rotationnel d'un champ vectoriel (voir section Calcul Vectoriel page 1864) est alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \tag{6.7.31}$$

Comme exemple, calculons en notation indicielle le double produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}$:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} A_j B_m C_n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta jm) A_j B_m C_n = B_i(A_j C_j) - C_i(A_j B_j) \\ &= \vec{B}(\vec{A} \circ \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \circ \vec{B}) \end{aligned} \tag{6.7.32}$$

En cours de ... l' anglais

où à nouveau, l'indice muet i est le numéro de la ligne du vecteur résultant. Voyons la démonstration détaillée de ces égalités (la démonstration des égalités ci-dessous n'a pas besoin de respecter l'ordre des égalités de la relation précédente).

Démonstration 6.45.7. Nous avons indirectement démontré dans le chapitre de Calcul Vectoriel l'identité suivante :

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\circ\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\circ\vec{B}) \tag{6.7.33}$$

Remarque

Cette dernière relation est parfois appelée la "règle de Grassmann", ou plus couramment "double produit vectoriel" et il est important de noter que sans les parenthèses le résultat n'est pas unique.

Pour démontrer la relation :

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}A_jB_mC_n \tag{6.7.34}$$

au changement d'indices près montrons d'abord que :

$$(\vec{B}\times\vec{C})_i=\varepsilon_{ijk}B_jC_k \tag{6.7.35}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} B_2C_3-B_3C_2\\ B_3C_1-B_1C_3\\ B_1C_2-B_2C_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{1jk}B_jC_k\\ \varepsilon_{2jk}B_jC_k\\ \varepsilon_{3jk}B_jC_k\end{pmatrix} \tag{6.7.36}$$

Ne faisons le développement que pour la première ligne (c'est déjà suffisamment long...) :

$$\begin{aligned} &B_2C_3-B_3C_2=\varepsilon_{1jk}B_jC_k=\varepsilon_{11k}B_1C_k+\varepsilon_{12k}B_2C_k+\varepsilon_{13k}B_3C_k\\ &=\varepsilon_{111}B_1C_1+\varepsilon_{112}B_1C_2+\varepsilon_{113}B_1C_3+\varepsilon_{121}B_2C_1+\varepsilon_{122}B_2C_2+\varepsilon_{123}B_2C_3+\varepsilon_{131}B_3C_1\\ &+\varepsilon_{132}B_3C_2+\varepsilon_{133}B_3C_3=\varepsilon_{123}B_2C_3+\varepsilon_{132}B_3C_2=1B_2C_3-1B_3C_2=B_2C_3-B_3C_2\end{aligned} \tag{6.7.37}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer dans un premier temps.

Maintenant montrons que pour la n-ième ligne nous avons bien :

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})_i)_l=\varepsilon_{lni}A_n(\varepsilon_{ijk}B_jC_k)_i \tag{6.7.38}$$

en s'aidant d'un résultat obtenu dans le chapitre de Calcul Vectoriel (produit vectoriel de trois vecteurs différents) nous avons le premier terme (la première ligne du vecteur résultant du calcul) :

$$\begin{aligned} &(A_2(B_1C_2-B_2C_1)_3-A_3(B_3C_1-B_1C_2)_2)_1=\varepsilon_{1ni}A_n(\varepsilon_{ijk}B_jC_k)_i\\ &=\varepsilon_{1n1}A_n(B_2C_3-B_3C_2)_1+\varepsilon_{1n2}A_n(B_3C_1-B_1C_3)_2+\varepsilon_{1n3}A_n(B_1C_2-B_2C_1)_3\\ &=\varepsilon_{111}A_1(B_2C_2-B_3C_2)_1+\varepsilon_{121}A_2(B_2C_2-B_3C_2)_1+\varepsilon_{131}A_3(B_2C_3-B_3C_2)_1\\ &+\varepsilon_{112}A_1(B_3C_1-B_1C_3)_2+\varepsilon_{122}A_2(B_3C_1-B_1C_3)_2+\varepsilon_{132}A_3(B_3C_1-B_1C_3)_2\\ &+\varepsilon_{113}A_1(B_1C_2-B_2C_1)_3+\varepsilon_{123}A_2(B_1C_2-B_2C_1)_3+\varepsilon_{133}A_3(B_1C_2-B_2C_1)_3\\ &=\varepsilon_{123}A_2(B_1C_2-B_2C_1)_3+\varepsilon_{132}A_3(B_3C_1-B_1C_3)_2\\ &=1A_2(B_1C_2-B_2C_1)_3-1A_3(B_3C_1-B_1C_3)_2=A_2(B_1C_2-B_2C_1)-A_3(B_3C_1-B_1C_3)\end{aligned} \tag{6.7.39}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il est immédiat que (i étant égal à 1) :

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C} &= (\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C})_i = B_i(A_jC_j) - C_i(A_jB_j) = \\ &= B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \\ &= B_1A_1C_1 + B_1A_2C_2 + B_1A_3C_3 - C_1A_1B_1 - C_1A_2B_2 - C_1A_3B_3 \\ &= A_2B_1C_2 - A_2B_2C_1 - A_3B_3C_1 + A_3B_1C_3 \\ &= A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)\end{aligned} \tag{6.7.40}$$

Montrons maintenant que pour i égal à 1 nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C} = (\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C})_i &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n \\ &= A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)\end{aligned} \tag{6.7.41}$$

Effectivement :

$$\begin{aligned}&(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C})_1 = (\delta_{1m}\delta_{jn} - \delta_{1n}\delta_{jm})A_jB_mC_n \\ &= (\delta_{1m}\delta_{j1} - \delta_{11}\delta_{jm})A_jB_mC_1 + (\delta_{1m}\delta_{j2} - \delta_{12}\delta_{jm})A_jB_mC_2 + (\delta_{1m}\delta_{j3} - \delta_{13}\delta_{jm})A_jB_mC_3 \\ &= (\delta_{1m}\delta_{11} - \delta_{11}\delta_{1m})A_1B_mC_1 + (\delta_{1m}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{2m})A_2B_mC_1 + (\delta_{1m}\delta_{31} - \delta_{11}\delta_{3m})A_3B_bC_1 \\ &+ (\delta_{1m}\delta_{12} - \delta_{12}\delta_{1m})A_1B_mC_2 + (\delta_{1m}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{2m})A_2B_mC_2 + (\delta_{1m}\delta_{32} - \delta_{12}\delta_{3m})A_3B_mC_2 \\ &+ (\delta_{1m}\delta_{13} - \delta_{13}\delta_{1m})A_1B_mC_3 + (\delta_{1m}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{2m})A_2B_mC_2 + (\delta_{1m}\delta_{33} - \delta_{13}\delta_{3m})A_3B_mC_3 \\ &= (\delta_{1m} - \delta_{1m})A_1B_mC_1 - \delta_{2m}A_2B_mC_1 - \delta_{3m}A_3B_mC_1 + \delta_{1m}A_2B_mC_2 + \delta_{1m}A_3B_mC_3 \\ &= -\delta_{2m}A_2B_mC_1 - \delta_{3m}A_3B_mC_1 + \delta_{1m}A_2B_mC_2 + \delta_{1m}A_3B_mC_3 \\ &= \delta_{21}A_2B_1C_1 - \delta_{22}A_2B_2C_1 - \delta_{23}A_2B_3C_1 - \delta_{31}A_3B_1C_1 - \delta_{32}A_3B_2C_1 - \delta_{33}A_3B_3C_1 \\ &+ \delta_{11}A_2B_1C_2 + \delta_{21}A_2B_2C_2 + \delta_{13}A_2B_3C_2 + \delta_{11}A_3B_1C_3 + \delta_{12}A_3B_2C_3 + \delta_{13}A_3B_3C_3 \\ &= -A_2B_2C_1 - A_3B_3C_1 + A_2B_1C_2 + A_2B_1C_3 = A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)\end{aligned} \tag{6.7.42}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Comme deuxième exemple, montrons que la divergence d'un rotationnel s'annule :

$$\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k \tag{6.7.43}$$

Comme de par le théorème de Schwarz (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1453) $\partial_i\partial_j$ est symétrique (donc intervertir les indices n'a aucun impact) dans les indices et que ε_{ijk} est antisymétrique (par définition) dans les mêmes indices, la somme sur i et j doit nécessairement s'annuler. Par exemple, la contribution à la somme du terme $i=1, j=2$ est l'opposée de celle de $i=2, j=1$.

Remarques

R1. Le symbole d'antisymétrie est très souvent appelé "tenseur de Levi-Civita" dans la littérature. Au fait, bien que ce soit bien un tenseur dans la forme de ses notations, il s'agit plus d'un outil mathématique qu'un "être" mathématique d'où la préférence de certains physiciens de le nommer "symbole" plutôt que "tenseur". Mais c'est à vous de voir...

R2. Par abus d'écriture nous n'écrivons pas le vecteur de base mais en toute rigueur, et pour éviter de l'oublier, rappelons qu'afin d'équilibrer les membres de l'égalité et dans

le souci de préciser que les vecteurs sont exprimés dans la même base, nous devrions écrire :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon_{ijk}A_jB_k\vec{e}_i \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}=\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k\vec{e}_i \tag{6.7.44}$$

Voyons maintenant des applications concrètes de cette notation indicielle en reprenant l'exemple du changement de base que nous avons déjà vu en calcul vectoriel :

Soient deux bases $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n)$ et $(\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\ldots,\vec{e}\,'_n)$ d'un espace vectoriel euclidien . Chaque vecteur d'une base peut être décomposé sur l'autre base sous la forme d'une application linéaire (matrice de changement de base - voir section d'Algèbre Linéaire page 1966) :

$$\vec{e}_i=A'^k_i\vec{e}\,'_k \qquad \text{et} \qquad \vec{e}\,'_k=A^i_k\vec{e}_i \tag{6.7.45}$$

où nous utilisons bien évidemment la convention de sommation pour $i,k=1,2,\ldots,n$.

Rappelons que la matrice de changement de base (ou "matrice transformation") doit avoir autant de colonnes que le vecteur de base a de lignes (dimensions). Un petit exemple à trois dimensions donne :

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1a_{11}+x_2a_{12}+x_3a_{13}\\x_2a_{21}+x_2a_{22}+x_3a_{23}\\x_1a_{31}+x_2a_{32}+x_3a_{33}\end{bmatrix} \tag{6.7.46}$$

et il est évident qu'il est bien plus sympathique d'écrire cela sous la forme :

$$x'_i=A^k_ix_k \tag{6.7.47}$$

où donc sur A, nous avons le k qui représente la colonne de la matrice et i la ligne.

Un vecteur quelconque $\vec{x}$ de $\mathcal{E}^n$ peut être décomposé (nous l'avons déjà vu dans la section de Calcul Vectoriel) sur chaque base de $\mathcal{E}^n$ sous la forme :

$$\vec{x}=x^i\vec{e}_i=x'^k\vec{e}\,'_k \tag{6.7.48}$$

Si nous cherchons les relations entre les composantes x^i et x'^k il suffit de reprendre les relations de changement de base démontrées dans la section d'Algèbre Linéaire et nous avons alors :

$$\vec{x}=x^i\vec{e}_i=x^iA'^k_i\vec{e}\,'_k=x'^kA^i_k\vec{e}_i \tag{6.7.49}$$

De suite par l'unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base, nous pouvons égaler les coefficients des vecteurs de base et nous obtenons (il faut prendre garde à réarranger à nouveau l'ordre des termes car la multiplication matricielle n'est, en règle générale, pas commutative comme nous le savons déjà) :

$$x'^k=A'^k_ix^i \quad \text{et} \quad x^i=A^i_kx'^k \tag{6.7.50}$$

Par construction il vient également la relation triviale :

$$A'^i_kA^j_i=\delta^j_k \tag{6.7.51}$$

En cours de traduction de l'anglais

étant donné que :

$$x^i = A^i_k x'^k = A^i_k (A'^k_i x^i) = (A^i_k A'^k_i) x^i \tag{6.7.52}$$

Effectivement faisons un exemple explicite simple avec une matrice de dimension deux :

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11}a_{11} + a'_{12}a_{21} & a'_{11}a_{12} + a'_{12}a_{22} \\ a'_{21}a_{11} + a'_{22}a_{21} & a'_{21}a_{12} + a'_{22}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.7.53}$$

Une autre manière élégante de montrer en toute généralité la relation antéprécédente est de se rappeler du résultat démontré dans la section d'Algèbre Linéaire :

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^j A'^k_i = \vec{e}'_k = x'^k \vec{e}'_k = x'^k A^i_k \vec{e}_i \tag{6.7.54}$$

et en utilisant :

$$\vec{e}'_k = A^i_k \vec{e}_i \tag{6.7.55}$$

Il vient alors :

$$\vec{e}_i = A'^k_i \vec{e}'_k = A'^k_i A^j_k \vec{e}_j \tag{6.7.56}$$

Les vecteurs de base étant linéairement indépendants, cette dernière relation implique que lorsque $i \neq j$:

$$A'^k_i A^j_k = 0 \tag{6.7.57}$$

et quand $i = j$:

$$A'^k_i A^j_k = 1 \tag{6.7.58}$$

Ainsi il vient :

$$A'^k_i A^j_k = \delta^j_i \tag{6.7.59}$$

Quant au produit scalaire, les résultats obtenus avec la notation indicielle sont forts intéressants et extrêmement puissants. Nous avons déjà défini le produit scalaire dans la section de Calcul Vectoriel (voir page 1798) mais voyons comment nous manipulons ce dernier avec la notation indicielle !

Considérons un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}^n$ rapporté à une base quelconque $\vec{e}_i$. Nous savons déjà que vecteurs s'écrivent sur cette base

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \qquad \vec{y} = y^i \vec{e}_j \tag{6.7.60}$$

Le produit scalaire relativement à ses propriétés et à la notation indicielle s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{x} \circ \vec{y} = (x^i \vec{e}_i) \circ (y^i \vec{e}_j) = x^i y^j (\vec{e}_i \circ \vec{e}_j) = g_{ij} x^i y^j} \tag{6.7.61}$$

Ceci est une relation fondamentale pour la physique de pointe (Relativité Générale et Théorie des Cordes) qui fait apparaître le "tenseur métrique covariant" (voir section Géométrie Non-Euclidienne page 2653) :

$$\boxed{g_{ij} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_j} \tag{6.7.62}$$

En cours de traduction de l'anglais

et pour satisfaire la propriété de commutativité du produit scalaire (voir section Calcul Vectoriel page 1798) nous devons évidemment avoir l'égalité (au moins dans l'espace euclidien ou approché

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (6.7.63)$$

La relation antéprécédente s'écrit aussi parfois sous la forme :

$$[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_1 \circ \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \circ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_2 \circ \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_m \circ \vec{e}_1 & \vec{e}_m \circ \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_m \circ \vec{e}_n \end{bmatrix} \quad (6.7.64)$$

Remarque

Lorsque les vecteurs de base $\vec{e}_i$ forment un espace vectoriel orthogonal (pas nécessairement orthonormé) alors les quantités :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_j \quad (6.7.65)$$

sont bien évidemment nulles si $i \neq j$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ se réduit alors à :

$$\vec{x} \circ \vec{y} = g_{11}x^1y^1 + g_{22}g^2y^2 + \ldots + g_{nn}x^ny^n \quad (6.7.66)$$

Nous avons alors dans ce cas particulier :

$$g_{ij} = \delta_{ij}(\vec{e}_i \circ \vec{e}_j) \quad (6.7.67)$$

et donc lorsque les vecteurs de base forment un espace vectoriel orthonormal il est clair que g_{ij} est alors égal au symbole de Kronecker seul tel que :

$$\vec{x} \circ \vec{y} = \|\vec{x} \circ \vec{y}\|^2 = \delta_{ij}x^iy^j \quad (6.7.68)$$

6.7.3 Métrique et Signature

Comme nous l'avons vu en calcul vectoriel, le produit scalaire d'un vecteur $\vec{x}$ peut permettre de définir la notion de norme d'un vecteur (et le concept de distance).

Rappelons que nous avons par définition la norme d'un vecteur qui est donnée par (voir section Calcul Vectoriel page 1798) :

$$\vec{x} \circ \vec{x} = g_{ij}x^ix^j = \|\vec{x}\|^2 \quad (6.7.69)$$

où les nombres g_{ij} définissent en quelque sorte une "mesure" des vecteurs ; nous disons alors dans le langage du calcul tensoriel qu'ils constituent la "métrique" de l'espace vectoriel choisi.

Dans l'espace de la géométrie classique, la norme est un nombre qui est toujours strictement positif et qui ne devient égal à zéro que si le vecteur mesuré est nul. Par contre, l'expression précédente de la norme d'un vecteur, peut être éventuellement négative pour des nombres

quelconques $g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{nn}$ (espaces complexes par exemple). Nous pouvons donc distinguer deux genres d'espaces vectoriels pré-euclidiens (espace euclidien dans lequel nous avons défini le produit scalaire) selon que la norme est positive ou non. Cependant lorsqu'en physique théorique nous souhaitons faire l'analogie avec une structure d'espace vectoriel il faut que la condition :

$$g = \det[g_{ij}] \neq 0 \tag{6.7.70}$$

soit satisfaite (g_{ij} peut être écrit comme une matrice, rien ne nous l'empêche).

Explications : Nous savons que le produit scalaire doit satisfaire à la propriété de commutativité telle que :

$$\vec{x} \circ \vec{y} = g_{ij} x^i y^j = \vec{y} \circ \vec{x} = g_{ji} x^j y^i \tag{6.7.71}$$

D'autre part, si pour tout y^j non nul nous avons :

$$g_{ij} x^i y^j = 0 \tag{6.7.72}$$

cela implique $x^i = 0$ (c'est une des propriétés de la norme que nous avons vue dans la section de Calcul Vectoriel). Nous pouvons alors écrire :

$$g_{ij} x^i = 0 \tag{6.7.73}$$

Nous nous retrouvons ici simplement avec un système de n équations à n inconnues (ne devant admettre par hypothèse que la solution $x^i = 0$), il faut et il suffit pour cela que le déterminant du système, noté g, du système soit différent de zéro (voir section d'Algèbre Linéaire page 1955). Nous devons donc avoir :

$$g = \det[g_{ij}] \neq 0 \tag{6.7.74}$$

C'est une des conditions pour qu'une expression assimilable à une norme sous une écriture tensorielle forme dans le cadre d'une théorie physique un espace vectoriel des états du système ! !

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Le nombre de signes $+$ et $-$ se trouvant dans l'expression du produit scalaire constitue une caractéristique d'un espace vectoriel donné ; elle est appelée la "signature de l'espace vectoriel".

R2. Une application pratique des calculs de la métrique est proposée dans le chapitre de Relativité Générale.

À partir des coefficients du tenseur métrique covariant définissant la métrique de l'espace E^n, nous pouvons introduire les coefficients du "tenseur métrique contravariant g^{ij}" définissant la métrique d'un "espace dual" E_*^n par la relation :

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{6.7.75}$$

En d'autres termes, le tenseur métrique deux fois covariant est son propre inverse par son équivalent deux fois contravariant. Nous le démontrerons explicitement plus loin en montrant lors de notre étude du déterminant de Gram que les composantes contravariantes et covariantes d'un espace euclidien sont égales et que les deux espaces ont le même nombre de dimensions.

Un cas particulier qui satisfait la relation ci-dessus est le tenseur métrique de Minkowski (voir section de Relativité Restreinte page ??), où nous avons :

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.7.76}$$

Remarque

L'espace E^n est aussi appelé "espace primal" et si il est de type euclidien il est noté pour rappel par $\mathcal{E}^n$.

L'espace dual est sous-tendu par n vecteurs de base $\vec{e}^{\,i}$ construits à partir des vecteurs $\vec{e}_i$ tels que :

$$\boxed{\vec{e}^{\,i} = g^{ij}\vec{e}_j} \tag{6.7.77}$$

Il est dès lors facile de voir que le produit scalaire des vecteurs $\vec{e}^{\,i}$ définit la métrique g^{ij} de l'espace dual :

$$\vec{e}^{\,i} \circ \vec{e}^{\,j} = (g^{ik}\vec{e}_k) \circ (g^{jl}\vec{e}_l) = g^{ik}g^{jl}(\vec{e}_k \circ \vec{e}_l) = g^{ik}(g^{jl}g_{kl}) = g^{ik}\delta_k^j = g^{ij} \tag{6.7.78}$$

tandis que les vecteurs $\vec{e}^{\,i}$ (contravariants) et $\vec{e}_j$ (covariants) sont bien orthogonaux :

$$\vec{e}^{\,i} \circ \vec{e}_j = (g^{ik}\vec{e}_k) \circ \vec{e}_j = g^{ik}(\vec{e}_k \circ \vec{e}_j) = g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i \tag{6.7.79}$$

Nous pouvons exprimer aussi un vecteur dans la base duale par l'écriture suivante en remarquant bien évidemment que la position des indices muets est alors inversée :

$$\vec{x} = x_1\vec{e}^{\,1} + x_2\vec{e}^{\,2} + x_3\vec{e}^{\,3} = x_i\vec{e}^{\,i} \tag{6.7.80}$$

Remarque

Les composantes x_i (projections orthogonales du vecteur sur les axes) sont nommées, pour des raisons que nous verrons plus loin, les composantes covariantes.

Ainsi nous avons finalement la possibilité de passer aussi les vecteurs d'une base à l'autre :

$$\vec{x} = x_i\vec{e}^{\,i} = x_i(g^{ik}\vec{e}_k) = (x_i g^{ik})\vec{e}_k = x^k\vec{e}_k \tag{6.7.81}$$

où ce qu'il est important de retenir est que pour rendre contravariante une composante covariante, nous montons son indice :

$$\boxed{x^k = g^{ik}x_i} \tag{6.7.82}$$

En cours de traduction de l'anglais

et inversement, pour la rendre covariante :

$$x_i = g_{ik} x^k \quad (6.7.83)$$

Un "vecteur covariant" ou "vecteur cotangent" (parfois abrégé en "covecteur") a des composants qui co-varient avec un changement de base. Autrement dit, les composantes doivent être transformées par la même matrice que la matrice de changement de base. Les composantes des covecteurs (par opposition à celles des vecteurs) sont dites "covariantes".

Ainsi, toujours dans le cas de l'exemple de la métrique de Minkowski, si nous considérons le quadrivecteur contravariant :

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, \vec{x}) \quad (6.7.84)$$

Nous avons alors :

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = \eta_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = (x_0, -x_i) = (x_0, -\vec{x}) \quad (6.7.85)$$

6.7.4 Déterminant de Gram

En cours de traduction de l'anglais

Voyons une autre approche pour déterminer les vecteurs de base de l'espace dual qui peut permettre par ailleurs de mieux appréhender le concept et qui nous permettra d'obtenir un résultat intéressant que nous utiliserons lors de certains calculs de la relativité générale (principalement son étude selon le formalisme lagrangien).

Nous avons donc pour $i = j = 1$:

$$\vec{e}^{\,1} \circ \vec{e}_1 = 1 \quad (6.7.86)$$

Ce produit scalaire peut être vu comme une condition de normalisation pour les deux bases et les deux produits scalaires $\vec{e}^{\,2} \circ \vec{e}_1 = 0, \vec{e}^{\,2} \circ \vec{e}_1 = 0$ comme des conditions d'orthogonalisation. Ainsi, comme $\vec{e}_1$ est perpendiculaire à $\vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}$ nous pouvons écrire :

$$\vec{e}^{\,1} = c^{te}(\vec{e}^{\,2} \times \vec{e}^{\,3}) \quad (6.7.87)$$

où c^{te} est une constante de proportionnalité. Maintenant jouons un peu avec la relation précédente :

$$\vec{e}^{\,1} \circ \vec{e}_1 = c^{te} \vec{e}^{\,1} \circ (\vec{e}^{\,2} \times \vec{e}^{\,3}) = 1 \quad (6.7.88)$$

Nous avons alors :

$$c^{te} = \frac{1}{\vec{e}^{\,1} \circ (\vec{e}^{\,2} \times \vec{e}^{\,3})} = \frac{1}{[\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}]} \quad (6.7.89)$$

où nous voyons apparaître le produit mixte tel que nous l'avions défini dans la section de Calcul Vectoriel.

Ainsi, nous obtenons très facilement :

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{e}^{\,j} \times \vec{e}^{\,k}}{[\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}]} \quad (6.7.90)$$

et même pour des vecteurs contravariants (sans démonstration car peut-être trop évident) :

$$\vec{e}^{\,i} = \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} \quad (6.7.91)$$

Remarques

R1. Le lecteur aura peut-être remarqué que les relations ci-dessus ne sont valables que pour un espace à trois dimensions.

R2. La notation des deux relations précédentes est mathématiquement un peu abusive car en réalité ce n'est pas une égalité entre deux vecteurs mais une application d'un espace vectoriel dans l'autre !

R3. Comme en physique, nous considérons très fréquemment des bases cartésiennes, cylindriques et sphériques orthonormées et que le dénominateur des deux relations précédentes est toujours égal à l'unité dans ces bases alors les vecteurs de bases contravariants s'identifient aux vecteurs de base covariants (et réciproquement). Donc les coordonnées covariantes sont égales aux coordonnées contravariantes pour ces cas particuliers ! ! ! ! ! ! ! ! ! !

Revenons maintenant sur quelque chose qui va nous sembler bien ancien... Dans la section de Calcul Vectoriel, nous avons défini et étudié ce qu'étaient le produit vectoriel et le produit mixte. Nous allons voir maintenant une autre manière de représenter ceux-ci et voir que cette représentation permet d'obtenir un résultat pour le moins pertinent !

Nous avons vu dans la section de Calcul Vectoriel que le produit vectoriel était donné par :

$$\vec{x}\times\vec{y}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{e}_1+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{e}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{e}_3 \qquad (6.7.92)$$

Or, ce que nous n'avions pas vu et que nous pouvons constater maintenant de manière triviale c'est que cette expression n'est que le déterminant vectoriel des matrices suivantes :

$$\vec{x}\times\vec{y}=\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\vec{e}_2\vec{e}_3 & \vec{e}_3\times\vec{e}_1 & \vec{e}_1\times\vec{e}_2\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix} \qquad (6.7.93)$$

...donc oui le résultat ne donne pas un scalaire ! Il s'agit juste d'une notation d'usage.

Mais comme nous faisons du calcul tensoriel, il nous faut maintenant proprement distinguer composantes covariantes et contravariantes. Nous allons donc réécrire cela correctement avec les composantes contravariantes :

$$\vec{x}\times\vec{y}=\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x^1 & x^2 & x^3\\ y^1 & y^2 & y^3\end{bmatrix} \qquad (6.7.94)$$

De même, le produit mixte peut être écrit à l'aide de cette relation et notation :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=\vec{x}\circ(\vec{y}\circ\vec{z})=\vec{x}\circ\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ y^1 & y^2 & y^3\\ z^1 & z^2 & z^3\end{bmatrix}=(x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+x^3\vec{e}_3)\circ\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ y^1 & y^2 & y^3\\ z^1 & z^2 & z^3\end{bmatrix} \qquad (6.7.95)$$

Or, en regardant l'expression du déterminant nous voyons assez facilement, sans même avoir à faire les développements que :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=\vec{e}_1\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)\det\begin{bmatrix}x^1 & x^2 & x^3\\ y^1 & y^2 & y^3\\ z^1 & z^2 & z^3\end{bmatrix} \qquad (6.7.96)$$

En cours de traduction de l'anglais

Effectivement (nous calculons le déterminant en faisant usage de la démonstration du déterminant à trois composantes vue dans la section d'Algèbre Linéaire) :

$$
\begin{aligned}
[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] &= \vec{x}\circ(\vec{y}\times\vec{z})=\vec{e}_1\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)\det\begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3\\ y^1 & y^2 & y^3\\ z^1 & z^2 & z^3\end{bmatrix}\\
&=\vec{e}_1\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)(x^1y^2z^3-x^1y^3z^2-x^2y^1z^3+x^2y^3z^1+x^2y^3z^1+x^3y^1z^2-x^3y^2z^1)\\
&=\vec{e}_1\circ\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)(x^1y^2z^3-x^1y^3z^2-x^2y^1z^3+x^2y^3z^1+x^2y^3z^1+x^3y^1z^2-x^3y^2z^1)\\
&=\vec{e}_1\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(x^1y^2z^3-x^1y^3z^2-x^2y^1z^3+x^2y^3z^1+x^2y^3z^1+x^3y^1z^2-x^3y^2z^1)\\
&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(x^1y^2z^3-x^1y^3z^2-x^2y^1z^3+x^2y^3z^1+x^2y^3z^1+x^3y^1z^2-x^3y^2z^1)\\
&=(x^1y^2z^3-x^1y^3z^2-x^2y^1z^3+x^2y^3z^1+x^2y^3z^1+x^3y^1z^2-x^3y^2z^1)\\
&=((x^1y^2z^3-x^1y^3z^2)-(x^2y^1z^3-x^2y^3z^1)+(x^2y^3z^1+x^3y^1z^2-x^3y^2z^1))\\
&=(x^1(y^2z^3-y^3z^2)+x^2(y^3z^1-y^1z^3)+x^3(y^1z^2-y^2z^1))\\
&=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}y^2z^3-y^3z^2\\y^3z^1-y^1z^3\\y^1z^2-y^2z^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}z^1\\z^2\\z^3\end{pmatrix}\right)=\vec{x}\circ(\vec{y}\times\vec{z})
\end{aligned}
\tag{6.7.97}
$$

La relation antéprécédente est fréquemment notée :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=\sqrt{g}\det\begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3\\ y^1 & y^2 & y^3\\ z^1 & z^2 & z^3\end{bmatrix}\tag{6.7.98}$$

avec évidemment :

$$\sqrt{g}=\vec{e}_1\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]\tag{6.7.99}$$

appelé "volume euclidien" (effectivement rappelons que le produit mixte est un volume comme nous l'avons démontré dans la section de Calcul Vectoriel !)

Remarque

Rappelons encore une fois que si les vecteurs de base sont orthonormés, qu'ils soient exprimés en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques alors :

$$\sqrt{g}=\vec{e}_1\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=1\tag{6.7.100}$$

Par ailleurs, nous avons aussi la relation non moins importante :

$$\sqrt{g}=\vec{e}_1\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=\left(\frac{\vec{e}^{\,2}\times\vec{e}^{\,3}}{[\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}]}\right)\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=\frac{(\vec{e}^{\,2}\times\vec{e}^{\,3})(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}{[\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}]}\tag{6.7.101}$$

En effet, en utilisant la relation vue dans la section de Calcul Vectoriel :

$$(\vec{e}^{\,2}\times\vec{e}^{\,3})\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=(\vec{e}^{\,2}\circ\vec{e}_2)(\vec{e}^{\,3}\circ\vec{e}_3)-(\vec{e}^{\,2}\circ\vec{e}_3)(\vec{e}^{\,3}\circ\vec{e}_2)\tag{6.7.102}$$

En cours de traduction de l'anglais

Or, nous avons vu plus haut que $\vec{e}^i \circ \vec{e}_j = \delta^i_j$ donc :

$$(\vec{e}^2 \circ \vec{e}_2)(\vec{e}^3 \circ \vec{e}_3) - (\vec{e}^2 \circ \vec{e}_3)(\vec{e}^3 \circ \vec{e}_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \tag{6.7.103}$$

et ainsi finalement :

$$\sqrt{g} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \frac{1}{[\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3]} \tag{6.7.104}$$

Ceci ayant été fait revenons à la relation du produit vectoriel :

$$\vec{x} \times \vec{y} = x^i \vec{e}_i \times y^j \vec{e}_j = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} \tag{6.7.105}$$

et exprimons les composantes de la 1ère ligne du déterminant vectoriel dans leur base duale (en coordonnées contravariantes) :

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{[\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3]} & \dfrac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{[\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3]} & \dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{[\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3]} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{[\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3]} \begin{bmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} = \sqrt{g} \begin{bmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.7.106}$$

Bien évidemment, si le produit vectoriel est exprimé en composantes covariantes alors nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} = x_i \vec{e}^i \times y_j \vec{e}^j &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} & \dfrac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} & \dfrac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.7.107}$$

Maintenant appliquons le produit mixte :

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = x^i \vec{e}_i \circ (y^j \vec{e}_j \times z^k \vec{e}_k) = x^i \vec{e}_i \sqrt{g} \circ \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} \tag{6.7.108}$$

en connaissant l'expression du déterminant d'une matrice carrée 3×3 (voir section d'Algèbre Linéaire 1942)il vient immédiatement (nous pouvons détailler sur demande comme à l'habitude dans ce livre) :

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = x^i \vec{e}_i \sqrt{g} \circ \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} = \sqrt{g} \det \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{bmatrix} \tag{6.7.109}$$

En cours de traduction de l'anglais

Inversement, il vient immédiatement :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=x_i\vec{e}^i\circ(y_j\vec{e}^j\times z_k\vec{e}^k)=\frac{1}{\sqrt{g}}\det\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{bmatrix} \tag{6.7.110}$$

Or, nous avons prouvé dans la section de Calcul Vectoriel que $x_i=\vec{x}\circ\vec{e}_i$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=x_i\vec{e}^i\circ(y_j\vec{e}^j\times z_k\vec{e}^k)&=\frac{1}{\sqrt{g}}\det\begin{bmatrix}\vec{x}\circ\vec{e}_1 & \vec{x}\circ\vec{e}_2 & \vec{x}\circ\vec{e}_3\\ \vec{y}\circ\vec{e}_1 & \vec{y}\circ\vec{e}_2 & \vec{y}\circ\vec{e}_3\\ \vec{z}\circ\vec{e}_1 & \vec{z}\circ\vec{e}_2 & \vec{z}\circ\vec{e}_3\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]}\det\begin{bmatrix}\vec{x}\circ\vec{e}_1 & \vec{x}\circ\vec{e}_2 & \vec{x}\circ\vec{e}_3\\ \vec{y}\circ\vec{e}_1 & \vec{y}\circ\vec{e}_2 & \vec{y}\circ\vec{e}_3\\ \vec{z}\circ\vec{e}_1 & \vec{z}\circ\vec{e}_2 & \vec{z}\circ\vec{e}_3\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.7.111}$$

et donc :

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}][\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]=\det\begin{bmatrix}\vec{x}\circ\vec{e}_1 & \vec{x}\circ\vec{e}_2 & \vec{x}\circ\vec{e}_3\\ \vec{y}\circ\vec{e}_1 & \vec{y}\circ\vec{e}_2 & \vec{y}\circ\vec{e}_3\\ \vec{z}\circ\vec{e}_1 & \vec{z}\circ\vec{e}_2 & \vec{z}\circ\vec{e}_3\end{bmatrix} \tag{6.7.112}$$

Cette dernière relation étant souvent appelée "déterminant de Gram". Un cas particulier très intéressant nous donne (nous utilisons la relation entre les composantes métriques et les produits scalaires de la base vectorielle que nous avons prouvé lors de notre étude de la métrique juste plus haut) :

$$[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3][\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]=[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]^2=\det\begin{bmatrix}\vec{e}_1\circ\vec{e}_1 & \vec{e}_1\circ\vec{e}_2 & \vec{e}_1\circ\vec{e}_3\\ \vec{e}_2\circ\vec{e}_1 & \vec{e}_1\circ\vec{e}_2 & \vec{e}_2\circ\vec{e}_3\\ \vec{e}_3\circ\vec{e}_1 & \vec{e}_3\circ\vec{e}_2 & \vec{e}_3\circ\vec{e}_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix} \tag{6.7.113}$$

écrit autrement :

$$(\sqrt{g})^2=g=\det(g_{ij}) \tag{6.7.114}$$

Ainsi, le volume euclidien est donné par ce que nous appellerons le "déterminant fonctionnel" du système (expression que nous retrouverons en Relativité Générale pour calculer le volume réel et en Théorie des Cordes) :

$$\sqrt{g}=\sqrt{\det(g_{ij})} \tag{6.7.115}$$

qui est sans unités (il faut donc le multiplier par un facteur de volume élémentaire pour avoir des unités de volume). Si nous notons autrement le déterminant :

$$\sqrt{g}=\sqrt{|g|} \tag{6.7.116}$$

Nous obtenons la relation assez connue que nous pouvons trouver dans de nombreux livres sur la Relativité Générale et la Théorie des Cordes, mais donnée l'immense majorité du temp sans preuve et nommée le "volume riemannien" ou simplement "forme de volume" :

$$V=\int\limits_V\sqrt{g}=\int\limits_V\sqrt{|g|}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \tag{6.7.117}$$

En cours de traduction de l'anglais

ou écrit sous la forme suivante "d'élément de volume invariant" :

$$\boxed{\mathrm{d}V = \sqrt{g}\mathrm{d}^4 x} \quad (6.7.118)$$

Le lecteur pourra vérifier normalement assez aisément que pour le repère orthonormal cartésienn on retombe biens sur le volume d'un cube et pour le cas sphérique nous retombons bien sur l'expression du volume infinitésimal de la sphère tel que utilisé dans la section sur les Formes Géométriques.

Si nous utilisons le résultat que nous obtenons dans la section de Géométrie Différentielle, nous avons donc pour n'importe quel patch de surface :

$$V = \int\limits_V \sqrt{\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 = \int\limits_V \sqrt{EF - F^2} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \quad (6.7.119)$$

6.7.5 Composantes Contravariantes et Covariantes

En cours de traduction de l'anglais

Jusqu'à maintenant nous avons écrit les indices muets arbitrairement en exposant ou en indice selon notre bon vouloir. Cependant, cela n'est pas toujours autorisé et parfois le fait qu'un indice muet soit en exposant ou en indice a une signification bien particulière. Ceci constitue souvent la difficulté lors de l'étude de certains théorèmes, car si nous n'étudions pas ceux-là depuis le début, nous ne savons pas vraiment comment interpréter la position des indices muets. Il faut donc être extrêmement prudent à ce niveau.

Pour un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}^n$ rapporté à une base quelconque $(\vec{e}_i)$, le produit scalaire d'un vecteur $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ par un vecteur $\vec{e}_j$ de sa base s'écrit (rappelez-vous que cela revient à projeter les composantes sur l'axe correspondant à $\vec{e}_j$) :

$$\vec{x} \circ \vec{e}_j = (x^j \vec{e}_i)\vec{e}_j = x^i g_{ij} = x_j \quad (6.7.120)$$

Donc :

$$\boxed{x_j = x^i g_{ij}} \quad (6.7.121)$$

Cette relation est de première importance en physique théorique et en calcul tensoriel. Il est important de s'en souvenir lorsque nous étudierons la contraction des indices plus tard (vous pouvez observer dans la relation précédente que nous avons "abaissé" dans le membre de gauche l'indice des composantes du membre droit de l'égalité).

Ces produits scalaires notés x_j, s'appellent les "composantes covariantes", dans la base $(\vec{e}_i)$ du vecteur $\vec{x}$. Ces composantes sont donc définies alors par :

$$x_j = \vec{x} \circ \vec{e}_j \quad (6.7.122)$$

Elles seront notées au moyen d'indices inférieurs ! ! ! Nous verrons par la suite que ces composantes s'introduisent naturellement pour certains vecteurs de la physique, par exemple le vecteur gradient. D'autre part, la notion de composante covariante est essentielle pour les tenseurs.

Remarques

R1. N'oubliez jamais qu'il s'agit donc de la projection d'un vecteur sur un vecteur de sa propre base ! ! ! !

R2. Les vecteurs de base ont toujours les indices notés en bas car ils sont leurs propres composantes covariantes (ils se projettent sur eux-mêmes par produit scalaire). C'est la principale astuce utilisée par les débutants pour se rappeler quand mettre les indices inférieurs (et donc ils savent quand mettre le supérieur...) !

Inversement, les "composantes contravariantes" (autrement dit : les composantes non projetées) peuvent être calculées en résolvant, par rapport aux n inconnues , le système de n équations de :

$$x_j = x^i g_{ij} \tag{6.7.123}$$

Les relations précédentes montrent que les composantes covariantes x_j sont liées aux composantes classiques x^i et que les composantes contravariantes x^i sont donc des nombres tels que :

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \tag{6.7.124}$$

En cours de traduction de l' anglais

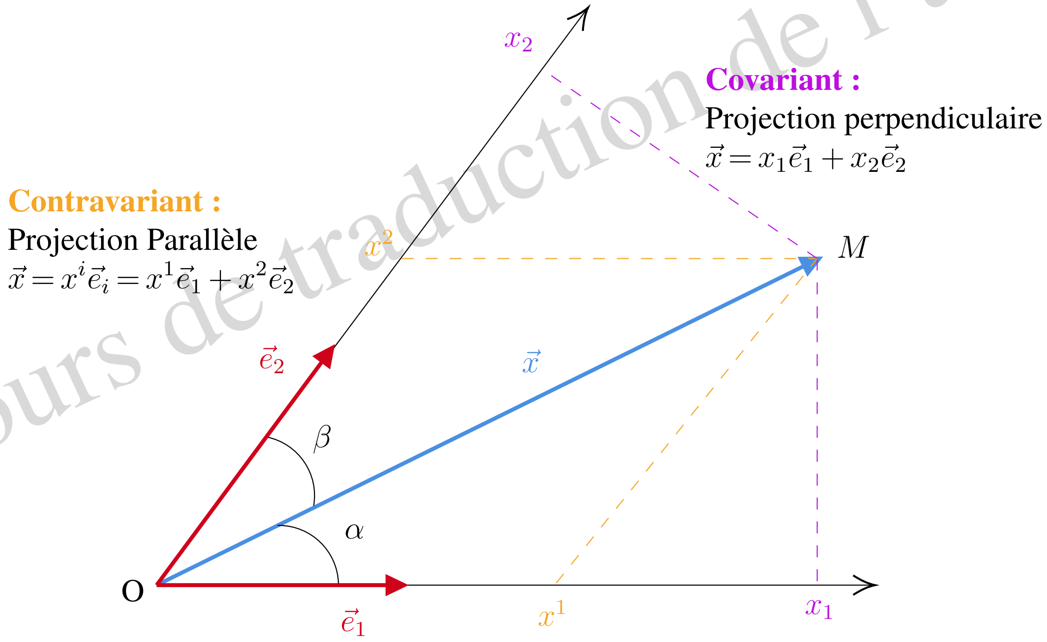


FIG. 6.145 – **Coordonnés covariantes et contravariantes**

Elles seront indiquées au moyen d'indices supérieurs ! ! L'étude des changements de base permettra de justifier encore plus l'appellation des différentes composantes.

Dans une base orthonormée canonique (cas très particulier et correspondant par exemple au coordonnées classiques cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques), les composantes covariantes et contravariantes sont identiques comme nous le savons déjà suite à l'étude du déterminant de Gram. Effectivement :

$$x_j = \vec{x} \circ \vec{e}_j = (x^i \vec{e}_i) \circ \vec{e}_j = x^i (\vec{e}_j \circ \vec{e}_j) = x^i \delta_{ij} = x^j \tag{6.7.125}$$

Remarque

Nous voyons plus haut que l'écriture incessante d'indices factices en exposant ou en indice peut parfois engendrer quelques confusions et de sérieux maux de tête...

Incidemment, lorsque nous nous référons à un vecteur (ou, plus généralement, à un tenseur) comme étant soit contravariant, soit covariant, nous abusons légèrement du langage, car ces termes signifient simplement deux conventions différentes pour interpréter les composants de l'objet par rapport à un système de coordonnées donné, alors que les attributs essentiels d'un vecteur ou d'un tenseur sont indépendants du système de coordonnées particulier dans lequel nous choisissons de l'exprimer. En général, tout vecteur ou tenseur donné (dans une variété métrique) peut être exprimé à la fois sous forme contravariante et covariante par rapport à tout système de coordonnées donné !

De plus, il peut sembler que la convention de dénomination est à l'envers, car les composants "contra" vont avec les axes, alors que les composants "cova" vont à l'encontre des axes, mais historiquement ces noms ont été donnés sur la base de lois de transformation qui s'appliquent à ces deux interprétations différentes.

La plupart des définitions physiques font référence aux composantes contravariantes. Mais il faut être conscient en physique que si nous avons par exemple une singularité dans un tenseur, cette dernière peut être physique ou uniquement due au choix du système de coordonnées ! Il n'y a rien d'inhérent dans les composants contravariants, covariants ou mixtes, par exemple sur le tenseur d'énergie-impulsion (en Relativité Générale(, qui ne puisse être modifié avec une transformation de coordonnées, SAUF pour les scalaires.

En cours de traduction de l'anglais

6.7.6 Opérations dans les Bases

L'intérêt du physicien pour le calcul tensoriel, est le passage de paramètres d'une base à une autre pour des raisons données (souvent dans le but soit de simplifier l'étude de problèmes ou simplement parce que les états étudiés dépendent - ou peuvent dépendre - de la géométrie de l'espace dont il est question). Il convient donc d'introduire les principaux outils qui y sont relatifs. Nous en profiterons aussi pour présenter des développements que nous aurions pu déjà aborder dans la section de Calcul Vectoriel.

Remarque

Comme j'aime à le dire... Le Calcul Tensoriel est à la physique ce que le language XML à l'informatique. Un langage indépendant de l'arrière-plan !

6.7.6.1 Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

En cours de traduction de l'anglais

La "méthode d'orthogonalisation de Schmidt" (appelée également de "méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt") permet la détermination effective d'une base orthogonale pour tout espace vectoriel pré-euclidien (nous aurions pu présenter cette méthode dans la section de Calcul Vectoriel mais il nous semblait plus intéressant de la présenter dans le cadre général et esthétique du calcul tensoriel).

Pour cela, considérons un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ de $\mathcal{E}^n$ et supposons que nous ayons pour chaque vecteur le produit scalaire (la carré de la norme) :

$$\vec{x}_i \circ \vec{x}_i \neq 0 \tag{6.7.126}$$

Cherchons n vecteurs $\vec{e}_i$ orthogonaux entre eux. Partons pour cela de $\vec{e}_1 = \vec{x}_1$ et cherchons $\vec{e}_2$ orthogonal à $\vec{e}_1$ sous la forme (c'est un choix !) :

$$\vec{e}_2 = \lambda_1 \vec{e}_1 + \vec{x}_2 \tag{6.7.127}$$

La visualisation mentale du processus n'est pas facile donc le lecteur doit se fier (de toute façon...) aux résultats mathématiques (si un jour nous avons le temps nous dessinerons le processus du cas classique à trois dimensions).

Le coefficient λ_1 se calcule en écrivant la relation d'orthogonalité :

$$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = \vec{x}_1 \circ (\lambda_1 \vec{x}_1 + \vec{x}_2) = 0 \tag{6.7.128}$$

Nous en déduisons sans trop de peine :

$$\lambda_1 = -\frac{\vec{x}_1 \circ \vec{x}_2}{\vec{x}_1 \circ \vec{x}_1} = -\frac{\vec{x}_1 \circ \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1\|^2} = -\frac{\vec{e}_1 \circ \vec{x}_2}{\|\vec{e}_1\|^2} \tag{6.7.129}$$

Le paramètre λ_1 étant déterminé, nous obtenons le vecteur $\vec{e}_2$ qui est orthogonal à $\vec{e}_1$ et non nul puisque le système $(\vec{e}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ est linéairement indépendant.

Ainsi, jusqu'ici nous avons :

$$\vec{e}_1 = \vec{x}_1 \qquad \vec{e}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{e}_1 \circ \vec{x}_2}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{e_1}\vec{x}_2 \tag{6.7.130}$$

Le paramètre λ_1 étant déterminé, nous obtenons le vecteur $\vec{e}_2$ orthogonal à $\vec{e}_1$ et non nul, puisque le système $(\vec{e}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ est linéairement indépendant.

Le vecteur $\vec{e}_2$ est recherché sous la forme :

$$\vec{e}_3 = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + \vec{x}_3 \tag{6.7.131}$$

Les deux relations d'orthogonalité : $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_e = 0$ et $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 = 0$, permettent le calcul des coefficients μ_1 et μ_2. Nous obtenons donc :

$$\mu_1 = -\frac{\vec{e}_1 \circ \vec{x}_3}{\|\vec{e}_1\|^2} \qquad \mu_2 = -\frac{\vec{e}_2 \circ \vec{x}_3}{\|\vec{e}_2\|^2} \tag{6.7.132}$$

ce qui détermine le vecteur $\vec{e}_3$, orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, et non nul, puisque les $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n)$ sont indépendants. En poursuivant le même type de calcul, nous obtenons pas à pas un système de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{e}_n)$ orthogonaux entre eux et où aucun n'est égal à zéro.

Ainsi, finalement (évidemment les vecteurs obtenus peuvent être normalisès à l'unité au besoin pour avoir système orthonormal) :

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{e}_1 = \vec{x}_1\\ &\vec{e}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{e}_1 \circ \vec{x}_2}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{e_1}\vec{x}_2\\ &\vec{e}_3 = -\frac{\vec{e}_1 \circ \vec{x}_3}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 - \frac{\vec{e}_2 \circ \vec{x}_3}{\|\vec{e}_2\|^2}\vec{e}_2 + \vec{x}_3\end{aligned}} \tag{6.7.133}$$

Erreurs de traduction de l' anglais

Dans le cas où certains vecteurs sont tels que $\vec{x}_i \circ \vec{x}_i = 0$ (leur norme est nulle), nous remplaçons alors $\vec{x}_i$ par $\vec{x}_i' + \lambda\vec{x}_j$, en choisissant un vecteur $\vec{x}_j$ pour obtenir $\vec{x}_i' \circ \vec{x}_i' \neq 0$.

Nous en concluons donc que tout espace pré-euclidien admet des bases orthogonales (et donc orthonormales) !

✍**Exemple :**

Supposons que nous avons :

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \tag{6.7.134}$$

Nous voulons trouver un ensemble orthonormé de vecteurs qui s'étend sur $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Pour cela nous utilisons la méthode de Gram-Schmidt suivie d'une normalisation, soit $\vec{e}_1 = \vec{x}_1 = (1, 1, 1)$ puis nous calculons :

$$\vec{e}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{e}_1 \circ \vec{x}_2}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \tag{6.7.135}$$

En guise de vérification rapide, nous avons en effet :

$$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 0 \tag{6.7.136}$$

Ensuite :

$$\vec{e}_3 = -\frac{\vec{e}_1 \circ \vec{x}_3}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 - \frac{\vec{e}_2 \circ \vec{x}_3}{\|\vec{e}_2\|^2}\vec{e}_2 + \vec{x}_3 = -\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$
$$= -\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1\\1/2\end{pmatrix} \tag{6.7.137}$$

encore une fois, il est bon de vérifier que $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 0$ et $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 = 0$ comme nous le souhaitons. Enfin nous remarquons que :

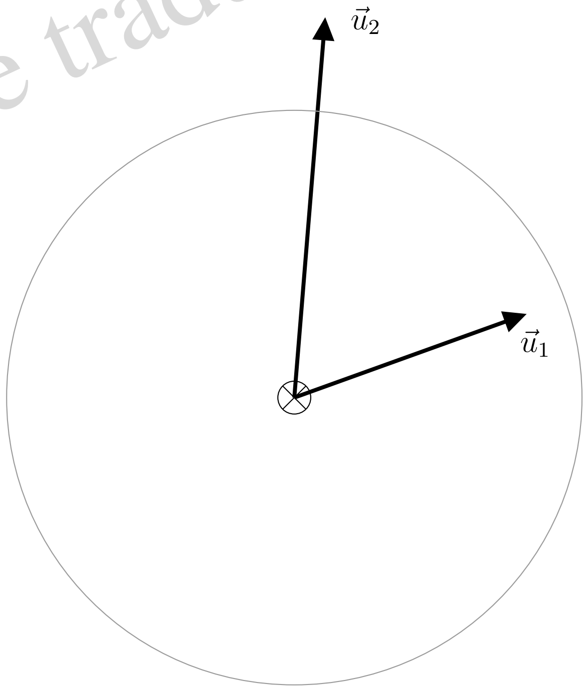
$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{3} \qquad \|\vec{e}_2\| = \sqrt{2} \qquad \|\vec{e}_3\| = \sqrt{3/2} \tag{6.7.138}$$

Dès lors :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1/2\end{pmatrix} \tag{6.7.139}$$

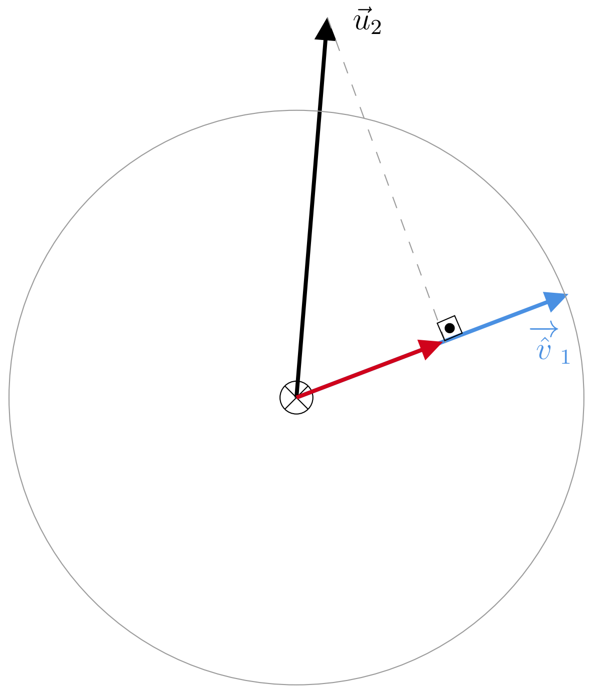
sont des vecteurs othonormaux.

Peut-être que des illustrations aideront à la compréhension ! Pour simplifier, nous utiliserons seulement deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ contre le cercle unité :

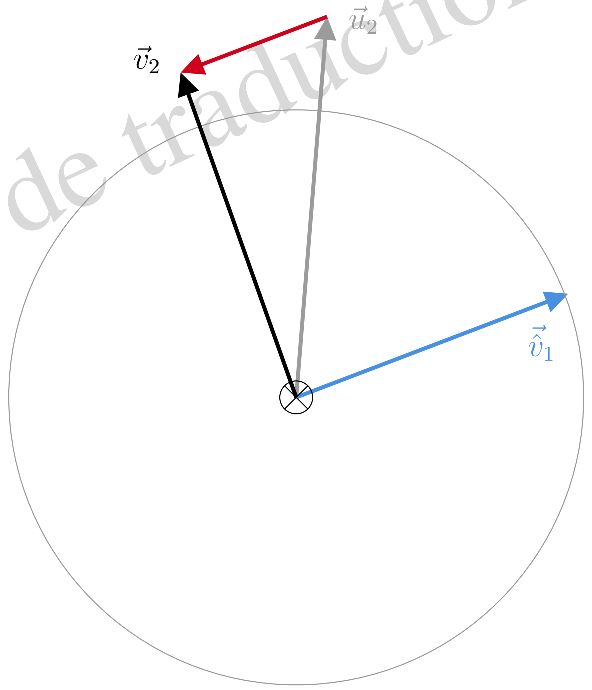


Nous normalisons le premier vecteur $\vec{u}_1$ et le notons $\vec{v}_1$. Ensuite nous calculons la projection du vecteur $\vec{u}_2$ sur le vecteur $\vec{v}_1$. La projection est le segment rouge :

En cours de traduction

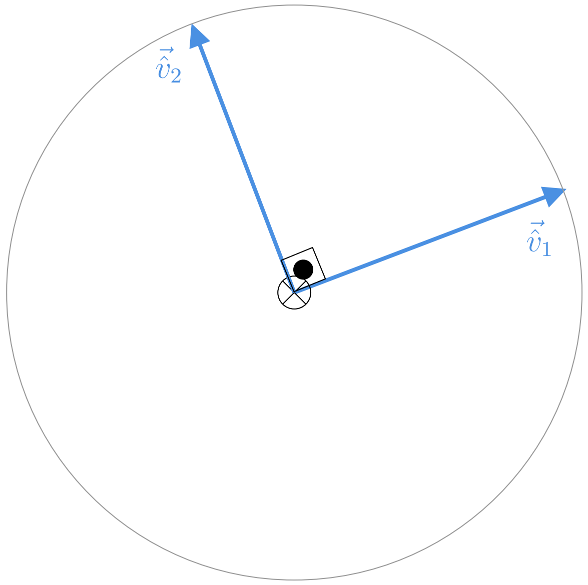


Nous soustrayons ensuite la projection (flèche rouge) de $\vec{u}_2$. Cela supprime les composants $\vec{u}_2$ dans la plage de $\vec{\hat{v}}_1$. Le nouveau vecteur, $\vec{v}_2$, est orthogonal à $\vec{\hat{v}}_1$:



La dernière étape est la normalisation $\vec{\hat{v}}_2 = \vec{v}_2 / \|v_2\|$:

En cours de traduction de l' anglais



Et pour ceux qui aiment les pseudo-codes :

Algorithm 3: Méthode d'orthoganalisation de Gram-Schmidt

Input: Un ensemble de vecteurs indépendants $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_n\}$
Output: Une base orthonormale pour le sous-espace engendré par $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$

```
for i = 1 to n do
    u_i ← x_i
    for j = 1 to i − 1 do
        u_i ← u_i − (u_i ∘ u_j)/||u_j||² u_j
    e_i ← u_i/||u_i||
```

for $i=1$ **to** n **do**
- $\vec{u}_i \leftarrow \vec{x}_i$
- **for** $j=1$ **to** $i-1$ **do**
  - $\vec{u}_i \leftarrow \vec{u}_i - \frac{\vec{u}_i \circ \vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}\vec{u}_j$
- $\vec{e}_i \leftarrow \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|}$

Ce système de calcul de bases est de première importance ! Il permet d'étudier des systèmes physiques à partir d'un référentiel pré-euclidien dont les propriétés évoluent dans le temps. Ce qui est typique de la Relativité Générale.

Le lecteur intéressé par l'informatique et les méthodes numériques y relatives peut se référer à la décomposition matricielle QR introduite plus haut (voir page 2002) pour voir une autre application de la méthode d'orthoganalisation de Gram-Schmidt.

6.7.6.2 Changements de Bases

Soient deux bases $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n')$ d'un espace vectoriel $\mathcal{E}^n$. Chaque vecteur d'une base peut être décomposé sur l'autre base sous la forme suivante (nous l'avons déjà démontré à la page 1966) :

$$\vec{e}_i = A'^k_i \vec{e}_k' \qquad \vec{e}_l' = A^i_k \vec{e}_i \tag{6.7.140}$$

Un vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{E}^n$ peut être décomposé sur chaque base sous la forme :

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x'^k \vec{e}_k' \tag{6.7.141}$$

En cours de traduction de l'anglais

et nous avons aussi déjà démontré que :

$$x^i = A^i_k x'^k \qquad x'^k = A'^k_i x^i \tag{6.7.142}$$

Nous remarquons que les relations de transformation des composantes contravariantes d'un vecteur sont le contraire de celles des vecteurs de base, les grandeurs A et A' s'échangeant, d'où l'origine de l'appellation "contra"-"variantes" de ces composantes !

Soient x_i et x'_k les composantes covariantes du vecteur respectivement sur les bases $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{e}'_k)$. Remplaçons les vecteurs de base, exprimés par les relations :

$$\vec{e}_i = A'^k_i \vec{e}'_k \quad \text{et} \quad \vec{e'}_k = A^k_i \vec{e}_i \tag{6.7.143}$$

dans l'expression de définition des composantes covariantes, il vient :

$$x_i = \vec{x} \circ \vec{e}_i = \vec{x} \circ (A'^k_i \vec{e}'_k) = A'^k_i (\vec{x} \circ \vec{e}'_k) = A'^k_i x'_k \tag{6.7.144}$$

D'où la relation entre les composantes covariantes dans chaque base :

$$x_i = A'^k_i x'_k \tag{6.7.145}$$

Nous obtenons de même :

$$x'_k = A^k_i x_i \tag{6.7.146}$$

Nous remarquons que les composantes covariantes se transforment comme les vecteurs de bases, d'où l'appellation de ces composantes.

Encore une fois, à moins que la base ne soit orthonormée, n'oubliez jamais que les composantes covariantes et contravariantes sont différentes ! ! !

6.7.6.3 Bases Réciproques (Bases Duales)

En cours de traduction de l'anglais

Revenons maintenant sur le concept d'espace dual mais tel qu'il est vu dans le cadre du calcul vectoriel. Cette deuxième approche peut peut-être aider certains à mieux comprendre le concept vu précédemment mais par contre masque la raison profonde de l'origine des dénominations de "covariant" et "contravariant". Pourtant c'est la présentation la plus courante dans la littérature...

Soit une base quelconque $(\vec{e}_i)$ d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}^n$. Par définition, n vecteurs $\vec{e}^k$ qui vérifient les relations suivantes :

$$\vec{e}_i \circ \vec{e}^k = \delta_{ik} \tag{6.7.147}$$

sont appelés les "vecteurs réciproques" des vecteurs $\vec{e}_i$. Ils seront notés avec des indices supérieurs. Par définition, chaque vecteur réciproque se doit donc d'être orthogonal à tous les vecteurs $\vec{e}_i$, sauf pour $k = i$.

Montrons d'abord que les vecteurs réciproques $\vec{e}^k$ d'une base donnée $(\vec{e}_i)$ sont linéairement indépendants. Pour cela, il faut montrer qu'une combinaison linéaire donne un vecteur nul, si et seulement si chaque coefficient λ_k est nul.

Démonstration 6.45.8. Soit $\vec{e} = x^i\vec{e}_i$ un vecteur quelconque de $\mathcal{E}_n$. Multiplions scalairement $\vec{x}$ par la combinaison linéaire précédente $\lambda_k\vec{e}^k$, nous obtenons :

$$(\lambda_k\vec{e}^k)\circ\vec{x} = (\lambda_k\vec{e}^k)\circ(x^i\vec{e}_i) = \lambda_k x^i(\vec{e}^k\circ\vec{e}_i) = \lambda_k x^i\delta_{ii} = \lambda_i x^i = 0 \tag{6.7.148}$$

Cette dernière égalité devant être vérifiée quels que soient les x^i, il est nécessaire que chaque λ_i soit nul et ainsi les vecteurs $\vec{e}^k$ sont donc linéairement indépendants.

■ Q.E.D.

Le système de n vecteurs réciproques forme donc une base appelée la "base réciproque" (qui n'est autre que la base duale) de l'espace vectoriel $\mathcal{E}^n$.

✍**Exemple :**

Soient trois vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ formant une base (non nécessairement orthonormée !) d'un espace vectoriel euclidien. Nous décidons de définir dans un premier temps :

$$v = \vec{e}_1\circ(\vec{e}_2\times\vec{e}_3) \tag{6.7.149}$$

où, rappelons-le, le symbole $\times$ représente le produit vectoriel (voiur section Calcul Vectoriel page 1808) et l'ensemble est le produit mixte vu dans la section de Calcul Vectoriel aussi et qui représente donc un volume orienté.

Les vecteurs suivants :

$$\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{v} \qquad \vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{v} \qquad \vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{v} \tag{6.7.150}$$

vérifient la relation $\vec{e}_i\circ\vec{e}^k = \delta_{ik}$ et constituent le système la base duale des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. En cristallographie, ces vecteurs constituent ce que nous appelons "l'espace de Fourier associé".

Remarques

Nous reconnaissons ici les relations que nous avions déjà obtenues lors de notre étude du déterminant de Gram !!!

Maintenant, considérons donc un vecteur sur la base d'origine $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ que nous noterons donc (comme déjà vu plus haut) :

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i \tag{6.7.151}$$

avec donc par définition les composantes contravariantes du vecteur qui apparaissent comme nous l'avons défini plus haut (et dont nous avons en même temps expliqué l'origine du nom). Nous avons vu aussi plus haut que chaque composante contravariante sera aussi (naturellement et par extension) donnée par :

$$x^i = \vec{x}\circ\vec{e}^i \tag{6.7.152}$$

De façon similaire, nous avons donc les composantes covariantes qui apparaissent :r :

$$\vec{x} = x_i \vec{e}^{\,i} \tag{6.7.153}$$
$$x_i = \vec{x} \circ \vec{e}_i \tag{6.7.154}$$

Dans cette approche, nous définissons alors le tenseur métrique contravariant et respectivement covariant par :

$$\vec{e}_i \circ e_j = g_{ij} = g_{ji} \tag{6.7.155}$$
$$\vec{e}^{\,i} \circ e^j = g^{ij} = g^{ji} \tag{6.7.156}$$

Il vient alors par exemple pour les composantes contravariantes (dans le cas particulier de l'espace à trois dimensions), sachant que la démarche est la même pour les composantes covariantes :

$$\begin{aligned} x^j &= \vec{x} \circ \vec{e}^{\,i} = (x_1 \vec{e}^{\,1} + x_2 \vec{e}^{\,2} + x_3 \vec{e}^{\,3}) \circ \vec{e}^{\,i} = x_1(\vec{e}^{\,1} \circ \vec{e}^{\,i}) + x_2(\vec{e}^{\,2} \circ \vec{e}^{\,i}) + x_3(\vec{e}^{\,3} \circ \vec{e}^{\,i}) \\ &= x_1 g^{1i} + x_2 g^{2i} + x_3 g^{3i} = x_j g^{ji} \end{aligned} \tag{6.7.157}$$

Et donc nous retrouvons la relation de transformation entre composantes covariantes et contravariantes déjà vue plus haut à la différence que cela semble plus sortir d'un chapeau par définitions successives et que cela masque donc l'origine de la dénomination de ces mêmes composantes. Mais peut-être que certains lecteurs préférent cette approche... ? ? ?

✍**Exemple :**

Comme exemple, considérons la base :

$$\vec{e}_1 = 2\vec{i}_1 + \vec{i}_2 \qquad \vec{e}_2 = \vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 \qquad \vec{e}_3 = \vec{i}_3 \tag{6.7.158}$$

Notons qu'elle n'est pas orthogonale puisque $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 4 \neq 0$.

Dans cette situation, nous avons en appliquant les relations de Gram :

$$\begin{aligned} \vec{e}^{\,1} &= \frac{2}{3}\vec{i}_1 + \frac{1}{3}\vec{i}_2 \\ \vec{e}^{\,2} &= -\frac{1}{3}\vec{i}_1 + \frac{2}{3}\vec{i}_2 \\ \vec{e}^{\,3} &= \vec{e}_3 = \vec{i}_3 \end{aligned} \tag{6.7.159}$$

Comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessous où $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont affichés en vert, et les vecteurs réciproques $\vec{e}^{\,1}$ et $\vec{e}^{\,2}$ sont affichés en bleu :

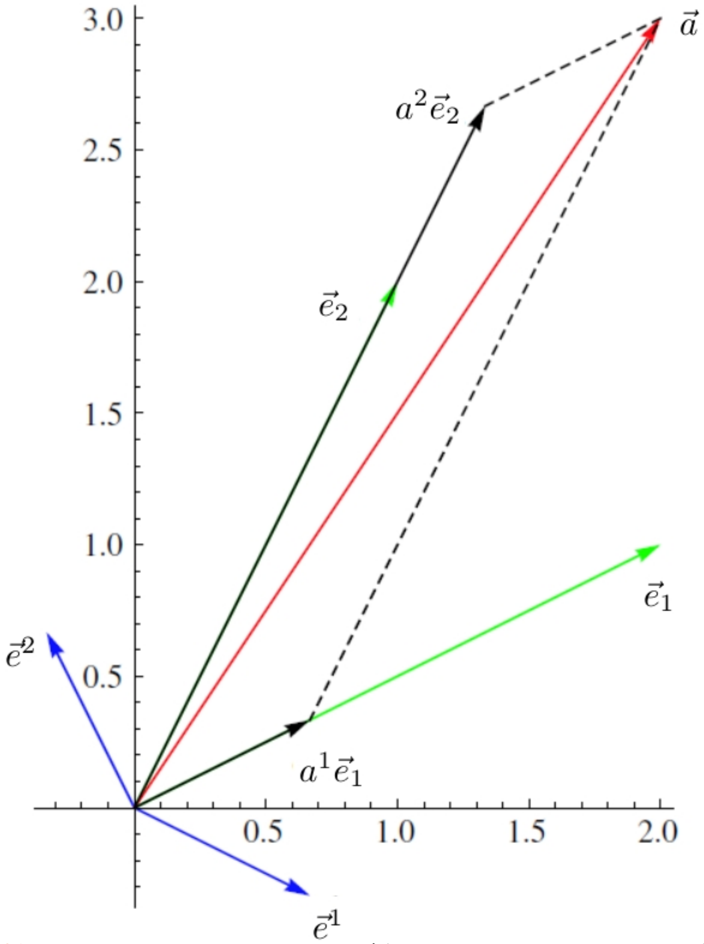


FIG. 6.146 – **Vecteurs de base, vecteurs de base réciproques et composantes contravariantes**

Remarquez que par construction nous avons bien que $\vec{e}^1$ est orthogonal à $\vec{e}_2$ et $\vec{e}^2$ est orthogonal à $\vec{e}_1$!

Pour un vecteur donné $\vec{a}$, disons :

$$\vec{a}=2\vec{i}_1+3\vec{i}_2 \tag{6.7.160}$$

Nous pouvons peut utiliser la relation démontrée précédemment pour trouver ses composantes contravariantes dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Nous avons :

$$a^1=\vec{a}\circ\vec{e}^1=\frac{1}{3}\qquad a^2=\vec{a}\circ\vec{e}^2=\frac{4}{3}\qquad a^3=\vec{a}\circ\vec{e}^3=0 \tag{6.7.161}$$

Tel que (voir figure ci-dessus) :

$$\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{e}_1+\frac{4}{3}\vec{e}_2 \tag{6.7.162}$$

Observez maintenant que les vecteurs de base d'origine sont réciproques des vecteurs réciproques. Ainsi nous pouvons tout aussi bien développer le même vecteur $\vec{a}$ le long des vecteurs de base :

$$\vec{a}=a_1\vec{e}^1+a_2\vec{e}^2+a_3\vec{e}^3 \tag{6.7.163}$$

avec $a_i = \vec{a} \circ \vec{e}_i$.

Les composantes a_i sont les composantes covariantes de $\vec{a}$. Dans notre exemple, nous obtenons :

$$a_1 = \vec{a} \circ \vec{e}_1 = 7 \qquad a_2 = \vec{a} \circ \vec{e}_2 = 8 \qquad a_3 = \vec{a} \circ \vec{e}_3 = 0 \tag{6.7.164}$$

ainsi nous avons :

$$\vec{a} = 7\vec{e}^1 + 8\vec{e}^2 \tag{6.7.165}$$

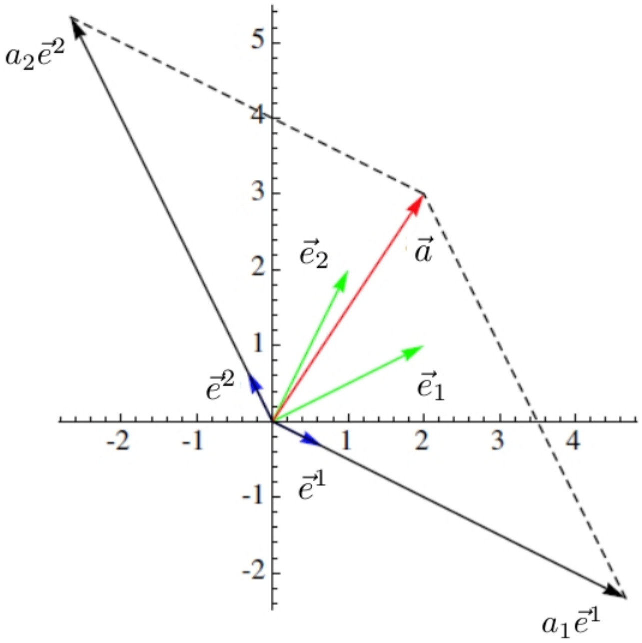


FIG. 6.147 – **Vecteurs de base, vecteurs de base réciproques et composantes covariantes**

6.7.7 Tenseurs Euclidiens (tenseur cartésien)

La généralisation de la notion de vecteur nous a conduits à l'étude des espaces vectoriels à n dimensions. Les tenseurs sont également des vecteurs de dimension quelconque mais qui possèdent des propriétés supplémentaires par rapport aux vecteurs.

Pour le physicien théoricien, le calcul tensoriel s'intéresse en premier lieu à la manière dont les composantes des tenseurs se transforment lors d'un changement de base des espaces vectoriels dont ils sont issus. Nous commencerons donc à étudier ces propriétés vis-à-vis des changements de base (car c'est le cas le plus intéressant).

Un tenseur est, en pratique, souvent uniquement défini et utilisé sous forme de ses composantes. Ces dernières peuvent être exprimées sous forme covariante ou contravariante comme pour tout vecteur. Mais un nouveau type de composantes va apparaître pour les tenseurs, ce sont les "composantes mixtes". Ces trois types de composantes constituent des décompositions des

tenseurs euclidiens sur des bases différentes.

Définition (#6.7.261) : Un "tenseur cartésien" utilise une base orthonormée pour représenter un tenseur dans un espace euclidien sous forme de composantes.

L'utilisation des tenseurs cartésiens se fait en physique et en ingénierie, comme avec le tenseur des contraintes de Cauchy (voir section Mécanique des Milieux Continus page ??) et le tenseur du moment d'inertie dans la dynamique des corps rigides (voir section Mécanique Classique page ??). Parfois, les coordonnées curvilignes générales sont pratiques, comme dans la mécanique continue à hautes déformations, voire nécessaires, comme dans la Relativité Générale (voir section Relativité Générale page ??).

6.7.7.1 Tenseur Fondamental

Au cours de la théorie vue précédemment, nous avons utilisé les quantités g_{ij}, définies à partir du produit scalaire des vecteurs $(\vec{e}_i)$ de base d'un espace vectoriel pré-euclidien $\mathcal{E}^n$ à n dimensions, par :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_j \tag{6.7.166}$$

Ces n^2 quantités constituent les composantes covariantes d'un tenseur appelé le "tenseur fondamental" ou "tenseur métrique".

Étudions maintenant comment varient les quantités g_{ij} lorsque nous effectuons un changement de base !

Soit $(\vec{e}\,'_k)$ une autre base liée à la précédente par les relations connues :

$$\vec{e}_i = A'^k_i \vec{e}\,'_k \quad \text{et} \quad \vec{e}\,'_k = A^i_k \vec{e}_i \tag{6.7.167}$$

Substituant la relation $\vec{e}_i = A'^k_i \vec{e}\,'_k$ dans l'expression de g_{ij}, il vient (nous changeons les indices comme il se doit lors d'une substitution) :

$$g_{ij} = (A'^k_i \vec{e}\,'_k) \circ (A'^l_j \vec{e}\,'_l) = (A'^k_i A'^l_j)(\vec{e}\,'_k \circ \vec{e}\,'_l) \tag{6.7.168}$$

Dans la nouvelle base $(\vec{e}\,'_k)$, les produits scalaires des vecteurs de base sont donc des quantités telles que :

$$g'_{kl} = \vec{e}\,'_k \circ \vec{e}\,'_l \tag{6.7.169}$$

Nous avons donc finalement pour l'expression des composantes covariantes g_{ij} lors d'un changement de base :

$$\boxed{g_{ij} = (A'^k_i A'^l_j) g'_{kl}} \tag{6.7.170}$$

Identiquement nous avons :

$$\boxed{g'_{ij} = (A^k_i A^l_j) g_{kl}} \tag{6.7.171}$$

En cours de traduction de l' anglais

De manière générale, une suite de n^2 quantités t_{ij} qui se transforment, lors d'un changement de base de $\mathcal{E}^n$, selon les deux relations précédentes, à savoir :

$$t_{ij} = (A'^k_i A'^l_j) g'_{kl} \qquad \text{et} \qquad t'_{ij} = (A^k_i A^l_j) t_{kl} \tag{6.7.172}$$

constituent, par définition, les "composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux" (à deux indices) sur $\mathcal{E}^n$.

Nous pouvons ainsi manipuler des quantités exprimant les propriétés intrinsèques des bases comme des tenseurs normaux !

6.7.7.2 Produit Tensoriel de deux vecteurs et matrices

Considérons un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}^n$ de base $(\vec{e}_i)$ et soient deux vecteurs de $\mathcal{E}^n$:

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{y} = y^j \vec{e}_j \tag{6.7.173}$$

Formons les produits deux à deux des composantes contravariantes x^i et y^j, soit :

$$u^{ij} = x^i y^j \tag{6.7.174}$$

Nous obtenons ainsi n^2 quantités, si les deux vecteurs ont le même nombre de composantes, qui constituent également les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux appelé le "produit tensoriel" du vecteur $\vec{x}$ par le vecteur $\vec{y}$.

Par exemple pour $\vec{x}$ de dimension 2 et $\vec{y}$ de dimension 3 nous avons :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_1 y_3 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_2 y_3 \end{pmatrix} \tag{6.7.175}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

En physique quantique, un "espace de Fock"est défini comme le produit tensoriel de tous les espaces de Hilbert à n corps. Supposons un système décrit par un espace de Hilbert H, par exemple une particule unique. L'espace de Hilbert de deux particules sans interaction du même type que celle décrite par H est simplement le produit tensoriel :

$$H^2 := H \otimes H \tag{6.7.176}$$

Plus généralement, pour un système de N particules comme ci-dessus, l'espace de Hilbert est :

$$H^N := \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{N \text{ times}} \tag{6.7.177}$$

Nous pouvons aussi multiplier tensoriellement deux matrices A et B. Ensuite, la matrice décrivant le produit tensoriel $A \otimes B$ est le "produit de Kronecker" des deux matrices tel que nous l'utilisons en Physique Quantique Relativiste.

Par exemple, si :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{6.7.178}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.7.179}$$

Le cas le plus connu est le tenseur covariant de rang 2 dans un espace de dimensions 4 car c'est le plus utilisé en calcul tensoriel :

$$T_{ij} = \vec{x} \otimes \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_1y_4 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & x_2y_4 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 & x_3y_4 \\ x_4y_1 & x_4y_2 & x_4y_3 & x_4y_4 \end{pmatrix} \tag{6.7.180}$$

Le lecteur peut aussi maintenant mieux comprendre l'origine du nom du gradient d'un champ vectoriel (étant donné un "champ tensoriel") comme nous l'avons vu dans la section du Calcul Vectoriel car nous pouvons le réécrire maintenant :

$$\vec{\nabla}(\vec{f}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \vec{\nabla} \otimes \vec{f} \tag{6.7.181}$$

Le lecteur aura certainement remarqué qu'à travers les exemples ci-dessus, le produit tensoriel est non commutatif. C'est-à-dire :

$$\vec{x} \otimes \vec{y} \neq \vec{y} \otimes \vec{x} \tag{6.7.182}$$

Nousp ouvons évidemment construire des produits tensoriels d'ordre trois (donc avec des termes n^3) comme avec les vecteurs tensoriels trois fois contravariants suivants :

$$u^{ijk} = x^i y^j z^k \tag{6.7.183}$$

etc.

Étudions les propriétés des changements de base de ces composantes. Utilisons pour les changements de base les relations des composantes contravariantes d'un vecteur, à savoir :

$$x^i = A^i_k x'^k \quad \text{et} \quad x'^k = A'^k_i x^i \tag{6.7.184}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remplaçons dans la relation $u^{ij}=x^iy^j$ les composantes x^i et y^i par leur expression de changement de base, nous obtenons :

$$u^{ij}=x^iy^j=(A^i_kx'^k)(A^j_ly'^l)=A^i_kA^j_l(x'^ky'^l)=(A^i_kA^j_l)u'^{kl} \quad (6.7.185)$$

Les quantités u'^{kl} sont les nouvelles composantes :

$$u'^{kl}=x'^ky'^l \quad (6.7.186)$$

La formule de transformation des n^2 quantités u^{ij} sur un changement de base de $\mathcal{E}^n$ est finalement (très similaire au tenseur métrique) :

$$\boxed{u^{ij}=A^i_kA^j_lu'^{kl}} \quad (6.7.187)$$

Une telle relation de changement de base caractérise les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux. À l'inverse, nous obtenons :

$$\boxed{u'^{ij}=A'^k_kA'^l_ju^{ij}} \quad (6.7.188)$$

Ainsi, les n^2 quantités sont les "composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux".

Nous pouvons alors construire les mêmes produits par paires pour les composantes covariantes x_i et y_i des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ainsi :

$$u_{ij}=x_iy_i \quad (6.7.189)$$

Les relations de changement de base des composantes covariantes des vecteurs sont données par les relations suivantes que nous avons déjà prouvées précédemment :

$$x_i=A'^k_ix'_k \quad \text{et} \quad x'_k=A^i_kx_i \quad (6.7.190)$$

En substituant la première relation dans le produit $u_{ij}=x_iy_i$, nous obtenons :

$$u_{ij}=(A'^k_ix'_k)(A'^l_j,y'_l)=A'^k_iA'^l_j(x'_ky'_l)=(A'^k_iA'^l_j)u'_{kl} \quad (6.7.191)$$

C'est la relation de changement de base des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Nous vérifions aussi facilement que nous avons :

$$u'_{kl}=A^i_kA^j_lu_{ij} \quad (6.7.192)$$

Identiquement, nous avons bien sûr $u'_{kl}=x'_ky'_l$ étant donné que $u_{ij}=x_iy_i$.

Ainsi, les n^2 quantités sont alors les "composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux".

Créons maintenant n^2 quantités en multipliant deux par deux les composantes covariantes d'un vecteur $\vec{x}$ par les composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{y}$, nous obtenons :

$$u^j_i=x_iy^j \quad (6.7.193)$$

Effectuons un changement de base dans cette dernière relation en tenant compte des expressions $x_i=A'^k_ix'_k$ et $x^i=A^i_kx'^k$, nous avons alors :

$$u^j_i=x_iy^j(A'^k_ix'_k)(A^j_ly'^l)=A'^k_iA^j_l(x'_ky'^l)=(A'^k_iA^j_l)u'^l_k \quad (6.7.194)$$

En cours de traduction de l'anglais

Cette relation de changement de base caractérise les "composantes mixtes" d'un tenseur d'ordre deux. Inversement, nous pouvons vérifier que nous avons :

$$u'^{l}_{k} = A^{i}_{k} A'^{l}_{j} u^{j}_{i} \tag{6.7.195}$$

Ces composantes mixtes constituent également des composantes du produit tensoriel de $\vec{x}$ par $\vec{y}$, selon une certaine base.

De manière générale, une suite de quantités n^2 qui se transforment, lors d'un changement de base de $\mathcal{E}^n$, selon les relations établies juste précédemment constituent donc, par définition, les "composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux".

En cours de traduction de l' anglais

6.7.7.3 Espaces Tensoriels

Au cours de l'étude précédente, nous avons utilisé des systèmes de n^2 nombres, créés à partir d'un espace vectoriel $\mathcal{E}^n$. Lorsque ces nombres vérifient certaines relations de changement de base, nous avons appelé ces grandeurs, par définition, les "composantes d'un tenseur".

Nous avons vu que toute combinaison linéaire de ces composantes constitue les composantes d'autres tenseurs. Nous pouvons donc additionner entre elles les composantes des tenseurs ainsi que les multiplier par des scalaires, pour obtenir d'autres composantes de tenseurs. Ces propriétés d'addition et de multiplication font que nous allons pouvoir utiliser ces grandeurs tensorielles comme composantes de vecteurs.

Pour préciser comment nous définissons un tenseur sur une base, étudions le cas particulier d'un produit tensoriel de deux vecteurs constitués par des triplets de nombres (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^3$ typiquement). Considérons l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}^3$ dont les vecteurs sont des triplets de nombre de la forme : $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$. La base orthonormée canonique de $\mathcal{E}^3$ est formée de trois vecteurs que nous connaissons très bien et notés en calcul tensoriel de la manière suivante :

$$\vec{e}_i=(\delta_{1i},\delta_{2i},\delta_{3i}) \quad (6.7.196)$$

avec $i=1,2,3$ (jolie façon d'écrire la chose n'est-il pas...).

Des vecteurs de $\mathcal{E}^3$ permettent de former les neuf quantités que nous avons appelées les "composantes du produit tensoriel" des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Si nous effectuons tous les produits tensoriels possibles entre vecteurs de $\mathcal{E}^3$, nous obtenons des suites de 9 nombres qui peuvent servir à définir le vecteur suivant :

$$\vec{x}\otimes\vec{y}=\vec{U}=\left(x^1y^1,x^1y^2,x^1y^3,\ldots,x^3y^3\right) \quad (6.7.197)$$

Remarque

Nous voyons de suite avec la relation précédente que le produit tensoriel n'est dès lors pas commutatif.

Nous nous retrouvons alors avec des éléments d'un espace vectoriel $\mathcal{E}^9$ à neuf dimensions, ayant pour éléments tous les multiplets formés de trois nombres.

Nous disons alors que $\mathcal{E}^9$ a une "structure du produit tensoriel" qui est notée évidemment et en algèbre standard par $\mathcal{E}^9$: ; $\mathcal{E}^3\otimes\mathcal{E}^3$ ou parfois $\mathcal{E}_3^{(2)}$.

Ces vecteurs peuvent être décomposés, par exemple, sur une base canonique orthonormée :

$$\vec{e}_k=(\delta_{1k},\delta_{2k},\ldots,\delta_{9k}) \quad (6.7.198)$$

avec $k=1,2,\ldots,9$.

Si nous renumérotons les quantités x^iy^j selon la place qu'elles occupent dans l'expression de $\vec{U}$, soit :

$$x^iy^j=u^{ij}=u^k \quad (6.7.199)$$

avec $k=1,2,\ldots,9$ et $i,j=1,2,3$, les vecteurs $\vec{U}$ s'écrivent alors :

$$\vec{U}=u^k\vec{e}_k \quad (6.7.200)$$

et constituent un exemple de tenseur d'ordre 2 (évidemment nous pouvons généraliser la démarche).

En quoi ces tenseurs diffèrent-ils des vecteurs ordinaires ? Ils sont certes identiques à certains vecteurs de $\mathcal{E}^9$ mais ils ont été formés à partir des vecteurs de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathcal{E}^3$. Pour rappeler ce fait, nous les notons :

$$\boxed{T_{ij}=\vec{U}=\vec{x}\otimes\vec{y}} \quad (6.7.201)$$

et ils sont appelés comme nous le savons "produits tensoriels d'ordre deux" des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Le symbole $\otimes$ est donc défini de la manière dont nous avons formé les quantités et l'ordre dans lequel nous les avons classées pour former le vecteur $\vec{U}$.

Pour rappeler la dépendance entre une quantité $x^iy^j=u^{ij}$ et le vecteur de base $\vec{e}_i$ auquel il est affecté, renumérotons ces vecteurs en mettant à la place de l'indice k les deux indices i et j, relatifs aux composantes, soit :

$$\vec{e}_k=\vec{e}_{ij} \quad (6.7.202)$$

Ce dernier peut très bien être noté sous la forme :

$$\boxed{\vec{e}_k=\vec{e}_{ij}=\vec{e}_i\otimes\vec{j}} \quad (6.7.203)$$

Les vecteurs $\vec{e}_i\otimes\vec{j}$ constituent donc une base de $\mathcal{E}^9$ qui est appelée dans notre exemple la "base tensorielle associée".

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons :

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad (6.7.204)$$

Nous avons alors pour exemple :

$$\vec{e}_{12}=\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2=\begin{bmatrix}1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 0\cdot 0\\0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0\\0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad (6.7.205)$$

C'est-à-dire :

$$\vec{e}_1 := \vec{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.7.206)$$

Il s'ensuit que en tant qu'élément d'un espace $\mathcal{E}^n \otimes \mathcal{E}^n$, un tenseur est un vecteur de la forme générale :

$$\boxed{\vec{U} = u^{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)} \quad (6.7.207)$$

Étudions ses propriétés vis-à-vis d'un changement de base $\mathcal{E}^n$ de tel que :

$$\vec{e}_i = A'^k_i \vec{e}'_k = A^i_k \vec{e}_i \quad (6.7.208)$$

Lors d'un tel changement de base, la base associée à $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ devient une autre base $(\vec{e}'_k \otimes \vec{e}'_l)$ associée à $\vec{e}'_k$, à savoir :

$$\vec{e}'_k \otimes \vec{e}'_l = (A^i_k \vec{e}_i) \otimes (A^j_l \vec{e}_j) = (A^i_k A^j_l) \otimes \vec{e}_j \quad (6.7.209)$$

Par suite, le produit tensoriel $\vec{U}$ a pour composantes dans la nouvelle base :

$$\vec{U} = u'^{kl}(\vec{e}'_k \otimes \vec{e}'_l = u'^{kl}(A^i_k A^j_l)\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (A'^k_i A'^l_j)u^{ij}(A^i_k A^j_l)\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (6.7.210)$$

Nous avons les propriétés suivantes pour le produit tensoriel :

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = (x^i \vec{e}_i) \otimes (y^j \vec{e}_j) = x^i y^j (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \quad (6.7.211)$$

En cours de traduction de l' anglais

P1. Distributivité, à gauche et à droite, par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \otimes \vec{z} &= \vec{x} \otimes \vec{z} + \vec{y} \otimes \vec{z} \\ \vec{x} \otimes (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \otimes \vec{y} + \vec{x} \otimes \vec{z} \end{aligned} \quad (6.7.212)$$

La démonstration de ces relations découle simplement de la définition du produit tensoriel. Nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \otimes \vec{z} &= (x^i \vec{e}_i + y^i \vec{e}_i) \otimes z^k \vec{e}_k = (x^i + y^i)\vec{e}_i \otimes z^k \vec{e}_k = (x^i + y^i) z^k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k \\ &= x^i z^k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k + y^i z^k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k = \vec{x} \otimes \vec{z} + \vec{y} \otimes \vec{z} \end{aligned} \quad (6.7.213)$$

P2. Associativité avec la multiplication par une grandeur scalaire :

$$(\lambda \vec{x}) \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \otimes \vec{y}) \quad (6.7.214)$$

Nous avons en effet :

$$(\lambda \vec{x}) \otimes \vec{y} = (\lambda x^i \vec{e}_i) \vec{x} \otimes y^i \vec{e}_i = \lambda x^i y^j (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = \lambda(\vec{x} \otimes \vec{y}) \quad (6.7.215)$$

P3. Lorsque nous choisissons une base dans chacun des espaces vectoriels $(\vec{e}_i)$ pour $\mathcal{E}^n$, $(\vec{f}_i)$ pour $\mathcal{F}^m$, les $n \cdot m$ éléments de G_{nm} que nous notons $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_i$ forment également une base de G_{nm}.

Démonstration 6.45.9. Déjà faite dans l'exemple particulier que nous avons utilisé au début.

■ Q.E.D.

Remarque

En pratique, nous avons souvent à utiliser des tenseurs formés à partir de vecteurs appartenant à des espaces vectoriels identiques $\mathcal{E}^n$.

Nous pouvons bien évidemment généraliser le produit tensoriel à un nombre quelconque de vecteurs. De proche en proche, compte tenu de la propriété P1, nous pouvons considérer p vecteurs appartenant chacun à des espaces vectoriels $\mathcal{E}^{n_1}, \mathcal{E}^{n_2}, \ldots, \mathcal{E}^{n_p}$ différents . Si nous avons :

$$\vec{x}_1 = x^{i1}\vec{e}_{i1}, \vec{x}_2 = x^{i2}\vec{e}_{i2}, \ldots \tag{6.7.216}$$

nous pouvons former le produit tensoriel :

$$\vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes \ldots \otimes \vec{x}_p = x^{i1}x^{i2}\ldots x^{ip}(\vec{e}_{i1} \otimes \vec{e}_{i2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{ip}) \tag{6.7.217}$$

avec $i_1 = \{1, \ldots, n_1\}, i_2 = \{1, \ldots, n_2\}, \ldots, i_p = \{1, \ldots, n_p\}$.

Nous construisons ainsi des produits tensoriels d'ordre p appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{E}^{n_1} \otimes \mathcal{E}^{n_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}^{n_p}$, espace qui est muni d'une structure de produit tensoriel. Les éléments de cet espace constituent par définition des tenseurs d'ordre p.

Afin d'unifier la classification, les espaces vectoriels élémentaires, qui ne peuvent être munis d'une structure de produit tensoriel, peuvent être considérés comme ayant pour éléments des tenseurs d'ordre un. En général, nous appelons ces éléments des "vecteurs", réservant le nom de "tenseurs" à des éléments d'espaces tensoriels d'ordre égal ou supérieur à deux !

Afin d'unifier la classification, les espaces vectoriels élémentaires, qui ne peuvent être munis d'une structure de produit tensoriel, peuvent être considérés comme ayant pour éléments des tenseurs d'ordre 1. En général, nous appelons ces éléments des "vecteurs", réservant le nom de "tenseurs" à des éléments d'espaces tensoriels d'ordre égal ou supérieur à 2 !

Remarque

Il est commode d'appeler "tenseurs d'ordre zéro" les grandeurs scalaires. Il est également rare de rencontrer des tenseurs d'ordre supérieur à 2.

Il est assez évident et nous n'en ferons pas la démonstration (excepté s'il y a une demande) que nous pouvons redéfinir absolument tous les concepts (base, décomposition sur une base, base réciproque, produit scalaire, produit tensoriel) que nous avons vus jusqu'à maintenant en considérant les tenseurs d'ordre un comme des vecteurs (il faudrait donc que nous réécrivions tout ce qui est déjà écrit ci-dessus... ce qui est inutile).

En cours de traduction de l'anglais

Il est aussi tout à fait possible de réitérer toutes ces définitions pour des tenseurs d'ordre supérieurs et ainsi généraliser le concept d'espace tensoriel pour toutes les dimensions.

De ces considérations, nous pouvons énoncer le "critère de tensorialité" :

Pour que les éléments d'une suite de n^p quantités, rapportées à une base d'un espace vectoriel $\mathcal{E}^n_{(p)}$, puissent être considérés comme les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que ces quantités soit liées entre elles, dans deux bases différentes de $\mathcal{E}^n_{(p)}$, par les relations de transformation des composantes.

Remarque

Un vecteur peut se représenter dans une base quelconque par une suite de n composantes. Cependant, nous ne pouvons pas conclure que n'importe quelle suite de n chiffres constitue un vecteur. En effet, lorsque nous nous plaçons dans une autre base de l'espace, les composantes doivent changer également, pour représenter le même objet : nous disons alors que le vecteur est un objet intrinsèque (dont l'existence ne dépend pas du choix du repère). Il reste alors à savoir qu'un vecteur est un tenseur d'ordre 1.

En cours de traduction de l'anglais

6.7.7.4 Combinaisons linéaires de tenseurs

Nous pouvons former d'autres tenseurs en combinant entre elles les composantes de différents produits tensoriels définis à l'aide des vecteurs d'un même espace vectoriel. Considérons par exemple les composantes contravariantes des produits tensoriels des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{w}, \vec{z}$:

$$u^{ij} = x^i y^j \qquad v^{ij} = w^i z^j \tag{6.7.218}$$

Formons les quantités suivantes :

$$t^{ij} = u^{ij} + \lambda v^{ij} \tag{6.7.219}$$

Les n^2 quantités t^{ij} vérifient également les formules générales de changement de base. Nous avons en effet, en substituant les relations de transformation des composantes contravariantes d'un produit tensoriel dans l'expression précédente :

$$t^{ij} = A^i_k A^j_i u'^{kl} + \lambda A^i_k A^j_l v'^{kl} = A^i_k A^j_l t'^{kl} \tag{6.7.220}$$

Les n^2 quantités t^{ij}, vérifiant les relations de changement de base, constituent donc également des composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux.

6.7.7.5 Contraction des indices

Considérons le produit tensoriel mixte de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de composantes respectives contravariantes x^i et covariantes y_j. Les composantes mixtes du produit tensoriel $\vec{V}$ de ces deux vecteurs, sont :

$$v^i_j = x^i y_j \tag{6.7.221}$$

Effectuons l'addition des différentes composantes du tenseur $\vec{V}$ telles que $i=j$, soit :

$$v = x^i y_i \quad (6.7.222)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. La quantité v est un scalaire (tenseur d'ordre zéro). Une telle addition sur des indices de variance différente constitue, par définition, l'opération de "contraction des indices" du tenseur $\vec{V}$. Cette opération a permis de passer d'un tenseur d'ordre deux à un tenseur d'ordre zéro. Le tenseur $\vec{V}$ a été amputé d'une covariance et d'une contravariance.

Prenons également l'exemple d'un tenseur $\vec{U}$ dont les composantes mixtes sont une fois covariante et deux fois contravariantes u_k^{ij} (attention... il ne s'agit pas d'une matrice tridimensionnelle mais simplement de l'indication que les composantes de ce tenseur s'expriment à partir de trois autres variables). Considérons certaines de ses composantes telles que $k=j$, à savoir les quantités u_j^{ij} et effectuons l'addition de ces dernières. Nous obtenons alors :

$$v^i = u_1^{i1} + u_2^{i2} + \ldots + u_n^{in} = \delta_j^k u_k^{ij} \quad (6.7.223)$$

Ces nouvelles quantités v^i forment les composantes d'un tenseur $\vec{V}$ d'ordre un (donc un vecteur !) et constituent ce que nous appelons alors les "composantes contractées" du tenseur $\vec{U}$ et satisfont bien évidemment aux relations de changement de base (sur demande nous pouvons faire la démonstration mais sachez qu'elle est similaire à celle que nous avions faite pour les vecteurs). Nous sommes ainsi passé d'un tenseur d'ordre trois à un tenseur d'ordre un.

Ainsi, nous pouvons constater que l'idée sous-jacente de la contraction est de nous permettre de faciliter la résolution d'un problème purement mathématique et suivant la situation il peut être arrangeant d'élever ou de réduire l'ordre d'un tenseur. C'est souvent un choix qui se fait par tâtonnements en fonction d'un contexte précis ou qui découle naturellement d'un développement purement mathématique ou mathematico-physique (comme nous en verrons des exemples concrets plus loin).

En cours de traduction de l'anglais

6.7.7.5.1 Élévation et abaissement des indices

Si nous partons d'un tenseur de composantes contravariantes ou covariantes, nous pouvons abaisser/élever un ou plusieurs des indices par multiplication (le cas échéant répétée) par g_{ij} ou g^{ij} (métrique diagonale unitaire et à signature positive : de type canonique) afin d'obtenir des composantes mixtes sur lesquelles nous pourrons ensuite effectuer des opérations de contraction.

Considérons un tenseur euclidien $\vec{U}$ de composantes contravariantes $u^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p}$.

Si nous voulons effectuer une contraction sur ce tenseur, il nous faudra d'abord le transformer en un tenseur mixte. Cette transformation se fera à l'aide d'un tenseur fondamental.

Écrivons $\vec{U}$ en composantes mixtes en abaissant à la position covariante l'indice i_1 par exemple (cela revient donc à exprimer cette composante contravariante en composante covariante). Alors :

$$u_{j_1}^{i_2 i_3 \ldots i_p} = g_{i_1, j_1} u^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p} \quad (6.7.224)$$

Nous voyons bien que dans le cas présent pour descendre un indice contravariant dans un tenseur au moyen d'un tenseur fondamental, il faut d'abord aller rechercher dans les indices covariants du tenseur fondamental celui qui se retrouve en contravariant dans le tenseur d'origine et le remplacer à sa position (mais cette fois en covariance) par l'autre indice du tenseur fondamental (il en est de même lorsque l'on souhaite monter un indice dans le cas où l'on souhaiterait opérer une contraction sur un tenseur covariant).

Effectivement, rappelons que nous avons démontré que :

$$x_j = g_{ij} x^i \tag{6.7.225}$$

Rappelez-vous également que l'augmentation puis l'abaissement du même indice (ou inversement) sont des opérations inverses, ce qui se traduit par le fait que les tenseurs métriques covariants et contravariants sont inverses l'un de l'autre :

$$g^{ij} g_{jk} = g_{kj} g^{ji} = \delta^i_k \tag{6.7.226}$$

Maintenant que nous avons obtenu un tenseur à composantes mixtes, nous pouvons très bien en plus contracter les indices. Choisissons par exemple l'indice i_2 et effectuons la contraction avec l'indice j_1, posons $i_2 = j_1 = k$ (nous ne nous intéressons plus alors qu'à certains termes particuliers), il vient alors en écrivant toute la démarche depuis le début :

$$g_{i_1 j_1} u^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_p} = u^{i_2 i_3 \ldots i_p}_{j_1} = u^{k i_3 \ldots i_p}_{k} = v^{i_3 \ldots i_p} \tag{6.7.227}$$

Nous obtenons donc après abaissement de l'indice et contraction, un tenseur d'ordre $p-2$.

✍**Exemples :**

E1. Voyons un premier exemple d'élévation vers le bas et de contraction du tenseur du premier ordre covariant de quadri-position donné par (voir section Relativité Restreinte page ??) :

$$X_\mu = (-ct, x, y, z) \tag{6.7.228}$$

Soit en compososantes :

$$X_0 = -ct \qquad X_j = x_j \tag{6.7.229}$$

(où x_j sont les coordonnées cartésiennes usuelles) et le tenseur métrique de Minkowski de signature $(-+++)$ donné par (voir section Relativité Restreinte page ??) :

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.7.230}$$

en composantes :

$$\eta_{00} = -1 \qquad \eta_{i0} = \eta_{0i} = 0 \qquad \eta_{ij} = \delta_{ij} \tag{6.7.231}$$

Pour élever l'indice, nous multiplions par le tenseur et contractons :

$$X^\lambda = \eta^{\lambda\mu} X_\mu = \eta^{\lambda 0} X_0 + \eta^{\lambda i} X_i \tag{6.7.232}$$

Dès lors, pour $\lambda=0$:

$$X^0=\eta^{00}X_0+\eta^{0i}X_i=-X_0 \tag{6.7.233}$$

et pour $\lambda=j=1,2,3$:

$$X^j=\eta^{j0}X_0+\eta^{ji}X_i=\delta^{ji}X_i=X_j \tag{6.7.234}$$

Ainsi, le vecteur quadriposition contravariant indexé est :

$$X^\mu=(ct,x,y,z) \tag{6.7.235}$$

E2. Pour un exemple de tenseur du second ordre, considérons le tenseur électromagnétique contravariant dans la signature $(+---)$ donné par (voir section Électrodynamique page ??) :

$$F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{6.7.236}$$

Soit en composantes :

$$F^{0i}=-F^{i0}=-E^i/c \qquad F^{ij}=-\varepsilon^{ijk}B_k \tag{6.7.237}$$

Pour obtenir le tenseur covariant $F_{\alpha\beta}$, nous multiplions par le tenseur métrique et contractons :

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}&=\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta}\\ &=\eta_{\alpha0}\eta_{\beta0}F^{00}+\eta_{\alpha i}\eta_{\beta0}F^{i0}+\eta_{\alpha0}\eta_{\beta i}F^{0i}+\eta_{\alpha i}\eta_{\beta j}F^{ij}\end{aligned} \tag{6.7.238}$$

et comme $F^{00}=0$ et $F^{0i}=-F^{i0}$, cela se réduit à :

$$F_{\alpha\beta}=(\eta_{\alpha i}\eta_{\beta0}-\eta_{\alpha0}\eta_{\beta i})F^{i0}+\eta_{\alpha i}\eta_{\beta j}F^{ij} \tag{6.7.239}$$

Maintenant, pour $\alpha=0,\beta=k=1,2,3$:

$$\begin{aligned} F_{0k}&=(\eta_{0i}\eta_{k0}-\eta_{00}\eta_{ki})F^{i0}+\eta_{0i}\eta_{kj}F^{ij}\\ &=(0-(-\delta_{ki}))F^{i0}+0\\ &=F^{k0}=-F^{0k}\end{aligned} \tag{6.7.240}$$

et par antisymétrie, pour $\alpha=k=1,2,3$, $\beta=0$:

$$F_{0k}=-F_{k0} \tag{6.7.241}$$

et finalement pour $\alpha=k=1,2,3$, $\beta=\ell=1,2,3$:

$$\begin{aligned} F_{k\ell}&=(\eta_{ki}\eta_{\ell0}-\eta_{k0}\eta_{\ell i})F^{i0}+\eta_{ki}\eta_{\ell j}F^{ij}\\ &=0+\delta_{ki}\delta_{\ell j}F^{ij}\\ &=F^{k\ell}\end{aligned} \tag{6.7.242}$$

Le tenseur indexé inférieur (covariant) est alors :

$$F_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.7.243)$$

E3. Nous verrons également plus bas un exemple où nous contracterons un tenseur d'ordre 1 (une des composantes contravariantes des vecteurs de la base sphérique) ayant déjà un indice abaissé :

$$\left.\begin{aligned} \omega_3^3 &= \frac{\mathrm{d}r}{r}+\cot(\theta)\mathrm{d}\theta \\ g_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_{33} &= g_{33}\omega_3^3 = r^2\sin^2(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}r}{r}+\cot(\theta)\mathrm{d}\theta\right) \\ &= r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}r + r^2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{aligned} \quad (6.7.244)$$

Remarques

R1. Dans la relation :

$$g_{i_1j_1}u^{i_1i_2i_3\ldots i_p}=u_{j_1}^{i_2i_3\ldots i_p}=u_k^{ki_3\ldots i_p}=v^{i_3\ldots i_p} \quad (6.7.245)$$

l'égalité est une notation abusive que nous pouvons trouver dans certains livres (car à proprement parler il faudrait faire le calcul en deux étapes).

R2. Du fait de la symétrie des quantités g_{ij} (le produit scalaire est commutatif), ce dernier tenseur est identique à ce que nous obtiendrions en abaissant à la position covariante l'indice i_2, puis en effectuant la contraction de l'indice i_1 avec l'indice j_2.

Voyons cela :

La symétrie $g_{ij}=g_{ji}$ prend la forme (cela peut paraître déroutant mais rappelons que le numéro de la composante i indique la place de cette composante) :

$$g_{i_1j_1}=g_{i_2j_2} \quad (6.7.246)$$

Dès lors il vient :

$$g_{j_2i_2}u^{i_1i_2i_3\ldots i_p}=u_{j_2}^{i_1i_3\ldots i_p} \quad (6.7.247)$$

et en posant $i_1=j_2=k$:

$$v^{i_3i_4\ldots i_p}=u_k^{ki_3\ldots i_p} \quad (6.7.248)$$

De manière générale, la contraction d'un tenseur permet donc de former un tenseur d'ordre $p-2$ à partir d'un tenseur d'ordre p. Nous pouvons naturellement répéter l'opération de contraction. Ainsi, un tenseur pair, $2p$, deviendra un scalaire après p contractions et un tenseur d'ordre impair, $2p+1$, deviendra un vecteur.

Nous pouvons étendre après cette définition de la contraction des indices, le critère de tensorialité. Nous avons vu jusqu'à maintenant, deux manières de reconnaître le caractère tensoriel d'une suite de quantités :

- La première consiste à démontrer que ces quantités sont formées par le produit tensoriel de composantes de vecteurs ou par une somme de produits tensoriels ;
- La deuxième consiste à étudier la manière dont ces quantités se transforment lors d'un changement de base et à vérifier la conformité des relations de transformation ;
- La troisième et nouvelle amène à poser que pour qu'un ensemble de quantités n^{p+1}, comportant p indices supérieurs et q indices inférieurs soit tensoriel, il faut et il suffit que leur produit complètement contracté par les composantes contravariantes de p vecteurs quelconques et les composantes covariantes de q vecteurs quelconques, soit une quantité (la norme au fait...) qui demeure invariante par changement de base.

6.7.8 Tenseurs spéciaux

Nous pouvons être confrontés en physique théorique à des tenseurs qui ont des propriétés intéressantes. Afin d'éviter de faire un travail redondant au cas par cas, nous allons énumérer et démontrer les différentes propriétés existantes utilisées dans ce livre et parler de leurs possibles implications (l'analyse détaillée étant réservée à leur application dans les autres sections du présent livre).

6.7.8.1 Tenseur symétrique

En cours de traduction de l' anglais

Considérons un tenseur $\vec{T}$ d'ordre deux de composantes contravariantes T^{ij}. Supposons que, suivant une base $(\vec{e}_i)$, toutes ces composantes satisfassent aux relations :

$$T^{ij} = T^{ji} \quad (6.7.249)$$

Sur une autre base $(\vec{e}'_j)$, liée à la précédente par les relations de transformation connues, les nouvelles composantes de T'^{lm} vérifient la relation :

$$T'^{lm} = A'^{l}_{i} A'^{m}_{j} T^{ij} = A'^{m}_{j} A'^{l}_{i} T^{ji} \quad (6.7.250)$$

Nous voyons que la propriété $T^{ij} = T^{ji}$ est donc une caractéristique intrinsèque du tenseur $\vec{T}$, indépendante de la base ! Nous disons alors que le tenseur est un "tenseur symétrique" (nous reviendrons sur cette notion un peu plus loin) aussi appelé "tenseur totalement invariant" (signifiant implicitement : par changement de base).

La propriété de symétrie se vérifie également pour les composantes covariantes d'un tenseur symétrique puisque nous avons :

$$T_{lk} = g_{li} g_{kj} T^{ij} = g_{kj} g_{li} T^{ji} = T_{kl} \quad (6.7.251)$$

Réciproquement, la symétrie des composantes covariantes entraîne celle des composantes contravariantes.

Pour des tenseurs d'ordre plus élevé, la symétrie peut être partielle, portant sur deux indices covariants ou deux indices contravariants. Ainsi, un tenseur d'ordre quatre, de composantes mixtes T_l^{ijk} peut être également symétrique en i et j, par exemple, soit :

$$T_l^{ijk} = T_l^{jik} \tag{6.7.252}$$

Nous vérifions, de même que ci-dessus, qu'une telle propriété est intrinsèque.

Un tenseur est dit "tenseur complètement symétrique" si toute transposition de deux indices de même variance, change la composante correspondante en elle-même. Par exemple, pour un tenseur d'ordre trois T^{ijk}, complètement symétrique, nous avons les composantes suivantes qui sont égales entre elles :

$$T^{ijk} = T^{jik} = T^{kji} = T^{ikj} \tag{6.7.253}$$

Il existe de nombreux exemples de tenseurs symétriques. Cela inclut :

- le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ (voir section Relativité Générale page ??)
- le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ (voir plus bas)
- le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ (voir aussi plus bas).
- le tenseur de contrainte et de déformation pour les fluides ou les solides σ_{ij} (voir section Mécanique des Milieux Continus page ??)
- les tenseur de transformation de Lorentz Γ_ν^μ (voir section Relativité Restreinte page ??)
- ...

En cours de traduction de l' anglais

Nous pouvons aussi (très intéressante curiosité) obtenir une représentation géométrique des valeurs des composantes d'un tenseur symétrique d'ordre deux ! !

Pour cela, considérons dans l'espace géométrique ordinaire des coordonnées x^i, l'équation suivante :

$$a_{ij}x^ix^j = 1 \tag{6.7.254}$$

où, rappelons-le , peut être vu comme un produit tensoriel avec $i,j = 1,2,3$ et où les a_{ij} sont des coefficients réels donnés. Supposons que ces coefficients soient tels que :

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{6.7.255}$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 1 \tag{6.7.256}$$

Nous retrouvons ici l'équation d'une surface de second degré ou quadrique similaire à celle du plan que nous avons vue dans la section de Géométrie Analytique (voir page 2745). Nous savons

par extension à la troisième dimension que ces surfaces sont des ellipsoïdes ou hyperboloïdes, selon les valeurs des quantités a_{ij}.

Étudions comment se transforment les quantités a_{ij} lorsque nous effectuons un changement de coordonnées tel que :

$$x'^k = A'^k_i x^i \qquad \text{et} \quad x^i = A^i_k x'^k \tag{6.7.257}$$

L'équation de la quadrique s'écrit dans ce nouveau système de coordonnées :

$$a_{ij} A^i_k A^j_m x'^k x'^m = a'_{km} x'^k x'^m = 1 \tag{6.7.258}$$

D'où l'expression des coefficients dans le nouveau système d'axes :

$$a'_{km} = A^i_k A^j_m a_{ij} \tag{6.7.259}$$

Les coefficients a_{ij} se transforment donc comme les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Réciproquement, si les quantités a_{ij} sont les composantes d'un tenseur symétrique, ces composantes définissent les coefficients d'une quadrique. Il existe donc une certaine équivalence entre un tenseur symétrique et les coefficients d'une quadrique. Nous dirons que l'équation de la quadrique est la "quadrique représentative du tenseur symétrique" ou la "représentante de la surface".

Ainsi, la représentante de la surface (ou quadrique de représentation) est une représentation géométrique d'un tenseur symétrique de rang deux et est utile pour nous donner une image visuelle du tenseur et peut être toute aussi utile par exemple dans le calcul des grandeurs des propriétés des matériaux décrites par les tenseurs symétriques de range deux ! !

Nous savons de par notre étude des quadriques en géométrie plane (en étendant cela au cas tridimensionnel) que nous pouvons toujours trouver un système de coordonnées par rapport auquel l'équation d'une quadrique prend une forme plus simple :

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 = 1 \tag{6.7.260}$$

Dans ce cas, les vecteurs de base sont portés par les axes principaux de la quadrique. Dans ce système de coordonnées, les composantes du tenseur se réduisent à :

$$a_{11} = b_1 \qquad a_{22} = b_2 \qquad a_{33} = b_3 \tag{6.7.261}$$

et $a_{ij} = 0$ pour les autres composantes. Les quantités b_i sont appelées les "valeurs principales" du tenseur a_{ij}.

Si les quantités b_1, b_2, b_3 sont positives, la surface est un ellipsoïde, si deux quantités sont strictement positives et la troisième strictement négative, nous avons un hyperboloïde à une nappe, si deux quantités sont strictement négatives et la troisième positive, nous avons un hyperboloïde à deux nappes (voir section Géométrie Analytique page 2816).

La comparaison de l'expression de la quadrique obtenue précédemment avec l'équation classique :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{6.7.262}$$

En cours de traduction de l'anglais

où a, b, c sont les demi-axes d'un ellipsoïde montre que nous avons :

$$a=\frac{1}{\sqrt{b_1}} \qquad b=\frac{1}{\sqrt{b_2}} \qquad c=\frac{1}{\sqrt{b_b}} \tag{6.7.263}$$

Ci-dessous, nous pouvons voir une capture d'écran d'un outil interactif de l'Université de Cambridge pour jouer avec la quadrique de représentation d'ellipticité (seulement !) d'un tenseur symétrique de rang deux :

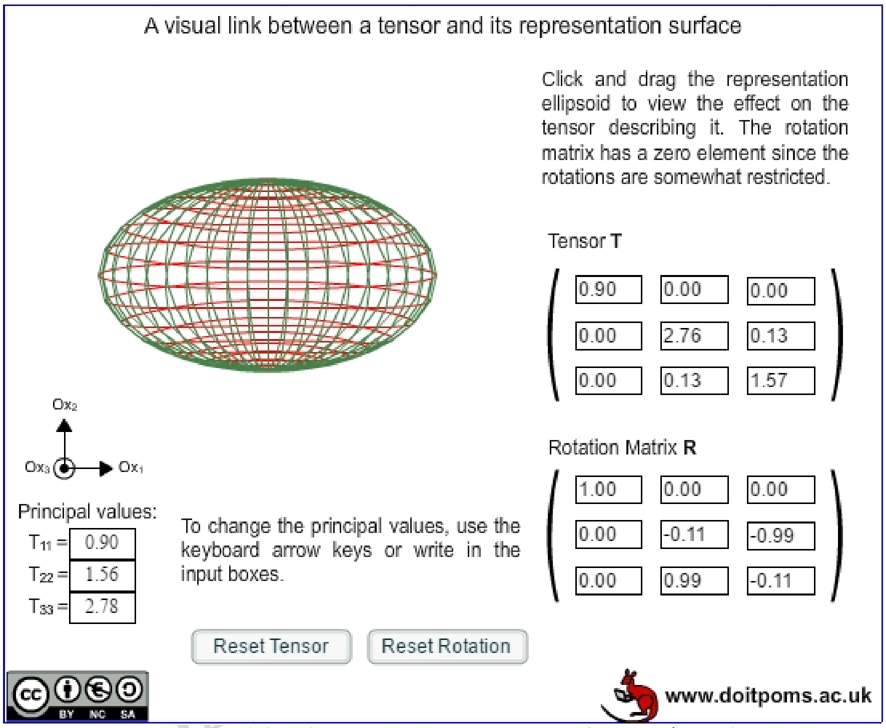


FIG. 6.148 – Lien visuel entre un tenseur et sa surface représentative (source : http://www.doitpoms.ac.uk)

En cours de ... anglais

6.7.8.2 Tenseur antisymétrique

Lorsque les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux T^{ij}, vérifient les relations :

$$T^{ij}=-T^{ji} \tag{6.7.264}$$

nous disons que le tenseur est un "tenseur antisymétrique" (il en va de même si les composantes sont covariantes). En d'autres termes, un tenseur est antisymétrique sur (ou par rapport à) un sous-ensemble d'indices s'il alterne le signe $(+/-)$ lorsque deux indices quelconques du sous-ensemble sont échangés.

C'est une propriété intrinsèque du tenseur qui se démontre comme pour les tenseurs symétriques, au signe "-" près. Un tenseur contravariant d'ordre deux, vérifiant donc la relation suivante sera dit "tenseur symétrique" (nous l'avons déjà mentionné un paquet de fois dans les paragraphes précédents).

Il découle de cette définition qu'un tenseur antisymétrique doit évidemment satisfaire au fait que ses composantes diagonales sont toutes nulles, comme par exemple pour un tenseur de rang

2 :

$$T^{11}=T^{22}=\ldots=T^{nn}=0 \quad (6.7.265)$$

Un tenseur antisymétrique bien connu est le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ (voir section Électrodynamique page ??).

Par exemple un tenseur covariant d'ordre trois T_{ijk} sera dit symétrique en i et k si pour toutes valeurs pouvant prendre les indices, nous avons :

$$T_{ijk}=T_{kji} \quad (6.7.266)$$

Ou encore le tenseur covariant d'ordre quatre T_{ijkl} sera dit antisymétrique en i et l si pour toutes les valeurs que peuvent prendre les indices, nous avons :

$$T_{ijkl}=-T_{ljki} \quad (6.7.267)$$

Un tenseur sera "totalement antisymétrique" si toute transposition d'indice de même variance (covariant/contravariant) change la composante correspondante en son opposé.

Tout tenseur T_{ij} peut être mis sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. Nous avons en effet :

$$\boxed{T_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})} \quad (6.7.268)$$

Le premier terme de la somme ci-dessus est un tenseur symétrique et le second, un tenseur antisymétrique.

Démonstration 6.45.10. Considérons d'abord que T_{ij} est symétrique, alors nous avons :

$$T_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})+\frac{1}{2}\underbrace{(T_{ij}-T_{ji})}_{=0}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ij})=\frac{1}{2}T_{ij}=T_{ij} \quad (6.7.269)$$

Cela prouve donc que le terme de gauche est bien symétrique pour ce cas particulier.

Considérons en second lieu que T_{ij} est symétrique, alors nous avons :

$$T_{ij}=\frac{1}{2}\underbrace{(T_{ij}+T_{ji})}_{=0}+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})=\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})=\frac{1}{2}2T_{ij}=T_{ij} \quad (6.7.270)$$

Cela prouve donc que le terme de gauche est bien antisymétrique pour ce cas particulier.

Maintenant si T_{ij} n'est ni symétrique ni antisymétrique nous avons :

$$T_{ij}=\frac{1}{2}(T_{ij}+T_{ji})+\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})=\frac{1}{2}T_{ij}+\frac{1}{2}T_{ji}+\frac{1}{2}T_{ij}-\frac{1}{2}T_{ji}=\frac{1}{2}2T_{ij}+\frac{1}{2}(T_{ji}-T_{ji})=\frac{1}{2}T_{ij} \quad (6.7.271)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Un tenseur T_l^{ijk} sera "partiellement antisymétrique si par exemple nous avons :

$$T_l^{ijk} = -T_l^{jik} \tag{6.7.272}$$

C'est-à-dire antisymétrique uniquement pour un sous-ensemble d'indices.

Considérons maintenant deux vecteurs $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ et $\vec{y} = y^j \vec{e}_j$ d'un espace vectoriel $\mathcal{E}^n$. Formons les quantités antisymétriques suivantes (nous y trouvons deux produits tensoriels) :

$$T^{ij} = x^i y^j - x^j y^i \tag{6.7.273}$$

où nous voyons immédiatement que les composantes T^{ij} sont celles d'un tenseur antisymétrique $\vec{T}$.

$$x^i y^j - x^j y^i = -(x^j y^i - x^i y^j) \tag{6.7.274}$$

La décomposition du vecteur $\vec{T}$ dans la base $\vec{e}_i \vec{e}_j$ est :

$$\vec{T} = (\vec{x} \times \vec{y}) = (x^i y^j - x^j y^i) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{x} \otimes \vec{y} - \vec{y} \otimes \vec{x} \tag{6.7.275}$$

Le tenseur $\vec{x} \otimes \vec{y}$ (noté ainsi en analogie avec le produit vectoriel pour $n = 3$) est appelé le "produit extérieur" des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Nous disons encore que ce tenseur est un "bivecteur".

Le produit extérieur est donc un tenseur antisymétrique qui vérifie les propriétés suivantes :

P1. Anticommutativité

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x} \tag{6.7.276}$$

Il en résulte :

$$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0} \tag{6.7.277}$$

P2. Distributivité à gauche et à droite pour l'addition vectorielle :

$$\begin{aligned} \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{y} &= \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z} \end{aligned} \tag{6.7.278}$$

P3. Associativité pour la multiplication par un scalaire :

$$\alpha \vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \alpha \vec{y} = \alpha (\vec{x} \times \vec{y}) \tag{6.7.279}$$

P4. Les produits extérieurs :

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i \tag{6.7.280}$$

constituent une base de l'ensemble des bivecteurs.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 6.45.11. Un tenseur $\vec{T}$ antisymétrique d'ordre deux, élément de $\mathcal{E}^2_{(2)}$, peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{T} = T^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sum_{i<j} T^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \sum_{i\geq j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \tag{6.7.281}$$

Échangeant, dans la dernière somme de la relation ci-dessus, le nom des indices et en tenant compte que $T^{ij} = -T^{ji}$, nous obtenons :

$$\vec{U} = \sum_{i<j} u^{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i) \tag{6.7.282}$$

Les éléments :

$$\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i \tag{6.7.283}$$

sont linéairement indépendants puisque les vecteurs $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ le sont également. Ces éléments constituent donc une base sur laquelle les tenseurs antisymétriques peuvent être décomposés.

■ Q.E.D.

Le nombre de vecteurs distinguables $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$ est égal au nombre de combinaisons de vecteurs pris deux à deux et distinguables parmi n tel que (voir section Probabilités page 521) :

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} < n^2 \tag{6.7.284}$$

Effectivement parmi les n^2 composantes, n composantes sont nulles et les autres composantes ont des valeurs opposées deux à deux. Nous pouvons donc considérer que la moitié de ces dernières suffit à caractériser le tenseur.

Dans le cadre du produit tensoriel extérieur où nous avons :

$$T^{ij} = x^i y^j - x^j y^i \tag{6.7.285}$$

le nombre de composantes distinguables est également de $n(n-1)/2$ et elles sont appelées "composantes strictes".

Nous remarquons que pour $n=3$, le nombre de composantes strictes du produit extérieur de deux vecteurs est aussi égal à trois. Ceci permet de former avec les composantes du bivecteur, les composantes d'un produit vectoriel $\vec{z}$.

Ainsi, un produit vectoriel n'existe donc que pour un sous-espace de bivecteurs dont le nombre de dimensions est égal à 3 et dont les pré-images sont des tenseurs antisymétriques.

Si toutes ces conditions sont satisfaites, nous disons que le vecteur $\vec{z}$ constitue le "tenseur adjoint" du tenseur $\vec{T}$.

En cours de traduction de l' anglais

6.7.8.3 Tenseur Fondamental

Nous avons vu au début de notre étude du Calcul Tensoriel la définition des composantes covariantes du tenseur fondamental g_{ij}, à savoir :

$$g_{ij}=\vec{e}_i \circ \vec{e}_j \tag{6.7.286}$$

Ces quantités interviennent, nous le savons (voir sujets précédents), dans l'expression du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, de composantes contravariantes x^i et y^i, donné par la relation (pour rappel) :

$$\vec{x} \circ \vec{y}=g_{ij}x^i y^i \tag{6.7.287}$$

Utilisons le critère général de tensorialité pour mettre en évidence le caractère tensoriel des g_{ij}. L'expression précédente est un produit complètement contracté des quantités g_{ij} avec les composantes contravariantes $x^i y^i$ d'un tenseur arbitraire. Comme le produit scalaire est une quantité invariante (en l'occurrence un scalaire) par rapport aux changements de base, il en résulte que les n^2 quantités g_{ij} sont les composantes covariantes d'un tenseur.

Ce tenseur est de plus symétrique par suite de la propriété de symétrie du produit scalaire des vecteurs de base telle que :

$$g_{ij}=g_{ji} \tag{6.7.288}$$

Nous avons de même pour les composantes contravariantes du tenseur fondamental :

$$g^{ij}=g^{ji} \tag{6.7.289}$$

Si nous notons par g^i_j les composantes mixtes du tenseur fondamental à lui-même :

$$g^i_j=g^{ik}g_{jk} \tag{6.7.290}$$

avec évidemment dans la base canonique :

$$g^i_j=\delta^i_j \tag{6.7.291}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.7.9 Coordonnées Curvilignes

Les notions classiques de système de coordonnées peuvent être généralisées à des espaces ponctuels (voir section Principes page ??) à n-dimensions. Nous appelons "système de coordonnées" dans $\mathcal{E}^n$ (espace ponctuel à n dimensions donc), tout mode de définition d'un point M dans le système considéré.

Définitions (#6.7.262) :

D1. Pour un système donné de coordonnées (cartésiennes, sphériques, cylindriques, polaires...), nous appelons "ligne de coordonnées" le "lieu" des points M lorsqu'une seule coordonnée varie, les autres étant égales à des constantes.

D2. Une "coordonnées curvilignes" est un système de coordonnées pour l'espace euclidien dans lequel les lignes de coordonnées peuvent être courbes. Ces coordonnées peuvent être dérivées d'un ensemble de coordonnées cartésiennes en utilisant une transformation qui est localement inversible (une carte biunivoque) en chaque point (voir section Calcul Vectoriel page 1823).

Cela signifie que nous pouvons convertir un point donné dans un système de coordonnées cartésiennes en ses coordonnées curvilignes et inversement. Le but, comme nous le savons déjà, est que, selon l'application, un système de coordonnées curvilignes peut être plus simple à utiliser que le système de coordonnées cartésien. Par exemple, un problème physique avec une symétrie sphérique définie (par exemple, le mouvement des particules sous l'influence de forces centrales) est généralement plus facile à résoudre en coordonnées polaires sphériques qu'en coordonnées cartésiennes.

Des exemples bien connus de systèmes de coordonnées curvilignes sont, comme nous le savons dans l'espace euclidien tridimensionnel, les coordonnées polaires cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Étudions tout d'abord la généralisation d'un système de coordonnées relatives à un repère fixe (nous conseillons vivement au lecteur d'avoir lu au préalable la partie traitant des systèmes de coordonnées dans la section de Calcul Vectoriel et la partie traitant du formalisme lagrangien dans la section Principes).

Considérons un espace ponctuel $\mathcal{E}^n$ et $(\vec{e}_i)$ un repère de cet espace. Soit x_i les coordonnées rectilignes d'un point M de $\mathcal{E}^n$ par rapport à ce repère. Un système de coordonnées quelconque u^k, avec $k=1,2,\ldots,n$, est obtenu en se donnant n fonctions arbitraires f^i des paramètres u^k, telles que :

$$x^i = f^i(u^1, u^2, \ldots, u^n) \tag{6.7.292}$$

En cours de traduction de l'anglais

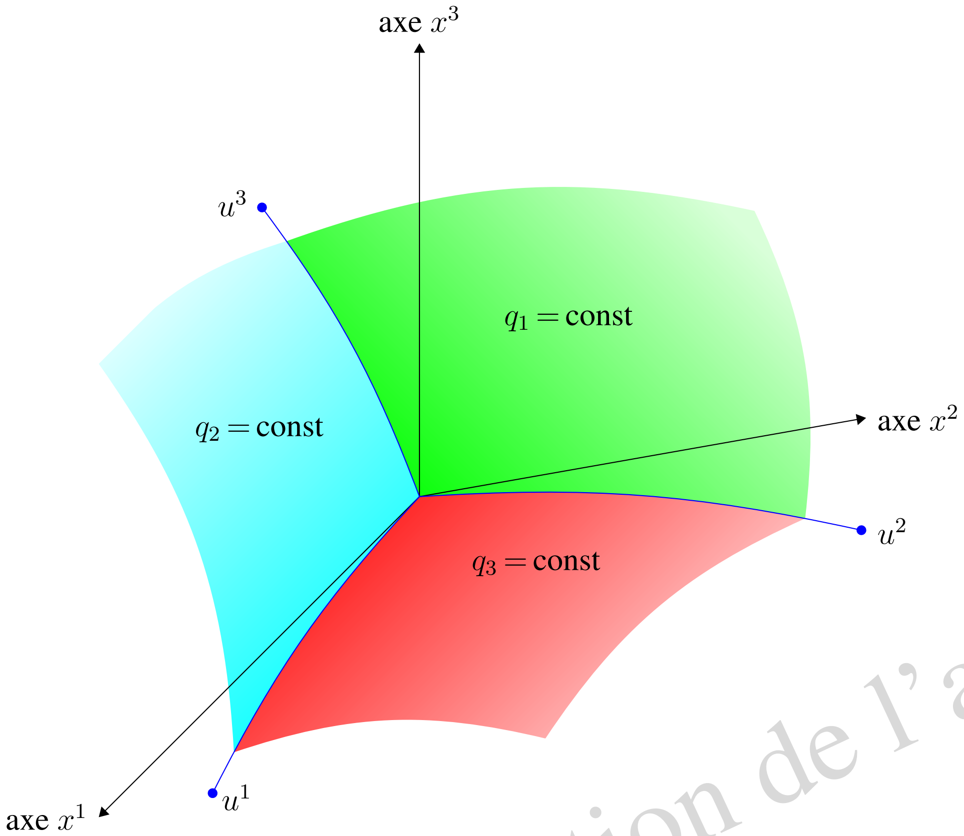


FIG. 6.149 – **Coordonnées de surface, coordonnées de lignes et axes de coordonnées des coordonnées curvilignes générales (source : Wikipédia, auteur : Lyudmil Antonov)**

En cours de traduction de l'anglais

Nous supposerons par la suite que ces n fonctions satisfont aux trois propriétés suivantes :

P1. Elles sont de classe supérieure ou égale à $\mathcal{C}^2$ (dérivables au moins deux fois pour les besoins de la physique). Cette hypothèse implique, en tout point où elle est satisfaite, que nous avons la permutabilité des dérivations (par rapport aux deux dérivations partielles comme vu dans la section de Calcul Différentiel et Intégral) :

$$\partial_{kl} f^i = \partial_{lk} f^i \tag{6.7.293}$$

où pour rappel :

$$\frac{\partial f^a}{\partial x^b} = \lim_{h\rightarrow 0} \frac{V^a\left(\ldots, x^b + h, \ldots\right) - V^a\left(\ldots, x^b, \ldots\right)}{h} = \partial_b V^a \tag{6.7.294}$$

avec $V^a = \vec{V} \cdot \vec{e}^a$.

P2. Ces fonctions sont telles que nous pouvons résoudre le système des n équations de changement de système de coordonnées par rapport aux variables u^k et les exprimer en fonction des x^i, soit :

$$u^k = g^k(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{6.7.295}$$

toujours avec $k = 1, 2, \ldots, n$.

P3. Lorsque les variables u^k varient dans un domaine Δ, les variables x^i varient dans un domaine Δ' (pensez aux coordonnées cartésiennes $\leftrightarrow$ sphériques où, en cartésien, la plage de variables est infinie alors qu'en sphérique, les deux sont limitées à une plage de largeur typique de 2π).

P4. Le jacobien des fonctions $x^i = f^i(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, défini par (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1503) :

$$\mathrm{D}(\partial_k x^i) = \begin{bmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^2 & \ldots & \partial_1 x^n \\ \partial_2 x^1 & \partial_2 x^2 & \ldots & \partial_2 x^n \\ & & & \ddots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \partial_n x^1 & \partial_n x^2 & \ldots & \partial_n x^n \end{bmatrix} \tag{6.7.296}$$

sera supposé différent de zéro dans le domaine Δ (ainsi que le jacobien $\mathrm{D}(\partial_i u^k)$ des fonctions $u^k = g^k(x^1, x^2, \ldots, x^n)$) et est l'inverse du jacobien de $u^k = g^k(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Si les jacobiens existent, ils sont non nuls comme conséquence en premier lieu de la deuxième propriété ci-dessus et implicitement de la première.

Comme nous l'avons déjà mentionné, si nous fixons $(n-1)$ paramètres u^k en faisant varier un seul paramètre, u^i par exemple, nous obtenons les coordonnées $x^i_{(1)}$ d'un ensemble de points M qui constituent une "ligne de coordonnées". En général, les lignes de coordonnées ne sont pas des droites mais des courbes ; ces coordonnées sont appelées pour cette raison des "coordonnées curvilignes". En un point M de $\mathcal{E}^n$ se croisent d'ailleurs n lignes de coordonnées.

Nous avons démontré dans la section de Mécanique Analytique, lors de l'étude des espaces ponctuels (voir page **??**), que les dérivées et les différentielles d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ de $\mathcal{E}^n$ sont indépendantes du point O d'un repère donné. Si $\mathcal{E}^n$ est rapporté à un système de coordonnées curvilignes u^k, nous écrivons :

$$\vec{e}_k = \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u^k} = \partial_k \vec{M} \tag{6.7.297}$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Un exemple fameux de coordonnées curvilignes u^k, où chaque u^k est une fonction uniforme des coordonnées rectilignes x^k, les u^k étant de plus des fonctions continues au point courant M, est celui des coordonnées sphériques où nous avons (voir section Calcul Vectoriel page 1826) :

$$u^1 = r \qquad u^2 = \theta \qquad u^3 = \phi \tag{6.7.298}$$

et pour rappel :

$$x_1 = r\sin(\theta)\cos(\phi) \qquad x_2 = r\sin(\theta)\sin(\phi) \qquad x_3 = r\cos(\theta) \tag{6.7.299}$$

Rappelons aussi que lors de notre étude du système de coordonnées sphériques dans la section de Calcul Vectoriel nous avions obtenu après normalisation des vecteurs de base :

$$\mathrm{d}\vec{M} = \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\theta r \mathrm{d}\theta + \vec{e}_\phi r\sin(\theta)\mathrm{d}\phi \tag{6.7.300}$$

Dès lors :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}=\vec{e}_r \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}=\vec{e}_\theta r \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \phi}=\vec{e}_\phi r\sin(\theta) \tag{6.7.301}$$

avec :

$$\left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}\right\|=1 \qquad \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}\right\|=r \qquad \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \phi}\right\|=r\sin(\theta) \tag{6.7.302}$$

Dans un espace non-euclidien, nous ne pouvons définir une base valable sur tout l'espace. Ainsi, nous construisons une base en chaque point séparément et pour cela, nous utilisons bien les coordonnées curvilignes telles qu'en chaque point M, les vecteurs de base $\vec{e}_k$ sont tangents à la ligne de coordonnées correspondante via la relation donnée plus haut :

$$\vec{e}_k=\frac{\partial \overrightarrow{\text{O}M}}{\partial u^k}=\partial_k \vec{M} \tag{6.7.303}$$

Soient maintenant $u^1,u^2,\ldots,u^n$ les coordonnées curvilignes du point M par rapport à un repère cartésien $(\vec{e}_i^{\,0})$. Dans ce repère, nous avons bien évidemment :

$$\overrightarrow{\text{O}M}=x^i\vec{e}_i^{\,0} \tag{6.7.304}$$

où les coordonnées cartésiennes sont des fonctions $x^i=x^i(u^1,u^2,\ldots,u^n)$.

Le vecteur $\vec{e}_k$ a donc pour expression :

$$\vec{e}_k=\partial_k(x^i\vec{e}_i^{\,0})=(\partial_k x^i)\vec{e}_i^{\,0} \tag{6.7.305}$$

Le lecteur pourra vérifier avec l'exemple des coordonnées sphériques (en regardant la version explicite des vecteurs correspondants dans la section Calcul Vectoriel) que cette relation est correcte mais à condition que l'on travaille avec la version non normalisée des vecteurs orthogonaux $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$!

À partir des composantes $\partial_k x^i$ du vecteur $\vec{e}_k$, nous pouvons former un déterminant $\det(\partial_k x^i)$ qui est précisément le jacobien des fonctions x^i que nous avions défini précédemment. Puisque ce déterminant est différent de zéro (du moins imposé tel quel), il en résulte que les n vecteurs $\vec{e}_k$ (comme fonctions) sont linéairement indépendants (nous avons prouvé dans la section de Calcul Différentiel et Intégral que ce Jacobien est en valeur absolue égal à $r^2\sin(\theta)$ pour les coordonnées sphériques).

Remarque

Rappelons que dans la section de Calcul Différentiel et Intégral nous avons prouvé que le déterminant du Jacobien apparaît lors du calcul de la surface d'un parallélogramme dans un espace non euclidien. Évidemment, si le déterminant est nul, alors la surface est nulle car cela signifie que les bases vectorielles du parallélogramme sont toutes colinéaires (dépendantes linéairement). D'où le fait que si le déterminant n'est pas nul alors certains des vecteurs (ou tous) sont indépendants !

Ces n vecteurs, définis par la relation :

$$\vec{e}_k=\partial_k\vec{M} \tag{6.7.306}$$

En cours de traduction de l'anglais

sont appelés la "natural basis" au point M de l'espace vectoriel $\mathcal{E}^n$. Ils sont colinéaires aux tangentes des n lignes coordonnées qui se coupent au point M où ils sont définis.

Nous n'insisterons pas sur le fait évident qu'à tout système de coordonnées curvilignes est associé un repère naturel dont la base est exprimée par ces mêmes coordonnées (voorir section Calcul Vectoriel page 1823).

✍**Exemple :**

En coordonnées sphériques, les vecteurs de la base naturelle sont ceux que nous avons obtenus lors de notre étude du système de coordonnées sphériques dans le chapitre de Calcul Vectoriel et qui sont orthogonaux mais non orthonormés.

Associons au point M de $\mathcal{E}^n$ un repère formé par le point M et par les vecteurs de la base naturelle[31]. Ce repère est appelé le "repère naturel" en M du système de coordonnées u^k. Il sera noté :

$$(M, \vec{e}_k) \qquad \text{ou} \qquad (M, \partial_k \vec{M}) \tag{6.7.307}$$

La différentielle du vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime alors sous la forme :

$$\mathrm{d}\vec{M} = \partial_k \vec{M} \mathrm{d}u^k = \vec{e}_k \mathrm{d}u^k \tag{6.7.308}$$

Les quantités $\mathrm{d}u^k$ constituent les composantes contravariantes du vecteur $\mathrm{d}\vec{M}$ dans le repère naturel $(M, \vec{e}_k)$ du système de coordonnées u^k.

Considérons maintenant deux systèmes quelconques (pensez par exemple aux systèmes de coordonnées sphériques et cylindriques) de coordonnées curviligneu^i et u^k, liées entre elles par les relations :

$$u^i = u^i\left(u'^1, u'^2, \ldots, u'^n\right) \qquad u'^k = u'^k\left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right) \tag{6.7.309}$$

où les fonctions $u^i = u^i(u'^1, u'^2, \ldots, u'^n)$ sont supposées plusieurs fois continument dérivables par rapport aux u'^k et de même pour les fonctions $u'^k = u'^k(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ par rapport aux coordonnées u^i. Lorsque nous passons d'un système de coordonnées à un autre, nous disons que nous effectuons un "changement de coordonnées curvilignes"".

Nous avons vu dans les section de Géométrie Différentielle et de Relativité Générale que le carré de la distance entre deux points M et M' infiniment proches est donné par la relation :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j} \tag{6.7.310}$$

où les $\mathrm{d}x^i$ sont les composantes du vecteur $\mathrm{d}\vec{M} = \overrightarrow{MM}$, rapportées à un repère fixe d'un espace ponctuel $\mathcal{E}^n$. Lorsque cet espace est rapporté à un système de coordonnées curvilignes u^i, nous avons vu que la relation :

$$\mathrm{d}\vec{M} = \partial_k \vec{M} \mathrm{d}u^k = \vec{e}_k \mathrm{d}u^k \tag{6.7.311}$$

[31] Pour rappel que la base naturelle dans un espace euclidien est l'ensemble des vecteurs unitaires pointant dans la direction des axes d'un repère cartésien

En cours de traduction de l' anglais

montre que le vecteur $\mathrm{d}\vec{M}$ a pour composantes contravariantes les quantités $\mathrm{d}u^i$ par rapport au repère naturel $(M, \vec{e}_i$. Le carré de la distance $\mathrm{d}s^2$ s'écrit alors dans le repère naturel :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{6.7.312}$$

où les quantités $g_{ij} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_j$ sont les composantes du "tenseur fondamental" ou du "tenseur métrique" définies à l'aide d'une base naturelle. L'expression précédente s'appelle "l'élément linéaire de l'espace ponctuel" $\mathcal{E}^n$ ou encore la "métrique" de cet espace.

Les vecteurs $\vec{e}_i$ du repère naturel varient en général d'un point un autre. C'est le cas, par exemple, des coordonnées sphériques dont les quantités g_{ij} (nous le démontrerons de suite après avec un exemple détaillé) sont variables puise dépendants des paramètres r, θ ou ϕ !

Une courbe Γ de $\mathcal{E}^n$ peut être définie par la donnée des coordonnées curvilignes $u^i(\alpha)$ du lieu des points $M(\alpha)$ en fonction d'un paramètre α (voir section Géométrie Différentielle page 2822). La distance élémentaire $\mathrm{d}s$ sur cette courbe Γ s'écrit alors :

$$\mathrm{d}s = \left[g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial \alpha}\frac{\partial u^j}{\partial \alpha}\right]^{1/2}\mathrm{d}\alpha \tag{6.7.313}$$

Si nous considérons un vecteur tangent $\vec{v}$ de Γ et notons ses composantes v^i sur une base $\vec{e}_i$. Sur une autre base $\vec{e}'_i$ nous avons noté les composants v'^i, donc :

$$\vec{v} = v^i\vec{e}_i = v'^i\vec{e}'_i \tag{6.7.314}$$

dans lequel :

$$v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\alpha} \quad \text{et} \quad v'^i = \frac{\mathrm{d}x^{ii}}{\mathrm{d}\lambda} \tag{6.7.315}$$

Si nous exprimons les nouvelles composantes en fonction des anciennes, alors :

$$v'^i = \frac{\mathrm{d}x'^i}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}v^j \tag{6.7.316}$$

Il s'agit de la forme explicite d'une transformation nommée "transformation contravariante". Afin de les distinguer de tels vecteurs des vecteurs covariants (tangents), l'index est placé en haut.

Un exemple célèbre de transformation contravariante est donné par une forme différentielle $\mathrm{d}f$. Pour f en tant que fonction des coordonnées x^i, $\mathrm{d}f$ peut être exprimé en termes de $\mathrm{d}x^i$ (c'est-à-dire la dérivée totale). Les différentielles $\mathrm{d}x^i$ se transforment selon la règle contravariante puisque :

$$\boxed{\mathrm{d}x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j} \tag{6.7.317}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.7.9.1 Repère naturel en coordonnées sphériques (base curviligne en coordonnées sphériques)

Déterminons la base naturelle de l'espace vectoriel E^3 associé à l'espace ponctuel $\mathcal{E}^3$ de la géométrie ordinaire, en coordonnées sphériques. Ecrivons l'expression des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ dans un repère cartésien fixe $(\vec{e}_i^{\,0})$ qui est par définition (voir la section de Calcul Vectoriel pour plus de détails) :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M} = x^i \vec{e}_i^{\,0} = r\sin(\theta)\cos(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + r\sin(\theta)\sin(\phi)\vec{e}_2^{\,0} + r\cos(\theta)\vec{e}_3^{\,0} \tag{6.7.318}$$

Les vecteurs de la base naturelle étant donnés par :

$$\vec{e}_k = \partial_k \vec{M} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \partial_1 \vec{M} = \partial_r \vec{M} \\ \vec{e}_2 = \partial_2 \vec{M} = \partial_\theta \vec{M} \\ \vec{e}_3 = \partial_3 \vec{M} = \partial_\phi \vec{M} \end{cases} \tag{6.7.319}$$

Nous avons ainsi :

$$\vec{e}_1 = \partial_1 \vec{M} = \sin(\theta)\cos(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + \sin(\theta)\sin(\phi)\vec{e}_2^{\,0} + \cos(\theta)\vec{e}_3^{\,0} \tag{6.7.320}$$

La dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ par rapport à θ donne le vecteur $\vec{e}_2$:

$$\vec{e}_2 = \partial_2 \vec{M} = r\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + r\cos(\theta)\sin(\phi)\vec{e}_2^{\,0} - r\sin(\theta)\vec{e}_3^{\,0} \tag{6.7.321}$$

La dérivée par rapport à φ donne le vecteur $\vec{e}_3$:

$$\vec{e}_3 = \partial_3 \vec{M} = -r\sin(\theta)\sin(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\vec{e}_2^{\,0} \tag{6.7.322}$$

Ces trois vecteurs sont orthogonaux entre eux ainsi que nous le vérifions aisément en effectuant les produits scalaires $\vec{e}_i \circ \vec{e}_j$. Lorsqu'il en est ainsi, nous disons que les coordonnées sont des "coordonnées curvilignes orthogonales" (voir section Calcul Vectoriel page 1826).

Nous retrouvons donc bien le même résultat que dans le chapitre de Calcul Vectoriel. Ces vecteurs ne sont cependant pas tous normés (leur norme n'est pas égale à 1), puisque nous avons :

$$g_{11} = \vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = 1 \quad g_{22} = \vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = r^2 \quad g_{33} = \vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = r^2\sin^2(\theta) \tag{6.7.323}$$

Le repère naturel, en coordonnées sphériques, est donc formé par des vecteurs variables en direction et en module en chaque point de M. Les quantités g_{ij} constituent un exemple de tenseur métrique attaché à chacun des points M de l'espace $\mathcal{E}^3$.

En cours de traduction de l'anglais

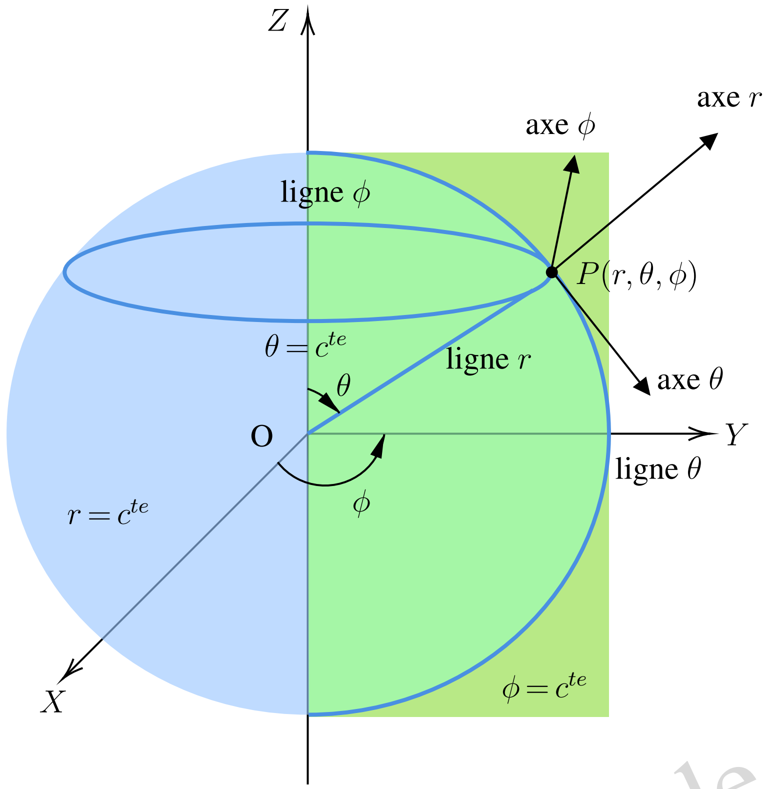


FIG. 6.150 – **Coordonnées de surface, coordonnées de lignes axes de coordonnées des coordonnées sphériques**

L'élément linéaire du plan est donné par (les détails des calculs peuvent être trouvés dans la section de Relativité Générale) :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \tag{6.7.324}$$

6.7.9.2 Repère naturel en coordonnées polaires (base curviligne en coordonnées polaires)

Déterminons la base naturelle de l'espace vectoriel E^2 associé à l'espace ponctuel $\mathcal{E}^2$ de la géométrie ordinaire, en coordonnées polaires. Ecrivons l'expression des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ dans un repère fixe cartésien $(\vec{e}_i^{\,0})$ qui est par définition (voir la section de Calcul Vectoriel pour plus de détails) :

$$\overrightarrow{OM} = x^i\vec{e}_i^{\,0} = r\cos(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + r\sin(\phi)\vec{e}_2^{\,0} \tag{6.7.325}$$

Les vecteurs de la base naturelle étant donnés par :

$$\vec{e}_k = \partial_k\vec{M} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \partial_1\vec{M} = \partial_r\vec{M} \\ \vec{e}_2 = \partial_2\vec{M} = \partial_\phi\vec{M} \end{cases} \tag{6.7.326}$$

Nous avons :

$$\vec{e}_1 = \partial_1\vec{M} = \cos(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + \sin(\phi)\vec{e}_2^{\,0} \tag{6.7.327}$$

La dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ par rapport à ϕ donne le vecteur $\vec{e}_2$:

$$\vec{e}_2 = \partial_2\vec{M} = -r\sin(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + r\cos(\phi)\vec{e}_2^{\,0} \tag{6.7.328}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ces deux vecteurs sont orthogonaux entre eux ainsi que nous le vérifions aisément en effectuant les produits scalaires $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2$. Nous retrouvons donc bien le même résultat que dans la section de Calcul Vectoriel.

Nous avons alors :

$$g_{11} = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \quad g_{21} = g_{12} = 0 \quad g_{22} = r^2 \tag{6.7.329}$$

L'élément linéaire du plan est alors donné par (les détails des calculs peuvent être trouvés dans la section de Relativité Générale) :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2} \tag{6.7.330}$$

6.7.9.3 Repère naturel en coordonnées cylindriques (base curviligne en coordonnées cylindriques)

Déterminons la base naturelle de l'espace vectoriel E^3 associé à l'espace ponctuel $\mathcal{E}^3$ de la géométrie ordinaire, en coordonnées cylindriques. Écrivons l'expression des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ dans un repère fixe cartésien $(\vec{e}_i^{\,0})$ qui est par définition (voir le chapitre de Calcul Vectoriel pour plus de détails) :

$$\overrightarrow{OM} = x^i\vec{e}_i^{\,0} = r\cos(\varphi)\vec{e}_1^{\,0} + r\sin(\varphi)\vec{e}_2^{\,0} + z\vec{e}_3^{\,0} \tag{6.7.331}$$

Les vecteurs de la base naturelle étant donnés par :

$$\vec{e}_k = \partial_k\vec{M} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \partial_1\vec{M} = \partial_r\vec{M} \\ \vec{e}_2 = \partial_2\vec{M} = \partial_\varphi\vec{M} \\ \vec{e}_3 = \partial_3\vec{M} = \partial_z\vec{M} \end{cases} \tag{6.7.332}$$

Nous avons :

$$\vec{e}_1 = \partial_1\vec{M} = \cos(\varphi)\vec{e}_1^{\,0} + \sin(\varphi)\vec{e}_2^{\,0} \tag{6.7.333}$$

La dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à φ donne le vecteur $\vec{e}_2$:

$$\vec{e}_2 = \partial_2\vec{M} = -r\sin(\phi)\vec{e}_1^{\,0} + r\cos(\phi)\vec{e}_2^{\,0} \tag{6.7.334}$$

et enfin :

$$\vec{e}_3 = \partial_3\vec{M} = \vec{e}_3^{\,0} \tag{6.7.335}$$

Ces trois vecteurs sont orthogonaux entre eux ainsi qu'on le vérifie aisément en effectuant les produits scalaires $\vec{e}_i \circ \vec{e}_j$. Nous retrouvons donc encore une fois le même résultat que dans la section de Calcul Vectoriel.

Nous avons :

$$g_{11} = 1 \quad g_{22} = r^2 \quad g_{33} = 1 \tag{6.7.336}$$

En cours de traduction de l'anglais

L'élément linéaire de la surface est alors donné par (le détail des calculs se trouve dans la section de la Relativité Générale) :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2} \tag{6.7.337}$$

Remarquez maintenant que :

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{6.7.338}$$

exprime quelque chose sur les relations métriques intrinsèques de l'espace, mais il le fait en termes d'un système de coordonnées spécifique. Si nous considérions les relations métriques au même point en termes de système de coordonnées différent (comme le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires), les coefficients $g_{\mu\nu}$ seraient différents. Heureusement, il existe un moyen simple de convertir les $g_{\mu\nu}$ d'un système de coordonnées à un autre, basé sur le fait qu'ils décrivent une relation purement localisée entre des quantités différentielles. Supposons qu'on nous donne les coefficients métriques $g_{\mu\nu}$ pour les coordonnées x^α, et qu'on nous donne aussi un autre système de coordonnées y^α qui sont définies en termes de x^α par des fonctions continues arbitraires :

$$\begin{aligned} y^0 &= f_0(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad & y^1 &= f_1(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ y^2 &= f_2(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad & y^3 &= f_3(x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \tag{6.7.339}$$

En supposant que le jacobien de cette transformation n'est pas nul, nous savons qu'il est inversible, et nous pouvons donc tout aussi bien exprimer les coordonnées d'origine sous forme de fonctions continues (à ce stade) des nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} x^0 &= F_0(y^0, y^1, y^2, y^3) \qquad & x^1 &= F_1(y^0, y^1, y^2, y^3) \\ x^2 &= F_2(y^0, y^1, y^2, y^3) \qquad & x^3 &= F_3(y^0, y^1, y^2, y^3) \end{aligned} \tag{6.7.340}$$

Nous pouvons maintenant évaluer les dérivées totales des coordonnées d'origine en fonction des nouvelles coordonnées. Par exemple, $\mathrm{d}x^0$ peut s'écrire :

$$\mathrm{d}x^0 = \frac{\partial x^0}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 + \frac{\partial x^0}{\partial y^1}\mathrm{d}y^1 + \frac{\partial x^0}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial x^0}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3 \tag{6.7.341}$$

et de même pour les $\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2$ et $\mathrm{d}x^3$. Le produit de deux de ces différentielles, $\mathrm{d}x^\mu$ et $\mathrm{d}x^\nu$, est de la forme :

$$\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\mathrm{d}y^\alpha \mathrm{d}y^\beta \tag{6.7.342}$$

(en se souvenant de la convention de sommation donnant 16 composants). En remplaçant ces expressions par les produits des différentielles x dans la formule de la métrique :

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{6.7.343}$$

donne :

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\mathrm{d}y^\alpha \mathrm{d}y^\beta \tag{6.7.344}$$

Les trois premiers facteurs du côté droit représentent évidemment le coefficient de $\mathrm{d}y^\alpha \mathrm{d}y^\beta$ dans la formule de la métrique par rapport aux coordonnées y, donc nous nous avons montré que

En cours de traduction de l' anglais

le tableau de coefficients métriques se transforme du système de coordonnées x au système de coordonnées y selon la relation :

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)_y = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\left(g_{\mu\nu}\right)_x \qquad (6.7.345)$$

Aussi souvent noté :

$$g_{\alpha\beta}^{(y)} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}^{(x)} \qquad (6.7.346)$$

et plus rarement (malheureusement) noté :

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)_y = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \left(g_{\mu\nu}\right)_x \qquad (6.7.347)$$

Notez que chaque composante du nouveau tableau métrique est une combinaison linéaire des anciens composants de la métrique et que les coefficients sont les dérivées partielles des anciennes coordonnées par rapport aux nouvelles. Tableaux qui se transforment l'un en l'autre de la manière :

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} A_{\mu\nu} \qquad (6.7.348)$$

sont appelés "tenseurs covariants[32] du second ordre".

Lorsque nous parlons d'un tableau transformé d'un système de coordonnées à un autre, il est clair que le tableau doit avoir une signification définie indépendante du système de coordonnées. Nous pourrions, par exemple, avoir un tableau de grandeurs scalaires, dont les valeurs sont les mêmes en un point donné, quel que soit le système de coordonnées. Cependant, les composants du tableau peuvent encore être amenés à changer pour différents systèmes.

Maintenant, nous définissons des tableaux qui se transforment les uns en les autres de la manière :

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} A_{\alpha\beta} \qquad (6.7.349)$$

comme des "tenseurs contravariants (d'ordre deux)".

Nous aurons besoin de ce résultat important pour notre étude du tenseur Énergie-Impulsion dans la section de la Relativité Générale.

Maintenant, le lecteur doit garder à l'esprit qu'en Relativité Générale, nous n'équipons pas l'espace-temps (pour une définition naïve et technique de "l'espace-temps", voir la section sur la Relativité Restreinte à la page **??**) lui-même d'une structure d'espace vectoriel, ce qui signifie que le "quadrivecteur position-temps" n'est pas un quadri-vecteur ! Par conséquent, l'objet x_μ dont les composantes sont données par $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ comme prouvé précédemment n'est pas un covecteur ! On peut le montrer par ses propriétés de transformation.

[32] Gardez à l'esprit que lorsqu'un tenseur est exprimé en termes de coordonnées cartésiennes, il n'y a pas de distinction entre les composants covariants et contravariants

En cours de traduction de l'anglais

Si nous changeons les systèmes de coordonnées de x à y, alors :

$$\begin{gathered} g_{\mu\nu}^{(x)} \rightarrow g_{\mu\nu}^{(y)} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta}^{(x)} \\ x^\nu \rightarrow y^\nu \end{gathered} \tag{6.7.350}$$

et alors :

$$x_\mu = g_{\mu\nu}^{(x)} x^\nu \rightarrow g_{\mu\nu}^{(y)} y^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta}^{(x)} y^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} g_{\alpha\beta}^{(x)} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} y^\nu\right) \tag{6.7.351}$$

Si cet objet était un covecteur, il se transformerait comme prouvé précédemment en utilisant la transformation covariante :

$$x_\mu \rightarrow y_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} x_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} g_{\alpha\beta}^{(x)} x^\beta \tag{6.7.352}$$

En comparant cela à ce que nous avons trouvé précédemment, cela n'est vrai que si :

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} y^\nu = x^\beta \tag{6.7.353}$$

c'est-à-dire si la transformation des coordonnées est linéaire. Puisque les transformations de coordonnées ne sont, en général, pas linéaires, alors cette égalité ne tient pas, et les x_ν ne sont pas les composantes d'un covecteur.

Enfin une autre identité évidente que l'on peut aussi parfois trouver dans certains manuels rares est (je n'ai cependant jamais vu d'application pratique de cette dernière) :

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\mu = \delta_\nu^\lambda = g_\nu^\lambda \tag{6.7.354}$$

En cours de traduction de l' anglais

6.7.10 Symboles de Christoffel

L'étude des champs de tenseurs constitue, pour le physicien, l'essentiel de l'analyse tensorielle. Le tenseur générique $\vec{U}$ de ce champ est une fonction du point M et nous le notons simplement par :

$$\vec{U}(M) \tag{6.7.355}$$

Si le tenseur $\vec{U}$ est une fonction seulement de M, le champ considéré est appelé un "champ fixe". Si $\vec{U}$ est, en outre, une fonction d'un ou plusieurs paramètres autres que les coordonnées de M, nous disons alors que ce champ est un "champ variable" et nous le notons :

$$\vec{U}(M,\alpha) \tag{6.7.356}$$

Les différentes opérations algébriques sur les tenseurs $\vec{U}(M)$ associés à un même point M ne soulèvent pas de difficulté particulière. La dérivée de $\vec{U}(M)$ par rapport à un paramètre α conduit à utiliser les résultats classiques relatifs à la dérivation des vecteurs.

Cependant, une difficulté apparaît lorsque nous cherchons à calculer la dérivée d'un tenseur $\vec{U}(M)$ par rapport aux coordonnées curvilignes. En effet, les composantes du tenseur sont définies en chaque point M par rapport à un repère naturel qui varie d'un point à un autre.

Par suite, le calcul de la variation élémentaire, appelée "transport élémentaire"

$$\vec{U}(M')-\vec{U}(M) \tag{6.7.357}$$

Lorsque nous passons d'un point M à un point infiniment voisin M' cela ne peut se faire que si nous avons recours à une même base. Pour pouvoir comparer l'un à l'autre les tenseurs $\vec{U}(M')$ et $\vec{U}(M)$, nous sommes amenés à étudier comment varie un repère naturel, pour un système de coordonnées donné, lorsque nous passons d'un point M au point infiniment voisin M'.

Pour un système de coordonnées curvilignes u^i donné d'un espace ponctuel $\mathcal{E}^n$ un problème fondamental de l'analyse tensorielle consiste donc à déterminer, par rapport au repère naturel au point $(M,\vec{e}_k)$, le repère naturel au point infiniment voisin $(M',\vec{e}\,'_k)$. Nous disons alors que nous recherchons une "connexion affine".

D'une part, le point M' sera parfaitement défini par rapport à M si nous déterminons le vecteur $\mathrm{d}\vec{M}$ tel que $\overrightarrow{MM'}=\mathrm{d}\vec{M}$. Pour des coordonnées curvilignes u^k, la décomposition d'un vecteur élémentaire $\mathrm{d}\vec{M}$ est donnée par la relation que nous avons démontrée précédemment :

$$\mathrm{d}\vec{M}=\partial_k\vec{M}\mathrm{d}u^k=\vec{e}_k\mathrm{d}u^k \tag{6.7.358}$$

les quantités $\mathrm{d}u^k$ étant les composantes contravariantes du vecteur $\mathrm{d}\vec{M}$ sur la base naturelle $(\vec{e}_k)$.

Et maintenant, pour rendre les choses physiquement comparables, nous devons garantir que les vecteurs des deux bases soient également parallèles ! L'idée est donc que la dérivée que nous recherchons permet de transporter les vecteurs d'une variété (surface) le long de courbes afin qu'ils restent parallèles par rapport à la connexion (dérivée). Une telle idée est nommée en physique "transport parallèle".

En cours de traduction de l'anglais

D'autre part, les vecteurs vont pouvoir être déterminés en calculant les variations élémentaires des vecteurs , par rapport au repère naturel , lorsque nous passons de M en M ' ; nous avons alors :

L'idée est donc de déterminer le vecteur $\vec{e}'_k$ avec des variations élémentaires $\mathrm{d}\vec{e}_k$ du vecteur $\vec{e}_k$ relativement au repère naturel $(M, \vec{e}_k)$, quand nous passons de M à M'. Nous avons alors :

$$\mathrm{d}\vec{e}'_k = \vec{e}_k + \mathrm{d}\vec{e}_k \tag{6.7.359}$$

Le calcul des vecteurs $\mathrm{d}\vec{e}_k$ reste alors le problème essentiel à résoudre. Nous allons tout d'abord étudier un exemple de ce type de calcul en coordonnées sphériques.

Pour cela, reprenons l'expression des vecteurs $\vec{e}_k$ de la base naturelle en coordonnées sphériques, soit :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \partial_1\vec{M} = \sin(\theta)\cos(\phi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k} \\
\vec{e}_2 &= \partial_2\vec{M} = r\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{i} + r\cos(\theta)\sin(\phi)\vec{j} - r\sin(\theta)\vec{k} \\
\vec{e}_3 &= \partial_3\vec{M} = -r\sin(\theta)\sin(\phi)\vec{i} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\vec{j}
\end{aligned} \tag{6.7.360}$$

Les vecteurs de base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ du repère fixe cartésien étant constants en module et en direction, la différentielle du vecteur $\vec{e}_1$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{e}_1 = (\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\phi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k})\mathrm{d}\theta + (-\sin(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)\vec{j})\mathrm{d}\phi \tag{6.7.361}$$

Nous remarquons que les termes entre parenthèses représentent respectivement les vecteurs $\vec{e}_2/r$ et $\vec{e}_3/r$, d'où :

$$\mathrm{d}\vec{e}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{r}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{r}\right)\vec{e}_3 \tag{6.7.362}$$

Nous calculons de même, en différentiant les vecteurs $\vec{e}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{e}_2 &= \mathrm{d}r\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{i} + dr\cos(\theta)\sin(\phi)\vec{j} - \mathrm{d}r\sin(\theta)\vec{k} \\
&\quad - r\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\cos(\phi)\vec{i} - r\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\sin(\phi)\vec{j} - r\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\vec{k} \\
&\quad - r\cos(\theta)\sin(\phi)\mathrm{d}\phi\vec{i} + r\cos(\theta)\cos(\phi)\mathrm{d}\phi\vec{j} \\
&\quad = (\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\phi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k})\mathrm{d}r + (-r\sin(\theta)\cos(\phi)\vec{i} - r\sin(\theta)\sin(\phi)\vec{j} - r\cos(\theta)\vec{k})\mathrm{d}\theta \\
&\quad + (-r\cos(\theta)\sin(\phi)\vec{i} + r\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{j})\mathrm{d}\phi \\
&\quad = \frac{\vec{e}_2}{r}\mathrm{d}r - r\vec{e}_1\mathrm{d}\theta + (-r\cos(\theta)\sin(\phi)\vec{i} + r\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{j})\mathrm{d}\phi
\end{aligned} \tag{6.7.363}$$

avec :

$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \tag{6.7.364}$$

nous avons :

$$\vec{e}_3\cot(\theta) = \vec{e}_3\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -r\cos(\theta)\sin(\phi)\vec{i} + r\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{j} \tag{6.7.365}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc finalement :

$$\mathrm{d}\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2}{r}\mathrm{d}r - r\vec{e}_1\mathrm{d}\theta + \vec{e}_3\cot(\theta)\mathrm{d}\phi \quad (6.7.366)$$

Et :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{e}_3 = &-\mathrm{d}r\sin(\theta)\sin(\phi)\vec{i} + \mathrm{d}r\sin(\theta)\cos(\phi)\vec{j} \\ &- r\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\sin(\phi)\vec{i} + r\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\cos(\phi)\vec{j} \\ &- r\sin(\theta)\cos(\phi)\mathrm{d}\phi\vec{i} - r\sin(\theta)\sin(\phi)\mathrm{d}\phi\vec{j}\end{aligned} \quad (6.7.367)$$

Après quelques opérations algébriques élémentaires et très pertinentes (...), nous arrivons à :

$$\mathrm{d}\vec{e}_3 = (-r\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi)\vec{e}_1 + (-\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\phi)\vec{e}_2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + \cot(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\vec{e}_3 \quad (6.7.368)$$

Les différentielles $\mathrm{d}\vec{e}_k$ sont ainsi décomposées sur la base naturelle $(\vec{e}_k)$. Si nous notons ω_i^k, les composantes contravariantes du vecteur $\mathrm{d}\vec{e}_1$, celui-ci s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{e}_i = \omega_i^k\vec{e}_k} \quad (6.7.369)$$

Les composantes ω_i^k du vecteur $\mathrm{d}\vec{e}_i$ sont des formes différentielles (combinaisons linéaires de différentielles). Nous avons, par exemple :

$$\omega_1^2 = \frac{\mathrm{d}\theta}{r} \qquad \omega_3^3 = \frac{\mathrm{d}r}{r} + \cot(\theta)\mathrm{d}\theta \quad (6.7.370)$$

Si nous notons de manière générale par u^i les coordonnées sphériques, nous avons :

$$u^1 = r \qquad u^2 = \theta \qquad u^3 = \phi \quad (6.7.371)$$

Les différentielles des coordonnées sont alors notées :

$$\mathrm{d}u^1 = \mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}u^2 = \mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}u^3 = \mathrm{d}\phi \quad (6.7.372)$$

et les composantes ω_i^j s'écrivent alors de manière générale :

$$\boxed{\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j\mathrm{d}u^k} \quad (6.7.373)$$

Où les quantités Γ_{ki}^j sont des fonctions de r,θ,ϕ qui vont être explicitement obtenues en identifiant chaque composante ω_i^j. Par exemple, la composante ω_3^3 s'écrit avec la notation de la relation précédente :

$$\omega_3^3 = \frac{\mathrm{d}r}{r} + \cot(\theta)\mathrm{d}\theta = \Gamma_{13}^3\mathrm{d}u^1 + \Gamma_{23}^3\mathrm{d}u^2 + \Gamma_{33}^3\mathrm{d}u^3 \quad (6.7.374)$$

Identifiant les coefficients des différentielles, il vient :

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \qquad \Gamma_{23}^3 = \cot(\theta) \qquad \Gamma_{33}^3 = 0 \quad (6.7.375)$$

En procédant de même avec les 9 composantes ω_i^j, nous obtenons les 27 (...) termes dont les calculs détaillés pour les $3\cdot 9 = 27$ sont donnés beaucoup plus bas dans le texte. Pour tout système de coordonnées curvilignes quelconques, ces quantités Γ_{ki}^j sont appelées les "symboles de Christoffel de deuxième espèce" ou encore "fonctions euclidiennes de connexion affine".

Ainsi, pour un espace ponctuel $\mathcal{E}^3$ et un système de coordonnées curvilignes u^j quelconque, la différentielle $\vec{e}_i = \omega_i^k\vec{e}_k$ des vecteurs $\vec{e}_i$ de la base naturelle s'écrit sur cette base :

$$\mathrm{d}\vec{e}_k = \omega_i^k\vec{e}_k = \Gamma_{ji}^k\mathrm{d}u^j\vec{e}_k \quad (6.7.376)$$

où Γ_{ji}^k dans ce contexte est souvent appelé "connexion de Levi-Civita".

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Cela signifie donc aussi que étant donné un vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i \tag{6.7.377}$$

Alors :

$$\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}v^k \vec{e}_k + v^k \mathrm{d}\vec{e}_k \tag{6.7.378}$$

Mais comme :

$$\mathrm{d}\vec{e}_k = \Gamma^k_{ji} \mathrm{d}u^j \vec{e}_k \tag{6.7.379}$$

nous avons alors :

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{v} = \left(\mathrm{d}v^k + \Gamma^k_{ji} \mathrm{d}u^j\right) \vec{e}_k} \tag{6.7.380}$$

Nous venons de voir, sur l'exemple des coordonnées sphériques, qu'un calcul direct permet, par identification, d'obtenir explicitement les quantités Γ^j_{ki}. Nous allons voir que nous pouvons également obtenir l'expression de ces quantités en fonction des composantes g_{ij}.

Le calcul des quantités Γ^j_{ki} en fonction des g_{ij} va nous amener à introduire d'autres symboles de Christoffel. Pour cela, écrivons les composantes covariantes, notées ω_{ji}, des différentielles $\mathrm{d}\vec{e}_i$, soit (c'est une sorte de définition) :

$$\omega_{ji} = \vec{e}_j \circ d\vec{e}_i \tag{6.7.381}$$

En traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Avec notre exemple vu plus haut :

$$\vec{e}_3 = \partial_3 \vec{M} = -r\sin(\theta)\sin(\phi)\vec{i} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\vec{j} \tag{6.7.382}$$

et :

$$\mathrm{d}\vec{e}_3 = (-r\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi)\vec{e}_1 + (-\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\phi)\vec{e}_2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + \cot(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\vec{e}_3 \tag{6.7.383}$$

Nous obtenons (la plupart des produits scalaires sont des vecteurs orthogonaux, donc ils s'annulent) :

$$\begin{aligned}\omega_{33} = \vec{e}_3 \circ d\vec{e}_3 &= \vec{e}_3 \circ \left((-r\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi)\vec{e}_1 + (-\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\phi)\vec{e}_2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + \cot(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\vec{e}_3\right)\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + \cot(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + \cot(\theta)\mathrm{d}\theta\right) r^2\sin^2(\theta) = r\sin^2(\theta)\mathrm{d}r + r^2\cot(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{6.7.384}$$

Les composantes covariantes sont également des combinaisons linéaires des différentielles $\mathrm{d}u^k$ que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\omega_{ji} = \Gamma_{kji} du^k \tag{6.7.385}$$

Les quantités Γ_{kji} sont appelées les "symboles de Christoffel de première espèce".

Nous voyons très bien en parcourant à nouveau les définitions des symboles de Christoffel que :

1. Pour ce qui est des symboles de 2ème espèce, ils sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs et donc si la métrique est symétrique, nous avons :

$$\Gamma_{ji}^{k}=\Gamma_{ij}^{k} \tag{6.7.386}$$

2. Pour ce qui est des symboles de 1ère espèce, ils sont aussi symétriques par rapport à leurs indices extrêmes si la métrique est symétrique :

$$\Gamma_{kij}=\Gamma_{jik} \tag{6.7.387}$$

Effectivement (suite à la demande d'un lecteur), puisque nous avons :

$$\mathrm{d}\vec{e}_k=\omega_i^k\vec{e}_k=\Gamma_{ji}^{k}\mathrm{d}u^j\vec{e}_k \tag{6.7.388}$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial\vec{e}_k}{\partial u^j}=\vec{e}_k\Gamma_{ji}^{k} \tag{6.7.389}$$

et en permutant les indices i et j :

$$\frac{\partial\vec{e}_k}{\partial u^j}=\vec{e}_k\Gamma_{ij}^{k} \tag{6.7.390}$$

L'identification terme à terme du développement sur un cas concret des deux dernières relations donnera (forcément) l'égalité :

$$\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k} \tag{6.7.391}$$

que nous voulions prouver.

Puisque les composantes covariantes sont liées aux composantes contravariantes par les relations (contraction des indices) :

$$\omega_{ji}=g_{jl}\omega_i^l=g_{jl}\Gamma_{ki}\mathrm{d}u^k \tag{6.7.392}$$

Nous obtenons l'expression liant les symboles de Christoffel de chaque espèce :

$$\boxed{\Gamma_{kji}=g_{jl}\Gamma_{ki}^{l}} \tag{6.7.393}$$

Inversement :

$$\boxed{\Gamma_{ki}^{j}=g^{jl}\Gamma_{kli}} \tag{6.7.394}$$

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Diverses notations sont utilisées pour représenter les symboles de Christoffel. Les plus usuelles sont les suivantes :

- Symboles de Christoffel première espèce :

$$\Gamma_{kji} = [ki, j] \tag{6.7.395}$$

- Symboles de Christoffel deuxième espèce :

$$\Gamma^j_{ki} = [k^j\ i] \tag{6.7.396}$$

Considérons maintenant un espace ponctuel $\mathcal{E}^n$ et soit un élément linéaire $\mathrm{d}s^2$ donné de cet espace :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{6.7.397}$$

Partant de :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_j \tag{6.7.398}$$

nous obtenons par différenciation :

$$\mathrm{d}g_{ij} = \vec{e}_i \circ \mathrm{d}\vec{e}_j + \vec{e}_j \circ \mathrm{d}\vec{e}_i \tag{6.7.399}$$

En y injectant l'expression des différentielles $\mathrm{d}\vec{e}_j = \omega^l_j \vec{e}_l$ cela nous donne :

$$\mathrm{d}g_{ij} = (\vec{e}_i \circ \vec{e}_l)\omega^l_j + (\vec{e}_j \circ \vec{e}_l)\omega^l_i = g_{il}\omega^l_j + g_{jl}\omega^l_i \tag{6.7.400}$$

où le terme ω^l_j représente la composante mixte du vecteur $\mathrm{d}\vec{e}_j$. Nous pouvons rendre cette composante covariante en la prémultipliant par le tenseur métrique g_{il} de manière à former quantité que nous pourrons à son tour exprimer au moyen des symboles de Christoffel comme suit :

$$\omega_{ij} = g_{il}\omega^l_j = g_{il}\Gamma^l_{kj}\mathrm{d}u^k \tag{6.7.401}$$

Substituant la relation $\Gamma_{kji} = g_{jl}\Gamma^l_{ki}$ dans l'expression précédente (les indices utilisés dans cette relation ne sont pas ceux de l'expression en cause, mais mutatis mutandis cela revient au même), nous obtenons alors :

$$\omega_{ij} = \Gamma_{kij}\mathrm{d}u^k \tag{6.7.402}$$

La différentielle $\mathrm{d}g_{ij}$ s'écrit alors :

$$\boxed{\mathrm{d}g_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} = \left(\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}\right)\mathrm{d}u^k} \tag{6.7.403}$$

D'autre part, la différentielle de la fonction g_{ij} s'écrit également :

$$\boxed{\mathrm{d}g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\mathrm{d}u^k = \partial_k g_{ij}\mathrm{d}u^k} \tag{6.7.404}$$

En cours de traduction de l' anglais

d'où en identifiant les coefficients des différentielles dans ces deux dernières expressions (beaucoup plus bas dans la présente section, il y a un exemple détaillé de toutes les relations qui vont suivre avec plusieurs systèmes de coordonnées) :

$$\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji}=\partial_k g_{ij} \tag{6.7.405}$$

Relation que le lecteur pourra (s'il doute) vérifier avec les exemples pratiques détaillés qui se trouvent bien plus bas.

Comme nous avons (dans le cas pour rappel d'une métrique symétrique) :

$$\Gamma_{kij}=\Gamma_{kji} \tag{6.7.406}$$

où il est fortement recommandé au lecteur de se rappeler pour la suite que la permutation des indices respectant cette dernière relation ne fonctionne, en général, que sur les indices extrêmes.

Nous pouvons donc écrire l'avant-dernière relation :

$$\Gamma_{jik}+\Gamma_{kji}=\partial_k g_{ij} \tag{6.7.407}$$

puis en effectuant une permutation circulaire sur les indices (donc il ne s'agit pas d'une permutation des indices extrêmaux !), nous obtenons :

$$\Gamma_{kji}+\Gamma_{ikj}=\partial_i g_{jk}\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jik}=\partial_j g_{kj} \tag{6.7.408}$$

En effectuant la somme :

$$\begin{array}{rr} & \Gamma_{jik}+\Gamma_{kji}=\partial_k g_{ij} \\ + & \Gamma_{kji}+\Gamma_{ikj}=\partial_i g_{jk} \\ \hline & \Gamma_{jik}+\Gamma_{kji}+\Gamma_{kji}+\Gamma_{ikj}=\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk} \end{array} \tag{6.7.409}$$

et en retranchant :

$$\begin{array}{rr} & \Gamma_{jik}+\Gamma_{kji}+\Gamma_{kji}+\Gamma_{ikj}=\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk} \\ - & \Gamma_{ikj}+\Gamma_{jik}=\partial_j g_{kj} \\ \hline & \Gamma_{jik}+\Gamma_{kji}+\Gamma_{kji}+\Gamma_{ikj}-\Gamma_{ikj}-\Gamma_{jik}=\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki} \end{array} \tag{6.7.410}$$

En simplifiant il vient :

$$2\Gamma_{kji}=\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki} \tag{6.7.411}$$

d'où :

$$\boxed{\Gamma_{kji}=\frac{1}{2}(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki})} \tag{6.7.412}$$

C'est l'expression des symboles de Christoffel de première espèce en fonction des dérivées partielles des composantes du tenseur fondamental g_{ij} nommée "première identité de Christoffel". Nous comprenons ainsi pourquoi dans un référentiel localement inertiel (du type Minkowski) les symboles de Christoffel sont tous nuls (étant donné que la métrique est constante).

En cours de traduction de l'anglais

Nous obtenons ceux de deuxième espèce à partir de la relation (par définition) suivante souvent appelée "théorème fondamental de la géométrie riemannienne" ou "connexion de Levi-Civita" ou encore "première identité de Christoffel" :

$$\boxed{\Gamma_{kj}^{i}=g^{il}\Gamma_{klj}=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{lj}+\partial_j g_{kl}-\partial_l g_{kj})} \tag{6.7.413}$$

Les deux dernières expressions encadrées ci-dessus permettent le calcul effectif des symboles de Christoffel pour une métrique donnée (d'où un énorme gain en calculs). Lorsque les quantités g_{ij} sont données a priori, nous pouvons ainsi étudier les propriétés de l'espace ponctuel défini par la donnée de cette métrique, ce qui est le cas des espaces de Riemann que nous verrons plus loin.

Pour notre étude de la Cosmologie, nous aurons besoin de calculer :

$$\Gamma_{ki}^{i}=g^{im}\Gamma_{mki}=\frac{1}{2}g^{im}(\partial_i g_{mk}+\partial_k g_{mi}-\partial_m g_{ki}) \tag{6.7.414}$$

Dans cet but, notons que :

$$\begin{aligned} g^{im}\partial_i g_{mk} &= g^{im}\partial_i g_{km} && \text{(symétrie de } g\text{)}\\ &= g^{mi}\partial_m g_{ki} && \text{(changement des indices muets)}\\ &= g^{im}\partial_m g_{ki} && \text{(symétrie de } g\text{)} \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\Gamma_{ki}^{i}=\frac{1}{2}g^{im}(\partial_i g_{mk}+\partial_k g_{mi}-\partial_m g_{ki})=\frac{1}{2}g^{im}\partial_k g_{mi} \tag{6.7.415}$$

✍**Exemple :**

Proposons-nous de calculer les symboles de Christoffel de deuxième espèce Γ_{kj}^{i} correspondant au système de coordonnées polaires (ce sera déjà suffisamment long...) dans le plan que nous noterons cette fois-ci (contrairement à la section de Calcul Vectoriel) en notation indicielle :

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1\cos\left(y^2\right) & y^1 &= \sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2}\\ &&\text{avec}&&\\ x^2 &= y^1\sin\left(y^2\right) & y^2 &= \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \end{aligned} \tag{6.7.416}$$

Nous allons calculer les symboles de Christoffel à partir de notre dernière relation :

$$\Gamma_{kj}^{i}=g^{il}\Gamma_{klj}=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{kl}+\partial_k g_{lj}-\partial_l g_{kj}) \tag{6.7.417}$$

Occupons-nous de déterminer les composantes de la métrique. Au fait, elles sont les mêmes que celles que nous avions calculées pour les coordonnées cylindriques plus haut à la différence normalement évidente que n'existe pas. Dès lors, nous avons :

$$g_{11}=1 \qquad g_{12}=g_{21}=0 \qquad g_{22}=\left(y^1\right)^2 \tag{6.7.418}$$

traduction de l'anglais

Calculons alors les g_{ji}. Dans cet exemple c'est assez trivial, il suffit d'appliquer la relation démontrée au début de cette section :

$$g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j \tag{6.7.419}$$

Ou en jouant comme avec des matrices standards (voir section Algèbre Linéaire page 1956) :

$$g^{ji}=(g_{ik})^{-1}=\frac{1}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11}\end{bmatrix} \tag{6.7.420}$$

Nous avons alors immédiatement :

$$g^{11}=1 \qquad g^{12}=g^{21}=0 \qquad g^{22}=\frac{1}{\left(y^1\right)^2} \tag{6.7.421}$$

Maintenant développons l'écriture de symboles de Christoffel pour ces coordonnées :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1&=\frac{1}{2}g^{1l}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial y^1}+\frac{\partial g_{l1}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y^l}\right) \qquad l=1,2\\
&=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y^1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y^2}\right)=0\\
\Gamma_{11}^2&=\frac{1}{2}g^{2l}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial y^1}+\frac{\partial g_{l1}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y^l}\right) \qquad l=1,2\\
&=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y^1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y^2}\right)=0\\
\Gamma_{12}^1&=\frac{1}{2}g^{1l}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{l2}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial y^l}\right) \qquad l=1,2\\
&=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial y^1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial y^2}\right)=0\\
\Gamma_{12}^2&=\frac{1}{2}g^{2l}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{l2}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial y^l}\right) \qquad l=1,2\\
&=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y^1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial y^1}-\frac{\partial g_{21}}{\partial y^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial y^1}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(y^1\right)^2}2y^1=\frac{1}{y^1}
\end{aligned} \tag{6.7.422}$$

D'où en raison des propriétés de symétrie :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^1&=\Gamma_{12}^1=0\\
\Gamma_{21}^2&=\Gamma_{12}^2=\frac{1}{y^1}
\end{aligned} \tag{6.7.423}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^{1} &= \frac{1}{2}g^{1l}\left(\frac{\partial g_{2l}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{l2}}{\partial y^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y^l}\right) \qquad l=1,2\\
&= \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y^1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial y^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial y^1}=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2y^1=-y^1\\
\Gamma_{22}^{2} &= \frac{1}{2}g^{2l}\left(\frac{\partial g_{2l}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{l2}}{\partial y^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y^l}\right) \qquad l=1,2\\
&= \frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y^1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial y^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial y^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial y^2}=0
\end{aligned} \tag{6.7.424}$$

En résumé :

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^{1}=0 \quad \Gamma_{12}^{1}=0 \quad \Gamma_{21}^{1}=0 \quad \Gamma_{22}^{1}=-y^1\\
&\Gamma_{11}^{2}=0 \quad \Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{y^1} \quad \Gamma_{21}^{2}=\frac{1}{y^1} \quad \Gamma_{22}^{2}=0
\end{aligned} \tag{6.7.425}$$

6.7.11 Théorème de Ricci

Avant de lire ce qui va suivre... nous tenons à rappeler au lecteur que la rédaction de cette section n'est pas terminée (comme la majorité des sections des autres chapitres de ce livre) ! Ainsi, il nous faut encore illustrer les notions abstraites qui vont suivre par des exemples pratiques concrets mais en dehors du contexte de la Relativité Générale !

Ceci étant dit, nous avons donc vu dans la section de Relativité Générale que les géodésiques sont les distances les plus courtes entre deux points dans n'importe quel type d'espace. Ce qui va nous intéresser maintenant, c'est d'étudier les variations d'un vecteur au cours d'un tel déplacement. Rappelons d'abord que l'équation des géodésiques pour un système y^i de coordonnées curvilignes quelconque de l'espace ponctuel $\mathcal{E}^n$ (voir section Principes page ??) est donnée par (voir section Relativité Généarle page ??) :

$$\frac{\mathrm{d}^2y^i}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{kj}^{i}\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}=0 \tag{6.7.426}$$

Considérons maintenant un vecteur $\vec{v}$ de de composantes covariantes v_i et formons le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}=\mathrm{d}y/\mathrm{d}s$ (ce dernier vecteur, noté directement ici de manière abusive avec les indices, donne les composantes tangentes à la géodésique sur laquelle circule le premier vecteur), nous avons alors la quantité suivante :

$$\vec{v}\circ\vec{n}=v_i\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s} \tag{6.7.427}$$

Lors d'un déplacement le long de la géodésique, d'un point M à un point infiniment voisin M', le scalaire subit la variation :

$$\mathrm{d}\left(v_i\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\right)=\mathrm{d}v_k\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}+v_i\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\right) \tag{6.7.428}$$

et comme :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}^2y^i}{\mathrm{d}s^2}\Rightarrow\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}^2y^i}{\mathrm{d}s^2}\mathrm{d}s \tag{6.7.429}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}\left(v_i\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\right)=\mathrm{d}v_k\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}+v_i\frac{\mathrm{d}^2y^i}{\mathrm{d}s^2}ds \tag{6.7.430}$$

Remplaçons dans cette dernière expression, d'une part la différentielle de $\mathrm{d}v_K$ par sa différentielle totale exacte :

$$\mathrm{d}v_k=\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\mathrm{d}y^i=\partial_j v_k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}dy^i=\partial_j v_k\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \tag{6.7.431}$$

et d'autre part, la dérivée seconde $\mathrm{d}^2y^i/\mathrm{d}s$ par son expression tirée de l'équation des géodésiques. Nous obtenons :

$$\mathrm{d}\left(v_i\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\right)=\partial_j v_k\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s-v_i\Gamma_{kj}^i\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=(\partial_i v_k-v_i\Gamma_{kj}^i)\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \tag{6.7.432}$$

qui peut encore s'écrire : :

$$\mathrm{d}(\vec{v}\circ\vec{n})=(\partial_i v_k-v_i\Gamma_{kj}^i)\mathrm{d}y^j\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}=Dv_k\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s} \tag{6.7.433}$$

Où nous avons posé :

$$\mathrm{D}v_k=(\partial_j v_k-v_i\Gamma_{kj}^i)\mathrm{d}y^i \tag{6.7.434}$$

qui sont par définition les différentielles absolues des composantes covariantes du vecteur $\vec{v}$. Nous définissons également la "dérivée covariante pour des 1-forme" (appelée également "connexion" ou "connexion affine") par la relation :

$$\boxed{\nabla_j v_k=\partial_j v_k-v_i\Gamma_{kj}^i} \tag{6.7.435}$$

Remarque

Dans les ouvrages anciens ou américains ceci est souvent noté sous la forme (que nous n'utiliserons aucunement dans ce livre) :

$$v_{k;j}=v_{k,j}-v_i\Gamma_{kj}^i \tag{6.7.436}$$

faisant donc usage du ";" pour noter la dérivée covariante et de la "," pour la différentielle partielle.

En cours de traduction de l' anglais

Puisque la dérivée du produit de deux fonctions est la somme des dérivées partielles, nous avons alors aussi :

$$\begin{aligned}\nabla_a(t_b r_c) &= r_c\nabla_a t_b + t_b\nabla_a r_c = r_c(\partial_a t_b - t_e\Gamma^e_{ab}) + t_b(\partial_a r_c - r_e\Gamma^e_{ac}) \\ &= r_c\partial_a t_b - r_c t_e\Gamma^e_{ab} + t_b\partial_a r_c - t_b r_e\Gamma^e_{ac} = r_c\partial_a t_b + t_b\partial_a r_c - r_c t_e\Gamma^e_{ab} - t_b r_e\Gamma^e_{ac} \\ &= \partial_a(t_b r_c) - r_c t_e\Gamma^e_{ab} - t_b r_e\Gamma^e_{ac}\end{aligned} \quad (6.7.437)$$

Si nous posons $t_b r_c \equiv \nabla_j v_i$ alors nous avons (résultat que nous utiliserons après avoir démontré le théorème de Ricci pour déterminer plus loin le tenseur d'Einstein nécessaire dans la section de Relativité Générale) :

$$\boxed{\nabla_k(\nabla_j v_i) = \partial_k(\nabla_j v_i) - (\nabla_j v_r)\Gamma^r_{ik} - (\nabla_r v_i)\Gamma^r_{jk}} \quad (6.7.438)$$

En coordonnées curvilignes, pour que la différentielle d'un vecteur soit un vecteur, il faut que les deux vecteurs dont nous prenons la différence se trouvent en un même point de l'espace. En d'autres termes, il faut transporter, d'une manière ou d'une autre, l'un des deux vecteurs infiniment voisins au point où se trouve le second et , seulement après faire la différence des deux vecteurs qui se trouvent maintenant en un seul et même point de l'espace. L'opération de "transport parallèle" doit être définie de telle sorte qu'en coordonnées cartésiennes (pour le petit exemple), la différence des composantes coïncide avec la différence ordinaire $\mathrm{d}v_k$.

Ainsi, nous avons bien en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{D}v_k = (\partial_j v_k - v_i\Gamma^i_{kj})\mathrm{d}y^i = \mathrm{d}v_k \quad (6.7.439)$$

puisque dans ce système : $\Gamma^i_{kj} = 0$.

Ainsi, en coordonnées curvilignes la différence des composantes des deux vecteurs après le transport de l'un d'entre eux au point où se trouve l'autre est notée δv_k telle que nous ayons :

$$\mathrm{D}v_k = (\partial_i v_k - v_i\Gamma^i_{kj})\mathrm{d}y^j = \mathrm{d}v_k - \delta v_k \quad (6.7.440)$$

Ceci nous amène par identification à écrire :

$$\delta v_k = v_i\Gamma^i_{kj}\mathrm{d}y^i \quad (6.7.441)$$

Mais aussi à écrire le principe de moindre action (principe variationnel) sous la forme tensorielle :

$$\mathrm{D}v_k = dv_k - \delta v_k = 0 \quad (6.7.442)$$

Considérons maintenant un tenseur d'ordre deux, produit de deux tenseurs d'ordre un tel que (nous l'avons vu lors de notre étude des compositions de tenseurs) :

$$\begin{aligned}\delta(A_iB_j) &= \delta A_{ij} = A_i\delta B_j + B_j\delta A_i = A_iB_k\Gamma^k_{jk}\mathrm{d}y^h + B_jA_k\Gamma^k_{ih}\mathrm{d}y^h \\ &= (A_iB_k\Gamma^k_{jh} + B_jA_k\Gamma^k_{ih})\mathrm{d}y^k = \delta A_{ij} = (A_{ik}\Gamma^k_{jh} + B_{jk}\Gamma^k_{ih})\mathrm{d}y^h\end{aligned} \quad (6.7.443)$$

Donc :

$$\frac{\delta v_{ij}}{\mathrm{d}y^k} = \partial_h v_{ij} = (v_{ik}\Gamma^k_{jh} + v_{jk}\Gamma^k_{ih}) \quad (6.7.444)$$

En cours de traduction de l'anglais

d'où (nous sortons les deux dernières égalités juste pour l'esthétique !) :

$$\partial_k v_{ij} = (v_{ik}\Gamma^k_{jh} + v_{jk}\Gamma^k_{ih}) \quad (6.7.445)$$

Un transport parallèle est donc une opération qui prend un vecteur tangent et le déplace le long d'un chemin dans l'espace sans le tourner (par rapport à l'espace) ni changer sa longueur. Dans un espace plat, on peut dire que le vecteur transporté est parallèle au vecteur d'origine en tout point du chemin. Dans l'espace courbe, nous ne pouvons pas dire une telle chose. Utilisons la surface sphérique de la Terre pour le montrer ! Nous commençons à l'équateur à la longitude 0° en tenant une flèche pointant vers le nord :

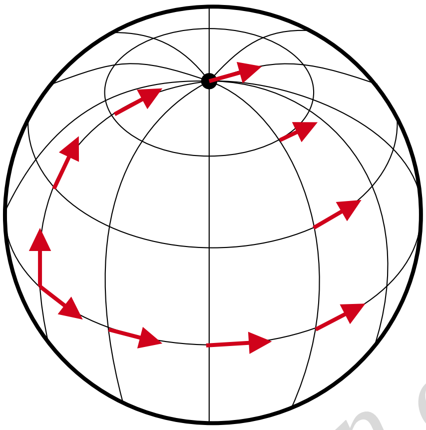


FIG. 6.151 – Illustration de transport parallèle sur une sphère

En cours de traduction de l'anglais

Nous longeons la longitude 0° jusqu'au pôle Nord, en gardant notre flèche parallèle au sol et pointant tout le temps vers l'avant. Lorsque nous arrivons au pôle Nord, notre flèche pointe dans la direction de la longitude 180°. Maintenant, nous allons vers le sud le long de la longitude 90° est en gardant notre flèche perpendiculaire à notre chemin comme c'était le cas au pôle Nord. Lorsque nous arrivons à l'équateur, notre flèche pointe vers l'est. Enfin, nous allons vers l'ouest le long de l'équateur jusqu'à ce que nous revenions à notre point de départ. Nous gardons la flèche pointant vers l'arrière tout le long. Bien que nous n'ayons pas complètement tourné la flèche, nous sommes maintenant au point de départ avec notre flèche tournée à 90° par rapport à sa position d'origine. Nous ne pouvons certainement pas dire qu'il est maintenant parallèle à la position d'origine. Cela signifie que le terme "direction" ne peut pas être défini globalement dans un espace courbe. On ne peut comparer la direction de deux vecteurs que s'ils sont au même point.

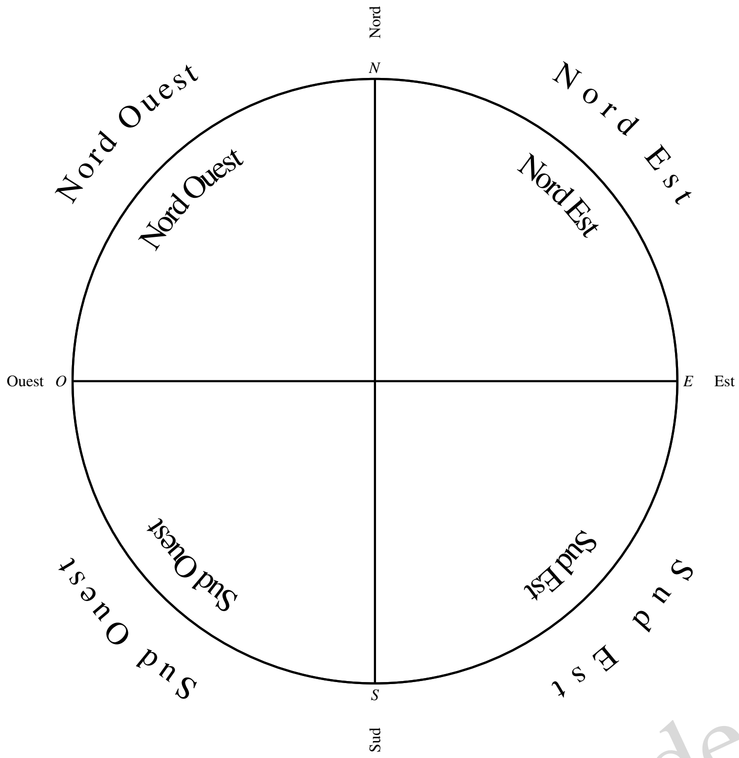


FIG. 6.152 – Rappel des noms des cardinaux

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#6.7.263) :

D1. "L'Est" est l'un des quatre points cardinaux d'une boussole. C'est la direction opposée à l'Ouest et c'est la direction d'où le Soleil donne l'impression géocentrique de se lever sur la Terre (du moins au moment où nous écrivons ces lignes...). Le mot "Est" ne devrait pas être utilisé en géométrie, sauf pour les objets célestes dotés d'un champ magnétique dipolaire ou d'un lever et d'un coucher de Soleil. Cependant, même certains scientifiques associent malheureusement encore "l'Est" au concept de "droite"...

D2. "L'Ouest » est l'un des quatre points cardinaux d'une boussole. C'est la direction opposée à l'Est et c'est la direction vers de laquelle le Soleil donne l'impression de se cocuher sur la Terre (du moins au moment où nous écrivons ces lignes...). Le mot "Ouest" ne devrait pas être utilisé en géométrie, sauf pour les objets célestes dotés d'un champ magnétique dipolaire ou d'un lever et d'un coucher de Soleil. Cependant, même certains scientifiques associent malheureusement encore "l'Ouest" au concept de "gauche"...

D3. Le "Nord" est l'un des quatre points cardinaux d'une boussole. Il est à l'opposé du Sud et perpendiculaire à l'Est et à l'Ouest. Le mot "Nord" ne devrait pas être utilisé en géométrie, sauf pour les objets célestes dotés d'un champ magnétique dipolaire. Cependant, même certains scientifiques associent malheureusement encore le "Nord" au concept de "haut"...

D4. Le "Sud" est l'un des quatre points cardinaux d'une boussole. Il est l'opposé du Nord et perpendiculaire à l'Est et à l'Ouest. Le mot "Nord" ne devrait pas être utilisé en géométrie, sauf pour les objets célestes dotés d'un champ magnétique dipolaire. Cependant, même certains scientifiques associent malheureusement encore le "Sud" au concept de

"bas"... Le Sud se distingue du Nord par la règle de la main droite d'Ampère (voir section Magnétostatique ??).

Le fait que le transport parallèle le long d'une boucle fermée modifie la direction d'un vecteur dans un espace courbe mais pas dans un espace plat peut conduire à l'idée de l'utiliser comme moyen de mesurer la courbure. Il s'avère que si nous choisissons une boucle suffisamment petite autour d'un point dans un espace courbe, la quantité de changement de direction d'un vecteur transporté parallèlement le long de celle-ci est proportionnelle à la zone délimitée par la boucle. Ainsi, le rapport entre l'aire de la boucle et la quantité de changement dans la direction du vecteur (quelle que soit la manière dont nous avons choisi de le mesurer) peut être utilisé comme mesure de la courbure de la surface qui inclut la boucle. En fait on définit la courbure par la valeur de ce rapport.

La relation précédente nous amène à pouvoir écrire la métrique sous sa forme variationnelle nommée "identité de Ricci" :

$$\boxed{\partial_h g_{ij}=g_{ik}\Gamma^k_{jh}+g_{jk}\Gamma^k_{ih}} \tag{6.7.446}$$

Mais nous avons aussi puisque $g_{ij}=\vec{e}_i\circ\vec{e}_j$:

$$\mathrm{d}g_{ij}=\vec{e}_i\circ\mathrm{d}\vec{e}_j+\mathrm{d}\vec{e}_i\circ\vec{e}_j=\vec{e}_i\circ\omega^k_j\vec{e}_k+\omega^k_i\vec{e}_k\circ\vec{e}_j=\omega^k_j(\vec{e}_i\circ\vec{e}_k)+\omega^k_i(\vec{e}_k\circ\vec{e}_j) \tag{6.7.447}$$

d'où l'identité :

$$\mathrm{d}g_{ij}=\omega^k_j g_{ik}+\omega^k_i g_{jk} \tag{6.7.448}$$

Avec les deux relations :

$$\mathrm{d}g_{ij}=\omega^k_j g_{ik}+\omega^k_i g_{jk} \qquad \text{et} \qquad \delta g_{ij}=(g_{ik}\Gamma^k_{jh}+g_{jk}\Gamma^k_{ih})\mathrm{d}y^h \tag{6.7.449}$$

et la différentielle absolue (qui se généralise simplement pour un tenseur d'ordre deux) :

$$\mathrm{D}g_{ij}=\mathrm{d}g_{ij}-\delta g_{ij} \tag{6.7.450}$$

Nous avons :

$$\mathrm{D}g_{ij}=\omega^k_j g_{ik}+\omega^k_i g_{jk}-g_{ik}\Gamma^k_{jh}\mathrm{d}y^h-g_{jk}\Gamma^k_{ih}\mathrm{d}y^h \tag{6.7.451}$$

Or, rappelons que nous avons par définition :

$$\omega^k_j=\Gamma^k_{jh}\mathrm{d}y^h \qquad \text{et} \qquad \omega^k_i=\Gamma^k_{ih}\mathrm{d}y^h \tag{6.7.452}$$

Donc finalement :

$$\boxed{\mathrm{D}g_{ij}=0} \tag{6.7.453}$$

La différentielle absolue sur une géodésique dans l'approximation d'un transport infinitésimal du tenseur fondamental est donc (comme nous pouvions nous y attendre) nulle. C'est le "théorème de Ricci". Certains physiciens théoriciens disent dès lors que «*la dérivée covariante tue la métrique*» dans le sens où la métrique ne change pas sur un différentiel d'espace.

En cours de traduction de l'anglais

Finalement, nous voyons aussi que pour un tenseur d'ordre deux (la métrique en particulier) nous avons :

$$\mathrm{D}g_{ij} = \mathrm{d}g_{ij} - \delta g_{ij} = \mathrm{d}g_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh}\mathrm{d}y^h - g_{jk}\Gamma^k_{ih}\mathrm{d}y^h \qquad (6.7.454)$$

Nous pouvons donc écrire la différentielle absolue qui dans ce cas particulier est nulle :

$$\mathrm{D}g_{ij} = (\partial_h g_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g_{jk}\Gamma^k_{ih})\mathrm{d}y^h = 0 \qquad (6.7.455)$$

Et donc le "dérivée covariante d'une $(0,2)$-forme" de la métrique est nulle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}g_{ij}}{\mathrm{d}y^h} = \nabla_h g_{ij} = \partial_h g_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g_{jk}\Gamma^k_{ih} = 0} \qquad (6.7.456)$$

Remarque

Le lecteur devra se rappeler lors de la définition du tenseur d'Einstein que :

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla_k g_{ij} = \partial_h g_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g_{jk}\Gamma^k_{ih} = 0 \qquad (6.7.457)$$

et qu'il s'agit d'une autre manière d'exprimer qu'une variation infinitésimale sur une géodésique selon le principe de moindre action tue la métrique. Nous allons donc travailler à partir de maintenant (comme avant déjà) avec des équations différentielles non nécessairement linéaires qu'il faudra intégrer pour trouver le comportement de la matière dans un espace donné.

En cours de traduction anglais

En général, si T est un champ tensoriel (r,s) (nous en aurons besoin lors de notre étude de la Relativité Générale), alors ∇T est un champ tensoriel-$(r,s+1)$ donné par :

$$(\nabla T)(\eta_1,\ldots,\eta_r,X,Y_1,\ldots,Y_s) = (\nabla_X T)(\eta_1,\ldots,\eta_r,Y_1,\ldots,Y_s) \qquad (6.7.458)$$

où cette dernière expression est intrinsèquement définie par l'équation :

$$\begin{aligned}\nabla_X(T(\eta_1,\ldots,\eta_r,Y_1,\ldots,Y_s)) = (\nabla_X T)&(\eta_1,\ldots,\eta_r,Y_1,\ldots,Y_s)\\ &+\sum_{i=1}^{r} T(\eta_1,\ldots,\eta_{i-1},\nabla_X\eta_i,\eta_{i+1},\ldots,\eta_r,Y_1,\ldots,Y_s)\\ &+\sum_{j=1}^{s} T(\eta_1,\ldots,\eta_r,Y_1,\ldots,Y_{j-1},\nabla_X Y_j,Y_{j+1},\ldots,Y_s)\end{aligned} \qquad (6.7.459)$$

En particulier, si T est un tenseur-$(1,1)$, alors $(\nabla_X T)(\eta,Y)$ est intrinsèquement défini par l'équation :

$$\nabla_X(T(\eta,Y)) = (\nabla_X T)(\eta,Y) + T(\nabla_X\eta,Y) + T(\eta,\nabla_X Y) \qquad (6.7.460)$$

et donc l'expression correcte pour $(\nabla_X T)(\eta,Y)$ est :

$$(\nabla_X T)(\eta,Y) := \nabla_X(T(\eta,Y)) - T(\nabla_X\eta,Y) - T(\eta,\nabla_X Y) \qquad (6.7.461)$$

Cela nous aidera à dériver un cas particulier de :

$$\begin{aligned}T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s;\rho} = T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s,\rho} &+ \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\rho}T^{\sigma\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} + \ldots + \Gamma^{\mu_r}_{\sigma\rho}T^{\mu_1\ldots\sigma}{}_{\nu_1\ldots\nu_s}\\ &- \Gamma^{\sigma}_{\nu_1\rho}T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\sigma\ldots\nu_s} - \ldots - \Gamma^{\sigma}_{\nu_s\rho}T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\sigma}\end{aligned} \qquad (6.7.462)$$

pour le cas d'un tenseur-$(1,1)$ (comme nous l'aurons lors de notre étude de la Relativité Générale).

Ainsi, par la définition ci-dessus dans le cas d'un tenseur-$(1,1)$ nous avons $T^{\mu}{}_{\nu;\rho} := \nabla_{e_\rho} T(f^\mu, e_\nu)$, où nous utilisons f^μ et e_v pour $\mathrm{d}x^\mu$ et $\partial/\partial x^\nu$.

Par conséquent, nous avons (ce n'est pas très évident, alors peut-être qu'à l'avenir, nous détaillerons davantage le processus ou trouverons une autre approche pour introduire le sujet pédagogiquement) :

$$\nabla_{e_\rho} T(f^\mu, e_\nu) := \nabla_{e_\rho}(T(f^\mu, e_\nu)) - T(\nabla_{e_\rho} f^\mu, e_\nu) - T(f^\mu, \nabla_{e_\rho} e_\nu) \tag{6.7.463}$$

Les premier et troisième termes s'évaluent facilement :

$$\nabla_{e_\rho}(T(f^\mu, e_\nu)) = e_\rho(T(f^\mu, e_\nu)) = e_\rho(T^{\mu}{}_{\nu}) = T^{\mu}{}_{\nu,\rho} \tag{6.7.464}$$
$$T(f^\mu, \nabla_{e_\rho} e_\nu) = T(f^\mu, \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} e_\sigma) = \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} T(f^\mu, e_\sigma) = \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} T^{\mu}{}_{\sigma} \tag{6.7.465}$$

Pour le second terme, puisque f^μ est un champ tensoriel-$(0,1)$, ∇f^μ est un champ tensoriel-$(0,2)$ et donc $\nabla_{e_\rho} f^\mu$, pour e_ρ fixe, est un champ $(0,1)$-tenseur. Nous évaluons :

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_\rho} f^\mu)_\lambda = \nabla_{e_\rho} f^\mu(e_\lambda) &:= \nabla_{e_\rho}(f^\mu(e_\lambda)) - f^\mu(\nabla_{e_\rho} e_\lambda)\\ &= e_\rho(\delta^\mu_\lambda) - f^\mu(\Gamma^\sigma_{\lambda\rho} e_\sigma)\\ &= 0 - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} f^\mu(e_\sigma)\\ &= -\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\delta^\mu_\sigma\\ &= -\Gamma^\mu_{\lambda\rho}\\ &= -\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta^\sigma_\lambda\\ &= -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} f^\sigma(e_\lambda)\end{aligned} \tag{6.7.466}$$

Ainsi $\nabla_{e_\rho} f^\mu = -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} f^\sigma$ et donc :

$$T(\nabla_{e_\rho} f^\mu, e_\nu) = T(-\Gamma^\mu_{\sigma\rho} f^\sigma, e_\nu) = -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} T(f^\sigma, e_\nu) = -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} T^{\sigma}{}_{\nu} \tag{6.7.467}$$

Donc, nous avons :

$$T^{\mu}{}_{\nu;\rho} = T^{\mu}{}_{\nu,\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} T^{\sigma}{}_{\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} T^{\mu}{}_{\sigma} \tag{6.7.468}$$

Parfois noté dans certains ouvrages :

$$D_a T^b_c = \partial_a T^b_c + \Gamma^b_{fa} T^f_c - \Gamma^h_{ca} T^b_h \tag{6.7.469}$$

✍**Exemple :**

Essayons de vérifier cela en calculant une composante de la dérivée covariante dans les coordonnées sphériques.

Rappelons tout d'abord que l'expression de la métrique diagonale de la surface $\mathcal{S}^2$ de la

En cours de traduction de l'anglais

2-sphère est (voir section Géométrie Différentielle 2853) :

$$g_{ij}=\begin{bmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$
$$g^{ij}=\begin{bmatrix} g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi} \\ g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2\sin^2(\theta)} \end{bmatrix} \tag{6.7.470}$$

Si nous avons à càlculer la composante $g_{\phi\phi;\theta}$, nous devrions alors écrire :

$$\nabla_\theta g_{\phi\phi}=\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta}-g_{\alpha\phi}\Gamma_{\phi\theta}^{\alpha}-g_{\phi\alpha}\Gamma_{\phi\theta}^{\alpha} \tag{6.7.471}$$

Mais $g_{ij}\neq 0$ seulement si $i=j$, basé sur les expressions plus haut, nous pouvons ainsi simplifier cette relation :

$$\nabla_\theta g_{\phi\phi}=\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta}-g_{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta}^{\phi}-g_{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta}^{\phi}=\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta}-2g_{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \tag{6.7.472}$$

Comme (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1457) :

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta}=\frac{\partial R^2\sin^2(\theta)}{\partial\theta}=2R^2\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{6.7.473}$$

Plus loin (voir page 2111) nous allons prouver que pour $\mathcal{S}^2$ nous avons :

$$\Gamma_{ij}^{\theta}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix} \qquad \Gamma_{ij}^{\phi}=\begin{bmatrix} 0 & \cot(\theta) \\ \cot(\theta) & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.7.474}$$

Tel que :

$$g_{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta}^{\phi}=R^2\sin^2(\theta)\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}=R^2\sin(\theta)\cos(\theta) \tag{6.7.475}$$

Enfin, nous confirmons que cette composante de la dérivée covariante par rapport à θ est également égale à zéro dans un système de coordonnées polaires, comme nous pouvions nous y attendra :

$$\nabla_\theta g_{\phi\phi}=\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta}-2g_{\phi\phi}\Gamma_{\theta\phi}^{\phi}=2R^2\sin(\theta)\cos(\theta)-2R^2\sin(\theta)\cos(\theta)=0 \tag{6.7.476}$$

Déterminons maintenant une expression qui nous sera très utile en relativité générale lorsque nous déterminerons l'équation d'Einstein des champs (une autre manière d'exprimer que la dérivée covariante de la métrique est nulle) !

Calculons d'abord (nous changeons la notation pour que le lecteur puisse prendre l'habitude de voir les différentes notations d'usage) :

$$D_a g_{bc}=\partial_a g_{bc}-\Gamma_{ba}^{f}g_{fc}-\Gamma_{ca}^{h}g_{hc} \tag{6.7.477}$$

Et comme nous avons :

$$g_{bc}=\vec{e}_b\circ\vec{e}_c\Rightarrow\partial_a g_{bc}=\frac{\partial\vec{e}_b}{\partial x^a}\circ\vec{e}_c+\vec{e}_b\circ\frac{\partial\vec{e}_c}{\partial x^a} \tag{6.7.478}$$

Dès lors :

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma^f_{ba} \underbrace{\vec{e}_f \circ \vec{e}_c}_{g_{fc}} - \Gamma^h_{ca} \underbrace{\vec{e}_h \circ \vec{e}_c}_{g_{hc}} \quad (6.7.479)$$

Ainsi :

$$D_a g_{bc} = \partial_a g_{bc} - \Gamma^f_{ba} g_{fc} - \Gamma^h_{ca} g_{hc} = 0 \quad (6.7.480)$$

Effectuons maintenant la multiplication contractée de :

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_h g_{ij} - g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g_{jk}\Gamma^k_{ih} = 0 \quad (6.7.481)$$

par g^{ij}, il vient alors en utilisant la relation $g^{ij}g_{jl} = \delta^l_i$ (que nous avions démontrée beaucoup plus haut) que :

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} - g^{ij}g_{ik}\Gamma^k_{jh} - g^{ij}g_{jk}\Gamma^k_{ih} = g^{ij}\partial_h g_{ij} - \delta^k_j\Gamma^k_{jh} - \delta^k_i\Gamma^k_{ih} = 0 \quad (6.7.482)$$

d'où la relation :

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} - \Gamma^j_{jh} - \Gamma^i_{ih} = 0 \quad (6.7.483)$$

Les quantités Γ^j_{jh} et Γ^h_{ih} représentant les mêmes sommes, nous avons alors :

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} = 2\Gamma^i_{ih} \quad (6.7.484)$$

Théorème 6.46. Considérons maintenant g le déterminant des quantités g_{ij}. La dérivation du déterminant nous donne :

$$\partial_h g = g g_{ij}\partial_h g_{ij} \Leftrightarrow \partial_h g_{ij} = \frac{\partial_k g}{g g^{ij}} \quad (6.7.485)$$

Démonstration 6.46.1. Soit une variable quelconque que nous choisissons ici être le temps t uniquement pour simplifier les notations des calculs qui vont suivre. Lorsque la partie principale du développement sera achevée, le résultat peut être adapté à toute autre variable. Nous noterons pour la suite g_j les éléments de la j-ème colonne de g_{ij}.

Pour les développements qui vont suivre, nous définissons les notations :

$$g = \det(g_1, g_2, \ldots, g_n) \qquad \dot{g} = d_t g \qquad \dot{g}_j = \mathrm{d}_t g_j \qquad \dot{g}_{ij} = \mathrm{d}_t g_{ij} \quad (6.7.486)$$

La règle de dérivation d'un déterminant fonctionnel sont données pour rappel (voir section Algèbre Linéaire page 1949) par :

$$\dot{g} = \det(\dot{g}_1, g_2, \ldots, g_n) + \det(g_1, \dot{g}_2, \ldots, g_n) + \ldots + \det(g_1, g_2, \ldots, \dot{g}_n) \quad (6.7.487)$$

En considérant le premier déterminant, en faisant appel aux minorants ((voir section Algèbre Linéaire page 1948) pour le développement de sa première colonne :

$$\alpha_{i1}\dot{g}_{i1} \quad (6.7.488)$$

Pour le j-ème déterminant, il vient :

$$\alpha_{ij}\dot{g}_{ij} \quad (6.7.489)$$

En cours de traduction de l'anglais

Soit :

$$\dot{g} = \alpha_{ij}\dot{g}_{ij} \qquad \text{or} \qquad \dot{g} = \alpha_{ij}g_{ij} \tag{6.7.490}$$

Or, nous avons démontré bien plus haut que le tenseur métrique est son propre inverse. Donc :

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} \tag{6.7.491}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$gg^{ij} = \alpha_{ij} \tag{6.7.492}$$

et donc :

$$\dot{g} = g\dot{g}_{ij}g^{ij} \tag{6.7.493}$$

Ce qui s'écrit également (suite aux conventions définies au début de la démonstra

$$\mathrm{d}_t g = g\mathrm{d}_t g_{ij} g^{ij} \tag{6.7.494}$$

où le lecteur doit donc prendre garde à ne pas mal lire en pensant typiquement que la dérivée d_t dans le terme de droite dérive tout $(g_{ij}g^{ij})$... alors qu'il ne dérive que g_{ij}.

ous pouvons adopter cependant une autre variable. Soit h cette autre variable :

$$\partial_h g = gg^{ij}\partial_h g_{ij} \tag{6.7.495}$$

Soit en réarrangeant :

$$\boxed{\partial_h g_{ij} = \left(gg^{ij}\right)^{-1}\partial_h g = \frac{1}{g}\left(g^{ij}\right)^{-1}\partial_h g} \tag{6.7.496}$$

C'est ce que nous voulions (devions) démontrer.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Maintenant en combinant :

$$\Gamma^i_{ih} = \frac{1}{2}g^{ij}\partial_h g_{ij} \tag{6.7.497}$$

démontré plus haut et le résultat que nous venons de démontrer :

$$\partial_h g_{ij} = \frac{1}{g}\left(g^{ij}\right)^{-1}\partial_h g \tag{6.7.498}$$

il vient :

$$\Gamma^i_{ih} = \frac{1}{2}g^{ij}\partial_h g_{ij} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{1}{g}(g_{ij})^{-1}\partial_h g\right) = \frac{1}{2g}\partial_h g \tag{6.7.499}$$

Nous avons donc :

$$g^{ij}\partial_h g_{ij} = \frac{\partial_h g}{g} = 2\Gamma^i_{ih} \tag{6.7.500}$$

Montrons qu'il est possible de dériver cette dernière relation de l'égalité importante suivante :

$$\Gamma^i_{ih}=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_h\sqrt{g} \tag{6.7.501}$$

Effectivement :

$$\Gamma^i_{ih}=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_h\sqrt{g}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2\sqrt{g}}\partial_h g\right)=\frac{1}{2g}\partial_h g \tag{6.7.502}$$

Cette relation ne veut pas dire grand-chose tant que nous n'en ferons pas un usage plus explicite lors de notre étude de la Relativité Générale (voir section Relativité Générale page ??).

Soit maintenant à déterminer la dérivée covariante seconde du tenseur métrique. Rappelons-nous avant d'aller plus loin (car c'est important) que nous avions obtenu :

$$\nabla_h g_{ij}=\partial_h g_{ij}-g_{ik}\Gamma^k_{jh}-g_{jk}\Gamma^k_{ih} \tag{6.7.503}$$

En cours de l'anglais

6.7.12 Symboles de Riemann-Christoffel

Avant de lire ce qui suit... Nous souhaitons rappeler au lecteur <u>encore une fois</u> que l'écriture de cette section n'est pas terminée (comme la plupart des chapitres du présent livre...) ! Il nous reste donc à illustrer les notions abstraites qui vont suivre par des exemples pratiques concrets mais qui sont des exemples hors du cas particulier de la Relativité Générale !

Rappelons que nous avons démontré plus haut que :

$$\nabla_k(\nabla_j v_i)=\partial_k(\nabla_j v_i)-(\nabla_j v_r)\Gamma^r_{ik}-(\nabla_r v_i)\Gamma^r_{jk} \tag{6.7.504}$$

Cette relation exprime sauf erreur de la part du rédacteur de ces lignes.... la dérivée covariante d'un tenseur d'ordre deux - tel que la métrique - sur un chemin géodésique dans deux directions parallèles (la dérivée covariante seconde permettant de créer la "perpendiculaire géodésique" entre les deux géodésiques infiniment proches de la dérivée covariante première). Nous appelons un tel déplacement : un "transport parallèle".

En y substituant :

$$\nabla_j v_i=\partial_j v_i-\Gamma^l_{ji}v_l \tag{6.7.505}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\nabla_k(\nabla_j v_i)&=\partial_k(\partial_j v_i-\Gamma^l_{ji}v_l)-(\partial_j v_r-\Gamma^l_{jr}v_l)\Gamma^r_{ik}-(\partial_r v_i-\Gamma^l_{ri}v_l)\Gamma^r_{jk}\\&=\partial_{kj}v_i-(\partial_k\Gamma^l_{ji})v_l-\Gamma^l_{ji}(\partial_k v_l)-\Gamma^r_{ik}\partial_j v_r+\Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik}v_l-\Gamma^r_{jk}\partial_r v_i+\Gamma^r_{jk}\Gamma^l_{ri}v_l\end{aligned} \tag{6.7.506}$$

Permutons maintenant les indices j et k dans l'expression précédente pour avoir une différentielle par rapport à un autre chemin :

$$\nabla_j(\nabla_k v_i)=\partial_{jk}v_i-(\partial_j\Gamma^l_{ki})v_l-\Gamma^l_{ki}(\partial_j v_l)-\Gamma^r_{ij}\partial_k v_r+\Gamma^l_{kr}\Gamma^r_{ij}v_l-\Gamma^r_{kj}\partial_r v_i+\Gamma^r_{kj}\Gamma^l_{ri}v_l \tag{6.7.507}$$

En admettant que les composantes vérifient les propriétés classiques $\partial_{kj}v_i=\partial_{jk}v_i$, nous obtenons par soustraction des deux expressions précédentes :

$$\begin{array}{rl} & \nabla_k(\nabla_j v_i)=\partial_{kj}v_i-(\partial_k\Gamma_{ji}^l)v_l-\Gamma_{ji}^l(\partial_k v_l)-\Gamma_{ik}^r\partial_j v_r+\Gamma_{jr}^l\Gamma_{ik}^r v_l-\Gamma_{jk}^r\partial_r v_i+\Gamma_{jk}^r\Gamma_{ri}^l v_l \\ - & \nabla_j(\nabla_k v_i)=\partial_{jk}v_i-(\partial_j\Gamma_{ki}^l)v_l-\Gamma_{ki}^l(\partial_j v_l)-\Gamma_{ij}^r\partial_k v_r+\Gamma_{kr}^l\Gamma_{ij}^r v_l-\Gamma_{kj}^r\partial_r v_i+\Gamma_{kj}^r\Gamma_{ri}^l v_l \\ \hline & \nabla_k(\nabla_j v_i)-\nabla_j(\nabla_k v_i)=\underbrace{(\partial_{kj}v_i-\partial_{jk}v_i)}_{=0}+(\partial_j\Gamma_{ki}^l-\partial_k\Gamma_{ji}^l)v_l+(\Gamma_{ki}^l\partial_j-\Gamma_{ji}^l\partial_k)v_l \\ & +(\Gamma_{ij}^r\partial_k-\Gamma_{ik}^r\partial_j)v_r+(\Gamma_{jr}^l\Gamma_{ik}^r-\Gamma_{kr}^l\Gamma_{ij}^r)v_l+(\Gamma_{kj}^r-\Gamma_{jk}^r)\partial_r v_i+(\Gamma_{jk}^r\Gamma_{ri}^l-\Gamma_{kj}^r\Gamma_{ri}^l)v_l \end{array} \tag{6.7.508}$$

et puisque nous avons démontré que dans le cas d'une métrique symétrique nous avions :

$$\Gamma_{jk}^r=\Gamma_{kj}^r \tag{6.7.509}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\nabla_k(\nabla_j v_i)-\nabla_j(\nabla_k v_i)=&(\partial_j\Gamma_{ki}^l-\partial_k\Gamma_{ji}^l)v_l+(\Gamma_{ki}^l\partial_j-\Gamma_{ji}^l\partial_k)v_l\\ &+(\Gamma_{ij}^r\partial_k-\Gamma_{ik}^r\partial_j)v_r+(\Gamma_{jr}^l\Gamma_{ik}^r-\Gamma_{kr}^l\Gamma_{ij}^r)v_l+\underbrace{(\Gamma_{kj}^r-\Gamma_{jk}^r)}_{=0}\partial_r v_i+\underbrace{(\Gamma_{jk}^r\Gamma_{ri}^l-\Gamma_{kj}^r\Gamma_{ri}^l)}_{=0}v_l\end{aligned} \tag{6.7.510}$$

Remarque

Le fait d'avoir dans le cas d'une métrique symétrique $\Gamma_{jk}^r=\Gamma_{kj}^r$ et qui s'annule dans la relation précédent, amène de nombreux praticiens à définir ce que nous appelons le "tenseur de torsion" ou "torseur" (mais en réalité il s'agit d'un cas particulier d'une relation plus générale qui appartient au domaine de la géométrie différentielle). Ainsi, nous définissons le tenseur de torsion comme :

$$T_{ih}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k \tag{6.7.511}$$

et dans le cas d'une métrique symétrique (espace euclidien), la torsion est par extension nulle ! En réalité, l'équation d'Einstein des champs que nous démontrerons plus loin supposera implicitement une métrique symétrique à torsion nulle. Cependant, il est possible de démontrer qu'un tenseur non symétrique peut toujours être décomposé en un tenseur symétrique et non symétrique (c'est trivial car c'est comme séparer une matrice complète en la somme d'une matrice ayant une diagonale seule et une autre matrice ayant la diagonale nulle).

Il reste alors :

$$\begin{aligned}\nabla_k(\nabla_j v_i)-\nabla_j(\nabla_k v_i)=&(\partial_j\Gamma_{ki}^l-\partial_k\Gamma_{ji}^l)v_l+(\Gamma_{ki}^l\partial_j-\Gamma_{ji}^l\partial_k)v_l\\ &+(\Gamma_{ij}^r\partial_k-\Gamma_{ik}^r\partial_j)v_r+(\Gamma_{jr}^l\Gamma_{ik}^r-\Gamma_{kr}^l\Gamma_{ij}^r)v_l\end{aligned} \tag{6.7.512}$$

Comme le transport parallèle se fait sur des chemins de géodésiques infiniment proches, nous prenons la limite :

$$\partial_j v_l,\partial_k v_l,\partial_k v_r,\partial_j v_r\longrightarrow 0 \tag{6.7.513}$$

ce qui sous-tend surtout le fait que le champ de vitesse est quasi égal en deux points parallèles infiniment proches.

Il reste alors :

$$\boxed{\nabla_k(\nabla_j v_i)-\nabla_j(\nabla_k v_i)\cong(\partial_j\Gamma_{ki}^l-\partial_k\Gamma_{ji}^l+\Gamma_{jr}^l\Gamma_{ik}^r-\Gamma_{kr}^l\Gamma_{ij}^r)v_l} \tag{6.7.514}$$

Cette relation exprime le fait que, comme la gravité, la courbure de l'espace-temps cause une accélération mutuelle entre les géodésiques. De plus, il est facile de constater, que l'accélération mutuelle entre les géodésiques est nulle si les tenseurs de Riemann-Christoffel sont nuls (typiquement en coordonnées cartésiennes, in extenso cela signifie pour un espace-temps plat). C'est exactement ce que nous attendons de la gravité : si nous n'observons aucune accélération, la courbure (nous allons de suite définir ce que c'est) est nulle et si la courbure est nulle, nous n'observons aucune accélération. Morale de l'histoire : la gravité est courbure et la courbure est gravité ! !

Nous voyons que la quantité entre parenthèses est un tenseur d'ordre quatre que nous noterons dans ce livre (car il y a plusieurs traditions dans la manière de le noter...) :

$$\boxed{R^l_{i,jk} = \partial_j \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{ij} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{jr} - \Gamma^r_{ij}\Gamma^l_{kr}} \quad (6.7.515)$$

et qui résume à lui seul le transport parallèle et le fait que gravité et géométrie de l'espace sont liées ensemble. Évidemment, si la métrique est de type Minkowski (ou tend vers une métrique de Minkowski dans certaines conditions), $R^l_{i,jk}$ est alors nul ! ! ! De très rares auteurs notent cette dernière égalité sous la forme (malheureuse....) :

$$R^l_{i,jk} = 2\Gamma^l_{i[k,j]} + 2\Gamma^r_{i[k}\Gamma^l_{j]r} \quad (6.7.516)$$

Le tenseur $R^l_{i,jk}$ est appelé "tenseur de Riemann-Christoffel" ou "tenseur de l'espace Riemannien". La courbure d'un espace Riemannien peut aussi être caractérisée à l'aide de ce tenseur.

Si nous multiplions le tenseur $R^k_{i,rs}$ par g_{jk}, nous avons alors les données covariantes de ce tenseur telles que :

$$\boxed{R_{ij,rs} = g_{jk}R^k_{i,rs}} \quad (6.7.517)$$

et soient les relations suivantes que nous avions démontrées :

$$g_{jk}\Gamma^k_{rl} = \Gamma_{rjl} \qquad g_{jk}\Gamma^k_{sl} = \Gamma_{sjl} \quad (6.7.518)$$

Dès lors, il vient :

$$\begin{aligned} g_{jk}R^k_{i,rs} &= g_{jk}\partial_r\Gamma^k_{is} - g_{jk}\partial_s\Gamma^k_{ir} + g_{jk}\Gamma^l_{is}\Gamma^k_{rl} - g_{jk}\Gamma^l_{ir}\Gamma^k_{sl} \\ &= g_{jk}\partial_r\Gamma^k_{is} - g_{jk}\partial_s\Gamma^k_{ir} + \Gamma^l_{is}\Gamma_{rjl} - \Gamma^l_{ir}\Gamma_{sjl} \end{aligned} \quad (6.7.519)$$

et remplaçons les quantités $g_{jk}\partial_r\Gamma^k_{is}$ par $\partial_r\left(g_{jk}\Gamma^k_{is}\right) - \Gamma^k_{is}\partial_r g_{jk}$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} g_{jk}R^k_{i,rs} &= (\partial_r(g_{jk}\Gamma^k_{is}) - \Gamma^k_{is}\partial_r g_{jk}) - (\partial_s(g_{jk}\Gamma^k_{ir}) - \Gamma^k_{ir}\partial_s g_{jk}) + \Gamma^l_{is}\Gamma_{rjl} - \Gamma^l_{ir}\Gamma_{sjl} \\ &= \partial_r(g_{jk}\Gamma^k_{is}) - \partial_s(g_{jk}\Gamma^k_{ir}) + (\Gamma^l_{is}\Gamma_{rjl} - \Gamma^k_{is}\partial_r g_{jk}) - (\Gamma^l_{ir}\Gamma_{sjl} - \Gamma^k_{ir}\partial_s g_{jk}) \\ &= \partial_r(g_{jk}\Gamma^k_{is}) - \partial_s(g_{jk}\Gamma^k_{ir}) + (\Gamma^l_{is}\Gamma_{rjl} - \Gamma^l_{is}\partial_r g_{jl}) - (\Gamma^l_{ir}\Gamma_{sjl} - \Gamma^l_{ir}\partial_s g_{jl}) \\ &= \partial_r(g_{jk}\Gamma^k_{is}) - \partial_s(g_{jk}\Gamma^k_{ir}) + \Gamma^l_{is}(\Gamma_{rjl} - \partial_r g_{jl}) - \Gamma^l_{ir}(\Gamma_{sjl} - \partial_s g_{jl}) \end{aligned} \quad (6.7.520)$$

Nous avions aussi démontré que :

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{kij} \Rightarrow \Gamma_{kij} - \partial_k g_{ij} = -\Gamma_{kji} \quad (6.7.521)$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors :

$$g_{jk}R^k_{i,rs}=\partial_r(g_{jk}\Gamma^k_{is})-\partial_s(g_{jk}\Gamma^k_{ir})-\Gamma^l_{is}\Gamma_{rlj}+\Gamma^l_{ir}\Gamma_{slj} \tag{6.7.522}$$

et comme :

$$g_{jk}\Gamma^k_{is}=\Gamma_{ijs} \qquad g_{jk}\Gamma^k_{ir}=\Gamma_{ijr} \tag{6.7.523}$$

D'où :

$$g_{jk}R^k_{i,rs}=\partial_r\Gamma_{ijs}-\partial_s\Gamma_{ijr}-\Gamma^l_{is}\Gamma_{rlj}+\Gamma^l_{ir}\Gamma_{slj} \tag{6.7.524}$$

et nous avons aussi prouvé que :

$$\Gamma_{kji}=\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki}\right) \tag{6.7.525}$$

Dès lors :

$$\partial_r\Gamma_{ijs}=\frac{1}{2}\left(\partial_{ri}g_{sj}+\partial_{rs}g_{ji}-\partial_{rj}g_{is}\right) \tag{6.7.526}$$

et en les reportant dans l'avant-dernière relation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}R_{ij,rs}=g_{jk}R^k_{i,rs}&=\frac{1}{2}\left(\partial_{ri}g_{sj}+\cancel{\partial_{rs}g_{ji}}-\partial_{rj}g_{is}\right)-\frac{1}{2}\left(\partial_{si}g_{rj}+\cancel{\partial_{sr}g_{ji}}-\partial_{sj}g_{ir}\right)\\&-\Gamma^l_{is}\Gamma_{rlj}+\Gamma^l_{ir}\Gamma_{slj}=\frac{1}{2}\left(\partial_{ri}g_{sj}+\partial_{sj}g_{ir}-\partial_{rj}g_{is}-\partial_{si}g_{rj}\right)-\Gamma^l_{is}\Gamma_{rlj}+\Gamma^l_{ir}\Gamma_{slj}\end{aligned} \tag{6.7.527}$$

Nous avons donc finalement pour l'expression covariante du tenseur de Riemann-Christoffel :

$$\boxed{R_{ij,rs}=\frac{1}{2}\left(\partial_{ri}g_{sj}+\partial_{sj}g_{ir}-\partial_{rj}g_{is}-\partial_{si}g_{rj}\right)-\Gamma^l_{is}\Gamma_{rlj}+\Gamma^l_{ir}\Gamma_{slj}} \tag{6.7.528}$$

Il convient de remarquer que le tenseur de Riemann-Christoffel est donc antisymétrique :

$$\boxed{R_{ij,rs}=-R_{ij,sr}} \tag{6.7.529}$$

et que dans la parenthèse de la relation antéprécédente, nous n'avons que des dérivées partielles doubles alors qu'en dehors de la parenthèse les symboles de Christoffel ne contiennent que des dérivées partielles simples !

Enfin, la permutation en bloc des indices ij et rs nous donne, par suite de la symétrie des g_{ij} et en invertissant leur ordre de dérivation :

$$\boxed{R_{ij,rs}=R_{rs,ij}} \tag{6.7.530}$$

Effectuons maintenant une permutation circulaire sur les indices j, r, s dans l'expression (obtenue juste un peu plus haut) :

$$R_{ij,rs}=\frac{1}{2}\left(\partial_{ri}g_{sj}+\partial_{sj}g_{ir}-\partial_{rj}g_{is}-\partial_{si}g_{rj}\right)-\Gamma^l_{is}\Gamma_{rlj}+\Gamma^l_{ir}\Gamma_{slj} \tag{6.7.531}$$

En cours de traduction de l'anglais

il vient :

$$R_{ir,sj}=\frac{1}{2}\left(\partial_{jr}g_{is}+\partial_{is}g_{jr}-\partial_{rs}g_{ij}-\partial_{ij}g_{rs}\right)-\Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{slr}+\Gamma_{is}^{l}\Gamma_{jlr}$$
$$R_{is,jr}=\frac{1}{2}\left(\partial_{rs}g_{ij}+\partial_{ij}g_{rs}-\partial_{js}g_{ir}-\partial_{ir}g_{js}\right)-\Gamma_{ir}^{l}\Gamma_{jls}+\Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{rls} \quad (6.7.532)$$

et nous avons alors (c'est très simple à contrôler en sommant les trois lignes ci-dessus) :

$$\boxed{R_{ij,rs}+R_{ir,sj}+R_{is,jr}=0} \quad (6.7.533)$$

L'identité précédente est appelée "première identité de Bianchi"" ou également "identité de Bianchi algébrique" et elle met en évidence la propriété de cyclicité du tenseur de Riemann-Christoffel. En réalité, nous ne devrions pas parler "d'identité" puisqu'elle est vérifiée uniquement (du moins à ma connaissance) dans le cas d'un tenseur métrique symétrique (sinon quoi la torsion n'est pas nulle pour rappel !).

Le lecteur observera qu'il est immédiat que cette dernière relation est satisfaite dans le cas de la métrique de Minkowski puisque si en tout point la dérivée partielle de la métrique est nulle nous avons :

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu}=0\Rightarrow\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}=0\Rightarrow R_{\sigma\mu,\nu}^{\rho}=0 \quad (6.7.534)$$

Et nous verrons dans la section de Relativité Générale que cette première identité servira de base à la construction de la métrique de Schwarzschild.

Si la métrique est de type Minkowski (nous changeons les notations des indices afin d'être plus conforme aux écritures habituelles en relativité générale) alors il est immédiat que nous avons aussi :

$$\boxed{\partial_\lambda R_{\alpha\beta,\mu\nu}+\partial_\nu R_{\alpha\beta,\lambda\mu}+\partial_\mu R_{\alpha\beta,\nu\lambda}=0} \quad (6.7.535)$$

Mais dans le cas où la métrique n'est pas du type Minkowski, cette dernière relation peut être satisfaite et a un intérêt que si et seulement si la métrique choisie est décomposable en série de Taylor dont les dérivés partielles premières sont nulles en 0 (voir la section de Géométrie Différentielle pour de telles séries de Taylor !).

Relation qui ne serait valable que dans le cas d'un "référentiel localement inertiel" où tous les symboles de Christoffel s'annulent mais pas leurs dérivées.

Par extension :

$$\boxed{\nabla_\lambda R_{\alpha\beta,\mu\nu}+\nabla_\nu R_{\alpha\beta,\lambda\mu}+\nabla_\mu R_{\alpha\beta,\nu\lambda}=0} \quad (6.7.536)$$

Rappelons qu'implicitement, cette relation, appelée "deuxième identité de Bianchi" ou "identité de Bianchi différentielle", exprime toujours simplement (si nous pouvons dire...) le fait que gravité et géométrie de l'espace sont liées ensemble.

Suite à une demande de lecteur, détaillons beaucoup plus comment dériver cette identité !

L'identité est plus facile à obtenir à l'origine d'un référentiel localement inertiel comme déjà mentionné, où les premières dérivées du tenseur métrique, et donc les symboles de Christoffel, sont tous nuls. A ce stade, nous avons :

$$R_{nj\ell m}=\frac{1}{2}\left(\partial_\ell\partial_j g_{mn}+\partial_m\partial_n g_{j\ell}-\partial_\ell\partial_n g_{jm}-\partial_m\partial_j g_{\ell n}\right) \quad (6.7.537)$$

En cours de traduction de l'anglais

Si les symboles de Christoffel sont tous nuls, alors la dérivée covariante devient la dérivée ordinaire :

$$\nabla_j A^k \equiv \partial_j A^k + A^i \Gamma_{ij}^k = \partial_j A^k \quad (6.7.538)$$

Nous obtenons donc, à l'origine d'un référentiel localement inertiel :

$$\begin{aligned}\nabla_k R_{nj\ell m} &= \partial_k R_{nj\ell m} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_k \partial_\ell \partial_j g_{mn} + \partial_k \partial_m \partial_n g_{j\ell} - \partial_k \partial_\ell \partial_n g_{jm} - \partial_k \partial_m \partial_j g_{\ell n}\right)\end{aligned} \quad (6.7.539)$$

En permutant cycliquement l'indice de la dérivée avec les deux derniers indices du tenseur, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\nabla_\ell R_{njmk} &= \partial_\ell R_{njmk} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\ell \partial_m \partial_j g_{kn} + \partial_\ell \partial_k \partial_n g_{jm} - \partial_\ell \partial_m \partial_n g_{jk} - \partial_\ell \partial_k \partial_j g_{mn}\right) \\ \nabla_m R_{njk\ell} &= \partial_m R_{njk\ell} \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_m \partial_k \partial_j g_{\ell n} + \partial_m \partial_\ell \partial_n g_{jk} - \partial_m \partial_k \partial_n g_{j\ell} - \partial_m \partial_\ell \partial_j g_{kn}\right)\end{aligned} \quad (6.7.540)$$

En additionnant tous les termes avec la dérivée covariante et en utilisant la commutativité des dérivées partielles, nous voyons que tous les termes s'annulent deux à deux, et donc nous obtenons :

$$\nabla_k R_{nj\ell m} + \nabla_\ell R_{njmk} + \nabla_m R_{njk\ell} = 0 \quad (6.7.541)$$

Comme d'habitude, nous pouvons utiliser l'argument selon lequel puisque nous pouvons établir un référentiel localement inertiel avec son origine à n'importe quel point non singulier de l'espace-temps, cette équation est vraie partout et puisque la dérivée covariante est un tenseur, c'est une équation de tenseur et est donc valable dans tous les systèmes de coordonnées.

6.7.13 Courbure de Ricci (Ricci tensor)

En cours de traduction de l'anglais

Avant de voir les conséquences de l'identité de Bianchi, nous avons besoin de définir le "tenseur de Ricci" :

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} \quad (6.7.542)$$

qui est donc simplement la contraction des premier et troisième indices du tenseur de Riemann-Christoffel que nous avions donné plus haut :

$$R^l_{i,jk} = \partial_j \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{ij} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{jr} - \Gamma^r_{ij}\Gamma^l_{kr} \quad (6.7.543)$$

en d'autres termes c'est juste une notation plus condensée... et puis les lettres pour les indices supérieurs ou inférieurs ainsi que la présence de la virgule sont au libre choix de celui qui écrit (en fonction de l'humeur et surtout si le contexte permet d'éviter toute confusion).

Par exemple avec le tenseur de Riemann-Christoffel que nous venons de donner le tenseur de Ricci pourrait en fonction de l'humeur s'écrire des deux manières suivantes (nous gardons les indices avec les lettres latines) :

$$\begin{aligned}R_{ik} &= R^l_{i,jk} \\ R_{ik} &= R^l_{ijk}\end{aligned} \quad (6.7.544)$$

Le tenseur de Ricci peut être considéré comme la trace du tenseur de Riemann, il est donc de rang inférieur et a moins de composants. Si vous avez une petite boule géodésique en chute libre, alors (en ignorant le cisaillement et la vorticité) le tenseur de Ricci vous indique la vitesse à laquelle le volume de cette boule commence à changer, alors que le tenseur de Riemann contient des informations non seulement sur son volume, mais aussi quant à sa forme.

D'autres contractions d'autres indices pourraient aussi être possibles mais parce que $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ est antisymétrique sur α,β et μ,ν alors la contraction sur ces indices reviennent à avoir $\pm R_{\alpha\beta}$.

Remarque

Il n'y a pas de convention largement acceptée pour le signe du tenseur de courbure de Riemann, ou le tenseur de Ricci, alors prenez l'habitude de toujours vérifier les conventions de signe des livres que vous lisez !

De manière similaire, nous définissons le "scalaire de Ricci" (aussi parfois appelé "scalaire de Riemann") par la relation :

$$R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta} \tag{6.7.545}$$

qui possède les propriétés suivantes :

- Si l'espace est plat, le scalaire de Ricci est nul
- Si l'espace est courbé comme une sphère, le scalaire de Ricci est positif
- Si l'espace est courbé comme une selle de cheval, le scalaire de Ricci est négatif

Soit explicitement (en changeant de notation pour les indices afin de bien insister sur le fait que cela n'a aucun impact !) :

$$\begin{aligned}
R&=g^{ij}R_{ij}=g^{ij}R^{\mu}_{i,\mu j}=g^{ij}\left(\partial_\mu\Gamma^{\mu}_{ij}-\partial_j\Gamma^{\mu}_{i\mu}+\Gamma^{r}_{ij}\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}-\Gamma^{r}_{i\mu}\Gamma^{\mu}_{jr}\right)\\
&=g^{ij}\begin{pmatrix}
\partial_\mu\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_i g_{lj}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij})\right)-\partial_j\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_i g_{l\mu}+\partial_\mu g_{il}-\partial_l g_{i\mu})\right)\\
+\left(\frac{1}{2}g^{rl}(\partial_i g_{lj}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij})\right)\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_\mu g_{lr}+\partial_r g_{\mu l}-\partial_l g_{\mu r})\right)\\
-\left(\frac{1}{2}g^{rl}(\partial_i g_{l\mu}+\partial_\mu g_{il}-\partial_l g_{i\mu})\right)\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_j g_{lr}+\partial_r g_{jl}-\partial_l g_{jr})\right)
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.7.546}$$

Nous aurons des exemples pratiques concrets dans le chapitre de Relativité Générale pour les deux premiers cas mais regardons des exemples simplifiés pour les deux premiers (nous ne démontrerons par contre pas la réciproque).

Nous aurons des exemples pratiques concrets dans la section de la relativité générale pour les deux premiers cas, mais regardons des exemples simplifiés pour les deux premiers cas (nous ne démontrerons cependant pas la réciproque).

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Commençons par la métrique de l'espace plat (sans la composante temporelle). Nous avons (voir section Relativité Générale page ??) :

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{6.7.547}$$

En reprenant la définition du scalaire de Ricci sous forme explicite :

$$R=g^{ij}\begin{pmatrix}\partial_\mu\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_i g_{lj}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij})\right)-\partial_j\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_i g_{l\mu}+\partial_\mu g_{il}-\partial_l g_{i\mu})\right)\\+\left(\frac{1}{2}g^{rl}(\partial_i g_{lj}+\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ij})\right)\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_\mu g_{lr}+\partial_r g_{\mu l}-\partial_l g_{\mu r})\right)\\-\left(\frac{1}{2}g^{rl}(\partial_i g_{l\mu}+\partial_\mu g_{il}-\partial_l g_{i\mu})\right)\left(\frac{1}{2}g^{\mu l}(\partial_j g_{lr}+\partial_r g_{jl}-\partial_l g_{jr})\right)\end{pmatrix} \tag{6.7.548}$$

Il est immédiat que R est nul puisque les dérivées partielles seront toutes nulles. Donc un espace plat a un scalaire de Ricci nul.

E2. Regardons maintenant avec la métrique du plan exprimée en coordonnées sphériques (sans la composante temporelle). Nous avons (voir section Relativité Générale page ??) :

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2(\theta)\end{bmatrix} \tag{6.7.549}$$

et :

$$g^{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{1}{r^2}&0\\0&0&\dfrac{r^2}{\sin^2(\theta)}\end{bmatrix} \tag{6.7.550}$$

avec :

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \tag{6.7.551}$$

Nous savons que pour calculer le scalaire de Ricci (ou : courbure de Ricci), il nous faut donc calculer la contraction du tenseur de Riemann-Christoffel (soit : le tenseur de Ricci) qui lui-même dépend des symboles de Christoffel de deuxième espèce qui eux-mêmes dépendent des symboles de Christoffel de première espèce (argh !). Il faut donc commencer par le niveau le plus bas, c'est-à-dire en déterminant tous les symboles de Christoffel de première espèce donnés pour rappel par :

$$\Gamma_{kji}=\frac{1}{2}(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki}) \tag{6.7.552}$$

Nous avons donc 3^3 c'est-à-dire 27 symboles Christoffel possibles du premier type ! Même si certains symboles sont égaux (nous l'avons prouvé !), nous allons quand même

tous les calculer.

Commençons dans la joie et la bonne humeur... :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{111} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} = 0\\
\Gamma_{112} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} = 0\\
\Gamma_{113} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}\right) = \frac{1}{2}\partial_3 g_{11} = 0\\
\\
\Gamma_{121} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}\right) = -\frac{1}{2}\partial_2 g_{11} = 0\\
\Gamma_{122} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = r\\
\Gamma_{123} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}\right) = 0\\
\\
\Gamma_{131} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}\right) = -\frac{1}{2}\partial_3 g_{11} = 0\\
\Gamma_{132} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}\right) = 0\\
\Gamma_{133} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{33} = r\sin^2(\theta)\\
\\
\Gamma_{211} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} = 0\\
\Gamma_{212} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}\right) = -\frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = -r\\
\Gamma_{213} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{13} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}\right) = 0\\
\\
\Gamma_{221} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = r\\
\Gamma_{222} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{22} = 0\\
\Gamma_{223} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}\right) = \frac{1}{2}\partial_3 g_{22} = 0\\
\\
\Gamma_{231} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{21}\right) = 0\\
\Gamma_{232} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}\right) = -\frac{1}{2}\partial_3 g_{22} = 0\\
\Gamma_{233} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{33} = r^2\sin(\theta)\cos(\theta)
\end{aligned} \tag{6.7.553}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{311} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{13} - \partial_1 g_{31}\right) = \frac{1}{2}\partial_3 g_{11} = 0 \\
\Gamma_{312} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{21} + \partial_2 g_{13} - \partial_1 g_{32}\right) = 0 \\
\Gamma_{313} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}\right) = -\frac{1}{2}\partial_1 g_{33} = -r\sin^2(\theta) \\
\\
\Gamma_{321} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{23} - \partial_2 g_{31}\right) = 0 \\
\Gamma_{322} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{32}\right) = \frac{1}{2}\partial_3 g_{22} = 0 \\
\Gamma_{323} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}\right) = -\frac{1}{2}\partial_2 g_{33} = -r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
\\
\Gamma_{331} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{33} = r\sin^2(\theta) \\
\Gamma_{332} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{33} = r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
\Gamma_{333} &= \frac{1}{2}\left(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}\right) = \frac{1}{2}\partial_3 g_{33} = 0
\end{aligned} \tag{6.7.554}$$

Calculons maintenant tous les symboles de Christoffel de deuxième espèce dans les détails :

$$\Gamma^i_{kj} = g^{il}\Gamma_{klj} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{kj}\right) \tag{6.7.555}$$

Encore une fois, comme le tenseur métrique est diagonal, cela va nous simplifier les calculs !

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= g^{22}\Gamma_{122} = \frac{1}{r^2}\cdot r = \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{13} &= g^{33}\Gamma_{133} = \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot r\sin^2(\theta) = \frac{1}{r} \\
\Gamma^1_{22} &= g^{11}\Gamma_{212} = 1\cdot(-r) = -r \\
\Gamma^2_{21} &= g^{22}\Gamma_{221} = \frac{1}{r^2}\cdot r = \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{23} &= g^{33}\Gamma_{233} = \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot r^2\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)} = \cot(\theta) \\
\Gamma^1_{33} &= g^{11}\Gamma_{313} = 1\cdot(-r\sin^2(\theta)) = -r\sin^2(\theta) \\
\Gamma^2_{33} &= g^{22}\Gamma_{323} = \frac{1}{r^2}\cdot(-r^2\sin(\theta)\cos(\theta)) = -\sin(\theta)\cos(\theta) \\
\Gamma^3_{31} &= g^{33}\Gamma_{331} = \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot r\sin^2(\theta) = \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{32} &= g^{33}\Gamma_{332} = \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot r^2\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)} = \cot(\theta)
\end{aligned} \tag{6.7.556}$$

Calculons maintenant les 9 composantes du tenseur de Ricci dans les détails selon :

$$R_{\alpha\beta}=R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}=\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}-\partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}+\Gamma^{r}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}-\Gamma^{r}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta r} \qquad (6.7.557)$$

Nous avons alors (nous les calculons tous, même si nous savons que par la suite ceux qui n'ont pas $\alpha=\beta$ seront inutiles de par la métrique diagonale) :

$$\begin{aligned}
R_{11}&=R^{\mu}_{1\mu 1}=\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{11}-\partial_{1}\Gamma^{\mu}_{1\mu}+\Gamma^{r}_{11}\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}-\Gamma^{r}_{1\mu}\Gamma^{\mu}_{1r}=-\partial_{1}\Gamma^{\mu}_{1\mu}-\Gamma^{r}_{1\mu}\Gamma^{\mu}_{1r}\\
&=-\left(\partial_1\Gamma^1_{11}+\partial_1\Gamma^2_{12}+\partial_1\Gamma^3_{13}\right)-\left(\Gamma^r_{11}\Gamma^1_{1r}+\Gamma^r_{12}\Gamma^2_{1r}+\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&=-\left(\partial_1\Gamma^2_{12}+\partial_1\Gamma^3_{13}\right)-\left(\Gamma^r_{12}\Gamma^2_{1r}+\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&=-\left(\partial_1\Gamma^2_{12}+\partial_1\Gamma^3_{13}\right)-\left((\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{13})+\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&=-\left(\partial_1\Gamma^2_{12}+\partial_1\Gamma^3_{13}\right)-\left((\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12})+\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&=-\left(\partial_1\Gamma^2_{12}+\partial_1\Gamma^3_{13}\right)-\left(\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}+(\Gamma^1_{13}\Gamma^3_{11}+\Gamma^2_{13}\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13})\right)\\
&=-\left(\partial_1\Gamma^2_{12}+\partial_1\Gamma^3_{13}\right)-\left(\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}\right)=-\left(\partial_r\frac{1}{r}+\partial_r\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{r}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\frac{1}{r}\right)\\
&=-\left(-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{2}{r^2}=\frac{2}{r^2}-\frac{2}{r^2}=0
\end{aligned} \qquad (6.7.558)$$

$$\begin{aligned}
R_{12}&=R^{\mu}_{1\mu 2}=\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{12}-\partial_{2}\Gamma^{\mu}_{1\mu}+\Gamma^{r}_{12}\Gamma^{\mu}_{\mu r}-\Gamma^{r}_{1\mu}\Gamma^{\mu}_{2r}\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{12}-\partial_2\Gamma^1_{11}+\Gamma^r_{12}\Gamma^1_{1r}-\Gamma^r_{11}\Gamma^1_{2r}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{12}-\partial_2\Gamma^2_{12}+\Gamma^r_{12}\Gamma^2_{2r}-\Gamma^r_{12}\Gamma^2_{2r}\right)\\
&+\left(\partial_3\Gamma^3_{12}-\partial_2\Gamma^3_{13}+\Gamma^r_{12}\Gamma^3_{3r}-\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{2r}\right)=\left(-\partial_2\Gamma^3_{13}+\Gamma^r_{12}\Gamma^3_{3r}-\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{2r}\right)\\
&=\left(-\partial_2\Gamma^3_{13}+\left(\Gamma^1_{12}\Gamma^3_{31}+\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}+\Gamma^3_{12}\Gamma^3_{33}\right)-\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{2r}\right)\\
&=\left(-\partial_2\Gamma^3_{13}+\left(\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}\right)-\Gamma^r_{13}\Gamma^3_{2r}\right)=\left(-\partial_2\Gamma^3_{13}+\left(\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}\right)-\left(\Gamma^1_{13}\Gamma^3_{21}+\Gamma^2_{13}\Gamma^3_{22}+\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23}\right)\right)\\
&=\left(-\partial_2\Gamma^3_{13}+\left(\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}\right)-\left(\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23}\right)\right)=-\partial_2\Gamma^3_{13}+\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}-\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{23}\\
&=-\partial_{\theta}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\cot(\theta)-\frac{1}{r}\cot(\theta)=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{13} &= R^{\mu}_{1\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{13} - \partial_3 \Gamma^{\mu}_{1\mu} + \Gamma^{r}_{13}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{1\mu}\Gamma^{\mu}_{3r}\\
&= \left(\partial_1\Gamma^1_{13} - \partial_3\Gamma^1_{11} + \Gamma^r_{13}\Gamma^1_{1r} - \Gamma^r_{11}\Gamma^1_{3r}\right) + \left(\partial_2\Gamma^2_{13} - \partial_3\Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{13}\Gamma^2_{2r} - \Gamma^r_{12}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&+ \left(\partial_3\Gamma^3_{13} - \partial_3\Gamma^3_{13} + \Gamma^r_{13}\Gamma^3_{3r} - \Gamma^r_{13}\Gamma^3_{3r}\right) = \left(-\partial_3\Gamma^2_{12} + \Gamma^r_{13}\Gamma^2_{2r} - \Gamma^r_{12}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&= \left(-\partial_3\Gamma^2_{12} + \left(\Gamma^1_{13}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{13}\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23}\right) - \Gamma^r_{12}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&= \left(-\partial_3\Gamma^2_{12} + \left(\Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23}\right) - \Gamma^r_{12}\Gamma^2_{3r}\right) = \left(-\partial_3\Gamma^2_{12} + \left(\Gamma^3_{13}\Gamma^2_{23}\right) - \left(\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{31} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{33}\right)\right)\\
&= -\partial_3\Gamma^2_{12} = -\partial_\phi \frac{1}{r} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{21} &= R^{\mu}_{2\mu 1} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{21} - \partial_1 \Gamma^{\mu}_{2\mu} + \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{2\mu}\Gamma^{\mu}_{1r}\\
&= \left(\partial_1\Gamma^1_{21} - \partial_1\Gamma^1_{21} + \Gamma^r_{21}\Gamma^1_{1r} - \Gamma^r_{21}\Gamma^1_{1r}\right) + \left(\partial_2\Gamma^2_{21} - \partial_1\Gamma^2_{22} + \Gamma^r_{21}\Gamma^2_{2r} - \Gamma^r_{22}\Gamma^2_{1r}\right)\\
&+ \left(\partial_3\Gamma^3_{21} - \partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^r_{21}\Gamma^3_{3r} - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \left(\partial_2\Gamma^2_{21} + \Gamma^r_{21}\Gamma^2_{2r} - \Gamma^r_{22}\Gamma^2_{1r}\right) + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^r_{21}\Gamma^3_{3r} - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \left(\partial_2\Gamma^2_{21} + (\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{23}) - \Gamma^r_{22}\Gamma^2_{1r}\right) + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^r_{21}\Gamma^3_{3r} - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \left(\partial_2\Gamma^2_{21} - \Gamma^r_{22}\Gamma^2_{1r}\right) + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^r_{21}\Gamma^r_{3r} - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \left(\partial_2\Gamma^2_{21} - (\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{13})\right) + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^r_{21}\Gamma^3_{3r} - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \left(\partial_2\Gamma^2_{21}\right) + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^r_{21}\Gamma^3_{3r} - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \partial_2\Gamma^2_{21} + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \left(\Gamma^1_{21}\Gamma^3_{31} + \Gamma^2_{21}\Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{21}\Gamma^3_{33}\right) - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \partial_2\Gamma^2_{21} + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \left(\Gamma^2_{21}\Gamma^3_{32}\right) - \Gamma^r_{23}\Gamma^3_{1r}\right)\\
&= \partial_2\Gamma^2_{21} + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^2_{21}\Gamma^3_{32} - \left(\Gamma^1_{23}\Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{13}\right)\right)\\
&= \partial_2\Gamma^2_{21} + \left(-\partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^2_{21}\Gamma^3_{32} - \left(\Gamma^3_{23}\Gamma^3_{13}\right)\right) = \partial_2\Gamma^2_{21} - \partial_1\Gamma^3_{23} + \Gamma^2_{21}\Gamma^3_{32} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{13}\\
&= \partial_\theta \frac{1}{r} - \partial_r \cot(\theta) + \frac{1}{r}\cot(\theta) - \frac{1}{r}\cot(\theta) = 0
\end{aligned}
\tag{6.7.559}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22} = R^{\mu}_{2\mu 2} &= \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{22} - \partial_2 \Gamma^{\mu}_{2\mu} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} - \Gamma^{r}_{2\mu}\Gamma^{\mu}_{2r} \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \partial_2 \Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{2r}\right) + \left(\partial_2 \Gamma^{2}_{22} - \partial_2 \Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{2r}\right) \\
&+ \left(\partial_3 \Gamma^{3}_{22} - \partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{2r}\right) + \left(-\partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \left(\Gamma^{1}_{21}\Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{23}\right)\right) + \left(-\partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) + \left(-\partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) + \left(-\partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \left(\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{3}_{22}\Gamma^{3}_{33}\right) - \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) + \left(-\partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) + \left(-\partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{31} - \left(\Gamma^{1}_{23}\Gamma^{3}_{21} + \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{3}_{22} + \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{23}\right)\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) + \left(-\partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{23}\right) \\
&= \partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22} - \partial_2 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{23} \\
&= \partial_r(-r) - \frac{1}{r}\cdot(-r) - \partial_\theta \cot(\theta) + (-r)\frac{1}{r} - \cot^2(\theta) \\
&= -1 + 1 - \left(-1 - \cot^2(\theta)\right) - 1 - \cot^2(\theta) = 0
\end{aligned}
\tag{6.7.560}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{23} = R^{\mu}_{2\mu 3} &= \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{23} - \partial_3 \Gamma^{\mu}_{2\mu} + \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{2\mu}\Gamma^{\mu}_{3r} \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{23} - \partial_3 \Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{3r}\right) + \left(\partial_2 \Gamma^{2}_{23} - \partial_3 \Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{3r}\right) \\
&+ \left(\partial_3 \Gamma^{3}_{23} - \partial_3 \Gamma^{3}_{23} + \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{23}\Gamma^{3}_{3r}\right) = \left(-\Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{3r}\right) + \left(\Gamma^{r}_{23}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{3r}\right) \\
&= -\left(\Gamma^{1}_{21}\Gamma^{1}_{31} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{32} + \Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{33}\right) + \left(\Gamma^{r}_{23}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{3r}\right) \\
&= \left(\Gamma^{r}_{23}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{3r}\right) = \left(\Gamma^{1}_{23}\Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{2}_{23}\Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{2}_{23}\right) - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{3r} \\
&= -\Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{3r} = -\left(\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{31} + \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{2}_{32} + \Gamma^{3}_{22}\Gamma^{2}_{33}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{31} &= R^{\mu}_{3\mu 1} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{31} - \partial_1\Gamma^{\mu}_{3\mu} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{3\mu}\Gamma^{\mu}_{1r} \\
&= \left(\partial_1\Gamma^{1}_{13} - \partial_1\Gamma^{1}_{31} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{1}_{1r}\right) + \left(\partial_2\Gamma^{2}_{31} - \partial_1\Gamma^{2}_{32} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{2}_{1r}\right) \\
&+ \left(\partial_3\Gamma^{3}_{31} - \partial_1\Gamma^{3}_{33} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r}\right) \\
&= \left(\Gamma^{r}_{31}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{2}_{1r}\right) + \left(\partial_3\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r}\right) \\
&= \left(\left(\Gamma^{1}_{31}\Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{2}_{23}\right) - \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{2}_{1r}\right) + \left(\partial_3\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r}\right) \\
&= \left(-\Gamma^{r}_{32}\Gamma^{2}_{1r}\right) + \left(\partial_3\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r}\right) \\
&= -\left(\Gamma^{1}_{32}\Gamma^{2}_{11} + \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{2}_{13}\right) + \left(\partial_3\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r}\right) \\
&= \left(\partial_3\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r}\right) = \left(\partial_3\Gamma^{3}_{31} + \left(\Gamma^{1}_{31}\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{3}_{33}\right) - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r}\right) \\
&= \partial_3\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{1r} = \partial_3\Gamma^{3}_{31} - \left(\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{11} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{12} + \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{3}_{13}\right) \\
&= \partial_3\Gamma^{3}_{31} = \partial_{\theta}\frac{1}{r} = 0
\end{aligned}
\tag{6.7.561}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{32} &= R^{\mu}_{3\mu 2} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{32} - \partial_2\Gamma^{\mu}_{3\mu} + \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{3\mu}\Gamma^{\mu}_{2r} \\
&= \left(\partial_1\Gamma^{1}_{32} - \partial_2\Gamma^{1}_{31} + \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{31}\Gamma^{1}_{2r}\right) + \left(\partial_2\Gamma^{2}_{32} - \partial_2\Gamma^{2}_{32} + \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{2}_{2r}\right) \\
&+ \left(\partial_3\Gamma^{3}_{32} - \partial_2\Gamma^{3}_{33} + \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(-\Gamma^{r}_{31}\Gamma^{1}_{2r}\right) + \left(\partial_3\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= -\left(\Gamma^{1}_{31}\Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{23}\right) - \left(\partial_3\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_3\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{r}_{32}\Gamma^{3}_{3r} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{2r}\right) = \partial_3\Gamma^{3}_{32} + \left(\Gamma^{1}_{32}\Gamma^{3}_{31} + \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{3}_{33}\right) - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{2r} \\
&= \partial_3\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{r}_{33}\Gamma^{3}_{2r} = \partial_3\Gamma^{3}_{32} - \left(\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{21} + \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{22} + \Gamma^{3}_{33}\Gamma^{3}_{23}\right) \\
&= \partial_3\Gamma^{3}_{32} = \partial_{\phi}\cot(\theta) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{33}=R^{\mu}_{3\mu 3}&=\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{33}-\partial_3\Gamma^{\mu}_{3\mu}+\Gamma^{r}_{33}\Gamma^{\mu}_{\mu r}-\Gamma^{r}_{3\mu}\Gamma^{\mu}_{3r}\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\partial_3\Gamma^1_{31}+\Gamma^r_{33}\Gamma^1_{1r}-\Gamma^r_{31}\Gamma^1_{3r}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}-\partial_3\Gamma^2_{32}+\Gamma^r_{33}\Gamma^2_{2r}-\Gamma^r_{32}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&+\left(\partial_3\Gamma^3_{33}-\partial_3\Gamma^3_{33}+\Gamma^r_{33}\Gamma^3_{3r}-\Gamma^r_{33}\Gamma^3_{3r}\right)\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\Gamma^r_{31}\Gamma^1_{3r}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}+\Gamma^r_{33}\Gamma^2_{2r}-\Gamma^r_{32}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\left(\Gamma^1_{31}\Gamma^1_{31}+\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{32}+\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}\right)\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}+\Gamma^r_{33}\Gamma^2_{2r}-\Gamma^r_{32}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}+\Gamma^r_{33}\Gamma^2_{2r}-\Gamma^r_{32}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}+\left(\Gamma^1_{33}\Gamma^2_{21}+\Gamma^2_{33}\Gamma^2_{22}+\Gamma^3_{33}\Gamma^2_{23}\right)-\Gamma^r_{32}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}+\Gamma^1_{33}\Gamma^2_{21}-\Gamma^r_{32}\Gamma^2_{3r}\right)\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}+\Gamma^1_{33}\Gamma^2_{21}-\left(\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{31}+\Gamma^2_{32}\Gamma^2_{32}+\Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33}\right)\right)\\
&=\left(\partial_1\Gamma^1_{33}-\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}\right)+\left(\partial_2\Gamma^2_{33}+\Gamma^1_{33}\Gamma^2_{21}-\Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33}\right)\\
&=\partial_r\left(-r\sin^2(\theta)\right)-\frac{1}{r}\left(-r\sin^2(\theta)\right)+\partial_\theta\left(-\sin(\theta)\cos(\theta)\right)+\left(-r\sin^2(\theta)\right)\frac{1}{r}-\cot(\theta)\left(-\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\\
&=-\sin^2(\theta)+\sin^2(\theta)-\partial_\theta\left(\sin(\theta)\cos(\theta)\right)-\sin^2(\theta)+\cot(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)\\
&=-\left(-\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right)-\sin^2(\theta)+\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(\theta)\cos(\theta)\\
&=\left(\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)\right)-\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=0
\end{aligned}
\tag{6.7.562}
$$

Calculons maintenant le scalaire de Ricci :

$$R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\tag{6.7.563}$$

Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}&=g^{11}R_{11}+g^{22}R_{22}+g^{33}R_{33}\\
&=1\cdot R_{11}+\frac{1}{r^2}R_{22}+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}R_{33}\\
&=1\cdot 0+\frac{1}{r^2}\cdot 0+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot 0=0
\end{aligned}
\tag{6.7.564}
$$

Le scalaire de Ricci est donc nul aussi. Ce résultat peut surprendre, mais en réalité il est logique puisque nous n'avons fait que de calculer la courbure scalaire d'un espace plat exprimé en coordonnées sphériques.

E3. Imposons-nous maintenant la métrique diagonale de surface de la 2-sphère $\mathcal{S}^2$ (sans la composante temporelle). Nous avons alors conformément à ce que nous avons vu dans la section de Géométrie Différentielle page 2853 :

$$g_{ij}=\begin{bmatrix} r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2(\theta)\end{bmatrix}\tag{6.7.565}$$

et :

$$g^{ij}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\end{bmatrix}\tag{6.7.566}$$

Soit (voir section Géométrie Différentielle page 2853) :

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \tag{6.7.567}$$

souvent noté :

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2\right) = r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{6.7.568}$$

où r est une constante !

Nous allons donc commencer par le plus bas niveau, c'est-à-dire par déterminer tous les symboles de Christoffel de première espèce donnés pour rappel par :

$$\Gamma_{kji} = \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}\right) \tag{6.7.569}$$

Nous avons donc 2^3, soit 8 symboles de Christoffel de première espèce possibles ! Même si certains symboles sont égaux (nous l'avons démontré !), nous allons quand même tout calculer :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{111} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} = 0\\
\Gamma_{112} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} = 0\\
\\
\Gamma_{121} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}\right) = -\frac{1}{2}\partial_2 g_{11} = 0\\
\Gamma_{122} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\\
\\
\Gamma_{211} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} = 0\\
\Gamma_{212} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}\right) = -\frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = -r^2\sin(\theta)\cos(\theta)
\end{aligned} \tag{6.7.570}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{221} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}\right) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} = r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\\
\Gamma_{222} &= \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\right) = \frac{1}{2}\partial_2 g_{22} = 0
\end{aligned} \tag{6.7.571}$$

Calculons maintenant tous les symboles de Christoffel de deuxième espèce dans les détails :

$$\Gamma_{kj}^{i} = g^{il}\Gamma_{klj} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{kj}\right) \tag{6.7.572}$$

Encore une fois, comme le tenseur métrique est diagonal, cela va nous simplifier les calculs !

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^{2}&=g^{22}\Gamma_{122}=\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot r^2\sin(\theta)\cos(\theta)=\cot(\theta)\\ \Gamma_{22}^{1}&=g^{11}\Gamma_{212}=\frac{1}{r^2}\cdot\left(-r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)=-\sin(\theta)\cos(\theta)\\ \Gamma_{21}^{2}&=g^{22}\Gamma_{221}=\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot r^2\sin(\theta)\cos(\theta)=\cot(\theta)\end{aligned}\tag{6.7.573}$$

Calculons maintenant les 4 composantes du tenseur de Ricci dans les détails selon :

$$R_{\alpha\beta}=R_{\alpha\mu\beta}^{\mu}=\partial_\mu\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}-\partial_\beta\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}+\Gamma_{\alpha\beta}^{r}\Gamma_{\mu r}^{\mu}-\Gamma_{\alpha\mu}^{r}\Gamma_{\beta r}^{\mu}\tag{6.7.574}$$

Nous avons alors (nous les calculons tous, même si nous savons que par la suite ceux qui n'ont pas $\alpha=\beta$ seront inutiles de par la métrique diagonale) :

$$\begin{aligned}R_{11}&=R_{1\mu 1}^{\mu}=\partial_\mu\Gamma_{11}^{\mu}-\partial_1\Gamma_{1\mu}^{\mu}+\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{\mu r}^{\mu}-\Gamma_{1\mu}^{r}\Gamma_{1r}^{\mu}\\ &=\left(\partial_1\Gamma_{11}^{1}-\partial_1\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{1r}^{1}-\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{1r}^{1}\right)+\left(\partial_2\Gamma_{11}^{2}-\partial_1\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{2r}^{2}-\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{1r}^{2}\right)\\ &=\left(\partial_2\Gamma_{11}^{2}-\partial_1\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{2r}^{2}-\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{1r}^{2}\right)=\left(-\partial_1\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{1r}^{2}\right)\\ &=\left(-\partial_1\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2}\right)=\left(-\partial_1\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2}\right)\\ &=\left(-\left(-1-\cot^2(\theta)\right)\right)-\cot^2(\theta)=1\end{aligned}\tag{6.7.575}$$

$$\begin{aligned}R_{12}&=R_{1\mu 2}^{\mu}=\partial_\mu\Gamma_{12}^{\mu}-\partial_2\Gamma_{1\mu}^{\mu}+\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{\mu r}^{\mu}-\Gamma_{1\mu}^{r}\Gamma_{2r}^{\mu}\\ &=\left(\partial_1\Gamma_{12}^{1}-\partial_2\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{1r}^{1}-\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{2r}^{1}\right)+\left(\partial_2\Gamma_{12}^{2}-\partial_2\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{2r}^{2}-\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{2r}^{2}\right)\\ &=\left(\partial_1\Gamma_{12}^{1}-\partial_2\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{1r}^{1}-\Gamma_{11}^{r}\Gamma_{2r}^{1}\right)=\Gamma_{12}^{r}\Gamma_{1r}^{1}=\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{1}+\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}=0\end{aligned}$$

En ... is

$$\begin{aligned}
R_{21} &= R^{\mu}_{2\mu 1} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{21} - \partial_1 \Gamma^{\mu}_{2\mu} + \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{2\mu}\Gamma^{\mu}_{1r} \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{21} - \partial_1 \Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{1r}\right) + \left(\partial_2 \Gamma^{2}_{21} - \partial_1 \Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{1r}\right) \\
&= \partial_2 \Gamma^{2}_{21} - \partial_1 \Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{1r} = \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{1r} \\
&= \left(\Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{2}_{22}\right) - \left(\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{11} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= R^{\mu}_{2\mu 2} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{22} - \partial_2 \Gamma^{\mu}_{2\mu} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{2\mu}\Gamma^{\mu}_{2r} \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \partial_2 \Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{2r}\right) + \left(\partial_2 \Gamma^{2}_{22} - \partial_2 \Gamma^{2}_{22} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{2r} - \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{2}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \partial_2 \Gamma^{1}_{21} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{2r}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{r}_{22}\Gamma^{1}_{1r} - \Gamma^{r}_{21}\Gamma^{1}_{2r}\right) = \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{1}_{12} - \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{1}_{21} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) \\
&= \left(\partial_1 \Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) = \left(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)\right) - \cot(\theta)\cdot\left(-\sin(\theta)\cos(\theta)\right) \\
&= \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) + \cot(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos(\theta)\cos(\theta) = \sin^2(\theta)
\end{aligned} \tag{6.7.576}$$

Calculons maintenant le scalaire de Ricci :

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{6.7.577}$$

Remarque

Notez que $R_{\alpha\beta} = 1/r^2 g^{\alpha\beta}$ et pour information nous pouvons aussi prouver que (c'est esthétique mais jusqu'à présent il n'a pas d'application pratique dans ce livre) :

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \frac{\delta^{\alpha}_{\beta} g_{\mu\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu} g_{\mu\beta}}{r^2} \tag{6.7.578}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{1}{r^2}\cdot R_{11} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} R_{22} \\
&= \frac{1}{r^2}\cdot 1 + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot \sin^2(\theta) = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{2}{r^2}
\end{aligned} \tag{6.7.579}$$

Nous constatons que :

1. Le scalaire de Ricci est une constante. Cela signifie que l'hypersurface possède une courbure constante en tous points de la surface (nous savons que la sphère par symétrie possède une courbure constante en tous points). Elle possède donc une forme de symétrie, vis-à-vis de sa courbure. Nous avons alors affaire à une "variété maximalement symétrique".

2. Ce scalaire est positif ce qui décrit un espace bombé (boule, sphère) et si $r \to +\infty$ la courbure est nulle !

Remarque

Attention à ne pas confondre la valeur de la courbure de Ricci, et celle de la courbure de Gauss.

6.7.14 Tenseur d'Einstein

Appliquons une contraction à la deuxième identité de Bianchi (valable pour rappel avec le "+" que si la métrique est positive) :

$$g^{\alpha\beta}\left(\nabla_\lambda R_{\alpha\beta,\mu\nu}+\nabla_\nu R_{\alpha\beta,\lambda\mu}+\nabla_\mu R_{\alpha\beta,\nu\lambda}\right)=0 \tag{6.7.580}$$

Rappelons que $\nabla_\lambda g_{\alpha\mu}=0$ et de même par extension que $\Delta_\lambda g^{\alpha\mu}=0$. Donc finalement ceci nous amène à écrire de par la propriété des dérivées (produit en somme) :

$$\nabla_\lambda g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta,\mu\nu}+\nabla_\nu g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta,\lambda\mu}+\nabla_\mu g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu,\nu\lambda}=0 \tag{6.7.581}$$

et donc à obtenir :

$$\nabla_\lambda R^{\mu}_{\beta,\mu\nu}+\nabla_\nu R^{\mu}_{\beta,\lambda\mu}+\nabla_\mu R^{\mu}_{\beta,\nu\lambda}=0 \tag{6.7.582}$$

En utilisant la propriété d'antisymétrie du tenseur de Riemann-Christoffel, nous écrivons :

$$\nabla_\lambda R^{\mu}_{\beta,\mu\nu}-\nabla_\nu R^{\mu}_{\beta,\mu\lambda}+\nabla_\mu R^{\mu}_{\beta,\nu\lambda}=\nabla_\lambda R_{\beta\nu}-\nabla_\nu R^{\mu}_{\beta,\mu\lambda}+\nabla_\mu R^{\mu}_{\beta,\nu\lambda}=0 \tag{6.7.583}$$

Ce qui revient finalement à écrire de par la définition du tenseur de Ricci :

$$\nabla_\lambda R_{\beta\nu}-\nabla_\nu R_{\beta\lambda}+\nabla_\mu R^{\mu}_{\beta,\nu\lambda}=0 \tag{6.7.584}$$

Ce qui revient finalement à écrire de par la définition du tenseur de Ricci : "identité de Bianchi contractée".

Contractons cette relation encore une fois :

$$\begin{aligned}g^{\beta\nu}\left(\nabla_\lambda R_{\beta\nu}-\nabla_\nu R_{\beta\lambda}+\nabla_\mu R^{\mu}_{\beta,\nu\lambda}\right)&=\nabla_\lambda R^{\nu}_{\nu}-\nabla_\nu R^{\nu}_{\lambda}+\nabla_\mu R^{\mu\nu}_{\nu\lambda}=\nabla_\lambda R^{\nu}_{\nu}-\nabla_\nu R^{\nu}_{\lambda}-\nabla_\mu R^{\mu\nu}_{\lambda\nu}\\&=\nabla_\lambda R-\nabla_\nu R^{\nu}_{\lambda}-\nabla_\mu R^{\mu}_{\lambda}=0\end{aligned} \tag{6.7.585}$$

Ce qui revient identiquement à écrire en utilisant les propriétés de la sommation d'Einstein (qui permet librement de changer les indices) :

$$\nabla_\lambda R-\nabla_\mu R^{\mu}_{\lambda}-\nabla_\mu R^{\mu}_{\lambda}=\nabla_\lambda R-2\nabla_\mu R^{\mu}_{\lambda}=0 \tag{6.7.586}$$

Ce qui équivaut à :

$$\nabla_\mu R^{\mu}_{\lambda}-\frac{1}{2}\nabla_\lambda R=0 \tag{6.7.587}$$

Comme $\nabla_\lambda=g^{\mu}_{\lambda}\nabla_\mu R$, nous avons :

$$\nabla_\mu\left(R^{\mu}_{\lambda}-\frac{1}{2}g^{\mu}_{\lambda}R\right)=0 \tag{6.7.588}$$

En cours de traduction de l' anglais

En montant l'indice λ par multiplication avec $g^{\nu\mu}$, nous obtenons "l'identité d'Einstein" :

$$\nabla_\mu\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)=0 \quad (6.7.589)$$

Le "tenseur d'Einstein" (tenseur d'ordre deux et contravariant dans le cas présent) qui est donc une constante dans un espace Riemannien donné est dès lors défini par :

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (6.7.590)$$

et exprime de la façon la plus courte qui soit, le transport parallèle sous toutes les hypothèses mentionnées jusqu'à maintenant.

Identiquement, nous pouvons obtenir la forme covariante :

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (6.7.591)$$

Le tenseur est donc construit pour une métrique uniquement Riemannienne (ce qui fait cependant quand même pas mal d'espaces possibles...), et est automatiquement non divergent :

$$\nabla_\mu G_{\mu\nu}=0 \quad (6.7.592)$$

Il faut bien se rappeler cependant qu'une grande partie des derniers développements considèrent une métrique symétrique. Raison pour laquelle certains parlent de "théorie gravitationnelle symétrique" lorsque nous travaillons dans le cadre de la Relativité Générale.

Nous retrouverons ce tenseur naturellement dans le chapitre de Relativité Générale lorsqu'en faisant usage du principe variationnel nous décomposerons l'action en deux termes :

- l'action de la masse dans le champ gravitationnel
- l'action du champ gravitationnel en l'absence de masse

En exprimant le tout dans un espace Riemannien nous obtiendrons alors la non moins fameuse équation d'Einstein des champs (sans plus d'explications dans cette section) :

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (6.7.593)$$

les détails étant donnés dans la section de Relativité Générale.

Remarque

Comme nous le voyons, nous pouvons très bien rajouter un terme constant à l'expression du tenseur d'Einstein, sans que cela ne change la nullité de sa divergence. Ce fait, utilisé en astrophysique, permet de construire des modèles d'Univers particuliers que nous traitons dans la section de Cosmologie.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Calculons le tenseur d'ordre 2 covariant d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{6.7.594}$$

basé sur la métrique diagonale de la 2-sphere $\mathcal{S}^2$ (sans composantes temporelle) :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{6.7.595}$$

Comme la métrique est diagonale, nous avons bien démontré plus haut par l'exemple que :

$$R_{12} = R_{21} = 0 \tag{6.7.596}$$

Et comme dans le cas présent, nous avons aussi :

$$g_{12} = g_{21} = 0 \tag{6.7.597}$$

Il vient que :

$$G_{12} = G_{21} = 0 \tag{6.7.598}$$

Donc nous n'avons qu'à nous concentrer sur deux composantes :

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = 1 - \frac{1}{2}r^2\frac{2}{r^2} = 1 - \frac{1}{2}r^2\frac{2}{r^2} = 0 \\ G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}\frac{2}{r^2} = \sin^2(\theta) - \frac{1}{2}r^2\sin^2(\theta)\frac{2}{r^2} = 0 \end{aligned} \tag{6.7.599}$$

ce qui vérifie bien ce que nous avons dit plus haut.

La complexité de l'expression du tenseur d'Einstein peut être montrée en utilisant la formule du tenseur de Ricci en termes de symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \\ &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\zeta}R_{\gamma\zeta} \\ &= (\delta^\gamma_\alpha\delta^\zeta_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\zeta})R_{\gamma\zeta} \\ &= (\delta^\gamma_\alpha\delta^\zeta_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\zeta})({\Gamma^\varepsilon}_{\gamma\zeta,\varepsilon} - {\Gamma^\varepsilon}_{\gamma\varepsilon,\zeta} + {\Gamma^\varepsilon}_{\varepsilon\sigma}{\Gamma^\sigma}_{\gamma\zeta} - {\Gamma^\varepsilon}_{\zeta\sigma}{\Gamma^\sigma}_{\varepsilon\gamma}), \end{aligned} \tag{6.7.600}$$

où δ^α_β est le tenseur de Kronecker et le symbole de Christoffel ${\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma}$ est donné pour rappel par :

$${\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}(g_{\beta\varepsilon,\gamma} + g_{\gamma\varepsilon,\beta} - g_{\beta\gamma,\varepsilon}) \tag{6.7.601}$$

Avant les simplifications, cette formule donne $2 \times (6+6+9+9) = 60$ termes individuels. Les simplifications réduisent quelque peu ce nombre.

~95 %

40 votes, 82.5%

En cours de traduction de l' anglais

6.8. Calcul Spinoriel

Comme nous le verrons en premier en physique quantique relativiste, les spineurs jouent un rôle majeur dans la théorique quantique et en conséquence dans toute la physique contemporaine (théorique quantique des champs, modèle standard, théorie des cordes, etc.). Le but actuel de cette section sur les spineurs est uniquement de donner au lecteur les outils nécessaires à une compréhension approfondie de ce qui sera fait dans le chapitre sur l'Atomistique.

Ce fut à partir de 11927 (calendrier holocène) que les physiciens Pauli, puis Dirac introduisirent les spineurs pour la représentation des fonctions d'onde (voir section Physique Quantique Relativiste page ??. Cependant, sous leur forme mathématique, les spineurs avaient été découverts par Élie Cartan dès 11913 (calendrier holocène) lors de ses recherches sur les représentations des groupes en faisant suite à la théorie générale des espaces de Clifford (introduits par le mathématicien W.K. Clifford en 11876 selon calendrier holocène). Il montra, comme nous le verrons, que les spineurs fournissent au fait une représentation linéaire du groupe des rotations d'un espace à un nombre quelconque de dimensions. Ainsi, les spineurs sont donc étroitement liés à la géométrie mais leur présentation est souvent faite de manière abstraite sans signification géométrique intuitive. Ainsi, nous allons nous efforcer (comme toujours dans ce livre) dans cette section d'introduire de la manière la plus simple et intuitive possible cet outil mathématique avec le plus de détails possibles.

Le formalisme spinoriel n'intéresse pas seulement la physique quantique et ses travaux, entre autres, de Roger Penrose ont montré que la théorie spinorielle était une approche extrêmement féconde de la théorie de la relativité générale. Bien que le plus couramment utilisé pour le traitement de la relativité générale soit le calcul tensoriel, Penrose a montré que dans le cas spécifique de l'espace à quatre dimensions et la métrique de Lorentz, le formalisme des spineurs à deux composantes est plus approprié.

En cours de traduction de l'anglais

La théorie des spineurs appelée aussi "calcul spinoriel" ou parfois "géométrie spinorielle" est extrêmement vaste mais ce livre ayant plus pour objectif de s'adresser aux physiciens, nous nous limiterons aux spineurs utiles en physique quantique ainsi que leurs propriétés y relatives (du moins pour l'instant).

Remarque

Nous conseillons vivement au lecteur d'avoir lu au préalable la sous-sous section sur les quaternions (voir section Nombres page 259), la sous-section sur les rotations dans l'espace (voir section Géométrie Euclidienne page 2627) et enfin, si possible pour avoir un exemple pratique physique, la section de Physique Quantique Relativiste à partir de la page ??.

6.8.1 Spineur Unitaire

Nous allons donner ici une première définition (ou exemple) particulière simplifiée des spineurs. Ainsi, nous allons montrer qu'il est possible à partir d'un tel outil de représenter un vecteur d'un espace E^3 à trois composantes à l'aide d'un spineur à deux composantes. La méthode est extrêmement simple et celui qui a déjà lu la partie de la section de Physique Quantique Ondulatoire traitant de l'équation de Dirac ainsi que la section d'Informatique Quantique y verra une analogie assez grandiose.

Considérons pour commencer la sphère suivante d'équation (voir section Géométrie Analytique page 2934) :

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{6.8.1}$$

Et considérons le schéma suivant :

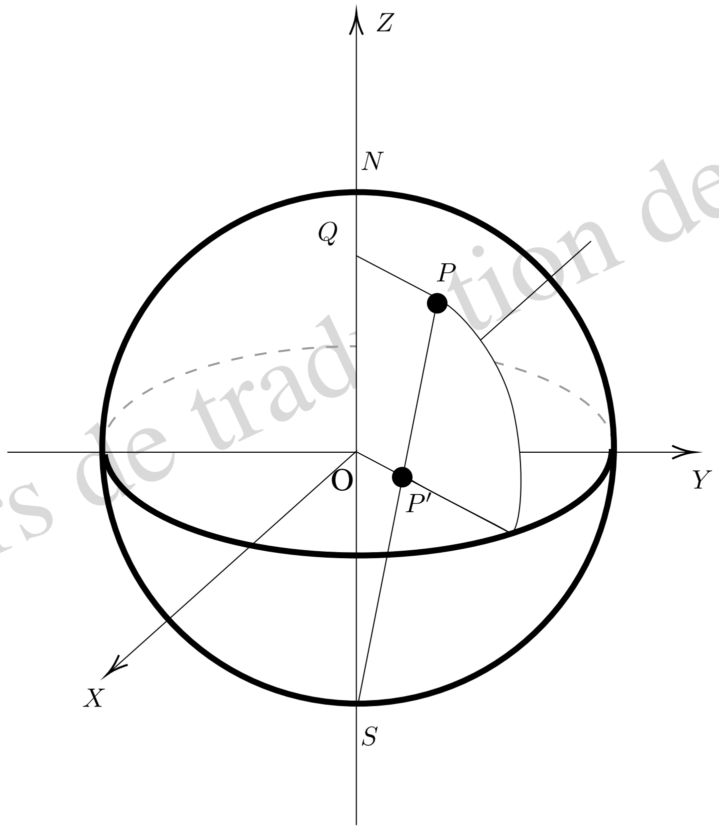


FIG. 6.153 – **Sphère unitaire**

En cours de traduction de l' anglais

Posons sur cette sphère de centre en O et de rayon unité un point P de coordonnées (x,y,z) et notons N (nord) et S (sud) les points de la sphère en intersection avec l'axe Z.

Le point S aura par convention pour coordonnées :

$$S=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \tag{6.8.2}$$

Nous obtenons une projection dite "projection stéréographique " P' du point P en traçant la droite $\overline{SP}$ qui traverse un plan équatorial $x\text{O}y$ complexe (oui ! nous choisissons $\mathbb{C}$ comme plan !) au point P' de coordonnées (x',y',z').

Les triangles semblables $SP'\text{O}$ et SPQ (avec Q étant la projection orthogonale sur l'axe axe Z du point P) nous donnent les relations suivantes en appliquant simplement le théorème de Thalès (voir section Géométrie Euclidienne page 2591) :

$$\triangle SP'\text{O} \sim \triangle SPQ \Leftrightarrow \frac{SP}{SP'} = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{1+z} = \frac{x'+\mathrm{i}y'}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x'-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} \tag{6.8.3}$$

Remarque

Les deux dernières relations s'obtiennent par application du théorème de Thalès (voir section Géométrie Euclidienne) dans le plan équatorial complexe.

Posons maintenant pour simplifier les notations :

$$\xi = x' + \mathrm{i}y' \qquad \bar{\xi} = x' - \mathrm{i}y' \tag{6.8.4}$$

Il vient, compte tenu de la relation précédente que :

$$\frac{1}{1+z} = \frac{x'+\mathrm{i}y'}{x+\mathrm{i}y} \tag{6.8.5}$$

en prenant le module au carré (voir l'étude des nombres complexes dans le chapitres des Nombres) :

$$\frac{1}{|1+z|^2} = \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{|x'+\mathrm{i}y'|^2}{|x+\mathrm{i}y|^2} = \frac{\xi\bar{\xi}}{x^2+y^2} \tag{6.8.6}$$

et de l'équation de la sphère il découle :

$$x^2+y^2 = 1-z^2 = (1+z)(1-z) \tag{6.8.7}$$

nous avons finalement :

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{\xi\bar{\xi}}{x^2+y^2} = \frac{\xi\bar{\xi}}{(1+z)(1-z)} \tag{6.8.8}$$

Mettons maintenant le nombre complexe ξ sous la forme :

$$\xi = x' + \mathrm{i}y' = \frac{\phi}{\psi} \tag{6.8.9}$$

où ϕ,ψ sont deux nombres complexes auxquels nous pouvons toujours imposer de vérifier la condition d'unitarité (rien ne nous l'interdit mais en physique cela nous arrange bien) :

$$\phi\bar{\phi} + \psi\bar{\psi} = 1 \tag{6.8.10}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Les nombres complexes suivants satisfont donc la relation précédente :

$$\psi = e^{i\beta}\cos(\alpha) \qquad \phi = e^{i\gamma}\sin(\alpha) \tag{6.8.11}$$

Rappelons avant de continuer que nous avons démontré lors de notre étude des nombres complexes (voir section Nombres page 246) que :

$$\xi = \frac{\phi}{\psi}, \bar{\xi} = \overline{\left(\frac{\phi}{\psi}\right)} = \frac{\bar{\phi}}{\bar{\psi}} \tag{6.8.12}$$

Dès lors il vient en injectant ces deux dernières relations dans l'équation déterminée plus haut :

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{\frac{\phi}{\psi}\frac{\bar{\phi}}{\bar{\psi}}}{(1+z)(1-z)} \tag{6.8.13}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\psi\bar{\psi} = \phi\bar{\phi}\frac{1+z}{1-z} \tag{6.8.14}$$

En réarrangeant :

$$\psi\bar{\psi}(1-z) = \phi\bar{\phi}(1+z) \tag{6.8.15}$$

Dès lors :

$$\psi\bar{\psi} - z\psi\bar{\psi} = \phi\bar{\phi} + z\psi\bar{\psi} \Leftrightarrow \psi\bar{\psi} - \phi\bar{\phi} = z\left(\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi}\right) \tag{6.8.16}$$

Finalement nous avons une expression simple pour la coordonnée z du point P car dans la dernière égalité ci-dessus, vous devez vous rappeler que $\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi} = 1$ alors :

$$z = \psi\bar{\psi} - \phi\bar{\phi} \tag{6.8.17}$$

Et comme nous avons :

$$x + iy = \xi(1+z) \quad \text{et} \quad x - iy = \bar{\xi}(1+z) \tag{6.8.18}$$

Alors en additionnant et respectivement en soustrayant les deux relations ci-dessus et en utilisant les résultats précédents, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\xi + \bar{\xi}\right)(1+z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{\psi} + \frac{\bar{\phi}}{\bar{\psi}}\right)\left((\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi}) + (\psi\bar{\psi} - \phi\bar{\phi})\right) = \psi\bar{\phi} + \bar{\psi}\phi \\ y &= -\frac{i}{2}\left(\xi - \bar{\xi}\right)(1+z) = \frac{i}{2}\left(\frac{\phi}{\psi} - \frac{\bar{\phi}}{\bar{\psi}}\right)\left((\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi}) + (\psi\bar{\psi} - \phi\bar{\phi})\right) = i\left(\psi\bar{\phi} - \bar{\psi}\phi\right) \end{aligned} \tag{6.8.19}$$

Pour résumer pour le point P nous avons avec nos choix :

$$\begin{aligned} x &= \psi\bar{\phi} + \bar{\psi}\phi \\ y &= i\left(\psi\bar{\phi} - \bar{\psi}\phi\right) \\ z &= \psi\bar{\psi} - \phi\bar{\phi} \end{aligned} \tag{6.8.20}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ainsi, pour tout point P de la sphère de rayon unité, nous pouvons apparier un couple de nombres complexes satisfaisant l'identité unitaire imposée !

Donc sous une forme complète et explicite nous avons finalement en utilisant ce que nous savons des nombres complexes (voir section Nombres page 241) et des fonctions trigonométriques remarquables (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi\bar{\phi}+\bar{\psi}\phi \\ \mathrm{i}\left(\psi\bar{\phi}-\bar{\psi}\phi\right) \\ \psi\bar{\psi}-\phi\bar{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}(\beta-\gamma)}\cos(\alpha)\sin(\alpha)+e^{\mathrm{i}(\gamma-\beta)}\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}(\beta-\gamma)}\cos(\alpha)\sin(\alpha)-e^{\mathrm{i}(\gamma-\beta)}\cos(\alpha)\sin(\alpha)\right) \\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(e^{\mathrm{i}(\beta-\gamma)}+e^{-\mathrm{i}(\beta-\gamma)}\right)\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}(\beta-\gamma)}-e^{-\mathrm{i}(\beta-\gamma)}\right)\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\cos(\beta-\gamma)+\mathrm{i}\sin(\beta-\gamma)+\cos(-(\beta-\gamma))+\mathrm{i}\sin(-(\beta-\gamma)))\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \mathrm{i}(\cos(\beta-\gamma)+\mathrm{i}\sin(\beta-\gamma)-\cos(-(\beta-\gamma))-\mathrm{i}\sin(-(\beta-\gamma)))\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2\cos(\beta-\gamma)+\mathrm{i}\sin(\beta-\gamma)-\mathrm{i}\sin(\beta-\gamma))\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \mathrm{i}(\mathrm{i}\sin(\beta-\gamma)+\mathrm{i}\sin(\beta-\gamma))\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos(\beta-\gamma)\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ -2\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\beta-\gamma)\dfrac{1}{2}\sin(2\alpha) \\ -2\sin(\beta-\gamma)\dfrac{1}{2}\sin(2\alpha) \\ \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta-\gamma)\sin(2\alpha) \\ -\sin(\beta-\gamma)\sin(2\alpha) \\ \cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta-\gamma)\sin(2\alpha) \\ \sin(\gamma-\beta)\sin(2\alpha) \\ \cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta-\gamma)\sin(2\alpha) \\ -\sin(\beta-\gamma)\sin(2\alpha) \\ \cos(2\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.8.21}$$

Nous remarqerons facilement que la norme de ce vecteur est égale à 1.

Cette dernière relation nous indique donc que 2α est l'angle entre Oz et $\overrightarrow{OP}$ (puisque l'hypoténuse de l'angle du vecteur à une norme unitaire) et donc par déduction $\gamma-\beta$ représente l'angle entre Ox et le plan $(\mathrm{O}z,\overrightarrow{OP})$:

En cours de traduction de l' anglais

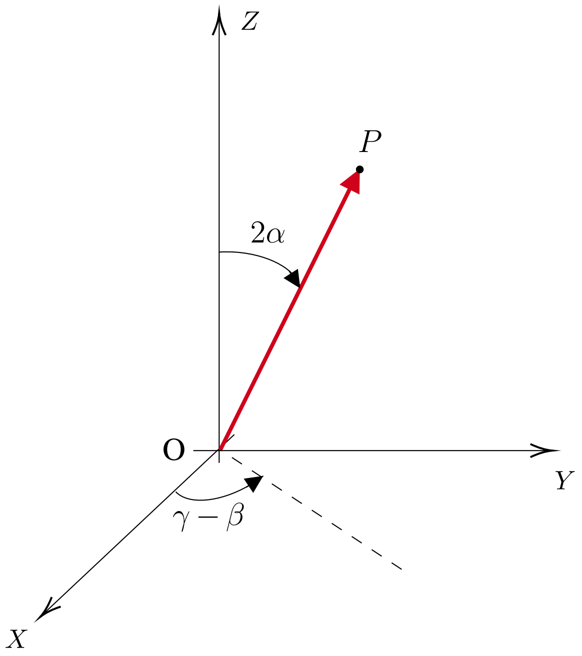


FIG. 6.154 – Représentation de la rotation

La paire de nombre complexes :

$$x = \psi\bar{\phi} + \bar{\psi}\phi \qquad y = \mathrm{i}\left(\psi\bar{\phi} - \bar{\psi}\phi\right) \tag{6.8.22}$$

est par définition un "spineur unitaire" (elle contient aussi toutes les informations sur z). Ainsi, comme nous l'avons vu, un spineur unitaire peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\psi = e^{\mathrm{i}\beta}\cos(\alpha) \qquad \phi = e^{\mathrm{i}\gamma}\sin(\alpha) \tag{6.8.23}$$

De même un spineur quelconque peut se mettre sous la forme un peu plus générale :

$$\psi = \rho e^{\mathrm{i}\beta}\cos(\alpha) \qquad \phi = \rho e^{\mathrm{i}\gamma}\sin(\alpha) \tag{6.8.24}$$

Le spin ainsi mesuré l'est essentiellement à partir d'un axe z orienté comme nous venons de le voir avec la figure précédente.

La projection stéréographique conduit donc à représenter certains vecteurs de l'espace euclidien $\mathcal{E}^3$ avec des éléments d'un espace vectoriel complexe de dimension deux qui est "l'espace des spineurs".

Remarque

Cette représentation n'est pas unique car les arguments de nombres complexes ne sont (sous forme trigonométrique) déterminés qu'à une constante près.

Le lecteur qui aura déjà étudié un peu la physique quantique ondulatoire (voir chapitre du même nom) aura certainement remarqué l'étrange similarité non innocente de la condition et des relations :

$$\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi} = 1 \qquad x = \psi\bar{\phi} + \bar{\psi}\phi \qquad y = \mathrm{i}\left(\psi\bar{\phi} - \bar{\psi}\phi\right) \tag{6.8.25}$$

En cours de traduction de l'anglais

par rapport à la condition de normalisation de de Broglie (l'intégrale sur tout l'espace de la somme des produits des fonctions d'ondes complexes conjuguées est égale à l'unité) et des développements déterminant l'équation de continuité dans la section de Physique Quantique Ondulatoire.

Voyons maintenant pour les besoins ultérieurs, que nous pouvons trouver deux nouveaux vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ de l'espace euclidien $\mathcal{E}^3$, associés à un spineur (ψ, ϕ) unitaire déterminé sur la sphère unité. Ces vecteurs seront cherchés orthogonaux entre eux et de norme unité (donc orthonormaux), chacun étant orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$.

Notons pour simplifier les notations $\vec{v}_3 = \overrightarrow{\mathrm{O}P}$ et $\vec{v}_i = (x_i, y_i, z_i), i \in \{1, 2, 3\}$.

Les composantes respectives des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont bien sûr liés par le produit vectoriel (voir section Produit Vectoriel page 1808) :

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \tag{6.8.26}$$

d'où tenant compte de l'expression des composantes $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$ en fonction de celles du spineur associé, ainsi que du fait $\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi} = 1$, nous avons connaissant l'expression du produit vectoriel :

$$\begin{aligned} x_3 &= y_1 z_2 - y_2 z_1 = 1 \cdot (\psi\bar{\phi} + \bar{\psi}\phi) = (\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi})(\psi\bar{\phi} + \bar{\psi}\phi) \\ y_3 &= z_1 x_2 - z_2 x_1 = 1 \cdot \mathrm{i}(\psi\bar{\phi} - \bar{\psi}\phi) = \mathrm{i}(\psi\bar{\psi} + \phi\bar{\phi})(\psi\bar{\phi} - \bar{\psi}\phi) \\ z_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1 \cdot (\psi\bar{\psi} - \phi\bar{\phi}) \end{aligned} \tag{6.8.27}$$

Écrivant l'orthogonalité des vecteurs entre eux nous obtenons bien évidemment six équations supplémentaires. Cependant l'orientation des vecteurs n'étant pas fixée, il existe une certaine indétermination sur les valeurs de leurs co $\vec{v}_1, \vec{v}_2$mposantes. Choisissons des valeurs telles que :

$$\begin{aligned} x_1 + \mathrm{i}x_2 &= \psi^2 - \phi^2 = e^{2\mathrm{i}\beta}\cos^2(\alpha) - e^{2\mathrm{i}\gamma}\sin^2(\alpha) \\ y_1 + \mathrm{i}y_2 &= \mathrm{i}(\psi^2 + \phi^2) = \mathrm{i}\left(e^{2\mathrm{i}\beta}\cos^2(\alpha) + e^{2\mathrm{i}\gamma}\sin^2(\alpha)\right) \\ z_1 + \mathrm{i}z_2 &= -2\psi\phi = -2e^{\mathrm{i}(\beta+\gamma)}\cos(\alpha)\sin(\alpha) \end{aligned} \tag{6.8.28}$$

En prenant les quantités conjuguées complexes de la relation précédente et en les sommant, pour n'avoir que des parties réelles, nous devons écrire :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(x_1 + \bar{x}_1) = \frac{1}{2}(\psi^2 + \bar{\psi}^2 - \phi^2 - \bar{\phi}^2) \\ y_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + \bar{y}_1) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi^2 - \bar{\psi}^2 + \phi^2 - \bar{\phi}^2) \\ z_1 &= -(\psi\phi + \bar{\psi}\bar{\phi}) \end{aligned} \tag{6.8.29}$$

Nous pouvons contrôler que la norme est égale à l'unité. Il suffit de vérifier avec la norme au carré :

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= \frac{1}{4}(\psi^2 + \bar{\psi}^2 - \phi^2 - \bar{\phi}^2)^2 - \frac{1}{4}(\psi^2 - \bar{\psi}^2 + \phi^2 - \bar{\phi}^2)^2 + (\psi\phi + \bar{\psi}\bar{\phi})^2 \\ &= |\psi|^4 - \psi^2\phi^2 - \bar{\psi}^2\bar{\phi}^2 + |\phi|^4 + \psi^2\phi^2 + 2\psi\phi\bar{\psi}\bar{\phi} + \bar{\psi}^2\bar{\phi}^2 \\ &= |\psi|^4 + |\phi|^4 + 2\psi\phi\bar{\psi}\bar{\phi} = |\psi|^4 + |\phi|^4 + 2|\psi|^2|\phi|^2 \\ &= \cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) = \cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2\cos^2(\alpha)(1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= \cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) - 2\cos^4(\alpha) = -\cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) \\ &= -\cos^4(\alpha) + (\sin^2(\alpha))^2 + 2\cos^2(\alpha) = -\cos^4(\alpha) + (1 - \cos^2(\alpha))^2 + 2\cos^2(\alpha) = 1 \end{aligned} \tag{6.8.30}$$

En cours de traduction de l'anglais

De la même manière, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{\mathrm{i}}{2}(-\psi^2+\bar{\psi}^2+\phi^2-\bar{\phi}^2)\\
y_2 &= \frac{1}{2}(\psi^2+\bar{\psi}^2+\phi^2+\bar{\phi}^2)\\
z_3 &= \mathrm{i}(\psi\phi-\bar{\psi}\bar{\phi})
\end{aligned} \tag{6.8.31}$$

Nous pouvons facilement vérifier que ces valeurs restituent bien les relations du produit vectoriel de $\vec{v}_2$. A tout spineur unitaire (ψ,ϕ) nous pouvons donc associer trois vecteurs $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$. Nous pouvons vérifier directement que les vecteurs ainsi calculés sont orthogonaux entre eux et de norme unitaire.

Un lecteur nous a fait la demande de montrer le plus en détails possible cette affirmation pour x_3. Alors allons-y :

$$\begin{aligned}
x_3 &= y_1z_2-y_2z_1\\
&= \left(\frac{\mathrm{i}}{2}(\psi^2-\bar{\psi}^2+\phi^2-\bar{\phi}^2)\right)(\mathrm{i}(\psi\phi-\bar{\psi}\bar{\phi}))-\left(\frac{1}{2}(\psi^2+\bar{\psi}^2+\phi^2+\bar{\phi}^2)\right)(-(\psi\phi+\bar{\psi}\bar{\phi}))\\
&= -(\psi^2-\bar{\psi}^2+\phi^2-\bar{\phi}^2)(\psi\phi-\bar{\psi}\bar{\phi})+\frac{1}{2}(\psi^2+\bar{\psi}^2+\phi^2+\bar{\phi}^2)(\psi\phi+\bar{\psi}\bar{\phi})\\
&= \frac{1}{2}\left[(\psi^2+\bar{\psi}^2+\phi^2+\bar{\phi}^2)(\psi\phi+\bar{\psi}\bar{\phi})-(\psi^2-\bar{\psi}^2+\phi^2-\bar{\phi}^2)(\psi\phi-\bar{\psi}\bar{\phi})\right]\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\psi^2\psi\phi+\psi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+\bar{\psi}^2\psi\phi+\bar{\psi}^2\bar{\psi}\bar{\phi}+\phi^2\psi\phi+\phi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+\bar{\phi}^2\psi\phi+\bar{\phi}^2\bar{\psi}\bar{\phi}\\
-\psi^2\psi\phi+\psi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+\bar{\psi}^2\psi\phi-\bar{\psi}^2\bar{\psi}\bar{\phi}-\phi^2\psi\phi+\phi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+\bar{\phi}^2\psi\phi-\bar{\phi}^2\bar{\psi}\bar{\phi}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\left[2\psi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+2\bar{\psi}^2\psi\phi+2\phi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+2\bar{\phi}^2\psi\phi\right]=\psi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+\bar{\psi}^2\psi\phi+\phi^2\bar{\psi}\bar{\phi}+\bar{\phi}^2\psi\phi\\
&= \psi\bar{\psi}\psi\bar{\phi}+\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\phi+\phi\bar{\psi}\phi\bar{\phi}+\bar{\phi}\psi\bar{\phi}\phi=\psi\bar{\psi}\left(\psi\bar{\phi}+\bar{\psi}\phi\right)+\phi\bar{\phi}\left(\phi\bar{\psi}+\bar{\phi}\psi\right)\\
&= \psi\bar{\psi}\left(\bar{\psi}\phi+\psi\bar{\phi}\right)+\phi\bar{\phi}\left(\phi\bar{\psi}+\bar{\phi}\psi\right)=\psi\bar{\psi}\left(\phi\bar{\psi}+\bar{\phi}\psi\right)+\phi\bar{\phi}\left(\phi\bar{\psi}+\bar{\phi}\psi\right)\\
&= \left(\psi\bar{\psi}+\phi\bar{\phi}\right)\left(\phi\bar{\psi}+\bar{\phi}\psi\right)=\left(\psi\bar{\psi}+\phi\bar{\phi}\right)\left(\bar{\psi}\phi+\psi\bar{\phi}\right)=\left(\psi\bar{\psi}+\phi\bar{\phi}\right)\left(\psi\bar{\phi}+\bar{\psi}\phi\right)
\end{aligned} \tag{6.8.32}$$

En cours de traduction de l'anglais

6.8.2 Propriétés Géométriques

Nous allons étudier les transformations des vecteurs associés à un spineur afin d'en déduire les propriétés correspondantes de transformation du spineur. Comme nous le savons, certains rotations (trivailes) dans l'espace pouvant toujours s'exprimer sous forme du produit de deux symétries planes (faire dans la tête l'expérience imaginaire), nous commençons par conséquent par l'étude de ces dernières.

6.8.2.1 Symétries Planes

Considérons dans un premier temps la symétrie plane d'un vecteur :

Lors d'une symétrie par rapport à un plan $\mathcal{P}$, un vecteur quelconque $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ se transforme en un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$. Déterminons une matrice S qui représente cette symétrie par rapport à ce plan.

Soit $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ un vecteur unitaire normal au plan $\mathcal{P}$ et soit H le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point M de l'espace sur le plan $\mathcal{P}$:

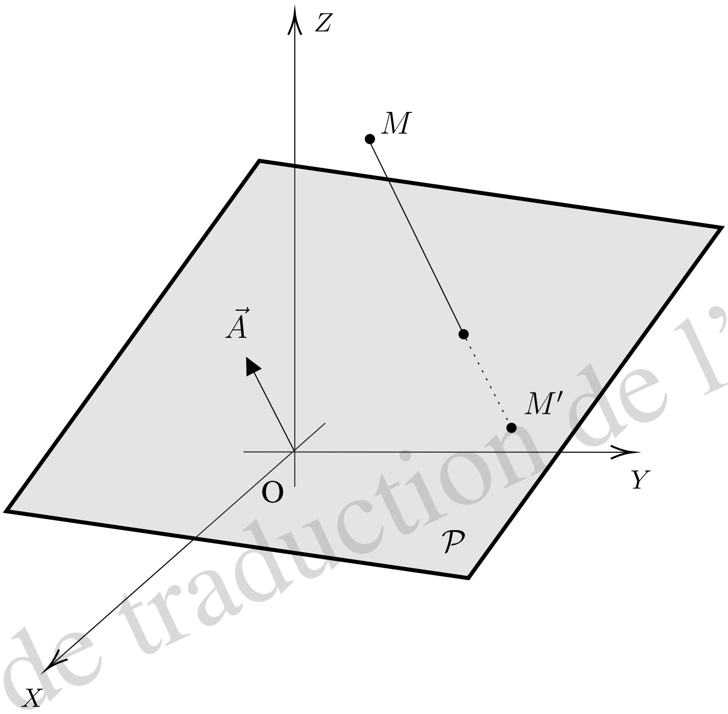


FIG. 6.155 – Symétrie plane d'un vecteur par rapport a un plan

En cours de traduction de l' anglais

Soit M' le point symétrique de M par rapport à $\mathcal{P}$, nous avons :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M'} = \overrightarrow{\mathrm{O}M} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\mathrm{O}M} + 2\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{\mathrm{O}M} - 2\overrightarrow{\mathrm{O}A}(\overrightarrow{\mathrm{O}M} \circ \overrightarrow{\mathrm{O}A}) \quad (6.8.33)$$

Soient a_1, a_2, a_3 les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ et $(x, y, z), (x', y', z')$ les composantes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}$, la relation précédente nous donne les relations linéaires :

$$\begin{aligned} x' &= x - 2a_1(a_1x + a_2y + a_3z) \\ y' &= y - 2a_2(a_1x + a_2y + a_3z) \\ z' &= z - 2a_3(a_1x + a_2y + a_3z) \end{aligned} \quad (6.8.34)$$

La matrice S qui fait passer du vecteur $\vec{X}(x, y, z)$ au vecteur $\vec{X}'(x, y, z)$ a donc pour expression :

$$S = \begin{bmatrix} 1 - 2a_1^2 & -2a_1a_2 & -2a_1a_3 \\ -2a_2a_1 & 1 - 2a_2^2 & -2a_2a_3 \\ -2a_3a_1 & -2a_3a_2 & 1 - 2a_3^2 \end{bmatrix} \quad (6.8.35)$$

Gardons en mémoire ce résultat et considérons à présent deux vecteurs $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$, orthogonaux entre eux et unitaires, définissant comme nous l'avons vu un spineur unitaire (ψ, ϕ). Une symétrie par rapport à un plan $\mathcal{P}$ transforme les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ en vecteurs $\vec{X'}_1, \vec{X'}_2$ auxquels sont associés le spineur (ψ', ϕ').

Théorème 6.47. Nous allons maintenant montrer que la transformation suivante du spineur (ψ, ϕ) en spineur $(\psi', \phi') = (x'_3, y'_3, z'_3)$ est :

$$\begin{pmatrix} \psi' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \\ a_1 + \mathrm{i}a_2 & -a_3 \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \tag{6.8.36}$$

et transforme précisément les vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ en vecteurs $\vec{X}'_1, \vec{X}'_2$, ces vecteurs se déduisant respectivement - comme nous allons le montrer - les uns des autres par une simple symétrie plane et que la matrice $\mathcal{A}$ représente bien la transformation cherchée.

La relation précédente nous donne donc :

$$\begin{aligned} \psi' &= a_3\psi + (a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi \\ \phi' &= (a_1 + \mathrm{i}a_2)\phi - a_3\phi \end{aligned} \tag{6.8.37}$$

En tout nous avons jusqu'à présent l'ensemble suivant de relations :

$$\vec{X}'_3 = (\phi', \psi') \begin{cases} x'_1 + \mathrm{i}x'_2 = \phi'^2 + \psi'^2 \\ y'_1 + \mathrm{i}y'_2 = \mathrm{i}(\psi'^2 + \phi'^2) \\ z'_1 + \mathrm{i}z'_2 = -2\psi'\phi' \end{cases} \tag{6.8.38}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
x'_3 &= \psi'^2 - \phi'^2 = (a_3\psi + (a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi)^2 - ((a_1 + \mathrm{i}a_2)\psi - a_3\phi)^2 \\
&= (a_3^2\psi^2 + 2a_3\psi(a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi + (a_1 - \mathrm{i}a_2)^2\phi^2) - ((a_1 + \mathrm{i}a_2)^2\phi^2 - a(a_1 + \mathrm{i}a_2)\psi a_3\phi + a_3^2\phi^2) \\
&= (a_3^2\psi^2 + 2a_3\psi(a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi + (a_1^2 - 2a_1\mathrm{i}a_2 - a_2^2)\phi^2) \\
&- ((a_1^2 + 2a_1\mathrm{i}a_2 - a_2^2)\phi^2 - 2(a_1 + \mathrm{i}a_2)\psi a_3\phi + a_3^2\phi^2) \\
&= a_3^2\psi^2 + 2a_1a_3\psi\phi - 2\mathrm{i}a_2a_3\psi\phi + a_1^2\phi^2 - 2a_1\mathrm{i}a_2\phi^2 - a_2^2\phi^2 \\
&- a_1^2\psi^2 - 2a_1\mathrm{i}a_2\psi^2 + a_2^2\psi^2 + 2a_1a_3\psi\phi + 2\mathrm{i}a_2a_2\psi\phi - a_3^2\phi^2 \\
&= \left[-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right](\psi^2 - \phi^2) - 2a_1a_2\mathrm{i}(\psi^2 + \phi^2) - 2a_1a_2(-2\psi\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'_3 &= \mathrm{i}(\psi'^2 + \phi'^2) = \mathrm{i}\left[(a_3\psi + (a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi)^2 + ((a_1 + \mathrm{i}a_2)\psi - a_3\phi)^2\right] \\
&= \mathrm{i}\left[(a_3^2\psi^2 + 2a_3\psi(a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi + (a_1 - \mathrm{i}a_2)^2\phi^2) + ((a_1 + \mathrm{i}a_2)^2\psi^2 - 2(a_1 + \mathrm{i}a_2)\psi a_3\phi + a_3^2\phi^2)\right] \\
&= \mathrm{i}(a_3^2\psi^2 + 2a_3\psi(a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi + (a_1^2 - 2a_1\mathrm{i}a_2 - a_2^2)\phi^2) \\
&+ \mathrm{i}((a_1^2 + 2a_1\mathrm{i}a_2 - a_2^2)\psi^2 - 2(a_1 + \mathrm{i}a_2)\psi a_2\phi + a_3^2\phi^2) \\
&= \mathrm{i}a_3^2\psi^2 + 2\mathrm{i}a_1a_2\psi\phi + 2a_2a_3\psi\phi + \mathrm{i}a_1^2\phi^2 + 2a_1a_2\phi^2 - \mathrm{i}a_2^2\phi^2 \\
&+ \mathrm{i}a_1^2\psi^2 - 2a_1a_2\psi^2 - \mathrm{i}a_2^2\psi^2 - 2a_1a_3\psi\phi + 2a_2a_3\psi\phi + \mathrm{i}a_3^2\phi^2 \\
&= -2a_1a_2(\psi^2 - \phi^2) - 2a_2a_3(-2\psi\phi) + (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)\mathrm{i}(\psi^2 + \phi^2)
\end{aligned} \tag{6.8.39}$$

$$\begin{aligned}
z'_3 &= -2\psi'\phi' = -2(a_2\psi + (a_1 - \mathrm{i}a_2)\phi)((a_1 + \mathrm{i}a_2)\psi - a_3\phi) \\
&= -2(a_3\psi + a_1\phi - \mathrm{i}a_2\phi)(a_1\psi + \mathrm{i}a_2\psi - a_3\phi) \\
&= -2a_3a_1(\psi^2 - \phi^2) - 2a_2a_3\mathrm{i}(\psi^2 + \phi^2) + (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)(-2\psi\phi)
\end{aligned}$$

En cours de traduction de l' anglais

Par suite du fait que $\|\vec{A}\| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_3' &= [1 - 2a_1^2]x_3 - 2a_1a_2y_3 - 2a_1a_3z_3 \\ y_3' &= -2a_1a_2x_3 + [1 - 2a_2^2]y_3 - 2a_2a_3z_3 \\ z_3' &= -2a_3a_1x_3 - 2a_3a_2y_3 + [1 - 2a_3^2]z_3 \end{aligned} \tag{6.8.40}$$

Nous retombons donc bien sur la matrice de symétr

$$S = \begin{bmatrix} 1 - 2a_1^2 & -2a_1a_2 & -2a_1a_3 \\ -2a_2a_1 & 1 - 2a_2^2 & -2a_2a_3 \\ -2a_3a_1 & -2a_3a_2 & 1 - 2a_3^2 \end{bmatrix} \tag{6.8.41}$$

Ainsi, la matrice que nous retrouverons dans la section de Physique Quantique Relativiste :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \\ a_1 + \mathrm{i}a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \tag{6.8.42}$$

$\mathcal{A}$ engendre donc la transformation d'un spineur (ψ, ϕ) en un spineur (ψ', ϕ') telle que les vecteurs associées $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ se déduisent respectivement de $(\vec{X}_1', \vec{X}_2')$ par une symétrie plane.

En cours de traduction de l'anglais

6.8.2.2 Rotations

Comme nous l'avons vu dans la section de Géométrie Euclidienne, il est possible faire une rotation d'un vecteur dans le plan ou dans l'espace à l'aide de matrices. De même, par extension, il est évident que la multiplication de deux rotations est une rotation (c'est de l'algèbre linéaire élémentaire - du moins nous le considérons tel quel).

Considérons dès lors, deux plans P, Q dont l'intersection engendre une droite (ligne) L et notons $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{B}(b_1, b_2, b_2)$ des vecteurs unitaires portés par les normales respectives (voir section Calcul Vectoriel page ??) à ces deux plans sécantes en L :

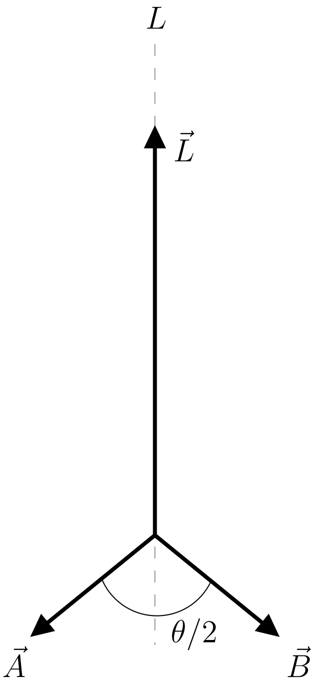


FIG. 6.156 – **Intersection de deux plans illustrée**

Notons $\theta/2$ l'angle des vecteurs $\vec{A},\vec{B}$ entre eux (la raison de cette notation provient de notre étude des quaternions (voir section Nombres page 259)). Soit le vecteur unitaire porté par la droite $\vec{L}$ résultant de l'intersection des plans P,Q et tel que :

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{L}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{6.8.43}$$

Explications : $\vec{A},\vec{B}$ sont unitaires mais pas nécessairement perpendiculaires et nous devons quand même nous assurer que $\vec{L}$ soit un vecteur unitaire (sa norme soit égale à l'unité donc). Dès lors, la relation ci-dessus nous assure que :

$$\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\|\vec{L}\|\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\Rightarrow\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|=\|\vec{L}\|=L_1^2+L_2^2+L_3^2=1 \tag{6.8.44}$$

Le produit vectoriel précédent nous donne pour les composantes de $\vec{L}$:

$$L_1\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=a_2b_3-a_3b_2 \tag{6.8.45}$$

$$L_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=a_3b_1-a_1b_3 \tag{6.8.46}$$

$$L_3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=a_1b_2-a_2b_1 \tag{6.8.47}$$

D'autre part, le produit scalaire s'écrit :

$$\vec{A}\circ\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{6.8.48}$$

Remarque

Nous allons nous servir des ces deux plans comme plans de symétrie pour nos rotations

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, une rotation dans $\mathcal{E}^3$ peut toujours se faire avec au plus deux symétries planes. Ainsi, une rotation peut se noter par l'application (multiplication) de deux matrices de symétrie selon les résultats obtenus plus haut :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\begin{bmatrix}b_3 & b_1-\mathrm{i}b_2\\ b_1+\mathrm{i}b_2 & -b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3 & a_1-\mathrm{i}a_2\\ a_1+\mathrm{i}a_2 & -a_3\end{bmatrix} \tag{6.8.49}$$

Développant le produit de ces deux matrices et tenant compte de relations découlant du produit vectoriel et scalaire nous obtenons :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\mathrm{i}L_3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -(\mathrm{i}L_1+L_2)\sin(\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ (-\mathrm{i}L_1+L_2)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}L_3\sin(\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix} \tag{6.8.50}$$

Ainsi, nous pouvons écrire la transformation d'un spineur (ψ,ϕ) et un spineur (ψ',ϕ') à l'aide d'une matrice de la forme :

$$R=\begin{bmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{bmatrix} \tag{6.8.51}$$

En cours de traduction de l'anglais

dont les paramètres sont appelé "paramètres de Cayley-Klein".

La matrice $R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)$ peut être écrite sous une autre forme si nous faisons un développement limité pour des rotations infiniment petites $\theta/2=\varepsilon/2$ (eh voilà la physique qui revient....). Ainsi, les développements de Maclaurin nous donnent :

$$\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\ldots \qquad \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3+\ldots \tag{6.8.52}$$

En utilisant seuls les termes du premier ordre, la matrice de rotations s'écrit finalement :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\begin{bmatrix}1-\mathrm{i}L_3\frac{\varepsilon}{2} & -(\mathrm{i}L_1+L_2)\frac{\varepsilon}{2}\\ (-\mathrm{i}L_1+L_2)\frac{\varepsilon}{2} & 1+\mathrm{i}L_3\frac{\varepsilon}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{\varepsilon}{2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}L_3 & -(\mathrm{i}L_1+L_2)\\ (-\mathrm{i}L_1+L_2) & \mathrm{i}L_3\end{bmatrix} \tag{6.8.53}$$

Cette matrice constitue le développement limité de la matrice de rotations au voisinage de la matrice identité, cette dernière correspondant évidemment à la rotation nulle. Nous notons cette dernière également sous la forme :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\sigma_0+\varepsilon\chi(\vec{L}) \tag{6.8.54}$$

où la matrice σ_0 est la matrice unité d'ordre deux et $\chi(\vec{L})$ s'appelle la "matrice infinitésimale de rotation". Maintenant, si nous posons $L_1=1, L_2=L_3=0$ in $\chi(\vec{L})$ dans nous obtenons :

$$\chi(\vec{L})=\chi(\mathrm{O}x)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{bmatrix}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{6.8.55}$$

Comment interpréter ce résultat ? Eh bien c'est assez simple, choisir $L_1=1, L_2=L_3=0$, nous donne un vecteur $\vec{L}$ colinéaire à l'axe Ox de . Dès lors, nous pouvons très bien nous imaginer les plans générant l'axe Ox qui porte $\vec{L}$. Comme $\varepsilon/2$ (in extenso $\theta/2$) est généré par les vecteurs $\vec{A},\vec{B}$ perpendiculaires à $\vec{L}$ et donc à Ox, alors l'angle $\varepsilon/2$ (ou sa variation) représente une variation de la direction des plans normaux à $\vec{A},\vec{B}$ qui par symétrie servent à construire la rotation (rappelons que ne sont pas nécessairement orthogonaux entre eux). Donc par extension, avoir $L_1=1, L_2=L_3=0$ ne permet plus que de faire des rotations (symétries) autour de l'axe des x.

De même, une rotation autour de l'axe des y correspond à $L_2=1, L_1=L_3=0$, ce qui donne :

$$\chi(\vec{L})=\chi(\mathrm{O}y)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix} \tag{6.8.56}$$

et de même avec $L_3=1, L_1=L_2=0$ nous avons enfin :

$$\chi(\vec{L})=\chi(\mathrm{O}z)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{6.8.57}$$

Les trois matrices :

$$\begin{gathered}\chi(\vec{L})=\chi(\mathrm{O}x)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{bmatrix}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ \chi(\vec{L})=\chi(\mathrm{O}y)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}\\ \chi(\vec{L})=\chi(\mathrm{O}z)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{6.8.58}$$

En cours de traduction de l'anglais

sont donc les matrices de rotation dans "l'espace des spineurs à deux composantes". Les physiciens et mathématiciens disent que ces matrices constituent une représentation irréductible de dimension deux du groupe "SU(2)" ou encore appelé "groupe spécial des rotations spatiales SU(2)" (voir section Algèbre Linéaire page 1406).

Les matrices infinitésimales précédentes font donc apparaître de manière habile les matrices suivantes :

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix},\sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{6.8.59}$$

Ces matrices sont appelées "matrices de Pauli" et nous les retrouverons dans la section de Physique Quantique Ondulatoire et dans le cadre de l'étude de l'équation de Dirac et de la détermination de ses solutions explicites (utilisant les spineurs) dans la section de Physique Quantique Relativiste.

En utilisant ces matrices de Pauli, la matrice de rotations infinitésimales peut finalement s'écrire :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\sigma_0+\varepsilon\chi(\vec{L})=\sigma_0-\left(\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2}\right)(L_1\sigma_1+L_2\sigma_2+L_3\sigma_3) \tag{6.8.60}$$

Définissons un vecteur $\vec{\sigma}$, appelé "vecteur de Pauli", ayant pour composantes les matrices de Pauli :

$$\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \tag{6.8.61}$$

L'expression $L_1\sigma_1+L_2\sigma_2+L_3\sigma_3$ peut alors s'écrire sous forme d'une sorte de produit scalaire qui représente une somme de matrices (la flèche au-dessus du sigma est parfois omise si aucune confusion n'est possible) :

$$\vec{L}\circ\vec{\sigma}=L_1\sigma_1+L_2\sigma_2+L_3\sigma_3 \tag{6.8.62}$$

Le développement limité s'écrit alors :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\sigma_0+\varepsilon\chi(\vec{L})=\sigma_0-\left(\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2}\right)(L_1\sigma_1+L_2\sigma_2+L_3\sigma_3)=\sigma_0-\left(\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2}\right)\vec{L}\circ\vec{\sigma} \tag{6.8.63}$$

La matrice de rotations :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\mathrm{i}L_3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -(\mathrm{i}L_1+L_2)\sin(\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ (-\mathrm{i}L_1+L_2)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}L_3\sin(\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix} \tag{6.8.64}$$

peut à l'aide des matrices de Pauli s'écrire sous la forme remarquable suivante sous l'hypothèse de petits angles :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma_0-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{L}\circ\vec{\sigma} \tag{6.8.65}$$

En cours de traduction de l' anglais

Expression que nous utiliserons dans la section d'Informatique Quantique pour exprimer les matrices R de manière explicite ainsi que dans la section d'Algèbre Ensembliste à la page 1398.

Ce qui s'écrit parfois :

$$R\left(\vec{L},\theta\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{1}-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{L}\circ\vec{\sigma} \qquad (6.8.66)$$

Ce qui peut s'écrire aussi dans une forme extensive :

$$R\left(\vec{L},\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma_0-L_1\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma_1-L_2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma_2-L_3\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma_3 \qquad (6.8.67)$$

qui a donc la forme d'un quaternion de rotation d'angle θ (ne pas oublier que c'est valide seulement pour de petits angles) et d'axe $\vec{L}$. D'où la raison d'avoir depuis le début choisi la notation de $\varepsilon/2$.

Il est clair, pour que l'analogie avec les quaternions soit plus forte, que les matrices 2×2 de Pauli forment un ensemble de quatre matrices linéairement indépendantes ! Tel que la base canonique pour les quaternions !

Si nous notons $\vec{L}(L_1,L_2,L_3)=\vec{X}(x,y,z)$ alors le "produit spinoriel" est défini finalement par :

$$L_1\sigma_1+L_2\sigma_2+L_3\sigma_3=x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3=\vec{X}\circ\vec{\sigma}=\begin{bmatrix} z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & -z\end{bmatrix} \qquad (6.8.68)$$

Cette matrice constitue comme nous en avons déjà fait mention, au développement limité de la matrice de rotation au voisinage de la matrice identité, les composantes de $\vec{x}$ étant associées à un spineur dont la rotation se fait par la double symétrie définie par deux plans dont l'intersection est définie par le vecteur $\vec{X}$.

Nous pouvons par ailleurs remarquer la conséquence intéressante qu'une rotation de 2π (360°) ne restore pas l'objet dans sa position initiale ! ! !

Effectivement :

$$\begin{aligned}
R(\vec{L},0)&=\cos(0)\mathbb{1}-\mathrm{i}\sin(0)\vec{L}\circ\vec{\sigma}=\mathbb{1}\\
R(\vec{L},2\pi)&=\cos(\pi)\mathbb{1}-\mathrm{i}\sin(\pi)\vec{L}\circ\vec{\sigma}=-\mathbb{1}\\
R(\vec{L},4\pi)&=\cos(2\pi)\mathbb{1}-\mathrm{i}\sin(2\pi)\vec{L}\circ\vec{\sigma}=\mathbb{1}
\end{aligned} \qquad (6.8.69)$$

Il faut donc une rotation de 4π (720°) pour faire un tour complet ! Cela correspond au spin de ½. Il faut faire deux tours pour retrouver que l'objet réapparaisse de manière équivalente (c'est contre-intuitif et peut faire en sorte que l'objet auquel nous avons affaire ait des dimensions plus élevées que ce à quoi nous nous attendions !). Nous disons alors que la représentation des rotations est "bivaluée".

Schématiquement, cela peut être représenté par :

En cours de traduction de l'anglais

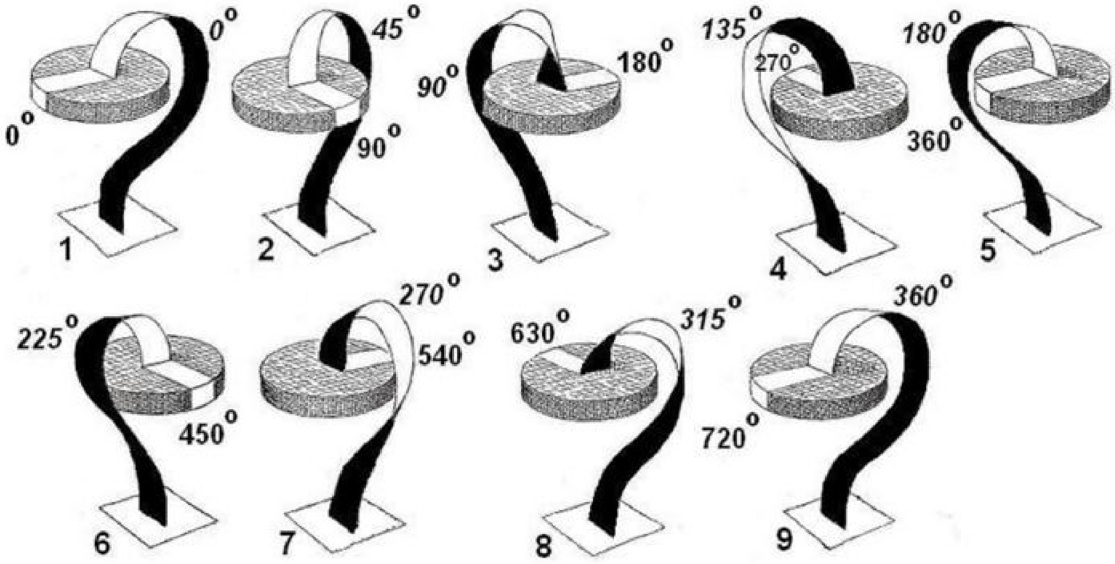


FIG. 6.157 – **Rotation spinorielle complète (exemple spécial)**

Ou vous pouvez considérer l'analogie qui consiste à tenir une tasse de thé sur la paume de votre main et vous tournez votre main en la maintenant à plat pour retrouver sa position d'origine (la main, pas la tasse !). Vous verrez que votre main doit faire deux tours !

En cours de traduction de l'anglais

6.8.2.3 Propriétés des matrices de Pauli

Le lecteur vérifiera aisément (si ce n'est pas le cas il pourra toujours nous contacter pour que nous en rédigions les détails) les propriétés suivantes des matrices de Pauli dont certaines seront utilisées dans la section de Physique Quantique Relativiste. Notez d'abord que les trois matrices de Pauli peuvent être compactées en une seule expression :

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \delta_{j3} & \delta_{j1} - \mathrm{i}\delta_{j2} \\ \delta_{j1} + \mathrm{i}\delta_{j2} & -\delta_{j3} \end{pmatrix} \tag{6.8.70}$$

où δ_{jk} est pour rappel le delta de Kronecker, qui est égal à $+1$ si $j = k$ et 0 sinon.

Passons maintenant aux propriétés :

P1. Unitarité :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0 \tag{6.8.71}$$

P2. Anticommutativité :

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \tag{6.8.72}$$

pour $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, 3$.

Les deux dernières propriétés nous donnent :

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\sigma_0 \tag{6.8.73}$$

avec $i, j = 1, 2, 3$.

P3. Cyclicité :

$$\sigma_1\sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3 \quad \sigma_2\sigma_3 = \mathrm{i}\sigma_1 \quad \sigma_3\sigma_1 = \mathrm{i}\sigma_2 \tag{6.8.74}$$

P4. Commutativité :

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 &= 2\mathrm{i}\sigma_3 \\ \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 &= 2\mathrm{i}\sigma_2 \\ \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 &= 2\mathrm{i}\sigma_1 \end{aligned} \tag{6.8.75}$$

P5. Produit vectoriel :

Soit le carré des composantes de σ en notant abusivement par "1" la matrice unitaire (nous changeons les indices afin de vous habituer aux autres notations courantes) :

$$\begin{aligned} \sigma_x\sigma_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \\ \sigma_y\sigma_y &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \\ \sigma_z\sigma_z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \end{aligned} \tag{6.8.76}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ce qui conduit à écrire que (norme du vecteur de Pauli au carré) :

$$\sigma = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3 \cdot \mathbb{1} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.8.77}$$

Considérons maintenant les produits suivants :

$$\begin{aligned}
&\sigma_x\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{i}\sigma_z \\
&\sigma_x\sigma_y = \mathrm{i}\sigma_z \\
&\sigma_x\sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} \\ -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\sigma_y \\
&\sigma_x\sigma_z = -\mathrm{i}\sigma_y \\
&\sigma_z\sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i}\sigma_y \\
&\sigma_z\sigma_x = \mathrm{i}\sigma_y \\
&\sigma_y\sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i}\sigma_x \\
&\sigma_y\sigma_z = \mathrm{i}\sigma_x \\
&\sigma_z\sigma_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\sigma_x \\
&\sigma_z\sigma_y = -\mathrm{i}\sigma_x
\end{aligned} \tag{6.8.78}$$

Toutes ces relations peuvent se résumer sous la forme unique (!) :

$$\boxed{\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k} \tag{6.8.79}$$

où pour rappel (voir section Calcul Tensoriel page 2015) le symbole de Kronecker est défini par :

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{6.8.80}$$

En trois dimensions, le symbole Levi-Civita est défini comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i \end{cases} \tag{6.8.81}$$

c'est-à-dire ε_{ijk} vaut 1 si (i,j,k) est une permutation paire de $(1,2,3)$ ou dans l'ordre naturel $(1,2,3)$, -1 s'il s'agit d'une permutation impaire, et 0 si un index est répété. En trois dimensions seulement, les permutations cycliques de $(1,2,3)$ sont toutes des permutations paires, de même les permutations anti-cycliques sont toutes des permutations impaires. Cela signifie qu'en 3D il suffit de prendre des permutations cycliques ou anti-cycliques de $(1,2,3)$ et d'obtenir facilement toutes les permutations paires ou impaires.

La relation encadrée ci-dessus peut être présentée sous la forme d'un tableau de Cayley :

$\times$	σ_x	σ_y	σ_z
σ_x	$\mathbb{1}$	$i\sigma_z$	$-\mathrm{i}\sigma_y$
σ_y	$-\mathrm{i}\sigma_z$	$\mathbb{1}$	$\mathrm{i}\sigma_x$
σ_z	$\mathrm{i}\sigma_y$	$-\mathrm{i}\sigma_x$	$\mathbb{1}$

(6.8.82)

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x&=2\mathrm{i}\sigma_z\\\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_y&=2\mathrm{i}\sigma_x\\\sigma_z\sigma_x-\sigma_x\sigma_z&=2\mathrm{i}\sigma_y\end{aligned}\tag{6.8.83}$$

Qui peut se résumer à :

$$[\sigma_j,\sigma_k]=2\mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\sigma_l\tag{6.8.84}$$

Nous retrouvons donc ici les composantes du produit vectoriel :

$$\vec{\sigma}\times\vec{\sigma}=2\mathrm{i}\vec{\sigma}\tag{6.8.85}$$

Maintenant voyons une identité spinorielle qui nous sera utile dans la section de Physique Quantique Relativiste :

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\circ\vec{a})(\vec{\sigma}\circ\vec{b})&=(\sigma_1a_1+\sigma_2a_2+\sigma_3a_3)(\sigma_1b_1+\sigma_2b_2+\sigma_3b_3)\\&=\sum_{i,j}a_i\sigma_ib_j\sigma_j\\&=\begin{bmatrix}a_z & a_x-\mathrm{i}a_y\\a_x+\mathrm{i}a_y & -a_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_z & b_x-\mathrm{i}b_y\\b_x+\mathrm{i}b_y & -b_z\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a_zb_z+(b_x+\mathrm{i}b_y)(a_x-\mathrm{i}a_y) & a_z(b_x-\mathrm{i}b_y)-b_z(a_x-\mathrm{i}a_y)\\b_z(a_x+\mathrm{i}a_y)-a_z(b_x+\mathrm{i}b_y) & (b_x-\mathrm{i}b_y)(a_x+\mathrm{i}a_y)+a_zb_z\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a_zb_z+b_xa_x+b_ya_y+\mathrm{i}(b_ya_x-b_xa_y) & a_zb_x-\mathrm{i}a_zb_y-b_za_x+b_z\mathrm{i}a_y\\b_za_x+b_z\mathrm{i}a_y-a_zb_x-\mathrm{i}a_zb_y & a_zb_z+b_xa_x+b_ya_y+\mathrm{i}(b_xa_y-b_ya_x)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z & 0\\0 & a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}\mathrm{i}(b_ya_x-b_xa_y) & a_zb_x-b_za_x+\mathrm{i}(b_za_y-a_zb_y)\\b_za_x-a_zb_x+\mathrm{i}(b_za_y-a_zb_y) & \mathrm{i}(b_xa_y-b_ya_x)\end{bmatrix}\\&=(\vec{a}\circ\vec{b})\mathbb{1}+\begin{bmatrix}\mathrm{i}(b_ya_x-b_xa_y) & a_zb_x-b_za_x+\mathrm{i}(b_za_y-a_zb_y)\\b_za_x-a_zb_x+\mathrm{i}(b_za_y-a_zb_y) & \mathrm{i}(b_xa_y-b_ya_x)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.8.86}$$

Or nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\vec{\sigma}\circ(\vec{a}\times\vec{b})&=\mathrm{i}\vec{\sigma}\circ\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}\\&=\mathrm{i}\begin{bmatrix}a_xb_y-a_yb_x & (a_yb_z-a_zb_y)-\mathrm{i}(a_zb_x-a_xb_z)\\(a_yb_z-a_zb_y)+\mathrm{i}(a_zb_x-a_xb_z) & (a_xb_y-a_yb_x)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\mathrm{i}(b_ya_x-b_xa_y) & a_zb_x-b_za_x+\mathrm{i}(b_za_y-a_zb_y)\\b_za_x-a_zb_x+\mathrm{i}(b_za_y-b_ya_z) & \mathrm{i}(a_yb_x-a_xb_y)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.8.87}$$

Donc finalement :

$$(\vec{\sigma}\circ\vec{a})(\vec{\sigma}\circ\vec{b})=(\vec{a}\circ\vec{b})\mathbb{1}+\mathrm{i}\vec{\sigma}\circ(\vec{a}\times\vec{b})\tag{6.8.88}$$

P6. Nous noterons que ces matrices sont aussi hermitiennes (rappelons qu'une matrice hermitienne est une matrice transposée suivie de sa conjuguée complexe selon ce que nous avons vu dans la section d'Algèbre Linéaire) tel que :

$$\sigma_x=\sigma_x^\dagger\qquad\sigma_y=\sigma_y^\dagger\qquad\sigma_z=\sigma_z^\dagger\tag{6.8.89}$$

Il s'agit donc dans le langage de la physique quantique, d'opérateurs hermitiques ! ! !

En cours de traduction de l'anglais

P7. Les traces suivantes peuvent être dérivées en utilisant les relations de commutation et d'anticommutation :

$$\begin{aligned}\text{tr}\left(\sigma_j\right)&=0\\ \text{tr}\left(\sigma_j\sigma_k\right)&=2\delta_{jk}\\ \text{tr}\left(\sigma_j\sigma_k\sigma_\ell\right)&=2\mathrm{i}\varepsilon_{jk\ell}\\ \text{tr}\left(\sigma_j\sigma_k\sigma_\ell\sigma_m\right)&=2\left(\delta_{jk}\delta_{\ell m}-\delta_{j\ell}\delta_{km}+\delta_{jm}\delta_{k\ell}\right)\end{aligned} \tag{6.8.90}$$

Si la matrice $\sigma_0=\mathbb{1}$ est également considérée, ces relations deviennent :

$$\begin{aligned}\text{tr}\left(\sigma_\alpha\right)&=2\delta_{0\alpha}\\ \text{tr}\left(\sigma_\alpha\sigma_\beta\right)&=2\delta_{\alpha\beta}\\ \text{tr}\left(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\right)&=2\sum_{(\alpha\beta\gamma)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{0\gamma}-4\delta_{0\alpha}\delta_{0\beta}\delta_{0\gamma}+2\mathrm{i}\varepsilon_{0\alpha\beta\gamma}\\ \text{tr}\left(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_\mu\right)&=2\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}-\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right)+4\left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{0\beta}\delta_{0\mu}+\delta_{\beta\mu}\delta_{0\alpha}\delta_{0\gamma}\right)-8\delta_{0\alpha}\delta_{0\beta}\delta_{0\gamma}\delta_{0\mu}+2\mathrm{i}\sum_{(\alpha\beta\gamma\mu)}\varepsilon_{0\alpha\beta\gamma}\delta_{0\mu}\end{aligned} \tag{6.8.91}$$

où les indices grecs $alpha, \beta, \gamma$ et μ prennent des valeurs à partir de $\{0, x, y, z\}$ et la notation $\sum_{(\alpha\ldots)}$ est utilisée pour désigner la somme sur la permutation cyclique des indices inclus.

Voyons maintenant quels sont les vecteurs et valeurs propres des matrices de Pauli car ce résultat est très utile pour les section de Physique Quantique Relativiste ainsi que d'Informatique Quantique !

Rappelons que lorsqu'une transformation (application d'une matrice) agit sur un vecteur, elle modifie la direction de ce vecteur excepté pour certaines matrices particulières qui ont des valeurs propres. Dans ce cas, la direction est conservée mais pas leur longueur. Cette propriété est exploitée en mécanique quantique (et pas seulement comme nous le verrons dans différentes sections du présent livre !).

Déterminons dans un premier temps, les vecteurs et valeurs propres (voir section Algèbre Linéaire page 1969) associées à en utilisant la méthode la plus courante :

L'équation aux valeurs propres (voir sectionAlgèbre Linéaire page 1970) est alors écrite :

$$\det(\sigma_x-\lambda I_n)=\det\begin{bmatrix}0-\lambda & 1\\ 1 & 0-\lambda\end{bmatrix}=0 \tag{6.8.92}$$

Ce qui nous donne comme équation caractéristique :

$$\det(\sigma_x-\lambda I_n)=\lambda^2-1=0 \tag{6.8.93}$$

d'où les valeurs propres $\lambda=\pm 1$. Ce qui nous permet de déterminer les vecteurs propres comme suit :

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{6.8.94}$$

Donc pour $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{6.8.95}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce qui impose que $y=x$. Le vecteur propre est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y=x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall x \tag{6.8.96}$$

quelle que soit la valeur de x.

Conclusion : La direction propre du vecteur est conservée mais pas sa longueur car elle dépend de la valeur de x.

Pour $\lambda=-1$:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \tag{6.8.97}$$

Ce qui impose que $y=-x$ et donc que le vecteur propre est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y=-x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \forall x \tag{6.8.98}$$

Les vecteurs propres précédents écrits avec le formalisme de Dirac (voir section Physique Quantique Relativiste page **??**) donnent pour $\lambda=1$:

$$|v\rangle = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \tag{6.8.99}$$

avec une norme de (1 puisque nous normalisons à l'unité) :

$$\langle v|v\rangle = x^2+x^2=2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.8.100}$$

Remarque

Dans le formalisme de Dirac $\langle v|$ est appelé un "Bra" et $|v\rangle$ est appelé un "Ket".

Ceci n'étant valable que pour des composantes qui sont des nombres réels. Le vecteur propre normé a donc pour expression :

$$|v\rangle = x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.8.101}$$

Pour $\lambda=-1$, nous avons :

$$|v\rangle = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \tag{6.8.102}$$

et :

$$\langle v|v\rangle = x^2+(-x)^2=2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.8.103}$$

et le vecteur propre normé a donc pour expression :

$$|v\rangle = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6.8.104}$$

En cours de traduction de l'anglais

Déterminons maintenant, les vecteurs et valeurs propres associées à σ_y en procédant de même.

Nous avons donc pour les valeurs propres :

$$\det(\sigma_y - \lambda I_n) = \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \tag{6.8.105}$$

Les vecteurs propres se déterminant comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\mathrm{i}y \\ \mathrm{i}x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.8.106}$$

et donc pour $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}y \\ \mathrm{i}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{y}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}y \tag{6.8.107}$$

Le vecteur propre est dès lors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y = \mathrm{i}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \mathrm{i}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \forall x \tag{6.8.108}$$

La norme associée :

$$\langle v | v \rangle = x^2 (1, -\mathrm{i}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 \left[1 + (-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})\right] = 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.8.109}$$

Le vecteur propre normé a donc pour expression :

$$|v\rangle = x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{6.8.110}$$

Pour $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}y \\ \mathrm{i}x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{1}{\mathrm{i}} x = -\mathrm{i}x \tag{6.8.111}$$

Le vecteur propre est dès lors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y = -\mathrm{i}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\mathrm{i}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \forall x \tag{6.8.112}$$

La norme associée :

$$\langle v \,|\, v \rangle = x^2 [1, \mathrm{i}] \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = x^2 \left[1^2 + (i - \mathrm{i})\right] = 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.8.113}$$

Le vecteur normé a donc pour expression :

$$|v\rangle = x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{6.8.114}$$

Déterminons maintenant, les vecteurs et valeurs propres associées à σ_z en procédant de même.

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons alors :

$$\det(\sigma_z - \lambda I_n) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = -(\lambda^2 - 1) = 0$$
$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \tag{6.8.115}$$

Les vecteurs propres sont alors pour $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.8.116}$$

ce qui nous pose légèrement problème pour dire quoi que ce soit... la seule possibilité est de choisir $y = 0$ et ainsi :

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.8.117}$$

et la norme associée :

$$\langle v|v\rangle = x^2 + 0^2 = x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \tag{6.8.118}$$

Le vecteur propre normé a alors pour expression :

$$|v\rangle = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.8.119}$$

et pour $\lambda = -1$ nous aurons le même choix à faire en posant cette fois-ci $x = 0$ et donc :

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.8.120}$$

d'où la norme associée :

$$\langle v|v\rangle = 0^2 + (-y)^2 = y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \tag{6.8.121}$$

Le vecteur propre normé a donc finalement pour expression :

$$|v\rangle = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.8.122}$$

Donc les vecteurs propres normés de σ_z se trouvent sur les directions des axes de coordonnées cartésiennes. C'est pour cette raison particulière que les vecteurs propres de σ_z sont notés en informatique quantique par :

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.8.123}$$

et il faut savoir que l'on note alors aussi :

$$\sigma_z|\pm\rangle = \sigma_3|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle \tag{6.8.124}$$

En cours de traduction de l' anglais

~100 %
18 votes, 84.44%

7 Analyse

L'analyse est la formulation rigoureuse de l'algèbre. (Wikipedia)

Contents

7.1 Analyse Fonctionnelle . . . **2144**
7.1.1 Représentations . . . 2145
7.1.1.1 Représentations tabulaires . . . 2145
7.1.1.2 Représentations graphiques . . . 2151
7.1.1.3 Représentations Analytiques . . . 2180
7.1.2 Fonctions . . . 2183
7.1.2.1 Limites et Continuités des fonctions . . . 2201
7.1.2.2 Concavité/Convexité d'une fonction . . . 2255
7.1.2.3 Théorème d'Euler pour les fonctions homogènes . . . 2257
7.1.3 Logarithmes . . . 2259
7.1.4 Convolutions . . . 2268
7.1.4.1 Produit de Convolution Continu et Discret Linéaire . . . 2268
7.1.4.2 Convolution Matricielle . . . 2274
7.1.5 Opérateur Intégral (transformation intégrale) . . . 2278
7.1.5.1 Transformée de Fourier . . . 2280
7.1.5.2 Transformée de Laplace . . . 2312
7.1.5.3 Transformée en $\mathcal{Z}$ . . . 2338
7.1.5.4 Transformée de Hilbert . . . 2355
7.1.6 Produit scalaire fonctionnel (produit interne) . . . 2358
7.1.6.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales . . . 2367
7.2 Analyse complexe . . . **2369**
7.2.1 Applications linéaires . . . 2370
7.2.2 Fonctions holomorphes . . . 2379

En cours de traduction de l'anglais

7.2.2.1 Orthogonalité des iso-courbes réelles et imaginaires . . . 2385
7.2.3 Logarithme Complexe . . . 2387
7.2.4 Intégration de Fonctions Complexes . . . 2391
7.2.4.1 Convergence d'une série complexe . . . 2399
7.2.5 Décomposition en Chemins . . . 2407
7.2.5.1 Chemin inverse . . . 2408
7.2.6 Séries de Laurent . . . 2410
7.2.7 Singularités . . . 2417
7.2.8 Théorème des Résidus . . . 2420
7.2.8.1 Pôle à l'infini . . . 2425
7.3 Topologie . . . 2427
7.3.1 Topologie Générale . . . 2428
7.3.1.1 Espaces topologiques . . . 2429
7.3.2 Espace métrique et distance . . . 2431
7.3.2.1 Distances Équivalentes . . . 2438
7.3.2.2 Fonctions Lipschitziennes . . . 2438
7.3.2.3 Continuité et Continuité Uniforme . . . 2442
7.3.3 Ensembles Ouverts et Fermés . . . 2445
7.3.3.1 Boules . . . 2446
7.3.3.2 Parties . . . 2449
7.3.3.3 Boules Généralisées . . . 2452
7.3.3.4 Diamètre . . . 2453
7.3.4 Variétés . . . 2455
7.3.4.1 Sous-Variétés . . . 2457
7.3.4.2 Homéomorphismes de Surfaces . . . 2458
7.3.4.3 Variétés Différentiables . . . 2461
7.4 Théorie de la Mesure . . . 2463
7.4.1 Espaces Mesurables . . . 2464
7.4.1.1 Classes Monotones . . . 2472
7.4.2 Mesure de Lebesgue en probabilités . . . 2475
7.4.2.1 Mesure de Lebesgue des nombres rationnels et irrationnels . . . 2478

En cours de traduction de l'anglais

7.1. Analyse Fonctionnelle

L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse qui est en rapport avec l'étude des espaces de fonctions. Elle prend ses racines historiques dans l'étude des transformations telles que la transformation de Fourier et dans l'étude des équations différentielles et des intégrales. À ce titre elle englobe tellement de domaines qu'il est difficile de justifier qu'elle fasse l'objet d'un chapitre car il s'agit plutôt d'un domaine d'études. Par ailleurs, c'est à cause de cette difficulté de cerner exactement le domaine qu'elle touche que le lecteur trouvera le théorème fondamental de l'analyse dans le chapitre de Calcul Différentiel Et Intégral plutôt qu'ici...

Pourquoi ceci dit utilisons-nous le terme "analyse" dans le cas particulier des fonctions. La raison tient historiquement à l'étude des divers phénomènes de la nature et la résolution de divers problèmes techniques et par conséquent de mathématiques, qui nous amènent souvent à considérer la variation d'une grandeur en corrélation avec la variation d'une autre ou de plusieurs autres grandeurs. Pour étudier ces variations, de nombreux outils sont à la disposition de tout à chacun :

- L'ingénieur a par exemple fréquemment recours à la représentation graphique (système d'axes cartésien, polaire, logarithmique... concepts sur lesquels nous reviendrons plus en détail) pour déterminer la relation (ou "loi") mathématique qui lie les différentes grandeurs entre elles. Certes, ce genre de méthode est (parfois...) esthétique mais les étudiants savent bien combien il est parfois pénible en laboratoire de devoir porter des points sur une feuille de papier ou à l'ordinateur. C'est malheureusement une étape nécessaire (mais dont il faudrait éviter de faire une utilisation abusive) pour comprendre comment nos prédécesseurs travaillaient et ont obtenu les résultats qui nous aident aujourd'hui dans nos avancées en physique théorique.

- Le mathématicien et le physicien théoricien ont habituellement horreur d'avoir recours aux méthodes papier-crayon-gribouillage. Quoi qu'il en soit, le rôle du mathématicien ou du physicien est de développer de nouvelles théories à l'aide d'axiomes ou de principes mathématiques ce qui ne devrait nécessiter aucunement le recours à la représentation graphique et à l'accès aux mesures expérimentales qui y sont souvent rattachées.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Avant de commencer la lecture de ce qui va suivre, il peut être utile de rappeler au lecteur que la définition du concept de "fonction" (et les propriétés élémentaires y relatives) est donné dans la section de Théorie Des Ensembles à la page 401.

L'analyse fonctionnelle est également fortement liée au calcul vectoriel (et pas seulement...). Ainsi, pour les personnes qui souhaitent approfondir leurs connaissances sur les principes fondamentaux de l'analyse des fonctions, nous recommandons fortement au lecteur de consulter la section Calcul vectoriel à la page 1773.

7.1.1 Représentations

Nous allons voir dans ce qui va suivre, dans un premier temps, comment représenter différentes grandeurs liées de façon tabulaire et graphique (eh oui ! il faut bien car cela aide à comprendre) et ensuite comment analyser mathématiquement les propriétés de ces représentations uniquement à l'aide d'outils mathématiques abstraits.

Définition (#7.1.264) : Une fonction est dite "fonction univalente" ou "fonction unaire" si le nombre de ses arguments (paramètres ou variables) est égal à un. Dans le cas d'une fonction à deux arguments, nous parlons de "fonction bivalente", etc. Formellement une fonction est n-aire si

$$f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \mapsto B \qquad (7.1.1)$$

7.1.1.1 Représentations tabulaires

Parmi les modes de représentations visuelles des fonctions, la plus intuitive et la plus ancienne est celle où nous disposons dans la colonne ou la ligne d'un tableau de façon ordonnée les valeurs de la variable indépendante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les valeurs correspondantes, dites "variables transformées" de la fonction $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans une autre colonne ou ligne alignée :

x	$y = f(x)$
x_1	$y_1 = f(x_1)$
x_2	$y_2 = f(x_2)$
$\ldots$	$\ldots$
x_n	$y_n = f(x_n)$

En cours de traduction de l'anglais

Dans l'expression :

$$y = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (7.1.2)$$

nous disons que les $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les "arguments" de f et une telle table où chaque variable/argument est stockée dans une colonne est appelé un "tableau long format".

Telles sont par exemple, les tables des fonctions trigonométriques, les tables logarithmiques, etc. et au cours de l'étude expérimentale de certains phénomènes des tables qui expriment la dépendance fonctionnelle existant entre des grandeurs physiques mesurées telles que les relevés de la température de l'air enregistrés dans une station météorologique durant une journée.

Bien évidemment, ce concept est généralisable à toute fonction multivalente quel que soit son ensemble de définition.

Cependant, cette méthode est laborieuse et ne permet pas de voir directement le comportement de la fonction et donc une analyse visuelle simple et attractive de ses propriétés qualitatives pour l'être humain (Homo Sapiens). Il a toutefois l'avantage de ne pas nécessiter d'outils spéciaux

ou de mathématiques avancées et est facilement traitable par les ordinateurs[1].

Un autre type de représentation tabulaire sont les "", également appelées "tables pivots" ou "wide format", où nous avons des noms de variables catégorielles/ordinales dans la première colonne ET dans la première ligne :

	Passager express	Passager ordinaire	Total
Arriva Trains Wales	3, 079	830	3, 909
Cross Country	22, 865	63	22, 928
London Midland	14, 487	33, 792	48, 279
Virgin Trains	8, 594		8, 594
Total	49, 025	34, 685	83, 710

Et ici, un autre type de tableau de ce genre, mais avec plusieurs variables catégorielles en colonnes (la même chose peut être faite avec plusieurs variables en lignes) :

	Passager express		Passager ordinaire		Total	
	# Trains	Vitess max	# Trains	Vitess max	# Trains	Vitess max
Arriva Trains Wales	3, 079	90	830	90	3, 909	90
Cross Country	22, 865	125	63	100	22, 928	125
London Midland	14, 487	110	33, 792	100	48, 279	110
Virgin Trains	85, 94	125			8, 594	125
Total	49, 025	125	34, 685	100	83, 710	125

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons trouver des versions plus complexes de l'exemple ci-dessus, comme le tableau croisé multidimensionnel générique avec des sous-totaux visibles à la page **??**.

Lorsque nous disponsons d'un ensemble d'observations répétées de mêmes sujets, issues d'une population donnée, sur un certain temps, nous parlons alors de "table longitudinale". Typiquement (les années sont données en fonction du calendrier holocène) :

	Janvier 12001	Février 12001	Total
Arriva Trains Wales	3, 079	830	3, 909
Cross Country	22, 865	63	22, 928
London Midland	14, 487	33, 792	48, 279
Virgin Trains	8, 594		8, 594
Total	49, 025	34, 685	83, 710

Nous pouvons avoir évidemment aussi des "tableaux croisés longitudinaux", aussi appelés "tableaux croisés longitudinaux" :

[1]Selon l'US Open Data Act. du 1 janvier 12019 (calendrier holocène) : « Un *machine readable data est un format qui peut être facilement traité par un ordinateur sans intervention humaine tout en garantissant qu'aucune signification sémantique ne soit perdue.»*

	Janvier 12001		Février 12001		Total	
	# Trains	Vitesse max.	# Trains	Vitesse max.	# Trains	Vitesse max.
Arriva Trains Wales	3,079	90	830	90	3,909	90
Cross Country	22,865	125	63	100	22,928	125
London Midland	14,487	110	33,792	100	48,279	110
Virgin Trains	8,594	125			8,594	125
Total	49,025	125	34,685	100	83,710	125

Mais tous les tableaux croisés et longitudinaux (ie "formats larges") ci-dessus ne sont pas traitables dans le domaine de la science et de l'ingénierie et ne doivent donc jamais être utilisés pour stocker des données ! ! ! Il est donc courant de dépivoter les colonnes pour obtenir une version normalisée des données (y compris les dates au format ISO 8601 et en supprimant les totaux et les sous-totaux et tout formatage fantaisiste sur les valeurs numériques). Le tableau précédent, par exemple, une fois dépivoté deviendra le tableau au "format long" suivant (c'est-à-dire un "tableau plat") :

Type	Date	# Trains	Vitesse max.
Arriva Trains Wales	12001-01-31	3079	90
Arriva Trains Wales	12001-02-28	830	90
Cross Country	12001-01-31	22865	125
Cross Country	12001-02-28	63	100
London Midland	12001-01-31	14487	110
London Midland	12001-02-28	33792	100
Virgin Trains	12001-01-31	8594	125
Virgin Trains	12001-02-28		

TAB. 7.1 – **Exemple de transformation d'un tableau croisé large en tableau format long (ie tableau plat)**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Même si le tableau ci-dessus est traitable dans le domaine de la Science et de l'Ingénierie (également du Business), il n'est cependant absolument pas optimal d'un point de vue stockage Informatique ! La table ci-dessus devrait dans la pratique être fractionnée dans une "table de faits" dans un "schéma en flocon de neige" (ou "schéma en étoile") n'ayant que des relations avec des tables dites "tables de dimensions". Pour plus d'informations sur ces concepts, consultez [92].

Nous nommons "table disjonctive complète" (TDC), la matrice de taille $n \times p$ définie par (voir exemple juste en dessous) :

$$K_{IJ} = k_{ij} \tag{7.1.3}$$

où :

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ a la modalité } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.1.4}$$

Il s'agit d'un outil fondamental (c'est-à-dire une étape) dans le calcul de l'Analyse des Correspondances Multiples (voir section Méthodes Numériques page ??).

✍**Exemple :**

Voici un exemple de tableau disjonctif complet. À partir d'un tableau de données à deux variables catégorielles, avec respectivement deux et trois modalités, un tableau disjonctif complet est créé contenant cinq variables fictives :

	Q1	Q2
Obs. 1	A	C
Obs. 2	B	D
Obs. 3	B	E
Obs. 4	A	D

Le tableau disjonctif complet K_{IJ} est alors donné par :

	Q1 – A	Q1 – B	Q2 – C	Q2 – D	Q2 – E
Obs. 1	1	0	1	0	0
Obs. 2	0	1	0	1	0
Obs. 3	0	1	0	0	1
Obs. 4	1	0	0	1	0

Maintenant que le lecteur a vu la définition simple et un exemple, plus formellement nous avons si nous supposons que nous avons à notre disposition $m > 2$ variables qualitatives $x^1, \ldots, x^m$ que nous observons sur n individus, alors pour chaque $k \in \{1, \ldots, m\}$, la variable x^k peut prendre c_k des valeurs distinctes notées $1, \ldots, c_k$ et c désigne le nombre total de modes :

$$c = \sum_{k=1}^{m} c_k \tag{7.1.5}$$

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}, x_i^k \in \{1, \ldots, c_k\}$ est la valeur de la variable x^k observée pour le i-ième individu.

Pour chaque mode de chaque variable, nous considérons le vecteur indicateur associé, c'est-à-dire pour chaque $k \in \{1, \ldots, m\}$ et chaque $\ell \in \{1, \ldots, c_k\}$:

$$\mathbb{I}_{m\ell} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{x_1^k = \ell} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{x_n^k = \ell} \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^n \tag{7.1.6}$$

Si nous mettons ces vecteurs dans les colonnes d'une matrice T de taille $n \times c$, nous obtenons le tableau disjonctif complet :

$$K_{IJ} = [\mathbb{I}_{11} \cdots \mathbb{I}_{1c_1} \cdots \mathbb{I}_{21} \cdots \mathbb{I}_{2c_2} \cdots \mathbb{I}_{m1} \cdots \mathbb{I}_{mc_m}] \tag{7.1.7}$$

Nous appelons "tableau de Burt" la matrice de taille $p \times p$ définie par (voir exemple juste en dessous) :

$$B = b_{jj'} \tag{7.1.8}$$

En cours de traduction de l'anglais

où $b_{jj'} = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}k_{ij'}$ (les k_{ij} sont les composantes du tableau disjonctif complet défini juste au-dessus).

Par conséquent, la table de Burt peut également être définie par K_{IJ} :

$$B = \{b_{jj'}\}_{jj'} = K_{IJ}^T K_{IJ} = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}k_{ij'} \quad (7.1.9)$$

✍**Exemple :**

En utilisant l'exemple précédent, nous obtenons alors :

$$B = \{b_{jj'}\}_{jj'} = K_{IJ}^T K_{IJ} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1.10)$$

Il est possible de voir $B = \{b_{jj'}\}_{1 \leqslant j,j' \leqslant p}$ comme une matrice $p \times p$ blocs par :

- Si $p \neq p'$ alors $b_{jj'}$ est la table de contingence relative aux variables x^j et $x^{j'}$.
- Si $j = j'$ alors b_{jj} est une matrice diagonale qui contient les totaux marginaux de la variable x^j notée par $n_1^j, \ldots, n_{c_j}^j$

✍**Exemple :**

Considérons le tableau suivant :

	Genre (G)	Couleur (C)	Âge (A)
1	Femme	Rouge	20
2	Homme	Bleu	25
3	Femme	Vert	30
4	Homme	Rouge	35

Le tableau disjonctif complet correspondant K_{IJ} est donc :

	G.Femme	G.Homme	C.Bleu	C.Rouge	C.Vert	A.20	A.25	A.30	A.35
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	1

et la table de Burt correspondante B :

En cours de traduction de l'anglais

	G.Femme	G.Homme	C.Bleu	C.Rouge	C.Vert	A.20	A.25	A.30	A.35
G.Femme	2	0	0	2	0	1	0	0	1
G.Homme	0	2	1	0	1	0	1	1	0
C.Bleu	0	1	1	0	0	0	1	0	0
C.Rouge	2	0	0	2	0	1	0	0	1
C.Vert	0	1	0	0	1	0	0	1	0
A.20	1	0	0	1	0	1	0	0	0
A.25	0	1	1	0	0	0	1	0	0
A.30	0	1	0	0	1	0	0	1	0
A.35	1	0	0	1	0	0	0	0	1

En cours de traduction de l' anglais

7.1.1.2 Représentations graphiques

Les nombres naturels, relatifs, réels ou purement complexes (voir section Nombres page 213) peuvent tous être représentés le plus simplement du monde par des points sur un axe numérique (ligne droite) infini.

Pour ce faire, nous choisissons sur cet axe :

1. Un point O appelé "origine"
2. Un sens positif, que nous indiquons par une flèche horizontale
3. Une unité de mesure (représentée habituellement par un petit trait vertical : la "graduation")

Tel que :

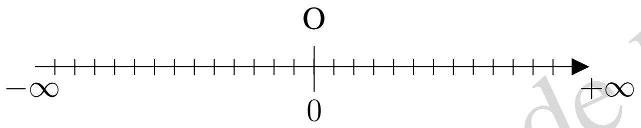


FIG. 7.1 – **Exemple typique de représentation d'un axe infini orienté avec origine**

Le plus souvent nous disposons (par tradition) l'axe horizontalement et choisissons la direction de gauche à droite (du moins quand il n'y a que une seul axe...).

> **Remarque**
>
> Le point (lettre) **O**, représente très fréquemment le nombre zéro en mathématiques mais nous pourrions très bien choisir de mettre l'origine ailleurs. Par exemple, en physique le point **O** est souvent positionné à l'emplacement du barycentre d'un système.

Il est évident que le fait que les ensembles de nombres dont nous avons parlé sont ordonnés implique que tout nombre est représenté par un seul point de l'axe numérique. Ainsi, à deux nombres réels distincts correspondent deux points différents de l'axe numérique.

Ainsi, il existe une correspondance biunivoque entre tous les nombres et tous les points de l'axe numérique (dans le cas des nombres réels ou complexes, il correspond non pas un nombre à chaque graduation mais un nombre à chaque point de l'axe). Ainsi, à chaque nombre correspond un point ou une graduation unique et inversement à chaque point ou graduation correspond un seul nombre dont il est l'image.

En cours de traduction de l'anglais

7.1.1.2.1 Représentations 2D

Il existe outre les représentations unidimensionnelles d'autres de dimensions supérieures (ouf !) comme les "représentations planaires" qui nous permettent de tracer (dessiner) non plus que des simples points sur une droite unidimensionnelle mais des fonctions d'une variable (mai aussi des points !). Voyons de quoi il s'agit et à quoi cela ressemble :

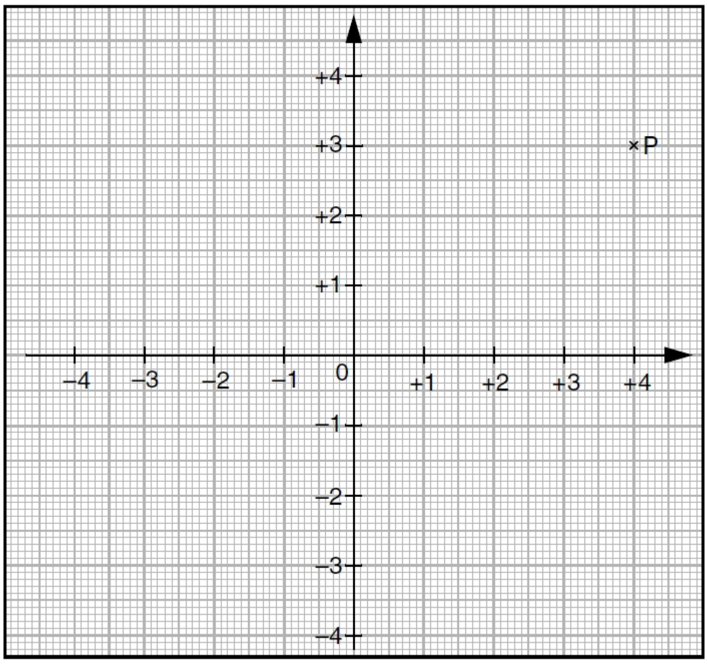


FIG. 7.2 – Position d'un point dans un plan cartésien

En cours de traduction de l'anglais

Dans la figure ci-dessus, nous avons ajouté deux graduations qui nous aident à identifier de manière unique la position du point P donné par $P(x,y)=P(+4,+3)=P(4,3)$. Nous parlons alors de "coordonnées cartésiennes d'un point".

Dans l'algèbre à une seule variable (ie univarié), les fonctions que nous rencontrons sont des fonctions d'une variable (généralement x ou t) qui varie sur un sous-ensemble de la droite des nombres réels (que nous désignons par $\mathbb{R}$). Pour une telle fonction, disons, $y=f(x)$, le graphique de la fonction f est constitué des points :

$$(x,y)=(x,f(x)) \tag{7.1.11}$$

Ces points se trouvent dans le plan euclidien, qui, dans le système de coordonnées cartésiennes ou rectangulaires, se compose de toutes les paires ordonnées de nombres réels (a,b). Nous utilisons le mot "euclidien" pour désigner un système dans lequel toutes les règles usuelles de la géométrie euclidienne s'appliquent (voir section Géométrie Euclidienne page 2610). Nous notons le plan euclidien par $\mathbb{R}^2$ où l'exposant "2" représente le nombre de dimensions du plan.

Nous pouvons à chaque valeur d'une variable x reportée sur un axe horizontal, appelé "axe des abscisses" ou "axe des x", faire correspondre une valeur y au travers d'une fonction f :

$$y=f(x) \tag{7.1.12}$$

reportée sur un axe vertical, appelé communément "axe des ordonnées" ou "axe des y" qui passe par le croisement défini par l'origine O tel que (exemple arbitraire) :

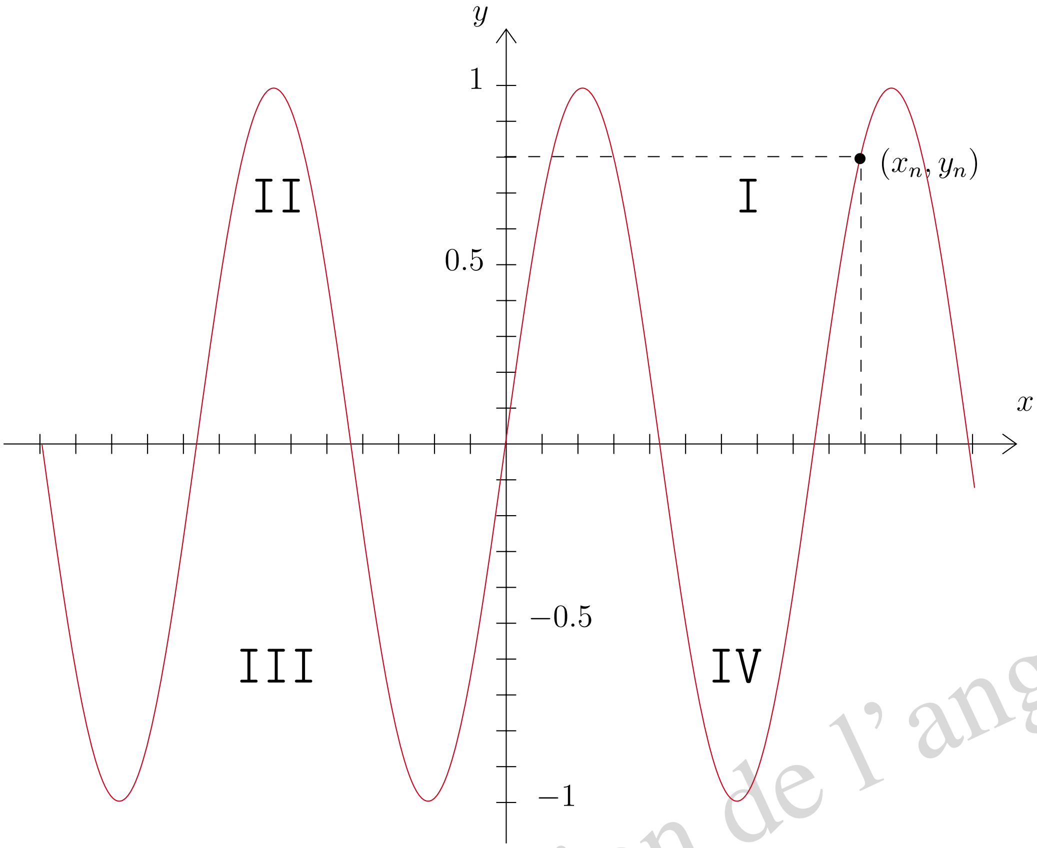


FIG. 7.3 – Exemple type d'une représentation plane avec axes orthogonaux, origine et quadrants

En cours de traduction de l'anglais

L'ensemble des points du plan (noté sous les variantes XOY, XY ou encore $x\text{O}y$, $\text{O}xy$, xy) dont les "abscisses" représentent par tradition les valeurs x (axe horizontal par tradition) de la variable indépendante et les "ordonnées" y (axe vertical par tradition) les valeurs correspondantes de la fonction, est appelé "graphique plan" de cette fonction. S'il n'y a pas de confusion possible, nous dirons simplement "graphique".

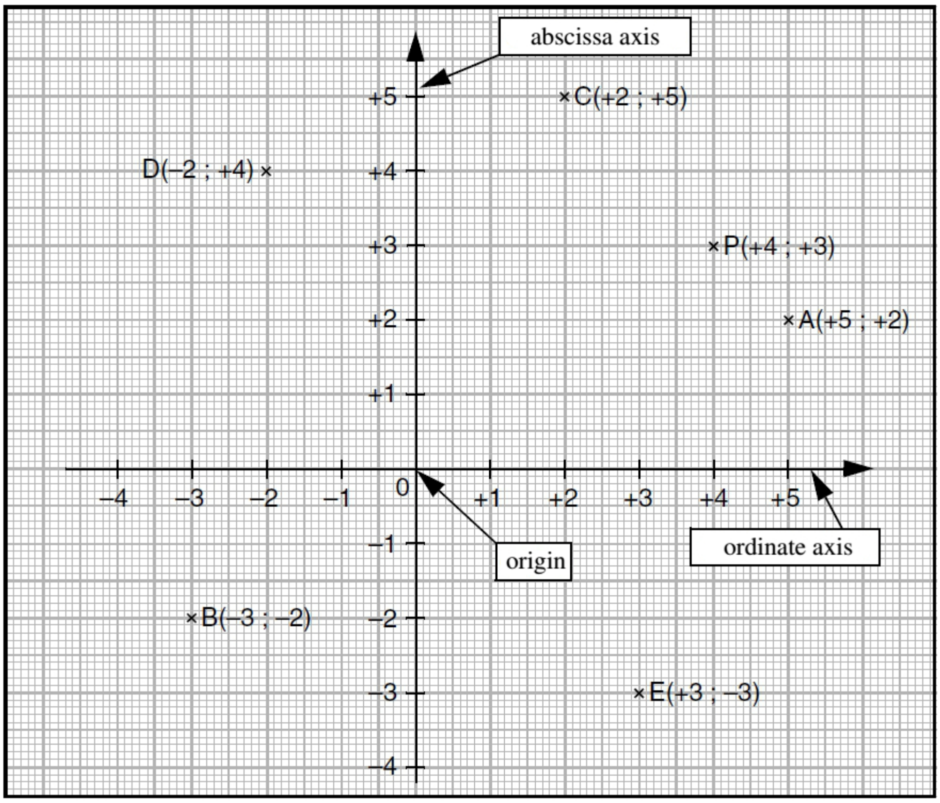


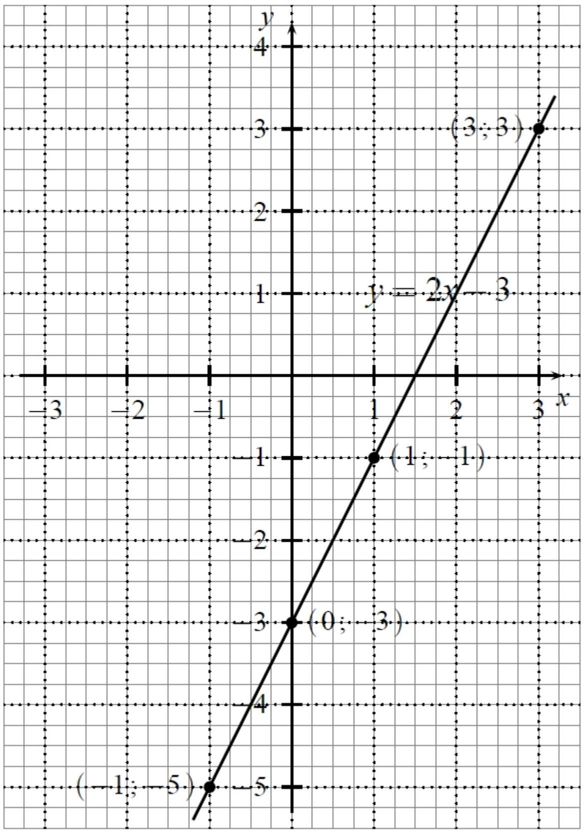
FIG. 7.4 – **Vocabulaire des graphiques plans**

Un exemple détaillé intéressant pour les collégiens qui peut aider à la compréhenstion est la représentation planaire de l'équation de ligne suivante :

$$y = f(x) = 2x - 3 \tag{7.1.13}$$

Ce qui donne dans l'étendue $x \in [-3.3, +3.3]$ le graphique planaire suivant :

En cours de traduction de l'anglais



avec sa représentation tabulaire équivalente pour certains points choisis arbitrairement :

x	$2x-3$	**Point** $(x,2x-3)$
-1	$2\cdot(-1)-3=-5$	$(-1,-5)$
0	$2\cdot(0)-3=-3$	$(-1,-5)$
$+1$	$2\cdot(+1)-3=-1$	$(-1,-5)$
$+3$	$2\cdot(+3)-3=+3$	$(-1,-5)$

TAB. 7.2 – **Valeurs et transformation des variables correspondantes**

En cours de traduction de l'anglais

Dans le cas d'une représentation par un système de coordonnées rectangulaires (cartésien, polaire ou logarithmique) comme la figure ci-dessus, nous pouvons observer que l'ensemble du plan des coordonnées est séparé en quatre surfaces que nous avons pour habitude d'appeler "quadrants" comme déjà mentionné précédemment.

Remarque

Lorsque nous souhaitons mettre en évidence un point particulier de la fonction représentée, nous y dessinons la plupart du temps un petit rond tel que visible dans la figure antéprécédente pour le point de coordonnées (x_n, y_n) ou par une petite croix.

Un autre cas classique de représentation graphique plane connu par un grand nombre d'étudiants est le tracé des polynômes (voir section Calcul Algébrique page 1351 à coefficients réels ou les fonctions trigonométriques (voir section Trigonométrie page 2486).

Effectivement, pour résoudre les équations polynômiales du second degré voir section Calcul Algébrique page 1363), il est fréquent dans les petites classes que le professeur demande en plus à ses élèves de donner une expression algébrique des racines de :

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{7.1.14}$$

données par, rappelons-le (voir section Calcul Algébrique 1364 pour la preuve) :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7.1.15}$$

une résolution graphique où les deux racines (dans le cas où il y en a deux distinctes réelles) sont données par l'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses (bien évidemment, si l'équation n'a pas de solutions, il n'y a pas d'intersections...) :

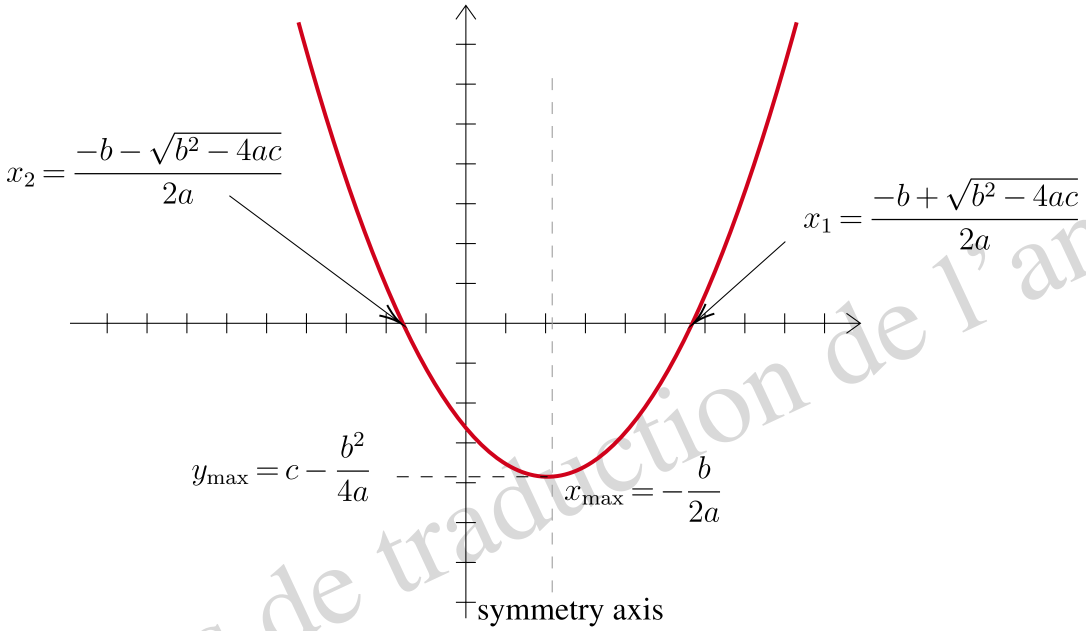


FIG. 7.5 – Représentation des racines sur un graphe planaire

En cours de traduction de l'anglais

La représentation graphique étant généralisable aux équations polynomiales du 3e, 4e et 5e degré (nous démontrerons bien plus loin, à l'aide de la théorie de Galois qu'il n'est pas possible d'obtenir une expression algébrique générale des racines d'une équation polynomiale du 5e degré et supérieur).

Il existe un autre exemple bien connu et intéressant de graphe planaire spécial car la plupart des jeunes pensent qu'après le gymnase/lycée ils ne feront plus jamais de maths mais en Suisse beaucoup de personnes en emploi sont après l'école confrontés à calculer dans des tableurs (comme Microsoft Excel) ce que nous appellons le "salaire coordonné" (SC) qui est une "fonction de type escalier" définie en 12013 (calendrier holocène) par le gouvernement suisse comme :

$$\text{SC} := \begin{cases} 0 & S < \frac{3}{4}R \\ \frac{R}{8} & \frac{3}{4}R \leq S < R \\ S - \frac{7}{8}R & R < S < 3R \\ \frac{17}{8}R & 3R \leq S \end{cases} \tag{7.1.16}$$

où R est une valeur minimale définie également par le gouvernement suisse comme étant égale à $25.800.-$ en 12013 (calendrier holocène) et le salaire est désigné par la lettre S.

Lorsque nous traçons une telle fonction en escalier avec par exemple Maple 4.00b nous obtenons :

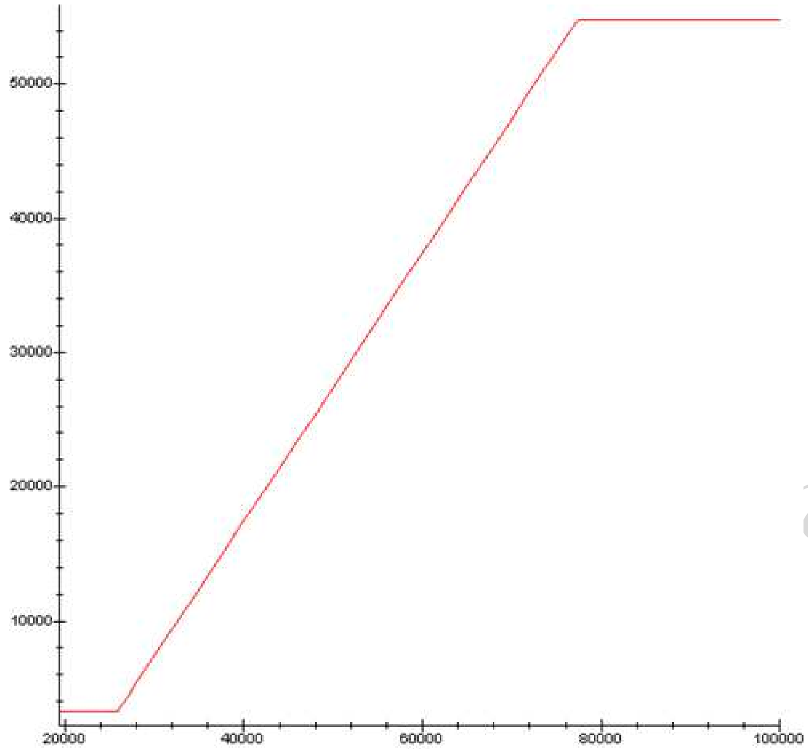


FIG. 7.6 – **Exemple de fonction pas à pas pour le salaire coordonné suisses dans Maple 4.00b**

En cours de traduction anglais

Et donc il est évident grâce à cette représentation graphique que la définition précédente peut être simplifiée comme suit :

$$\text{SC} := \begin{cases} 0 & S < \frac{3}{4}R \\ \min\left\{\max\left[\frac{R}{8}, S - \frac{7}{8}R\right], \frac{17}{8}R\right\} & S \geq \frac{3}{4}R \end{cases} \tag{7.1.17}$$

C'est beaucoup plus facile à écrire dans n'importe quel tableur ou aussi dans Maple 4.00b :

```
>R:=258000;
>plot(min(max(R/8,S-7/8*R),17/8*R,S=3/4*R..100000);
```

De même, les graphiques sont des outils qualitatifs puissants dans le domaine des statistiques (voir section Statistiques page 535) mais aussi du data mining (voir section Méthode Numériques page ??) comme point de départ de l'analyse de données (histogrammes, fromages, boîtes à moustaches, radars, nuages de points, etc.). Les hypothèses et idées qui sont générées par l'analyse graphique peuvent être investiguées avec des outils statistiques avancés (pour une petite centaine d'exemples voir les livres compagnons sur les logiciels R ou MATLAB™).

Voici par exemple un graphique (histogramme) pris de la section de Génie Industriel très courant dans le domaine des statistiques et de la gestion de projets dans l'industrie mondiale :

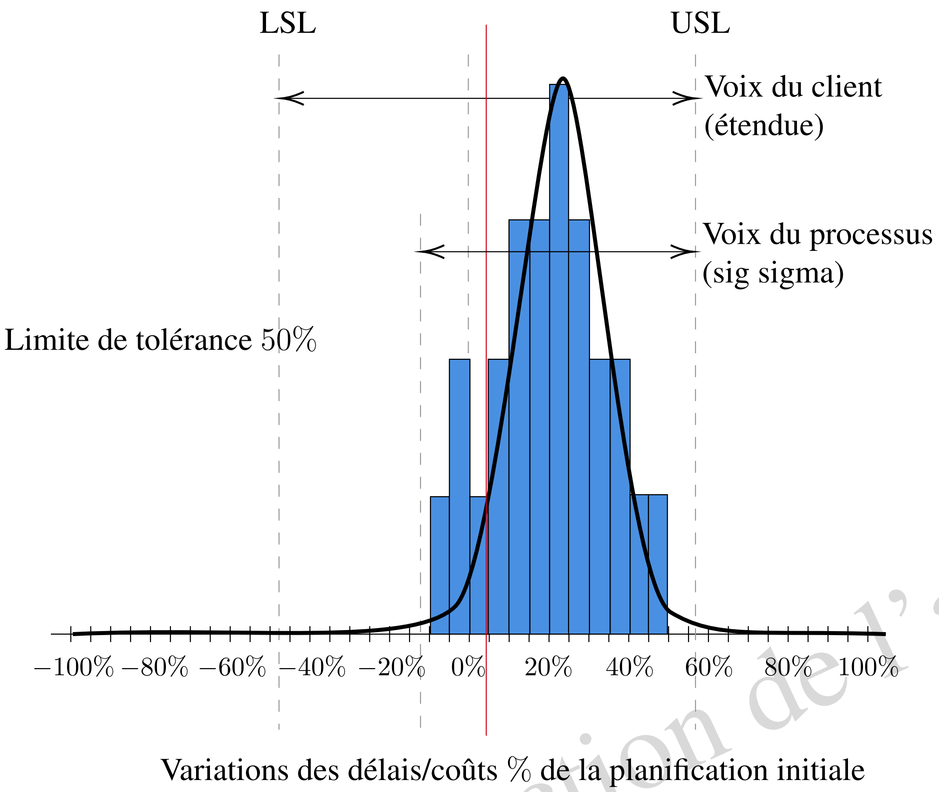


FIG. 7.7 – Exemple d'histogramme typique dans les entreprises d'ingénierie (Six Sigma)

Les histogrammes permettent d'observer les distributions et de décider de manière qualitative si elle s'ajuste à un modèle théorique particulier.

Les graphiques peuvent permettre également d'observer les changements au cours du temps de (séries temporelles, cartes de contrôle, analyses de résidus, etc.) :

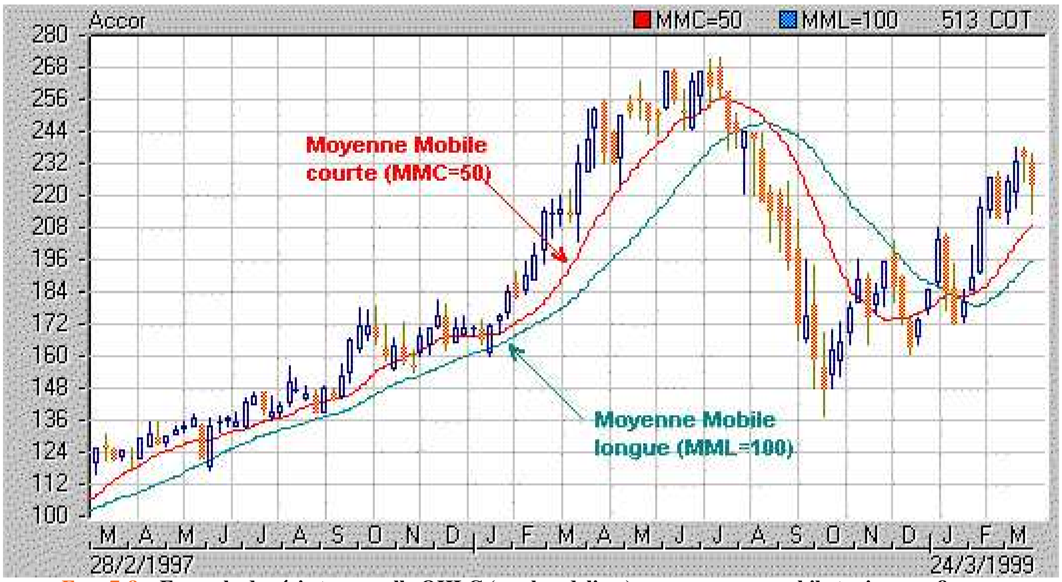
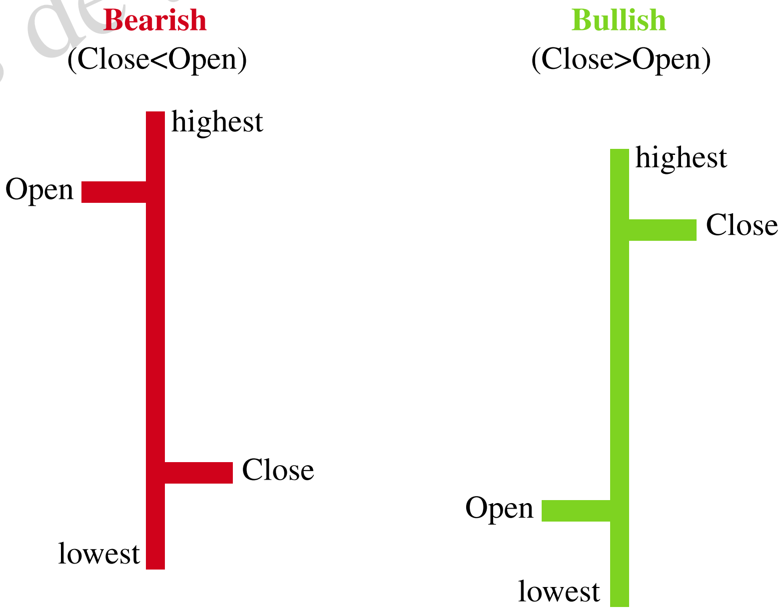


FIG. 7.8 – Exemple de série temporelle OHLC (en chandeliers) avec moyenne mobile typique en finance

En cours de traduction de l' anglais

ou un autre type de graph OHLC (Open-High-Low-Close) en trading :

Il existe différentes règles pour les couleurs d'un graphique OHLC ! Nous pouvons d'abord définir une couleur selon si le cours de clôture est inférieur au cours d'ouverture du même symbole/chandelier (le cours d'ouverture est toujours à gauche et le cours de clôture toujours à droite) :



Une question courante liée à ce type de graphique est : *Pourquoi un chandelier ne s'ouvre-t-il pas lorsqu'un autre se ferme ?*

Ceci est dû au fait que le prix de clôture est créé par le dernier tick de l'horloge pour arriver avant

En cours de traduction de l'anglais

la fin de la période du chandelier et cela peut être plusieurs secondes avant la fin de la période de ce même chandelier. Le prochain cours d'ouverture des bougies est généré par le premier tick de l'horloge à arriver après le début de sa période de temps, ce tick reflétera un changement de prix depuis le tick qui a généré le prix de clôture du dernier chandelier, ce premier tick du nouveau chandelier peut aussi être plusieurs secondes après le début de la période de ce nouveau chandelier.

Et encore à bien d'autres graphiques/représentation 2D... que nous verrons tout au long des pages de ce livre.

7.1.1.2.2 Représentations 3D

Bien évidemment, dans le cas d'une fonction trivalente (tridimensionnelle), c'est-à-dire dont un paramètre dépend de deux autres, le principe reste le même à la différence que le nombre de quadrants double.

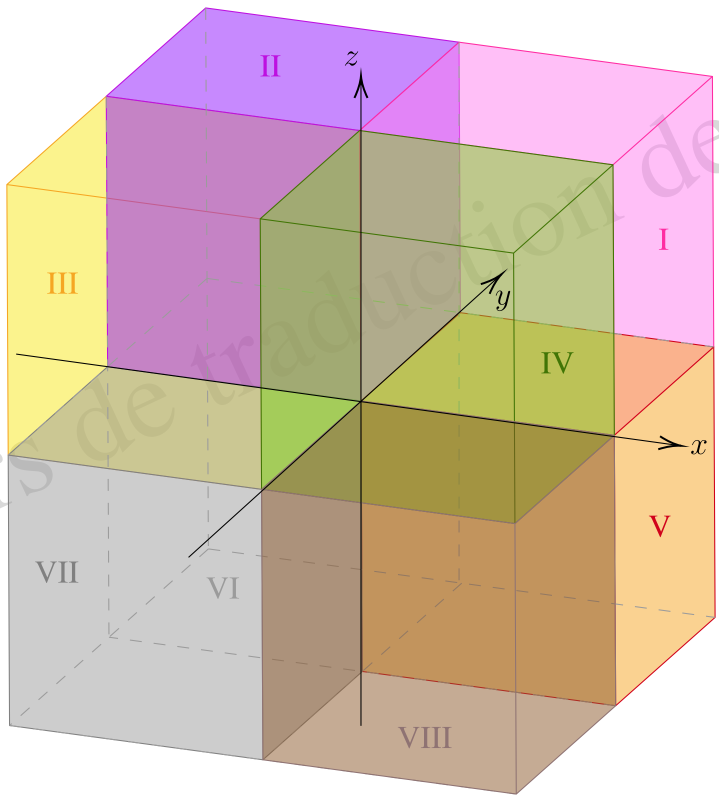


FIG. 7.9 – **Quadrants dans un système orthogonal 3D (source : Wikipédia)**

En cours de traduction de l'anglais

Cette méthode de représentation 3D et d'analyse d'une fonction trivalente était longue à mettre en place il y a une dizaine d'années mais avec l'aide des ordinateurs au début du 121ème siècle (calendrier holocène) ce problème (de temps) a été assez bien résolu...

Dans l'analyse fonctionnelle 3D, nous traiterons des fonctions de deux ou variables (généralement x, y, z, respectivement). Le graphe de la flèche de coordonnées $(x,y,z)=(x,y,f(x,y))$, appartient à l'espace euclidien. Puisque l'espace euclidien peut être tridimensionnel (et plus ou moins bien sûr !), nous le dénotons par $\mathbb{R}^3$.

L'espace euclidien a trois axes de coordonnées mutuellement perpendiculaires (x, y et z) et trois plans de coordonnées mutuellement perpendiculaires : le plan xy, le plan yz et le plan xz :

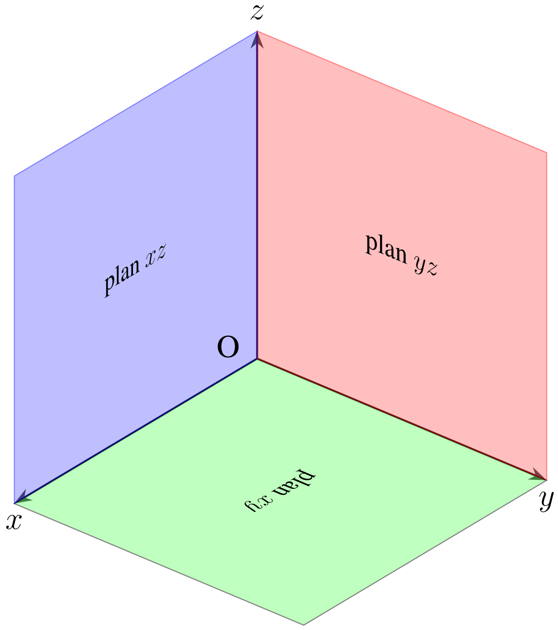


FIG. 7.10 – **Plans mutuellement perpendiculaires dans $\mathbb{R}^3$**

En cours de traduction de l'anglais

Le système de coordonnées illustré ci-dessus est connu comme système de coordonnées droitier, car il est possible, à l'aide de la main droite, de pointer l'index dans le sens positif de l'axe x, le majeur dans le sens positif de l'axe y et le pouce dans le sens positif de l'axe z, comme illustré ci-dessous :

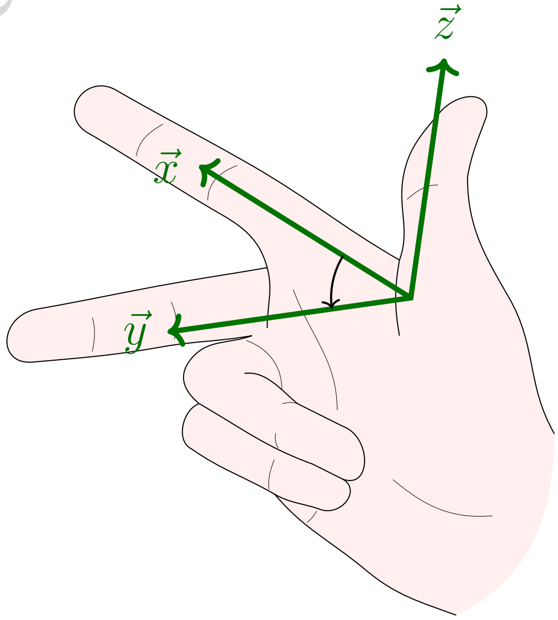


FIG. 7.11 – **Système de coordonnées droitier (author : Izaak Neutelings)**

Ce que nous allons représenter maintenant plus bas (exemple particulier), les mathématiciens puristes le dénoteraient ainsi (c'est bien d'avoir vu au moins une fois cette notation comme nous

pouvons le rencontrer dans d'autres livres) :

$$
\begin{aligned}
& f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\
& z = f(x,y) = \frac{12x}{1+x^2+y^2} \\
& (x,y) \in [-10,+10] \times [-5,+5]
\end{aligned}
\tag{7.1.18}
$$

et voyons ce que cela donne donc avec Maple 4.00b :

```
>restart:
>with(plots):
>f:=(x,y)->12*x/(1+x^ 2+y^ 2);
>xrange:=-10..10;yrange:=-5..5;
>plot3d(f,xrange,yrange);
```

Ce qui sort le graphique suivant :

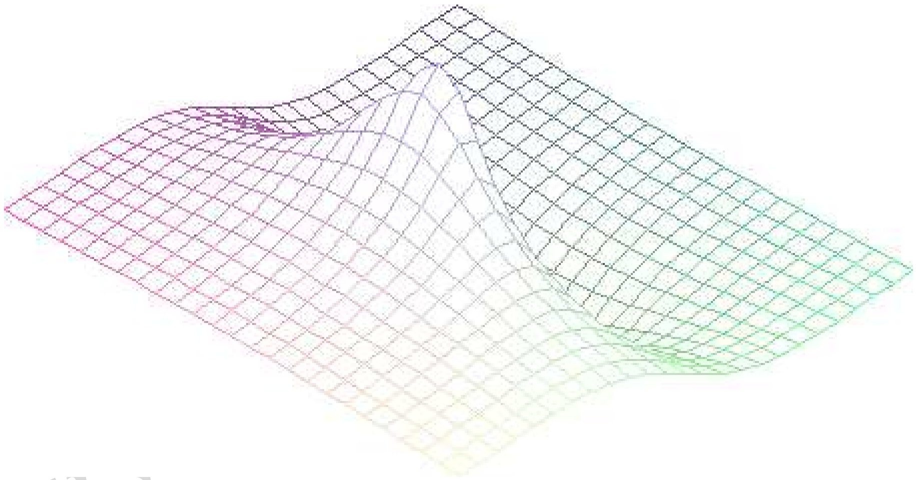


FIG. 7.12 – Exemple de représentation filiaire d'une fonction 3D dams Maple 4.00b

En cours anglais

Améliorons le visuel en ajoutant une couleur d'interpolation d'ombrage avec des couleurs chaudes aux positions hautes et des couleurs froides aux positions basses :

```
>plot3d(f,xrange,yrange, style=patchnogrid, grid=[80,50], shading=ZHUE,
axes=FRAME, tickmarks=[3,3,3], labels=[‘x‘,‘y‘,‘f(x,y)‘],
labelfont=[TIMES,BOLD,12], title=‘Graphique rempli‘,
titlefont=[TIMES,BOLD,12], scaling=unconstrained, orientation=[-107,68]);
```

Ce qui sort le graphique suivant :

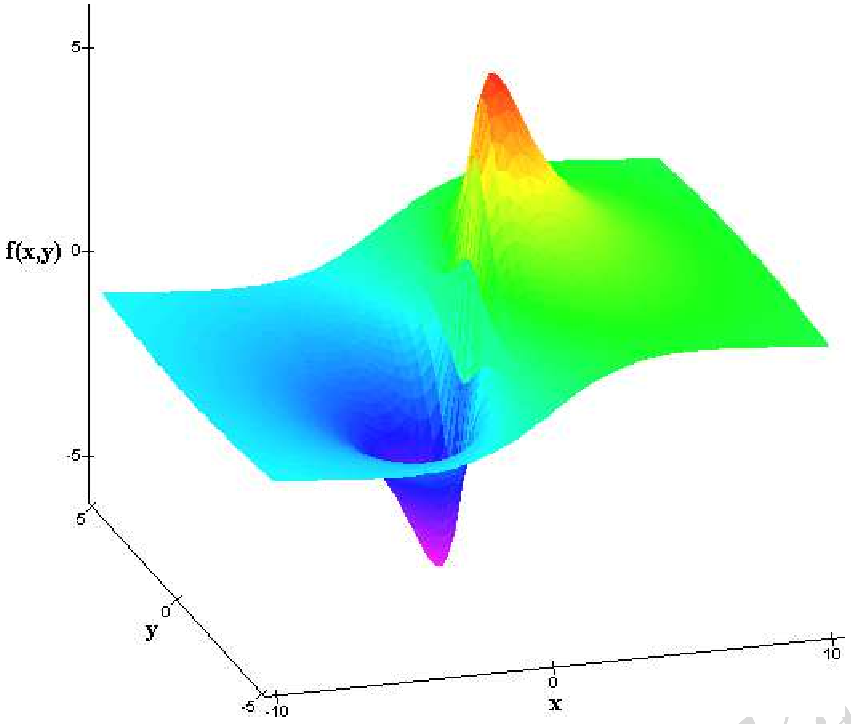


FIG. 7.13 – **Représentation coloriée (gradients) d'une fonction dans Maple 4.00**

En cours de traduction de l'anglais

Traçons maintenant les "lignes de contour", également appellées "isolignes" (ou "isoquant en économétrie), qui représente des lignes de même hauteur sur la surface de la fonction[2] (voir la section Géométrie Différentielle page 2829 pour une définition rigoureuse) :

```
>plot3d(f,xrange,yrange,style=patchcontour);
```

Ce qui donne :

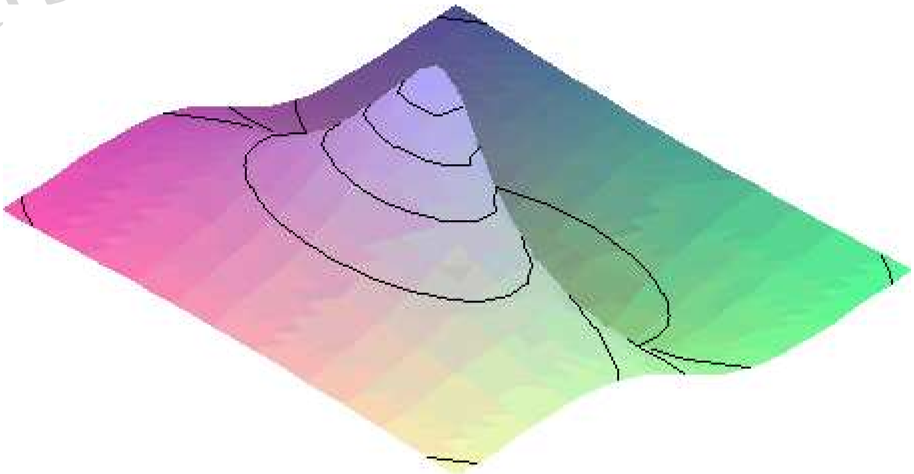


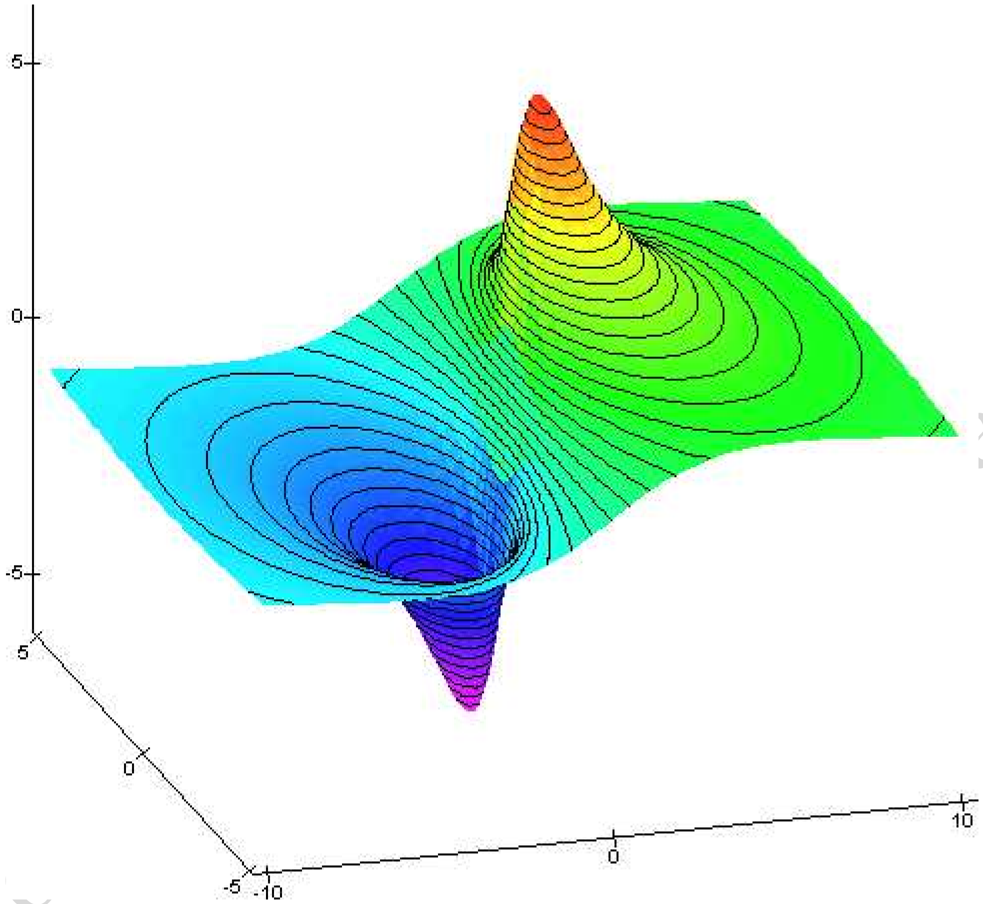
FIG. 7.14 – **Représentation des courbes de niveau (isoclines) d'une fonction avec Maple 4.00b**

[2]C'est une coupe transversale du graphe tridimensionnel de la fonction $f(x, y)$ parallèle au plan x, y. En cartographie, une ligne de contour (souvent simplement appelée "courbe de niveau") relie des points d'égale élévation (hauteur) au-dessus d'un niveau donné, tel que le niveau moyen de la mer. Une carte à courbe de niveàux est une carte illustrée par des lignes de niveaux, par exemple une carte topographique qui montre ainsi les vallées et les collines et la raideur des pentes. L'intervalle de contour d'une carte de contour est la différence d'élévation entre les courbes de niveau successives.

Ce n'est pas très beau donc améliorons cela :

```
>plot3d(f,xrange,yrange,style=patchcontour,contours=[seq(-7+k/4,k=0..60)],
grid=[80,50],shading=ZHUE,axes=FRAME, tickmarks=[3,3,3],
scaling=unconstrained,orientation=[-107,68]);
```

Cela donnera :



En c... anglais

FIG. 7.15 – Représentation des gradients et isoclines d'une fonction avec Maple 4.00b

Avec une petite rotation pour voir du dessus :

```
>plot3d(f,xrange,yrange, style=patchcontour, contours=[seq(-7+k/4,k=0..60)],
grid=[80,50], shading=ZHUE, axes=FRAME, tickmarks=[3,3,3],
scaling=unconstrained, orientation=[-90,0]);
```

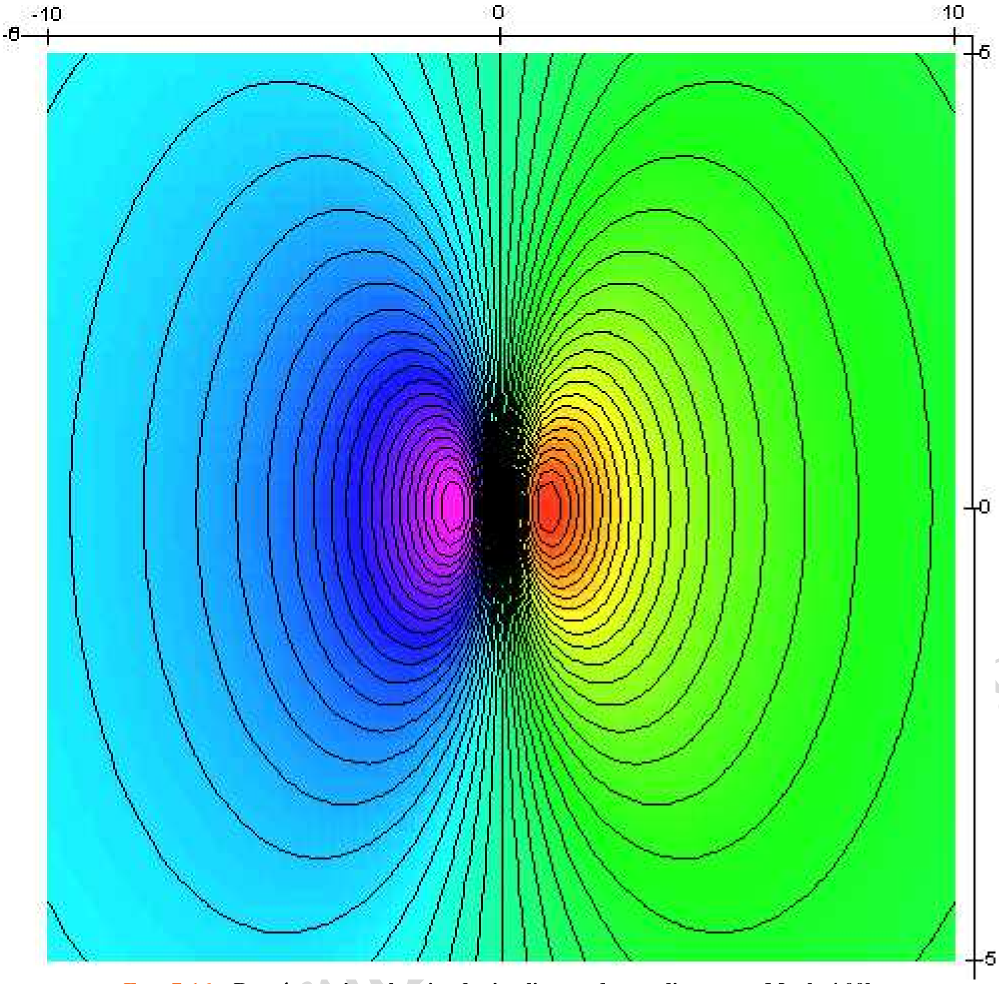


FIG. 7.16 – **Représentation planaire des isoclines et des gradients avec Maple 4.00b**

Et en coupe (vue de côte) :

```
>plot(f(x,2),x=xrange);
```

En cours de traduction en anglais

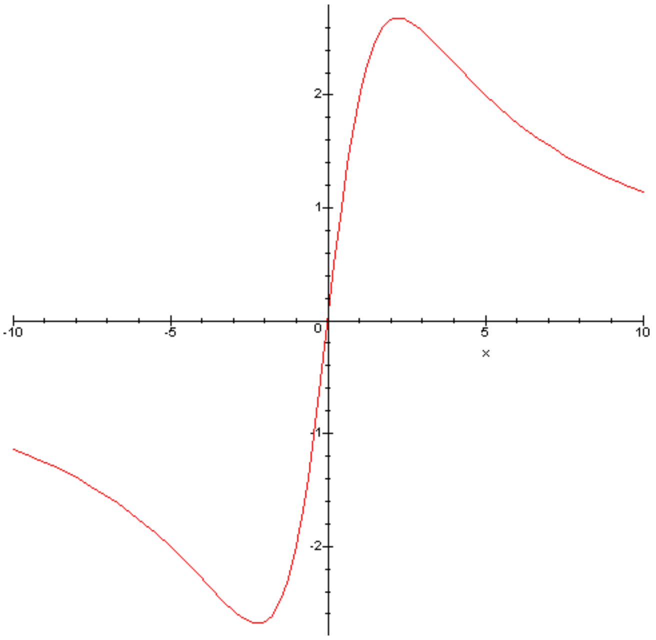


FIG. 7.17 – **Représentation en coupe de la fonction 3D avec Maple 4.00b**

En cours de traduction de l'anglais

Ou avec des coupes multiples :

```
>display([seq(plot(f(x,y),x=xrange),y=yrange)]);
```

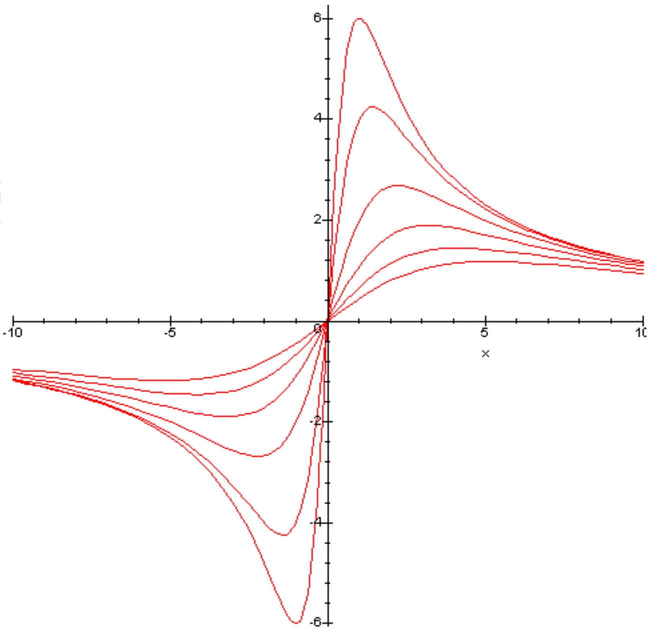


FIG. 7.18 – **Représentation de coupes multiples de la fonction 3D avec Maple 4.00b**

Le lecteur pourra aussi animer le précédent graphique avec la commande suivante :

```
>display([seq(display([plot(f(x,k/5),x=xrange),
textplot([6,5,cat('y=',convert(evalf(k/5,2),string))],font=[TIMES,BOLD,16])])
,k=-25..25)],insequence=true, title='Animation',titlefont=[TIMES,BOLD,18]);
```

C'est tout pour ce petit exemple typique et simple de manipulations standards d'un ingénieur embauché dans une entreprise et utilisant des graphiques (en pratique il utilisera plutôt MATLAB™ à la place de Maple mais le lecteur pourra se référer au livre compagnon gratuit sur MATLAB™ qui a quelques centaines de pages sur les graphiques).

7.1.1.2.3 Représentation Vectorielles 2D

Il est aussi fréquemment fait usage des représentations graphiques dans le cadre de la géométrie analytique pour simplifier les analyses ou faire des démonstrations de théorèmes connus sous forme visuelle (il faut cependant ne pas en abuser !).

Ainsi, nous pouvons introduire par exemple le concept de "norme" (voir section Calcul Vectoriel page 1796) de manière simpliste en représentant graphiquement la distance entre deux points (en 2D ou en 3D) et en appliquant le théorème de Pythagore (voir section Géométrie Euclidienne page 2590) qui sera supposé connu.

L'idée principale d'une représentation vectorielle plane dans les laboratoires de physique et d'ingénierie est qu'un point P_1 de coordonnées (x_1, y_1) qui a des propriétés physiques (typiquement une vitesse) sera après un temps donné au point P_2 de coordonnées (x_2, y_2) supposées être toujours dans le même plan. Ainsi, la droite entre P_1 et P_2 est une visualisation de "l'intensité" de la vitesse (et implicitement de la force). En faisant cela pour de nombreux points, nous obtenons une représentation planaire d'un champ vectoriel planaire (pour plus d'exemples, voir le livre compagnon sur MATLAB™) :

En cours de traduction de l'anglais

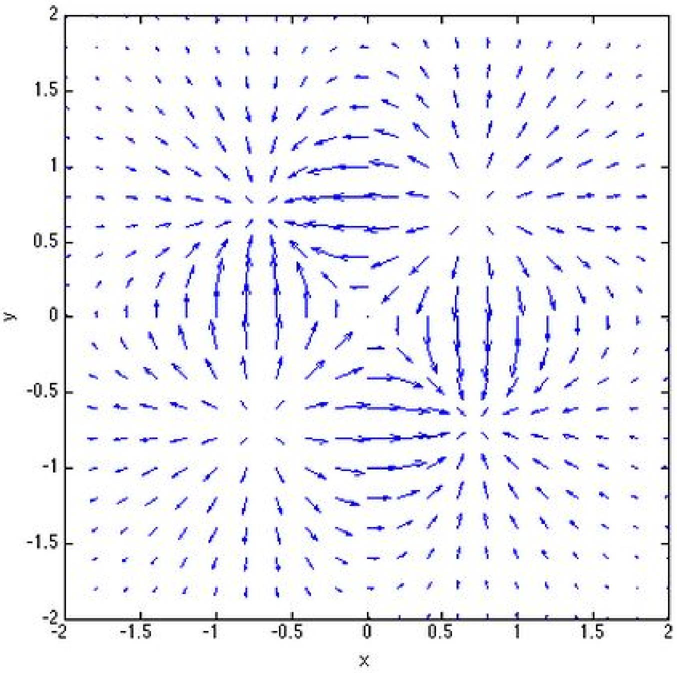


FIG. 7.19 – Champ vectoriel planaire typique avec MATLAB™

Maintenant représentons trois points P_1, P_2, P_3 sur un graphique planaire dans lequel a été défini un repère tel que présenté ci-dessous :

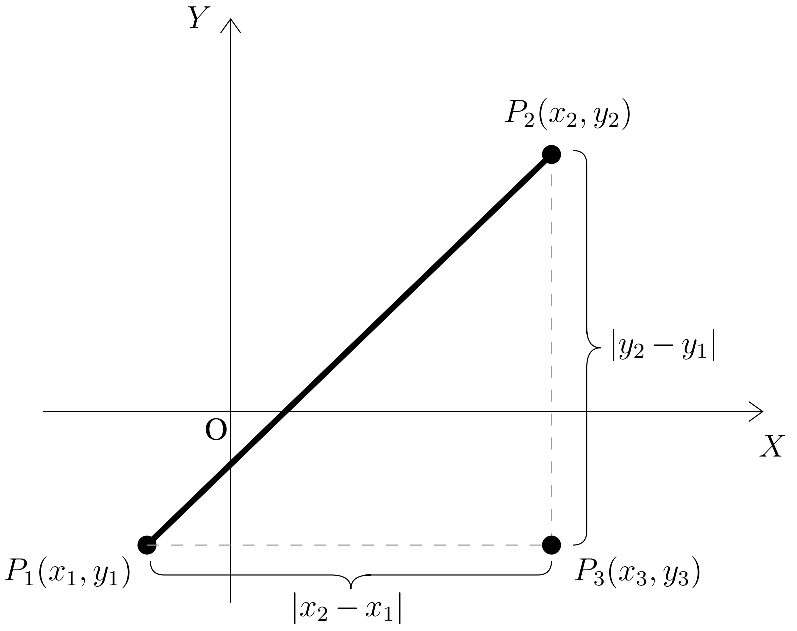


FIG. 7.20 – **Mise en situation de 3 points dans un plan**

Mouvons pouvons considérer le segment $\overline{P_1P_2}$ comme un vecteur mais non translaté sur l'origine O du référentiel.

Si $x_1 \neq x_2$ et $y_1 \neq y_2$ (comme sur la figure ci-dessus), les points P_1, P_2, P_3 sont les sommets d'un triangle rectangle. Par application du théorème de Pythagore (voir section Géométrie Euclidienne page 2590) nous pouvons aisément calculer la distance métrique d entre les points P_1 et P_2 comme étant égale à :

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2 \tag{7.1.19}$$

Sur la figure, nous voyons que :

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{et} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1| \tag{7.1.20}$$

Étant donné que $\forall x \in \mathbb{R}\ |x|^2 = x^2$, nous pouvons écrire :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{[d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{7.1.21}$$

Si $x_1 = y_1 = 0$, nous nous retrouvons avec une relation appelée "norme, "module" ou encore "distance" que nous avions déjà définie dans le cadre de notre étude du Calcul Vectoriel quand l'origine du vecteur est translatée sur l'origine du référentiel (voir section correspondante à la page 1796) :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \|\vec{v}\| \tag{7.1.22}$$

Théorème 7.1. Bien évidemment, si nous considérons deux points $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, nous pouvons déterminer si un troisième point est sur la médiatrice (voir section Géométrie Euclidienne page 2578) des deux premiers et qu'il suffit pour cela que bien évidemment il suffit que (par définition même de la médiatrice !) :

$$d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3) \tag{7.1.23}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Nous avons hésité à mettre cette démonstration dans la section de Géométrie Analytique mais à la fin nous avons décidé que c'était un bel exemple montrant comment la représentation visuelle peut aider les lecteurs à mieux comprendre certains sujets.

Démonstration 7.1.1. Comme $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sont connus, nous pouvons facilement exprimer une "expression analytique" d'une propriété de la médiatrice qui est que pour chaque point se trouvant sur cette dernière, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\\
&(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2\\
&x_1^2-2x_1x_3+\cancel{x_3^2}+y_1^2-2y_1y_3+\cancel{y_3^2}=x_2^2-2x_2x_3^2+\cancel{x_3^2}+y_2^2-2y_2y_3+\cancel{y_3^2}\\
&2y_2y_3-2y_1y_3=x_2^2-2x_2x_3+y_2^2-y_1^2+2x_1x_3-x_1^2\\
&y_32(y_2-y_1)=2(x_1-x_2)x_3+(x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2)\\
&y_3=\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}x_3+\frac{x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2}{2(y_2-y_1)}=ax_3+b=f(x_3)
\end{aligned} \tag{7.1.24}$$

où a, b sont des constantes et où tout point qui satisfait cette relation, qui est en l'occurrence l'équation d'une droite, se trouve sur la médiatrice.

■ Q.E.D.

Par ailleurs, il est aisé de visualiser que le point milieu du segment de droite qui coincide avec la médiatre est donné par :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \tag{7.1.25}$$

Donc nous voyons qu'avec une simple représentation graphique, nous pouvons obtenir des résultats qui sont parfois (...) plus évidents pour les étudiants.

Profitons de cet exemple pour définir quelques concepts sur lesquels nous reviendrons et faire quelques rappels.

Définition (#7.1.265) : Toute fonction de la forme d'un polynôme voir section Calcul Algébrique page 1351) de degré 1 à coefficients réels constants :

$$y=f(x)=ax+b \tag{7.1.26}$$

est l'expression analytique de ce que nous appelons une "droite" ou "équation d'une droite" de "pente" a et "d'ordonnée à l'origine" b (quand $x=0$).

Bien évidemment, si :

$$y=f(x)=b \tag{7.1.27}$$

la droite est horizontale si nous la représentons graphiquement puisque y est constant pour tout x et vaut alors b. Inversement, si :

$$x=f(y)=a \tag{7.1.28}$$

la droite sera verticale dans le référentiel $x\text{O}y$.

En cours de traduction de l'anglais

7.1.1.2.4 Propriétés des représentations visuelles

Selon le type de graphique que nous visualisons (en particulier les graphiques plans) il est possible d'extraire certaines propriétés de base. Voyons les plus importantes à connaître pour les graphiques plans d'une fonction à une variable :

$$y = f(x) \tag{7.1.29}$$

P1. Le graphique d'une fonction est "symétrique par rapport à l'axe des ordonnées" si le changement de x en $-x$ ne modifie pas la valeur y de l'équation tel que :

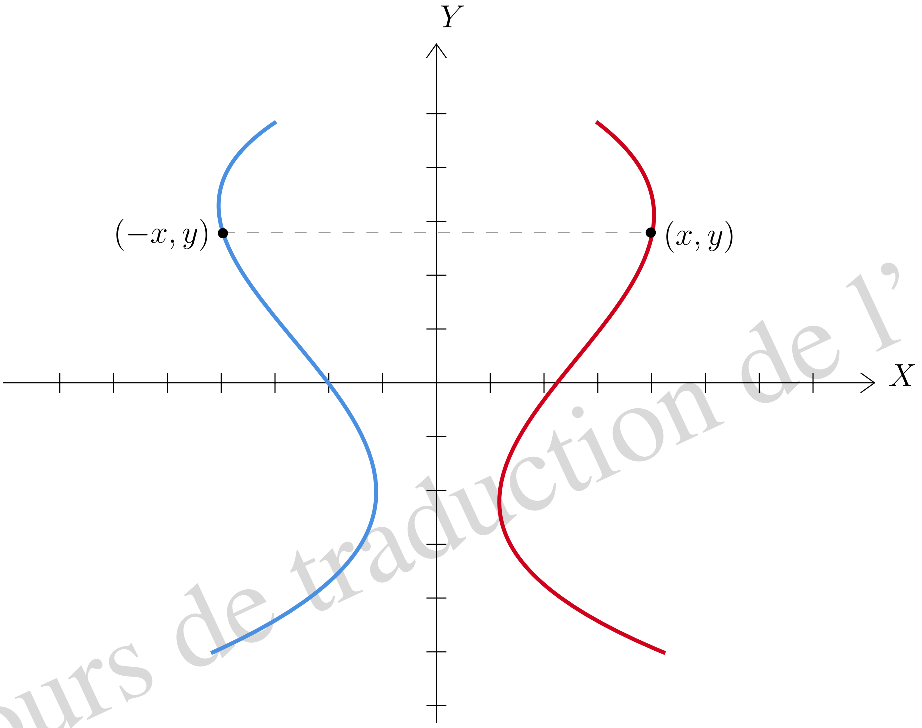


FIG. 7.21 – Exemple de symétrie par l'axe des ordonnées d'une fonction

En cours de traduction de l'anglais

P2. Le graphique d'une fonction est "symétrique par rapport à l'axe des abscisses" si le changement de y en $-y$ ne modifie pas la valeur de l'équation en x tel que :

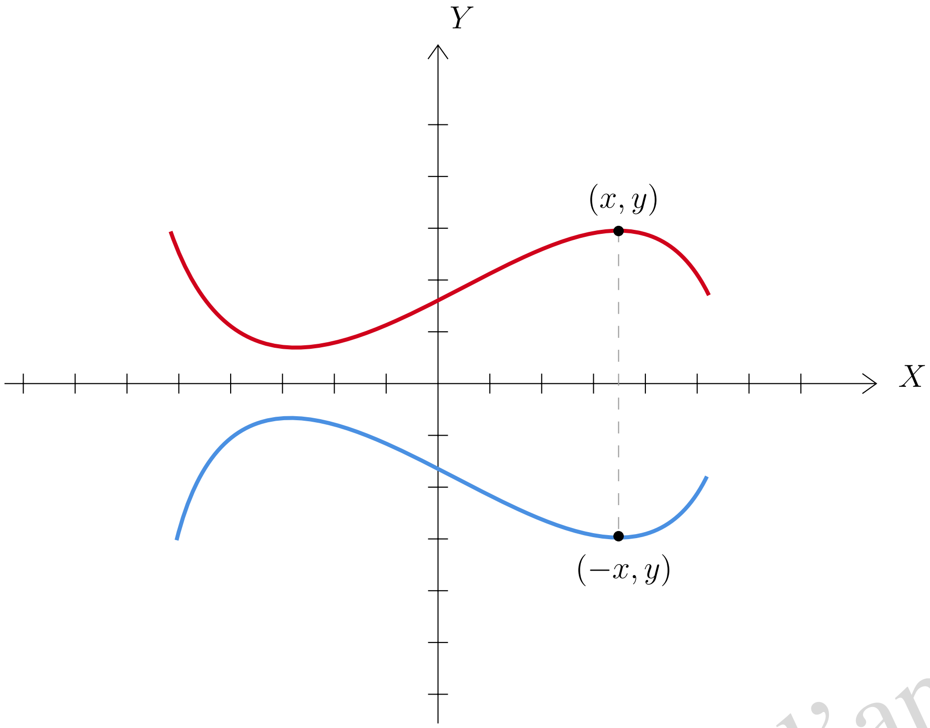


FIG. 7.22 – **Exemple de symétrie par l'axe des abscisses d'une fonction**

En cours de traduction de l' anglais

P3. Le graphique d'une fonction est "symétrique par rapport à l'origine O" si le changement simultané de y en $-y$ et de x en $-x$ ne modifie pas la valeur de l'équation tel que (c'est-à-dire que le changement de signe d'une variable change le signe de l'autre) :

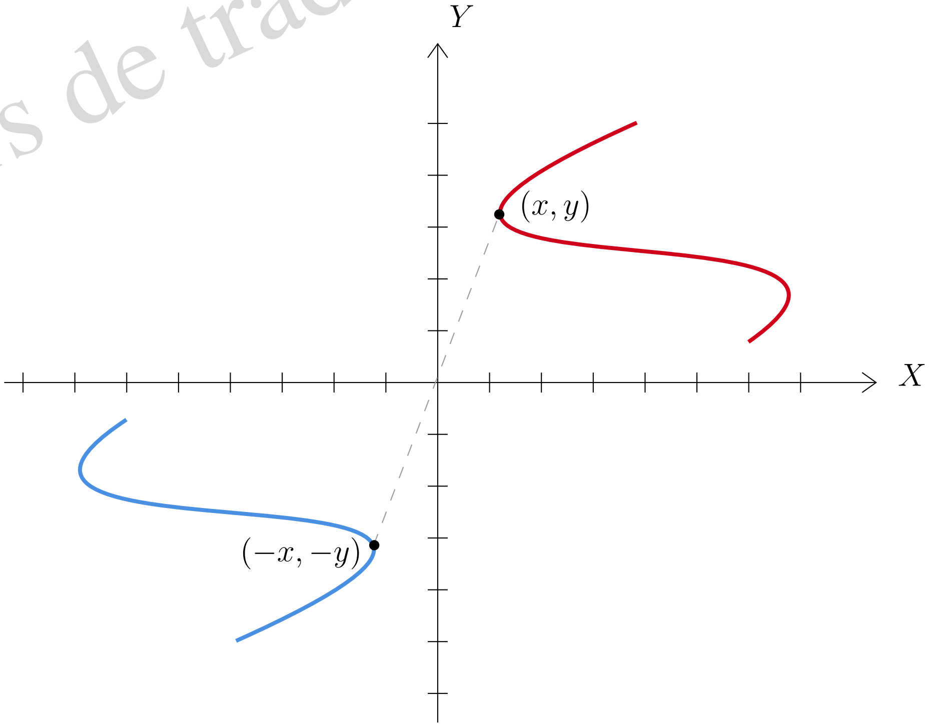


FIG. 7.23 – **Exemple de symétrie par l'origine d'une fonction**

P4. Soit une fonction $y = f(x)$, si nous ajoutons une constante $c^{te} \geq 0$ à cette fonction tel que

nous écrivions :

$$y = f(x) + c^{te} \quad (7.1.30)$$

alors le graphique de $f(x)$ est déplacé (ou "translaté") verticalement vers le haut d'une distance c^{te} tel que présenté sur la figure suivante :

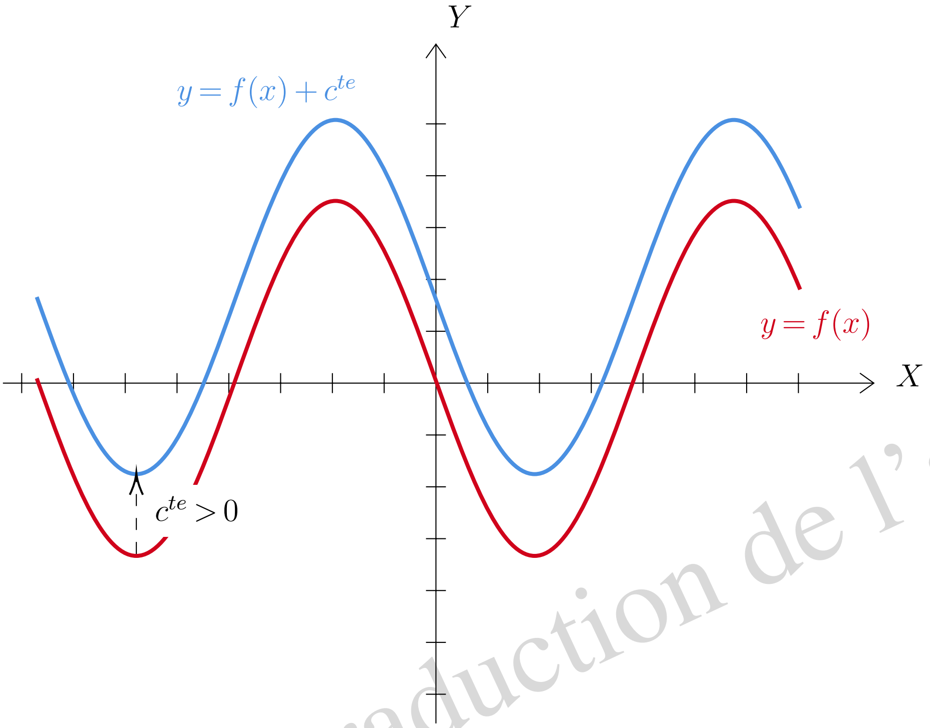


FIG. 7.24 – Exemple d'une translation verticale positive d'une fonction

En cours de traduction de l'anglais

Et inversement si $c^{te} \geq 0$ mais que :

$$y = f(x) - c^{te} \quad (7.1.31)$$

alors la fonction $f(x)$ est bien évidemment translatée verticalement vers le bas :

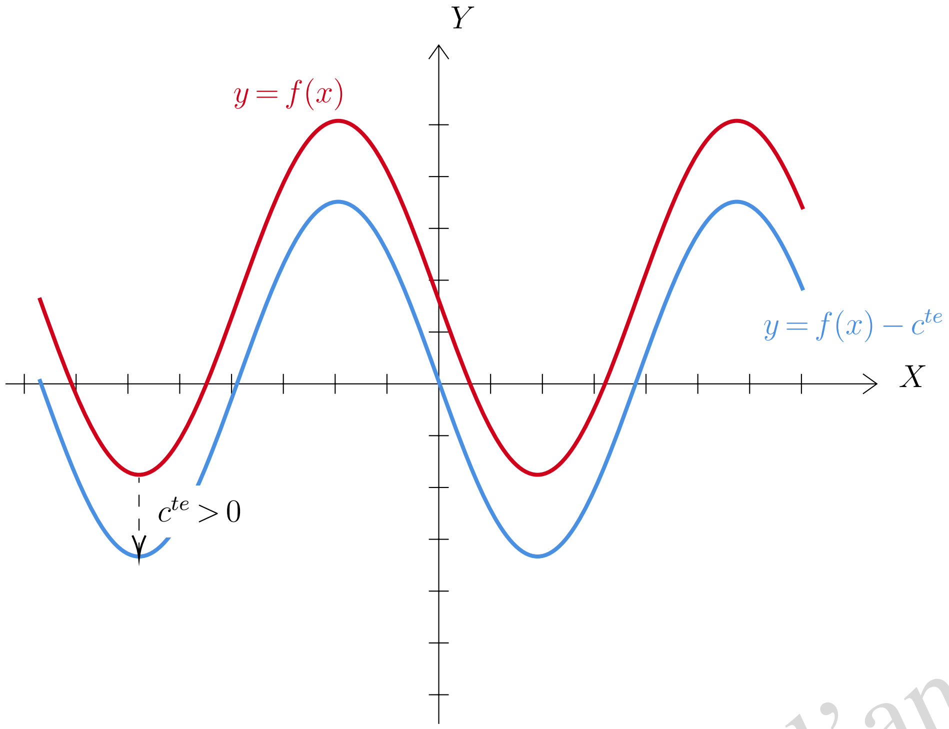


FIG. 7.25 – **Exemple d'une translation verticale négative d'une fonction**

En cours de traduction de l' anglais

Nous pouvons aussi envisager des translations horizontales de graphiques. Précisément, si $c^{te} > 0$, alors $y = f(x)$ est translaté horizontalement vers la droite si nous écrivons :

$$y = f(x - c^{te}) \quad (7.1.32)$$

ce qui graphiquement est représenté par :

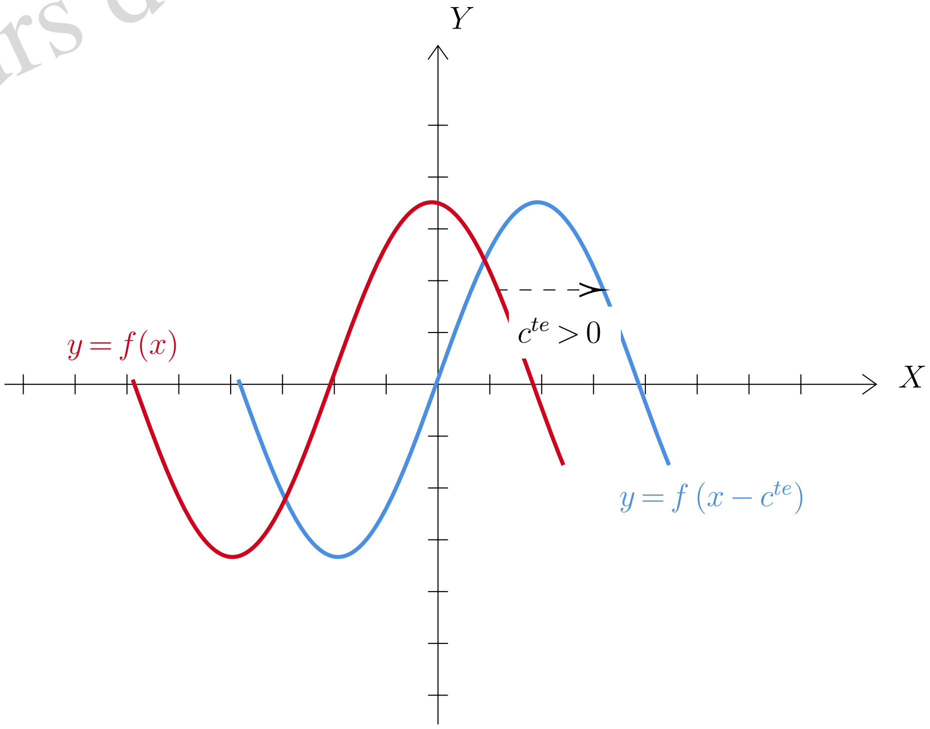


FIG. 7.26 – **Exemple de translation horizontale négative d'une fonction**

et inversement, translaté horizontalement vers la gauche, si nous écrivons :

$$y = f(x + c^{te}) \tag{7.1.33}$$

comme le montre le graphique ci-dessous :

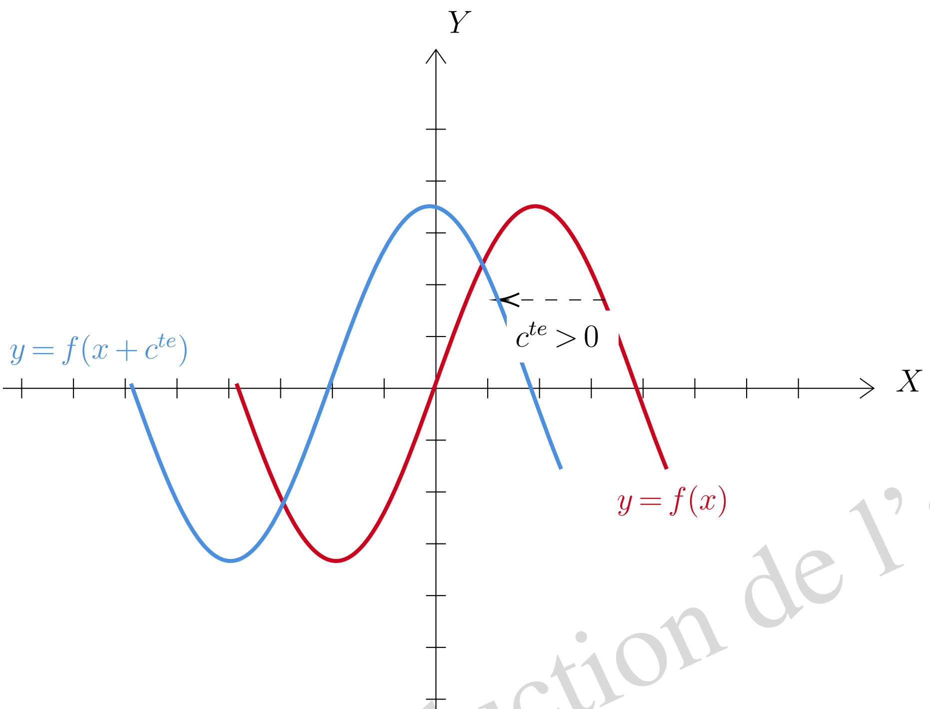


FIG. 7.27 – **Exemple de translation horizontale positive d'une fonction**

En cours de traduction de l' anglais

Pour étirer ou comprimer verticalement un graphique, il suffit de multiplier la fonction $y = f(x)$ par une constante $c^{te} > 1$ et respectivement $0 \leq c^{te} < 1$ tel que :

$$y = c^{te} f(x) \tag{7.1.34}$$

et n'oubliez pas que si une fonction est linéaire alors nous avons la propriété spéciale $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Ce que nous pouvons représenter graphiquement pour le cas $c^{te} > 1$ par :

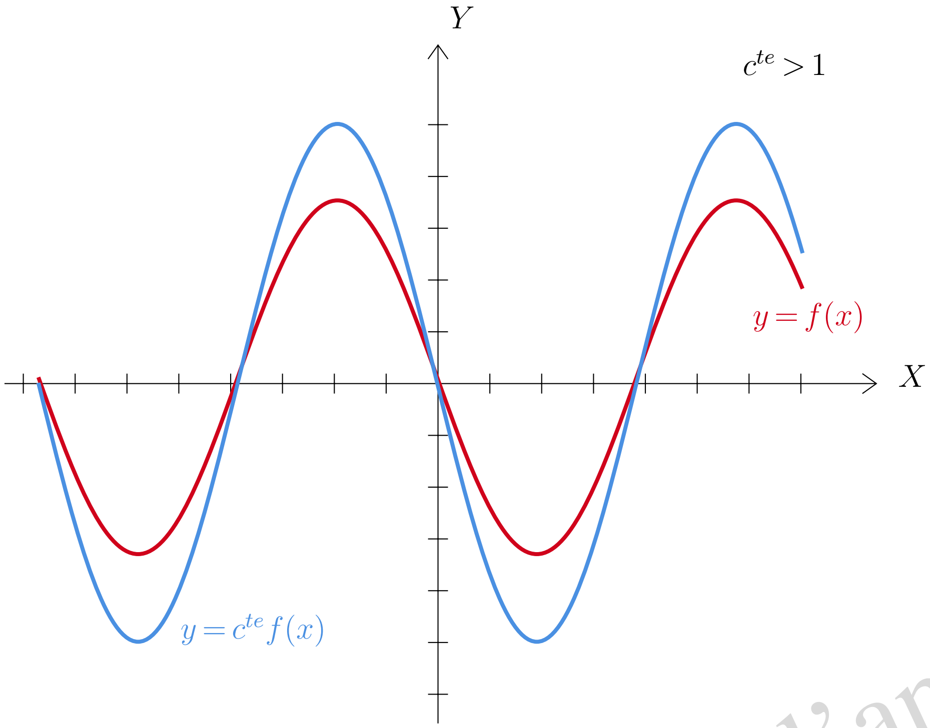


FIG. 7.28 – Exemple d'étirement vertical d'une fonction

et quand $0 \leq c^{te} < 1$ par :

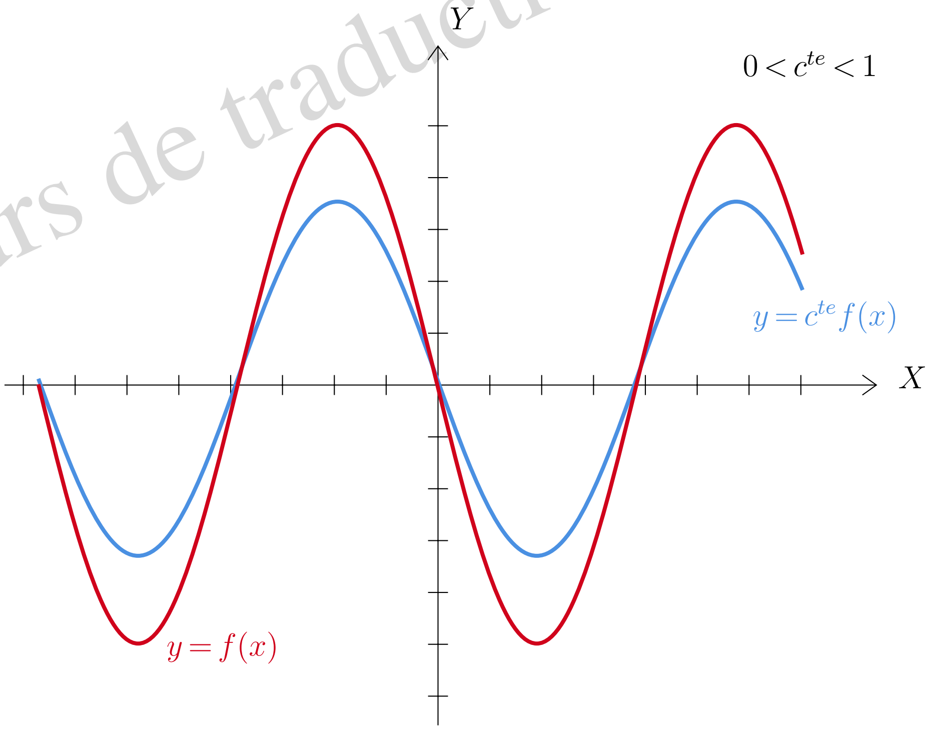


FIG. 7.29 – Exemple d'aplatissement vertical d'une fonction

En cours de traduction de l'anglais

Pour étirer ou comprimer horizontalement une fonction, il suffit de même, de multiplier la variable x par une constante $c^{te} > 1$ et respectivement $0 < c^{te} < 1$ tel que :

$$y = f(c^{te} x) \tag{7.1.35}$$

Ceci est représenté graphiquement pour le cas $0 < c^{te} < 1$ par :

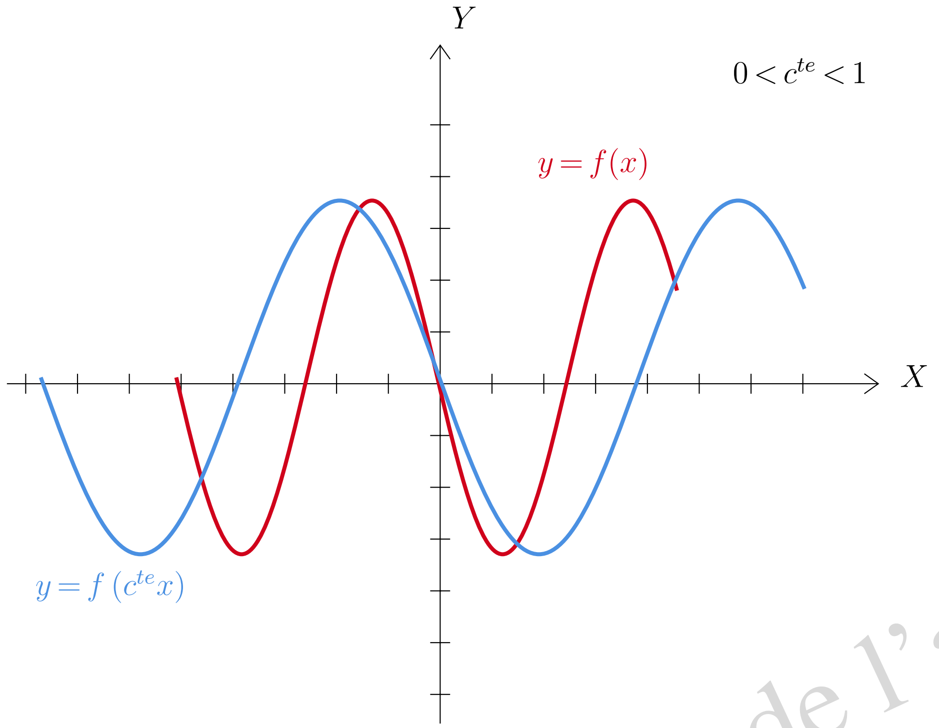


FIG. 7.30 – Exemple d'étirement horizontal d'une fonction

et quand $c^{te} > 1$ par :

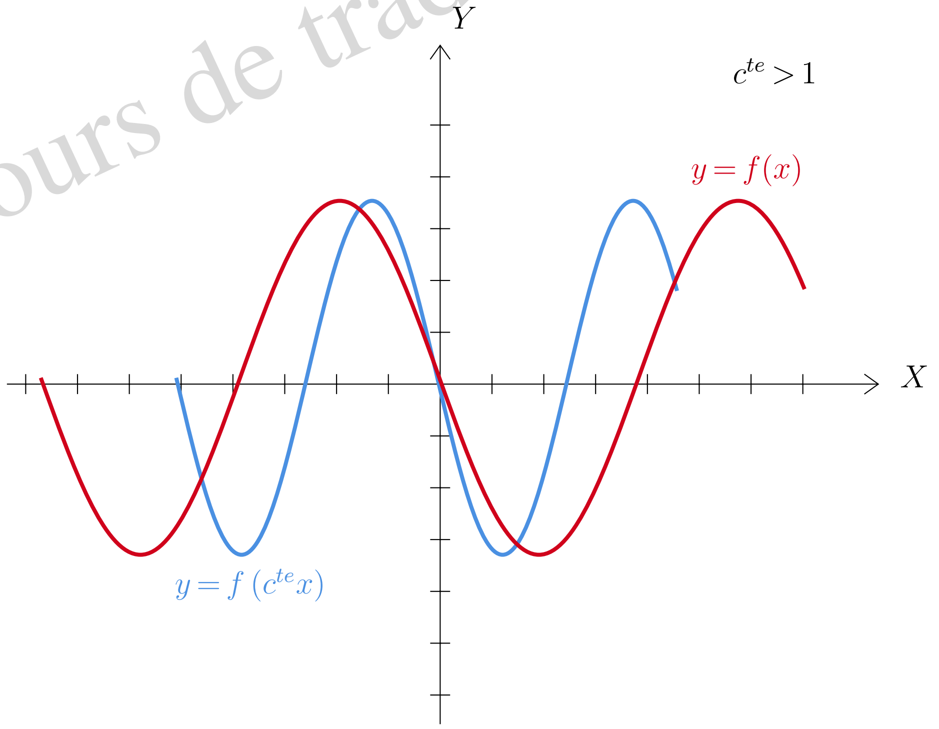


FIG. 7.31 – Exemple de compression horizontale d'une fonction

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Translater, étirer, comprimer un graphique ou lui faire subir une symétrie, c'est le transformer. Le graphique résultant de ces transformations est appelé le "transformé" du graphique de départ.

Définitions (#7.1.266) : Nous disons qu'une fonction f est : (nous simplifions un peu la définition en utilisant le cas d'une fonction univariée) :

D1. Une "fonction constante" sur un intervalle I si pour tout couple (x_1, x_2), d'éléments de I tels que $x_1 \neq x_2$, nous avons $f(x_1) = f(x_2)$. Ce que nous notons de manière condensée :

$$\forall (x,y) \in I^2 : \quad f(x) = f(y) = c^{te} \tag{7.1.36}$$

D2. Une "fonction croissante" ou "fonction croissante au sens large" sur un intervalle I si pour tout couple (x_1, x_2), d'éléments de I tels que $x_1 \neq x_2$, nous avons $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ce que nous notons de manière condensée :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x \leq y) : \quad f(x) \leq f(y) \tag{7.1.37}$$

D3. Une "fonction décroissante" ou "fonction décroissante au sens large" sur un intervalle I si pour tout couple (x_1, x_2), d'éléments de I tels que $x_1 \neq x_2$, nous avons $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ce que nous notons de manière condensée :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x \leq y) : \quad f(x) \geq f(y) \tag{7.1.38}$$

Remarque

Une fonction est une "fonction monotone" ou "fonction monotone au sens large" sur I si elle est croissante ou décroissante sur cet interval.

D4. Une "fonction strictement croissante" sur I si pour tout couple (x_1, x_2), d'éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$, nous avons $f(x_1) < f(x_2)$. Ce que nous notons de manière condensée :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x < y) : \quad f(x) < f(y) \tag{7.1.39}$$

D5. Une "fonction strictement décroissante" sur I si pour tout couple (x_1, x_2), d'éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$, nous avons $f(x_1) > f(x_2)$. Ce que nous notons de manière condensée :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x < y) : \quad f(x) > f(y) \tag{7.1.40}$$

Remarque

Nous disons qu'une "fonction est strictement monotone" sur I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Voici un résumé visuel de quelques uns des types de monotocités définis ci-dessus :

En cours de traduction de l'anglais

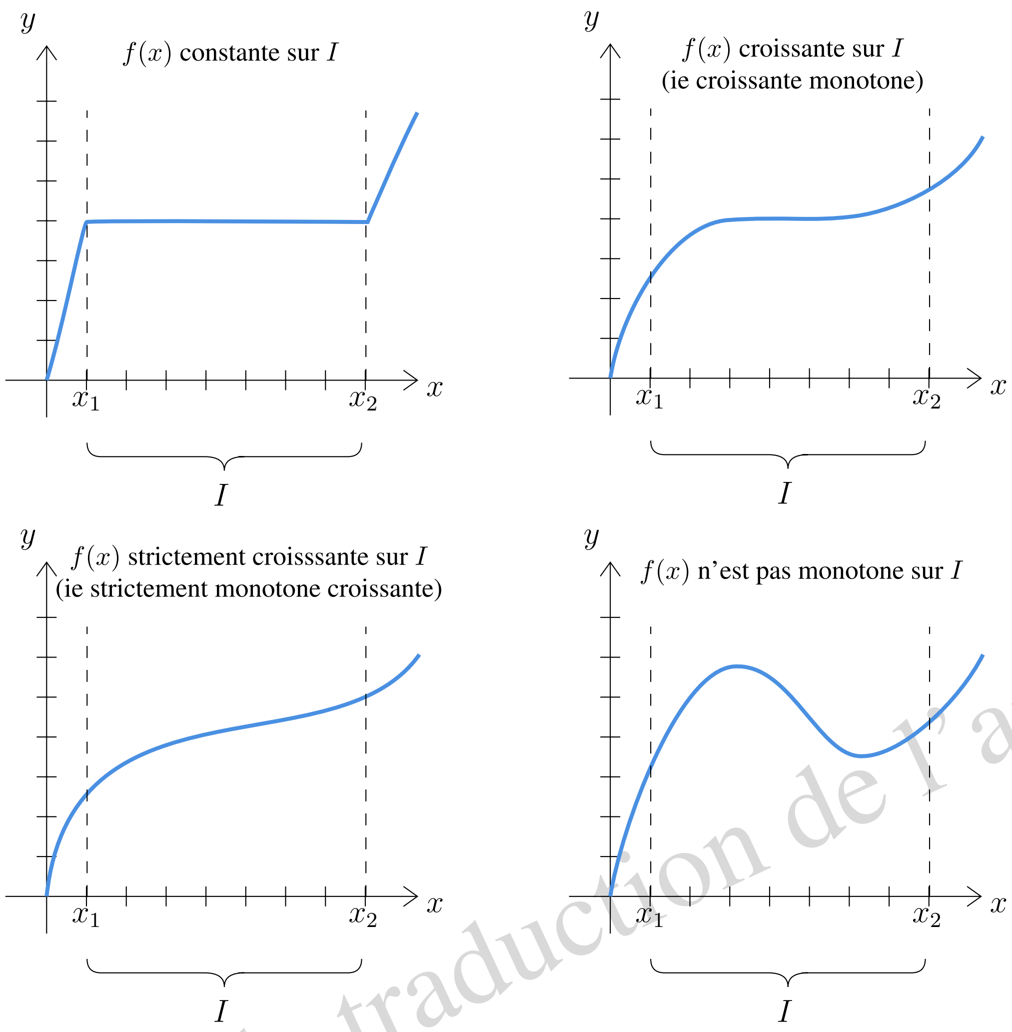


FIG. 7.32 – **Résumé des quelques uns des types de monotocités de fonctions univariées**

En cours de traduction de l'anglais

Il existe de nombreuses autres représentations visuelles/graphiques existantes. Vous pouvez en trouver dans la galerie de vignettes ci-dessous 206 d'entre elles (excepté pour deux d'entre elles, ils ont tous été réalisés avec le logiciel R et le code pour créer la plupart d'entre eux est disponible dans le livre compagnon correspondant) :

FIG. 7.33 – Liste des 206 types de graphiques utilisés dans le monde professionnel

Cependant, il existe quelques autres graphiques existants utilisés dans la pratique et le lecteur intéressé par une liste plus exhaustive peut jeter un coup d'oeil à la branche *Type of Charts/-Plots/Visuals* de la Mind • Data Science à la page **??**.

7.1.1.3 Représentations Analytiques

Le mode de représentation analytique est de loin le plus utilisé et consiste à représenter toute fonction en une "expression analytique" ou "expression de forme fermée" qui est la notation mathématique symbolique et abstraite de l'ensemble des opérations mathématiques connues que l'on doit appliquer dans un certain ordre à des nombres et des lettres exprimant des grandeurs constantes ou variables que nous cherchons à analyser.

Notons que par "ensemble des opérations mathématiques connues", nous envisageons non seulement les opérations mathématiques vues dans la section Arithmétique (addition, soustraction, extraction de la racine, etc.) mais également toutes les opérations qui seront définies au fur et à mesure dans le présent livre.

Si la dépendance fonctionnelle $y = f(x)$ est telle que f est une expression analytique, nous disons alors que la "fonction y de x" est "donnée analytiquement".

Voici quelques exemples d'expressions analytiques simples :

$$y = x^4 - 2, y = \frac{x+1}{x-1}, y = \sqrt{1-x^2} \qquad (7.1.41)$$

Lorsque nous avons déterminé l'équation de la médiatrice (voir page 2169), nous avons obtenu une expression analytique de la droite visuelle qui la caractérise sous la forme d'une fonction du type :

$$\boxed{f(x) = y = ax + b} \qquad (7.1.42)$$

qui rappelons-le, est donc l'expression analytique de l'équation d'une droite, appelée également "équation linéaire" (ou "fonction affine"), sur un plan dont deux points $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ sont connus, la pente est donnée par le rapport de l'accroissement vertical sur l'accroissement horizontal tel que :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (7.1.43)$$

Une application sympathique et triviale consiste à démontrer analytiquement que deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente. Ainsi, soit deux droites données par les équations :

$$y_1 = ax_1 + b_1 \qquad y_2 = a_2 + b_2 \qquad (7.1.44)$$

Les droites se coupent en un point (x, y) si et seulement si les valeurs de y sont égales pour un certain x, c'est-à-dire :

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b \Leftrightarrow (a_1 - a_2)x = b_2 - b_1 \qquad (7.1.45)$$

En cours de traduction de l'anglais

La dernière équation peut être résolue par rapport à x si et seulement si $a_2 - a_2 \neq 0$. Nous avons donc montré que les droites y_1, y_2 se coupent si et seulement si $a_1 \neq a_2$. Donc, elles ne se coupent pas (elles sont parallèles) si et seulement si $a_1 = a_2$.

De façon assez simple en appliquant le théorème de Pythagore, il n'est pas compliqué (voir section Géométrie Analytique page 2744) de déterminer que l'équation d'un cercle de centre $C(h,k)$ a pour équation (nous avons pour habitude en mathématiques de ne pas expliciter y pour l'équation du cercle ainsi, l'équation de ce dernier est visuellement beaucoup plus esthétique et parlante) :

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \tag{7.1.46}$$

Dans ces exemples les fonctions sont exprimées analytiquement par une seule formule (égalité entre deux expressions analytiques) qui définit dans un même temps le "domaine naturel de définition" des fonctions.

Définition (#7.1.267) : Le "domaine naturel de définition" d'une fonction donnée par une expression analytique est l'ensemble des valeurs x pour lesquelles l'expression du membre de droite a une valeur bien déterminée.

Par exemple, la fonction :

$$y = \frac{x+1}{x-1} \tag{7.1.47}$$

est définie pour toutes les valeurs de x, excepté la valeur $x = 1$ où nous avons une singularité (division par zéro).

Remarque

Il existe une infinité de fonctions et nous ne pouvons toutes les exposer ici, cependant nous en rencontrerons plus d'un millier sur l'ensemble de ce livre et cela devrait amplement suffire à se faire une petite idée de leur étude.

En ... traduction de l' anglais

Et nous avons la fameuse "table des variations" qui est également considérée comme un outil d'analyse et utilisé par certains enseignants pour étudier les bases de la dérivée f' d'une fonction f dans les petites classes (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1432). Par exemple avec la fonction $x^3 - 3x^2 + 2$ (déjà vue dans la section précédemment mentionnée) :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Dont le graphique correspondant est :

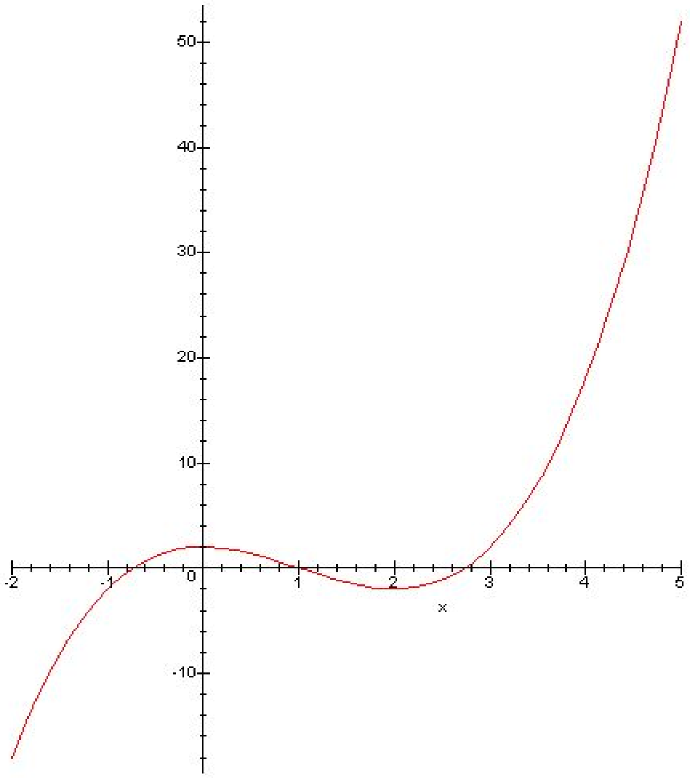


FIG. 7.34 – Tracé de la fonction $x^3 - 3x^2 + 2$

En cours de traduction de l'anglais

7.1.2 Fonctions

En mathématiques, une "fonction" est une relation entre un ensemble d'entrées et un ensemble de sorties autorisées avec la propriété que chaque entrée est liée à exactement une sortie.

Les fonctions de divers types sont les principaux objets d'investigation dans la plupart des domaines des mathématiques modernes. Il existe de nombreuses façons de décrire ou de représenter une fonction. Certaines fonctions peuvent être définies par une formule ou un algorithme qui indique comment calculer la sortie pour une entrée donnée. D'autres sont donnés par une image, appelée le "graphe" de la fonction. En science, les fonctions sont parfois définies par un tableau qui donne les sorties pour les entrées sélectionnées. Une fonction peut être décrite implicitement, par exemple comme l'inverse d'une autre fonction ou comme une solution d'une équation différentielle.

Rappelons d'abord les définitions déjà données précédemment lors de notre étude de la représentation graphique des fonctions :

Définitions (#7.1.268) : Nous disons qu'une fonction f est (nous simplifions la définition en utilisant une fonction univariée) :

En cours de traduction de l'anglais

D1. Une "fonction constante" sur un intervalle I si pour chaque couple (x_1, x_2) d'éléments de I tel que $x_1 \neq x_2$, nous avons $f(x_1) = f(x_2)$. Ce que nous désignons de manière condensée par :

$$\forall (x,y) \in I^2 : \quad f(x) = f(y) = c^{te} \tag{7.1.48}$$

D2. Une "fonction croissante" ou une "fonction croissante au sens large" sur l'intervalle I si pour chaque couple (x_1, x_2) d'éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$, nou avons $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ce que nous désignons de manière condensée par :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x \leq y) : \quad f(x) \leq f(y) \tag{7.1.49}$$

D3. Une "fonction décroissante" ou une "fonction décroissante au sens large" sur l'intervalle I si pour chaque couple (x_1, x_2) de éléments de I tels que $x_1 \leq x_2$, nous avons $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ce que nous désignons de manière condensée par :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x \leq y) : \quad f(x) \geq f(y) \tag{7.1.50}$$

> **Remarque**
>
> Une fonction est une "fonction monotone" ou "fonction monotone au sens large" sur un intervalle I si elle est croissante ou décroissante dans cet intervalle.

D4. Une "fonction strictement croissante" sur l'intervalle I si pour chaque couple (x_1, x_2) d'éléments de I tel que $x_1 \leq x_2$, nous avons $f(x_1) < f(x_2)$. Ce que nous désignons de manière condensée par :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x < y) : \quad f(x) < f(y) \tag{7.1.51}$$

D5. Une "fonction strictement décroissante" sur l'intervalle I si pour chaque couple (x_1, x_2) d'éléments de I tel que $x_1 \leq x_2$, nous avons $f(x_1) > f(x_2)$. Ce que nous désignons de manière condensée par :

$$\forall (x,y) \in I^2 \wedge (x < y) : \quad f(x) > f(y) \tag{7.1.52}$$

Remarque

Une fonction est une "fonction strictement monotone" sur un intervalle I si elle est strictement croissante ou décroissante dans cet intervalle.

Et ajoutons maintenant des définitions complémentaires à celles que nous connaissons déjà ci-dessus :

Définitions (#7.1.269) :

D1. Nous disons que y est une fonction de x et nous écrirons $y = f(x), y = \varphi(x)$, etc., si à chaque valeur de la variable x appartenant à un certain domaine de définition (ensemble) D, correspond une valeur de la variable y dans un autre domaine de définition (ensemble) E. Ce que nous notons de différentes manières dans la pratique (la troisième étant la plus recommandée) :

$$D \xrightarrow{f} E \qquad f : D \to E \qquad f : D \mapsto E \tag{7.1.53}$$

La variable x est appelée "variable indépendante" ou "variable d'entrée" ou encore "variable exogène" et y la "variable dépendante" ou "variable endogène".

La dépendance entre les variables x et y s'appelle une "dépendance fonctionnelle". La lettre f, qui entre dans la notation symbolique de la dépendance fonctionnelle, indique qu'il faut appliquer certaines opérations à x pour obtenir la valeur correspondante y.

Nous écrivons parfois :

$$y = y(x) \tag{7.1.54}$$

au lieu de :

$$y = f(x) \tag{7.1.55}$$

Dans ce dernier cas la lettre y exprime en même temps la valeur de la fonction et le symbole des opérations appliquées à x.

Remarque

Comme nous l'avons vu lors de notre étude dans la section de Théorie Des Ensembles, une application (ou fonction) peut-être injective, surjective ou bijective :

En cours de traduction de l'anglais

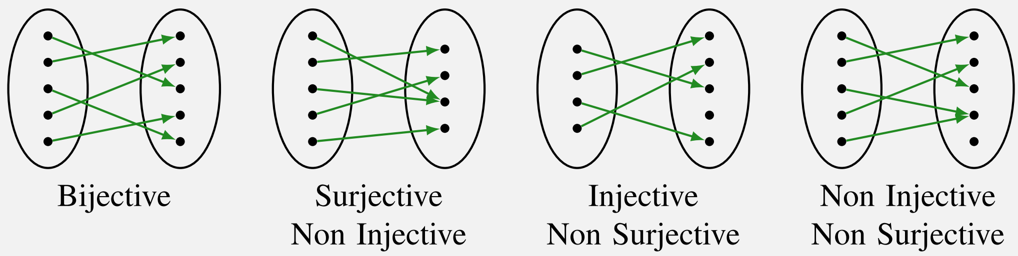


FIG. 7.35 – **Résumé rapide des types d'applications/fonctions**

Il faut donc que le lecteur pour qui ces notions sont inconnues lise en priorité ces définitions.

D2. L'ensemble des valeurs x (entrées) pour lesquelles la valeur de la fonction y est donnée par la fonction $f(x)$ est appelé le "domaine d'existence" de la fonction ou "domaine de définition" de la fonction et désigné dans ce livre par la lettre D.

L'ensemble des sorties de $f(x)$ est appelé "l'image" ou parfois le "codomaine" et désigné dans ce livre par la lettre E. Lorsque l'on étudie du point de vue de la connaissance des valeurs de sortie uniquement, l'ensemble des x est appelé le domaine "pré-image".

D3. Une fonction $f(x)$ est appelée "fonction périodique" s'il existe une constante c^{te} telle que la valeur de la fonction ne change pas lorsque nous ajoutons (ou soustrayons) cette constante à la variable indépendante telle que :

$$y = f(x \pm c^{te}) = f(x) \tag{7.1.56}$$

ce qui correspond à une translation le long de l'axe x. La plus petite constante satisfaisant cette condition est nommée la "période" de la fonction. Elle est fréquemment désigné par la lettre T en physique.

Les fonctions périodiques les plus courantes connues des étudiants et ingénieurs sont les fonctions trigonométriques (voir section correspondante même nom à la page **??**) :

En cours de traduction de l'anglais

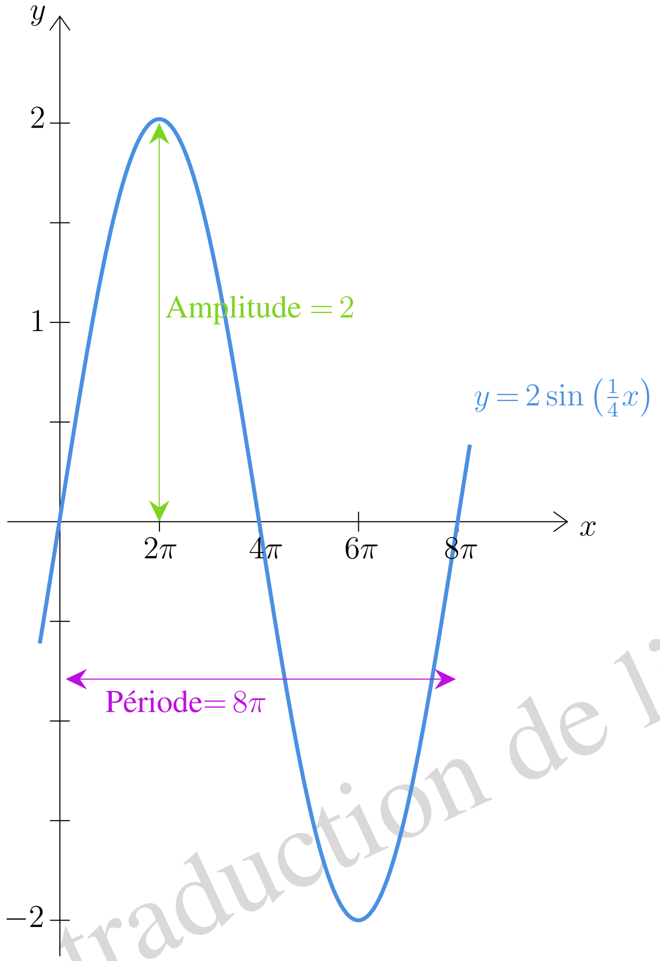


FIG. 7.36 – **Exemple de fonction périodique avec période et amplitude**

En cours de traduction de l'anglais

> **Remarque**
>
> La somme de deux fonctions périodiques avec des périodes différentes n'est pas nécessairement périodique et il n'y a pas de formule générale simple pour obtenir la période d'une fonction qui est la somme de n autres fonctions totalement différentes !

D4. En calcul différentiel (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1432), l'expression :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{7.1.57}$$

avec $h \neq 0$ est d'un intérêt particulier. Nous l'appelons un "quotient d'accroissement" (nous reviendrons beaucoup plus en détail sur ce sujet lors de notre étude du calcul différentiel et intégral).

D5. Nous utilisons certaines propriétés des fonctions pour faciliter leur représentation graphique et leur analyse. En particulier, une fonction $f(x)$ est dite "fonction paire" si :

$$f(x) = f(-x) \tag{7.1.58}$$

pour tout x dans son domaine de définition.

C'est-à-dire comme nous l'avons déjà vu précédemment, elle est symétrique relativement à l'axe y :

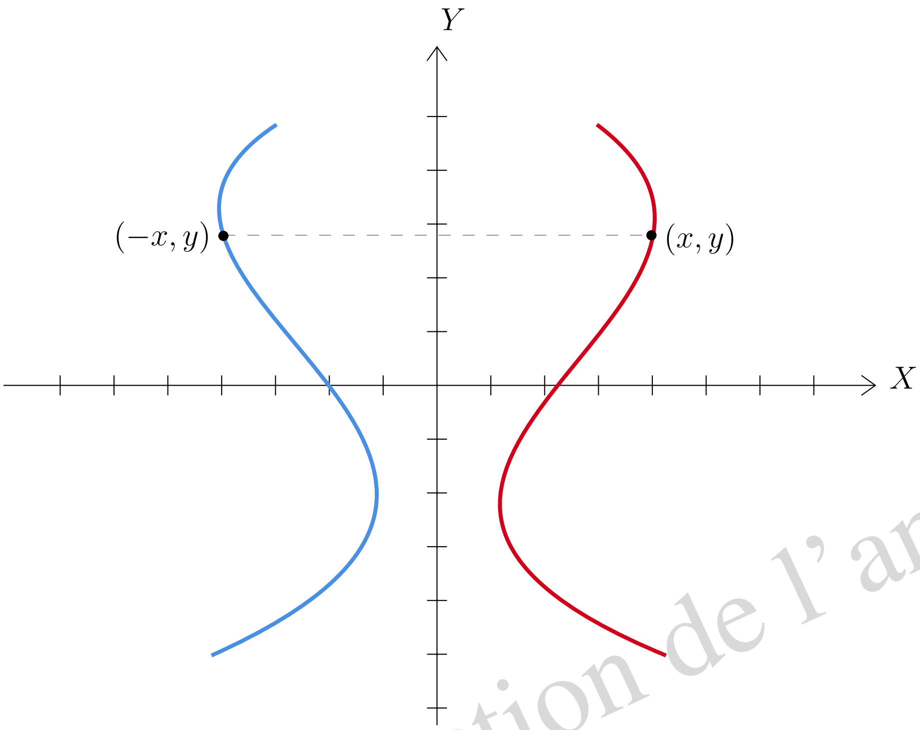


FIG. 7.37 – **Exemple d'une fonction paire**

Une fonction $f(x)$ est dite "fonction impaire" si :

$$f(-x) = -f(-x) \quad (7.1.59)$$

pour tout x dans son domaine de définition.

C'est-à-dire comme nous l'avons déjà vu précédemment, elle est symétrique relativement à l'origine :

En cours de traduction de l' anglais

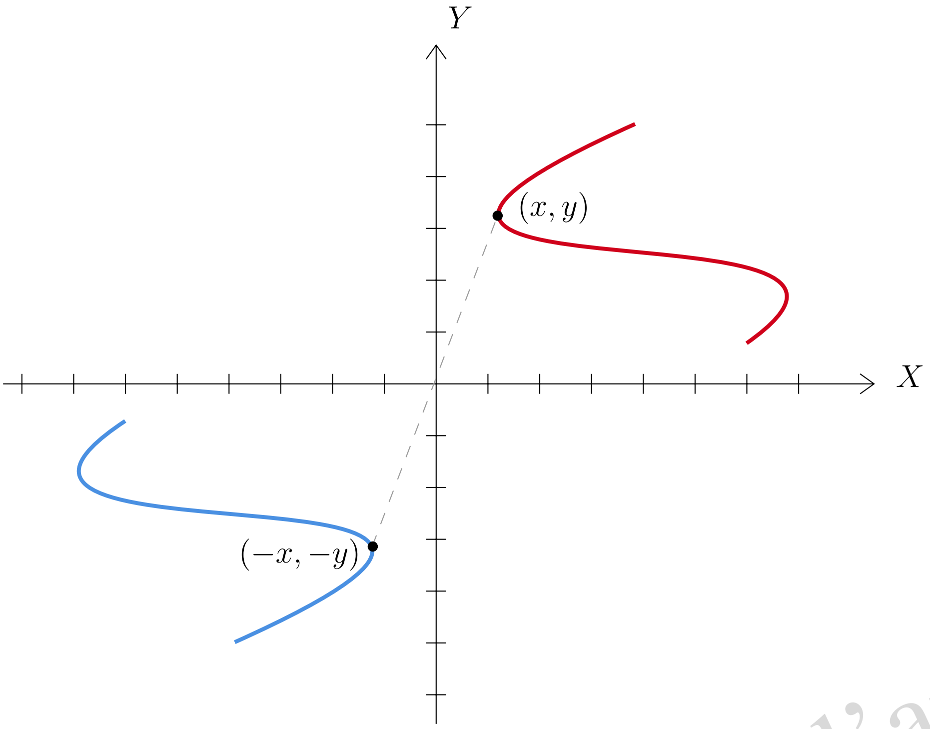


FIG. 7.38 – **Exemple de fonction impaire**

Ainsi, pour résumer, une fonction paire est une fonction qui est indépendante du signe de la variable et une fonction impaire change de signe quand on change le signe de la variable (la spirale de Cornus dans la section Génie Civil est un bon exemple pratique de fonction impaire). Cette notion nous sera très utile pour simplifier certains développements très utiles en physique (comme les transformées de Fourier des fonctions paires ou impaires par exemple, ou le calcul de certaines intégrales !).

En cours de traduction de l'anglais

Théorème 7.2. Montrons maintenant que toute fonction $f(x)$ est la somme d'une fonction paire $g(x)$ et d'une fonction impaire $h(x)$.

Remarque

Ce type de théorème qui consiste à relier un concept général par un cas particulier et son opposé se retrouve souvent en mathématiques. Nous retrouverons de tels exemples en calcul tensoriel avec les tenseurs symétriques et antisymétriques (voir section Calcul Tensoriel page 2057 et page 2060) ou encore en physique quantique avec les opérateurs hermitiques et antihermitiques (voir section Physique Quantique Ondulatoire page ?? et page ??).

Démonstration 7.2.1. Posons :

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{7.1.60}$$

Alors :

$$f(-x) = g(x) - h(x) \tag{7.1.61}$$

Si nous sommons, nous avons dès lors :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{7.1.62}$$

et en soustrayant :

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \tag{7.1.63}$$

Il existe donc bien une décomposition paire et impaire de toute fonction.

■ Q.E.D.

Enfin, il est important de remarquer que :

- Le produit de deux fonctions paires est une fonction paire
- Le produit deux fonctions impaires est une fonction paire
- Le produit d'une fonction paire et impaire est une fonction impaire

Voyons la brève démonstration pour la dernère propriété car nous en aurons besoin dans le chapitre de Géométrie.

Démonstration 7.2.2. Soient $g(x)$ une fonction paire et $h(x)$ une fonction impaire telles que :

$$g(-x)=g(x) \tag{7.1.64}$$

$$h(-x)=-h(x) \tag{7.1.65}$$

Dès lors :

$$q(-x)=g(-x)h(-x)=g(x)(-h(x))=-g(x)h(x)=-q(x) \tag{7.1.66}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

D6. De façon générale, si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions quelconques, nous utilisons la terminologie et les notations données dans le tableau suivant :

Terminologie	**Valeur de la fonction**
Sum $f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
Difference $f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
Product $f\cdot g$	$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$
Quotient $\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

TAB. 7.3 – **Terminologie concernant les fonctions**

Les domaines de définition de $f+g, f-g, f\cdot g$ sont l'intersection I des domaines de définition de $f(x)$ et de $g(x)$, c'est-à-dire les nombres qui sont communs aux deux domaines de définition. Le domaine de définition de f/g est quant à lui le sous-ensemble de I comprenant tous les x de I tels que $g(x)\neq 0$.

D7. Soit y une fonction f de u telle que $y=f(u)$ et u une fonction g de la variable x telle que $u=g(x)$, alors y dépend de x et nous avons ce que nous appelons une "fonction composée" et que nous notons :

$$\boxed{y=f(g(x))=(f\circ g)(x)} \tag{7.1.67}$$

Pour la dernière égalité, il faut lire "f rond g" et ne pas confondre le "rond" avec la notation du produit scalaire que nous verrons lors de notre étude du Calcul Vectoriel à la page 1798.

Le domaine de définition de la fonction composée est soit identique au domaine tout entier de définition de la fonction $u = g(x)$, soit à la partie de ce domaine dans laquelle les valeurs de u sont telles que les valeurs correspondantes $f(u)$ appartiennent au domaine de définition de cette fonction.

Bien évidemment, le principe de fonction composée peut être appliqué non seulement une fois, mais un nombre arbitraire de fois tel que et ainsi de suite...

En informatique une fonction peut composer avec elle-même un nombre donné de fois n, tel que $f(f(f(f(f\ldots))))) = f^n$ et il faut essayer de ne pas confondre cela avec la notation puissance $f^n(x)$.

Si u ne dépend pas d'une autre variable (ou qu'elle n'est pas elle-même une fonction composée), nous disons alors que $f(u)$ est une "fonction élémentaire".

Il existe évidemment une infinité de fonctions élémentaires mais la plupart peuvent être classées en familles dont l'expression est similaire à l'une des suivantes (ici ce sont seulement des fonctions univariées) :

- "Fonctions linéaires" :

$$f(x) = ax \tag{7.1.68}$$

  Ce sont simplement des fonctions représentant des droites de pente a passant par l'origine de l'axe.

- "Fonctions affines" :

$$f(x) = ax + b \tag{7.1.69}$$

  Ce sont simplement des fonctions représentant des droites de pente a passant par l'origine de l'axe ou non (fonction linéaire avec une translation).

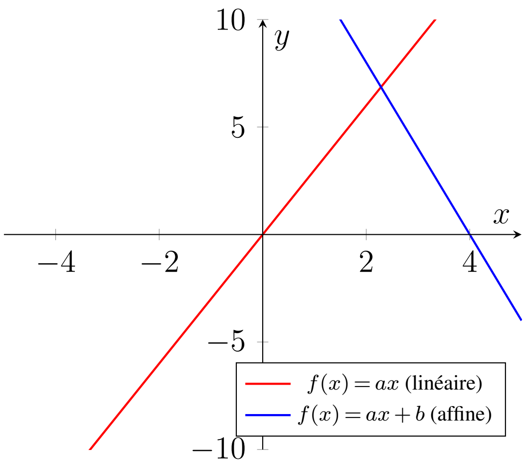


FIG. 7.39 – **Fonctions univariées affine et linéaire**

- "Fonctions puissance" :

$$f(x) = x^m \tag{7.1.70}$$

En cours de traduction de l'anglais

où $m \in \mathbb{R}$. Les fonctions impliquant des racines, comme $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, sont souvent appelées des "fonctions radicales".

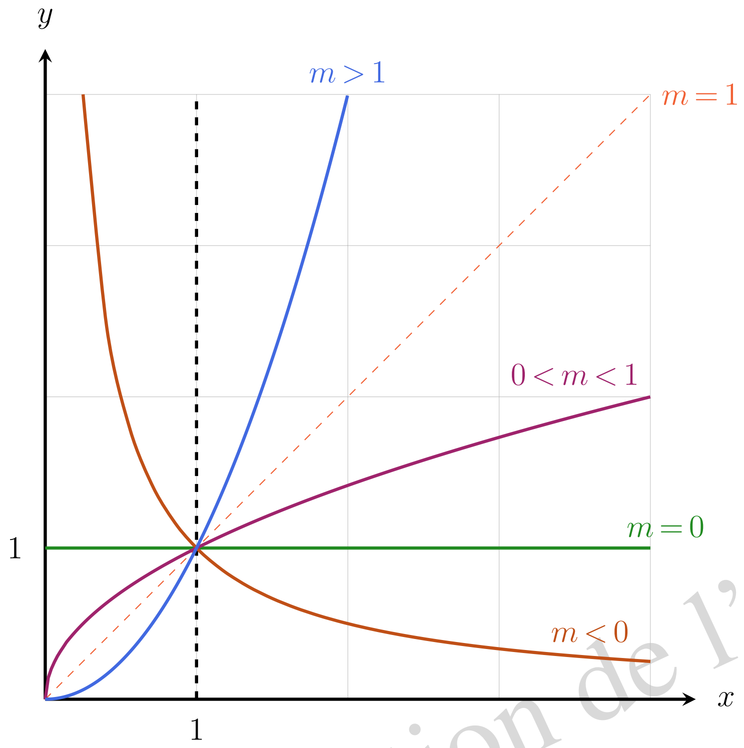


FIG. 7.40 – **Différents tracés de fonctions puissances simples**

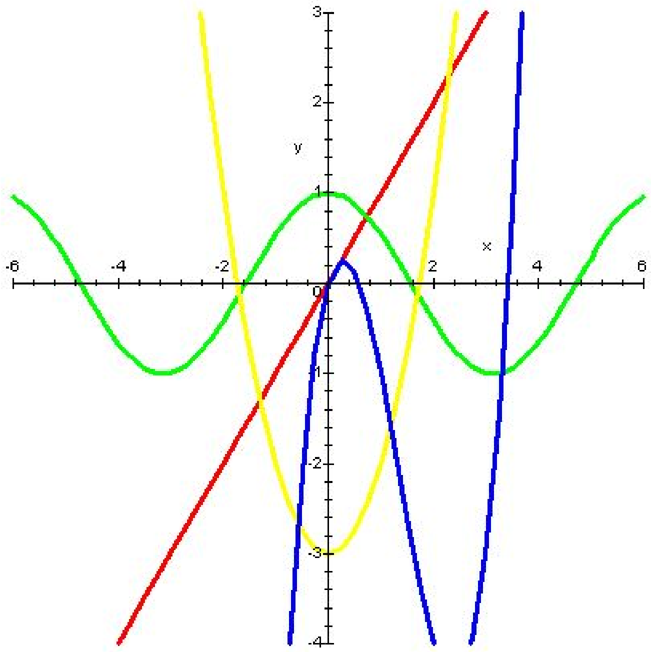
- "Fonctions valeurs absolues" (voir section Opérateurs Arithmétique page 323 pour la définition et l'étude de la "valeur absolue") :

$$f(x) = |x| \tag{7.1.71}$$

Par exemple les tracés avec Maple 4.00b que l'on obtient avec la commande :

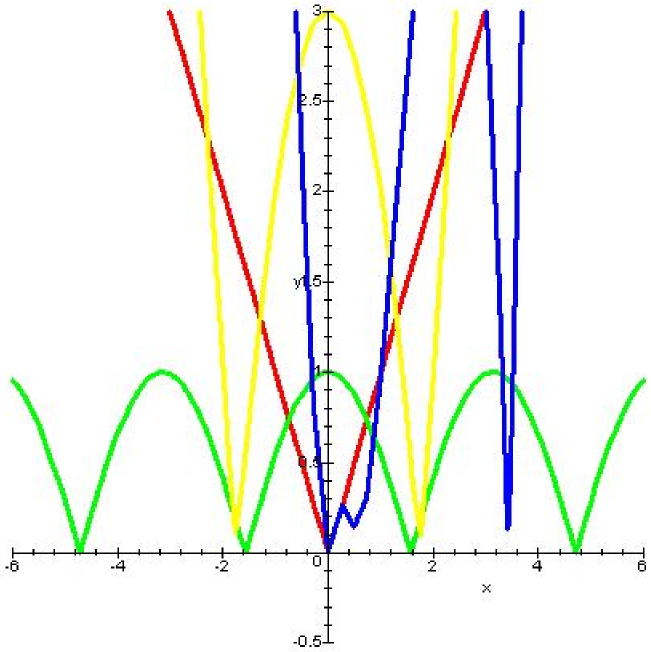
```
>plot([(x),(cos(x)),(x^2-3),(x^3-4*x^2+2*x)],x=-6..6,y=-4..3,
thickness=3);
```

En cours de traduction de l'anglais



et en prenant la valeur absolue :

```
>plot([abs(x),abs(cos(x)),abs(x^2-3),abs(x^3-4*x^2+2*x)]
,x=-6..6,y=-0.5..3,thickness=3);
```



En cours de traduction de l' anglais

- "Fonctions exponentielles" :

$$f(x) = a^x \tag{7.1.72}$$

où le fameux e^x est seulement un cas particulier et $a \in \mathbb{R}$.

Quand $a \geq 0$ nous avons typiquement :

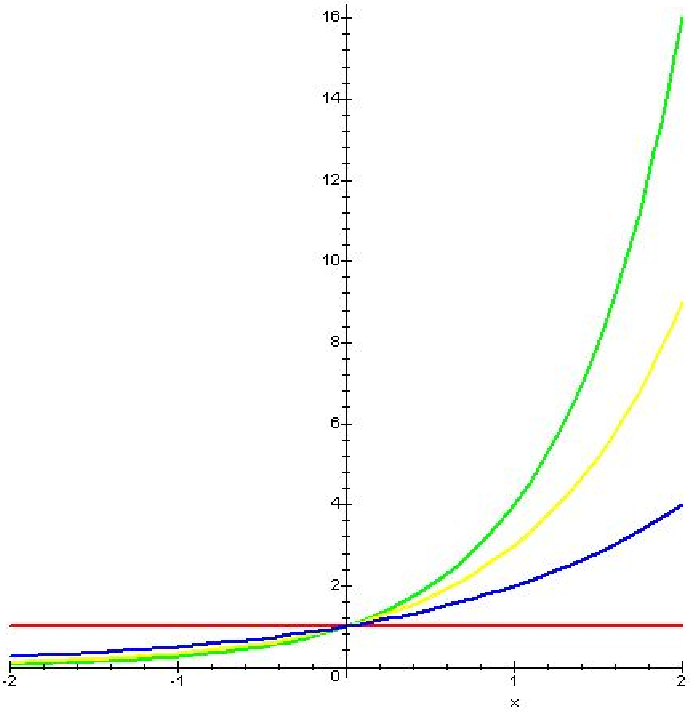


FIG. 7.41 – **Différents tracés de fonctions exponentielles simples** $(1^x, 2^x, 3^x, 4^x)$ **avec Maple 4.00b**

Si $a < 0, x \in \mathbb{R}$ la fonction n'est pas définie. En effet pour $(-1)^{0.5} = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ donc c'est une application de $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^2$ et pour autant que nous sachions, il n'y a pas de bonne façon de le représenter visuellement et de toute façon ce n'est plus une fonction dans le sens traditionnel du terme.

- "Fonctions logarithmiques" :

$$f(x) = \log_a(x) \quad (7.1.73)$$

avec $a \in \mathbb{R}^+$ et que par construction du logarithme (voir plus bas) sont du type $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$.

Nous avons typiquement :

En cours de traduction en anglais

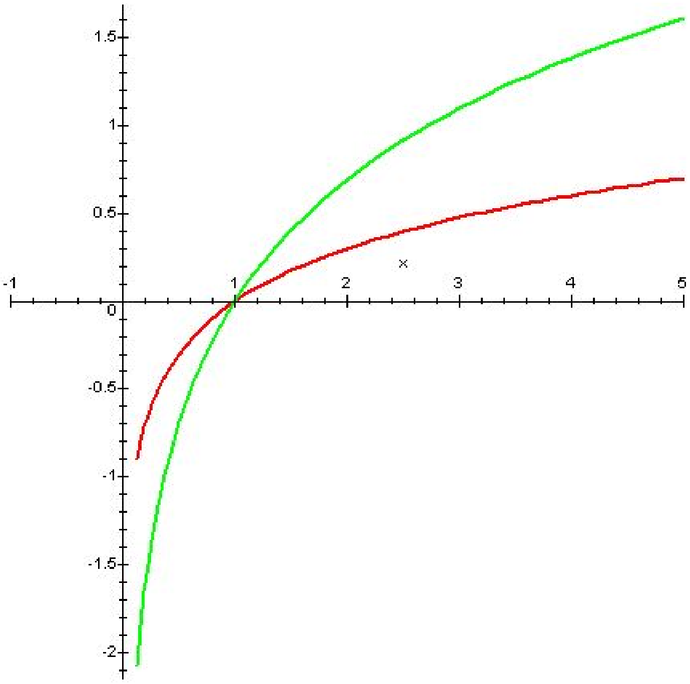


FIG. 7.42 – **Différent tracés de logarithmes** $\ln(x) = \ln_e(x)$ **en vert et** $\log_{10}(x)$ **en rouge avec Maple 4.00b**

En cours de traduction de l'anglais

- "Fonctions périodiques/trigonométriques" :

$$y = \sin(x), y = \cos(x), y = \tan(x), y = \cot(x), y = \sec(x), y = \operatorname{cosec}(x), \ldots \tag{7.1.74}$$

Nous avons déjà défini précédemment ce qu'est une fonction périodique. Pour les fonctions trigonométriques le lecteur peut voir ci-dessous un tracé de la principale mais pour plus de détails il est fortement recommandé de lire la section de Trigonométrie page **??** :

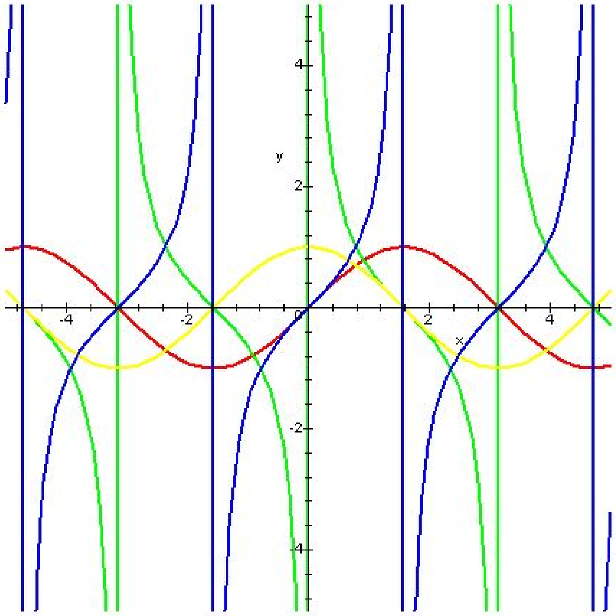


FIG. 7.43 – **Différents tracés de fonction trigonométriques avec Maple 4.00b**

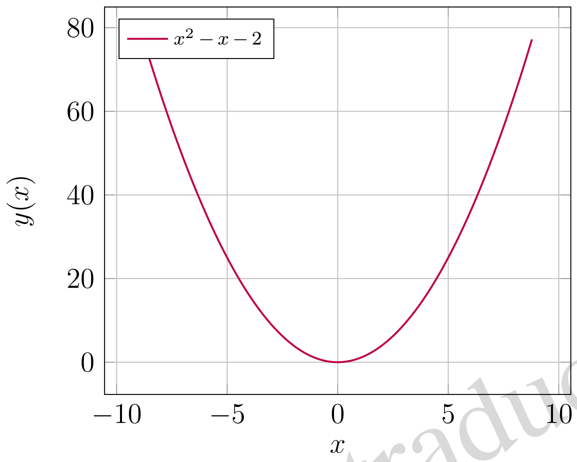
- "Fonctions polynomiales" :

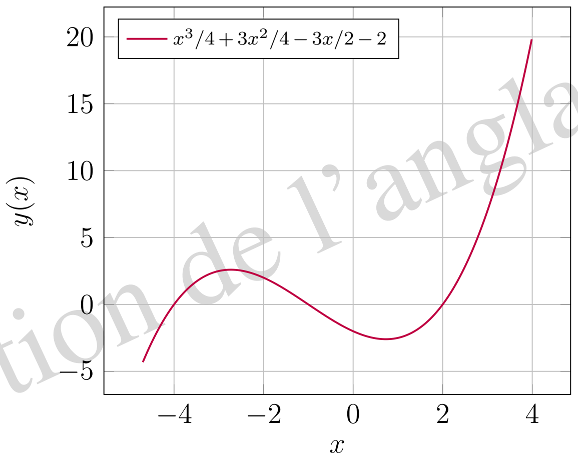
$$f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 \qquad (7.1.75)$$

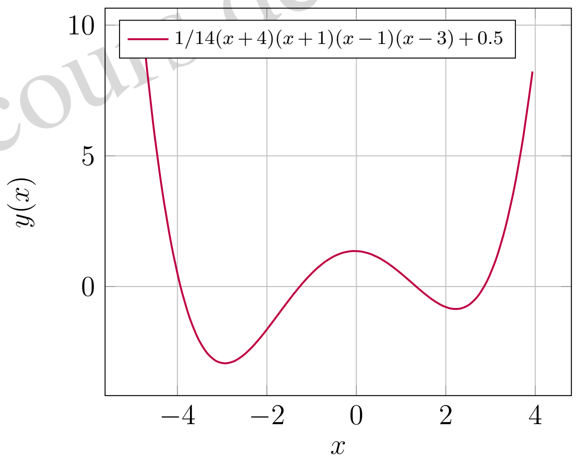
où comme nous le savons déjà $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres constants appelés "coefficients" et n est un entier positif que nous appelons "degré du polynôme" (voir section Calcul Algébrique page 1351). Il est évident que cette fonction est définie pour toutes les valeurs de x, c'est-à-dire qu'elle est définie dans un intervalle infini.

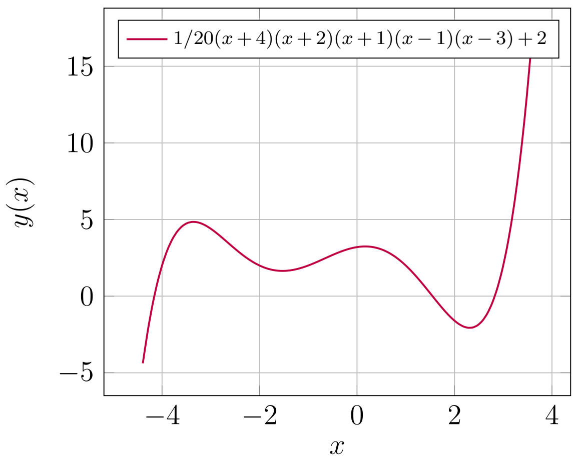
Il s'ensuit que les fonctions puissances du type x^m et les fonctions linéaires du type $f(x) = x$ sont une sous-classe de polynômes pour $m \in \mathbb{N}$.

Nous avons déjà étudié plus en profondeur les polynômes dans la section de Calcul Algébrique avec leurs principales propriétés mais reprenons le tracé de certains d'entre eux pour rappel :

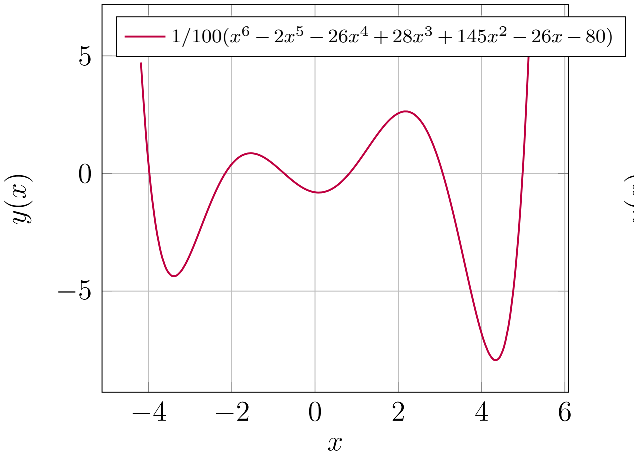








En cours de traduction de l'anglais



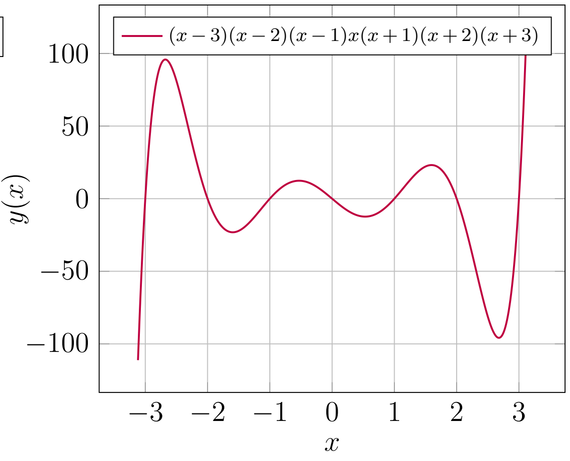


FIG. 7.46 – Quelques polynomes tracés avec TikZ

Nous verrons et étudierons dans ce livre quelques polynômes célèbres comme : les polynômes de Legendre (voir section Chimie Quantique page ??), les polynômes de Bernoulli (voir section Suites et Séries page 1652), les polynômes de Bernstein (voir section Méthodes Numériques page ??), les polynômes d'Hermite (voir section Analyse Fonctionnelle page 2364), ...

- "Fractions rationnelles" qui sont des divisions de polynômes (voir section Calcul Algébrique page 1356) :

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x^1+b_0} \tag{7.1.76}$$

Remarque

Évidemment deux fractions rationnelles sont égales, si l'une s'obtient de l'autre en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même polynôme.

La fraction rationnelle :

$$f(x)=\frac{x^3-2x}{2(x^2-5)} \tag{7.1.77}$$

n'est pas définie en $x^2=5\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$. Elle est asymptotique (voir plus bas) à $\frac{x}{2}$ lorsque x tend vers l'infini :

En cours de traduction de l'anglais

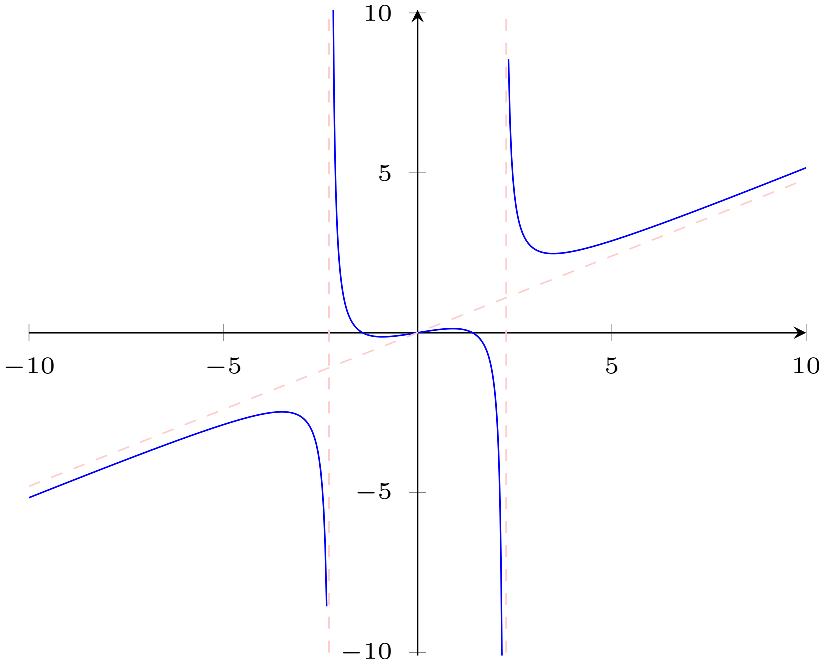


FIG. 7.47 – Exemple d'une fonction rationnelle $f(x) = \frac{x^3-2x}{2(x^2-5)}$ avec TikZ

En cours de traduction de l'anglais

La fonction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \tag{7.1.78}$$

est définie pour tous les nombres réels, mais pas pour tous les nombres complexes, puisque si x était une racine carrée de -1 (c'est-à-dire l'unité imaginaire ou son négatif), alors l'évaluation formelle conduirait à une division par zéro !

Remarques

Une fonction constante est une fonction rationnelle puisque les constantes sont des polynômes ! Toute fonction polynomiale $f(x) = P(x)$ est une fonction rationnelle avec $Q(x) = 1$. Les fonctions puissances $f(x) = x^m$ sont aussi des fonctions rationnelles lorsque $m \in \mathbb{N}$.

- "Fonctions algébriques" sont définies par le fait que la fonction $f(x)$ est le résultat d'une addition, d'une soustraction, d'une multiplication, d'une division, de variables mises à une puissance entière ou non entière. Ainsi la plupart des fonctions définies précédemment peuvent être incluses dans cette définition : fonctions linéaires, fonctions affines, fonctions puissancse, fonctiosn polynomiales, fonctions rationnelles.
- "Fonctions continue par morceau" est une fonction définie par différentes formules sur différentes parties de son domaine. La valeur absolue est un exemple célèbre de fonction définie par morceaux car la formule change avec le signe de x :

$$f(x) = |x| : \begin{cases} -x & x < 0 \\ +x & x \geq 0 \end{cases} \tag{7.1.79}$$

Un autre exemple très connu est la fonction qui permet de calculer les cotisations de retraite en fonction de l'âge. Tous les pays (ou entreprises) qui ont un concept de retraite ont les montants de cotisation basés sur une fonction continue par morceaux.

- "Fonctions en escalier" $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ est défini si et seulement si il existe une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ tel que $a_0 = a$ et $a_n = b$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et tel que :

$$\forall \in \{0, \ldots, n-1\}, \forall x \in]a_i, a_{i+1}[\Leftrightarrow f(x) = \lambda_i \tag{7.1.80}$$

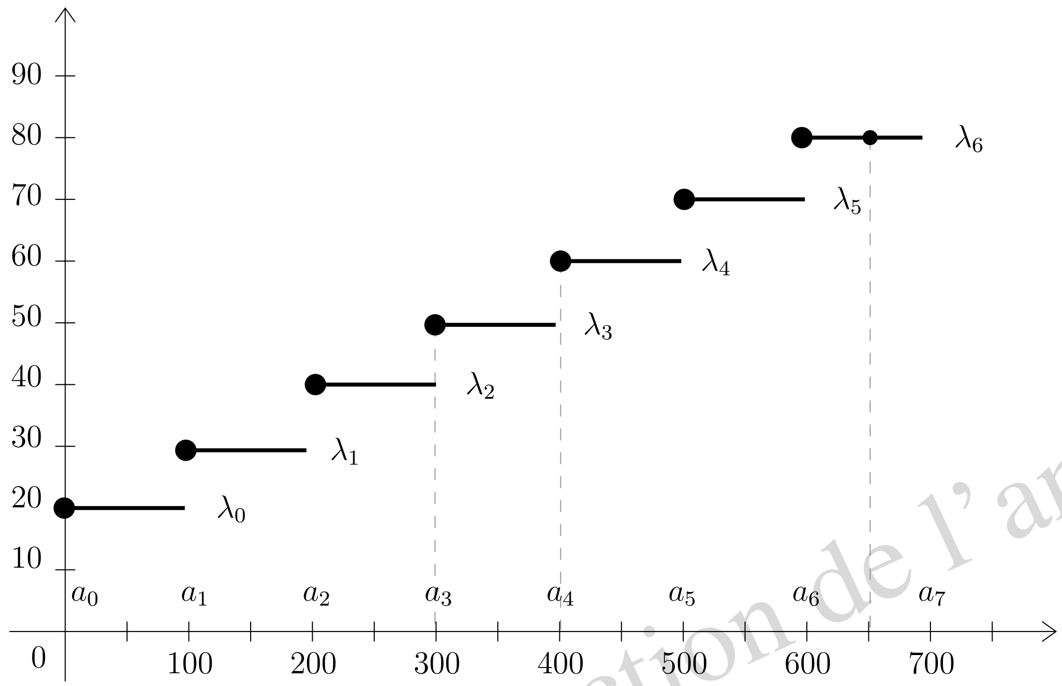


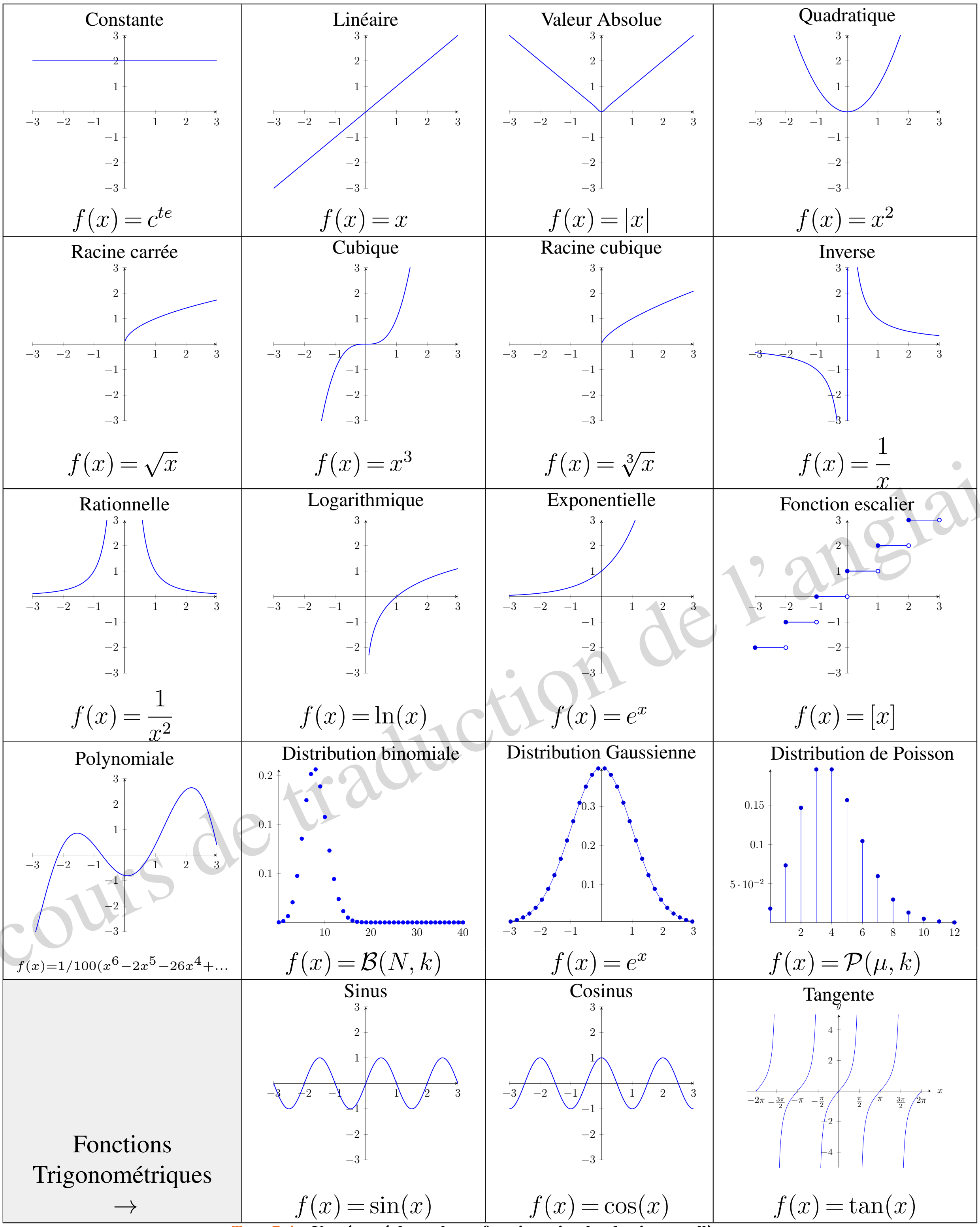
FIG. 7.48 – **Exemple d'une fonction en escalier**

De telles fonctions peuvent être trouvées dans le traitement du signal et également dans les statistiques pour l'analyse de survie.

Cependant, il existe un très grand nombre d'autres fonctions élémentaires que nous rencontrerons dans les différentes sections de ce livre. Les exemples incluent les "fonctions de Bessel" (voir section Suites et Séries page ??), les "fonctions Lipschitz" (voir section Topologie page 2438), les "fonctions de Dirac" (voir section page Calcul Différentiel et Intégral 1547), les "fonctions de distribution" (voir section Statistiques page 621), la "fonction gamma d'Euler" (voir section Calcul différentiel et Intégral page 1552), etc. Le lecteur remarquera que la fonction de Dirac appartient également à la famille des fonctions de distribution.

Voici un assez bon résumé des fonctions les plus élémentaires (non exhaustif mais bon quand même !) :

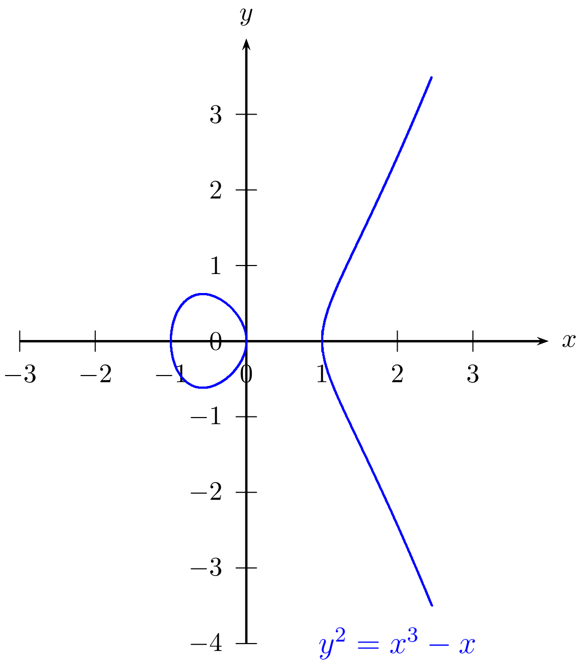
En cours de traduction de l'anglais



TAB. 7.4 – **Un résumé de quelques fonctions simples de niveau collège**

En cours de traduction de l'anglais

Si une fois vous voyez le tracé suivant d'une courbe elliptique (outil mathématique utilisé en cryptographie) :



Il faut éviter de nommer la chose ci-dessus une "fonction" ! En effet, par définition, une "fonction" doit réussir le "test de la ligne verticale" : le test de la ligne verticale est une méthode qui permet de déterminer si une relation donnée est une fonction ou pas. L'approche est plutôt simple. Tracez une ligne verticale coupant le graphique d'une relation, puis observez les points d'intersection. Le test de la ligne verticale prend en charge la définition d'une fonction. Autrement dit, chaque valeur x d'une fonction doit être associée à une seule valeur y. Si une ligne verticale coupe le graphique d'une relation en un seul point exactement, cela implique qu'une seule valeur x n'est associée qu'à une valeur unique de y.

La définition d'une "courbe elliptique" est l'ensemble de tous les points tels que $y^2 = x^3 + ax + b$. Autrement dit, $E_{a,b,c} \equiv \{(x,y) : y^2 = x^3 + ax + b\}$.

Soit une solution $(x_0, y_0) \in E_{a,b,c}$. Dès lors, par définition $y_0^2 = x_0^3 + ax_0 + b$. Donc, $(-y_0)^2 = y_0^2 = x_0^3 + ax_0 + b$. Par conséquent, $(x_0, -y_0) \in E_{a,b,c}$. Il s'ensuit que cela échouera au test de la ligne verticale à $x = x_0$.

C'est-à-dire qu'une courbe elliptique ne peut pas être une fonction de par la définition des mathématiciens (même si on peut en faire une jolie courbe sur un écran ou un papier dans un repère) !

Le graphe (car on ne peut pas utiliser le terme "fonction" dans ce cas...) de relation $yRx \Leftrightarrow y^2 = x^3 - x$ ci-dessus est dit "déconnecté" ; plus précisément, il se compose de deux "composants connectées". Il s'agit d'un concept topologique général qui peut être appliqué à tous les ensembles, pas seulement aux graphes de relations.

En cours de traduction de l'anglais

7.1.2.1 Limites et Continuités des fonctions

Nous allons considérer maintenant des variables ordonnées d'un type spécial, que nous définissons par la relation "la variable tend vers une limite". Dans la suite de ce cours, la notion de limite d'une variable va jouer un rôle fondamental, étant intimement liée aux notions de base de l'analyse mathématique, la dérivée, l'intégrale, etc.

Définition (#7.1.270) : Le nombre L est appelé la "limite" de la grandeur variable x, si, pour tout nombre arbitrairement ε petit avons :

$$|x-L|<\varepsilon \qquad (7.1.81)$$

Si le nombre a est la limite de la variable x, nous disons que "x tend vers la limite L".

Nous pouvons définir également la notion de limite en partant de considérations géométriques (cela peut aider à mieux comprendre... quoique pas toujours...) :

Le nombre constant L est la limite de la variable x, si pour tout voisinage donné, aussi petit qu'il soit, de centre L et de rayon ε, nous pouvons trouver une valeur x telle que tous les points correspondant aux valeurs suivantes de la variable appartiennent à ce voisinage (notions que nous avons défini précédemment). Géométriquement nous représentons cela ainsi :

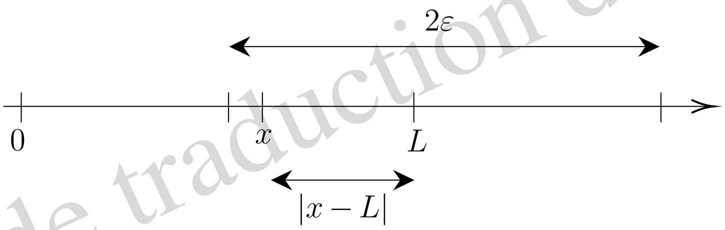


FIG. 7.49 – Concept géométrique de limite dans $\mathbb{R}^3$

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Il devrait être relativement trivial pour le lecteur que la limite d'une grandeur constante est égale à cette constante, puisque l'inégalitéy $|x-c^{te}|=|c^{te}-c^{te}|=0<\varepsilon$ est toujours satisfaite pour $\varepsilon>0$ arbitraire.

R2. Pas toutes les variables n'ont pas de limites. Par exemple $y=\sin(x)$ car cette fonction trigonométrique oscille entre $[-1,+1]$ entre $[-\infty,+\infty]$.

Définition (#7.1.271) : Une variable x tend vers l'infini, si pour chaque nombre positif donné M, nous indiquons une valeur de x à partir de laquelle toutes les valeurs conséquentes de la variable x (valeurs de la variable appartenant dans le voisinage défini à partir de valeur indiquée précédemment) vérifient l'inégalité $|x|>M$. Formellement :

$$|x|\rightarrow+\infty, \forall M>0: \quad |x|>M \qquad (7.1.82)$$

- La variable x "tend vers $+\infty$" si pour tout $M>0$, nous indiquons une valeur de x pour laquelle tous les valeurs successives de la variable x statisfont l'inégalité $M<x$.

C'est typiquement le type de considération que nous avons a pour des suites divergentes (divergentes à l'infini) où pour un terme donné de valeur M de la suite tous les autres termes sont supérieurs à M :

$$x \to +\infty, \forall M > 0: \quad x > M \tag{7.1.83}$$

- Une variable x "tend vers $-\infty$" si pour tout $M < 0$, nous indiquons une valeur de x pour laquelle tous les valeurs successives de la variable x statisfont l'inégalité $x < M$:

$$x \to -\infty, \forall M < 0: \quad x < M \tag{7.1.84}$$

Definition (#7.1.272) : Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un voisinage du point a ou en certains points de ce voisinage. La fonction $y = f(x)$ tend vers la limite L (c'est-à-dire $y \to L$) quand x tend vers a (c'est-à-dire $x \to a$) si pour tout nombre positif ε aussi petit qu'il soit, nous pouvons indiquer un nombre positif δ tel que pour tous les x différents de a et vérifiant l'inégalité $|x-a| < \delta$ satifont également $|f(x)-L| < \varepsilon$. Formellement, une fonction à une limite en L dans un domaine E si :

$$\lim_{x \to a} = L \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists a, L, \forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0: \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \tag{7.1.85}$$

La relation ci-dessus est nommée "définition epsilon-delta de limite" ou "(ε, δ) définition de lilmite".

L'inégalité $|x-a| < \delta$ donne la possibilité d'avoir la distance d'où l'on vient avec notre x sans se préoccuper de la direction (gauche ou droite) puisque l'on prend pour mesure de distance les valeurs absolues. En effet sur un système d'axes représentant des valeurs d'ordonnées, on peut, pour une valeur donnée, venir de la gauche ou de la droite (au besoin on peut imaginer un bus venant à un arrêt de bus qui peut venir de la gauche ou de la droite uniquement puisque la distance absolue entre celui-ci et l'arrêt de bus est inférieure ou égale à δ).

Si L est la limite de la fonction $f(x)$ quand $x \to a$ nous écrivons alors dans ce livre dans tous les cas :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{7.1.86}$$

Évidemment, la définition ci-dessus est disponible lorsque $a = \pm\infty$ ou/et $L = \pm\infty$!

Pour définir le côté depuis lequel nous venons en appliquant la limite, nous utilisons une notation particulière (rappelons que cela permet de connaître de quel côté de la route vient notre bus). Ainsi, si $f(x)$ tend vers la limite L_1 quand x tend vers un nombre a en ne prenant que des valeurs plus petites que a, nous écrirons alors :

$$\lim_{x \to L_-} f(x) = L_1 \tag{7.1.87}$$

(remarquez le petit $-$ en indice) et nous appellerons L_1 la "limite à gauche" de la fonction $f(x)$ au point a (car rappelez-vous que l'axe des abscisses va de $-\infty$ à $+\infty$, donc les petites valeurs par rapport à une valeur donnée, se trouvent à gauche).

Si x prend des valeurs plus grandes que a, nous écrirons alors :

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = L_2 \tag{7.1.88}$$

En cours de traduction de l'anglais

(notez le petit $+$ en indice) et nous appellerons L_2 la "limite à droite" de la fonction $f(x)$ au point a.

Dans la figure ci-dessous nous avons par exemple :

$$\lim_{x \to -3_+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -3_-} f(x) = +\infty \tag{7.1.89}$$

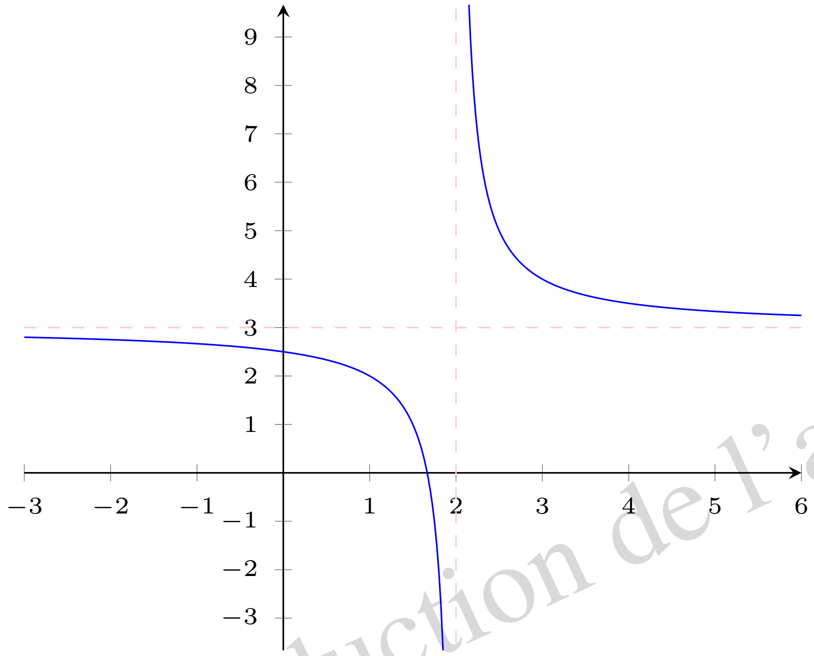


FIG. 7.50 – **Exemple de limites à gauche et droite**

Il n'est pas toujours facile (ni même possible) de calculer les limites de certaines fonctions. Voyons quelques exemples typiques :

✍**Exemples :**

E1. Prouvons que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \tag{7.1.90}$$

est vrai.Pour cela nous devons prouver que pour tout ε petit l'inégalité :

$$\left| 1 + \frac{1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \tag{7.1.91}$$

sera satisfaite dès que $|x| > M$ où M est défini par le choix de ε. L'inégalité précédente est évidemment égale à :

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \tag{7.1.92}$$

qui est satisfait si nous avons x :

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = M \tag{7.1.93}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous admettons que l'exemple et la méthode peuvent être discutés... Mais en fait ce n'est qu'une application de la règle de l'Hospital (rapport des dérivées) déjà démontrée dans la section de Calcul Différentiel et Intégral. Le lecteur doit également savoir que nous verrons également d'autres techniques pour déterminer des limites plus loin avec de meilleurs exemples.

E2. Maintenant, en utilisant la série de Taylor et le changement de variables, considérons que nous voulons calculer :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x^2+5x)}-x \tag{7.1.94}$$

La méthode est assez intuitive. En effet, nous faisons d'abord un changement de variable :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x^2+5x)}-x&=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{5}{x}}-x\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\sqrt{1+5y}-1\right)\end{aligned} \tag{7.1.95}$$

Considérons maintenant la série de Taylor autour de $x=0$ pour la fonction $f(x)=\sqrt{1+ax}$. Nous avons :

$$f'(x)=\frac{1}{2}a(1+ax)^{-1/2}\qquad f''(x)=-\frac{1}{4}(1+ax)^{-3/2} \tag{7.1.96}$$

Ce qui donne :

$$f(x)\cong 1+\frac{1}{2}ax+\mathcal{O}(x^2) \tag{7.1.97}$$

comme un développement de Taylor autour de $x=0$ (donc un développement de Maclaurin). En appliquant ceci à notre limite, nous voyons que :

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\sqrt{(1+5y)}-1\right)\cong\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(1+\frac{5}{2}y+\mathcal{O}(y^2)-1\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{5}{2}+\mathcal{O}(y)\right)=\frac{5}{2} \tag{7.1.98}$$

E3. Nous voulons calculer la limite de :

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x) \tag{7.1.99}$$

Comment pouvons-nous gérer quelque chose comme ça ? Une idée, c'est de se rappeler que cela signifie aussi implicitement :

$$\arctan(+\infty)=\theta \tag{7.1.100}$$

Dès lors :

$$+\infty=\tan(\theta) \tag{7.1.101}$$

Et pour répondre quelle est la valeur de θ, nous nous référons au tracé de la fonction $\tan(\theta)$ et nous voyons alors que la première valeur correspondante est $\pi/2$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=\frac{\pi}{2} \tag{7.1.102}$$

La signification des symboles $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$ rend évidente la signification des expressions :

$$f(x) \text{ tends to } L \text{ when } x \to +\infty \tag{7.1.103}$$

et :

$$f(x) \text{ tends to } L \text{ when } x \to -\infty \tag{7.1.104}$$

que nous notons formellement par :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L \tag{7.1.105}$$

Nous avons défini les cas où la fonction $f(x)$ tend vers une certaine limite L quand $x \to a_{+,-}$ ou $x \to \pm\infty$. Considérons maintenant le cas où la fonction tend vers l'infini quand la variable x varie d'une certaine manière.

Nous avons alors typiquement et évidemment :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{or} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \tag{7.1.106}$$

Ou quand nous devons indiquer la direction :

$$\lim_{x \to a_{+,-}} f(x) = +\infty \qquad \text{or} \qquad \lim_{x \to a_{+,-}} f(x) = +\infty \tag{7.1.107}$$

Si la fonction $f(x) \to +\infty$ quand $a \to +\infty$ alors nous écrivons :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{7.1.108}$$

Et comme nous avons quatre possibilités pour les signes, nous écrivons :

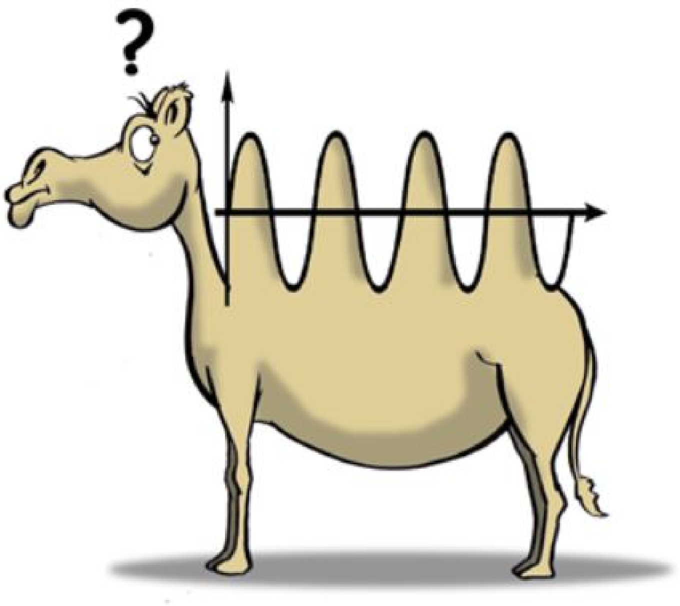
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \tag{7.1.109}$$

c'est-à-dire les quatre possibilités suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \; \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \; \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \tag{7.1.110}$$

Et encore une fois n'oubliez pas comme nous l'avons déjà mentionné précédemment que certaines fonctions comme par exemple $f(x) = \sin(x)$ n'ont pas de limite finie lorsque $x \to \pm\infty$. Nous disons alors que la fonction est juste "bornée" (voir section Théorie des Ensembles page 281).

En cours de traduction de l' anglais



Maintenant que nous avons grosso modo eu un aperçu du concept de limite, nous allons donner une définition extrêmement importante qui est un des piliers de beaucoup de domaines de la mathématique, de la physique théorique et des méthodes numériques.

Définition (#7.1.273) : Soit $f(x)$ et un de ses sous-domaines (ou son domaine entier) E (la majorité du temps $E \subseteq \mathbb{R}$) et $x_0 \in E$. Nous disons que nous avons "fonction continue" en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (7.1.111)$$

c'est-à-dire si (il faut pouvoir arriver à y lire le fait qu'on s'approche de manière infiniment petite d'une limite ce qui permet d'assurer la continuité) :

$$\boxed{\forall x_0 \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} \qquad (7.1.112)$$

appelée la "définition de la continuité epsilon-delta" ou "définition (ε, δ) de la continuité".

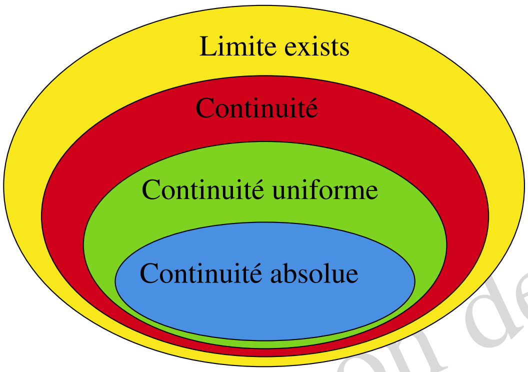
N'oubliez pas que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ indique que lorsque la distance de l'entrée par rapport à x_0 est petite, la distance de la sortie par rapport à $f(x_0)$ doit être petite. Petite comment ? Arbitrairement petite ! Si $|a - b| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $a = b$! La seule façon dont $|x - x_0|$ peut être petit est si x était réellement très proche de x_0. C'est le but de δ ! Pour mesurer à quel point nous sommes proches de x_0. Ainsi, lorsque nous nous rapprochons de x_0, nous devrions nous attendre à nous rapprocher de $f(x_0)$!

Autrement dit : une fonction est "continue" si pour tout point x_0 du domaine E, nous pouvons faire que les images de ce point ($f(x_0)$) et d'un autre point ($f(x)$) arbitrairement proche (d'une distance ε) si nous rapprochons suffisamment l'autre point (x) (distance δ) de notre point donné (x_0).

En cours de traduction de l'anglais

Attention ! Certaines personnes ont du mal à comprendre la différence entre la définition d'une limite d'une fonction et la définition de la continuité. La différence est que pour la limite $0<|x-L|<\delta$ signifie qu'on n'impose aucune condition à la fonction pour $x=L$, alors que dans la définition de la continuité, on a $|x-x_0|<\delta$. La différence est que dans la définition de la continuité à x_0, nous insistons pour que la fonction soit également définie à $x=x_0$, mais nous ne le faisons pas dans la définition de la limite !

Cette dernière relation sera un peu généralisée dans la section de Topologie et complétée par le concept de... "continuité uniforme" (qui peut elle-même être généralisée par "continuité absolue" mais cela sort du cadre de ce livre) !



En ... uction de l' anglais

Remarques

R1. f est "continue à gauche" ou respectivement "continue à droite", si nous ajoutons à la définition ci-dessus la condition $x>x_0$, respectivement $x<x_0$.

R2. Une fonction continue avec une fonction inverse continue est nommée un "homéomorphisme".

R3. Au lieu de dire quand il est nécessaire qu'une fonction n'est pas continue sur x_0 ou sur un domaine donné, certains praticiens préfèrent dire que la fonction possède une "oscillation".

Nous avons les corollaires triviaux suivants :

C1. $f(x)$ est continue sur x_0 si et seulement si $f(x)$ est continue à droite et à gauche de x_0.

C2. $f(x)$ est continue sur E si et seulement si $f(x)$ est continue sur tout point de E.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues en x_0, alors nous avons les propriétés suivantes (nous n'en prouverons certaines qu'à la demande des lecteurs !) :

P1. $f(x)+g(x)$ (aussi parfois noté $(f+g)(x)$) est aussi epsilon-delta continu en x_0.

Comme un lecteur a demandé la preuve de cette affirmation, faisons-là !

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont epsilon-delta continues en a, alors $(f+q)(x)$ (notation raccourcie pour $f(g)+g(x)$) est aussi epsilon-delta continue en a.

Ainsi, pour un $\varepsilon>0$ donné nous devons trouver $\delta>0$ tel que si $0|x-a|<\delta$, alors $|(f+q)(x)-(f+g)(a)|<\varepsilon$.

Nous avons d'abord évidemment :

$$|f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))|=|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)| \tag{7.1.113}$$

Mais à cause de l'inégalité triangulaire de la valeur absolue, nous avons :

$$|f(x)-f(a)+g(x)-g(a)|\leq|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)| \tag{7.1.114}$$

Comme $f(x)$ et $g(x)$ sont supposés epsilon-delta continus, c'est-à-dire $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ lorsque $<|x-a|<\delta_f$ et $|g(x)-f(a)|<\varepsilon$ quand $|x-a|<\delta_g$ nous avons donc pour la relation précédente :

$$\underbrace{|f(x)-f(a)|}_{\leq\varepsilon}+\underbrace{|g(x)-g(a)|}_{\leq\varepsilon}\leq 2\varepsilon \tag{7.1.115}$$

Ok vous avez compris jusqu'à présent comment nous obtenons cette dernière relation et surtout le 2ε, inversons maintenant le raisonnement ! Nous avons de ce dernier :

$$\begin{gathered}|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|<2\varepsilon\\|f(x)-f(a)+g(x)-g(a)|<2\varepsilon\end{gathered} \tag{7.1.116}$$

et définissons δ_h comme $\min(\delta_g,\delta_f)$ et $h(x)$ peut être défini comme $f(x)+g(x)$. Donc :

$$|h(x)-h(a)|<2\varepsilon \tag{7.1.117}$$

Nous pouvons évidemment remplacer δ_f et δ_g par δ_h pour obtenir :

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \text{ quand } |x-a|<\delta_h \text{ et } |g(x)-g(a)|<\varepsilon \text{ quand } |x-a|<\delta_h \tag{7.1.118}$$

Comme :

$$|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|<2\varepsilon \tag{7.1.119}$$

que nous avons déduit juste avant est vrai lorsque $0<|x-a|<\delta_h$, nous pouvons trouver un δ_h pour chaque valeur de 2ε.

Finalement cela signifie que pour chaque $2\varepsilon>0$ il y a un $\delta>0$ tel que $|x-a|<\delta\Longrightarrow|h(x)-h(a)|<2\varepsilon$ et pour tous les 2ε, il existe un ε et donc pour chaque ε, il existe un δ.

P2. $f(x)-g(x)$ (aussi parfois noté $(f-g)(x)$) est aussi epsilon-delta continu à x_0.

La preuve est immédiate par rapport à la preuve précédente puisqu'il suffit de poser $-g(x)=h(x)$ (nous admettrons que le signe négatif d'une fonction epsilon-delta continue est encore epsilon-continue et ce sans preuve) et donc nous nous rabattons sur une somme $f(x)+h(x)$.

P3. $c^{te}f(x)$ est aussi epsilon-delta continu à x_0.

En cours de traduction de l'anglais

P4. $f(x)\cdot g(x)$ (aussi parfois noté $fg(x)$) est aussi epsilon-delta continu à x_0.

Soient $f,g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ tels que f et g soient epsilon-delta continus. Soit $u:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ défini par $u(x)=f(x)g(x)$. Nous voulons montrer : u est epsilon-delta continu, c'est-à-dire que pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe des $\delta>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $|x-x_0|<\delta$, $|u(x)-u(x_0)|<\varepsilon$.

Nous avons d'abord en utilisant une première fois les propriétés de l'inégalité triangulaire et de la multiplicativité de la valeur absolue :

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(x_0))g(x_0))|&=|f(x)g(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0))g(x)-f(x_0)g(x_0))|\\&\leq|f(x)g(x)-f(x_0))g(x)|+|f(a)g(x)-f(x_0)g(x_0)|\\&=|(g(x)[f(x)-f(x_0)]|+|f(x_0)[g(x)-g(x_0)]|\\&=|g(x)|\cdot|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|\end{aligned}\tag{7.1.120}$$

Maintenant, les termes $|f(x)-f(x_0)|$ et $|g(x)-g(x_0)|$ sont bons, puisque $f(x)$ et $g(x)$ sont epsilon-delta continus à x_0. De plus, le terme $|g(x_0)|$ est bon puisqu'il est constant !

Le problème est $g(x)$. Voyons si nous pouvons faire quelque chose d'intelligent pour nous en débarrasser ?! Nous pouvons essayer de réécrire en utilisant (encore...) l'inégalité triangulaire de la valeur absolue :

$$|g(x)|=|g(x)-g(x_0)+g(x_0)|\leq|g(x)-g(x_0)|+|g(x_0)|\tag{7.1.121}$$

Rappelez-vous maintenant que $g(x)$ est continu, donc $\forall x\in\mathbb{R}$ avec $|x-x_0|<\delta$ nous avons :

$$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon_g\tag{7.1.122}$$

Nous pouvons donc réécrire antépénultième inégalité sous la forme :

$$|g(x)|\leq\underbrace{|g(x)-g(x_0)|}_{<\varepsilon_g}+|g(x_0)|<\varepsilon_g+|g(x_0)|\tag{7.1.123}$$

Nous obtenons donc enfin une relation qui peut nous aider à nous débarrasser du $g(x)$ qui nous a posé problème plus tôt :

$$|g(x)|<\varepsilon_g+|g(x_0)|\tag{7.1.124}$$

Et nous pouvons l'injecter dans l'étape qui nous posait des problèmes, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)|&\leq|g(x)|\cdot|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|\\&<(\varepsilon_g+|g(x_0)|)\cdot|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|\end{aligned}\tag{7.1.125}$$

Ce qui donne :

$$|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)<(|g(x_0)|+\varepsilon_g)\cdot|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|\tag{7.1.126}$$

Mais comme $f(x)$ et $g(x)$ sont epsilon-delta continus nous savons que nous avons $\varepsilon_f,\varepsilon_g$ qui existent tels que :

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_f\qquad\text{et}\qquad|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon_g\tag{7.1.127}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi :

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)|&<(|g(x_0)|+\varepsilon_g)\cdot|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|\\&=(|g(x_0)|+\varepsilon_g)\cdot\varepsilon_f+|f(x_0)|\cdot\varepsilon_g\end{aligned} \tag{7.1.128}$$

Nous pouvons nous arrêter ici et la preuve est terminée car nous n'avons que des termes constants qui peuvent être infiniment petits. Cependant, les mathématiciens aiment terminer[3] cette preuve avec un seul terme à droite de l'égalité qui ressemble à un seul ε. Donc évidemment, comme nous avons deux termes qui s'additionnent, nous devrions avoir quelque chose qui ressemble à $\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. Pour cela, les mathématiciens se débarrassent du $(|g(x_0)|+\varepsilon_g)\cdot\varepsilon_f$ en définissant (ils le peuvent absolument, ce n'est pas interdit) :

$$\varepsilon_f=\frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+\varepsilon_g)} \tag{7.1.129}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)|&<(|g(x_0)|+\varepsilon_g)\cdot\varepsilon_f+|f(x_0)|\cdot\varepsilon_g\\&=(|g(x_0)|+\varepsilon_g)\cdot\frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+\varepsilon_g)}+|f(x_0)|\cdot\varepsilon_g\\&=\frac{\varepsilon}{2}+|f(x_0)|\cdot\varepsilon_g\end{aligned} \tag{7.1.130}$$

Ok, ça a l'air mieux, mais pour les mathématiciens, c'est toujours moche à cause du terme $|f(x_0)|\cdot\varepsilon_g$. Vous pensez donc peut-être que nous devrions dire simplement :

$$\varepsilon_g=\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|} \tag{7.1.131}$$

et c'est fait comme la somme des deux termes donnerait ε ! Mais ce n'est pas le cas ! ! ! Parce que si dans le cas particulier où nous pouvons avoir $|f(x_0)|=0$ nous on aurions alors une division par zéro ! Une idée serait donc d'ajouter une valeur, que nous noterons $\Delta\neq 0$ telle que le dénominateur ne puisse jamais être nul. Mettons par exemple :

$$\varepsilon_g=\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|+\Delta} \tag{7.1.132}$$

Cependant, si nous faisons cela, nous n'avons pas :

$$|f(x_0)|\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|+\Delta}\neq\frac{\varepsilon}{2} \tag{7.1.133}$$

Nous voyons évidemment que la seule solution pour obtenir le (joli) résultat attendu serait d'ajouter un terme dans le premier facteur tel que :

$$\left(|f(x_0)|+\underbrace{\frac{\Delta}{2}}_{\text{nous ajoutons cela}}\right)\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|+\Delta}=\frac{\varepsilon}{2} \tag{7.1.134}$$

[3] Il y a une raison profonde à cela ! Si nous ne pouvons pas terminer la preuve de cette façon, la fonction sera certainement "continue" mais pas "continue et uniforme" (c'est une propriété dont la plupart des ingénieurs ne se soucient pas). Par exemple, x^2 ou e^x sont deux fonctions qui sont epsilon-delta continues mais non continues uniformes. L'impact est hors du niveau de ce livre dédié pour rappel aux ingénieurs.

En cours de traduction de l'anglais

Cependant... pouvons-nous faire ça ? En d'autres termes, pouvons-nous écrire quelque chose comme ceci (en revenant quelques pas en arrière) :

$$|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)| \overset{?}{<} (|g(x_0)|+\varepsilon_g)\cdot\varepsilon_f + \left(|f(x_0)|+\frac{\Delta}{2}\right)\cdot\varepsilon_g \tag{7.1.135}$$

Et nous voyons évidemment que la réponse est OUI si et seulement si $\Delta > 0$.

Donc pour résumer tout ce que nous avons trouvé jusque là, nous avons :

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)| &= |f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)|\\ &\leq |f(x)g(x)-f(x_0)g(x)|+|f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)|\\ &= |\,g(x)(f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)(g(x)-g(x_0))\,|\\ &= |g(x)|\cdot|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|\\ &< (|g(x_0)|+\varepsilon)\cdot\frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+\varepsilon)}+|f(x_0)|\cdot|g(x)-g(x_0)|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+|f(x_0)|\cdot\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|+\Delta}\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\left(|f(x_0)|+\frac{\Delta}{2}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|+\Delta}\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned} \tag{7.1.136}$$

Et c'est le joli résultat final que les mathématiciens aiment avoir !

P5. $|f(x)|$ est aussi epsilon-delta continu à x_0.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, puisque $f(x)$ est continu en x_0, il y a $\delta > 0$ tel que si $|x-x_0|<\delta$, alors $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Avec ce même δ, si $|x-x_0|<\delta$, alors par l'inégalité triangulaire inverse (voir section Opérateurs Arithmétiques page ??), qui dit $|a-b|\geq ||une|-|b||$, nous avons :

$$||f(x)|-|f(x_0)|| \leq |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \tag{7.1.137}$$

Dès lors, $|f(x)|$ est epsilon-continu à x_0

P6. $1/f(x)$ est aussi epsilon-delta continu à x_0.

Cette fois, nous devons estimer :

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right| = \left|\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)f(x_0)}\right| = \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|f(x)||f(x_0)|} \tag{7.1.138}$$

Le terme $|f(x)-f(x_0)|$ est bon, et le terme $|f(x_0)|$ est ok lui aussi (puisque c'est une constante).

Le seul terme que nous devons contrôler est le terme $|f(x)|$.

Puisque nous voulons $\frac{1}{|f(x)|} <$ quelque chose, nous avons besoin de $|f(x)| >$ quelque chose !

En utilisant l'inégalité triangulaire inverse de la valeur absolue, nous avons que nous avons :

$$|f(x)-f(x_0)| \geq ||f(x)|-|f(x_0)|| \tag{7.1.139}$$

En cours de traduction de l' anglais

Mais comme $|a| \geq -a$ pour tout a, nous pouvons alors écrire :

$$|f(x) - f(x_0)| \geq ||f(x)| - |f(x_0)|| \geq -(|f(x)| - |f(x_0)|) = |f(x_0)| - |f(x)| \quad (7.1.140)$$

Ainsi nous obtenons :

$$|f(x_0)| - |f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| \quad (7.1.141)$$

Mais maintenant gardez à l'esprit que comme $f(x)$ est continu, il existe un δ_1 tel que si $|x - x_0| < \delta_1$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1$. Choisissons donc empiriquement :

$$\varepsilon_1 = \frac{|f(x_0)|}{2} \quad (7.1.142)$$

Alors avec ce choix (gardez à l'esprit que cette inégalité est valable si et seulement si $|x - x_0|$ est suffisamment petit et $f(x) \neq 0$ et que nous pouvons choisir autre chose que 2 au dénominateur mais nous avons fait ce choix car nous aurons un joli résultat à la fin !) :

$$|f(x_0)| - |f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \quad (7.1.143)$$

Et donc en réorganisant :

$$|f(x)| > |f(x_0)| - \frac{|f(x_0)|}{2} = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0 \quad (7.1.144)$$

Dès lors :

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|f(x_0)|} \quad (7.1.145)$$

Et c'est bien que nous voulions souvenez-vous en ! Nous voulions $\frac{1}{|f(x)|} <$ quelque chose, nous avions pour cela besoin de $|f(x)| >$ quelque chose ! Alors maintenant, nous l'avons ! Ainsi :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| &= \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x)||f(x_0)|} \\ &\leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x_0)|}\left(\frac{2}{|f(x_0)|}\right) \\ &= |f(x) - f(x_0)|\left(\frac{2}{|f(x_0)|^2}\right) \\ &? < \varepsilon \end{aligned} \quad (7.1.146)$$

Alors, sommes-nous coincés ? Non ! Car pour la dernière ligne ci-dessus nous voyons qu'il suffirait juste d'avoir :

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}|f(x_0)|^2 \quad (7.1.147)$$

Et c'est quelque chose que nous pouvons également choisir car $f(x)$ est epsilon-delta continue et $f(x) \neq 0$.

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons donc écrire la preuve complète à partir d'ici maintenant que nous avons tous les outils ! :

Considérons $\varepsilon > 0$ étant donné.

Alors, puisque $f(x)$ est epsilon-delta continue à x_0, il y a $\delta_1 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta_1$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2}$, ce qui implique $|f(x)| > \ frac|f(x_0)|2$, et donc $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|f(I_0)|}$.

De plus, comme $f(x)$ est epsilon-delta continue à x_0, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_2$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}|f(x_0)|^2$.

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, alors, si $|x - x_0| < \delta$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| &= \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x)||f(x_0)|} \\
&\leq \left(\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x_0)|}\right)\left(\frac{2}{|f(x_0)|}\right) \\
&= |f(x) - f(x_0)|\left(\frac{2}{|f(x_0)|^2}\right) \\
&< \left(\frac{\varepsilon|f(x_0)|^2}{2}\right)\left(\frac{2}{|f(x_0)|^2}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned} \quad (7.1.148)$$

Et ça termine la démonstration ! Si $f(x)$ est epsilon-delta continue alors nous avons bien $\frac{1}{f}$ qui est également epsilon-delta continue en x_0.

P7. $f(x)/g(x)$ (aussi parfois notée $f/g(x)$) est aussi epsilon-delta continue à x_0.

Ceci se prouve immédiatement en utilisant la propriété de epsilon-delta continuité de l'inverse $(1/f(x))$ et de la multiplication $(f(x) \cdot 1/g(x))$.

P8. $f^n(x)$ est aussi epsilon-delta continue à x_0.

Ceci est immédiat car c'est le produit n fois de $f \cdot f \cdot f \ldots$ comme cela découle de la propriété P4.

P9. $\sqrt[n]{x}$ est aussi epsilon-delta continue à x_0.

La preuve est donnée dans la liste des limites et continuités communes plus bas.

P10. $g \circ f$ (aussi parfoit notée $g(f(x))$ est aussi epsilon-delta continuue à x_0.

D'abord un petit rappel pourrait être utile ! :

Si A, B, C sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des fonctions, alors la composition $g \circ f : A \to C$ est définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (7.1.149)$$

Montront maintenant que la composition de deux fonctions epsilon-delta continues est epsilon-delta continue ! En d'autres termes : Si $f(x)$ est epsilon-delta continue en x_0 et g est epsilon-delta continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est epsilon-delta continue en x_0.

Soit $\varepsilon > 0$ donné.

En cours de traduction de l' anglais

Comme g est epsilon-delta continue $f(x_0)$, il existe $\delta' > 0$ tel que :

$$|x - f(x_0)| < \delta' \Rightarrow |g(x) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (7.1.150)$$

Dès lors, il existe $\delta' > 0$ tel que :

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta' \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (7.1.151)$$

Mais maintenant, comme $f(x)$ est epsilon-delta continue en x_0, par la définition de l'epsilon-delta continuité (mais avec δ' au lieu de ε), il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \delta'$.

Dès lors, avec un δ tel que ci-dessus, si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \delta'$ et ainsi :

$$|(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (7.1.152)$$

Donc finalement $g\circ f$ est epsilon-delta continue en x_0.

En cours de traduction de l'anglais

7.1.2.1.1 Théorème des gendarmes

Le "théorème de gendarmes" (également connu sous le nom de "théorème du sandwich", entre autres noms[4]) est un théorème concernant la limite d'une fonction coincée entre deux autres fonctions.

Le théorème des gendarmes est utilisé en analyse, généralement pour confirmer la limite d'une fonction par comparaison avec deux autres fonctions dont les limites sont connues. Il a été utilisé pour la première fois géométriquement par les mathématiciens Archimède et Eudoxe dans le but de calculer π, et a été formulé en termes modernes par Carl Friedrich Gauss. Nous l'utiliserons plus loin (en association avec la définition de la continuité epsilon-delta) pour calculer/prouver certaines limites très courantes.

Le théorème des gendarmes s'énonce formellement comme suit :

Théorème 7.3. Soit I un intervalle contenant le point a. Soit $g(x)$, $f(x)$ et $h(x)$ des fonctions définies sur I, sauf éventuellement sur a lui-même. Supposons que pour chaque x dans I non égal à a, nous ayons :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad (7.1.153)$$

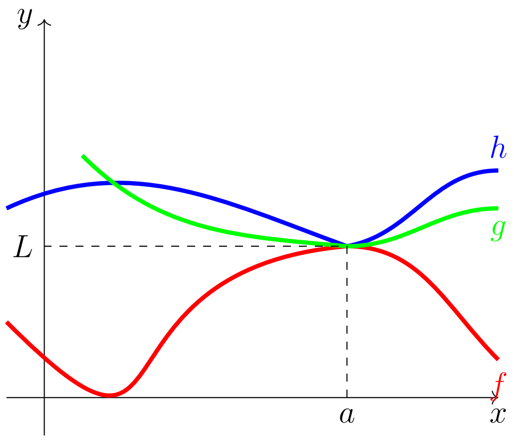
et aussi supposons que :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \quad (7.1.154)$$

Alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad (7.1.155)$$

[4] Également connu sous le nom de théorème de l'étau, ou théorème d'encadrement. En Italie, le théorème est également connu sous le nom de théorème des carabiniers.



Les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont dites êtres les limites inférieures et supérieures (respectivement) de $f(x)$ qui convergent toutes deux vers la limite a.

Ici, il n'est pas requis pour a de se situer à l'intérieur de I. Effectivement, si a est un point final de I, alors les limites ci-dessus sont des limites à gauge, respectivement à droite.

Remarque

Une affirmation similaire est valable pour des intervalles infinis : par exemple, si $I = [0, +\infty[$, alors la conclusion est valable, en prenant les limites comme $x \to +\infty$. Ce théorème est également valable pour les séquences. Soit $(a_n), (c_n)$ deux séquences convergeant vers ℓ, et (b_n) une séquence. Si $\forall n \geq N, N \in \mathbb{N}$ nous avons $a_n \leq b_n \leq c_n$, alors (b_n) converge également vers ℓ.

En accord avec les hypothèses que nous avons, en prenant les limites inférieures et supérieures :

$$L = \lim_{x\to a} g(x) \leq \liminf_{x\to a} f(x) \leq \limsup_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) = L \qquad (7.1.156)$$

donc toutes les inégalités sont effectivement des égalités et la thèse suit immédiatement.

Démonstration 7.3.1. Une preuve directe, en utilisant la définition (ε, δ) de la limite ci-dessus, serait de prouver que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout x avec $|x-a| < \delta$, nous avons $|f(x) - L| < \varepsilon$. Symboliquement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \qquad (7.1.157)$$

Supposons que nous savons (parce que cela est démontré dans un contexte spécial) que :

$$\lim_{x\to a} g(x) = L \qquad (7.1.158)$$

Ce qui signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x\ (|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon) \qquad (7.1.159)$$

Et supposons que nous savons aussi que (parce que cela est aussi démontré dans un contexte spécial) que :

$$\lim_{x\to a} h(x) = L \tag{7.1.160}$$

Ce qui signifie qie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x \left(|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon\right) \tag{7.1.161}$$

Nous avons alors :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \tag{7.1.162}$$

et aussi :

$$g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L \tag{7.1.163}$$

Nous pouvons choisir $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Alors, si $|x-a| < \delta$, en combinant :

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x \left(|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon\right)\\ \text{et}\\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x \left(|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon\right)\end{gathered} \tag{7.1.164}$$

Nous avons :

$$-\varepsilon < g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon \tag{7.1.165}$$

Dès lors :

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \tag{7.1.166}$$

Ce qui complete la démonstration !

En cours de traduction de l' anglais

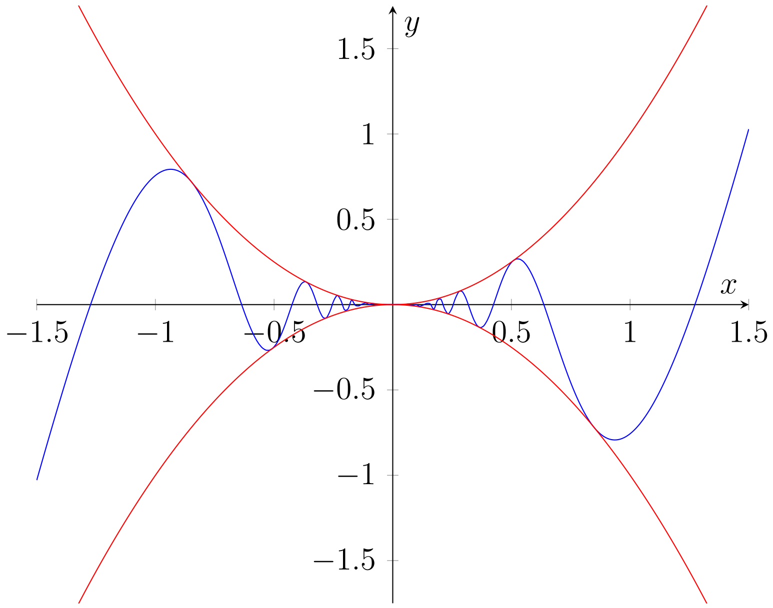
■ Q.E.D.

✍ **Exemple :**

La limite :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

illustrée ci-dessous :



Ne peut pas être déterminé via la loi de limites suivante :

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

parce que :

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas.

Cependant, par la définition de la fonction sinus :

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Il s'ensuit que :

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Étant donnée que (assumant que sa continuité epsilon-delta est démontrée quelque part) :

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

par la théorème des gendarmes, $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ doit aussi être égal à 0.

7.1.2.1.2 Limites (et Continuités) usuelles

Les premières preuves de continuités epsilon-delta peuvent être trouvés dans les travaux de Augustin-Louis Cauchy (11789–11867 selon calendrier holocène).

Voici quelques limites usuelles à connaître (bien évidemment pour chacune nous allons aussi démontrer si elles sont epsilon-delta continues ou non par curiosité[5]) :

1. Pour tout nombre réel a et c :

$$\lim_{x\to a} c = c \tag{7.1.167}$$

 - D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
 Appliquons la définition de la continuite epsilon-delta. Nous choisissons donc un nombre réel arbitraire x_0. Dès lors pour un $\varepsilon > 0$ donné, nous essayons de trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout x :

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| = |k - k| = 0 < \varepsilon \tag{7.1.168}$$

 Étant donné que $0 < \varepsilon$ est vrai par hypothèse, nous pouvons choisir un δ arbitaire comme $\delta = \pi^{\pi^{\pi^{\pi}}}$. Et cela satisfait effectivement la condition de continuité epsilon-delta en x_0.
 Vu que le choix de x_0 était arbitraire, cette inégalité tient pour tout nombre réel et comme le choix de k est arbitraire, cet argument tient pour toute fonction constante. Ainsi, toutes les fonctions constantes sont epsilon-delta continues !
 - Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
 Ceci est par définition et ne nécessite donc pas de démonstration.

2. Pour tout nombre réel a et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \tag{7.1.169}$$

 - D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
 Donc nous devons montrer que $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^n - x_0^n| < \varepsilon \tag{7.1.170}$$

 Nous devons montrer qu'il existe un δ qui satisfait la relation ci-dessus.
 Soit ε un nombre positif quelconque. Notons $x_0 + \delta = x$ et $x^n - x_0^n = \Delta$. Alors identiquement :

$$\Delta = (x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right) \tag{7.1.171}$$

 En prenant la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire de la valeur absolue (voir section Arithmétique page 324) nous donne :

$$|\Delta| = |\delta| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right| \leq |\delta| \cdot \left(\left|x^{n-1}\right| + \left|x^{n-2}x_0\right| + \ldots + \left|x_0^{n-1}\right|\right) \tag{7.1.172}$$

[5] N'oubliez pas que la continuité epsilon-delta sur un ensemble ou sous-ensemble implique que la limite dans le même ensemble ou sous-ensemble existe mais le contraire n'est pas vrai !

En cours de traduction de l'anglais

Mais comme depuis l'inégalité triangulairé de la valeur absolue $|x| = |x_0 + \delta| \leq |x_0| + |\delta|$ et aussi $|x_0| \leq |x_0| + |\delta|$, donc chaque somme entre parenthèses est au plus égale à $(|x_0| + |\delta|)^{n-1}$, et comme il y a n sommes, la somme est au plus égale à $n(|x_0| + |\delta|)^{n-1}$. Dès lors, nous avons : :

$$|\Delta| \leqq n|\delta|(|x_0| + |h|)^{n-1} \tag{7.1.173}$$

Nous pouvons choisir $|\delta| < 1$. Ce qui implique :

$$|\Delta| \leq n|\delta|(|x_0| + 1)^{n-1} \tag{7.1.174}$$

Le membre de droite de cette inégalité est inférieur à ε dès lors que nous avons encore besoin de :

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{n(|x_0| + 1)^{n-1}} \tag{7.1.175}$$

Comme nous sommes capables de trouver un δ cela signifie que la fonction puissance $x \mapsto x^n$ est epsilon-delta continue au point x_0 (cependant, comme la relation finale dépend de x_0, notez que cela veut dire que la fonction n'est pas uniforme continue !).

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  La preuve de la limite epsilon-delta est simple grâce au résultat précédent.

  Comme $x_0 = a$, nous avons :

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{n(|a| + 1)^{n-1}} \tag{7.1.176}$$

Et donc nous pouvons toujours trouver un ε donné tel que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite et que la limite existe sur a. Nous pouvons alors effectivement écrire :

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n \tag{7.1.177}$$

Ou voici un autre argument plus détaillé pour ceux qui le préfèrent :

$$\begin{aligned}
& f(x) = x^n \text{ is continuous at } x_0 > 0 \\
& \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall 0 < |x - x_0| < \delta, |x^n - x_0^p| < \varepsilon \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall 0 < \left|\frac{x}{x_0} - 1\right| < \frac{\delta}{x_0}, \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n - 1\right| < \frac{\varepsilon}{x_0^n}
\end{aligned} \tag{7.1.178}$$

Soit :

$$x' = \frac{x}{x_0}, \delta' = \frac{\delta}{x_0}, \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{x_0^p}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& f(x) = x^n \text{ est continue en } x_0 > 0 \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists \delta' > 0 : \forall 0 < |x' - 1| < \delta', |x'^n - 1| < \varepsilon' \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists \delta' > 0 : \forall 1 - \delta < x' < 1 + \delta, x' \neq 1, 1 - \varepsilon' < x'^n < 1 + \varepsilon' \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists \delta' > 0 : \forall 1 - \delta' < x' < 1 + \delta', x' \neq 1, (1 - \varepsilon')^{\frac{1}{n}} < x' < (1 + \varepsilon')^{\frac{1}{n}}
\end{aligned} \tag{7.1.179}$$

En cours de traduction de l' anglais

Il est facile de voir que nous avons seulement besoin de poser :

$$\delta = \min\left\{1-(1-\varepsilon')^{\frac{1}{n}}, (1+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}-1\right\} \tag{7.1.180}$$

afin que la partie la plus à droite de l'étape finale soit satisfaite. Il est donc démontré que la limite epsilon-delta existe !

3. Pour tout nombre réel $a > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{7.1.181}$$

- D'abord nous démontrons la continuité espsilon-delta :
Une fonction est epsilon-delta continue en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $|x-x_0| < \delta$, alors $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.
Dès lors :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|x^{1/n}-x_0^{1/n}\right| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow x_0^{1/n}-\varepsilon < x^{1/n} < x_0^{1/n}+\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \left(x_0^{1/n}-\varepsilon\right)^n < x < \left(x_0^{1/n}+\varepsilon\right)^n\end{aligned} \tag{7.1.182}$$

Ainsi, si nous choisissons :

$$\delta = \min\left\{\left(c^{1/n}+\varepsilon\right)^n - c, c - \left(c^{1/n}-\varepsilon\right)^n\right\} \text{ pour } c \neq 0 \tag{7.1.183}$$

alors :

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \tag{7.1.184}$$

En passant, cela prouve que si $f(x) > 0$ est epsilon-delta continue, alors $\sqrt[n]{f(x)}$ est également epsilon-delta continue !
Si vous n'êtes pas convaincu de cette dernière affirmation, il existe une autre façon de le montrer ! Plus loin, nous prouverons en détail que la fonction exponentielle e^x et la fonction logarithme $\log(x)$ sont toutes deux epsilon-delta continues. Et comme nous pouvons écrire :

$$\sqrt[n]{x} = e^{\ln(x)/n} \tag{7.1.185}$$

et nous avons démontré plus tôt que si $f(x), g(x)$ sont tous deux epsilon-delta continus alors $g(f(x))$ est aussi epsilon-delta continu, alors :

$$\sqrt[n]{x} \tag{7.1.186}$$

est epsilon-delta continue aussi ! Et évidemment nous pouvons remplacer x par une fonction $f(x)$ epsilon-delta continue et le même raisonnement s'appliquerait.

En cours de traduction de l'anglais

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Posons $x_n = a^{1/n}$. Nous avons :

$$\ln(x_n) = \frac{1}{n} \cdot \ln(a) \tag{7.1.187}$$

  En clair, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(x_n) = 0 \tag{7.1.188}$$

  Dès lors :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln(x_n)} = e^0 = 1 \tag{7.1.189}$$

  Ce qui se traduit en :

$$\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \tag{7.1.190}$$

4. Pour tout nombre réel a et n :

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} \tag{7.1.191}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  Nous avons déjà démontré plus tôt que si $f(x)$ est epsilon-delta continue alors $f^n(x)$ est aussi epsilon-delta continue et aussi que a^n est donc également epsilon-delta continu.

  Nous avons également démontré plus tôt que si $f(x), g(x)$ sont epsilon-delta continues alors $f(x) - g(x)$ est également epsilon-delta continue. Nous savons donc que $x^n - a^n$ et $x - a$ sont dès lors aussi epsilon-delta continus.

  Nous avons également démontré plus tôt que si $f(x), g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continue si $g(x) \neq 0$. Nous savons donc que :

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} \tag{7.1.192}$$

  est epsilon-delta continue !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Nous utilison simplement la règle de l'Hôpital's (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1444) ! C'est-à-dire :

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n - a^n)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x - a)} = \lim_{x\to a} nx^{n-1} = na^{n-1} \tag{7.1.193}$$

5. Pour $a > 0$ et n entiers positifs :

$$\lim_{x\to a} \frac{x - a}{x^n - a^n} = \frac{1}{na^{n-1}} \tag{7.1.194}$$

En cours de traduction de l'anglais

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  La preuve démonstration est simple car c'est juste l'inverse de l'exemple précédent !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  C'est juste l'inverse de l'exemple précédent donc il n'y a rien de spécial à démontrer !

6. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \tag{7.1.195}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  Nous avons déjà démontré plus tôt qu'une constante est epsilon-delta continue et que x est également epsilon-delta continu.
  Nous avons également démontré plus tôt que si $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continues alors $f(x)+g(x)$ est epsilon-delta continue et donc $1+x$ est epsilon-delta continu.
  Nous avons également prouvé plus tôt que si $f(x)>0$ est epsilon-delta continue, alors $f(x)^{1/x}$ est également epsilon-delta continue. Donc :

$$(1+x)^{1/x} \tag{7.1.196}$$

  est epsilon-delta continue !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Cette limite est déjà démontrée à la page 2264.

7. Pour tout nombre réel a :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a \tag{7.1.197}$$

Cette limite est bien connue des étudiants dans le cas particulier où $a=1$.

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  Nous avons déjà démontré plus tôt qu'une constante est epsilon-delta continue. Par conséquent, 1 est epsilon-delta continu.
  Nous avons également démontré plus tôt que si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continues alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continu et donc a/x est epsilon-delta continu.
  Nous avons également démontré plus tôt que si $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)+g(x)$ sont epsilon-delta continus et donc $1+(a/x)$ est epsilon-delta continu.
  Nous avons également démontré plus tôt que si $f(x)$ est epsilon-delta continue, alors $f(x)^n$ est également epsilon-delta continue. Donc :

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \tag{7.1.198}$$

  est epsilon-delta continue !

En cours de traduction de l'anglais

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Notons que cela revient à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{1/n}=a \tag{7.1.199}$$

Ne vous souciez pas du domaine de $\ln$, puisque pour un grand n, l'expression $1+\frac{a}{n}$ sera un nombre positif (proche de 1). Considérons la fonction :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x},\text{ pour } x>0 \tag{7.1.200}$$

et $f(0)=1$. En utilisant la dérivée de $\ln(1+x)$, nous voyons que $f(x)$ est epsilon-delta continue en 0, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$. Ainsi, pour toute séquence $\{x_n\}$ qui converge vers 0, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(0)=1 \tag{7.1.201}$$

Maintenant posons :

$$x_n=\frac{a}{n} \tag{7.1.202}$$

Clairement nous avons $x_n\to 0$. Dès lors, nous obtenons :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}}=1 \tag{7.1.203}$$

Mais nous avons :

$$\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=a\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \tag{7.1.204}$$

qui implique clairement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{1/n}=a \tag{7.1.205}$$

Puisque :

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{1/n}\right) \tag{7.1.206}$$

nous obtenons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a \tag{7.1.207}$$

8. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \tag{7.1.208}$$

En cours de traduction de l' anglais

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  Supposons $|x-x_0|<\delta$ et fixons $\varepsilon>0$.
  Considérons $|e^x-e^{x_0}|<\varepsilon$, puis en utilisant une approche d'ingénieur[6] :

$$\begin{gathered}-\varepsilon<e^x-e^{x_0}<\varepsilon\\ e^{x_0}-\varepsilon<e^x<e^{x_0}+\varepsilon\\ \ln\left(e^{x_0}-\varepsilon\right)<x<\ln\left(e^{x_0}+\varepsilon\right)\\ \ln\left(e^{x_0}-\varepsilon\right)-x_0<x-x_0<\ln\left(e^{x_0}+\varepsilon\right)-x_0\end{gathered} \quad (7.1.209)$$

  Par conséquent, e^x est epsilon-delta continu en x_0 tant que :

$$\delta=\min\left\{x_0-\ln\left(e^{x_0}-\varepsilon\right),\ln\left(e^{x_0}+\varepsilon\right)-x_0\right\} \quad (7.1.210)$$

  Puisque x_0 est choisi arbitrairement, alors e^x est epsilon-delta continu et nous avons terminé.
  Maintenant que nous avons prouvé que l'exponentielle est epsilon-delta continue. Nous savons que le numérateur est epsilon-delta continu et aussi que le dénominateur est epsilon-delta continu. Comme nous l'avons prouvé précédemment, si $f(x)$ et $g(x)$ sont epsilon-delta continues, alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continu, ceci termine la démonstration !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Cette dernière est immédiate grâce à la règle de l'Hôpital (voir section Calcul différentiel et Intégral page 1444) ! Nous avons en effet :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x-1)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1 \quad (7.1.211)$$

9. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0 \quad (7.1.212)$$

Cette limite ne doit pas être confondue avec la série de Maclaurin qui donne $\sin(x)\cong x$ pour x petit !

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  Soit $\varepsilon>0$ et $x,y\in\mathbb{R}$. Nous voulons :

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon\Longrightarrow|\sin(x)-\sin(y)|<\varepsilon \quad (7.1.213)$$

  En utilisant les identités trigonométriques, cela équivaut à :

$$\left|2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|<\varepsilon \quad (7.1.214)$$

[6] Car pour les mathématiciens, cette démonstration, bien que correcte, repose sur plusieurs faits sur le logarithme, qui (en supposant qu'il soit défini comme l'inverse de l'exponentielle) est généralement présenté comme une fonction totale en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et en supposant donc que l'exponentielle est continue... Nous devons également être prudents en prenant des logs si $e^{x_0}-\ varepsilon<0$...

En cours de traduction de l'anglais

Parce que $|\cos(\alpha)| \leqslant 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ nous pouvons simplifier :

$$\left|2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \quad (7.1.215)$$

Il suffit :

$$2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| < \varepsilon \quad (7.1.216)$$

quand :

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x-y}{2}\right| < \delta \quad (7.1.217)$$

Étant donné que $|\sin(x)| \leq |x|$:

$$2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| < 2\delta \quad (7.1.218)$$

Choisir $\delta = \varepsilon/2 > 0$ fera l'affaire. Parce que δ ne dépend pas de x, y, la continuité est uniforme !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Si nous utilisons la définition analytique de la fonction $\sin(x)$ (série entière) :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (7.1.219)$$

Dès lors calculer :

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \quad (7.1.220)$$

est équivalent à :

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (7.1.221)$$

Et nous avons déjà démontré plus tôt que :

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad (7.1.222)$$

Dès lors :

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \quad (7.1.223)$$

Finalement :

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \quad (7.1.224)$$

En cours de traduction de l'anglais

10. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1 \qquad (7.1.225)$$

La méthode sera exactement similaire à celle de $\sin(x)$ vue juste plus tôt !

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  Soient $\varepsilon>0$ et $x,y\in\mathbb{R}$. Nous voulons :

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \Longrightarrow |\cos(x)-\cos(y)|<\varepsilon \qquad (7.1.226)$$

  En utilisant les identités trigonométriques, cela équivaut à :

$$\left|2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|<\varepsilon \qquad (7.1.227)$$

  Parce que $|\sin(\alpha)|\leqslant 1, \forall\alpha\in\mathbb{R}$ nous pouvons simplifier :

$$\left|2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \qquad (7.1.228)$$

  Il suffit :

$$2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|<\varepsilon \qquad (7.1.229)$$

  quand :

$$|x-y|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{x-y}{2}\right|<\delta \qquad (7.1.230)$$

  Étant donné que $|\sin(x)|\leq|x|$:

$$2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right|<2\delta \qquad (7.1.231)$$

  Choisir $\delta=\varepsilon/2>0$ fera l'affaire. Parce que δ ne dépend pas de x,y, la continuité est donc uniforme !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Si nous utilisons la définition analytique de la fonction $\cos(x)$ (série entière) :

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (7.1.232)$$

  Alors calculer :

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1 \qquad (7.1.233)$$

  est équivalent à calculer :

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right) \qquad (7.1.234)$$

En cours de traduction de l'anglais

Et nous avons démontré plus tôt que :

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \quad (7.1.235)$$

Dès lors :

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)=1+0=1 \quad (7.1.236)$$

Finalement :

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1 \quad (7.1.237)$$

11. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\tan(x)=0 \quad (7.1.238)$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  La démonstration est immédiate ! Effectivement, par définition :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (7.1.239)$$

  Nous avons démontré plus tôt que $\sin(x)$ mais aussi $\cos(x)$ sont epsilon-delta continus.
  Mais nous avons également démontré que si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ sont epsilon-delta continus.
  Dès lors $\tan(x)$ est epsilon-delta continu !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Notez que par la définition géométrique nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\tan(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\sin(x)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} \quad (7.1.240)$$

  Et nous avons démontré plus haut que :

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\cos(x)=1 \quad (7.1.241)$$

  Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\tan(x)=\lim_{x\to 0}\sin(x)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=0 \quad (7.1.242)$$

12. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad (7.1.243)$$

Il existe plusieurs manières plus ou moins rigoureuses de démontrer cette limite (basée sur la géométrie, basée sur la dérivation, basée sur les séries, basée sur le numérique, basée sur le théorème de compression, basée sur le théorème de l'Hôspital, etc.) et qui dépendent également de la définition de la fonction $sin(x)$ lui-même...

En cours de traduction de l'anglais

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  Nous avons prouvé plus tôt que $\sin(x)$ est epsilon-delta continu et aussi que x est epsilon-delta continu. Et nous avons prouvé plus tôt dans le cas général que si $f(x), g(x)$ sont des fonctions epsilon-delta continues, en supposant $g(x) \neq 0$, alors $f(x)/g(x)$ est aussi epsilon-delta continue !

  Ce qui termine notre démonstration !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Nous avons :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad (7.1.244)$$

si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il exsite $\delta > 0$ tel que $|f(x) - 1| < \varepsilon$ chaque fois que $0 < |x - 0| < \delta$.

Posons $\varepsilon > 0$ un nombre réel arbitraire.

Notons que :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (7.1.245)$$

Si $x \neq 0$, nous avons :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \qquad (7.1.246)$$

Nous avons alors :

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right| \qquad (7.1.247)$$

Et ainsi :

$$|f(x) - 1| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x^{2n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x^2|^n \qquad (7.1.248)$$

Si $0 < |x| < 1$, alors $0 < |x^2| < 1$, et la série infinie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^2|^n$ converge vers $\frac{x^2}{1-x^2}$. Choisissons $\delta := \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$. Dès lors $0 < |x - 0| < \delta$ implique $0 < |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} < 1$, et donc $x^2 < \varepsilon - \varepsilon x^2$. Mais $x^2 < \varepsilon - \varepsilon x^2$ implique que $\frac{x^2}{1-x^2} < \varepsilon$.

Nous avons alors $\sum_{n=1}^{+\infty} |x^2|^n < \varepsilon$ chaque fois que $0 < |x - 0| < \delta$. Mais comme $|f(x) - 1| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x^2|^n$, nous avons $|f(x) - 1| < \varepsilon$ chaque fois que $0 < |x - 0| < \delta$.

Étant donné que ε était arbitraire, nous avons :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad (7.1.249)$$

13. Nous avons :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad (7.1.250)$$

En cours de traduction de l' anglais

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  Posons $z = 1 + x$ et nous voulons démontrer la continuité epsilon-delta a proximité de $x_0 = 0$ c'est-à-dire a proximité de $\log_b(1)$ pour $b > 1$.

  Posons $\varepsilon > 0$ et $z_0 > 0$. Nous voulous trouver un δ suffisamment petit tel que $|z - z_0| < \delta$, $|\log_b(z) - \log_b(z_0)| < \varepsilon$. Nous avons :

$$|\log_b(z) - \log_b(z_0)| = \left|\log_b\left(\frac{z}{z_0}\right)\right| \tag{7.1.251}$$

  Ce que nous voulons c'est pour z/z_0 d'être proche de 1 . Une meilleure condition serait :

$$b^{-\varepsilon} < \frac{z}{z_0} < b^{\varepsilon} \tag{7.1.252}$$

  Dans ce cas, nous aurions, par la nature strictement croissant de la fonction $\log$:

$$-\varepsilon < \log_b\left(\frac{z}{z_0}\right) < \varepsilon \tag{7.1.253}$$

  Ainsi :

$$\left|\log_b\left(\frac{z}{z_0}\right)\right| < |\varepsilon| \tag{7.1.254}$$

  Nous sommes donc capables de trouver un tel ε mais nous voyons que ce dernier dépend de z_0 et nous ne pouvons pas nous débarrasser de ce dernier. Par conséquent, $\log_b(z)$ est epsilon-delta continu sur z_0 mais pas uniformément continu !

  Notez que dans la littérature, il est très courant de réarranger :

$$b^{-\varepsilon} < \frac{z}{z_0} < b^{\varepsilon} \tag{7.1.255}$$

  comme suit :

$$z_0 b^{-\varepsilon} < z < z_0 b^{\varepsilon} \tag{7.1.256}$$

  et de soustraire z_0 partout tel que :

$$z_0 b^{-\varepsilon} - z_0 < z - z_0 < z_0 b^{\varepsilon} - z_0 \tag{7.1.257}$$

  Comme nous voulons $|z - z_0| < \delta$, nous avons finalement :

$$\delta = z_0 \left\{1 - b^{-\varepsilon}, b^{-\varepsilon} - 1\right\} \tag{7.1.258}$$

  Lorsque la base est l'exponentielle naturelle cette dernière s'écrit :

$$\delta = z_0 \left\{1 - e^{-\varepsilon}, e^{-\varepsilon} - 1\right\} \tag{7.1.259}$$

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Nous utilisons simplement la règle de l'Hôpital's (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1444) ! C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(1+x)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \tag{7.1.260}$$

En cours de traduction de l' anglais

14. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}(x)}{x}=\frac{\arcsin(x)}{x}=1 \quad (7.1.261)$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  N'essayez pas d'utiliser la définition de $\arcsin(x)$ basée sur la dérivée ou l'intégrale car ils supposent que vous savez déjà que la fonction est epsilon-delta continue ! Nous voulons ici éviter d'utiliser le "théorème inverse" car ce dernier est assez abstrait et sa démonstration n'est pas encore disponible à ce jour dans ce livre (et ne le sera très probablement jamais !).

  L'astuce sera d'utiliser une autre expression pour le $\arcsin(x)$ qui utilise la continuité prouvée précédemment pour $\sin(x)$. Rappelons à cet effet que nous avons prouvé dans la section Nombres à la page **??** la formule de Moivre et Euler suivante :

$$\sin(x)=\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \quad (7.1.262)$$

  Posons cela égal à y tel que :

$$y=\sin(x)=\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \quad (7.1.263)$$

  Dès lors :

$$x=\arcsin(y) \quad (7.1.264)$$

  Il nous suffit donc de résoudre pour x. Ce sera un peu plus facile si nous faisons la substitution $e^{\mathrm{i}x}=z$. Nous obtenons alors :

$$2\mathrm{i}y=z-\frac{1}{z} \quad (7.1.265)$$

  Et après réarrangement :

$$z^2-2\mathrm{i}yz-1=0 \quad (7.1.266)$$

  Nous appliquons la formule quadratique et nous obtenons :

$$z=\mathrm{i}y\pm\sqrt{1-y^2} \quad (7.1.267)$$

  Une solution est égale à z, l'autre solution est égale à $1/z$, choisissons-en une. Inversons la substitution :

$$e^{\mathrm{i}x}=\mathrm{i}y+\sqrt{1-y^2} \quad (7.1.268)$$

  Ainsi :

$$x=-\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}y+\sqrt{1-y^2}\right) \quad (7.1.269)$$

  Nous avons donc finalement la substitution intéressante :

$$\arcsin(y)=-\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}y+\sqrt{1-y^2}\right) \quad (7.1.270)$$

En cours de traduction de l'anglais

Et nous pouvons réécrire notre limite comme suit :

$$\lim_{x\to 0}=\frac{\arcsin(x)}{x}=\frac{-\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}=1 \tag{7.1.271}$$

Il nous faut donc démontrer que :

$$\frac{\arcsin(x)}{x}=\frac{-\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x} \tag{7.1.272}$$

est epsilon-delta continue pour $0<x<1$! Et maintenant, cela sera simple puisque nous avons déjà démontré que la somme de deux fonctions epsilon-delta continues est epsilon-delta continue (le contenu du logarithme ci-dessus). Mais aussi que la racine carrée est epsilon-delta continue (toujours le contenu du logarithme ci-dessus) et juste avant que le logarithme est aussi epsilon-delta continu ! Par conséquent, tout le numérateur ci-dessus est epsilon-delta continu pour $0<x<1$!

Et comme le dénominateur (x) est aussi epsilon-delta continu et que nous avons prouvé si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continu. Alors :

$$\frac{\arcsin(x)}{x}=\frac{-\mathrm{i}\ln\left(\mathrm{i}x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x} \tag{7.1.273}$$

est bien effet epsilon-delta continu pour $0<x<1$!

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Nous convertissons la fonction sinus trigonométrique inverse par la relation mathématique entre les fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses. C'est $y=\sin^{-1}(x)$, alors $x=\sin(y)$.

  Par conséquent, le quotient de $\arcsin(x)$ par x peut être écrit mathématiquement sous la forme du ratio de y à $\sin(y)$:

$$\frac{\sin^{-1}(x)}{x}=\frac{y}{\sin(y)} \tag{7.1.274}$$

  Par conséquent, si x s'approche de zéro, alors y tend vers $\sin^{-1}(0)$. Plus explicitement :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}}=\frac{1}{1}=1 \tag{7.1.275}$$

15. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \tag{7.1.276}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  Nous avons déjà prouvé plus tôt que $\tan(x)$ est epsilon-delta continu et pareil pour x.

  Nous avons également prouvé plus tôt que si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continu.

  Dès lors :

$$\frac{\tan(x)}{x} \tag{7.1.277}$$

  est epsilon-delta continu !

En cours de traduction de l'anglais

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Une fois que nous avons prouvé :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\cos(x)=1 \tag{7.1.278}$$

  Nous pouvons prouver assez facilement que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \tag{7.1.279}$$

  Effectivement :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=1\cdot 1=1 \tag{7.1.280}$$

16. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(x)}{x}=\frac{\arctan(x)}{x}=1 \tag{7.1.281}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  N'essayez pas d'utiliser la définition intégrale ou derivée de $\arctan(x)$ comme point de départ puisque ces dernières assument implicitement la continuité epsilon-delta déjà vérifiée ! Nous voulons ici éviter d'utiliser le "théorème inverse" puisque ce dernier est relativement abstrait et sa démonstration n'est actuellement pas disponible dans le présent ouvrage (et ne le sera vraisemblablement jamais !).
  L'astuce va être d'utiliser une autre expression pour $\arctan(x)$ qui utilise la continuité epsilon-delta prouvée plus haut pour $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Rappelons pour cela que nous avons prouvé dans la section Nombres à la page **??** les formules de Moivre et Euler suivantes :

$$\sin(\varphi)=\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}},\quad \cos(\varphi)=\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \tag{7.1.282}$$

  ce qui nous amène à :

$$\tan(\varphi)=\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}=\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}\right)} \tag{7.1.283}$$

  Soit $\tan(\varphi)=x$, alors :

$$\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}=\mathrm{i}x \tag{7.1.284}$$

  et en le résolvant nous trouvons que :

$$e^{\mathrm{i}\varphi}=\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}} \tag{7.1.285}$$

  ce qui nous amène à :

$$\arctan(x)=\varphi=\frac{1}{\mathrm{i}}\ln\sqrt{\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}}=\frac{\mathrm{i}}{2}[\ln(1-\mathrm{i}x)-\ln(1+\mathrm{i}x)] \tag{7.1.286}$$

En cours de traduction de l'anglais

quand $\forall x \in \mathbb{C}\backslash(\mathrm{i}(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[))$.
Dès lors nous pouvons récrire la limite ci-dessus comme :

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\tan^{-1}(x)}{x}=\frac{\arctan(x)}{x}=\frac{\frac{\mathrm{i}}{2}[\ln(1-\mathrm{i}x)-\ln(1+\mathrm{i}x)]}{x}=1 \quad (7.1.287)$$

Comme nous avons prouvé qu'une constante est epsilon-delta continue et x (et dès lors $\mathrm{i}x$) est aussi epsilon-delta continu alors $1-\mathrm{i}x$ et $1+\mathrm{i}x$ sont tous deux epsilon-delta continus.

Mais nous avons déjà démontré plus haut que le logarithme est epsilon-delta continu. Dès lors, comme nous avons démontré que $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $g(f(x))$ est aussi epsilon-delta continu ce qui nous amène au résultat que $\ln(1-\mathrm{i}x)$ et $\ln(1+\mathrm{i}x)$ sont tous deux epsilon-delta continus !

Comme nous avons également démontré que si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continu alors le rapport de $\ln(1-\mathrm{i}x)-\ln(1+\mathrm{i}x)$ par x est également epsilon-delta continu.

Finalement nous avons démontré que :

$$\frac{\tan^{-1}(x)}{x}=\frac{\arctan(x)}{x}=\frac{\frac{\mathrm{i}}{2}[\ln(1-\mathrm{i}x)-\ln(1+\mathrm{i}x)]}{x} \quad (7.1.288)$$

est bien epsilon-delta continu $\forall x \in \mathbb{C}\backslash(\mathrm{i}(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[))$.

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  C'est assez direct. Nous utilisons encore une fois la règle de l'Hospital (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1444) ce qui nous amène à :

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\arctan(x)}{x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan(x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{1}{1+x^2}=1 \quad (7.1.289)$$

17. Nous avons :

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a) \quad (7.1.290)$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  C'est simple à démontrer ! Nous avons démontré plus tôt qu'une constante (comme 1) est epsilon-delta continue.

  Nous avons également prouvé que x est epsilon-delta continu.

  Nous avons démontré que si $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)+g(x)$ et $f(x)-g(x)$ sont également epsilon-delta continus.

  Nous avons prouvé plus tôt que si $f(x)$ est epsilon-delta continu alors $f(x)^n$ est epsilon-delta continu. Par conséquent, a^x-1 est epsilon-delta continu.

  Nous avons démontré que si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continu.

  Dès lors :

$$\frac{a^x-1}{x}=\ln(a) \quad (7.1.291)$$

  est epsilon-delta continu !

En cours de traduction de l'anglais

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \quad (7.1.292)$$

Posons $y=a^x-1$, alors $1+y=a^x$.
Considérons la relation :

$$1+y=a^x \quad (7.1.293)$$

En utilisant le logarithme des deux côtés de l'égalité, nous avons :

$$\begin{aligned}\ln(1+y)&=\ln(a^x)\\ \Rightarrow \ln(1+y)&=x\ln(a)\\ \Rightarrow x&=\frac{\ln(1+y)}{\ln(a)}\end{aligned} \quad (7.1.294)$$

Aussi :

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}(a^x-1)=a^0-1=1-1=0 \quad (7.1.295)$$

Ceci montre que $y\to 0$ étant donnée que $x\to 0$. Ainsi, la limite donnée peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln(a)}}\\ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(a)}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}\\ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\\ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\frac{\ln(a)}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\\ \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\frac{\ln(a)}{\ln\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]}\end{aligned} \quad (7.1.296)$$

En utilisant la relation $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, nous avons :

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{\ln(a)}{\ln(e)} \quad (7.1.297)$$

Et comme $\ln(e)=1$, nous avons :

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{\ln(a)}{1}=\ln(a) \quad (7.1.298)$$

18. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m \quad (7.1.299)$$

En cours de traduction de l' anglais

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  C'est simple à démontrer ! Nous avons prouvé plus tôt qu'une constante (comme 1) est epsilon-delta continue.
  Nous avons aussi démontré que x esţ epsilon-delta continu.
  Nous avons démontré que si $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)+g(x)$ et $f(x)-g(x)$ sont aussi epsilon-delta continus. Dès lors $1+x$ sont epsilon-delta continus.
  Nous avons démontré plus tôt que si $f(x)$ est epsilon-delta continuus alors $f(x)^n$ est epsilon-delta continu. Dès lors $(1+x)^m-1$ est epsilon-delta continus.
  Nous avons démontré que si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est aussi epsilon-delta continu. Dès lors :

$$\frac{(1+x)^m-1}{x} \tag{7.1.300}$$

  est epsilon-delta continu !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  C'est assez direct. Encore une fois, nous utilisons la règle de l'Hospital (voir section Calcul Intégral et Différentiel page 1444) ce qui nous amène à :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+x)^m-1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x}=\lim_{x\to 0}\frac{m(x+1)}{1}=\lim_{x\to 0}m(x+1)=m \tag{7.1.301}$$

En cours de traduction de l'anglais

19. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0 \tag{7.1.302}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  La démonstration est immédiate ! Nous avons déjà démontré précécédemment qu'une constante est epsilon-delta continue dès lors 1 a le même comportement.
  Nous avons déjà démontré plus tôt que $\cos(x)$ est epsilon-delta continu !
  Et nous avons démontré que x est epsilon-delta continu.
  Nous avons démontré que si $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)-g(x)$ est epsilon-delta continu. Dès lors $1-\cos(x)$ est epsilon-delta continu.
  Nous avons démontré que si $f(x),g(x)\neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est epsilon-delta continu. Dès lors :

$$\frac{1-\cos(x)}{x} \tag{7.1.303}$$

  est epsilon-delta continu !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+\cos(x)-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\\&=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)\end{aligned} \tag{7.1.304}$$

Nous avons démontré plus haut que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad (7.1.305)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)\\&=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\\&=\frac{\sin(0)}{1+\cos(0)}=\frac{0}{1+1}=0\end{aligned} \qquad (7.1.306)$$

20. Nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}=1 \qquad (7.1.307)$$

souvent noté :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}=1 \qquad (7.1.308)$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  La démonstration est immédiate en réécrivant comme suit :

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \qquad (7.1.309)$$

  En effet, nous avons démontré dans les exemples précédents que pour $x>0$, nous avions $1/x$ et $\ln(x)$ étaient epsilon-delta continus.
  Et comme nous avons démontré dans le cas général que si $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)\cdot g(x)$ étaient également epsilon-delta continus, alors $frac1x\ln(x)$ est epsilon-delta continu !
  Nous avons également démontré dans l'exemple ci-dessus que l'exponentielle e est epsilon-delta continue. Et parce que nous avons prouvé que dans le cas général que si $f(x),g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $g(f(x))$ est également epsilon-delta continu, alors :

$$e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \qquad (7.1.310)$$

  est continuous epsilon-delta et ainsi l'est $x^{1/x}$!
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Posons $x_n=n^{1/n}$. Nous avons :

$$\ln(x_n)=\frac{\ln(n)}{n} \qquad (7.1.311)$$

  Clairement, nous avons (de ce que nous avons vu plus haut) :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(x_n)=0 \qquad (7.1.312)$$

  Dès lors :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln(x_n)}=e^0=1 \qquad (7.1.313)$$

  Ce qui se traduit en :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}=1 \qquad (7.1.314)$$

En cours de traduction de l' anglais

21. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0 \tag{7.1.315}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  La preuve est immédiate puisque nous avons prouvé que $\log(x)$ est epsilon-delta continu (donc $\ln(x)$ a le même comportement) et que x est également epsilon-delta continu.

  Et nous avons démontré plus tôt que si $f(x), g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)\cdot g(x)$ est également continu epsilon-delta.

  Dès lors :

$$x\ln(x) \tag{7.1.316}$$

  est epsilon-delta continu !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Si nous évaluons séparément la limite du numérateur et du dénominateur, nous constaterons que lorsque $\ln(x)$ va à $+\infty$ lorsque x va à $+\infty$: $\ln(+\infty)=+\infty$ et x va à $+\infty$.

  Nous avons donc un rapport de deux infinis $\frac{+\infty}{+\infty}$ ce qui signifie qu'il va falloir appliquer la règle de l'Hôpital (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1444) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \tag{7.1.317}$$

  La limite s'approche de 0 car 1 divisé sur quelque chose approchant $+\infty$ devient de plus en plus proche de 0.

22. Nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \tag{7.1.318}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  Nous avons déjà démontré plus tôt que $\log(x)$ est epsilon-delta continu.

  Nous avons également déjà démontré plus tôt que x est epsilon-delta continu.

  Dès lors :

$$\frac{\ln(x)}{x} \tag{7.1.319}$$

  est epsilon-delta continu !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  La preuve est immédiate en utilisant la règle de l'Hôpital (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1444) ! En effet :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \tag{7.1.320}$$

En cours de traduction de l'anglais

23. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1 \tag{7.1.321}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  La démonstration suit exactement le même schéma que le cas avec $x^{1/x}$ effectué plus tôt ci-dessus et conduit à la même conclusion : x^x est epsilon-delta continu pour $x > 0$.
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  La démonstration utilise un résultat que nous avons obtenu dans l'un des exemples précédents. C'est-à-dire :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \tag{7.1.322}$$

  Comment ? C'est simple ! Nous réécrivons simplement :

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{x\ln(x)} \tag{7.1.323}$$

  Et dès lors le résultat est immédiat :

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{x\ln(x)} = e^0 = 1 \tag{7.1.324}$$

24. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{1/x} = e \tag{7.1.325}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  Ce sera également immédiat grâce à tous les exemples précédents !
  Nous avons d'abord démontré qu'une constante comme 1 est epsilon-delta continue.
  Nous avons également démontré que $\sin(x)$ est epsilon-delta continue.
  Nous avons également démontré que dans le cas général si $f(x), g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)+g(x)$ est epsilon-delta continu. Par conséquent $1+\sin(x)$ est epsilon-delta continu.
  Nous avons démontré plus tôt que si $x > 0$ alors $x^{1/x}$ était epsilon-delta continu. Par conséquent, nous concluons (selon la méthode des ingénieurs...) que :

$$(1+\sin(x))^{1/x} \tag{7.1.326}$$

  est epsilon-delta continu !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Ici, nous utilisons exactement la même astuce que précédemment... ! Autrement dit, nous réécrivons la limite comme suit :

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1+\sin(x)}{x}} \tag{7.1.327}$$

  Dès lors, il suffit donc de calculer :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin(x)}{x} \tag{7.1.328}$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous utilisons la règle de l'Hôpital (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1444) ! Nous obtenons donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin(x)}{x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\sin(x))}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x}=\lim_{x\to 0}\cos(x)=1 \tag{7.1.329}$$

Dès lors :

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1+\sin(x)}{x}}=e^1=e \tag{7.1.330}$$

25. Nous avons pour tout réel a :

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2-a^2}=0 \tag{7.1.331}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :
  La démonstration est immédiate en utilisant à nouveau les résultats des exemples précédents et les propriétés générales de la continuité epsilon-delta !
  Effectivement, nous avons déjà démontré qu'une constante (comme a ou comme a^2 qui est quand même une constante aussi) est epsilon-delta continue.
  Nous avons également démontré plus haut que x^2 est epsilon-delta continu.
  Et comme nous avons démontré la propriété que si $f(x), g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)-g(x)$ est epsilon-delta continue. Cela signifie que x^2-a^2 est epsilon-delta continu.
  Nous avons également démontré plus tôt que si $f(x)>0$ est epsilon-delta continu alors $\sqrt{f(x)}$ est également epsilon-delta continu. Par conséquent, pour $x^2-a^2>0$ (c'est-à-dire $x^2>a^2$, ou $|x|>|a|$), nous avons que $\sqrt{x^2-a^2}$ est également epsilon-delta continu !
- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :
  Nous utilisons l'astuce :

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2-a^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \tag{7.1.332}$$

Soit après simplification :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=a^2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \tag{7.1.333}$$

Il est trivial maintenant comme $x>a$ et dès lors $\sqrt{x^2-a^2}\geq 0$ que :

$$\lim_{x\to+\infty}x+\sqrt{x^2-a^2}=+\infty \tag{7.1.334}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2-a^2}=a^2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{+\infty}=0 \tag{7.1.335}$$

26. Nous avons :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2} \tag{7.1.336}$$

En cours de traduction de l'anglais

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  C'est assez immédiat grâce à tout ce que nous avons démontré jusqu'à présent ! En effet, nous avons démontré plus haut que $\tan(x)$ et $\sin(x)$ sont epsilon-delta continus. Mais nous avons également démontré plus tôt que si $f(x), g(x)$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)-g(x)$ sont continus epsilon-delta. Par conséquent, $\tan(x)-\sin(x)$ est continu epsilon-delta.

  Et nous avons également prouvé plus tôt que si $f(x)$ est epsilon-delta continu alors $f(x)^n$ est également epsilon-delta continu et donc x^3 au dénominateur est également epsilon-delta continu.

  Et enfin comme nous l'avons prouvé précédemment que si $f(x), g(x) \neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est également epsilon-delta continu et donc :

$$\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} \tag{7.1.337}$$

  est epsilon-delta continu !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Faisons cela sans la règle de l'Hôpital (choix personnel !). Nous utilisons donc les définitions des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} &= \frac{\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x^3} = \frac{\left(\dfrac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}\right)}{x^3}\\ &= \frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{x^3\cos(x)} = \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x^3\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2\cos(x)}\\ &= \frac{\sin(x)}{x}\frac{1-\cos(x)}{x^2\cos(x)}\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cos(x)(1+\cos(x))}\\ &= \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin^2(x)}{x^2\cos(x)(1+\cos(x))} = \frac{\sin(x)}{x}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\frac{1}{\cos(x)(1+\cos(x))}\end{aligned} \tag{7.1.338}$$

  En utilisant la propriété que :

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} f(x)\cdot\lim_{x\to 0} g(x) \tag{7.1.339}$$

  Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)(1+\cos(x))}\\ &= 1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{7.1.340}$$

27. Pour $q>0$:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log^p(x)}{x^q} = 0 \tag{7.1.341}$$

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  La démonstration sera encore une fois assez immédiate grâce à tout ce que nous avons démontré jusqu'à présent ! En effet, nous avons démontré plus tôt que le logarithme est epsilon-delta continu, donc $\log(x)$ est epsilon-delta continu.

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons également démontré que x est epsilon-delta continu.

Nous avons également démontré que si $f(x)$ est une fonction epsilon-delta continue alors $f^n(x)$ est également epsilon-delta continue. Par conséquent, $\log^p(x)$ et x^q sont epsilon-delta continus.

Et enfin comme nous avons démontré que si $f(x), g(x) \neq 0$ sont epsilon-delta continus alors $f(x)/g(x)$ est epsilon-delta continu, ce qui nous amène à la conclusion que :

$$\frac{\log^p(x)}{x^q} \tag{7.1.342}$$

est epsilon-delta continu !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Nous utilise simplement la règle de l'Hôpital (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1444) ! C'est-à-dire :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^p(x)}{x^q} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log^p(x)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^q} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{qx^{q-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{qx^q} = 0 \tag{7.1.343}$$

28. Nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \log(x) \tag{7.1.344}$$

Nous devons cette formule est au scientifique et mathématicien anglais Edmond Halley (11656 à 11742 selon le calendrier holocène) et qui était également connue de Leonhard Euler, qui l'utilisa pour définir le logarithme naturel.

- D'abord nous démontrons la continuité epsilon-delta :

  La preuve est immédiate, avec tout ce que nous avons vu jusqu'à présent ! En effet, dans les premiers exemples ci-dessus nous avons démontré que $\sqrt[n]{x}$ est epsilon-delta continu et aussi qu'une constante (comme 1) est également epsilon-delta continue.

  Mais nous avons démontré plus tôt que si $f(x), g(x)$ sont toutes deux epsilon-delta continues alors $f(x) - g(x)$ est également epsilon-delta continu. Par conséquent, $\sqrt[n]{x} - 1$ est epsilon-delta continu.

  Et enfin, nous avons prouvé que si $f(x)$ est epsilon-delta continu, alors cette même fonction multipliée par une constante est également epsilon-delta continue. Donc :

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) \tag{7.1.345}$$

  est epsilon-delta continue !

- Ensuite, nous démontrons la limite epsilon-delta :

  Nous changeons la n-ième racine en puissance de e et utilisons le développement en série entière de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} n(\sqrt[n]{x} - 1) &= n\left(e^{\frac{\ln(x)}{n}} - 1\right) = n\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln(x)/n)^m)}{m!} - 1\right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n(\ln(x)/n)^m}{m!} = \ln(x) + \frac{1}{n}\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\ln(x))^m}{m!n^{m-2}} \end{aligned} \tag{7.1.346}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+\frac{1}{n}\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{(\ln(x))^m}{m!n^{m-2}}=\ln(x) \qquad (7.1.347)$$

29. Nous voulons montrer (ou vérifier) que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty \qquad (7.1.348)$$

Il existe de nombreuses façons de gérer cette séquence. Utilisons à nouveau les techniques de l'algèbre. Considérons la fonction :

$$f(x)=\frac{1}{x}, \qquad \text{pour } x\geq 1 \qquad (7.1.349)$$

Nous avons :

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln(x)]_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln(n) \qquad (7.1.350)$$

et :

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln(x)]_1^{n+1}=\ln(n+1) \qquad (7.1.351)$$

pour tout $n\geq 1$. Notez que pour tout $x\in[n,n+1]$, nous avons :

$$\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n} \qquad (7.1.352)$$

dès lors :

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}x\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x \qquad (7.1.353)$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{n} \qquad (7.1.354)$$

Ainsi :

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^{3}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\ldots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \qquad (7.1.355)$$

nous obtenons :

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\leq\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \qquad (7.1.356)$$

En cours de traduction de l' anglais

En particulier, nous avons :

$$\ln(n+1)=\int\limits_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \tag{7.1.357}$$

Ainsi, étant donné que $\lim_{n\rightarrow+\infty}\ln(n+1)=+\infty$, nous devons avoir :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty}1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=+\infty \tag{7.1.358}$$

Nous allos arrêter ici la liste des limites et continuités epsilon-delta communes car elle est presque sans fin ! Et le lecteur doit garder à l'esprit que nous nous sommes concentrés ci-dessus uniquement sur les fonctions univariées et que la plupart des exemples concernaient uniquement des fonctions à valeurs réelles (seulement deux étaient dans les plans complexes)...

La plupart des ingénieurs n'aiment pas ce sujet mais n'oubliez pas que c'est le seul moyen rigoureux de montrer qu'une fonction peut être différenciée ou intégrée (parmis d'autres applications importantes pour les mathématiciens professionnels et les physiciens théoriciens) !

Pour résumer voici un tableau avec les limites les plus connues :

Limites les plus communes		
$\lim\limits_{z\rightarrow a}c^{te}=c^{te}$	$\lim\limits_{x\rightarrow a}x^n=a^n$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$\lim\limits_{z\rightarrow+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^z=e^a$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\sin(x)=0$
$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\tan(x)=0$	$\lim\limits_{z\rightarrow 0}(1+x)^{1/x}=e$	$\lim\limits_{x\rightarrow a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}=\dfrac{1}{na^{n-1}}$
$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\dfrac{\arcsin(x)}{x}=1$
$\lim\limits_{z\rightarrow 0}\dfrac{\arctan(x)}{x}=1$	$\lim\limits_{z\rightarrow 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln(a)$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$
$\lim\limits_{x\rightarrow 0^+}x\ln(x)=0$	$\lim\limits_{z\rightarrow+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}(1+\sin(x))^{1/x}=e$
$\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}x-\sqrt{x^2-a^2}=0$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\dfrac{\log^p(x)}{x^q}=0$
$\lim\limits_{n\rightarrow+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$	$\lim\limits_{n\rightarrow+\infty}\sqrt[n]{a}=1$	$\lim\limits_{x\rightarrow 0}\cos(x)=1$
$\lim\limits_{x\rightarrow a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$	$\lim\limits_{z\rightarrow 0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$	$\lim\limits_{z\rightarrow+\infty}x^{1/x}=1$
$\lim\limits_{x\rightarrow 0}x^x=1$	$\lim\limits_{z\rightarrow 0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)=\log(x)$

TAB. 7.5 – **Limites les plus communes**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Dans certaines des preuves de limites usuelles vues plus haut, le lecteur a peut-être remarqué que parfois ces arguments s'avèrent impliquer non seulement ε mais un multiple constant de celui-ci. Cela peut se produire par exemple lorsque la limite implique une somme ou plusieurs processus arithmétiques.

Mais $K\varepsilon$ est-il aussi bon que ε ? Si nous obtenons une preuve avec 2ε, ou 22ε, ou 0.001ε, c'est aussi bien que de sortir avec ε ! En effet, si ε est un petit nombre arbitraire, 22ϵ et $0,001\varepsilon$ le sont également. Par conséquent, si nous pouvons prouver que quelque chose est inférieur à $K\varepsilon$, vous avez alors montré qu'il peut être rendu aussi petit que souhaité.

Nous formulons cela comme un principe général, le "principe K-ε". Ce n'est pas un terme standard en analyse, alors ne l'utilisez pas lorsque vous vous rendrez à votre prochain congrès de mathématiques, mais il est utile de nommer une idée qui reviendra souvent.

En cours de traduction de l' anglais

7.1.2.1.3 Lois sur les limites

Nous examinons maintenant les "lois sur les limites", les propriétés individuelles de limites dans le cas univarié. Les démonstrations seront omises car c'est assez intuitif mais tout lecteur peut nous demander la démonstratoin de l'une d'elles si besoin en nous contactant !

Soient $f(x)$ et $g(x)$ définis pour tout $x \neq a$ sur un intervalle ouvert contenant a. Supposons que L et M soient des nombres réels tels que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M \tag{7.1.359}$$

Soit c^{te} une constante. Alors, chacune des affirmations suivantes est vraie :

- La loi de somme pour les limites donne :

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M \tag{7.1.360}$$

- La loi de différence pour les limites donne :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M \tag{7.1.361}$$

- La loi de multiplicaltion par constante pour les limites donne :

$$\lim_{x\to a} c^{te} f(x) = c^{te} \lim_{x\to a} f(x) = c^{te} L \tag{7.1.362}$$

- La loi de produit pour les limites donne :

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M \tag{7.1.363}$$

- La loi de quotient pour les limites donne :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M} \tag{7.1.364}$$

pour $M\neq 0$.

- La loi de puissance pour les limites donne :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n=L^n \tag{7.1.365}$$

pour tout entier positif n.

- La loi de racine pour les limites donne :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{L} \tag{7.1.366}$$

pour tout L si n est impair et pour $L\geq 0$ si n est pair.

En cours de traduction de l' anglais

7.1.2.1.4 Asymptotes

Le terme de "asymptote" est utilisé en mathématiques pour préciser des propriétés éventuelles d'une branche infinie de courbe à accroissement tendant vers l'infinitésimal.

En géométrie analytique, nous disons simplement qu'une asymptote d'une courbe est une ligne telle que la distance entre la courbe et la ligne se rapproche de zéro lorsqu'elles tendent vers l'infini. Dans certains contextes, comme la géométrie algébrique, une asymptote est définie comme une ligne tangente à une courbe à l'infini.

L'étude du comportement asymptotique est particulièrement développée dans les études de fonctions. Dans le domaine scientifique, il arrive fréquemment d'étudier des fonctions dépendant du temps (évolution de populations, réaction chimique ou nucléaire, graphique de température, oscillation d'un amortisseur). Un des objectifs du chercheur est alors de connaître l'état à la fin de l'expérience, c'est-à-dire lorsqu'un grand intervalle de temps s'est écoulé. L'objectif n'est alors pas de connaître les variations intermédiaires, mais de déterminer le comportement stable, à l'infini du phénomène mesuré. Le chercheur étudie donc le comportement asymptotique de sa fonction avec les outils que la mathématique lui offre.

Remarque

Le mot "asymptote" vient du grec et signifie « ne pas tomber ensemble ».

Définitions (#7.1.274) :

D1. Lorsque la limite d'une fonction $f(x)$ tend vers une constante c^{te} quand $x\to\pm\infty$, alors la représentation graphique de cette fonction nous amène à dessiner une droite horizontale que nous appelons "asymptote horizontale" et dont l'équation satisfait :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-c^{te}=f(x_0) \tag{7.1.367}$$

D2. Lorsque la limite d'une fonction $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand $x \to a_{+,-}$, alors la représentation graphique de cette fonction nous amène à dessiner une droite verticale que nous appelons "asymptote verticale" et dont l'équation satisfait :

$$\lim_{x\to a_{+,-}} f(x) \pm \infty = 0 \qquad (7.1.368)$$

Les asymptotes verticales sont le symptôme typique d'une division par zéro dans une fraction et occupent une place très importante en physique. Le syndrome est également appelé une "singularité".

✍**Exemple :**

Le graphique de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad (7.1.369)$$

a les droites de $x = 1$ comme asymptote verticale et $y = 0$ comme asymptote horizontale :

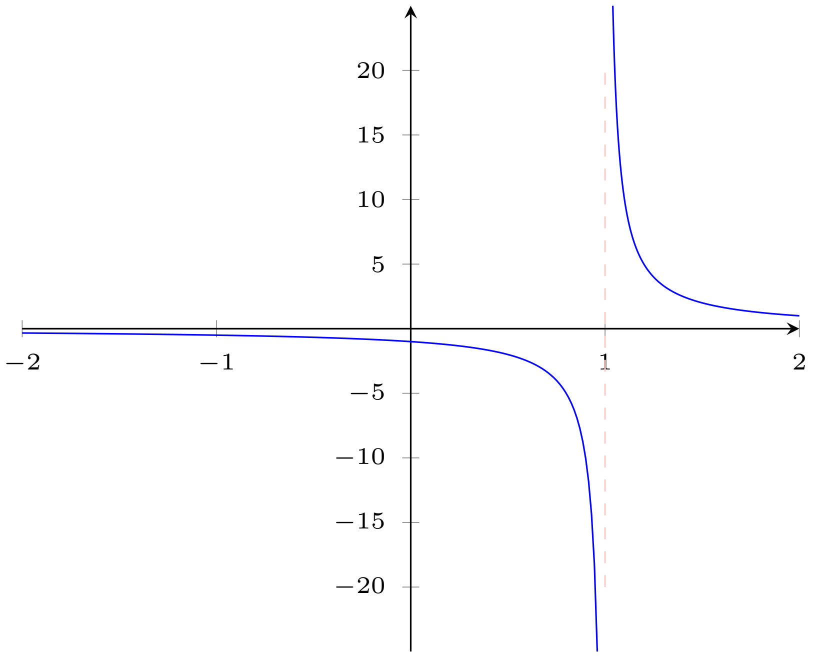


FIG. 7.51 – **Représentation graphique d'une asymptote horizontale et verticale**

D3. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique" d'une courbe de fonction $f(x)$ si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \qquad (7.1.370)$$

les valeurs de a et b peuvent être facilement trouvées en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax \end{aligned} \qquad (7.1.371)$$

Prudence ! Une courbe peut avoir deux asymptotes obliques distinctes en $+\infty$ et $-\infty$.

Pour trouver une éventuelle asymptote oblique, il faut déjà être certain que la fonction $f(x)$ admet une limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$ alors seulement nous cherchons les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x)/x$ et $f(x)-ax$.

Trois cas typiques peuvent être envisagés pour les asymptotes obliques :

(a) La courbe représentative de $f(x)$ a pour direction asymptotique l'équation affine $y=ax$:

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a \tag{7.1.372}$$

Exemple :

Le graph de fonction :

$$f(x)=x+\frac{1}{x} \tag{7.1.373}$$

a la ligne droite d'équation $y=x$ comme asymptote oblique :

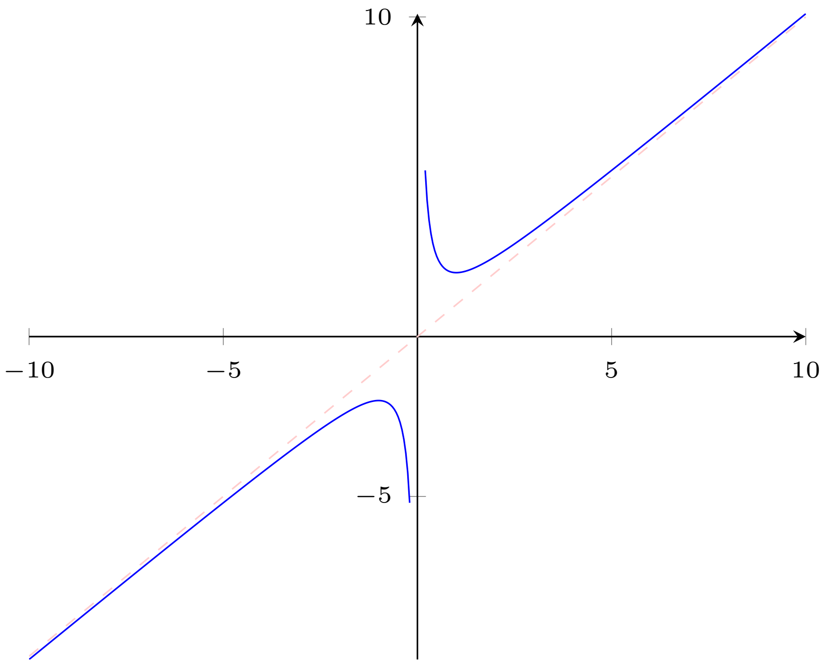


FIG. 7.52 – Représentation graphique d'une asymptote affine oblique

(b) La courbe représentative de $f(x)$ admet une branche infinie (cette branche infinie n'admet pas d'asymptote) et l'axe x des abscisses en est la direction asymptotique (fonction racine carrée par exemple). Une telle asymptote existe quand :

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \tag{7.1.374}$$

✍**Exemple :**

Les fonctions $f(x)=\sqrt{x}$ (en rouge) ou $\ln(x)$ (en vert) ont une limite $f(x)/x$ égale à 0 et toutes deux ont une " branche parabolique" de direction suivant l'axe x :

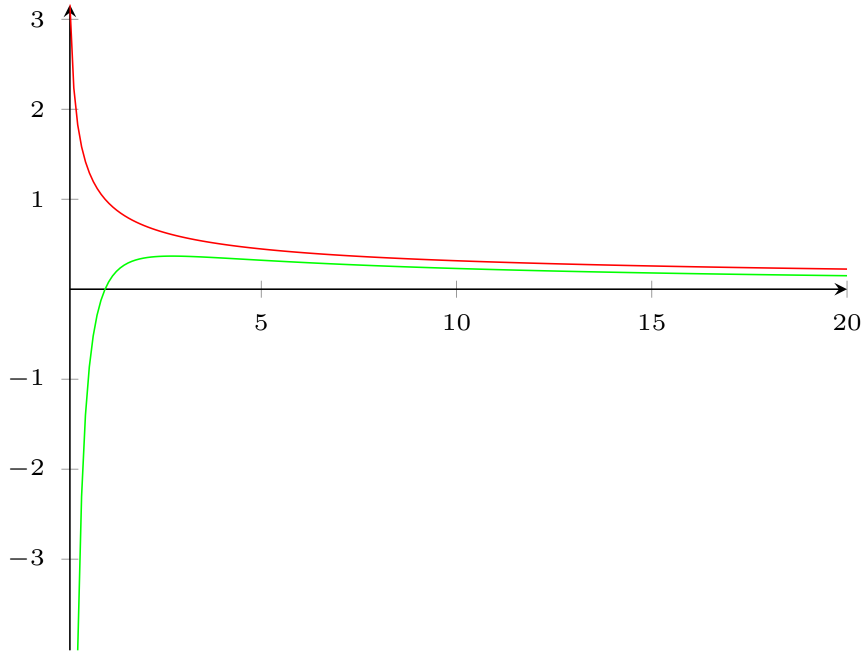


FIG. 7.53 – Représentation graphique d'un exemple de branche parabolique suivant l'axe x

(c) La courbe représentative de $f(x)$ admet une branche infinie (cette branche infinie n'admet pas d'asymptote) et l'axe des ordonnées y en est la direction asymptotique (nous parlons aussi de "branche parabolique" voire de "fonction carrée") :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty \qquad (7.1.375)$$

(d) Une fonction $f(x)$ est dite avoir une "asymptote curviligne" si elle satisfait :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=P_n(x) \qquad (7.1.376)$$

pour $n>1$ où pour rappel $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

✍**Exemple :**

La fonction :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x} \qquad (7.1.377)$$

a une asymptote curviligne qui est :

$$x^2+2x^2+3x \qquad (7.1.378)$$

Effectivement : :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x} = x^2+2x^2+3x+\frac{4}{x} \tag{7.1.379}$$

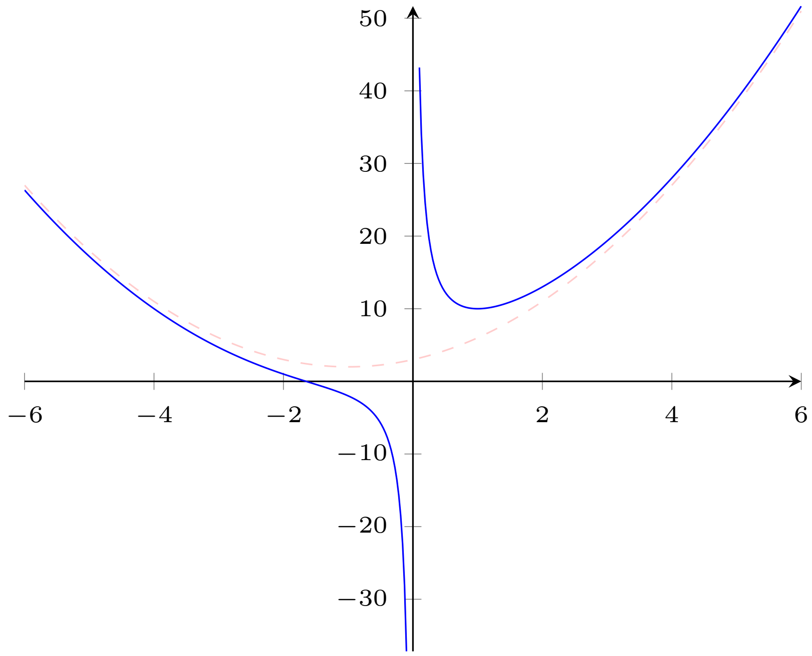


FIG. 7.54 – Représentation graphique de l'asymptote curviligne de l'équation x^2+2x+3

En cours de traduction Opera Magistris

Il existe de nombreuses techniques pour déterminer les limites applicables dans diverses conditions. Il est important de connaître toutes ces techniques, mais il est également important de savoir quand appliquer quelle technique. Certaines techniques de base qui n'impliquent pas la dérivation sont :

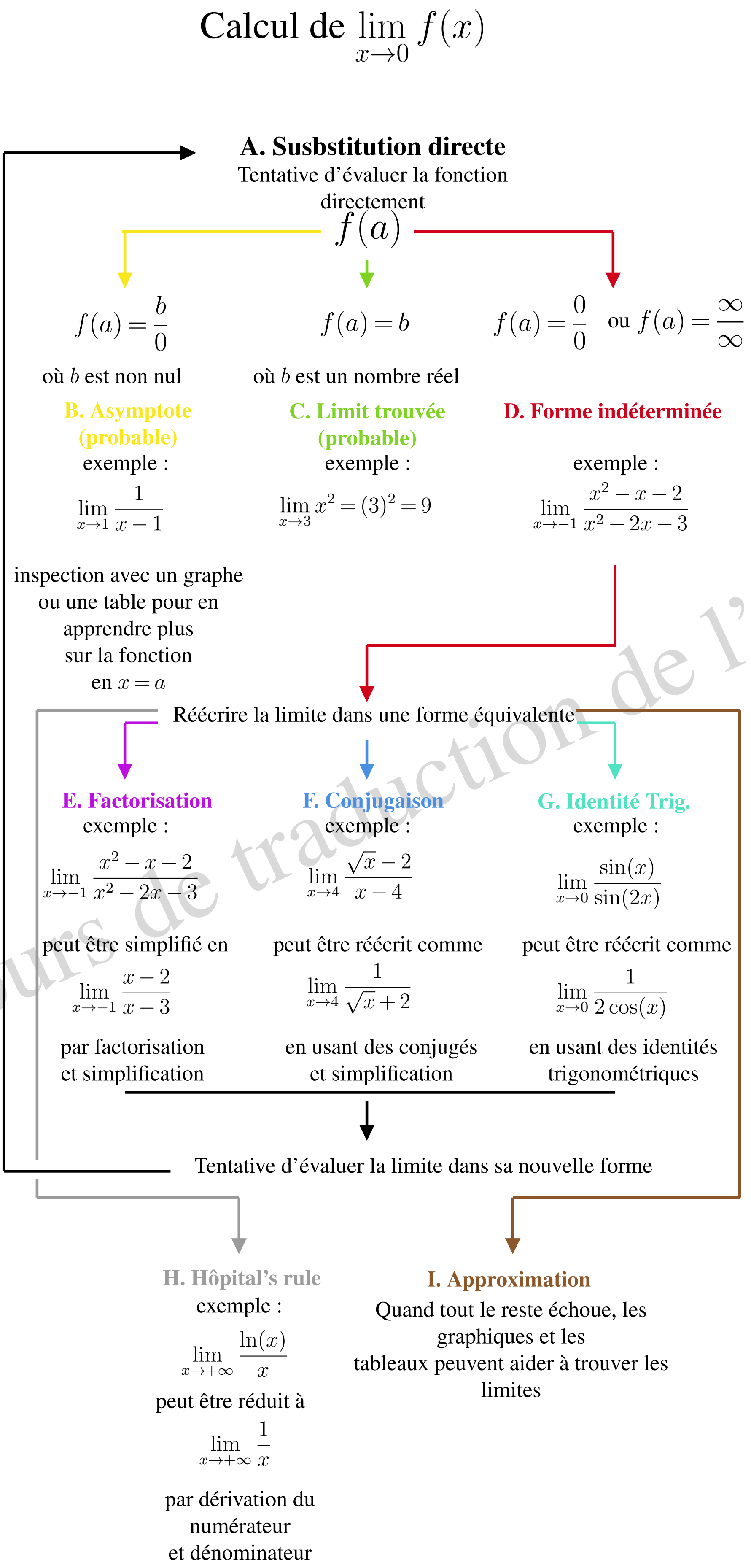


FIG. 7.55 – **Techniques de base pour trouver les limites**

En cours de traduction de l'anglais

7.1.2.1.5 Discontinuités

Les fonctions continues sont de la plus haute importance en mathématiques ! Cependant, toutes les fonctions ne sont pas continues. Si une fonction n'est pas continue en un point de son domaine, nous disons qu'elle y présente une "discontinuité". L'ensemble de tous les points de discontinuité d'une fonction peut être un ensemble discret, un ensemble dense, voire le domaine entier de la fonction.

En pratique, nous considérons les quatre types de discontinuités suivantes (plus de détails et d'exemples suivent après la figure !) :

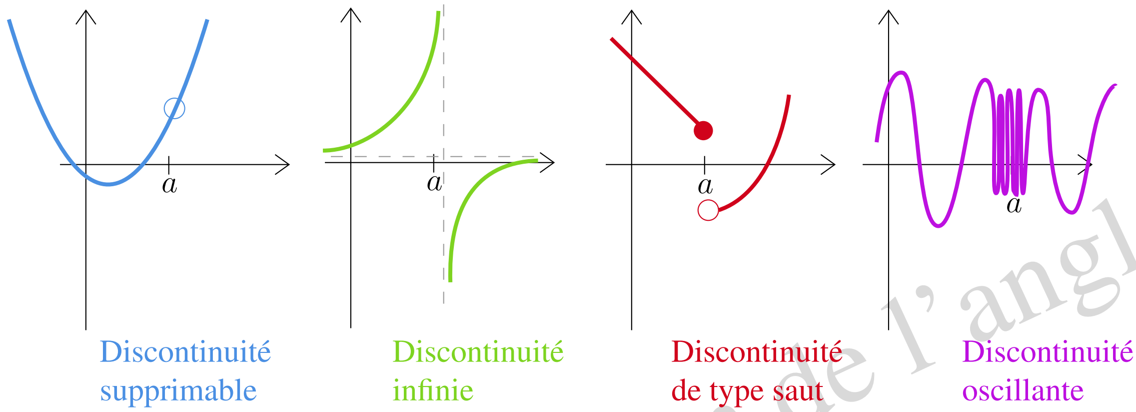


FIG. 7.56 – **Types courants de discontinuités**

En cours de traduction de l'anglais

Pour chacun des éléments suivants, considérons une fonction à valeur réelle $f(x)$ d'une variable réelle x, définie dans un voisinage du point x_0 où $f(x)$ est discontinue !

Définitions (#7.1.275) :

D1. Discontinuité supprimable :

Considérons la fraction suivante :

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{x-1} \tag{7.1.380}$$

Elle semble avoir une discontinuité (singularité) en $x_0=1$, mais en fait c'est une discontinuité supprimable (ou une "singularité apparente"). En effet nous ouvons facilement la supprimer :

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{x-1}=\frac{x(x^2-3x+2)}{x-1}=\frac{x(x-1)(x-2)}{x-1}=x(x-2) \tag{7.1.381}$$

Et c'est tout ! Aucune discontinuité n'est plus visible ni n'existe. Et évidemment en utilisant les techniques que nous avons vues plus haut, il est immédiat que cette fonction est epsilon-delta continue !

La limite unilatérale dans la direction négative :

$$L^-=\lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{7.1.382}$$

et la limite unilatérale dans la direction positive :

$$L^{+}=\lim_{x\to x_0^{+}} f(x) \tag{7.1.383}$$

en x_0 existent toutes deux, sont finies et sont égales à $L=L^{-}=L^{+}$. En d'autres termes, puisque les deux limites unilatérales existent et sont égales, la limite L de $f(x)$ lorsque x s'approche de x_0 existe et est égale à cette même valeur. Si la valeur réelle de $f\left(x_0\right)$ n'est pas égale à L, alors x_0 est appelé une "discontinuité amovible".

D2. Discontinuité infinie/singulière :

Considérons la fonction :

$$f(x)=\frac{1}{x} \tag{7.1.384}$$

Notez que lorsque la valeur de x s'approche de 0 en partant de la gauche, la fonction devient infiniment petite ! De même, à droite de l'axe y, à mesure que la valeur de x s'approche de 0, la fonction augmente à l'infini !

Comment démontrer que cette fonction n'a pas de limite à $x_0=0$ en utilisant la discontinuité epsilon-delta ?

C'est relativement simple ! N'oubliez pas qu'une fonction est epsilon-delta continue si :

$$\forall x\in D \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall x_0\in D:\left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon \tag{7.1.385}$$

Donc si nous choisissons $x_0=0$ cela signifie évidemment que si une limite L existerait à ce stade que :

$$\forall x\in D \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall x_0\in D:|x|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-L\right|<\varepsilon \tag{7.1.386}$$

Dès lors :

$$\forall x\in D \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall x_0\in D:0<x<\delta \Rightarrow -\varepsilon<\frac{1}{x}-L<+\varepsilon \tag{7.1.387}$$

Choisissons arbitrairement $\varepsilon=1$ et concentrons-nous sur la partie droite de l'axe x (donc $L>0$). Donc si L existe, nous devrions avoir :

$$\frac{1}{x}-L<+\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x}-L<1 \tag{7.1.388}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{x}<L+1 \tag{7.1.389}$$

Et comme nous devrions pouvoir choisir n'importe quel $0<x<\delta$ cela contredit évidemment l'inégalité précédente puisque nous pouvons toujours choisir un x qui donne $1/x>L+1$. D'où la contradiction, donc la limite L n'existe pas et $f(x)=1/x$ n'est pas epsilon-delta continue en $x_0=0$!

Une fonction a donc une discontinuité infinie si :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \tag{7.1.390}$$

Dans cet exemple, L^{-} et L^{+} n'existent pas dans $\mathbb{R}$, satisfaisant ainsi la condition de discontinuité essentielle. Donc x_0 est une discontinuité essentielle, une discontinuité infinie ou une discontinuité de seconde espèce.

En cours de traduction de l'anglais

D3. Discontinuité de saut :

Considérons la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, x \geq 1 \\ 2x-2, x < 1 \end{cases} \tag{7.1.391}$$

Alors, le point $x_0 = 1$ est une discontinuité de saut.

Dans ce cas, une limite unique n'existe pas car les limites unilatérales, L^- et L^+ existent et sont finies, mais ne sont pas égales : puisque, $L^- \neq L^+$, la limite L n'existe pas. Alors, x_0 est appelé une "discontinuité de saut", une "discontinuité échelonnée" ou une "discontinuité du premier type". Pour ce type de discontinuité, la fonction f peut avoir n'importe quelle valeur en x_0.

Prouvons-le avec la continuité epsilon-delta !

Nous avons $f(1) = 5$. Donc pour montrer que $f(x)$ n'est pas continu en $x = 1$, il suffit de montrer qu'il n'est pas vrai que $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$.

Supposons au contraire que la limite existe et soit égale à 5. Ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $|x-1| < \delta$, alors $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Choisissons $\varepsilon = 1/2$. Nous montrons qu'il n'y a pas de δ avec la propriété requise.

Si $x < 1$, alors $f(x) < 1$. En particulier, si $x < 1$, alors $|f(x) - 5| > 4$. Il s'ensuit qu'il n'existe pas de δ tel que $|x-1| < \delta$ garantisse que $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

D4. Discontinuité osciallante :

Considérons la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7.1.392}$$

avec son graphique correspondant :

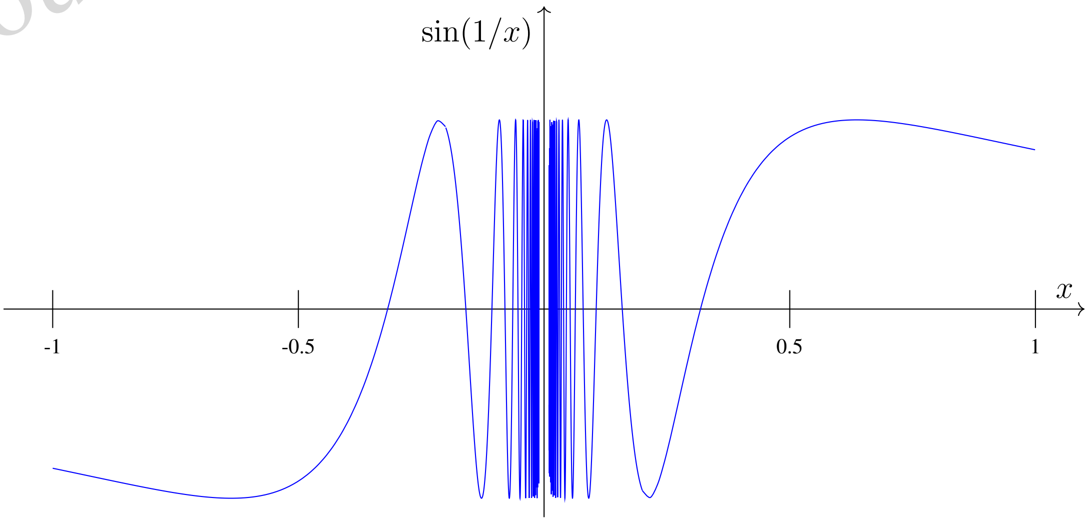


FIG. 7.57 – **Exemple d'une fameuse discontinuité oscillante**

Alors, le point $x_0 = 0$ est une discontinuité oscillante.

Ou une approche plus formelle : Soit $f(x) = \sin(1/x)$.

En cours de traduction de l'anglais

Si $f(x)$ atteint une limite L alors il existe un $\delta > 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ tel que $0 < |x - 0| < \delta$.

En le considérant depuis la droite, nous avons $0 < x < \delta$ ou $+\infty < 1/x < 1/\delta$. Ce qui signifie qu'il existe un nombre infini de $1/x$ de la forme $2n\pi$. Ce qui signifie que la fonction oscille dans l'intervalle et que la limite n'existe pas !

C'est un résultat assez fascinant d'imaginer que pour une fonction déterministe aussi simple (et ce n'est pas de la physique du chaos ni de la physique quantique mais des mathématiques pures !) conduit à un résultat non déterministe... C'est un bel exemple que même en mathématiques pures, tout ne pas conduit à un résultat parfaitement connu !

Les discontinuités oscillantes sont bornées. Autrement dit, leurs oscillations restent entre certaines lignes. Par exemple, la fonction peut être limitée entre un point haut de $y = +3$ et un point bas de $y = -1$. Si la fonction est illimitée d'un côté ou des deux côtés, c'est une discontinuité infinie. En d'autres termes, la fonction doit être complètement délimitée en tous points pour qu'il y ait une discontinuité oscillante. De plus, les limites unilatérales n'existent pas du tout.

Remarque

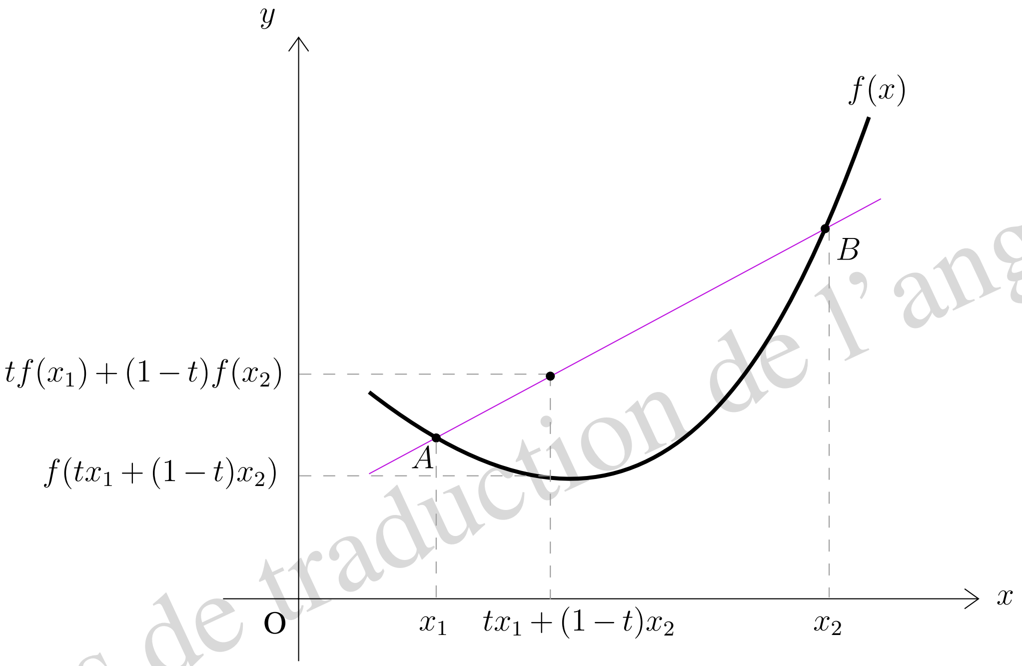
Les discontinuités oscillantes sont considérées par les mathématiciens comme un sous-type de "discontinuités essentielles" ou "discontinuités non réparables".

En cours de traduction de l'anglais

7.1.2.2 Concavité/Convexité d'une fonction

Nous allons maintenant définir une propriété qui à première vue peut paraître sans intérêt tant elle est triviale mais que nous retrouverons dans la section Statistiques pour la démonstration d'une relation importante nommée "inégalité de Jensen" et qui est d'une importance majeure en Finance et Assurance pour la valorisation des options et des primes (voir section Économie page ??) et surtout pour l'application de l'inégalité de Jensen (voir section Statistiques page 568).

Considérons la figure suivante :



En cours de traduction de l'anglais

Définition (#7.1.276) : En mathématiques, une fonction réelle d'une variable réelle est dite une "fonction convexe" si, vu de dessous, son graphe est convexe (en bosse) ; ce que nous voulons dire est que si A et B sont deux points du graphe de la fonction, le segment $\overline{AB}$ est entièrement situé au dessus du graphe. C'est la même chose que de dire que le "épigraphe" (l'ensemble des points au-dessus du graphe) est un ensemble concave. A l'inverse, une fonction dont le graphique, vu du dessous, est vu comme une grotte, est dite être une "fonction concave". C'est la même chose de dire que le "hypographe" (l'ensemble des points se trouvant dessous du graphe) est un ensemble convexe.

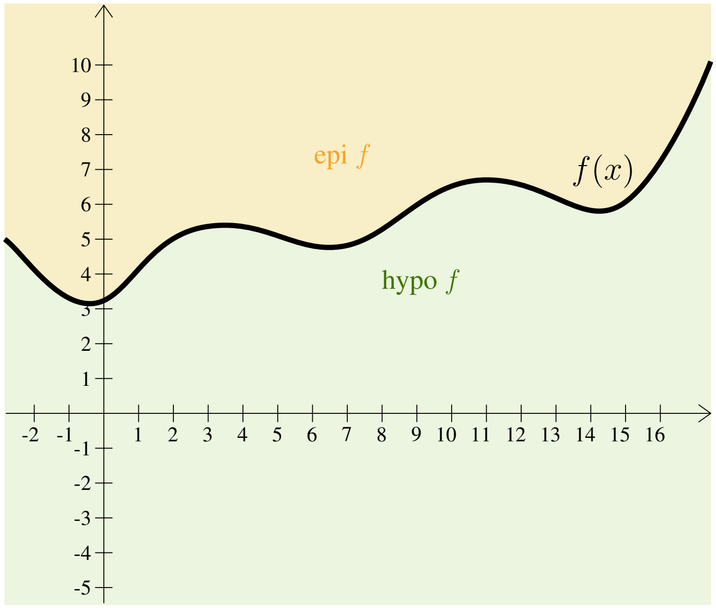


FIG. 7.58 – **Épigraphe et Hypographe d'une fonction**

En précisant par les valeurs de la fonction quels sont les points A et B ci-dessus, nous obtenons souvent une définition équivalente de la convexité d'une fonction : une fonction définie sur un intervalle réel I est convexe lorsque, pour tout x_1 et x_2 de I et tous les t dans $[0,1]$ nous avons :

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \tag{7.1.393}$$

Lorsque l'inégalité est stricte, nous parlons alors évidemment de "fonction strictement convexe".

En attente de traduction de l'anglais

Remarque

Sans démonstration, rien qu'en regardant le graphique ci-dessus, nous supposerons de manière tout à fait évidente que la convexité implique $f''(x) \geq 0$ pour tout x. Comme auparavant, une convexité stricte se produit lorsque l'inégalité est stricte.

Par extension (bon sens de notre point de vue), une fonction f est concave si $-f$ est convexe (ce qui est trivial avec la fonction de pay-off - voir section Economie page **??** - profil d'options du point de vue du vendeur ou de l'acheteur).

✍**Exemples :**

E1. Considérons $f(x)=x^2$. La dérivée première de $f(x)$ est donnée par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f=2x$ et sa dérivée seconde par $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f=2$. Puisque celle-ci est toujours strictement supérieure à 0, nous avons démontré que $f(x)=x^2$ est strictement convexe.

E2. Considérons $f(x)=\log(x)$. La dérivée première est $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f=\frac{1}{x}$ et sa dérivée seconde est donnée par $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f=-\frac{1}{x^2}$. Puisque c'est négatif pour tout $x>0$, nous avons démontré que $\log(x)$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+$.

7.1.2.3 Théorème d'Euler pour les fonctions homogènes

Nous devons maintenant introduire une définition et un théorème qui seront très importants pour des concepts assez avancés dans notre étude de la Physique plus tard dans ce manuel.

Définition (#7.1.277) : Une "fonction homogène" est une fonction avec un comportement de mise à l'échelle multiplicatif : si tous ses arguments sont multipliés par un facteur, alors sa valeur est multipliée par une certaine puissance de ce facteur. Par exemple, une fonction homogène à valeur réelle de deux variables x et y est une fonction à valeur réelle qui satisfait à la condition $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ pour quelques k constants et tous les nombres réels $t\in\mathbb{R}^*$. La constante k est nommée "degré d'homogénéité".

Plus généralement, si $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ est une fonction entre deux espaces vectoriels sur un champ F, et k est un entier, alors f est dit être homogène de degré k si :

$$f(tx,ty,ty)=t^k f(x,y,z) \quad (7.1.394)$$

ou plus communément noté :

$$f(t\vec{x})=t^k f(\vec{x}) \quad (7.1.395)$$

Exemple :

La fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ est homogène de degré 2. En effet :

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2(x^2+y^2)=t^2 f(x,y) \quad (7.1.396)$$

Supposons maintenant que $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ soit continuellement différentiable sur $\mathbb{R}$. Nous savons qu'une fonction est homogène de degré k si :

$$f(t\vec{x})=t^k f(\vec{x}) \quad (7.1.397)$$

En différenciant les deux côtés par rapport à t, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}f(t\vec{x})}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}x_i=kt^{k-1}f(x) \quad (7.1.398)$$

par la règle de chaîne différentielle exacte totale de f.

Ainsi, le "Théorème d'Euler pour les fonctions homogènes" peut être résumé comme suit :

$$f(tx,ty,ty)=t^k f(x,y,z)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}x_i=kt^{k-1}f(x) \quad (7.1.399)$$

Remarque

Rappelons que nous avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral

En cours de l' anglais

(voir page 1449) que :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (7.1.400)$$

Dès lors :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d(tx)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d(ty)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y \quad (7.1.401)$$

Alors si nous choisissons de poser avec le cas particulier $k=1$ (c'est le cas qui nous intéressera le plus en Physique) alors ce qui précède devient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}x_i = f(x) \quad (7.1.402)$$

ou explicitement pour $n=2$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y) \quad (7.1.403)$$

si $f(tx)$ est homogène de degré 1.

C'est un résultat important dont nous aurons besoin en mécanique lagrangienne et qui sera utile pour l'étude du lagrangien d'une particule libre en Relativité Restreinte et en Cosmologie Quantique.

En cours de traduction de l' anglais

7.1.3 Logarithmes

Nous avons longuement hésité à mettre la définition des logarithmes dans le section traitant du Calcul Algébrique. Après un moment de réflexion, nous avons décidé qu'il valait mieux la mettre ici car pour bien comprendre la définition, il faut avoir connaissance des concepts de limite, de domaine de définition et de fonction exponentielle. Nous espérons que notre choix vous conviendra au mieux le lecteur.

Soit la fonction puissance (bijective) de base quelconque $a \in \mathbb{R}_+^* / 1$ (nous excluons 1 sinon ce n'est pas bijectif) ou notée pour rappel par :

$$f(x) = a^x \tag{7.1.404}$$

pour laquelle il correspond à chaque nombre réel x, exactement un nombre positif a^x (l'ensemble image de la fonction est dans $\mathbb{R}$) tel que les règles de calcul des puissances soient applicables (voir section Calcul Algébrique page 1336).

Nous savons que pour une telle fonction, que si $a > 1$, alors $f(x)$ est croissante et positive dans $\mathbb{R}$, et si $0 < a < 1$, alors $f(x)$ est décroissante et positive dans $\mathbb{R}$.

Remarques

R1. Si $a > 1$, quand x diminue jusqu'à des valeurs négatives, le graphique de $f(x)$ se rapproche de l'axe x. Ainsi, l'axe x est une asymptote horizontale. Lorsque x augmente en valeurs positives, le graphique augmente rapidement. Ce type de changement est caractéristique de la "loi de croissance exponentielle" et $f(x)$ est parfois nommé "fonction de croissance"... Si $0 < a < 1$, lorsque x augmente, le graphique tend asymptotiquement vers l'axe x. Ce type de variation est connu sous le nom de "décroissance exponentielle".

R2. En étudiant a^x, nous excluons le cas où $a \leq 0$ et $a = 1$. Notez que si $a < 0$, alors a^x n'est pas un nombre réel pour de nombreuses valeurs de x (nous rappelons que l'ensemble de l'image est forcé à $\mathbb{R}$ dans notre définition précédente). Si $a = 0$, le $a^0 = 0$ n'est pas défini. Enfin, si $a = 1$, alors $a^x = 1$ pour tout x et le graphique de $f(x)$ est une ligne horizontale.

Puisque la fonction puissance $f(x)$ est bijective alors il existe une fonction réciproque $f^{-1}(x)$ et appelée "fonction logarithme" de base a et notée :

$$f^{-1}(y) = \log_a(y) \tag{7.1.405}$$

et ainsi :

$$x = \log_a(y) \tag{7.1.406}$$

si et seulement si $y = a^x$.

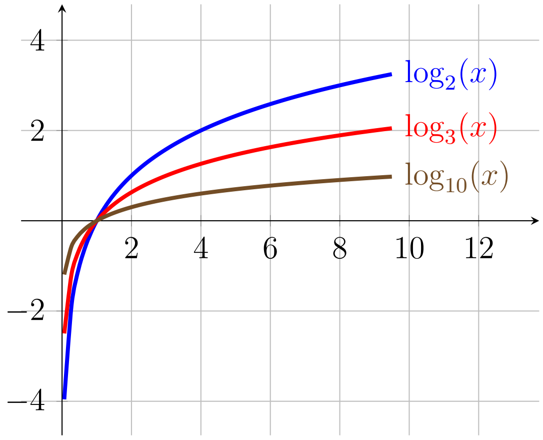
Plus généralement, elle est définie par :

$$\boxed{\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y \qquad a > 0, a \neq 1} \tag{7.1.407}$$

En considérant $\log_a(x)$ comme un exposant, nous avons les propriétés suivantes :

Propriétés	Justification
$\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$
$\log_a a = a$	$a^1 = a$
$\log_a a^x$	$a^x = a^x$
$a^{\log_a(x)} = x$	$a^{\log_a(x)} = a^y = x$

TAB. 7.6 – **Propriétés du logarithme en base a**



Remarques

R1. Le mot "logarithme" signifie "nombre du logos", "logos" signifiant "raison" ou "rapport".

R2. Les fonctions logarithme et puissance sont définies par leur base (le nombre a). Lorsque nous utilisons une base de puissance de 10 $(10, 100, 1000, \ldots)$ nous parlons alors de "système vulgaire" car ils ont pour logarithme $\log$ des nombres entiers successifs.

R3. La partie entière du logarithme s'appelle la "caractéristique".

Il existe deux types de logarithmes que nous retrouvons presque exclusivement en mathématiques et en physique : le logarithme en base 10 et le logarithme en base e (ce dernier étant fréquemment appelé "logarithme naturel" ou plus exactement pour des raisons historiques justifiées "logarithme népérien").

D'abord celui en base 10 (le plus utilisé dans les représentations graphiques) :

$$f(x) = \log_{10}(x) \qquad (7.1.408)$$

abusivement noté :

$$f(x) = \log(x) \qquad (7.1.409)$$

et celui en base (eulérienne) e :

$$f(x) = \log_e(x) \qquad (7.1.410)$$

historiquement noté :

$$\boxed{f(x) = \ln(x)} \qquad (7.1.411)$$

le "n" signifiant "népérien".

Remarque

Historiquement, c'est à John Napier (11550-11617 selon calendrier holocène) dont le nom latinisé est "Neper" que l'on doit l'étude des logarithmes et le nom aux "logarithmes népériens" qui avait pour objectif à l'époque de faciliter grandement les calculs manuels.

En français pour la fonction logarithmique en base 10 il faut pour calculer :

$$f(x) = \log(x) \tag{7.1.412}$$

se poser la question suivante : à quelle puissance $n \in \mathbb{R}$ devons-nous élever 10 pour obtenir x ?

Formellement, cela consiste à résoudre l'équation :

$$10^n = x \tag{7.1.413}$$

ou autrement écrit :

$$10 = \sqrt[n]{x} \tag{7.1.414}$$

avec x étant connu et donc en base 10 :

$$\log(x) = n \tag{7.1.415}$$

Pour travailler avec des exposants de bases différentes, il faut également son opération inverse, et c'est logarithme que nous venons de définir !. Alors si vous cherchez (très utile pour des raisons pédagogiques) :

$$2^x = 10^y \tag{7.1.416}$$

en appliquant un $\log_{10}$ à l'équation précédente :

$$y = \log_{10} 2^x = x \cdot \log_{10} 2 = 0.30103x \tag{7.1.417}$$

Par conséquent, nous avons généralement une ordre de grandeur de $2^{10} \approx 10^3$.

Donc si nous nous souvenons que la probabilité que notre univers soit tel qu'il est, est approximativement de l'ordre de $10^{-10^{500}}$ (voir page **??**) donc cette probabilité est équivalente à un résultat quelconque d'un lancer d'environ $10^{10^{1500}}$ pièces.

Le logarithme en base 10 est très utilisé dans les représentations graphiques du point de vue scientifique lorsque l'on s'intéresse à des amplitudes de variations. Par exemple avec le logiciel Maple 4.02 nous avons sans échelle logarithmique pour deux sinus ayant pourtant par rapport à leur moyenne respective la même variation d'amplitude de 50% le résultat visible ci-dessous qui ne met pas nécessairement en évidence cet état de fait de façon triviale :

```
>plot(10+0.5*10*sin(x),100+100*0.5*sin(x),x=1..10);
```

En cours de traduction de l' anglais

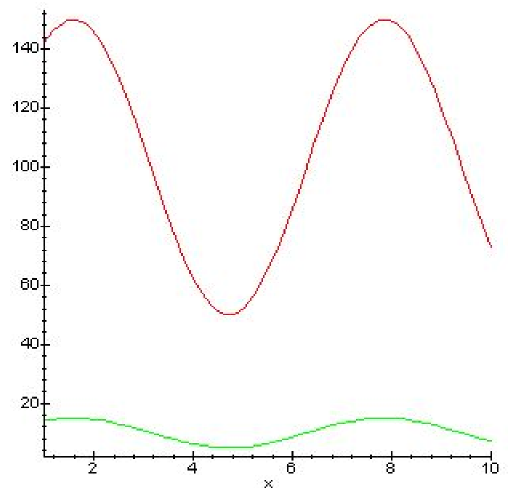


FIG. 7.59 – Plot avec Maple 4.02 de 2 fonctions sinus avec même amplitude de variation par rapport à leur moyenne

Alors qu'en échelle logarithmique, cela donne :

```
>with(plots):
>logplot(10+0.5*10*sin(x),100+100*0.5*sin(x),x=1..10);
```

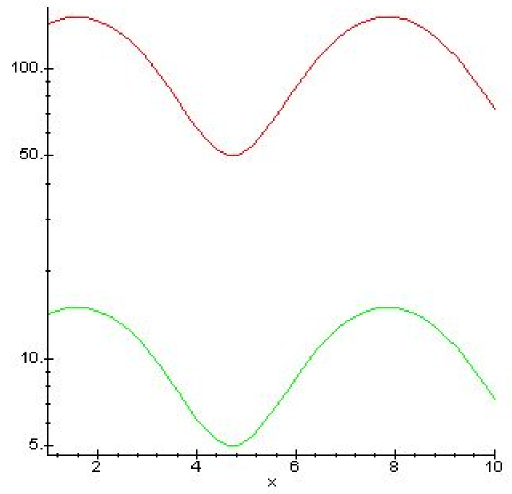


FIG. 7.60 – Même graphique avec Maple 4.00b mais avec l'axe y en échelle logarithmique en base 10

En cours de l' anglais

L'échelle logarithmique est plus connue pour le types de grilles de graphiques suivants :

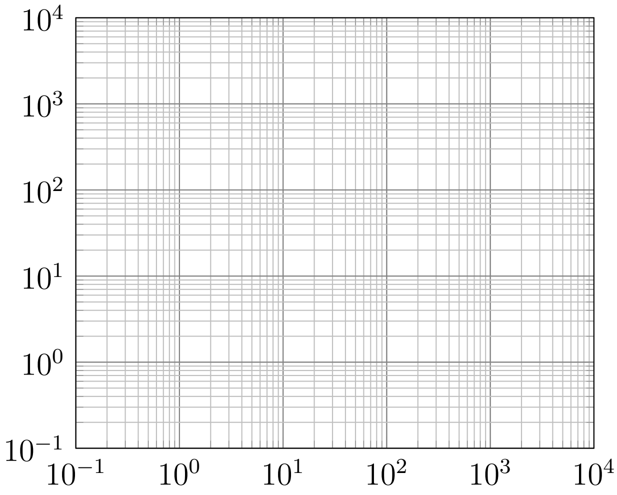


FIG. 7.61 – **Double grille logarithmique**

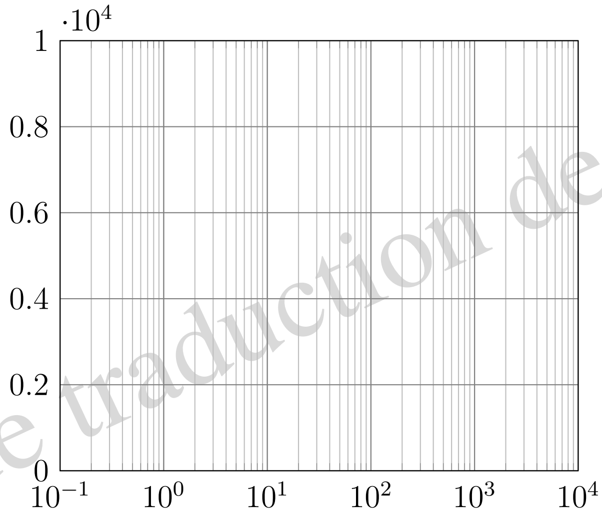


FIG. 7.62 – **Simple grille logarithmique**

En cours de traduction de l' anglais

Pour la fonction logarithmique en base eulérienne e (ou dite "base népérienne") il faut pour calculer :

$$f(x) = \ln(x) \quad (7.1.418)$$

se poser aussi la question suivante : à quelle puissance $n \in \mathbb{R}$ devons nous élever le nombre e pour obtenir x ?

Formellement, cela consiste à résoudre l'équation :

$$e^n = x \quad (7.1.419)$$

avec x étant connu et donc :

$$\ln(x) = n \quad (7.1.420)$$

Techniquement, nous disons alors que la fonction exponentielle (voir plus bas les détails) :

$$\boxed{f(x) = e^x} \quad (7.1.421)$$

est la bijection réciproque de la fonction $\ln(x)$.

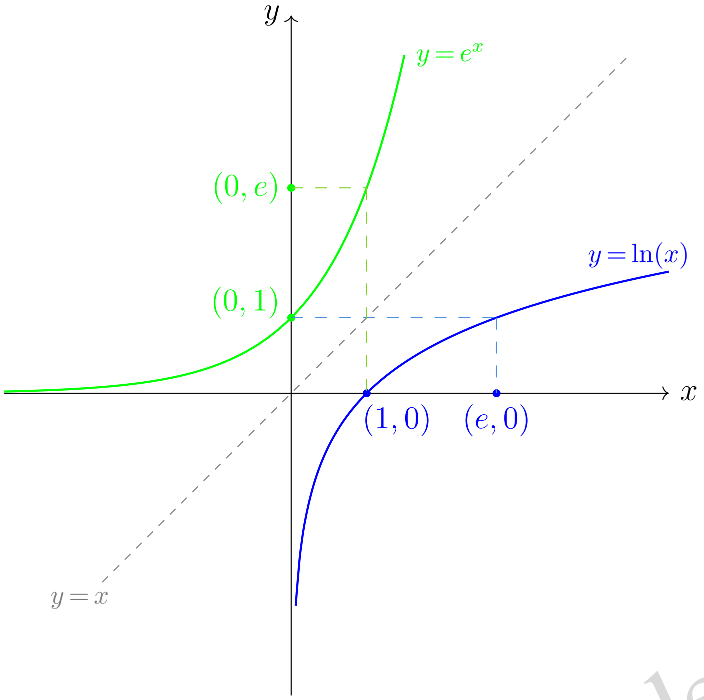


FIG. 7.63 – **Représentation graphique plane de la bijection entre le logarithme népérien et l'exponentielle**

En cours de traduction de l'anglais

Mais quel est donc ce nombre "eulérien" appelé également "nombre d'Euler"? Pourquoi le retrouve-t-on si souvent en physique et en mathématiques? D'abord déterminons l'origine de sa valeur :

$$\sqrt[n]{1+n}=(1+n)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \tag{7.1.422}$$

avec $\alpha\in\mathbb{N}$ et quand $\alpha\rightarrow+\infty$.

Remarque

Le deuxième terme de l'égalité est typiquement le type d'expression que l'on retrouve dans les intérêts composés en finance (voir section Economie page ??) ou dans tout autre type de facteur d'augmentation identique. Et ce qui nous intéresse dans ce cas, c'est lorsque ce type d'augmentation tend vers l'infini.

L'intérêt que nous avons à poser le problème ainsi est que si l'on tend $\alpha\rightarrow+\infty$ la fonction écrite ci-dessus tend vers e et cette fonction a la propriété particulière d'être calculable plus ou moins facilement pour des raisons historiques en utilisant le binôme de Newton.

Ainsi selon le développement du binôme de Newton (voir section Algèbre page 1348) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}&=1+\frac{\alpha}{1!}\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\frac{1}{\alpha^2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\frac{1}{\alpha^3}\\&+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(\alpha-1))}{\alpha!}\frac{1}{\alpha^{\alpha}}\end{aligned} \tag{7.1.423}$$

Ce développement est similaire au développement de Taylor (voir section Suites et Séries page 1677) de certaines fonctions données pour des cas particuliers de valeurs de développement (d'où la raison pour laquelle on retrouve ce nombre eulérien à de nombreux domaines des mathématiques appliquées comme nous le verrons plus tard).

En effectuant quelques transformations algébriques qui devraient maintenant être évidentes pour le lecteur, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\\+\cdots+\frac{1}{\alpha!}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\end{aligned}\tag{7.1.424}$$

Nous voyons dans cette dernière égalité que la fonction $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ est croissante lorsque α augmente. En effet, lorsque nous passons de α à la valeur $\alpha+1$ chaque terme de cette somme augmente :

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)<\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)\text{, etc.}\tag{7.1.425}$$

Montrons maintenant que la variable $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ est bornée. En voyant que :

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)<1,\ \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)<1\text{, etc.}\tag{7.1.426}$$

Nous obtenons donc par analogie avec l'expression étendue du binôme de Newton déterminé juste auparavant la relation d'ordre suivante :

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}<1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\alpha!}\tag{7.1.427}$$

D'un autre côté :

$$\frac{1}{3!}<\frac{2}{2!},\ \frac{1}{4!}<\frac{2}{3!},\ \frac{1}{\alpha!}<\frac{2}{2^{\alpha-1}}\tag{7.1.428}$$

Nous pouvons alors écrire l'inégalité :

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}<1+\underline{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha-1}}}\tag{7.1.429}$$

Les termes soulignés constituent une séquence géométrique de raison $q=1/2$ (voir section Suites et Séries page ??) et dont le premier terme est 1. Il s'en suit qu'en utilisant le résultat obtenu dans la section Suites et Séries, que nous pouvons écrire :

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}<1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right]=1+\frac{1-(1/2)^{\alpha}}{1-(1/2)}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]<3\tag{7.1.430}$$

Ainis, nous avons :

$$2\leq\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}<3\tag{7.1.431}$$

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons donc démontré que la fonction $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ est bornée.

La limite :

$$e=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \quad (7.1.432)$$

tend vers cette valeur limite qu'est le nombre e dont la valeur est :

$$e=2.7182818284\ldots \quad (7.1.433)$$

La relation antéprécédente est également connue sous la forme suivante après un changement évident de variable

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} \quad (7.1.434)$$

Remarque

Comme nous l'avons prouvé dans la section Nombres, ce nombre est irrationnel.

Nous pouvons alors définir la "fonction exponentielle naturelle" (inverse de la fonction logarithme naturel) par (pour ceux qui veulent plutôt voir une sorte de démonstration circulaire plutôt qu'une définition... voir page 2222) :

$$f(x)=e^x=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha} \quad (7.1.435)$$

aussi parfois désigné par :

$$f(x)=\exp(x) \quad (7.1.436)$$

Le nombre e et la fonction qui le détermine sont très utiles. On les retrouve dans tous les domaines des mathématiques et de la physique et donc dans presque tous les chapitres du présent manuel.

Comme nous l'avons démontré dans la section de Calcul Différentiel et Intégral la fonction e^x a pour propriété remarquable que sa dérivée soit égale à elle-même :

$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}=e^x \quad (7.1.437)$$

et ceci est beaucoup utilisé pour la résolution d'équations différentielles en physique et en finance.

Les logarithmes ont plusieurs propriétés. Voici les plus importants à notre avis (on fait référence à une base X donnée) et qui sont très utiles en physique, électronique, chimie etc...

Commençons. D'abord :

$$\log_X(X^mX^n)=\log_X(X^{m+n})=\log_X(X^m)+\log_X(X^n)=m+n \quad (7.1.438)$$

Si nous posons $X^m=a$ et $X^n=b$, nous obtenons :

$$\log_X(a\cdot b)=\log_X(a)+\log_X(b) \quad (7.1.439)$$

En cours de traduction de l'anglais

Si nous avons le cas particulier où $a = b$ alors :

$$\log_X(a \cdot a) = \log_X(a) + \log_X(a) = 2\log_X(a) \tag{7.1.440}$$

Maintenant essayons d'exprimer :

$$\log_X\left(\frac{a}{b}\right) \tag{7.1.441}$$

autrement. Pour cela, nous posons d'abord :

$$t = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = tb \tag{7.1.442}$$

ce qui nous amène au développement :

$$\begin{gathered}\log_X(a) = \log_X(t \cdot b) = \log_X(t) + \log_X(b) \\ \Rightarrow \log_X(t) = \log_X(a) - \log_X(b) = \log_X\left(\frac{a}{b}\right)\end{gathered} \tag{7.1.443}$$

Essayons maintenant d'exprimer :

$$\log_X\left(x^{1/n}\right) \tag{7.1.444}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ autrement. Pour cela, nous posons d'abord :

$$t = x^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x = t^n \tag{7.1.445}$$

ce qui nous amène au développement :

$$\log_X(x) = \log_X(t^n) = n \cdot \log_X(t) \Rightarrow \log_X(t) = \log_X\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log_X(x) \tag{7.1.446}$$

Il existe également une autre relation utilisée depuis longtemps en physique concernant le changement de base du logarithme. La première relation est triviale et découle des propriétés algébriques des logarithmes :

$$a^x = e^{x\ln(a)} = 10^{x\log_{10}(a)} = b^{x\log_b(a)} \tag{7.1.447}$$

la seconde :

$$\log_a(u) = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} = \frac{\log_{10}(u)}{\log_{10}(a)} = \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)} \tag{7.1.448}$$

est un peu moins triviale et nécessite peut-être une démonstration (nous l'avons utilisée pour notre étude des fractions continues dans la section Théorie des Nombres).

Démonstration 7.3.2. Nous utilisons d'abord les équations équivalentes (de la première relation ci-dessus) :

$$w = \log_a(u) \quad \text{et} \quad a^w = u \tag{7.1.449}$$

et nous procédons de la façon suivante :

$$\begin{gathered}a^w = u \\ \log_b(a^w) = \log_b(u) \\ w \cdot \log_b(a) = \log_b(u)\end{gathered} \tag{7.1.450}$$

Ce qui nous amène finalement à :

$$w = \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)} = \log_a(u) \tag{7.1.451}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

7.1.4 Convolutions

Une convolution est une opération mathématique sur deux fonctions pour produire une troisième fonction, qui est généralement considérée comme une version modifiée de l'une des fonctions originales, donnant l'intégrale de la multiplication ponctuelle des deux fonctions en fonction de la quantité qu'ne des fonctions originales est traduite.

Il existe différents types de convolutions et comme toujours, nous nous concentrerons dans la présent manuel uniquement sur celles qui sont réellement utilisées dans d'autres sections.

7.1.4.1 Produit de Convolution Continu et Discret Linéaire

Définition (#7.1.278) : La "convolution continue" de deux signaux continus $x(t)$ et $h(t)$ est définie comme :

$$y(t) = h(t) * x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (7.1.452)$$

de l' anglais

Remarque

La convolution est aussi parfois notée avec d'autres ymboles :

$$y(t) = h(t) \star x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (7.1.453)$$

ou :

$$y(t) = h(t) \circledast x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (7.1.454)$$

E

Nous allons maintenant démontrer quelques propriétés de la convolution en nous concentrant uniquement sur celles utilisées dans les autres sections de ce livre !

P1. La convolution est commutative :

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (7.1.455)$$

Démonstration 7.3.3. En effectuant le changement de variable $\lambda = t - \tau$, dans une forme de définition de la convolution :

$$y(t) = h(t) * x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (7.1.456)$$

cela devient :

$$x(t)*h(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=h(t)*x(t) \tag{7.1.457}$$

prouvant que la convolution est commutative.

■ Q.E.D.

P2. La convolution est associative :

$$(f*g)(t)=\int\limits_{0}^{t} f(s)g(t-s)\mathrm{d}s \tag{7.1.458}$$

Démonstration 7.3.4. La démonstration est plus facile à comprendre si l'on considère une intégrale limitée (mais vous pouvez changer les bornes à celle de l'infini et vous retomberez sur le résultat général) :

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(t)&=\int_0^t (f*g)(s)h(t-s)\mathrm{d}s\\&=\int_{s=0}^t\left(\int_{u=0}^s f(u)g(s-u)\mathrm{d}u\right)h(t-s)\mathrm{d}s\\&=\int_{s=0}^t\int_{u=0}^s f(u)g(s-u)h(t-s)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&=\int_{u=0}^t\int_{s=u}^t f(u)g(s-u)h(t-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\&=\int_{u=0}^t\int_{s=0}^{t-u} f(u)g(s)h(t-s-u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\&=\int_{u=0}^t f(u)\left(\int_{s=0}^{t-u} g(s)h(t-u-s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u\\&=\int_{u=0}^t f(u)(g\star h)(t-u)\mathrm{d}u\\&=(f*(g*h))(t)\end{aligned} \tag{7.1.459}$$

La démonstration ci-dessus n'est peut-être pas évidente pour de nombreux lecteurs. Nous recommandons donc de voir la démonstration équivalente pour la version discrète plus bas.

■ Q.E.D.

P3. La convolution est distributive :

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t) \tag{7.1.460}$$

Démonstration 7.3.5.

$$\begin{aligned}x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[h_1(t-\tau)+h_2(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)h_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)\end{aligned} \tag{7.1.461}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

P4. Relation avec la différenciation :

$$(f*g)' = f'*g = f*g' \quad (7.1.462)$$

Démonstration 7.3.6.

$$\begin{aligned}(f*g)' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\frac{\partial}{\partial t}g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\frac{\partial}{\partial t}g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g'(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f*g' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g'(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f*g'\end{aligned} \quad (7.1.463)$$

■ Q.E.D.

Nous supposerons comme évident que ces propriétés s'appliquent également à la convolution discrète que nous allons introduire maintenant !

Généralement, $y(t)$ est la sortie d'un système caractérisé par sa fonction de réponse impulsionnelle $h(t)$ avec l'entrée $x(t)$.

Définition (#7.1.279) : La "convolution discrète" de deux signaux discrets $x[n]$ et $h[n]$ est défini comme :

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m]\,h[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n-m]\,x[m] \quad (7.1.464)$$

Si $h[m]$ est fini, c'est-à-dire :

$$h[m] = \begin{cases} h[m] & |m| \leq k \\ 0 & |m| > k \end{cases} \quad (7.1.465)$$

La convolution devient :

$$y[n] = \sum_{m=-k}^{k} x[n-m]\,h[m] \quad (7.1.466)$$

Si le système en question était un système causal dans le domaine temporel :

$$h(n) = h[n]u[n] \qquad \text{i.e.} \qquad h[n] = 0 \quad \text{si } n < 0 \quad (7.1.467)$$

la relation précédente deviendrait alors :

$$y[n] = \sum_{m=0}^{k} x[n-m]\,h[m] \quad (7.1.468)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$(f*g)[n] = \sum_{k=0}^{n} f[k]g[n-k] \quad (7.1.469)$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Considérons :

$$f[n] = 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + 1\delta(n-2) \quad (7.1.470)$$
$$g[n] = 2\delta(n) + 1\delta(n-1) + 3\delta(n-2) \quad (7.1.471)$$

Nous obtenons visuellement (ce n'est pas nécessairement trivial !) :

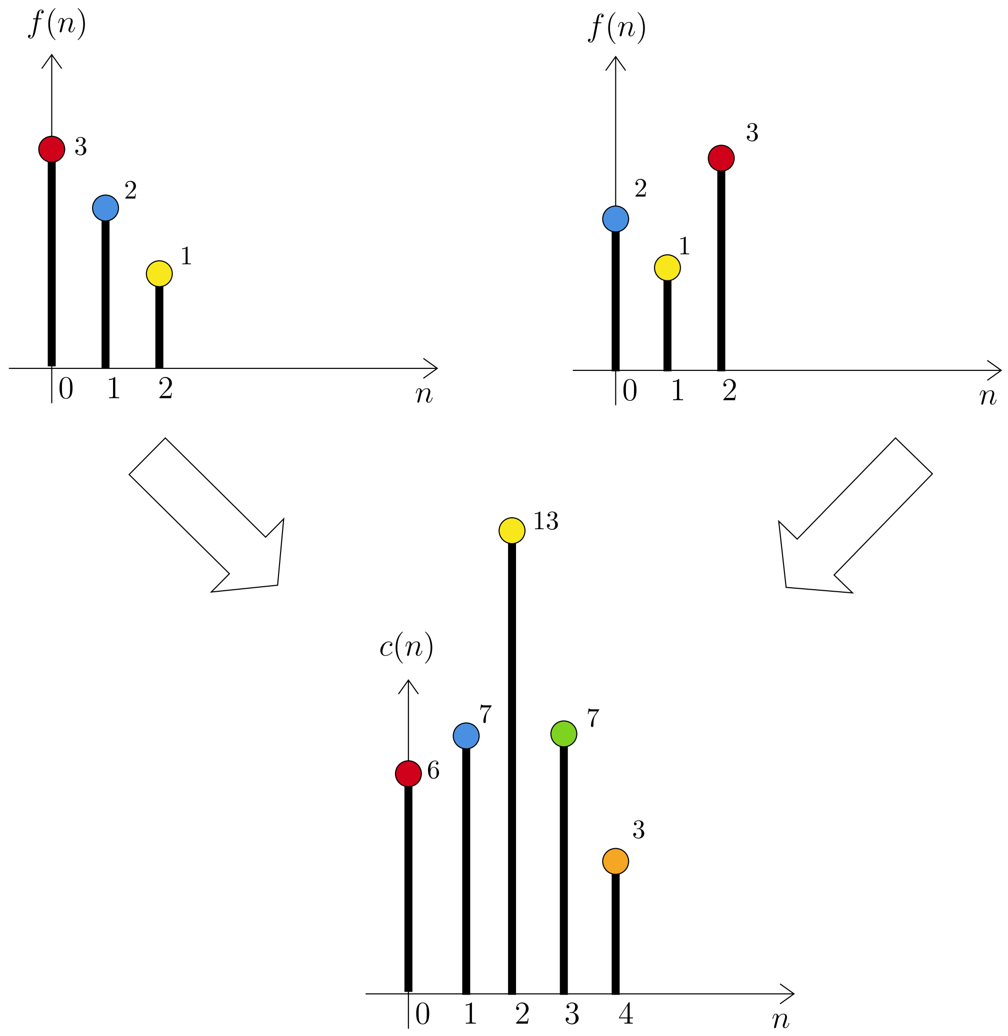


Fig. 7.64 – Exemple de convolution discrète

Les étapes détaillées sont données en considérant d'abord que :

$$(f*g)[n] = c[n] = \sum_{m=0}^{2} g[n-m]f[m] \quad (7.1.472)$$

Et nous avons pour rappel :

$$\begin{array}{ll} f(m=0)=3 & g(k=0)=2 \\ f(m=1)=2 & g(k=1)=1 \\ f(m=2)=1 & g(k=2)=3 \end{array} \quad (7.1.473)$$

Et sous forme tabulaire :

$n:$	0	1	2	3	4
$m=0$	$2\cdot 3=6$	$1\cdot 3=3$	$3\cdot 3=9$	0	0
$m=1$	0	$2\cdot 2=4$	$1\cdot 2=2$	$3\cdot 2=6$	0
$m=2$	0	0	$2\cdot 1=2$	$1\cdot 1=1$	$3\cdot 1=3$
$c[n]$	6	7	13	7	3

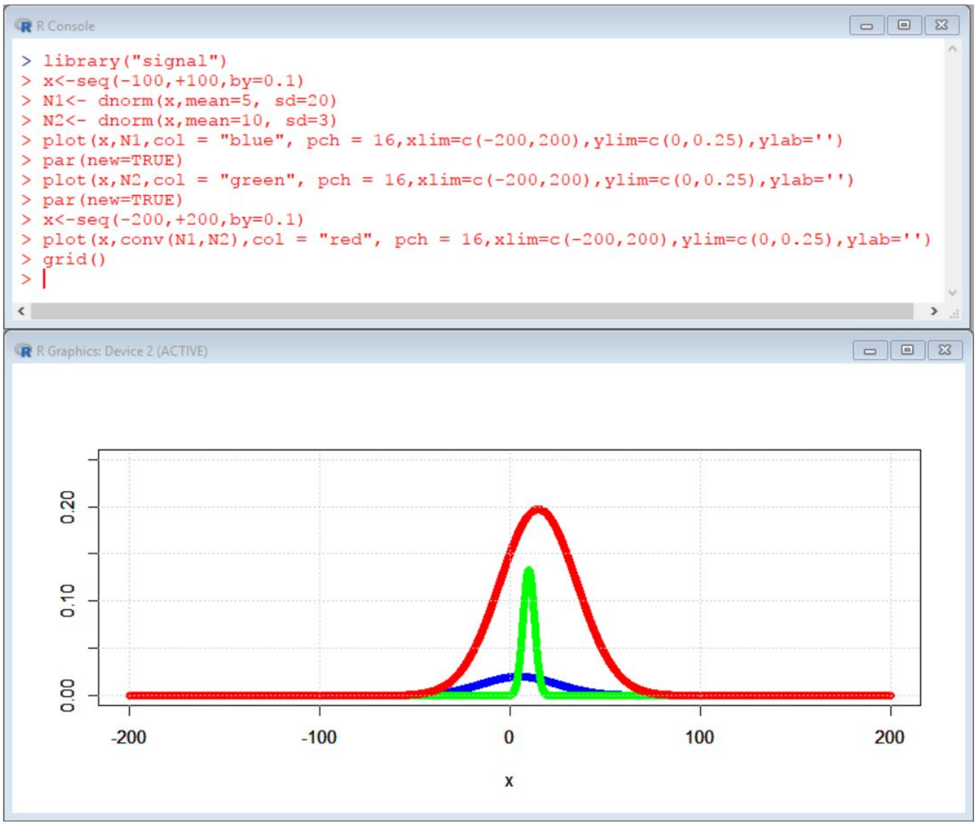
Tous les $c[n>4]$ étant égaux à zéro.

Le résultat final sera alors écrit :

$$c[n]=6\delta(n)+7\delta(n-1)+13\delta(n-2)+7\delta(n-3)+3\delta(n-4) \qquad (7.1.474)$$

De tels calculs peuvent évidemment être effectués très simplement avec des logiciels comme R par exemple (voir le livre compagnon correspondant).

E2. Un exemple bien connu est la convolution de deux gaussiennes (voir section Statistiques page 697) qui aboutissent également à une... gaussienne. Et évidemment, la version discrète de la convolution donne également une gaussienne comme illustré ci-dessous avec R (voir le livre compagnon correspondant pour plus de détails) :



où nous avons comme le lecteur l'a remarqué plus haut, la convolution suivante $\mathcal{N}(5,20)*\mathcal{N}(10,3)$ et nous voyons évidemment que le résultat donne une gaussienne de $\mathcal{N}(5+10=15,\sqrt{20^2+3^2}=15)$.

Démontrons maintenant que la convolution discrète est également associative pour la convolution discrète (comme promis plus tôt !) :

Démonstration 7.3.7.

$$\begin{aligned}((f*g)\star h)(n) &= \sum_{k=0}^{n}(f\star g)[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} f[l]g[k-l]h[n-k] \\ &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n} f[l]g[k-l]h[n-k] \\ &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l} f[l]g[k]h[n-k-l] \\ &= \sum_{l=0}^{n} f[l](g*h)[n-l] \\ &= (f*(g*h))(n)\end{aligned} \quad (7.1.475)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Cependant, en traitement d'images, nous considérons souvent la convolution dans le domaine spatial où la causalité (ie temporelle) ne s'applique pas.

Si $h[m]=h[-m]$ est symétrique (presque toujours vrai en traitement d'image), alors en remplaçant m par $-m$, nous obtenons :

$$y[n]=\sum_{m=-k}^{k} x[n+m]\,h[-m]=\sum_{m=-k}^{k} x[n+m]\,h[m] \quad (7.1.476)$$

Nous voyons alors maintenant que la convolution est similaire à la *corrélation* de deux fonctions !

Si l'entrée $x[m]$ est finie (toujours vraie en réalité), c'est à dire :

$$x[m]=\begin{cases} x[m] & 0\leq m<N \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \quad (7.1.477)$$

son indice $n+m$ dans la convolution doit satisfaire ce qui suit pour que x soit dans la plage non nulle valide :

$$0\leq n+m\leq N-1 \quad (7.1.478)$$

ou en conséquence, l'index n de la sortie $y[n]$ doit satisfaire :

$$-m\leq n\leq N-m-1 \quad (7.1.479)$$

Lorsque l'indice variable m dans la convolution est égal à k, l'indice de sortie $y[n]$ atteint sa borne inférieure $n=-k$; lorsque $m=-k$, l'indice de $y[n]$ atteint sa borne supérieure $n=N+k-1$. En d'autres termes, il y a $N+2k$ éléments valides (non nuls) dans la sortie :

$$y[n], \quad (-k \leq n \leq N+k-1) \tag{7.1.480}$$

Supposons que la taille du signal d'entrée $x[n]$ est N ($n=0,\cdots,n=N-1$) et que la taille de h est $M=2k+1$ (généralement un nombre impair), alors la taille de la convolution résultante $y=x*h$ est $N+M-1=N+2k$. Cependant, comme il est généralement souhaitable que la sortie y ait la même taille que l'entrée x, nous pouvons supprimer les composants k à chaque extrémité de y. Lorsque la taille de h est paire, nous pouvons supprimer les composants k à une extrémité et $k-1$ de l'autre de y.

7.1.4.2 Convolution Matricielle

En traitement d'image, toutes les discussions ci-dessus sur la convolution unidimensionnelle sont généralisées en deux dimensions !

Définition (#7.1.280) : La "convolution matricielle" est le traitement d'une matrice par une autre qui est nommée "noyau". La plupart du temps, le filtre matriciel de convolution utilise une première matrice qui est l'image à traiter. L'image est une collection bidimensionnelle de pixels en coordonnées rectangulaires. Le noyau utilisé h de dimensions toujours $k\times k$ impaire dépend de l'effet souhaité.

Par construction, nous avons alors :

$$C[m,n]=\text{Image}*\text{Noyau}=f*h[m,n]=\sum_{i=-\frac{k-1}{2}}^{+\frac{k-1}{2}}\sum_{j=-\frac{k-1}{2}}^{+\frac{k-1}{2}} h\left(i+\frac{k+1}{2},j+\frac{k+1}{2}\right)f(m+i,n+j) \tag{7.1.481}$$

Par exemple, si nous avons les matrices suivantes :

$$f=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0\\0&1&2&2&1&1&0\\0&1&2&2&2&1&0\\0&0&1&2&2&1&0\\0&0&1&1&1&1&0\\0&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix} \qquad h=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{bmatrix} \tag{7.1.482}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ensuite (n'oubliez pas que les colonnes et les lignes de la matrice du noyau sont inversées !) :

$$C[2,2]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0\\0&1&2&2&1&1&0\\0&1&2&2&2&1&0\\0&0&1&2&2&1&0\\0&0&1&1&1&1&0\\0&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}*h[2,2]=\sum_{i=-1}^{+1}\sum_{j=-1}^{+1}h(i+2,j+2)f(2+i,2+j) \tag{7.1.483}$$

$$\begin{aligned}&=f(1,1)h(1,1)+f(1,2)h(1,2)+f(1,3)h(1,3)+f(2,1)h(2,1)+f(2,2)h(2,2)\\&+f(2,3)h(2,3)+f(1,3)h(1,3)+f(2,3)h(2,3)+f(3,3)h(3,3)\\&=0\cdot 4+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot(-4)=-8\end{aligned}$$

Cela peut être illustré comme suit (h a déjà été doublement-retourné dans la figure ci-dessous) :

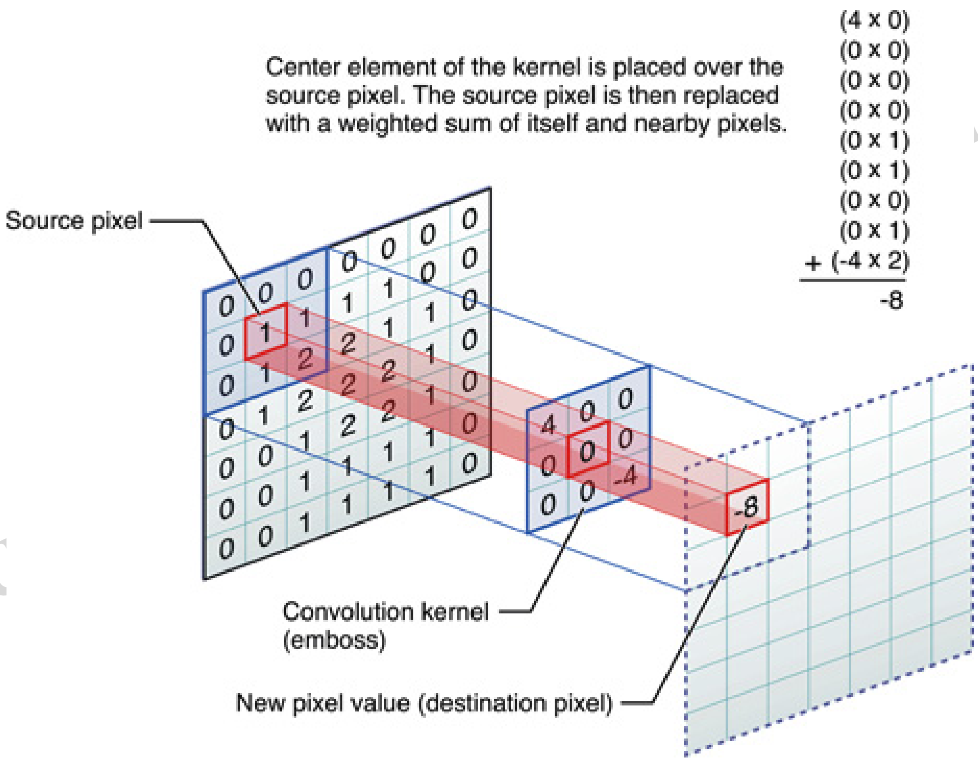
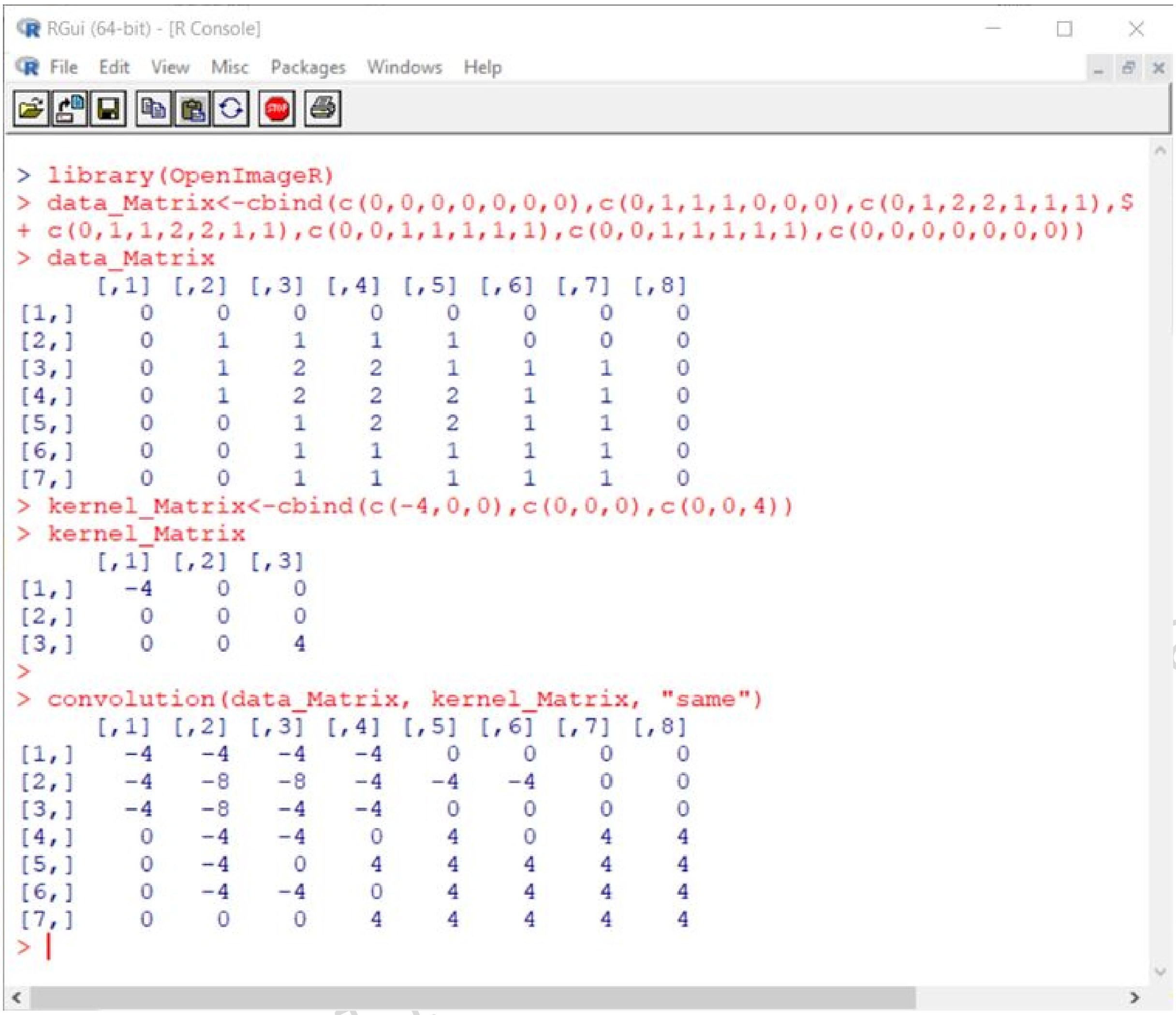


FIG. 7.65 – **Convolution de Matrice**

L'exemple complet peut être exécuté et reproduit avec un logiciel gratuit comme `R` :



Ou pour les personnes qui préfèrent une implémentation lente en C++ :

Listing 7.1 – C++ pour convolution matricielle

```
// trouver la position centrale du noyau (moitie de la taille du noyau)
kCenterX = kCols / 2;
kCenterY = kRows / 2;

for(i=0; i < rows; ++i)              // lignes
{
    for(j=0; j < cols; ++j)          // colonnes
    {
        for(m=0; m < kRows; ++m)     // lignes du noyau
        {
            mm = kRows - 1 - m;      // index de ligne du noyau retourne

            for(n=0; n < kCols; ++n) // colonnes du noyau
            {
                nn = kCols - 1 - n;  // index de colonne du noyau retourne
```

```
                // index du signal d'entree, utilise pour verifier
                   les limites
                ii = i + (kCenterY - mm);
                jj = j + (kCenterX - nn);

                // ignorer les echantillons d'entree qui sont hors
                   limites
                if( ii >= 0 && ii < rows && jj >= 0 && jj < cols )
                    out[i][j] += in[ii][jj] * kernel[mm][nn];
            }
        }
    }
}
```

En cours de traduction de l' anglais

7.1.5 Opérateur Intégral (transformation intégrale)

Un "opérateur intégral" est un opérateur qui mappe des fonctions d'un espace à un autre. Formellement :

$$\mathcal{T}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \tag{7.1.484}$$

En d'autres termes, c'est un opérateur linéaire défini à l'aide d'une intégrale paramétrique sur certains espaces fonctionnels. L'image d'une fonction par un tel opérateur est donc une autre fonction, dont le domaine peut être très différent.

De tels opérateurs constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer une équation pour obtenir une version a priori plus facile à résoudre (typiquement pour les équations différentielles) dans l'espace des images. Les premiers exemples sont la convolution et les transformées de Fourier ou de Laplace, d'où le nom aussi rencontré de "transformée intégrale".

Cependant, même s'il est amusant de travailler dans l'espace image, il faut être capable d'interpréter les résultats dans l'espace d'origine. Pour ce faire, il faut étudier l'opérateur K. Habituellement, on connaît a priori la nature de la fonction f par la nature du problème que l'on traite. L'étude des transformations intégrales est donc l'étude de l'opérateur $\mathcal{T}$. Deux propriétés viennent très facilement :

$$\mathcal{T}(f+g) = \mathcal{T}(f) + \mathcal{T}(g) \tag{7.1.485}$$
$$\mathcal{T}(cf) = c\mathcal{T}(f) \tag{7.1.486}$$

Pour garantir l'inversibilité, il faut montrer que l'espace noyau ne contient que la fonction nulle.

Les transformées de Fourier et de Laplace sont par exemple des transformées continues (intégrales) de fonctions continues (même s'il existe une version discrète de la transformée de Fourier !).

La transformée de Laplace mappe une fonction $f(t)$ à une fonction $\mathcal{F}(s)$ de la variable complexe s, où :

$$s = \sigma + \mathrm{i}\omega \tag{7.1.487}$$

Étant donné que la dérivée :

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.1.488}$$

mappe sur $s\mathcal{F}(s)$, la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ d'une équation différentielle devient alors un simple équation algébrique. Ainsi, la transformée de Laplace est utile, entre autres, pour résoudre des équations différentielles linéaires.

Si nous mettons la partie réelle de la variable complexe s à zéro, ie $\sigma = 0$, le résultat est la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\mathrm{i}\omega)$ qui est essentiellement la représentation dans le domaine fréquentiel de $f(t)$ (notez que cela n'est vrai que si pour cette valeur de σ la formule pour obtenir la transformée de Laplace de $f(t)$ existe, c'est-à-dire qu'elle ne tend pas vers l'infini).

En cours de traduction de l'anglais

La transformation en $\mathcal{Z}$ est essentiellement une version discrète de la transformée de Laplace et, par conséquent, peut être utile pour résoudre des équations aux différences, la version discrète des équations différentielles ! La transformation en $\mathcal{Z}$ mappe une séquence $f[n]$ à une fonction continue $F(z)$ de la variable complexe $z=re^{\mathrm{i}\Omega}$.

Si nous fixons la magnitude de z à l'unité, ie $r=1$, le résultat est la transformée de Fourier en temps discret (DTFT) $\mathcal{F}(\mathrm{i}\Omega)$ qui est essentiellement la représentation en domaine fréquentiel de $f[n]$.

Transformée de Laplace

$$X(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t$$

pour systèmes causaux

sans décroissance ($\sigma=0$)

Transformée de Laplace Unilatérale

$$X(s)=U\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Tranformée de Fourier

$$X(\mathrm{i}\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega nt}\mathrm{d}t$$

pour signaux discrets

pour les systèmes causaux la transforée de Hilbert lie ensemble $\Im(\mathcal{F}\{f(n)\})$ et $\Re(\mathcal{F}\{f(n)\})$

Transformée de Fourier Discrète (DTFT)

$$X(\mathrm{i}\omega)=\mathcal{F}\{f[n]\}=\sum_{-\infty}^{+\infty} f[n]e^{-\mathrm{i}\omega nt}$$

Transformée de Hilbert

$$X(t)=\mathcal{H}\{f(\tau)\}=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}t$$

évaluée le long du cercle unitaire
à l'origine du plan complexe

Transformée en $\mathcal{Z}$

$$X(z)=\mathcal{Z}[f[n]]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]r^{-n}e^{-\mathrm{i}\omega n}$$

pour système causaux

Transformée en $\mathcal{Z}$ Unilatérale

$$X(z)=U\mathcal{Z}[f[n]]=\sum_{n=0}^{+\infty} f[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty} f[n]r^{-n}e^{-\mathrm{i}\omega n}$$

FIG. 7.66 – **Types les plus courants de transformations intégrales**

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Les trois transformations intégrales mentionnées ci-dessus (Fourier, Laplace, $\mathcal{Z}$) ne sont qu'un échantillon de ce qui existe en pratique. Citons également la transformée

de Hartley, la transformée de Mellin, la transformée de Weierstrass, la transformée de Hankel (Fourier-Bessel), la transformée d'Abel, la transformée de Hilbert, la transformée de Gauss-Weierstrass, etc.

R2. Pour information nous calculerons des cas et prouverons les propriétés des transformées de Fourier, Laplace, $\mathcal{Z}$ et Hilbert utilisées uniquement dans des applications concrètes dans l'industrie et principalement utiles dans d'autres chapitres de ce livre ! En effet une présentation assez générale nécessiterait quelques centaines de pages et ce n'est pas l'objectif de cet ouvrage, comme vous le savez déjà, de prouver des propriétés mathématiques non associées à des cas concrets !

7.1.5.1 Transformée de Fourier

Nous avons donc déjà introduit les transformées de Fourier dans la section Suites et Séries (page 1738), nous reviendrons ici plus en détail sur ce sujet de manière (nous souhaitons) plus structurée...

En cours de traduction de l'anglais

7.1.5.1.1 Transformée de Fourier Temporelle Continue

Le coefficient de série Fourier $X[k]$ d'un signal périodique continu $x_T(t)=x_T(t+T)$ est :

$$X[k]=\frac{1}{T}\int_T x_T(t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \tag{7.1.489}$$

et le développement de Fourier du signal est alors :

$$x_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]e^{\mathrm{i}k\omega_0 t} \tag{7.1.490}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$x_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(TX[k])e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}=\frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(k\omega_0)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t} \quad (a) \tag{7.1.491}$$

où $X(k\omega_0)$ est défini comme :

$$X(k\omega_0)\triangleq T\,X[k]=\int_T x_T(t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad (b) \tag{7.1.492}$$

Lorsque la période de $x_T(t)$ s'approche de l'infini $T\rightarrow +\infty$, le signal périodique $x_T(t)$ devient un signal non périodique $x(t)$ et il en résultera ce qui suit :

- L'intervalle entre deux composantes de fréquence voisines devient nul :

$$T\rightarrow +\infty \Longrightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T}\rightarrow 0 \tag{7.1.493}$$

- La fréquence discrète devient une fréquence continue :

$$k\omega_0|_{\omega_0\rightarrow 0} \Longrightarrow \omega \tag{7.1.494}$$

- La sommation du développement de Fourier devient une intégrale :

$$x(t) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{T\rightarrow+\infty} x_T(t) = \lim_{\omega_0\rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.1.495}$$

le deuxième signe égal est dû au fait général :

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{7.1.496}$$

- L'intégrale temporelle sur T le devient sur tout l'axe du temps :

$$X(\omega) \stackrel{\triangle}{=} \lim_{T\rightarrow+\infty} X(k\omega_0) = \lim_{T\rightarrow+\infty} \int_T x_T(t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{7.1.497}$$

En résumé, lorsque le signal est non périodique $x(t) = \lim_{T\rightarrow+\infty} x_T(t)$, le développement de Fourier devient la transformée de Fourier. La transformation directe (analyse) est :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \quad \text{or} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}t \tag{7.1.498}$$

et la transformée inverse (synthèse) est :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}f \tag{7.1.499}$$

Comparons les coefficients de Fourier d'un signal périodique $x_T(t)$ avec le spectre de Fourier d'un signal non périodique $x(t)$:

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_T x_T(t)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t, \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{7.1.500}$$

Le spectre d'un signal temporel peut être noté $X(\omega)$ ou $X(f)$ pour souligner le fait que le spectre représente la façon dont l'énergie contenue dans le signal est distribuée en fonction de la fréquence ω ou f. De plus, si $X(f)$ est utilisé, le facteur $1/2\pi$ devant la transformation inverse est supprimé afin que la paire de transformations prenne une forme plus symétrique. D'autre part, comme la transformée de Fourier peut être considérée comme un cas particulier de transformée de Laplace lorsque la partie réelle σ de l'argument complexe $s = \sigma + \mathrm{i}\omega = \mathrm{i}\omega$ est nul :

$$X(s)|_{s=\mathrm{i}\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t|_{s=\mathrm{i}\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = X(\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.501}$$

En cours de traduction de l'anglais

il est également naturel de désigner le spectre de $x(t)$ par $X(\mathrm{i}\omega)$.

Ok, ceci étant fait, voyons maintenant quelques exemples importants pour la physique (en particulier la physique quantique) et le traitement du signal !

✍**Exemples :**

E1. Considérons la fonction d'impulsion unitaire (fonction Dirac) :

$$x(t-a)=\delta(t-a) \tag{7.1.502}$$

Dès lors :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=e^{-\mathrm{i}\omega a} \tag{7.1.503}$$

et si $a=0$ nous avons alors :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=1 \tag{7.1.504}$$

E2. Si le spectre d'un signal $x(t)$ est une fonction delta dans le domaine fréquentiel $X(\mathrm{i}\omega)=2\pi\,\delta(\omega)$, le signal peut être trouvé comme étant :

$$x(t)=\mathcal{F}^{-1}(X(\mathrm{i}\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\,\delta(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=e^{0}=1 \tag{7.1.505}$$

i.e. :

$$\mathcal{F}(x(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\,\delta(\omega) \tag{7.1.506}$$

E3. Nous considérons :

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<a\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{7.1.507}$$

Le spectre est alors donné par :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\int_{-a}^{a}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{-\mathrm{i}\omega}e^{-\mathrm{i}\omega t}|_{-a}^{a}=\frac{2}{\omega}\sin(a\omega) \tag{7.1.508}$$

C'est la fonction sinc avec un paramètre a.

Notez que la hauteur du pic principal est de $2a$ et qu'il devient de plus en plus haut et étroit à mesure que a grandit.

Le lecteur notera aussi que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)\mathrm{d}\omega = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega}\mathrm{d}\omega = 2\pi \tag{7.1.509}$$

Lorsque a tend vers l'infini, $x(t) = 1$ pour tout t, et le spectre devient :

$$X(\mathrm{i}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{2}{\omega}\sin(a\omega)\right] = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f) \tag{7.1.510}$$

Rappelons que le coefficient de Fourier de $x(t) = 1$ est :

$$X[k] = \delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.1.511}$$

qui représente l'énergie contenue dans le signal à $k = 0$ (composante continue à fréquence nulle), et le spectre $X(\mathrm{i}\omega) = X[k]/\omega$ est la densité d'énergie ou distribution qui est infinie à fréquence nulle.

L'intégrale dans la transformation ci-dessus est une formule importante qui sera fréquemment utilisée plus tard :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) \quad \text{or} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}t = \delta(f) \tag{7.1.512}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(\omega t) + \mathrm{i}\,\sin(-\mathrm{i}\omega t)]\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{d}t = \delta(f) \tag{7.1.513}$$

En commutant t et f dans l'équation ci-dessus, nous avons également :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}2\pi f t}\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f t)\mathrm{d}f = \delta(t) \tag{7.1.514}$$

représentant une superposition d'un nombre infini de fonctions cosinus de toutes les fréquences, qui s'annulent n'importe où le long de l'axe du temps sauf à $t = 0$ où elles s'additionnent jusqu'à l'infini, une impulsion !

E3. Considérons maintenant :

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}[e^{\mathrm{i}\omega_0 t} + e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}] \tag{7.1.515}$$

Le spectre de la fonction cosinus est :

$$\begin{aligned} X(\mathrm{i}\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\mathrm{i}\omega_0 t} + e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}]e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] \end{aligned} \tag{7.1.516}$$

En

Le spectre de la fonction sinus :

$$x(t)=\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2\mathrm{i}}[e^{\mathrm{i}\omega_0 t}-e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}] \tag{7.1.517}$$

peut être obtenu de la même manière comme étant :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\frac{\pi}{\mathrm{i}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]=-\mathrm{i}\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)] \tag{7.1.518}$$

Encore une fois, ces spectres représentent la distribution de densité d'énergie des sinusoïdes, tandis que les coefficients de Fourier correspondants :

$$X[k]=\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t))=\frac{1}{2}[\delta[k-1]+\delta[k+1]] \tag{7.1.519}$$

et :

$$X[k]=\mathcal{F}(\sin(\omega_0 t))=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\delta[k-1]-\delta[k+1]] \tag{7.1.520}$$

représentent l'énergie contenue à la fréquence $\omega=\omega_0$.

7.1.5.1.1.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Les propriétés de la transformée de Fourier sont résumées ci-dessous. Pour certains d'entre eux déjà démontrées dans la section Suites et Séries nous n'en donnerons pas la démonstration. Mais pour d'autres nous recommencerons !

Dans ce qui suit, nous supposerons $\mathcal{F}(x(t))=X(\mathrm{i}\omega)$ et $\mathcal{F}(y(t))=Y(\mathrm{i}\omega)$.

P1. Linéarité :

$$\mathcal{F}(ax(t)+by(t))=a\mathcal{F}(x(t))+b\mathcal{F}(y(t)) \tag{7.1.521}$$

P2. Décalage temporel :

$$\mathcal{F}(x(t\pm t_0))=X(\mathrm{i}\omega)e^{\pm\mathrm{i}\omega t_0} \tag{7.1.522}$$

Démonstration 7.3.8. Soit $t'=t\pm t_0$, i.e., $t=t'\mp t_0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(t\pm t_0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t\pm t_0)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-\mathrm{i}\omega(t'\mp t_0)}\mathrm{d}t' \\ &= e^{\pm\mathrm{i}\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'=X(\mathrm{i}\omega)e^{\pm\mathrm{i}\omega t_0}\end{aligned}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

P3. Décalage fréquentiel :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(X(\mathrm{i}\omega \pm \omega_0)\right) = x(t)e^{\mp \mathrm{i}\omega_0 t} \tag{7.1.523}$$

Démonstration 7.3.9. Soit $\omega' = \omega \pm \omega_0$, i.e., $\omega = \omega' \mp \omega_0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[X(\mathrm{i}(\omega \pm \omega_0))] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}(\omega \pm \omega_0))e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega')e^{\mathrm{i}\omega(\omega' \mp \omega_0)}\mathrm{d}\omega' \\ &= e^{\mp \mathrm{i}\omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega')e^{\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{d}\omega' = x(t)e^{\mp \mathrm{i}\omega_0 t}\end{aligned} \tag{7.1.524}$$

■ Q.E.D.

P4. Inversion temporelle :

$$\mathcal{F}(x(-t)) = X(-\omega) \tag{7.1.525}$$

Démonstration 7.3.10.

$$\mathcal{F}(x(-t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{7.1.526}$$

En remplaçant t par $-t'$, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(x(-t)) = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(t')e^{\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t' = X(-\omega) \tag{7.1.527}$$

■ Q.E.D.

P5. Signaux pairs et impairs :

Si le signal $x(t)$ est une fonction paire (ou impaire) du temps, son spectre $X(\mathrm{i}\omega)$ est une fonction paire (ou impaire) de la fréquence :

$$\text{si } x(t) = x(-t) \text{ alors } X(\mathrm{i}\omega) = X(-\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.528}$$

et :

$$\text{si } x(t) = -x(-t) \text{ alors } X(\mathrm{i}\omega) = -X(-\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.529}$$

Démonstration 7.3.11. Si $x(t) = x(-t)$ est pair, alors d'après la propriété d'inversion du temps, nous avons :

$$X(\mathrm{i}\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}(x(-t)) = X(-\omega) \tag{7.1.530}$$

i.e., le spectre $X(\mathrm{i}\omega) = X(-\omega)$ est alors pair. De même, si $x(t) = -x(-t)$ est impair, nous avons :

$$X(\mathrm{i}\omega) = \mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}(-x(-t)) = -X(-\omega) \tag{7.1.531}$$

i.e., le spectre $X(\mathrm{i}\omega) = -X(-\omega)$ est aussi impair.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

P6. Mise à l'échelle du temps et de la fréquence :

$$\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{or} \quad \mathcal{F}(ax(at)) = X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{7.1.532}$$

Démonstration 7.3.12. Soit $u = at$, i.e., $t = u/a$, où $a > 0$ est une facteur d'échelle, nous avons :

$$\mathcal{F}(x(at)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-\mathrm{i}\omega u/a}\mathrm{d}(u/a) = \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{7.1.533}$$

Notez que lorsque $a < 1$, la fonction temporelle $x(at)$ est étirée et $X(\mathrm{i}\omega/a)$ est compressée ; lorsque $a > 1$, $x(at)$ est compressé et $X(\mathrm{i}\omega/a)$ est étirée. Il s'agit d'une caractéristique générale de la transformée de Fourier, c'est-à-dire que la compression de l'un des $x(t)$ et $X(\mathrm{i}\omega)$ étirera l'autre et vice versa. En particulier, lorsque $a \to 0$, $x(at)$ est étiré pour se rapprocher d'une constante, et $X(\mathrm{i}\omega/a)/a$ est compressé avec sa valeur augmentée pour se rapprocher d'une impulsion ; d'autre part, lorsque $a \to +\infty$, $ax(at)$ est compressé avec sa valeur augmentée pour se rapprocher d'une impulsion et $X(\mathrm{i}\omega/a)$ est étirée pour s'approcher une constante.

■ Q.E.D.

P7. Conjugaison Complexe :

$$\text{si } \mathcal{F}(x(t)) = X(\mathrm{i}\omega), \quad \text{alors } \mathcal{F}(x^*(t)) = X^*(-\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.534}$$

Démonstration 7.3.13. En prenant le conjugué complexe de la transformée de Fourier inverse, nous obtenons :

$$x^*(t) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\mathrm{i}\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{7.1.535}$$

En remplaçant ω par $-\omega'$ nous obtenons le résultat souhaité :

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-\omega')e^{\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{d}\omega' = \mathcal{F}^{-1}\left(X^*(-\omega)\right) \tag{7.1.536}$$

■ Q.E.D.

Nous considérons ensuite deux cas particuliers :

- Si $x(t) = x^*(t)$ est réel, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(t)) &= X(\mathrm{i}\omega) = X_r(\mathrm{i}\omega) + \mathrm{i}X_i(\mathrm{i}\omega)\\ &= \mathcal{F}(x^*(t)) = X^*(-\omega) = X_r(-\omega) - \mathrm{i}X_i(-\omega)\end{aligned} \tag{7.1.537}$$

  c'est-à-dire que la partie réelle du spectre est paire (par rapport à la fréquence ω), et la partie imaginaire est impaire :

$$\begin{cases} X_r(\mathrm{i}\omega) = X_r(-\mathrm{i}\omega) \\ X_i(\mathrm{i}\omega) = -X_i(-\mathrm{i}\omega)\end{cases} \tag{7.1.538}$$

En cours de traduction de l'anglais

– Si $x(t) = -x^*(t)$ est imaginaire, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(t)) &= X(\mathrm{i}\omega) = X_r(\mathrm{i}\omega) + \mathrm{i}X_i(\mathrm{i}\omega)\\ &= \mathcal{F}(-x^*(t)) = -X^*(-\mathrm{i}\omega) = -X_r(-\mathrm{i}\omega) + \mathrm{i}X_i(-\mathrm{i}\omega)\end{aligned} \tag{7.1.539}$$

c'est-à-dire que la partie réelle du spectre est impaire et la partie imaginaire est paire :

$$\begin{cases} X_r(\mathrm{i}\omega) = -X_r(-\mathrm{i}\omega) \\ X_i(\mathrm{i}\omega) = X_i(-\mathrm{i}\omega) \end{cases} \tag{7.1.540}$$

Si le signal temporel $x(t)$ est l'une des quatre combinaisons indiquées dans le tableau ci-dessous (pair réel, impair réel, pair imaginaire et impair imaginaire), alors son spectre $X(\mathrm{i}\omega)$ est donné dans l'entrée de tableau correspondante :

	si $x(t)$ est réel X_r pair, X_i impair	si $x(t)$ est imaginaire X_r impair, X_i pair
si $x(t)$ est pair X_r et X_i pairs	$X_i = 0$, $X = X_r$ pairs	$X_r = 0$, $X = X_i$ impairs
si $x(t)$ est impair X_r et X_i impairs	$X_r = 0$, $X = X_i$ impairs	$X_i = 0$, $X = X_r$ impairs

En cours de traduction de l'anglais

Notez que si une partie réelle ou imaginaire du tableau est recquise d'être en même temps paire et impaire, elle doit être nulle.

Ces propriétés sont résumées ci-dessous :

	$x(t) = x_r(t) + \mathrm{i}x_i(t)$	$X(\mathrm{i}\omega) = X_r(\mathrm{i}\omega) + \mathrm{i}X_i(\mathrm{i}\omega)$
1	réel $x(t) = x_r(t)$	pair $X_r(\mathrm{i}\omega)$, impair $X_i(\mathrm{i}\omega)$
2	réel et pair $x(-t) = x_r(t)$	réel et impair $X_r(\mathrm{i}\omega)$
3	réel et impair $x(-t) = -x_r(t)$	imaginaire et impair $X_i(\mathrm{i}\omega)$
4	imaginaire $x(t) = x_i(t)$	impair $X_r(\mathrm{i}\omega)$, pair $X_i(\mathrm{i}\omega)$
5	imaginaire et pair $x(-t) = x_i(t)$	imaginaire et impair $X_i(\mathrm{i}\omega)$
6	imaginaire et impair $x(-t) = -x_i(t)$	réel et impair $X_r(\mathrm{i}\omega)$

Comme tout signal peut être exprimé comme la somme de ses composantes paires et impaires, les trois premiers éléments ci-dessus indiquent que le spectre de la partie paire d'un signal réel est réel et pair, et que le spectre de la partie impaire du signal est imaginaire et impair.

P8. Symétrie (ou Dualité) :

$$\text{si } \mathcal{F}(x(t)) = X(\mathrm{i}\omega), \text{ alors } \mathcal{F}(X(t)) = 2\pi\, x(-\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.541}$$

Ou sous une forme plus symétrique :

$$\text{si } \mathcal{F}(x(t)) = X(f), \text{ alors } \mathcal{F}(X(t)) = x(-f) \tag{7.1.542}$$

Démonstration 7.3.14. Comme $\mathcal{F}(x(t)) = X(\mathrm{i}\omega)$, nous avons :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(\mathrm{i}\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (7.1.543)$$

En posant $t' = -t$, nous obtenons :

$$x(-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}\omega \qquad (7.1.544)$$

En interchangeant t' et ω, nous obtenons :

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t')e^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t' = \mathcal{F}(X(t)) \qquad (7.1.545)$$

ou :

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t')e^{-\mathrm{i}2\pi f t'}\mathrm{d}t' = \mathcal{F}(X(t)) \qquad (7.1.546)$$

En particulier, si le signal est pair :

$$x(t) = x(-t) \qquad (7.1.547)$$

nous avons alors :

$$\text{si } \mathcal{F}(x(t)) = X(f) \text{ alors } \mathcal{F}(X(t)) = x(f) \qquad (7.1.548)$$

■ Q.E.D.

Par exemple, le spectre d'une onde carrée paire est une fonction sinc, et le spectre d'une fonction sinc est une onde carrée paire.

P9. Théorème de multiplication :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)Y^*(\mathrm{i}\omega)\mathrm{d}\omega \qquad (7.1.549)$$

Démonstration 7.3.15.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(\mathrm{i}\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(\mathrm{i}\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)Y^*(\mathrm{i}\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \qquad (7.1.550)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

P10. Équation de Parseval pour la transformée de Fourier (pour plus de détails voir page 1737) :

Dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$, ce qui précède devient l'équation de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\mathrm{i}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\mathrm{i}\omega) \mathrm{d}\omega = \text{Total energy in } x(t) \qquad (7.1.551)$$

où :

$$S_X(\mathrm{i}\omega) \triangleq |X(\mathrm{i}\omega)|^2 \qquad (7.1.552)$$

est la fonction de densité d'énergie, communément appelée "spectre de puissance", représentant la façon dont l'énergie du signal est distribuée le long des axes de fréquence. L'énergie totale contenue dans le signal est obtenue en intégrant $S(\mathrm{i}\omega)$ sur l'ensemble de l'axe des fréquences.

L'équation de Parseval indique également que l'énergie ou les informations contenues dans le signal sont réservées, c'est-à-dire que le signal est représenté de manière équivalente dans le domaine temporel ou fréquentiel, sans gain ni perte d'énergie !

Cette dernière relation s'écrit plus communément :

$$\boxed{P_f = |\mathcal{F}(x(t))(\omega)|^2} \qquad (7.1.553)$$

ou plus simplement :

$$P_f = |\mathcal{F}(x(t))|^2 \qquad (7.1.554)$$

✍ **Exemple :**

Nous avons déjà démontré dans la section Suites et Séries que la transformée de Fourier de l'impulsion carrée était donnée par (voir page 1743) :

$$\mathcal{F}(\mathrm{rect}(t)) = A\Delta t \mathrm{sinc}(\pi f \Delta t) \qquad (7.1.555)$$

Dès lors :

$$P_f = (A\Delta t \mathrm{sinc}(\pi f \Delta t))^2 \qquad (7.1.556)$$

Le spectre énergétique de l'impulsion que nous venons de calculer montre une grande similitude avec le diagramme de diffraction de Fraunhofer en raison d'une fente étroite (voir section Optique Ondulatoire page ??). En réalité, c'est plus qu'une similitude car il est possible de prouver en physique que tout diagramme de diffraction est la transformée de Fourier de l'objet qui en est la cause !

P11. Corrélation :

La "corrélation-croisée" de deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ est définie comme (notez qu'elle est strictement équivalente à la définition de la convolution continue vue juste plus haut à la page 2268) :

$$R_{xy}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(\tau - t) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau) y(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad (7.1.557)$$

En co
ction de l' anglais

Spécifiquement, lorsque $x(t) = y(t)$, ce qui précède devient "l'auto-corrélation" du signal $x(t)$:

$$R_x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(\tau - t)\mathrm{d}\tau \qquad (7.1.558)$$

En assumant $\mathcal{F}(x(t)) = X(\mathrm{i}\omega)$, nous avons $\mathcal{F}(x(t-\tau)) = X(\mathrm{i}\omega)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}$ et en accord avec le théorème de multiplication, $R_x(\tau)$ peut être écrit :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)X^*(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\mathrm{i}\omega)|^2 e^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega = \mathcal{F}^{-1}\left(S_X(\mathrm{i}\omega)\right) \end{aligned} \qquad (7.1.559)$$

i.e. :

$$\mathcal{F}(R_x(t)) = S_X(\mathrm{i}\omega) \qquad (7.1.560)$$

c'est-à-dire que l'autocorrélation et la fonction de densité d'énergie d'un signal $x(t)$ sont une paire de transformées de Fourier.

P12. Théorème de convolution :

Le "théorème de convolution" affirme que la convolution dans le domaine temporel correspond à la multiplication dans le domaine fréquentiel et vice versa :

$$\mathcal{F}(x(t) * y(t)) = X(\mathrm{i}\omega)\,Y(\mathrm{i}\omega) \quad (a) \qquad (7.1.561)$$

$$\mathcal{F}(x(t)\,y(t)) = X(\mathrm{i}\omega) * Y(\mathrm{i}\omega) \quad (b) \qquad (7.1.562)$$

Commençons par la démonstration de (a) !

Démonstration 7.3.16.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t) * y(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-\mathrm{i}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\ &= X(\mathrm{i}\omega)\,Y(\mathrm{i}\omega) \end{aligned} \qquad (7.1.563)$$

■ Q.E.D.

Et maintenant, continuons avec la démonstration de(b) !

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 7.3.17.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x(t)\,y(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega')e^{\mathrm{i}\omega' t}\mathrm{d}\omega'\right] y(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega')\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{\mathrm{i}\omega' t}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega'\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega')\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega'\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega')Y(\mathrm{i}(\omega-\omega'))\mathrm{d}\omega' = X(\mathrm{i}\omega) * Y(\mathrm{i}\omega)\end{aligned} \tag{7.1.564}$$

■ Q.E.D.

P13. Dérivée temporelle :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right) = \mathrm{i}\omega\, X(\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.565}$$

Démonstration 7.3.18. En différenciant la transformée de Fourier inverse $X(\mathrm{i}\omega)$ par rapport à t, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{i}\omega X(\mathrm{i}\omega)]e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{i}\omega X(\mathrm{i}\omega)\right)\end{aligned} \tag{7.1.566}$$

En répétant ce processus, nous avons :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t)\right) = (\mathrm{i}\omega)^n X(\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.567}$$

■ Q.E.D.

P14. Intégration temporelle :

Considérons d'abord la transformée de Fourier des deux signaux suivants :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}, \qquad \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1/2 & t<0 \\ +1/2 & t>0 \end{cases} = u(t) - \frac{1}{2} \tag{7.1.568}$$

En cours de traduction de l'anglais

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{sgn}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u(t)-\frac{1}{2}\right]=\delta(t) \tag{7.1.569}$$

D'après la propriété de dérivée temporelle ci-dessus :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\mathcal{F}(x(t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right) \tag{7.1.570}$$

nous obtenons :

$$\mathcal{F}(u(t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}(\delta(t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega} \tag{7.1.571}$$

et :

$$\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{sgn}(t)\right)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}(\delta(t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega} \tag{7.1.572}$$

Pourquoi les deux différentes fonctions ont-elles la même transformée ?

En général, deux fonctions $f(t)$ et $g(t)=f(t)+c^{te}$ avec une différence constante c^{te} ont la même dérivée $\mathrm{d}\,f(t)/\mathrm{d}t$, et donc ils ont la même transformation selon la méthode ci-dessus. Ce problème est évidemment dû au fait que la différence constante c^{te} est perdue dans l'opération de dérivée.

Pour récupérer cette différence constante dans le domaine temporel, une fonction delta doit être ajoutée dans le domaine fréquentiel. Plus précisément, comme la fonction $\mathrm{sgn}(t)$ n'a pas de composant condontinue, sa transformation ne contient pas de delta :

$$\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega} \tag{7.1.573}$$

Pour trouver la transformée de $u(t)$, considérons :

$$u(t)=\mathrm{sgn}(t)+\frac{1}{2} \tag{7.1.574}$$

et :

$$\mathcal{F}(u(t))=\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t))+\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega) \tag{7.1.575}$$

Le terme d'impulsion ajouté $\pi\delta(\omega)$ reflète directement la constante $c=1/2$ dans le domaine temporel.

Nous montrons maintenant que la transformée de Fourier d'une intégration temporelle est :

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}X(\mathrm{i}\omega)+\pi X(0)\delta(\omega) \tag{7.1.576}$$

Démonstration 7.3.19. Considérons d'abord la convolution de $x(t)$ et $u(t)$:

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7.1.577}$$

Grâce au théorème de convolution, nous avons :

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=\mathcal{F}(x(t)*u(t))=X(\mathrm{i}\omega)\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}X(\mathrm{i}\omega)+\pi X(0)\delta(\omega) \tag{7.1.578}$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

P15. Dérivée fréquentielle :

$$\mathcal{F}(tx(t)) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.579}$$

Démonstration 7.3.20. Nous différencions la transformée de Fourier de $x(t)$ par rapport à ω pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\mathrm{i}\omega) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-\mathrm{i}t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{7.1.580}$$

i.e. :

$$\mathcal{F}(-\mathrm{i}tx(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.581}$$

En multipliant les deux côtés par i, nous obtenons :

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\mathrm{i}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \mathcal{F}(tx(t)) \tag{7.1.582}$$

En répétant ce processus, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(t^n x(t)) = \mathrm{i}^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}X(\mathrm{i}\omega) \tag{7.1.583}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

Nom de la propriété	Function $f(t)$	Transformée de Fourier $F(\omega)$
Linéarité	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$
Mise à l'échelle temporelle	$f(at)$	$\dfrac{1}{\mid a\mid}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
Décalage temporel	$f(t-t_0)$	$e^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega)$
Décalage fréquentiel	$e^{\mathrm{i}\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega-\omega_0)$
Inversion temporelle	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Time Multiplication	$t^n f(t)$	$\mathrm{i}^n\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega^n}X(\omega)$
Différentiation	$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{i}\omega F(\omega)$
$n^{\text{ème}}$ Dérivée	$\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{i}\omega)^n F(\omega)$
Intégration	$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t$	$\dfrac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
Multiplication	$f_1(t)f_2(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega)\star F_2(\omega)$
Convolution	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

TAB. 7.7 – **Résumé des propriétés les plus connues des transformées de Fourier**

En cours de traduction de l' anglais

7.1.5.1.1.2 Transformée de Fourier usuelles

Il existe en mathématiques et en physique de nombreuses transformées de Fourier de signaux que nous voyons assez fréquemment (mais pas exclusivement). De plus, toutes les transformées de Fourier démontrées ci-dessous seront utilisées dans les différents chapitres sur la physique, l'ingénierie, l'atomique, les mathématiques sociales, etc. de ce livre. Alors, comme dans tout livret de formules, nous vous proposons les transformées de Fourier les plus connues mais avec... les démonstrations !

1. Impulsion :

   Comme déjà démontré plus haut :

   $$\mathcal{F}(\delta(t-a))=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=e^{\mathrm{i}\omega a} \tag{7.1.584}$$

   ou :

   $$\mathcal{F}(\delta(t))=1 \tag{7.1.585}$$

   Il est donc immédiat que la transformée de Fourier inverse de l'exponentielle complexe soit le delta de Dirac :

   $$\mathcal{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}\omega a})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}\omega a}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\delta(t-a) \tag{7.1.586}$$

2. Échelon unité :

   Comme déjà démontré plus haut :

   $$\mathcal{F}(u(t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega) \tag{7.1.587}$$

3. Constante :

   Comme déjà démontré plus haut :

   $$\mathcal{F}(x(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\,\delta(\omega) \tag{7.1.588}$$

   C'est une formule utile.

4. Exponentielle complexe :

   Le spectre d'une exponentielle complexe peut être trouvé à partir de ce qui précède en raison de la propriété de décalage de fréquence :

   $$\mathcal{F}(e^{\mathrm{i}\omega_0 t})=2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \tag{7.1.589}$$

En cours de traduction de l' anglais

Écrivons ceci plus explicitement :

$$\mathcal{F}(e^{\mathrm{i}\omega_0 t})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega_0 t}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t=\left.\frac{e^{\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t}}{\mathrm{i}(\omega_0-\omega)}\right|_{-\infty}^{+\infty}=\text{hummm....} \quad (7.1.590)$$

Essayons maintenant de résoudre cela à la manière des physiciens... En utilisant ce que nous venons de voir précédemment (la transformée de Fourier inverse de l'impulsion de Dirac), nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega a}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\delta(t-a) \quad (7.1.591)$$

Il vient évidemment après réarrangement (en multipliant les deux côtés par 2π) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\omega a}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(t-a) \quad (7.1.592)$$

5. Sinusoïdes :

$$x(t)=\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\omega_0 t}+e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) \quad (7.1.593)$$

Dès lors :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t))=\frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(e^{\mathrm{i}\omega_0 t})+\mathcal{F}(e^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\right)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] \quad (7.1.594)$$

De même, nous avons :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\mathcal{F}(\sin(\omega_0 t))=\frac{\pi}{\mathrm{i}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)] \quad (7.1.595)$$

6. Décroissance exponentielle (côté droit) :

$$x(t)=e^{-at}u(t) \quad (a>0) \quad (7.1.596)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-at}u(t))&=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{-1}{a+\mathrm{i}\omega}e^{-(a+\mathrm{i}\omega)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}\end{aligned} \quad (7.1.597)$$

7. Décroissance exponentielle (côté gauche) :

En raison de la propriété d'inversion du temps, nous avons également (pour $a>0$) :

$$\mathcal{F}(e^{at}u(-t))=\frac{1}{a-\mathrm{i}\omega} \quad (7.1.598)$$

ou :

$$\mathcal{F}(-e^{at}u(-t))=\frac{1}{\mathrm{i}\omega-a} \quad (7.1.599)$$

En cours de traduction de l' anglais

8. Décroissance exponentielle (bilatérale) :

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad (a > 0) \tag{7.1.600}$$

Comme la décroissance exponentielle bilatérale est la somme des décroissances exponentielles droite et gauche, son spectre de $x(t)$ est la somme de leurs spectres dus à la linéarité :

$$\mathcal{F}(e^{-a|t|}) = \frac{1}{a + \mathrm{i}\omega} + \frac{1}{a - \mathrm{i}\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \tag{7.1.601}$$

9. Peigne de Dirac (ou "distribution cha") :

La fonction peigne est définie comme :

$$\text{comb}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \tag{7.1.602}$$

Son coefficient de série de Fourier est :

$$\text{COMB}[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{comb}(t) e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \tag{7.1.603}$$

et son spectre est :

$$\text{COMB}(\mathrm{i}\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \tag{7.1.604}$$

Nous voyons que le spectre d'un train d'impulsions d'intervalle de temps T est aussi un train d'impulsions d'intervalle de fréquence $\omega_0 = 2\pi/T$. Aussi, d'après la définition de la transformée de Fourier, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{COMB}(\mathrm{i}\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{comb}(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right] e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega nT} \end{aligned} \tag{7.1.605}$$

Nous avons donc cette équation :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega nT} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \tag{7.1.606}$$

qui peut être comparée à l'équation en cas continu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f) \tag{7.1.607}$$

En cours de traduction de l'anglais

10. Pulsation carrée (pour une autre démonstration détaillée, voir page 1743) :

Une onde carrée ou une fonction rectangulaire de largeur a peut être considérée comme la différence entre deux fonctions de pas unitaires :

$$\text{rect}_a(t) = u(t+a) - u(t-a) = \begin{cases} 1 & -a \leq t < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.1.608}$$

et du fait de la linéarité, son spectre de Fourier est la différence entre les deux spectres correspondants :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\text{rect}_a(t)) &= \mathcal{F}(u(t+a)) - \mathcal{F}(u(t-a)) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}e^{\mathrm{i}a\omega} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega}e^{-\mathrm{i}a\omega} \\ &= \frac{2}{\omega}\frac{e^{\mathrm{i}a\omega} - e^{-\mathrm{i}a\omega}}{2\mathrm{i}} = \frac{2}{\omega}\sin(a\omega) = \frac{2a}{\omega}\text{sinc}(a\omega) \end{aligned} \tag{7.1.609}$$

11. Fonction sinc (sinus cardinal) :

Le spectre d'un filtre passe-bas idéal est :

$$X(\mathrm{i}\omega) = \begin{cases} 1 & -a \leq \omega < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.1.610}$$

et sa réponse impulsionnelle peut être trouvée par transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}t}(e^{\mathrm{i}at} - e^{-\mathrm{i}at}) = \frac{\sin(at)}{\pi t} \tag{7.1.611}$$

12. Fonction triangulaire :

$$x(t) = \text{triangle}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases} \tag{7.1.612}$$

Comme $x(t)$ est une fonction paire, sa transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1-t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\int_0^1 \cos(\omega t)\mathrm{d}t - \int_0^1 t\,\cos(\omega t)\mathrm{d}t\right] = \frac{2}{\omega}\left[\sin(\omega) - \int_0^1 t\mathrm{d}\sin(\omega t)\right] \\ &= \frac{2}{\omega}\left[\sin(\omega) - (t\,\sin(\omega t)|_0^1 - \int_0^1 \sin(\omega t)\mathrm{d}t)\right] = \frac{2}{\omega^2}\cos(\omega t)|_1^0 \\ &= \frac{2}{\omega^2}(1-\cos(\omega)) = \left(\frac{2}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2} = \text{sinc}^2(\omega) \end{aligned} \tag{7.1.613}$$

Alternativement, comme la fonction triangulaire est la convolution de deux fonctions carrées ($a = 1/2$), sa transformée de Fourier peut être plus facilement obtenue selon le théorème de convolution comme :

$$\mathcal{F}(\text{triangle}(t)) = \mathcal{F}(\text{rect}(t) * \text{rect}(t)) = \text{sinc}(\omega)\,\text{sinc}(\omega) = \left(\frac{2}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{7.1.614}$$

En cours de traduction de l'anglais

13. Fonction gaussienne :

La transformée de Fourier d'une fonction gaussienne ou en cloche $x(t)=e^{-\pi t^2}$ est :

$$\begin{aligned}X(\mathrm{i}\omega)=\mathcal{F}(x(t))&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[e^{-\pi t^2}]e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(t^2+\mathrm{i}2ft)}\mathrm{d}t=e^{\pi(\mathrm{i}f)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi[t^2+\mathrm{i}2ft+(\mathrm{i}f)^2]}\mathrm{d}t\\&=e^{-\pi f^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(t+\mathrm{i}f)^2}\mathrm{d}(t+\mathrm{i}f)=e^{-\pi f^2}\end{aligned}\tag{7.1.615}$$

Ici, nous avons utilisé l'identité :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x=1\tag{7.1.616}$$

Nous voyons que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est aussi une fonction en gaussienne :

$$\mathcal{F}(e^{-\pi t^2})=e^{-\pi f^2}\tag{7.1.617}$$

Notez que la zone située sous $x(t)$ ou $X(\mathrm{i}\omega)$ est uitaire. De plus, grâce à la propriété d'échelle de temps et de fréquence, nous avons :

$$\mathcal{F}(a\,e^{-\pi(at)^2})=e^{-\pi(f/a)^2}\tag{7.1.618}$$

Notez que si $a=1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$, alors $a\,x(at)$ ci-dessus est une distribution Normale avec une variance σ^2 et une moyenne $\mu=0$. Si nous laissons $a\rightarrow\infty$, $x(t)$ devient de plus en plus étroit et plus grand et se rapproche de $\delta(t)$, et son spectre $e^{-\pi(f/a)^2}$ devient plus large et se rapproche de la constante 1. En revanche, si nous réécrivons ce qui précède comme suit :

$$\mathcal{F}(e^{-\pi(at)^2})=\frac{1}{a}e^{-\pi(f/a)^2}\tag{7.1.619}$$

et laissons $a\rightarrow 0$, $x(t)$ s'approche de 1 et $X(\mathrm{i}\omega)$ s'approche de $\delta(\omega)$.

Pour résumer, voici un tableau avec les transformées de Fourier les plus importantes :

En cours de traduction de l'anglais

Fonction $f(t)$	**Transformée de Fourier** $\mathcal{F}(f(t))$
$f(t-t_0)$	$\mathcal{F}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t_0}$
$f(t)e^{\mathrm{i}\omega_0 t}$	$\mathcal{F}(\omega-\omega_0)$
$f(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\lvert\alpha\rvert}\mathcal{F}\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$
$\mathcal{F}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{i}\omega)^n\mathcal{F}(\omega)$
$(-\mathrm{i}t)^n f(t)$	$\dfrac{\mathrm{d}^n\mathcal{F}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\dfrac{\mathcal{F}(\omega)}{\mathrm{i}\omega}+\pi\mathcal{F}(0)\delta(\omega)$
$h\cdot\text{rect}\left(\dfrac{t}{a}\right)$	$h\cdot a\cdot\text{sinc}\left(\dfrac{\omega a}{2}\right)$
$\text{rect}(t)$	$\frac{2a}{\omega}\text{sinc}(a\omega)$
e^{-at^2}	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\delta(t-a)$	1
c^{te}	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\mathrm{i}\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a+\mathrm{i}\omega}$
$e^{at}u(t)$	$\dfrac{1}{a-\mathrm{i}\omega}$
$-e^{at}u(-t)$	$\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega-a}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\text{comb}(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega nT}$
$\text{triangle}(t)$	$\text{sinc}^2(\omega)$

TAB. 7.8 – **Transformées de Fourier les plus courantes**

Maintenant que nous avons vu un certain nombre de propriétés et les transformée de Fourier les plus usuelles, revenons à notre équation de chaleur déterminée dans la section de Thermodynamique (voir page **??**) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{7.1.620}$$

Et intéressons-nous également au cas où :

$$\begin{gathered}u(x,0)=f(x)\\ f(\pm\infty)\to 0\end{gathered} \tag{7.1.621}$$

Pour simplifier l'écriture, nous noterons l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$\partial_t u=D\partial_x^2 u \tag{7.1.622}$$

En cours de traduction de l'anglais

Prenons la transformée de Fourier par rapport à x de cette égalité. Rappelons que pour cela nous avons prouvé dans la section Suites et Séries et juste plus tôt à la page 2291 que (propriété de dérivée temporelle) :

$$\mathcal{F}(\partial_x^2 u(x)) = (\mathrm{i}\omega)^2 \mathcal{F}(u(x)) = -\omega^2 \mathcal{F}(u(x)) \quad (7.1.623)$$

Posons pour simplifier les notations :

$$\mathcal{F}(u(x)) = \hat{u} \quad (7.1.624)$$

En prenant la transformée de Fourier par rapport à x, nous pouvons retirer la dérivée partielle de l'intégrale de la transformée de Fourier telle que :

$$\mathcal{F}(\partial_t u(x)) = \partial_t \mathcal{F}(u(x)) = \partial_t \hat{u} \quad (7.1.625)$$

Notre équation différentielle se réduit alors à :

$$\partial_t \hat{u} = -\omega^2 D \hat{u} \quad (7.1.626)$$

Ainsi explicitement :

$$\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x \right) = -\omega^2 D \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x \right) \quad (7.1.627)$$

Nous voyons alors immédiatement avec la version simplifiée qu'une solution particulière est :

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega) e^{-\omega^2 D t} \quad (7.1.628)$$

La constante doit être déterminée par la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(x) \quad (7.1.629)$$

Donc :

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega) e^{-\omega^2 D t} = \hat{u}(\omega, 0) e^{-\omega^2 D t} = \hat{f}(x) e^{-\omega^2 D t} \quad (7.1.630)$$

Ensuite il vient en faisant la transformée de Fourier inverse en x :

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\omega, t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-\omega^2 D t} e^{\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{-\omega^2 D t + \mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}\omega \quad (7.1.631)$$

Faisons maintenant un petit changement de notation en posant :

$$\omega = \lambda \qquad \hat{f}(x) = F(\omega) = F(\lambda) \quad (7.1.632)$$

Nous avons alors :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-\lambda^2 D t + \mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\omega \quad (7.1.633)$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous tombons alors beaucoup plus vite sur la même intégrale que nous avons obtenue dans la section de Thermodynamique dans notre étude de l'équation de la chaleur, le travail de finition étant le même, le lecteur peut s'y référer !

Nous avions également prouvé dans la section Thermodynamique que nous obtenions :

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v-x)^2}{4Dt}}\mathrm{d}v \tag{7.1.634}$$

Nous remarquons alors que la transformée de Fourier n'est pas seulement un outil pour analyser un signal dans le domaine fréquentiel mais aussi pour résoudre plus rapidement certaines équations différentielles !

Mais comme souvent en mathématiques, il faut être prudent en utilisant un tel outil. Il peut y avoir des pièges et subtilités. Voyons sur un exemple célèbre !

Nous savons que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y'=0 \tag{7.1.635}$$

où y est une fonction continue de $\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$, est constitué de l'ensemble des fonctions constantes !

Essayons de résoudre cette équation en utilisant la transformée de Fourier. En prenant la transformée de Fourier à gauche et à droite nous obtenons :

$$\omega\mathcal{F}(y)=0 \tag{7.1.636}$$

Une erreur serait de croire que nous pouvons diviser à gauche et à droite par ω et obtenir ainsi :

$$\mathcal{F}(y)=0 \tag{7.1.637}$$

Dans ce cas, en prenant la transformation inverse nous obtiendrions $y=0$ comme seule solution à l'équation et nous perdrions alors toutes les autres solutions.

En fait, ce qu'il faut retenir c'est que la transformée de Fourier est définie sur l'espace des « distributions tempérées » et que donc, tant que nous décidons d'utiliser cette transformée intégrale pour résoudre l'équation différentielle ci-dessus, nous décidons aussi, implicitement, de chercher des solutions dans cet espace. Or dans l'espace des distributions tempérées, l'équation $\omega\mathcal{F}(y)=0$ possède une infinité de solutions qui sont données par (sans démonstration) $c\cdot\delta$ où c est un nombre complexe et δ est la distribution de Dirac. Par conséquent :

$$\hat{y}=c\cdot\delta \tag{7.1.638}$$

et en prenant la transformée inverse, nous obtenons effectivement :

$$y=c^{te} \tag{7.1.639}$$

Nous concluons donc que lorsque nous résolvons des équations différentielles avec la transformée de Fourier, il faut garder à l'esprit que dans l'espace des distributions tempérées, les règles de calcul algébriques habituelles doivent être manipulées avec précaution. Cette remarque n'est évidemment valable que pour les personnes connaissant la transformée de Fourier mais n'ayant qu'une vague idée de ce qu'est une distribution tempérée (ce qui est normalement le cas des ingénieurs....

En cours de traduction de l'anglais

7.1.5.1.2 Transformée de Fourier discrète temporelle

Un signal à temps discret peut être considéré comme un signal continu $x(t)$ échantillonné à un taux $F=1/t_0$ ou $\Omega=2\pi/t_0$, où t_0 est la période d'échantillonnage (intervalle de temps entre deux échantillons consécutifs). La fonction d'échantillonnage correspondante (fonction peigne) est :

$$\text{comb}(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mt_0) \quad (7.1.640)$$

Le processus d'échantillonnage peut être représenté par :

$$x_s(t)=x(t)\,\text{comb}(t)=x(t)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mt_0)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\delta(t-mt_0) \quad (7.1.641)$$

où $x[m]=x(mt_0)$ est la valeur de $x(t)$ à $t=mt_0$. La transformée de Fourier de ce signal discret (traité comme un cas particulier de signal continu) est :

$$\begin{aligned}X(\mathrm{i}\omega)&=\int_{\infty}^{+\infty}x_s(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{\infty}^{+\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\delta(t-mt_0)\right]e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\int_{\infty}^{+\infty}\delta(t-mt_0)\,e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\,e^{-\mathrm{i}\omega mt_0}\end{aligned} \quad (7.1.642)$$

Il s'agit de la transformée de Fourier (analyse) directe d'un signal discret $x_s(t)$. Le spectre $X(\mathrm{i}\omega)$ est périodique de période $\Omega=2\pi F=2\pi/t_0$:

$$X(\mathrm{i}(\omega+\Omega))=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]e^{-\mathrm{i}(\omega+\Omega))mt_0}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]e^{-\mathrm{i}\omega mt_0}e^{-\mathrm{i}\Omega mt_0}=X(\mathrm{i}\omega) \quad (7.1.643)$$

et comme :

$$e^{-\mathrm{i}\Omega mt_0}=e^{-\mathrm{i}2m\pi}=1 \quad (7.1.644)$$

Pour récupérer le signal temporel $x[m]$ de son spectre :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\,e^{-\mathrm{i}\omega mt_0} \quad (7.1.645)$$

nous multiplions l'équation par $e^{\mathrm{i}\omega nt_0}/\Omega$ et intégrons les deux côtés par rapport à ω sur la période $\Omega=2\pi F=2\pi/t_0$ pour obtenir la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega nt_0}\mathrm{d}\omega&=\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]e^{-\mathrm{i}\omega mt_0}]e^{\mathrm{i}\omega nt_0}\mathrm{d}\omega\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}e^{-\mathrm{i}\omega(m-n)t_0}\mathrm{d}\omega=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\delta[m-n]=x[n]\end{aligned} \quad (7.1.646)$$

En cours de traduction de l'anglais

Notez qu'ici nous avons utilisé :

$$\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} e^{-\mathrm{i}\omega(m-n)t_0}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} e^{-\mathrm{i}(m-n)2\pi\omega/\Omega}\mathrm{d}\omega=\delta[m-n]=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases} \tag{7.1.647}$$

qui peut être comparé à :

$$\frac{1}{T}\int\limits_{T} e^{\mathrm{i}(m-n)\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int\limits_{T} e^{\mathrm{i}(m-n)2\pi t/T}\mathrm{d}t=\delta[m-n]=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases} \tag{7.1.648}$$

Pour résumer, le spectre d'un signal discret donné :

$$\boxed{x_s(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta(t-mt_0)} \tag{7.1.649}$$

peut être trouvé par la "transformée de Fourier discrète avant" comme étant :

$$\boxed{X_\Omega(\mathrm{i}\omega)=\mathcal{F}[x[m]]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-\mathrm{i}\omega m t_0}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-\mathrm{i}2\pi m t_0}} \tag{7.1.650}$$

et le signal peut être exprimé par transformée de Fourier inverse :

$$\boxed{x[m]=\mathcal{F}^{-1}[X_\Omega(\mathrm{i}\omega)]=\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} X_\Omega(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega m t_0}\mathrm{d}\omega=\int\limits_{F} X_F(f)e^{\mathrm{i}2\pi m t_0}\mathrm{d}f} \tag{7.1.651}$$

Il est intéressant de comparer cette paire de transformées de Fourier en temps discret avec le développement en série de Fourier (la transformée de Fourier d'un signal périodique) :

$$x_T(t)=\mathcal{F}^{-1}[X[n]]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n]e^{\mathrm{i}n\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n]e^{\mathrm{i}2\pi n f_0 t} \tag{7.1.652}$$

$$X[n]=\mathcal{F}[x_T(t)]=\frac{1}{T}\int\limits_{T} x_T(t)e^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int\limits_{T} x_T(t)e^{-\mathrm{i}2\pi n f_0 t}\mathrm{d}t \tag{7.1.653}$$

avec spectre discret :

$$X(\mathrm{i}\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n]\delta(\omega-n\omega_0)\quad\text{or}\quad X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n]\delta(f-nf_0) \tag{7.1.654}$$

Nous voyons une symétrie entre ces deux formes différentes de transformée de Fourier. Si le signal $x(t)=x(t+T)$ est périodique, son spectre $X(\mathrm{i}\omega)$ est discret, les coefficients de la série de Fourier avec des intervalles $\omega_0=2\ pi/T$. En revanche, si $x(t)$ est discret d'intervalles $t_0=2\pi/\Omega$, son spectre $X(\mathrm{i}\omega)=X(\mathrm{i}\omega+\Omega)$ est périodique.

En particulier, si l'unité de temps est choisie de telle sorte que la période d'échantillonnage soit $t_0=1$, alors $\Omega=2\pi/t_0=2\pi$, et la transformée de Fourier directe d'un signal discret devient :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-\mathrm{i}m\omega}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-\mathrm{i}m2\pi f} \tag{7.1.655}$$

En cours de traduction de l'anglais

La transformée inverse devient :

$$x_s[m] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega = \int_0^1 X(\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}m2\pi f}\mathrm{d}f \tag{7.1.656}$$

Le spectre $X(\mathrm{i}\omega) = X(\mathrm{i}\omega + 2\pi)$ est périodique.

Remarque

Le spectre d'un signal temporel (continu ou discret) peut être noté $X(\mathrm{i}\omega)$ ou $X(f)$ pour souligner le fait que le spectre représente la façon dont l'énergie contenue dans le signal est distribuée en fonction de la fréquence ω ou f. De plus, si $X(f)$ est utilisé, le facteur $1/2\pi$ devant la transformation inverse est supprimé afin que la paire de transformations prenne une forme plus symétrique. D'un autre côté, la transformée de Fourier d'un signal discret peut être considérée comme un cas particulier de transformée en $\mathcal{Z}$ lorsque la partie réelle de $s = \sigma + \mathrm{i}\omega$ est nulle, c'est-à-dire $z = e^s = e^{\mathrm{i}\omega}$:

$$X(z)|_{z=e^{\mathrm{i}\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}|_{z=e^{\mathrm{i}\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\mathrm{i}\omega n} = X(e^{\mathrm{i}\omega}) \tag{7.1.657}$$

il est également naturel de désigner le spectre de $x[n]$ par $X(e^{\mathrm{i}\omega})$.

7.1.5.1.3 Propriétés de la transformée de Fourier discrète

En cours de traduction Opera Magistris

En tant que cas particulier de transformée de Fourier générale, la transformée en temps discret partage toutes les propriétés (et leurs preuves) de la transformée de Fourier évoquée ci-dessus, sauf que certaines de ces propriétés peuvent prendre des formes différentes. Dans ce qui suit, nous supposons toujours $\mathcal{F}[x[m]] = X(e^{\mathrm{i}\omega})$ et $\mathcal{F}[y[m]] = Y(e^{\mathrm{i}\omega})$.

P1. Linéarité :

$$\mathcal{F}[ax[m] + by[m]] = aX(e^{\mathrm{i}\omega}) + bY(e^{\mathrm{i}\omega}) \tag{7.1.658}$$

P2. Décalage temporel :

$$\mathcal{F}[x[m-m_0]] = e^{-\mathrm{i}m_0\omega}X(e^{\mathrm{i}\omega}) \tag{7.1.659}$$

Démonstration 7.3.21.

$$\mathcal{F}[x[m-m_0]] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m-m_0]e^{-\mathrm{i}\omega m} \tag{7.1.660}$$

Si nous posons $m' = m - m_0$, la relation ci-dessus devient :

$$\mathcal{F}[x[m-m_0]] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m']e^{-\mathrm{i}\omega(m'+m_0)} = e^{-\mathrm{i}\omega m_0}X(e^{\mathrm{i}\omega}) \tag{7.1.661}$$

■ Q.E.D.

P3. Inversion Temporelle :

$$\mathcal{F}[x[-m]] = X(e^{-\mathrm{i}\omega}) \tag{7.1.662}$$

P4. Décalage fréquentiel :

$$\mathcal{F}[x[m]e^{\mathrm{i}\omega_0 m}] = X(e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)}) \tag{7.1.663}$$

P5. Différenciation :

La différenciation est la contrepartie en temps discret de la différenciation.

$$\mathcal{F}[x[m] - x[m-1]] = (1 - e^{-\mathrm{i}\omega})X(e^{\mathrm{i}\omega}) \tag{7.1.664}$$

Démonstration 7.3.22.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x[m] - x[m-1]] &= \mathcal{F}[x[m]] - \mathcal{F}[x[m-1]] \\ &= X(e^{\mathrm{i}\omega}) - X(e^{\mathrm{i}\omega})e^{-\mathrm{i}\omega} = (1 - e^{-\mathrm{i}\omega})X(e^{\mathrm{i}\omega})\end{aligned} \tag{7.1.665}$$

■ Q.E.D.

P6. Dérivée fréquentielle :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(e^{\mathrm{i}\omega})\right] = m\,x[m] \tag{7.1.666}$$

Démonstration 7.3.23. En dérivant la définition de la transformée de Fourier discrète par rapport à ω, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(e^{\mathrm{i}\omega}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-\mathrm{i}\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}e^{-\mathrm{i}\omega m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}mx[m]e^{-\mathrm{i}\omega m}\end{aligned} \tag{7.1.667}$$

■ Q.E.D.

P7. Théorème de convolution :

Le théorème de convolution stipule que la convolution dans le domaine temporel correspond à la multiplication dans le domaine fréquentiel et vice versa :

$$\mathcal{F}[x[n] * y[n]] = X(e^{\mathrm{i}\omega})\,Y(e^{\mathrm{i}\omega}) \quad (a) \tag{7.1.668}$$

$$\mathcal{F}[x[n]\,y[n]] = X(e^{\mathrm{i}\omega}) * Y(e^{\mathrm{i}\omega}) \quad (b) \tag{7.1.669}$$

Rappelons que la convolution de signaux périodiques $x_T(t)$ et $y_T(t)$ est :

$$x_T(t) * y_T(t) \triangleq \frac{1}{T}\int_T x_T(\tau)y_T(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7.1.670}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ici, la convolution des spectres périodiques $X(f)$ et $Y(f)$ est définie de la même manière comme :

$$X(e^{\mathrm{i}\omega})*Y(e^{\mathrm{i}\omega})=\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}X(e^{\mathrm{i}\omega'})Y(e^{\mathrm{i}(\omega-\omega')})\mathrm{d}\omega'=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(e^{\mathrm{i}\omega'})Y(e^{\mathrm{i}(\omega-\omega')})\mathrm{d}\omega' \quad (7.1.671)$$

Démonstration de (a) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x[n]*y[n]]&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]y[n-m]\right]e^{-\mathrm{i}n\omega}\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y[n-m]e^{-\mathrm{i}(n-m)\omega}\right]e^{-\mathrm{i}m\omega}\\&=X(\mathrm{i}\omega)\,Y(\mathrm{i}\omega)\end{aligned} \quad (7.1.672)$$

Démonstration de (b) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x[n]y[n]]&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]y[n]e^{-\mathrm{i}n\omega}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\mathrm{i}\omega')e^{\mathrm{i}n\omega'}\mathrm{d}\omega'\right]y[n]e^{-\mathrm{i}n\omega}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\mathrm{i}\omega')\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}n\omega'}y[n]e^{-\mathrm{i}n\omega}\right]\mathrm{d}\omega'\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\mathrm{i}\omega')\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y[n]e^{-\mathrm{i}n(\omega-\omega')}\mathrm{d}\omega'\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\mathrm{i}\omega')Y(\mathrm{i}(\omega-\omega'))\mathrm{d}\omega'=X(\mathrm{i}\omega)*Y(\mathrm{i}\omega)\end{aligned} \quad (7.1.673)$$

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

P8. Relation de Parseval pour la transformée de Fourier discrète :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|X(e^{\mathrm{i}\omega})|^2\mathrm{d}\omega \quad (7.1.674)$$

✍**Exemples :**

E1. La transformée de Fourier discrète du delta de Dirac :

$$\mathcal{F}[\delta[n]]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]e^{-\mathrm{i}\omega n}=1 \quad (7.1.675)$$

E2. Le spectre de :

$$x[n]=a^n u[n]\quad(|a|<1) \quad (7.1.676)$$

est :

$$X(e^{i\omega}) = \mathcal{F}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-in\omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-i\omega}} \quad (7.1.677)$$

Si le signal est bilatéral :

$$x[n] = a^{|n|} = a^n u[n] + a^{-n} u[-n] - \delta[n], \quad (|a| < 1) \quad (7.1.678)$$

En raison de la propriété d'inversion du temps, son spectre est :

$$X(e^{i\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-i\omega}} + \frac{1}{1-ae^{i\omega}} - 1 = \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \quad (7.1.679)$$

E3. Considérons un système LTI (Linear Time-Invariant) avec réponse impulsionnelle :

$$h[n] = a^n u[n], \quad (|a| < 1) \quad (7.1.680)$$

et entrée :

$$x[n] = b^n u[n], \quad (|b| < 1) \quad (7.1.681)$$

La sortie $y[n]$ peut être trouvée soit dans le domaine temporel par convolution, soit dans le domaine fréquentiel par multiplication. Dans le domaine temporel, nous avons :

$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{n-m} u[n-m] b^m u[m] = a^n \sum_{m=0}^{n} a^{-m} b^m \\ &= a^n \frac{1-(b/a)^{n+1}}{1-(b/a)} u[n] = \frac{1}{a-b}(a^{n+1} - b^{n+1}) u[n] \end{aligned} \quad (7.1.682)$$

Quand $a = b$, nous avons :

$$y[n] = a^n \sum_{m=0}^{n} a^{-m} b^m = (n+1) a^n u[n] \quad (7.1.683)$$

Dans le domaine fréquentiel, nous trouvons d'abord que les spectres de $x[n]$ et $h[n]$ sont :

$$X(e^{i\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-i\omega}}; \quad H(e^{i\omega}) = \frac{1}{1-be^{-i\omega}} \quad (7.1.684)$$

et le spectre de la sortie est :

$$Y(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})\, X(e^{i\omega}) = \frac{1}{(1-be^{-i\omega})(1-ae^{-i\omega})} \quad (7.1.685)$$

Pour trouver $y(n)$ dans le domaine temporel par transformation inverse de $Y(e^{i\omega})$, nous utilisons le développement en fraction partielle pour réécrire ce qui précède comme :

$$Y(e^{i\omega}) = \frac{A}{1-ae^{-i\omega}} + \frac{B}{1-be^{-i\omega}} = \frac{A - Abe^{-i\omega} + B - aBe^{-i\omega}}{(1-be^{-i\omega})(1-ae^{-i\omega})} \quad (7.1.686)$$

En égalisant les coefficients de $e^{-\mathrm{i}\omega}$ et les constantes, nous obtenons :

$$A+B=1, \quad aB+bA=0 \tag{7.1.687}$$

que nous pouvons résoudre pour obtenir :

$$A=\frac{a}{a-b}, \qquad B=\frac{-b}{a-b} \tag{7.1.688}$$

Sous cette forme, $Y(\mathrm{i}\omega)$ peut être facilement transformé de manière inverse pour donner :

$$h[n]=\left[\frac{a}{a-b}a^n-\frac{b}{a-b}b^n\right]u[n]=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})u[n] \tag{7.1.689}$$

identique au résultat de la convolution. Encore une fois lorsque $a=b$, nous avons :

$$Y(e^{\mathrm{i}\omega})=\frac{1}{(1-ae^{-\mathrm{i}\omega})^2}=\frac{e^{\mathrm{i}\omega}}{a}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}}\right) \tag{7.1.690}$$

Mais comme :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}}\right]=a^n u[n] \tag{7.1.691}$$

par la propriété de dérivation fréquentielle, nous avons :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}}\right)\right]=na^n u[n] \tag{7.1.692}$$

et la sortie dans le domaine temporel est obtenue comme :

$$\begin{aligned}y[n]&=\mathcal{F}^{-1}[Y(e^{\mathrm{i}\omega})]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{\mathrm{i}\omega}}{a}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}}\right)\right]\\&=\frac{1}{a}(n+1)a^{n+1}u[n+1]=(n+1)a^n u[n+1]=(n+1)a^n u[n]\end{aligned} \tag{7.1.693}$$

Notez que la propriété de décalage temporel est utilisée en raison du facteur $e^{\mathrm{i}\omega}$. Notez également que $u[n+1]$ (commençant à $n=-1$) est remplacé par $u[n]$ (commençant à $n=0$) comme $n+1=0$ lorsque $n=-1$.

E4. La réponse impulsionnelle d'un système LTI discret est :

$$h[m]=a^m u[m] \tag{7.1.694}$$

où $|a|<1$ pour que le système soit stable. La sortie $y[m]$ du système avec une entrée :

$$x[m]=\cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right)=\frac{e^{\mathrm{i}2\pi m/N}+e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}}{2} \tag{7.1.695}$$

peut être trouvé de trois manières différentes :

- Convolution dans le domaine temporel :

 La sortie est la convolution de $x[m]$ et $h[m]$:

$$\begin{aligned} y[m]=h[m]*x[m]&=\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\frac{e^{\mathrm{i}2\pi(m-k)/N}+e^{-\mathrm{i}2\pi(m-k)/N}}{2}\\ &=\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}2\pi m/N}\sum_{k=0}^{+\infty}a^ke^{-\mathrm{i}2\pi k/N}+\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}\sum_{k=0}^{+\infty}a^ke^{\mathrm{i}2\pi k/N}\\ &=\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}2\pi m/N}\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}2\pi/N}}+\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}\frac{1}{1-ae^{\mathrm{i}2\pi/N}} \end{aligned} \tag{7.1.696}$$

- La méthode des équations-propres :

 Nous obtenons d'abord la fonction de réponse en fréquence de $h[m]$:

$$H(e^{\mathrm{i}\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]e^{-\mathrm{i}\omega k}=\sum_{k=0}^{+\infty}(ae^{-\mathrm{i}\omega})^k=\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}} \tag{7.1.697}$$

 qui est la valeur propre du système lorsque l'entrée est une exponentielle complexe $e^{in\omega}$. Maintenant, la réponse du système à :

$$x[m]=\cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right)=\frac{e^{\mathrm{i}2\pi m/N}+e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}}{2} \tag{7.1.698}$$

 peut être trouvée comme étant :

$$\begin{aligned} y[m]&=\frac{1}{2}\left[H(e^{\mathrm{i}2\pi/N})e^{\mathrm{i}2\pi m/N}+H(e^{-\mathrm{i}2\pi/N})e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}\right]\\ &=\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}2\pi m/N}\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}2\pi/N}}+\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}\frac{1}{1-ae^{\mathrm{i}2\pi/N}} \end{aligned} \tag{7.1.699}$$

- Multiplication dans le domaine fréquentiel :

 Si nous trouvons les spectres de $h[m]$ et de $x[m]$ dans le domaine fréquentiel, le spectre de $y[m]$ peut être trouvé par multiplication. Nous savons déjà :

$$H(e^{\mathrm{i}\omega})=\mathcal{F}[h[m]]=\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}} \tag{7.1.700}$$

 Nous retrouvons ensuite le spectre de $x[m]$:

$$\begin{aligned} X(e^{\mathrm{i}\omega})=\mathcal{F}[x[m]]&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}2\pi m/N}+e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}}{2}e^{-\mathrm{i}m\omega}\\ &=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(\omega-2k\pi-2\pi/N)+\delta(\omega-2k\pi-2\pi/N)] \end{aligned} \tag{7.1.701}$$

 Maintenant, le spectre de la sortie $y[m]$ peut être trouvé :

$$\begin{aligned} Y(e^{\mathrm{i}\omega})&=H(e^{\mathrm{i}\omega})X(e^{\mathrm{i}\omega})\\ &=\frac{\pi}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(\omega-2k\pi-2\pi/N)+\delta(\omega-2k\pi-2\pi/N)] \end{aligned} \tag{7.1.702}$$

et la sortie $y[m]$ est obtenue par transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} y[m] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\pi}{1-ae^{-\mathrm{i}\omega}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\omega-2k\pi-\frac{2\pi}{N}\right)+\delta\left(\omega-2k\pi-\frac{2\pi}{N}\right)\right]\right]e^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}2\pi m/N}\frac{1}{1-ae^{-\mathrm{i}2\pi/N}}+\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}2\pi m/N}\frac{1}{1-ae^{\mathrm{i}2\pi/N}} \end{aligned}$$

La signification physique de ce résultat sera claire si nous écrivons $H(2\pi/N)$ sous forme polaire :

$$H(e^{\mathrm{i}2\pi/N})=\frac{1}{1-ae^{\mathrm{i}2\pi/N}}=re^{\mathrm{i}\theta} \quad (7.1.703)$$

et le résultat devient :

$$y[m]=r\cos\left(\frac{2\pi}{N}m+\theta\right) \quad (7.1.704)$$

C'est-à-dire que la sortie du système est également un signal sinusoïdal de la même fréquence que l'entrée, mais avec une amplitude r et un angle de phase θ différents. Par exemple, si $N=4$, nous avons :

$$H(e^{\mathrm{i}\pi/2})=\frac{1}{1+\mathrm{i}a}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}e^{-\mathrm{i}\tan^{-1}(a)} \quad (7.1.705)$$

et la sortie est :

$$y[m]=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos\left(\frac{\pi m}{2}-\tan^{-1}(a)\right) \quad (7.1.706)$$

En cours

À finir en fonctions des dons

7.1.5.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace (LT), comme nous l'avons déjà mentionné, est une généralisation de la transformée de Fourier (TF), cependant, bien qu'elle soit ainsi appelée en son honneur parce qu'il l'a utilisée dans ses travaux sur la théorie des probabilités, elle semble avoir été découverts à l'origine par Leonhard Euler. La transformée de Laplace apparaît également dans toutes les branches de la physique mathématique (génie mécanique, électronique, finance quantitative, etc.) et est largement utilisée pour résoudre des équations différentielles qui surviennent dans de nombreuses situations de modélisation de la vie réelle.

Comme pour la transformée de Fourier, la transformee de Laplace permet de s'affranchir des dérivées. La transformation peut faire cela car elle a la merveilleuse propriété de convertir l'opération de dérivée en une opération beaucoup plus simple de multiplication. Autrement dit, elle transforme une équation différentielle en une équation algébrique. Ce processus est analogue à la façon dont les logarithmes transforment la multiplication en une opération plus simple d'addition ajout (car $\log(xy)=\log(x)+\log(y)$).

Une série en puissance sur une origine est toute série qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{7.1.707}$$

où les a_n sont des nombres et n est un entier non négatif. Nous pouvons penser à $a_n=a(n)$ comme une fonction de n pour chaque entier non négatif $n=0,1,2,\ldots$. Afin de donner naissance à la technique de la transformée de Laplace, nous faisons quelques associations. La variable discrète n est convertie en une variable réelle t. Le terme du coefficient a_n s'écrit $f(t)$. Le terme x^n peut de manière équivalente s'écrire $e^{(\ln(x^t))}$. Enfin, la notation sommative peut être remplacée par son analogue continu, c'est-à-dire l'intégration. Ce faisant, nous avons les éléments suivants :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \rightsquigarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{\ln(x^t)}\,\mathrm{d}t \tag{7.1.708}$$

Pour la convergence, il est évidemment important d'avoir la condition suivante pour l'intégrale ci-dessus (oui, pensez à la somme d'origine !) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \rightsquigarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{\ln(x^t)}\mathrm{d}t; \qquad 0<x<1 \tag{7.1.709}$$

Dès lors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \rightsquigarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{t\ln(x)}\mathrm{d}t \tag{7.1.710}$$

Puisque $0<x<1$ cela implique donc que :

$$\ln(0)<\ln(x)<\ln(1) \quad \text{or} \quad -\infty<\ln(x)<0 \tag{7.1.711}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi $\ln(x)$ doit être négatif pour que l'intégrale converge, à cet égard, nous supposons $\ln(x) = -s$ où $s > 0$. Ainsi, l'intégrale finale prend la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \rightsquigarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = F(s) \quad s > 0 \tag{7.1.712}$$

De cette façon, nous pouvons dire que la transformée de Laplace étend simplement une série infinie discrète en une analogique continue (intégration).

Rappelons que si $s = \mathrm{i}\omega$ (la partie réelle de s est purement imaginaire), la transformée de Laplace devient alors la transformée de Fourier ! En général, tout signal temporel continu $x(t)$ peut être transformé par Laplace pour obtenir :

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{7.1.713}$$

à condition que l'intégrale converge, c'est-à-dire que la fonction $X(s)$ existe. Cette forme générale de "transformation de Laplace bilatérale" est liée à la transformée de Fourier :

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] \tag{7.1.714}$$

c'est-à-dire que la transformée de Laplace d'une fonction générique est la transformée de Fourier de la même fonction multipliée par $e^{-\sigma t}$. Ce facteur exponentiel a pour effet de forcer les signaux à converger. C'est pourquoi la transformée de Laplace peut être appliquée à une classe de signaux plus large que la transformée de Fourier, y compris les signaux à croissance exponentielle illustrés dans les deux cas suivants :

En cours de traduction de l'anglais

- Côté droit :

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad (a > 0) \tag{7.1.715}$$

La transformée de Fourier n'existe pas car le signal croît de façon exponentielle lorsque $t \to +\infty$, c'est-à-dire que la transformation intégrale ne converge pas (non intégrable). Cependant, sa transformée de Laplace existe si $\Re[s] = \sigma > a$ (c'est-à-dire $\sigma - a > 0$), comme le signal modifié $x(t)e^{-\sigma t} = e^{-(\sigma-a)t}u(t)$ convergera.

- Côté gauche :

$$x(t) = e^{at}u(-t), \quad (a < 0) \tag{7.1.716}$$

Encore une fois, la transformée de Fourier n'existe pas car le signal croît de façon exponentielle lorsque $t \to -\infty$, c'est-à-dire que la transformée intégrale ne converge pas. Mais si $\Re[s] = \sigma < a$ (c'est-à-dire $\sigma - a < 0$), le signal modifié $x(t)e^{-\sigma t} = e^{-(\ sigma-a)t}u(-t)$ convergera et sa transformée de Laplace existe.

Dans la transformée de Fourier, le signal $x(t)$ dans le domaine temporel et son spectre $X(\mathrm{i}\omega)$ dans le domaine fréquentiel sont une fonction complexe unidimensionnelle (1D). Cependant, la transformée de Laplace $X(s)$ du signal 1D $x(t)$ est une fonction complexe définie sur un *plan complexe* bidimensionnel, appelé "plan s", engendré par les deux variables σ (pour l'axe réel horizontal) et ω (pour l'axe imaginaire vertical).

En particulier, si cette fonction 2D $X(s)=X(\sigma+\mathrm{i}\omega)$ est évaluée le long de l'axe imaginaire $\Re[s]=\sigma=0$, elle devient une fonction 1D $X(\mathrm{i}\omega)$, la transformée de Fourier de $x(t)$. Graphiquement, la transformée de Fourier, le spectre du signal, peut être trouvée comme la section efficace de la fonction 2D $X(s)=X(\sigma+\mathrm{i}\omega)$ le long de la ligne $\Re[s]=\sigma=0$.

Avant d'aller plus loin, une autre façon d'introduite la transformée de Laplace peut être utile et aider le lecteur. Mais si vous avez compris l'introduction ci-dessus, vous pouvez sauter cette présentation alternative.

La transformée de Fourier ne fonctionne assez bien que lorsque l'argument de l'intégrale ne diverge pas, où le noyau (la multiplication par $e^{-\mathrm{i}\omega t}$) est purement complexe, et son intégrale balaie l'ensemble de réels (infini bilatéral $]-\infty,+\infty[$).

Typiquement, les mathématiciens, qui aiment généraliser les choses..., ont généralisé la transformée de Fourier à des fonctions noyau qui ne sont pas purement imaginaires et dont l'intégrale pourrait être unilatérale $[0,+\infty[$. Ainsi, la transformée de Laplace converge pour un ensemble de fonctions plus large que la transformée de Fourier.

En effet, voyons un exemple simple avec une fonction divergente :

$$\mathcal{F}(e^t)(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^t e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(1-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=\left.\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right|_{-\infty}^{+\infty}=+\infty \qquad (7.1.717)$$

Cette dernière intégrale ne converge pas (du moins à ma connaissance...) quelle que soit la valeur de α différente de zéro !

Nous pouvons alors créer une version généralisée de la transformée de Fourier et la noter (on sait déjà qu'il s'agit de la transformée de Laplace bilatérale) :

$$\mathcal{L}(f(t))(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (7.1.718)$$

avec (nous le savons déjà !) :

$$s=\sigma+\mathrm{i}\omega t \qquad (7.1.719)$$

où en général, la convergence de l'intégrale n'est pas garantie pour tous les s. Nous nommons alors "abscisse de convergence absolue" de la transformée de Laplace l'ensemble des valeurs que σ doit prendre pour que l'intégrale converge.

Reprenons la transformée de Fourier non convergente vue juste plus haut mais où la fonction n'est définie que pour les temps positifs uniquement (transformée de Laplace unilatérale) :

$$\mathcal{L}(e^t)(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^t e^{-st}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{+\infty} e^t e^{-st}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{+\infty} e^t e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=\left.\frac{e^{-t((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)}}{-((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)}\right|_{0}^{+\infty} \qquad (7.1.720)$$

En cours de traduction de l'anglais

Le résultat converge si $\omega \geq 0$ (ce qui est toujours le cas en physique) pour $t > 0$ et si et seulement si $\sigma > 1$. Alors dans ce cas nous avons :

$$\mathcal{L}(e^t)(s) = \left.\frac{e^{-t((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)}}{-((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)}\right|_0^{+\infty} = \left.\frac{e^{(1-\sigma)t}e^{-\mathrm{i}\omega t}}{-((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)}\right|_0^{+\infty} = \frac{\overbrace{e^{(1-\sigma)\cdot+\infty}}^{\to 0}\overbrace{e^{-\mathrm{i}\omega\cdot+\infty}}^{\to 0}}{-((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)} - \frac{e^{(1-\sigma)\cdot 0}e^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0}}{-((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)}$$
$$= 0 - \frac{1}{-((\sigma-1)+\mathrm{i}\omega)} = \frac{1}{(\sigma+\mathrm{i}\omega)-1} = \frac{1}{s-1} \qquad (7.1.721)$$

7.1.5.2.1 Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace inverse peut être obtenue à partir de la transformée de Fourier correspondante :

$$X(s) = X(\sigma+\mathrm{i}\omega) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t = \mathcal{F}(x(t)e^{-\sigma t}) \qquad (7.1.722)$$

La transformée de Fourier inverse de ce qui précède est :

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}(X(\sigma+\mathrm{i}\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+\mathrm{i}\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (7.1.723)$$

En multipliant les deux côtés par $e^{\sigma t}$, nous obtenons la transformée de Laplace inverse :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+\mathrm{i}\omega)e^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega \qquad (7.1.724)$$

Comme nous voulons représenter la transformation inverse en termes de s (au lieu de ω), nous nous rendons compte que :

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}(\sigma+\mathrm{i}\omega) = \mathrm{i}\,\mathrm{d}\omega, \quad \text{ie,} \quad \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{i}} \qquad (7.1.725)$$

Nous réalisons également que l'intégrale dans la transformée inverse se trouve le long d'une ligne verticale dans le plan s de $\mathrm{i}\omega = -\mathrm{i}\infty$ à $\mathrm{i}\omega = +\mathrm{i}\infty$ tandis que l'autre variable σ est fixe. La "transformée de Laplace inverse" ci-dessus peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} X(s)e^{st}\mathrm{d}s} \qquad (7.1.726)$$

Nous avons maintenant la paire de transformées de Laplace :

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (7.1.727)$$

En cours de traduction de l'anglais

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int\limits_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} X(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{7.1.728}$$

La paire de transformées de Laplace directe (bilatérale) et inverse peut également être représentée comme :

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \tag{7.1.729}$$

En cours de traduction de l' anglais

7.1.5.2.2 Région de Convergence

Une question essentielle de la transformation de Laplace de $x(t)$ est de savoir si la transformation $X(s)$ existe et dans quelles conditions elle existe ! ? Pour voir cela, considérons les exemples suivants.

✍**Exemples :**

E1. La transformée de Fourier d'un signal $x(t)=e^{-at}u(t)$ est :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}e^{-(a+\mathrm{i}\omega)}|_0^{+\infty} \tag{7.1.730}$$

Cette intégrale ne converge que si $a>0$. En d'autres termes, ce n'est que lorsque le signal $x(t)$ décroît (au lieu de croître) de façon exponentielle que sa transformée de Fourier $X(\mathrm{i}\omega)$ existera :

$$X(\mathrm{i}\omega)=\frac{1}{a+\mathrm{i}\omega} \quad a<0 \tag{7.1.731}$$

Considérons maintenant la transformée de Laplace du même signal :

$$X(s)=\int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+\sigma)t}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{7.1.732}$$

Similairement à la transformée de Fourier, pour que cette intégrale converge, c'est-à-dire pour que la transformée de Laplace $X(s)$ existe, il faut que $\sigma=\Re[s]$ satisfasse :

$$a+\sigma>0 \quad \text{or} \quad \Re[s]=\sigma>-a \tag{7.1.733}$$

auquel cas la transformée de Laplace est :

$$X(s)=\frac{1}{(\sigma+a)+\mathrm{i}\omega}=\frac{1}{s+a} \quad \Re[s]>-a \tag{7.1.734}$$

Dans le cas particulier où $a=0$, $x(t)=u(t)$ nous avons :

$$\mathcal{L}(u(t))=\frac{1}{s} \quad \Re[s]>0 \tag{7.1.735}$$

Quand $\Re[s]=\sigma=0$, la transformée de Laplace $X(s)$ devient la transformée de Fourier $X(\mathrm{i}\omega)$.

E2. La version non causale du signal ci-dessus est $x(t)=-e^{-at}u(-t)$ et sa transformée de Laplace est :

$$X(s)=-\int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-st}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{0} e^{-((a+\sigma)+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a+\sigma+\mathrm{i}\omega}e^{-((a+\sigma)+\mathrm{i}\omega)t}|_{-\infty}^{0} \tag{7.1.736}$$

Seulement quand :

$$a+\sigma<0 \quad \text{or} \quad \Re[s]=\sigma<-a \tag{7.1.737}$$

cette intégrale convergera-t-elle et la transformée de Laplace $X(s)$ existera-t-elle :

$$X(s)=\frac{1}{a+\sigma+\mathrm{i}\omega}=\frac{1}{a+s} \quad \Re[s]<-a \tag{7.1.738}$$

Encore une fois comme cas particulier lorsque $a=0$, $x(t)=-u(-t)$ nous avons :

$$\mathcal{L}[-u(-t)]=\frac{1}{s} \quad \Re[s]<0 \tag{7.1.739}$$

En comparant les deux exemples ci-dessus, nous voyons que deux signaux différents peuvent avoir une transformée de Laplace $X(s)$ identique, mais s peut devoir satisfaire des conditions différentes pour que $X(s)$ existe. En général, l'ensemble de toutes les valeurs s satisfaisant les conditions pour que l'intégrale de la transformée de Laplace converge est appelé "région de convergence" (RDC) dans le plan complexe s. Dans le premier cas ci-dessus, la RDC est $\Re[s]>0$, et dans le second cas, la RDC est $\Re[s]<0$.

E3. Considérons le signal :

$$x(t)=\left[e^{-2t}+e^{t}\cos(3t)\right]u(t)=\left[e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-(1-\mathrm{i}3)t}+\frac{1}{2}e^{-(1+\mathrm{i}3)t}\right]u(0) \tag{7.1.740}$$

La transformée de Laplace de ce signal est :

$$\begin{aligned}X(s)&=\int_0^{+\infty}\left[e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-(1-\mathrm{i}3)t}+\frac{1}{2}e^{-(1+\mathrm{i}3)t}\right]e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}e^{-2t}e^{-st}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(1-\mathrm{i}3)t}e^{-st}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(1+\mathrm{i}3)t}e^{-st}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s+2}+\frac{1/2}{s+(1-\mathrm{i}3)}+\frac{1/2}{s+(1+\mathrm{i}3)}\end{aligned} \tag{7.1.741}$$

En suivant l'exemple 1, nous voyons que les conditions pour que les trois intégrales convergent sont respectivement :

$$\Re[s]>-2,\quad \Re[s]>-1,\quad \Re[s]>-1 \tag{7.1.742}$$

c'est-à-dire que lorsque $\Re[s]>-1$, $X(s)$ existe et peut s'écrire sous la forme :

$$X(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1/2}{s+(1-\mathrm{i}3)}+\frac{1/2}{s+(1+\mathrm{i}3)}=\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)} \quad \Re[s]>-1 \tag{7.1.743}$$

E4. Considérons :

$$\mathcal{L}(\delta(t-T))=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t=e^{-sT} \tag{7.1.744}$$

Comme l'intégration de Laplace converge indépendamment de s, le RDC est l'ensemble du plan s. En particulier, lorsque $T=0$, nous avons :

$$\mathcal{L}(\delta(t))=1 \tag{7.1.745}$$

7.1.5.2.3 Pôles et Zéros de la transformée de Laplace

Toutes les transformées de Laplace dans les exemples ci-dessus sont rationnelles, c'est-à-dire qu'elles peuvent être écrites sous la forme d'un rapport de polynômes de variable s sous la forme générale :

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k s^k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}(s-s_{z_k})}{\prod\limits_{k=1}^{N}(s-s_{p_k})} \tag{7.1.746}$$

où $N(s)$ est le polynôme d'ordre M au numérateur de racines $s_{z_k}, (k=1,2,\cdots,M)$, et $D(s)$ est le polynôme au dénominateur d'ordre N de racines $s_{p_k}, (k=1,2,\cdots,N)$. En général, nous supposons que l'ordre du polynôme numérateur est inférieur à celui du polynôme dénominateur, c'est-à-dire $M<N$. Si ce n'est pas le cas, nous pouvons toujours développer $X(s)$ en plusieurs termes afin que $M<N$ soit vrai pour chacun des termes.

✍**Exemple :**

Considérons :

$$X(s)=\frac{s^2-3}{s+2} \tag{7.1.747}$$

Comme l'ordre du numérateur $M=2$ est supérieur à celui du dénominateur $N=1$, nous le développons dans les termes suivants :

$$X(s)=\frac{s^2-3}{s+2}=A+Bs+\frac{C}{s+2} \tag{7.1.748}$$

et nous obtenons :

$$s^2-3=(A+Bs)(s+2)+C=Bs^2+(A+2B)s+(2A+C) \tag{7.1.749}$$

En égalant les coefficients des termes s^k $(k=0,1,\ldots,M)$ des deux côtés, nous obtenons :

$$B=1,\quad A+2B=0,\quad 2A+C=-3 \tag{7.1.750}$$

En résolvant ce système d'équations, nous obtenons les coefficients :

$$A=-2;\quad B=1,\quad C=1 \tag{7.1.751}$$

et :

$$X(s)=s-2+\frac{1}{s+2} \tag{7.1.752}$$

Alternativement, le même résultat peut être obtenu en effectuant une division à la main :

$$(s^2-3)\div(s+2) \tag{7.1.753}$$

En ... lais

Définitions (#7.1.281) :

D1. Toute valeur complexe s_z de s pour laquelle $H(s)|_{s=s_z}=H(s_z)=0$ est un "zéro" de $H(s)$.

D2. Toute valeur complexe s_p de s pour laquelle $H(s)|_{s=s_p}=H(s_p)=\infty$ est un "pôle" de $H(s)$.

Évidemment, toutes les racines du polynôme numérateur $N(s)$ sont des zéros de $H(s)$ et toutes les racines du polynôme dénominateur $D(s)$ sont des pôles de $H(s)$. De plus, si l'ordre de $D(s)$ dépasse l'ordre de $N(s)$ (c'est-à-dire $N>M$), alors $H(\infty)=0$, c'est-à-dire qu'il y a un zéro à l'infini. D'un autre côté, si l'ordre de $N(s)$ dépasse celui de $D(s)$ (c'est-à-dire $M>N$), alors $H(\infty)=\infty$, c'est-à-dire qu'il y a un pôle à l'infini. Sur le plan s, les zéros et les pôles peuvent être indiqués respectivement par o et x. Les propriétés de comportement les plus essentielles d'un système LTI peuvent être obtenues graphiquement à partir de la RDC et des zéros et des pôles de sa fonction de transfert $H(s)$ sur le plan s.

7.1.5.2.4 Propriétés de la région de convergence

Le fait que la transformée de Laplace $X(s)$ d'une fonction $x(t)$ existe dépend de la convergence ou non de la transformée intégrale :

$$X(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t<\infty \qquad (7.1.754)$$

qui à son tour dépend de la durée et de l'ampleur de $x(t)$ ainsi que de la partie réelle de s $\Re[s]=\sigma$. Lorsque $x(t)$ est du côté droit (c'est-à-dire $x(t)=0$ pour $t<t_0$), il peut avoir une durée infinie pour $t>0$, et plus σ est grand, plus rapidement $x(t)e^{-\sigma t}$ décroît comme $t\rightarrow+\infty$. D'un autre côté, si $x(t)$ est du côté gauche (c'est-à-dire $x(t)$ pour $t<t_0$), il peut avoir une durée infinie pour $t<0$, et plus σ est petit plus $x(t)e^{-\sigma t}$ décroît plus rapidement en tant que $t\rightarrow-\infty$. La partie imaginaire de s $\Im[s]=\mathrm{i}\omega$ détermine la fréquence d'une sinusoïde qui est bornée et n'a aucun effet sur la convergence de l'intégrale. Sur la base de ces observations, nous pouvons obtenir les propriétés suivantes pour la RDC :

- Si $x(t)$ est absolument intégrable et de durée finie, alors la RDC est l'ensemble du plan s (l'intégrale de transformée de Laplace est finie, c'est-à-dire que $X(s)$ existe, pour tout s).
- La RDC de $X(s)$ se compose de bandes parallèles à l'axe $\mathrm{i}\omega$ dans le plan s.
- Si $x(t)$ est du côté droit et que $\Re[s]=\sigma_0$ est dans la ROC, alors tout s à droite de σ_0 (c'est-à-dire $\Re[s]> \; sigma_0$) est également dans la ROC, c'est-à-dire que la RDC est un demi-plan du côté droit.
- Si $x(t)$ est du côté gauche et que $\Re[s]=\sigma_0$ est dans la ROC, alors tout s à gauche de σ_0 (c'est-à-dire $\Re[s]<\sigma_0$) est également dans la ROC, c'est-à-dire que la RDC est un demi-plan du côté gauche.

En cours de traduction de l'anglais

- Si $x(t)$ est bilatéral, alors la RDC est l'intersection des deux RDCs unilatérales correspondant aux deux parties unilatérales de $x(t)$. Cette intersection peut être soit une bande verticale, soit un ensemble vide.
- Si $X(s)$ est rationnel, alors sa RDC ne contient aucun pôle (par définition $X(s)|_{s=s_p}=\infty$ n'existe pas). La RDC est délimité par les pôles ou s'étend à l'infini.
- Si $X(s)$ est une transformée de Laplace rationnelle d'une fonction du côté droit $x(t)$, alors la RDC est le demi-plan à droite du pôle le plus à droite, et si $X(s)$ est un rationnel la transformée de Laplace d'une fonction du côté gauche $x(t)$, alors la RDC est le demi-plan à gauche du pôle le plus à gauche.
- Un signal $x(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire que sa transformée de Fourier $X(\mathrm{i}\omega)$ existe, si et seulement si la RDC de la transformée de Laplace correspondante $X(s)$ contient l'axe imaginaire $\Re[s]=0$ ou $s=\mathrm{i}\omega$.

✍**Exemples :**

E1. Considérons la transformée de Laplace d'un signal bilatéral $x(t)=e^{-b|t|}$:

$$X(s)=\mathcal{L}(x(t))=\mathcal{L}(e^{-b|t|})=\mathcal{L}(e^{-bt}u(t))+\mathcal{L}(e^{bt}u(-t)) \tag{7.1.755}$$

La transformée de Laplace des deux composantes peut être obtenue à partir des deux exemples évoqués précédemment ci-dessus. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{L}(e^{-bt}u(t))=\frac{1}{s+b} \quad \Re[s]>-b \tag{7.1.756}$$

et posons $b=-a$, nous avons alors :

$$\mathcal{L}(e^{bt}u(-t))=\mathcal{L}(e^{-at}u(-t))=-\frac{1}{s+a}=-\frac{1}{s-b} \quad \Re[s]<-a=b \tag{7.1.757}$$

En combinant les deux composantes, nous avons :

$$\mathcal{L}(e^{-b|t|})=\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s-b}=\frac{-2b}{s^2-b^2} \quad -b<\Re[s]<b \tag{7.1.758}$$

Que $X(s)$ existe ou non dépend de b. Si $b>0$, c'est-à-dire $x(t)$ décroît de façon exponentielle comme $|t|\rightarrow+\infty$, alors la RDC est la bande entre $-b$ et b et $X(s)$ existe. Mais si $b<0$, c'est-à-dire $x(t)$ croît de façon exponentielle à mesure que $|t|\rightarrow+\infty$, alors la RDC est un ensemble vide et $X(s)$ n'existe pas.

E2. Étant donné la transformée de Laplace suivante, trouvez le signal correspondant :

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \tag{7.1.759}$$

Étant donné les deux pôles $s_{p_1}=-1$ et s_{p_2} de l'expression, il existe trois RDC associées :

- Le demi-plan à droite du pôle le plus à droite $s_{p_2}=-1$, avec la fonction temporelle correspondante du côté droit :

$$x(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t) \tag{7.1.760}$$

- Le demi-plan à gauche du pôle le plus à gauche $s_{p_1} = -2$, avec la fonction temporelle correspondante du côté gauche :

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t) \tag{7.1.761}$$

- La bande verticale entre les deux pôles $-1 < \Re[s] < -2$, avec la fonction temporelle bilatérale correspondante :

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \tag{7.1.762}$$

En particulier, notez que seul la première RDC inclut l'axe $\mathrm{i}\omega$ et que la fonction temporelle correspondante a une transformée de Fourier. La transformée de Fourier des deux autres fonctions n'existe pas !

7.1.5.2.5 Propriétés de la Transformée de Laplace

La transformée de Laplace possède un ensemble de propriétés parallèles à celle de la transformée de Fourier. La différence est que nous devons accorder une attention particulière aux ROC. Dans ce qui suit, nous supposerons toujours :

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \qquad \text{ROC} = R_x \tag{7.1.763}$$

et :

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) \qquad \text{ROC} = R_y \tag{7.1.764}$$

P1. Linéarité :

$$\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s) \quad \text{ROC} \supseteq (R_x \cap R_y) \tag{7.1.765}$$

Bien qu'il soit évident que la RDC de la combinaison linéaire de $x(t)$ et $y(t)$ devrait être l'intersection de leurs RDCs individuelles $R_x \cap R_y$ dans lesquels $X(s)$ et $Y(s)$ existent, nous notons que dans certains cas lorsque l'annulation du pôle zéro se produit, la RDC de la combinaison linéaire pourrait être supérieure à $R_x \cap R_y$, comme le montre l'exemple ci-dessous.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Assumons :

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\frac{1}{s+1} \qquad \Re[s]>-1 \tag{7.1.766}$$

et :

$$Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]=\frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \Re[s]>-1 \tag{7.1.767}$$

alors :

$$\mathcal{L}[x(t)-y(t)]=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+2} \qquad \Re[s]>-2 \tag{7.1.768}$$

P2. Décalage temporel :

$$\mathcal{L}[x(t-t_0)]=e^{-t_0 s}X(s) \qquad \text{ROC}=R_x \tag{7.1.769}$$

P3. Décalagme dans le domaine s :

$$\mathcal{L}[e^{-s_0 t}x(t)]=X(s+s_0) \qquad \text{ROC}=R_x+\Re[s_0] \tag{7.1.770}$$

Notez que la RDC est décalée de s_0, c'est-à-dire qu'elle est décalée verticalement de $Im[s_0]$ (sans effet sur la ROC) et horizontalement de $\Re[s_0]$. Si R_x vaut $\Re[s]>0$, la nouvelle RDC est $\Re[s+s_0]>0$, c'est-à-dire $\Re[s]>-\Re[s_0]$.

P4. Mise à l'échelle temporelle :

$$\mathcal{L}[x(at)]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{ROC}=\frac{R_x}{a} \tag{7.1.771}$$

Notez que la RDC est mise à l'échelle horizontalement d'un facteur $1/a$, qui peut être soit positif ($a>0$) ou négatif ($a<0$), auquel cas le signal $x(t)$ et la RDC de sa transformée de Laplace est inversée horizontalement.

P5. Conjugaison :

$$\mathcal{L}[x^*(t)]=X^*(s^*) \qquad \text{ROC}=R_x \tag{7.1.772}$$

Démonstration 7.3.24.

$$X^*(s^*)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-s^*t}\right]^* \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\mathcal{L}[x^*(t)] \tag{7.1.773}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

P6. Convolution :

$$\mathcal{L}[x(t)*y(t)]=X(s)Y(s) \qquad \text{ROC}\supseteq(R_x\cap R_y) \tag{7.1.774}$$

Notons que la RDC de la convolution pourrait être plus grande que l'intersection de R_x et R_y, en raison de l'éventuelle annulation du pôle zéro provoquée par la convolution, similaire à la propriété de linéarité.

✍**Exemple :**

Supposons :

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\frac{s+1}{s+2}\ \Re[s]>-2 \text{ et } Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]=\frac{s+2}{s+1}\ \Re[s]>-1 \tag{7.1.775}$$

alors :

$$\mathcal{L}[x(t)*y(t)]=X(s)Y(s)=1 \quad \text{ROC}=\text{le plan s-entier} \tag{7.1.776}$$

P7. Dérivée dans le domaine temporel :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right]=sX(s) \quad \text{ROC}\supseteq R_x \tag{7.1.777}$$

Cela peut être prouvé en différenciant la transformée de Laplace inverse :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int\limits_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}X(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{st}\mathrm{d}s=\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int\limits_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}sX(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{7.1.778}$$

Encore une fois, multiplier $X(s)$ par s peut provoquer une annulation du pôle zéro et donc la RDC résultante pourrait être supérieure à R_x. Par exemple, lorsque $x(t)=u(t)$ et $X(s)=1/s$ avec $\Re[s]>0$ comme ROC, $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t=\delta(t)$ et avec $sX(s)=1$ dont la RDC est l'intégralité du plan s. En général, nous avons :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t)\right]=s^nX(s) \tag{7.1.779}$$

✍**Exemple :**

La RDC de $\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ est le plan s entier, et nous avons :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{\mathrm{d}t}\delta(t)\right]=s \qquad \text{ROC}=\text{plan s entier} \tag{7.1.780}$$

et plus généralement :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)\right]=s^n \qquad \text{ROC}=\text{plan s entier} \tag{7.1.781}$$

En cours de traduction de l'anglais

P8. Dérivée dans le domaine s :

$$\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) \qquad \text{ROC} = R_x \tag{7.1.782}$$

Cela peut être prouvé en dérivant la transformée de Laplace :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-st}\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-t)x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{7.1.783}$$

En répétant ce processus, nous obtenons :

$$\mathcal{L}[t^n x(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}X(s) \qquad \text{ROC} = R_x \tag{7.1.784}$$

P9. Intégration dans le domaine temporel :

$$\mathcal{L}\left[\int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{X(s)}{s} \qquad \text{ROC} \supseteq (R_x \cap \{\Re[s] > 0\}) \tag{7.1.785}$$

Cela peut être prouvé en réalisant que :

$$x(t) * u(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7.1.786}$$

et donc par propriété de convolution nous avons :

$$\mathcal{L}[x(t) * u(t)] = X(s)\frac{1}{s} \tag{7.1.787}$$

Notez également que comme la RDC de $\mathcal{L}[u(t)] = 1/s$ est le demi-plan droit $\Re[s] > 0$, la RDC de $X(s)/s$ est l'intersection des deux RDCs individuelles $R_x \cap \{\Re[s] > 0\}$, sauf si une annulation du pôle zéro se produit (lorsque $x(t) = \mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t$ avec $X(s) = s$), auquel cas la RDC est l'intégralité du plan s.

En cours de traduction de l'anglais

Nom de la propriété	Fonction $f(t)$	Transformée de Laplace $F(s)$
Linéarité	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
Mise à l'échelle temporelle	$f(at)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
Décalage	e^{-at}	$F(s+a)$
Délai	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Dérivée	$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$sF(s)-f(0)$
$n^{\text{ème}}$ Dérivée	$\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n f(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^1(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$
Puissance	$t^n\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$(-1)^n\dfrac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$
Intégration	$\int\limits_0^t f(x)\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{s}F(s)$
Réciproque	$\dfrac{1}{t}f(t)$	$\int\limits_s^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$
Convolution	$f(t)*g(t)$	$F(s)\cdot G(s)$
Fonction périodique	$f(t)=f(t+T)$	$\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int\limits_0^T e^{-sx}f(x)\mathrm{d}x$

TAB. 7.9 – **Résumé des propriétés les plus connues des transformées de Laplace**

En cours de traduction de l' anglais

7.1.5.2.6 Transformée de Laplace usuelles

Comme nous le faisons toujours dans ce livre, voyons quelques transformées de Laplace communes qui sont utiles dans certains problèmes bien connus de physique et de finance (et également utilisées comme exemple dans le livre complémentaire MATLAB™) :

1. $\delta(t)$, $\delta(t-\tau)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t=e^0=1,\forall s \tag{7.1.788}$$

De plus, grâce à la propriété de décalage temporel, nous avons :

$$\mathcal{L}[\delta(t-\tau)]=e^{-s\tau},\forall s \tag{7.1.789}$$

2. $u(t)$ (fonction de Heaviside), $t\,u(t)$, $t^n\,u(t)$

En raison de la propriété d'intégration du domaine temporel, nous avons :

$$\mathcal{L}[u(t)]=\mathcal{L}\left[\int\limits_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s},\quad \Re[s]>0 \tag{7.1.790}$$

Ayons une autre approche plus explicite car la précédente risque d'être un peu difficile.... La fonction $u(t)$ (pour rappel c'est la fonction Heaviside définie comme $H(t)=0,\forall t<0$)

pour l'utilisation de la transformée de Laplace unilatérale car non nulle uniquement pour $t \geq 0$. Ensuite nous avons :

$$\mathcal{L}(H(t))(s) = \int_0^{+\infty} H(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int e^{-st}\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} \tag{7.1.791}$$

Cette intégrale ne converge que si $\sigma \geq 0$. Ainsi :

$$\mathcal{L}(H(t))(s) = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = \frac{\underbrace{e^{-\sigma\cdot+\infty}}_{\to 0}\underbrace{e^{-\mathrm{i}\omega\cdot+\infty}}_{\to 0}}{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)} - \frac{e^{\sigma\cdot 0}e^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0}}{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s} \tag{7.1.792}$$

En appliquant la propriété de différenciation dans le domaine s à ce qui précède, nous avons :

$$\mathcal{L}[tu(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s^2}, \quad \Re[s] > 0 \tag{7.1.793}$$

Ou plus explicitement (c'est parfois bien de voir différentes manières... !) en utilisant l'intégration par partie :

$$\mathcal{L}(t)(s) = \int_0^{+\infty} te^{-st}\mathrm{d}t = t\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\mathrm{d}t = t\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} - \left.\frac{1}{s}\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} \tag{7.1.794}$$

Au premier terme, nous voyons également que nous devons avoir $\sigma > 0$. Ce qui nous donne :

$$\mathcal{L}(t)(s) = t\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} - \left.\frac{1}{s}\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = [0-0] - \left[0 - \frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{s^2} \tag{7.1.795}$$

Et en général (utile notamment en Génie Mécanique même si jusqu'à présent nous avons pu y éviter son usage dans ce livre) :

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \Re[s] > 0 \tag{7.1.796}$$

En effet, en utilisant l'intégration par parties :

$$\mathcal{L}(t^n)s = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\mathrm{d}t = t^n\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} - n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}\mathrm{d}t \tag{7.1.797}$$

Du premier terme nous voyons aussi que nous devons avoir $\sigma > 0$. Il reste donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n)(s) &= -n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}\mathrm{d}t = \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{n}{s}\mathcal{L}(t^{n-1})(s) = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\mathcal{L}(t^{n-2})(s) \\ &= \ldots = \frac{n!}{s^n}\mathcal{L}(1)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned} \tag{7.1.798}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il vient alors sous la condition $\sigma > 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^0)(s) &= \mathcal{L}(1)(s) = \frac{0!}{s} = \frac{1}{s}\\ \mathcal{L}(t^1)(s) &= \mathcal{L}(t)(s) = \frac{1!}{s^2} = \frac{1}{s^2}\\ \mathcal{L}(t^2)(s) &= \mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}\\ &\ldots\end{aligned} \tag{7.1.799}$$

3. $e^{-at}u(t)$, $te^{-at}u(t)$

   En appliquant la propriété de décalage du domain s à :

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}, \quad \Re[s] > 0 \tag{7.1.800}$$

nous avons :

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{s+a}, \quad \Re[s] > -a \tag{7.1.801}$$

Si vous n'aimez pas utiliser la propriété de décalage pour cette démonstration, voici une voie plus explicite et plus longue pour obtenir le même résultat (nous modifions un peu la notation pour éviter toute confusion) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{xt}H(t))(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}H(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{xt}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(a+\mathrm{i}b)t}e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-((\sigma-a)+\mathrm{i}(\omega-b))t}\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-((\sigma-a)+\mathrm{i}(\omega-b))t}}{-((\sigma-a)+\mathrm{i}(\omega-b))}\right|_0^{+\infty} = \left.\frac{e^{-((\sigma-a)+\mathrm{i}(\omega-b))t}}{x-s}\right|_0^{+\infty}\end{aligned} \tag{7.1.802}$$

Nous voyons que l'intégrale convergera si et seulement si :

$$\sigma > a \qquad \omega > b \tag{7.1.803}$$

Dès lors :

$$\mathcal{L}(e^{xt}H(t))(x) = \left.\frac{e^{-((\sigma-a)+\mathrm{i}(\omega-b))t}}{x-s}\right|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{x-s} = \frac{1}{s-x} \tag{7.1.804}$$

En appliquant la même propriété à :

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \Re[s] > 0 \tag{7.1.805}$$

nous avons :

$$\mathcal{L}[t^n e^{-at}u(t)] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \quad \Re[s] > -a \tag{7.1.806}$$

4. $e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}u(t)$, $\sin(\omega_0 t)u(t)$, $\cos(\omega_0 t)u(t)$

En cours de traduction de l'anglais

Nous pourrions le faire par intégration par parties mais c'est assez long. L'astuce consiste d'injecter $a=\pm \mathrm{i}\omega_0$ dans :

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)]=\frac{1}{s+a},\quad \Re[s]>-\Re[a] \tag{7.1.807}$$

nous obtenons :

$$\mathcal{L}[e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}u(t)]=\frac{1}{s+\mathrm{i}\omega_0}\quad\text{et}\quad \mathcal{L}[e^{\mathrm{i}\omega_0 t}u(t)]=\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega_0}\quad \Re[s]>0 \tag{7.1.808}$$

et dès lors :

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)u(t)]=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{\mathrm{i}\omega_0 t}+e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega_0}+\frac{1}{s+\mathrm{i}\omega_0}\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \tag{7.1.809}$$

et :

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)u(t)]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathcal{L}\left[e^{\mathrm{i}\omega_0 t}-e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega_0}-\frac{1}{s+\mathrm{i}\omega_0}\right]=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \tag{7.1.810}$$

5. $t\,\cos(\omega_0 t)u(t),\, t\,\sin(\omega_0 t)u(t)$

   Posons $a=\pm\mathrm{i}\omega_0$ dans :

$$\mathcal{L}[te^{-at}u(t)]=\frac{1}{(s+a)^2},\quad \Re[s]>-a \tag{7.1.811}$$

nous obtenons :

$$\mathcal{L}[te^{-\mathrm{i}\omega_0 t}u(t)]=\frac{1}{(s+\mathrm{i}\omega_0)^2}\quad\text{et}\quad \mathcal{L}[te^{\mathrm{i}\omega_0 t}u(t)]=\frac{1}{(s-\mathrm{i}\omega_0)^2},\quad \Re[s]>-a \tag{7.1.812}$$

De plus, nous avons :

$$\mathcal{L}[t\,\cos(\omega_0 t)u(t)]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[t\,(e^{\mathrm{i}\omega_0 t}+e^{-\mathrm{i}\omega_0 t})]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-\mathrm{i}\omega_0)^2}+\frac{1}{(s+\mathrm{i}\omega_0)^2}\right]=\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2} \tag{7.1.813}$$

et :

$$\mathcal{L}[t\,\sin(\omega_0 t)u(t)]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathcal{L}\left[t\,(e^{\mathrm{i}\omega_0 t}-e^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(s-\mathrm{i}\omega_0)^2}-\frac{1}{(s+\mathrm{i}\omega_0)^2}\right]=\frac{2s\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2} \tag{7.1.814}$$

6. $e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t),\, e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$

   En appliquant la propriété de décalager dans le domaine s à :

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)u(t)]=\frac{s}{s^2+\omega_0^2} \tag{7.1.815}$$

et :

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)u(t)]=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \tag{7.1.816}$$

Nous obtenons respectivement :

$$\mathcal{L}[e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{7.1.817}$$

et :

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)]=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{7.1.818}$$

En cours de traduction de l' anglais

7. Voyons une paire de transformations importante que nous trouverons inestimable lorsque nous aborderons les transitoires dans les lignes de transmission et dans la finance quantitative avancée[7]. Plus précisément, si nous définissons la "fonction d'erreur de Gauss :

$$\text{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{7.1.819}$$

alors nous dériverons ici la paire de transformées de Laplace unilatérales :

$$1-\text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\leftrightarrow\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}} \tag{7.1.820}$$

Démonstration 7.3.25. Nous commencerons par calculer la transformée de Laplace de :

$$x(t)=\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t^3}} \tag{7.1.821}$$

Comment savons-nous que nous devons partir de là ? Parce que cette fonction apparaît dans le livre *Théorie analytique de la chaleur* (11822 selon le calendrier holocène) de Joseph Fourier où il a déjà fait le travail avant nous mais d'une manière douloureuse différente[8] !

Dans tous les cas ce que nous avons c'est :

$$X(s)=\mathcal{UL}(x(t))=\int_0^{+\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t^3}}\mathrm{d}t \tag{7.1.822}$$

Ensuite, effectuons le changement de variable :

$$\tau^2=\frac{a^2}{4t} \tag{7.1.823}$$

et ainsi :

$$\tau=\frac{a}{2t^{1/2}} \tag{7.1.824}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}t=-\sqrt{t^3}\frac{4}{a}\mathrm{d}\tau \tag{7.1.825}$$

Avec ceci, notre transformée de Laplace unilatérale devient :

$$\begin{aligned}X(s)&=\int_{+\infty}^{0}\frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi t^3}}e^{-s\frac{a^2}{4\tau^2}}\left(-\sqrt{t^3}\frac{4}{a}\mathrm{d}\tau\right)=-\frac{4}{a\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{0}e^{-\left[\tau^2+s\frac{a^2}{4\tau^2}\right]}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{4}{a\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\left[\tau^2+s\frac{a^2}{4\tau^2}+a\sqrt{s}-a\sqrt{s}\right]}\mathrm{d}\tau=\frac{4}{a\sqrt{\pi}}e^{-a\sqrt{s}}\int_0^{+\infty}e^{-\left[\tau^2-a\sqrt{s}+\left(s\frac{a\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2\right]}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{4}{a\sqrt{\pi}}e^{-a\sqrt{s}}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\tau-\frac{a\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7.1.826}$$

En cours de traduction de l' anglais

[7]Notez que l'ensemble du développement qui va suivre est inspiré de l'excellent livre : *Transients for Electrical Engineers* **??**.

[8]Vous pouvez la trouver dans la traduction anglaise de l'année 11878 selon le calendrier holocène (voir [142]) à la page 384 pour $\mathbb{R}^3$.

Ou :

$$X(s) = \frac{4}{a\sqrt{\pi}} e^{-a\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau - \frac{b}{\tau}\right)^2} \mathrm{d}\tau \tag{7.1.827}$$

où :

$$b = \frac{a\sqrt{s}}{2} \tag{7.1.828}$$

Maintenant, concentrons-nous sur l'intégrale seule ! En sortant une partie de l'exponentielle de l'intégrale, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau^2 - 2b + \frac{b^2}{\tau^2}\right)^2} \mathrm{d}\tau = e^{2b} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau^2 + \frac{b^2}{\tau^2}\right)^2} \mathrm{d}\tau = e^{2b} I(b) \tag{7.1.829}$$

où :

$$I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau^2 + \frac{b^2}{\tau^2}\right)^2} \mathrm{d}\tau \tag{7.1.830}$$

L'intégrale $I(b)$, malgrée son apparence compliquée, peut être évaluée comme suit.

En différanciant par rapport à b, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{2b}{\tau^2}\right) e^{-\left(\tau^2 + \frac{b^2}{\tau^2}\right)^2} \mathrm{d}\tau \tag{7.1.831}$$

Maintenant, effectuons le changement de variable suivant :

$$u = \frac{b}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{b}{u} \tag{7.1.832}$$

qui conduit à :

$$\mathrm{d}\tau = -\frac{b}{u^2} \mathrm{d}u \tag{7.1.833}$$

et alors :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = \int_{+\infty}^{0} \left(-\frac{2u^2}{b}\right) e^{-\left(\frac{b^2}{u^2} + u^2\right)} \left(-\frac{b}{u^2} \mathrm{d}u\right) = -2 \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{b^2}{u^2} + u^2\right)} \mathrm{d}u = -2I(b) \tag{7.1.834}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -2\mathrm{d}b \tag{7.1.835}$$

dont la primitive donne :

$$I(b) = c^{te} e^{-2b} \tag{7.1.836}$$

En cours de traduction de l' anglais

où c^{te} est une constante. Nous pouvons le déterminer facilement avec (voir section Statistiques page 683) :

$$I(0)=c^{te}=\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7.1.837}$$

Le lecteur a peut-être en effet reconnu ici l'intégrale de Gauss.

Ainsi :

$$I(b)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2b} \tag{7.1.838}$$

En l'injectant dans :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau-\frac{b}{\tau}\right)^2}\mathrm{d}\tau=\int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau^2-2b+\frac{b^2}{\tau^2}\right)^2}\mathrm{d}\tau=e^{2b}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau^2+\frac{b^2}{\tau^2}\right)^2}\mathrm{d}\tau=e^{2b}I(b) \tag{7.1.839}$$

Nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau-\frac{b}{\tau}\right)^2}\mathrm{d}\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7.1.840}$$

Et en le remettant dans :

$$X(s)=\frac{4}{a\sqrt{\pi}}e^{-a\sqrt{s}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\tau-\frac{b}{\tau}\right)^2}\mathrm{d}\tau=\frac{4}{a\sqrt{\pi}}e^{-a\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\left(\frac{2}{a}e^{-a\sqrt{s}}\right) \tag{7.1.841}$$

Ce qui nous donne en effet la paire (qui nous sera utile pour l'étude de l'équation du Télégraphe) :

$$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t^3}}\leftrightarrow\frac{2}{a}e^{-a\sqrt{s}} \tag{7.1.842}$$

Qui est équivalente à :

$$\frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}\leftrightarrow e^{-a\sqrt{s}} \tag{7.1.843}$$

Rappelons enfin que nous avons prouvé lors de nos études des principales propriétés de la transformée de Laplace le (voir section Analyse page 2322) la paire suivant (intégration dans le domaine temporel) :

$$\int_0^{+\infty} x(t)\mathrm{d}t\leftrightarrow\frac{X(s)}{s} \tag{7.1.844}$$

Dès lors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}\mathrm{d}t\leftrightarrow\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \tag{7.1.845}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dans l'intégrale ci-dessus effectuons le changement de variable suivant :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{t}} \tag{7.1.846}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}t = -\frac{4\sqrt{t^3}}{a}\mathrm{d}u \tag{7.1.847}$$

et ainsi :

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x^3}}\left(-\frac{4\sqrt{x^3}}{a}\mathrm{d}u\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}e^{-u^2}\mathrm{d}u\right] \tag{7.1.848}$$

Dans la première intégrale entre crochets, nous reconnaissons la moitié de l'intégrale de Gauss. Donc :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}e^{-u^2}\mathrm{d}u\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}e^{-u^2}\mathrm{d}u\right] \tag{7.1.849}$$

Dans la seconde on reconnaît la fonction d'erreur de Gauss (voir page **??**), donc :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}}e^{-u^2}\mathrm{d}u\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \tag{7.1.850}$$

Dès lors notre paire :

$$\int_0^{+\infty}\frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \tag{7.1.851}$$

peut être écrite :

$$1 - \mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \leftrightarrow \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \tag{7.1.852}$$

et voilà, nous avons enfin la paire revendiquée du début !

■ Q.E.D.

Pour résumer :

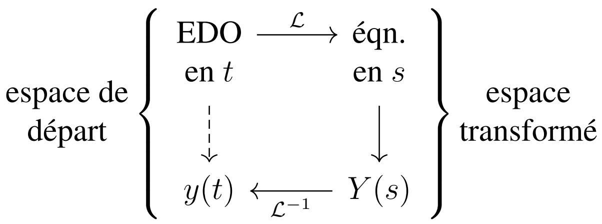
En cours de traduction de l'anglais

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$	**ROC**
$f(t)=1$	$F(s)=\frac{1}{s}$	$s>0$
$f(t)=\delta(t)$	$F(s)=1$	$s\forall s0$
$f(t)=u(t)$ (heaviside)	$F(s)=\frac{1}{s}$	$\Re[s]>0$
$f(t)=t^b u(t)$	$F(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re[s]>0$
$f(t)=tu(t)$	$F(s)=\frac{1}{s^2}$	$\Re[s]>0$
$f(t)=e^{at}$	$F(s)=\frac{1}{(s-a)}$	$s>a$
$f(t)=e^{-at}$	$F(s)=\frac{1}{s+a}$	$\Re[s]>-a$
$f(t)=e^{-a\|t\|}$	$F(s)=\frac{-2a}{s^2-a^2}$	$-b<\Re[s]<b$
$f(t)=t^n e^{-at}$	$F(s)=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\Re[s]>-a$
$f(t)=e^{-\mathrm{i}at}$	$F(s)=\frac{1}{s+\mathrm{i}a}$	$\Re[s]>-a$
$f(t)=t^n$	$F(s)=\frac{n!}{s^{(n+1)}}$	$s>0$
$f(t)=\sin(at)$	$F(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$f(t)=\cos(at)$	$F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$f(t)=t\sin(at)$	$F(s)=\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$	$s>0$
$f(t)=t\cos(at)$	$F(s)=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$s>0$
$f(t)=\sinh(at)$	$F(s)=\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$f(t)=\cosh(at)$	$F(s)=\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$f(t)=t^n e^{at}$	$F(s)=\frac{n!}{(s-a)^{(n+1)}}$	$s>a$
$f(t)=e^{at}\sin(bt)$	$F(s)=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$f(t)=e^{at}\cos(bt)$	$F(s)=\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$f(t)=e^{at}\sinh(bt)$	$F(s)=\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	$s-a>\|b\|$
$f(t)=e^{at}\cosh(bt)$	$F(s)=\frac{(s-a)}{(s-a)^2-b^2}$	$s-a>\|b\|$
$f(t)1-\mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/(2\sqrt{t})}e^{-u^2}\mathrm{d}u$	$F(s)=\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$	$s>0$

TAB. 7.10 – **Transformées de Laplace usuelles**

7.1.5.2.7 Résolution de systèmes différentiels

Voyons un exemple académique simple et bien connu de l'application de la transformée de Laplace pour traiter les équations différentielles.



Considérons qu'une tension (voltage) $x(t)$ est appliquée en entrée d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une inductance L connectés en série (le cas sans utilisation de la transformée de Laplace est introduit en détails dans la section de la page Génie Électrique **??**). La sortie $y(t)$ est la tension aux bornes de l'un des trois éléments. Le système peut être décrit par une

En cours de traduction de l'anglais

équation différentielle dans le domaine temporel :

$$x(t)=v_L(t)+v_R(t)+v_C(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+R\,i(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (7.1.853)$$

ou par une équation algébrique dans le domaine s :

$$X(s)=V_L(s)+V_R(s)+V_C(s)=\left[sL+R+\frac{1}{sC}\right]I(s) \quad (7.1.854)$$

et l'impédance globale du circuit est définie comme le rapport entre la tension (voltage) $V(s)$ et le courant $I(s)$:

$$Z(s)\triangleq\frac{V(s)}{I(s)}=sL+R+\frac{1}{sC} \quad (7.1.855)$$

qui est composé de l'impédance individuelle des trois éléments :

$$Z_L(s)=sL,\quad Z_R(s)=R,\quad Z_C(s)=\frac{1}{sC} \quad (7.1.856)$$

	résistance R	capacité C	inductance L
domaine temporel	$i=\frac{v}{R}$	$i=\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$v=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
domaine s	$V_R=IR$	$V_C=I/Cs$	$V_L=IsL$
impédance $Z=V/I$	R	$1/sC$	sL

En cours de traduction de l' anglais

Si la sortie est la tension aux bornes de l'un des trois éléments (V_L, V_R ou V_C), la fonction de transfert $H(s)$ peut être facilement obtenue en traitant le circuit série comme un diviseur de tension :

- La sortie est la tension aux bornes du condensateur $v_C(t)$

$$H_C(s)=\frac{1/sC}{Ls+R+1/sC}=\frac{1/LC}{s^2+(R/L)s+(1/LC)} \quad (7.1.857)$$

- La sortie est la tension aux bornes de la résistance $v_R(t)$

$$H_R(s)=\frac{R}{Ls+R+1/sC}=\frac{(R/L)s}{s^2+(R/L)s+(1/LC)} \quad (7.1.858)$$

- La sortie est la tension aux bornes de l'inductance $v_L(t)$

$$H_L(s)=\frac{sL}{Ls+R+1/sC}=\frac{s^2}{s^2+(R/L)s+(1/LC)} \quad (7.1.859)$$

Si nous définissons :

$$\zeta\triangleq\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},\quad \omega_n\triangleq\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.1.860)$$

le dénominateur commun des fonctions de transfert peut s'écrire sous forme standard (canonique) :

$$s^2+(R/L)s+(1/LC)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 \quad (7.1.861)$$

avec deux racines :

$$p_{1,2}=(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n \quad (7.1.862)$$

et les fonctions de transfert ci-dessus peuvent être écrites sous des formes standards :

- La première :

$$H_C(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad (7.1.863)$$

  avec deux pôles p_1, p_2 et pas de zéros.

- La deuxième :

$$H_R(s)=\frac{2\zeta\omega_n s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad (7.1.864)$$

  avec deux pôles p_1, p_2 et un zéro à l'origine.

- La troisième :

$$H_L(s)=\frac{s^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \quad (7.1.865)$$

  avec deux pôles p_1, p_2 et deux zéros répétés à l'origine.

Les trois fonctions de transfert se comportent respectivement comme un filtre passe-bas, passe-bande et passe-haut. De plus, lorsque la partie réelle commune $-\zeta\omega_n$ des deux pôles conjugués complexes est petite (c'est-à-dire $0<\zeta<0.5$), il y aura une bande passante étroite autour de $\omega=\omega_n$ pour les trois fonctions de transfert. L'amplitude et l'angle de phase de la fonction de réponse en fréquence correspondante $|H(\mathrm{i}\omega)|$ peuvent être déterminés qualitativement dans le plan s, comme nous le verrons plus tard.

7.1.5.2.8 Transformée de Laplace unilatérale

La transformée de Laplace discutée jusqu'à présent est la "transformée de Laplace bilatérale" car elle peut être appliquée aux signaux du côté gauche ainsi qu'à ceux du côté droit. Nous allons maintenant considérer la "transformée de Laplace unilatérale" d'un signal arbitraire $x(t)$ défini comme :

$$\mathcal{UL}(x(t))=X(s)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)u(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{+\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad (7.1.866)$$

En cours de traduction de l' anglais

où pour rappel $\mathcal{U}$ et $u(t)$ sont une autre notation typique de la fonction Heaviside.

Cette définition suppose toujours $x(t)=0$ pour $t<0$. Lorsque la transformée de Laplace unilatérale est appliquée pour trouver la fonction de transfert $H(s)=\mathcal{UL}[h(t)]$ d'un système LTI, elle est toujours supposée être causale. Et la RDC est toujours du bon côté dans le plan s.

Par définition, la transformée de Laplace unilatérale de tout signal $x(t)=x(t)u(t)$ est identique à sa transformée de Laplace bilatérale. Cependant, lorsque $x(t)\neq x(t)u(t)$, les deux transformées de Laplace sont différentes.

La transformée de Laplace unilatérale partage toutes les propriétés de la transformée de Laplace bilatérale, sauf que certaines propriétés sont exprimées sous des formes différentes. Ici, nous considérons uniquement la différenciation dans le domaine temporel :

$$\mathcal{UL}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right]=\mathcal{UL}[x'(t)]=sX(s)-x(0^-) \quad (7.1.867)$$

Démonstration 7.3.26.

$$\begin{aligned}\mathcal{UL}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right]&=\int_{0^-}^{+\infty}x'(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{+\infty}e^{-st}\mathrm{d}[x(t)]=x(t)e^{-st}|_{0^-}^{+\infty}-\int_{0^-}^{+\infty}x(t)\mathrm{d}(e^{-st})\\&=-x(0)+s\int_{0^-}^{+\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t=sX(s)-x(0^-)\end{aligned} \quad (7.1.868)$$

■ Q.E.D.

Nous pouvons en outre obtenir la transformée de Laplace des dérivées d'ordre supérieur :

$$\mathcal{UL}[x''(t)]=s\mathcal{UL}[x'(t)]-x'(0^-)=s^2X(s)-sx(0^-)-x'(0^-) \quad (7.1.869)$$

et en général :

$$\mathcal{UL}[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kx^{(n-1-k)}(0^-) \quad (7.1.870)$$

À finir en fonction des dons

En cours de traduction de l'anglais

7.1.5.3 Transformée en $\mathcal{Z}$

Les transformées de Laplace (dont la transformée de Fourier est pour rappel un cas particulier) ne sont applicables que pour des fonctions disons... "continues" pour faire simple.... Mais depuis l'avènement de l'informatique la grande majorité des fonctions (signaux) sont des échantillons à un intervalle de temps T_s tel que les fonctions sont réellement discrètes.

Dès lors il devient utile de définir une transformation similaire à la transformée de Laplace mais dans le cas discret ! Ainsi, la transformée de Laplace devient un cas particulier de la transformée en $\mathcal{Z}$ lorsque la période d'échantillonnage T_s tend vers 0.

La transformée de Fourier discrète d'un signal discret $x[n]$ est définie pour rappel comme :

$$X(e^{\mathrm{i}\omega}) = \mathcal{F}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\mathrm{i}2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\mathrm{i}\omega n} \tag{7.1.871}$$

à condition que $x[n]$ soit absolument sommable :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty \tag{7.1.872}$$

Évidemment, certains signaux peuvent ne pas satisfaire à cette condition et leur transformée de Fourier n'existe pas. Pour surmonter cette difficulté, nous pouvons multiplier le $x[n]$ donné par une fonction exponentielle $e^{-\sigma n}$ afin que $x[n]$ puisse être forcé à être sommable pour certaines valeurs du paramètre réél σ. La transformée de Fourier en temps discret devient alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x[n]e^{-\sigma n}] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x[n]e^{-\sigma n}\right] e^{-\mathrm{i}\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-sn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = X(z)\end{aligned} \tag{7.1.873}$$

Le résultat de cette sommation est fonction d'une variable complexe définie comme :

$$z = e^s = e^{\sigma+\mathrm{i}\omega} \tag{7.1.874}$$

Il s'agit de "transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale en avant" du signal discret $x[n]$:

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}} \tag{7.1.875}$$

Il existe une autre façon d'introduire la transformée en $\mathcal{Z}$ qui donne le même résultat mais avec une notation différente et qui est plus explicite. Comme cela peut aider le lecteur à mieux comprendre, montrons cela mais en nous limitant aux temps positifs uniquement (le cas qui intéresse l'ingénierie est la transformation en $\mathcal{Z}$ unilatérale !).

On sait donc qu'une fonction continue $f(t)t$ peut être discrétisée (échantillonnée) de manière à prendre à chaque pas de temps nT_s avec $n \in \mathbb{N}$ la valeur de la fonction d'intérêt , multiplié par une impulsion de Dirac sur ce même point tel que :

$$f_s(t) \underset{\lim T_s \to 0}{=} \sum_{0}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \tag{7.1.876}$$

En cours de traduction de l' anglais

Calculons maintenant la transformée de Laplace de cette fonction discrétisée à la limite et en utilisant le fait que les $f(nT_e)$ sont désormais indépendants du temps et de la propriété de linéarité de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f_s(t))(s)=\int\limits_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[f(nT_s)\int\limits_0^{+\infty}\delta(t-nT_s)\mathrm{d}t\right] \tag{7.1.877}$$

Comme nous l'avons montré plus haut dans notre étude des transformées de Laplace usuelles, nous avons :

$$\int\limits_0^{+\infty}\delta(t-nT_s)=e^{-nsT} \tag{7.1.878}$$

Nous avons alors :

$$\mathcal{L}(f_s(t))(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}f(nT_s)e^{-nst} \tag{7.1.879}$$

Dont il est l'usage comme nous venons de le voir précédemment d'écrire comme suit et de définir comme la "transformée en $\mathcal{Z}$ unilatéral" (sur laquelle nous reviendrons plus tard ci-dessous) :

$$\mathcal{Z}(f_s(t))(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n z^{-n} \tag{7.1.880}$$

avec :

$$f_n=f(nT_s)\qquad z=e^{st} \tag{7.1.881}$$

Voilà pour la deuxième approche !

Maintenant, étant donné la transformation $\mathcal{Z}$ $X(z)$, le signal temporel d'origine peut être obtenu par la transformation $\mathcal{Z}$ inverse, qui peut être dérivée de la transformée de Fourier discrète correspondante. Comme indiqué ci-dessus, nous avons :

$$X(z)=X(e^{\sigma+\mathrm{i}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[x[n]e^{-\sigma n}]e^{-\mathrm{i}\omega n}=\mathcal{F}[x[n]e^{-\sigma n}] \tag{7.1.882}$$

Maintenant $x[n]e^{-\sigma n}$ peut être obtenu par la transformée de Fourier inverse :

$$x[n]e^{-\sigma n}=\mathcal{F}^{-1}[X(e^{\sigma+\mathrm{i}\omega})]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}X(e^{\sigma+\mathrm{i}\omega})e^{\mathrm{i}\omega n}\mathrm{d}\omega \tag{7.1.883}$$

En multipliant les deux côtés par $e^{\sigma n}$, nous obtenons :

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}X(e^{\sigma+\mathrm{i}\omega})e^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)n}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}X(z)z^n\mathrm{d}\omega \tag{7.1.884}$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour représenter la transformation inverse en termes de z (au lieu de ω), nous notons :

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}(e^{\sigma+\mathrm{i}\omega}) = e^{\sigma}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}\omega = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\omega \qquad (7.1.885)$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \qquad (7.1.886)$$

et la "transformée inverse en $\mathcal{Z}$" peut être obtenu comme :

$$\boxed{x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\oint X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z} \qquad (7.1.887)$$

Notez que l'intégrale par rapport à ω de 0 à 2π devient une intégrale par rapport à $z = e^{\sigma+\mathrm{i}\omega}$ dans le plan complexe z , le long d'un cercle de rayon fixe e^{σ} et d'un angle ω variable de 0 à 2π. Nous avons maintenant la paire de transformée en $\mathcal{Z}$:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \qquad (7.1.888)$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z \qquad (7.1.889)$$

La paire de transformée en $\mathcal{Z}$ en avant et inverse peut aussi être représentée par :

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad (7.1.890)$$

En particulier, si nous laissons $\sigma = 0$, c'est-à-dire $z = e^{\mathrm{i}\omega}$, alors la transfée en $\mathcal{Z}$ devient la transformée de Fourier en temps discret :

$$X(z)\Big|_{z=e^{\mathrm{i}\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-\mathrm{i}\omega n} = X(e^{\mathrm{i}}\omega) \qquad (7.1.891)$$

C'est la raison pour laquelle parfois le spectre de Fourier discret est exprimé en fonction de $e^{\mathrm{i}\omega}$.

Différent de la transformée de Fourier en temps discret qui convertit un signal 1-D $x[n]$ dans le domaine temporel en un spectre 1-D complexe $X(e^{\mathrm{i}\omega})$ dans le domaine fréquentiel, la transformée en $\mathcal{Z}$ $X(s)$ convertit le signal 1D $x[n]$ en une fonction complexe définie sur un plan complexe 2D, nommée "plan z", représenté sous forme polaire par le rayon $|z| = |e^{\sigma+\mathrm{i}\omega}| = e^{\sigma}$ et l'angle $\angle z = \angle(e^{\sigma+\mathrm{i}\omega}) = \omega$.

En particulier, lorsque cette fonction 2D $X(z) = X(e^{\sigma+\mathrm{i}\omega})$ est évaluée le long du cercle unité $|z| = e^0 = 1$ correspondant à $\sigma = 0$, elle devient une fonction périodique 1-D $X(e^{\mathrm{i}\omega})$, la transformée de Fourier discrète de $x[n]$.

En cours de traduction de l' anglais

7.1.5.3.1 Fonction de transfert de systèmes invariants dans le temps

La sortie $y[n]$ d'un système invariants dans le temps discret avec l'entrée $x[n]$ peut être trouvée par convolution (voir page 2268) :

$$y[n]=\mathcal{O}[x[n]]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k] \quad (7.1.892)$$

où $h[n]$ est la fonction de réponse impulsionnelle du système. En particulier, si l'entrée est une exponentielle complexe :

$$x[n]=z^n=(e^s)^n=e^{sn} \quad (7.1.893)$$

alors la sortie $y[n]$ peut être trouvée comme étant :

$$y[n]=\mathcal{O}[z^n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{n-k}=z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k}=H(z)z^n \quad (7.1.894)$$

Il s'agit de l'équation propre avec l'exponentielle complexe $x[n]=z^n=e^{sn}$ étant la fonction propre de tout système invariant dans le temps discret, correspondant à sa valeur propre définie comme :

$$H(z)\triangleq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]z^{-k} \quad (7.1.895)$$

qui est la transformée en $\mathcal{Z}$ de sa réponse impulsionnelle $h[n]$, appelée "fonction de transfert" du système invariant dans le temps. En particulier, lorsque $\sigma=0$, c'est-à-dire $z=e^s=e^{\mathrm{i}\omega}$, la fonction de transfert $H(z)$ devient la fonction de réponse fréquentielle, la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle :

$$H(e^{\mathrm{i}\omega})\triangleq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-\mathrm{i}\omega n} \quad (7.1.896)$$

En cours de traduction de l'anglais

7.1.5.3.2 Mappage conforme entre le plan s et le plan z

Le plan s et le plan z sont liés par une application conforme (c'est-à-dire qu'elle conserve les angles) spécifiée par la fonction complexe analytique :

$$z=e^s=e^{\sigma+\mathrm{i}\omega}=e^{\sigma}e^{\mathrm{i}\omega}=re^{\mathrm{i}\omega} \quad (7.1.897)$$

où :

$$\left\{\begin{array}{l}\Re[s]=\sigma\\ \Im[s]=\mathrm{i}\omega\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l}|z|=r=e^{\sigma}\\ \angle z=\omega\end{array}\right. \quad (7.1.898)$$

Même si, à notre connaissance, il n'y a pas d'application pratique importante de ce mappage, il s'agit plutôt d'une curiosité mathématique qui peut aider certains étudiants à comprendre comment le plan s et le plan z sont liés entre eux.

Le mappage est continu, c'est-à-dire que les points voisins dans le plan s sont mappés aux points voisins dans le plan z et vice versa. Considérez le mappage de ces fonctionnalités spécifiques :

- L'origine $s=0$ du plan s est mappée sur $z=e^0=1$, l'axe réél du plan z.
- Chaque ligne verticale $\Re[s]=\sigma_0$ dans le plan s est mappée sur un cercle $|z|=e^{\sigma_0}$ centré sur l'origine dans le plan z. En particulier :
  - La ligne verticale la plus à gauche $\Re[s]=\sigma=-\infty$ est mappée sur l'origine $|z|=e^{-\infty}=0$
  - L'axe imaginaire $\Re[s]=0$ est représenté comme le cercle unitaire $|z|=e^0=1$
  - La ligne verticale la plus à droite $\Re[s]=\sigma=+\infty$ est tracée comme un cercle de rayon infini $|z|=e^{+\infty}=+\infty$.
- Chaque ligne horizontale $\Im[s]=\mathrm{i}\omega_0$ dans le plan s est mappée sur $\angle z=\omega_0$, un rayon partant de l'origine dans le plan z de angle ω_0 par rapport à la direction horizontale positive.
- Un angle droit formé par une paire de lignes verticales et horizontales dans le plan s est conservé par le mappage, car le cercle et le rayon correspondants dans le plan z forment également un angle droit (en fait, tout angle est conservé, une propriété importante de la cartographie conforme).

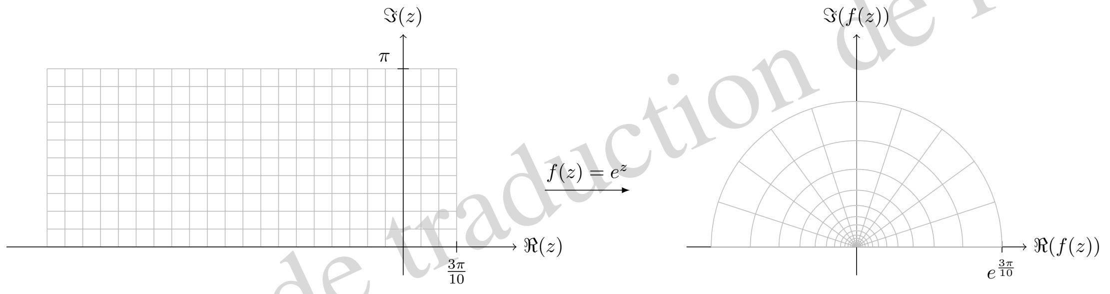


FIG. 7.67 – Exemple d'une fonction complexe (application conforme)

En cours de traduction de l' anglais

La plage infinie $-\infty<\omega<+\infty$ pour la fréquence ω le long d'une ligne verticale $\Re[s]=\sigma_0$ dans le plan s est mappée à plusieurs reprises sur une plage finie $0\leq\omega<2\pi$ autour d'un cercle $|z|=e^{\sigma_0}$ dans le plan z, correspondant à la conversion d'un signal continu $x(t)$ avec des signaux d'un spectre non périodiques $X(\mathrm{i}\omega)$ pour $-\infty<\omega<+\infty$ à un signal discret $x[n]$ à spectre périodique $X(e^{\mathrm{i}\omega})$ pour $0\leq\omega<2\pi$.

7.1.5.3.3 Région de Convergence

L'existence de la transformée en $\mathcal{Z}$ $X(z)$ d'un signal $x[n]$ dépend de la variable complexe $z=e^s$ ainsi que du signal lui-même. $X(z)$ existe si et seulement si l'argument z est à l'intérieur de la région de convergence (ROC) dans le plan z, qui est composé de toutes les valeurs z pour lesquelles la somme des transformées en $\mathcal{Z}$ convergent. La RDC de la transformée en $\mathcal{Z}$ est déterminée par $|z|=|e^s|=e^{\sigma}$ (un cercle), la grandeur de la variable z, tandis que la RDC de la transformée de Laplace est déterminée par $\sigma=\Re[s]$, (une ligne verticale), la partie réelle de s.

✍**Exemples :**

E1. Voyons notre première transformée $\mathcal{Z}$ avec en même temps sa région de convergence correspondante. Pour cela, rappelons d'abord la série géométrique suivante (voir page 2399) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-x} \tag{7.1.899}$$

pour $|x|<1$. La transformée en $\mathcal{Z}$ du signal droit suivant $x[n]=a^n u[n]$ est :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \tag{7.1.900}$$

Si nous posons $a=1$, nous obtenons simplement la transformation $\mathcal{Z}$ de la fonction de Heaviside (sous forme de série géométrique simple : $1+z^{-1}+z^{-2}+\ ldots$

Pour que cette sommation converge, c'est-à-dire pour que $X(z)$ existe, il faut avoir $|az^{-1}|<1$, c'est-à-dire que la RDC est $|z|>|a|$. Comme cas particulier lorsque $a=1$, $x[n]=u[n]$ et nous avons alors :

$$\mathcal{Z}[u[n]] = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1 \tag{7.1.901}$$

E2. Voyons maintenant un exemple simple et trivial d'une inverse de la transformée en $\mathcal{Z}$ suivante :

$$X(z)=4z^2+2+3z^{-1} \tag{7.1.902}$$

En comparant cela avec la définition de la transformée en $\mathcal{Z}$ suivante :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = x[-2]z^2+x[-1]z^1+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2} \tag{7.1.903}$$

nous obtenons :

$$x[n]=4\delta[n+2]+2\delta[n]+3\delta[n-1] \tag{7.1.904}$$

En général, nous pouvons utiliser la propriété de décalage temporel :

$$\mathcal{Z}[\delta[n+n_0]] = z^{n_0} \tag{7.1.905}$$

pour faire la transformée inverse de $X(z)$ ci-dessus en $x[n]$ directement.

E3. Déterminons la transformée inverse triviale de :

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \tag{7.1.906}$$

Comme nous savons que :

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \tag{7.1.907}$$

qui converge si la RDC est $|z|>|a|$, c'est-à-dire $|az^{-1}|<1$ alors nous obtenons :

$$x[n]=a^n u[n] \tag{7.1.908}$$

7.1.5.3.4 Zéros et pôles de la transformée en $\mathcal{Z}$

Toutes les transformations $\mathcal{Z}$ dans les exemples ci-dessus sont rationnelles, c'est-à-dire qu'elles peuvent être écrites sous la forme d'un rapport de polynômes de variable z sous la forme générale :

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^k}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k}=\frac{b_M}{a_N}\frac{\prod\limits_{k=1}^{M}(z-z_{z_k})}{\prod\limits_{k=1}^{N}(z-z_{p_k})} \tag{7.1.909}$$

où $N(z)$ est le polynôme au numérateur d'ordre M de racines $z_{z_k}, (k=1,2,\cdots,M)$, et $D(z)$ est le polynôme au dénominateur d'ordre N avec des racines $z_{p_k}, (k=1,2,\cdots,N)$. En général, nous supposons que l'ordre du polynôme au numérateur est inférieur à celui du polynôme dénominateur, c'est-à-dire $M<N$. Si ce n'est pas le cas, nous pouvons toujours développer $X(z)$ en plusieurs termes afin que $M<N$ soit vrai pour chacun des termes.

Les "zéros" et "pôles" d'un rationnel $X(z)=N(z)/D(z)$ sont définis comme :

Définitions (#7.1.282) :

D1. Chacune des racines du polynôme numérateur z_z pour laquelle :

$$X(z)\Big|_{z=z_z}=X(z_z)=0 \tag{7.1.910}$$

est un "zéro" de $X(z)$.

Si l'ordre de $D(z)$ dépasse celui de $N(z)$ (c'est-à-dire $N>M$), alors $X(+\infty)=0$, c'est-à-dire qu'il y a un zéro à infini :

$$\frac{b_1z+b_0}{a_2z^2+a_1z+a_0}\Bigg|_{z\to+\infty}=0 \tag{7.1.911}$$

D2. Chacune des racines du polynôme dénominateur z_p pour laquelle :

$$X(z)\Big|_{z=z_p}=X(z_p)=+\infty \tag{7.1.912}$$

est un "pôle" de $X(z)$.

Si l'ordre de $N(z)$ dépasse celui de $D(z)$ (c'est-à-dire $M>N$), alors $X(+\infty)=+\infty$, c'est-à-dire qu'il y a est un pôle à l'infini :

$$\frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{a_1z+a_0}\Bigg|_{z\to+\infty}\to+\infty \tag{7.1.913}$$

Les propriétés de comportement les plus essentielles d'un système linéaire invariant en temps peuvent être obtenues graphiquement à partir de la RDC et des zéros et des pôles de sa fonction de transfert $H(z)$ sur le plan z.

En cours de traduction de l'anglais

7.1.5.3.5 Propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$

La transformée en $\mathcal{Z}$ possède un ensemble de propriétés parallèles à celles de la transformée de Fourier (et de la transformée de Laplace). La différence est que nous devons accorder une attention particulière aux RDCs. Dans ce qui suit, nous supposons toujours :

$$\mathcal{Z}[x[n]] = X(z) \quad \text{ROC} = R_x \tag{7.1.914}$$

et :

$$\mathcal{Z}[y[n]] = Y(z) \quad \text{ROC} = R_y \tag{7.1.915}$$

- Linéarité :

$$\mathcal{Z}[ax[n] + by[n]] = aX(z) + bY(z), \quad \text{ROC} \supseteq (R_x \cap R_y) \tag{7.1.916}$$

Bien qu'il soit évident que la RDC de la combinaison linéaire de $x[n]$ et $y[n]$ devrait être l'intersection de leurs RDCs individuelles $R_x \cap R_y$ dans lesquelle les deux $X(z)$ et $Y(z)$ existent, notez que dans certains cas la RDC de la combinaison linéaire pourrait être supérieure à $R_x \cap R_y$. Par exemple, pour $x[n] = a^n u[n]$ et $y[n] = a^n u[n-1]$, le RDC est $|z| > |a|$, mais le RDC de leur différence $a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n]$ est l'intégralité du plan z.

- Décalage temporel :

$$\mathcal{Z}[x[n-n_0]] = z^{-n_0} X(z), \quad \text{ROC} = R_x \tag{7.1.917}$$

Démonstration 7.3.27.

$$\mathcal{Z}[x[n-n_0]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0] z^{-n} \tag{7.1.918}$$

Posons $m = n - n_0$, nous avons alors $n = m + n_0$ et :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] z^{-m} z^{-n_0} = z^{-n_0} X(z) \tag{7.1.919}$$

La nouvelle RDC est le même que l'ancienne sauf l'ajout/suppression possible de l'origine ou de l'infini car le décalage peut modifier la durée du signal.

■ Q.E.D.

Une approche légèrement différente nous amène à un résultat différent, plus explicite et par ailleurs plus utile notamment dans les applications métiers (on change un peu la notation pour être conforme à la tradition dans le domaine financier). Considérons d'abord

En cours de traduction de l'anglais

le cas particulier (décalage d'une unité seulement dans le sens positif[9]) :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(f_{n+1})(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}z^{-n} = z\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}z^{-(n+1)} = z\sum_{k=1}^{+\infty} f_k z^{-k} \\ &= z\sum_{k=1}^{+\infty} f_k z^{-k} + (zf_0 - zf_0) = z\left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k z^{-k} + f_0\right) - zf_0 \\ &= z\sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-k} - zf_0 = z\mathcal{Z}(f_n)(z) - zf_0\end{aligned} \tag{7.1.920}$$

En répétant exactement le même type de procédure nous obtenons tout simplement de manière générale pour $m > 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(f_{n+1})(z) &= z^m\mathcal{Z}(f_n)(z) - z^m f_0 - z^{m-1}f_1 - \ldots - zf_{m-1} \\ &= z^m\left[\mathcal{Z}(f_n)(z) - f_0 - z^{-1}f_1 - \ldots - z^{-m+1}f_{m-1}\right]\end{aligned} \tag{7.1.921}$$

- Extension temporelle (mise à l'échelle) :

$$\mathcal{Z}[x[n/k]] = X(z^k), \quad \text{ROC} = R_x^{1/k} \tag{7.1.922}$$

Le signal discret $x[n]$ ne peut pas être mis à l'échelle en continu dans le temps car n doit être un entier (pour un n non entier, $x[n]$ est nul). Par conséquent $x[n/k]$ est défini comme :

$$x[n/k] \triangleq \begin{cases} x[n/k] & \text{si } n \text{ est un multiple de } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.1.923}$$

En duction de l'anglais

✍ **Exemple :**

Si $x[n]$ est une rampe :

n	1	2	3	4	5	6
$x[n]$	1	2	3	4	5	6

alors la version étendue $x[n/2]$ est :

n	1	2	3	4	5	6
$n/2$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
m		1		2		3
$x[n/2]$	0	1	0	2	0	3

où m est la partie entière de n/k.

Démonstration 7.3.28. La transformée en $\mathcal{Z}$ d'un tel signal étendu est :

$$\mathcal{Z}[x[n/k]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n/k]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-km} = X(z^k) \tag{7.1.924}$$

[9] Il s'agit alors d'une "transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale" et comme nous le verrons à la page 2352, les propriétés diffèrent alors légèrement de la version bilatérale.

Notez que le changement de l'indice de sommation de n à m n'a aucun effet car les termes ignorés sont tous des zéros.

■ Q.E.D.

- Convolution :

$$\mathcal{Z}[x[n]*y[n]]=X(z)Y(z),\quad \text{ROC}\supseteq(R_x\cap R_y) \tag{7.1.925}$$

La RDC de la convolution pourrait être plus grand que l'intersection de R_x et R_y, en raison de l'éventuelle annulation du pôle zéro provoquée par la convolution.

- Différence temporelle :

$$\mathcal{Z}[x[n]-x[n-1]]=(1-z^{-1})X(z),\quad \text{ROC}=R_x \tag{7.1.926}$$

Démonstration 7.3.29.

$$\mathcal{Z}[x[n]-x[n-1]]=X(z)-z^{-1}X(z)=(1-z^{-1})X(z)=\frac{z-1}{z}X(z) \tag{7.1.927}$$

Notons qu'en raison du zéro supplémentaire $z=1$ et du pôle $z=0$, la RDC résultante est la même que R_x sauf la suppression possible de $z=0$ causée par le pôle ajouté et/ou l'ajout de $z=1$ causé par le zéro ajouté qui peut annuler un pôle existant.

■ Q.E.D.

- Accumulation temporelle :

$$\mathcal{Z}[\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]]=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z),\quad \text{ROC}\supseteq[R_x\cap(|z|>1)] \tag{7.1.928}$$

Démonstration 7.3.30. L'accumulation de $x[n]$ peut s'écrire comme sa convolution avec $u[n]$:

$$u[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u[n-k]x[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \tag{7.1.929}$$

En appliquant la propriété de convolution, nous obtenons :

$$\mathcal{Z}[\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]]=\mathcal{Z}[u[n]*x[n]]=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z) \tag{7.1.930}$$

étant donné que $\mathcal{Z}[u[n]]=1/(1-z^{-1})$.

■ Q.E.D.

- Inversion temporelle :

$$\mathcal{Z}[x[-n]]=X(1/z)\quad \text{ROC}=1/R_x \tag{7.1.931}$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 7.3.31.

$$\mathcal{Z}[x[-n]]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\left(\frac{1}{z}\right)^{-m}=X(1/z) \tag{7.1.932}$$

où $m=-n$.

■ Q.E.D.

- Mise à l'échelle dans le domaine z :

$$\mathcal{Z}[a^n x[n]]=X\left(\frac{z}{a}\right),\quad \text{ROC}=|a|R_x \tag{7.1.933}$$

Démonstration 7.3.32.

$$\mathcal{Z}[a^n x[n]]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(\frac{z}{a}\right)^{-n}=X\left(\frac{z}{a}\right) \tag{7.1.934}$$

En particulier, si $a=e^{\mathrm{i}\omega_0}$, ce qui précède devient :

$$\mathcal{Z}[e^{jn\omega_0}x[n]]=X(e^{-\mathrm{i}\omega_0}z)\quad \text{ROC}=R_x \tag{7.1.935}$$

La multiplication par $e^{-\mathrm{i}\omega_0}$ à z correspond à une rotation d'angle ω_0 dans le plan z, c'est-à-dire un décalage de fréquence de ω_0. La rotation se fait soit dans le sens des aiguilles d'une montre ($\omega_0>0$), soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ($\omega_0<0$), correspondant respectivement à un décalage vers la gauche ou vers la droite dans le domaine fréquentiel. La propriété est essentiellement la même que la propriété de décalage de fréquence de la transformée de Fourier discrète.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

- Conjugaison :

$$\mathcal{Z}[x^*[n]]=X^*(z^*),\quad \text{ROC}=R_x \tag{7.1.936}$$

Démonstration 7.3.33. Le conjugué complexe de la transformée en $\mathcal{Z}$ de $x[n]$ est :

$$X^*(z)=[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}]^*=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n](z^*)^{-n} \tag{7.1.937}$$

En remplaçant z par z^*, nous obtenons le résultat souhaité.

■ Q.E.D.

- Dérivation dans le domaine z :

$$\mathcal{Z}[nx[n]]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z),\quad \text{ROC}=R_x \tag{7.1.938}$$

Démonstration 7.3.34.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-n})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-n)x[n]z^{-n-1}=\frac{-1}{z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}nx[n]z^{-n} \quad (7.1.939)$$

i.e. :

$$\mathcal{Z}[nx[n]]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z) \quad (7.1.940)$$

■ Q.E.D.

✍**Exemple :**

En prenant la dérivée par rapport à z du côté droit de :

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]]=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a| \quad (7.1.941)$$

nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right]=\frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2} \quad (7.1.942)$$

En raison de la propriété de différenciation dans le domaine z, nous avons :

$$\mathcal{Z}[na^n u[n]]=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z|>|a| \quad (7.1.943)$$

Notez que pour une RDC $|z|<|a|$ différente, nous avons :

$$\mathcal{Z}[-na^n u[-n-1]]=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z|<|a| \quad (7.1.944)$$

En co... is

7.1.5.3.6 Transformées en $\mathcal{Z}$ usuelles

Comme nous le faisons toujours dans ce livre, voyons quelques transformées en $\mathcal{Z}$ usuelles qui sont utiles en ingénierie dans certains problèmes bien connus :

1. $\delta[n]$, $\delta[n-m]$

$$\mathcal{Z}[\delta[n]]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]z^{-n}=\delta[0]z^{-0}=\delta[0]=1 \qquad \forall z \quad (7.1.945)$$

Grâce à la propriété de décalage temporel, nous avons également :

$$\mathcal{Z}[\delta[n-m]]=z^{-m} \qquad \forall z \quad (7.1.946)$$

2. $u[n]$, $a^n u[n]$, $na^n u[n]$

$$\mathcal{Z}[u[n]]=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1 \tag{7.1.947}$$

En raison de la propriété de mise à l'échelle dans le domaine z, nous avons :

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]]=\frac{1}{1-(z/a)^{-1}}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad S|z|>|a| \tag{7.1.948}$$

Ou pour ceux qui n'aiment pas utiliser cette propriété, nous utilisons simplement le résultat précédent :

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]]=\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(a^{-1}z)^{-n}=\frac{1}{1-(z/a)^{-1}}=\frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1}=\frac{z}{z-a} \tag{7.1.949}$$

En appliquant la propriété de dérivation dans le domaine z à ce qui précède, nous avons :

$$\mathcal{Z}[na^n u[n]]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right]=-z\frac{-az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z|>|a| \tag{7.1.950}$$

3. $u[n-k]$

En utilisant la propriété de décalage temporel qui est pour rappel donnée par :

$$\mathcal{Z}(x[n-n_0])=z^{-n_0}X(z) \tag{7.1.951}$$

nous avons

$$\mathcal{Z}(u[n-k])=z^{-k}X(u[n])=z^{-k}\frac{z}{z-1}=\frac{z^{1-k}}{z-1} \tag{7.1.952}$$

✍**Exemple :**

Un cas utile pour une application métier simple que nous utiliserons plus tard est :

$$\mathcal{Z}(u[n-k])=\mathcal{Z}(u[n-l-1])=\mathcal{Z}(u[n-(l+1)])=\frac{z^{2-l}}{z-1} \tag{7.1.953}$$

4. $e^{\pm \mathrm{i}n\omega_0}u[n]$, $\cos[n\omega_0]u[n]$, $\sin[n\omega_0]u[n]$

En appliquant la propriété de mise à l'échelle dans le domaine z à $\mathcal{Z}[u[n]]=1/(1-z^{-1})$, nous avons :

$$\mathcal{Z}[e^{\mathrm{i}n\omega_0}u[n]]=\frac{1}{1-(e^{\mathrm{i}\omega_0}z)^{-1}}=\frac{1}{1-e^{-\mathrm{i}\omega_0}z^{-1}} \qquad |z|>1 \tag{7.1.954}$$

et de même, nous avons :

$$\mathcal{Z}[e^{-\mathrm{i}n\omega_0}u[n]]=\frac{1}{1-e^{\mathrm{i}\omega_0}z^{-1}} \qquad |z|>1 \tag{7.1.955}$$

En cours de traduction de l'anglais

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\cos(n\omega_0)u[n]] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{in\omega_0}+e^{-in\omega_0}}{2}u[n]\right] &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{\mathrm{i}\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-\mathrm{i}\omega_0}z^{-1}}\right]\\ &= \frac{2-(e^{\mathrm{i}\omega_0}+e^{-\mathrm{i}\omega_0})z^{-1}}{2[1-(e^{\mathrm{i}\omega_0}+e^{-\mathrm{i}\omega_0})z^{-1}+z^{-2}]}\\ &= \frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}} \qquad |z|>1\end{aligned} \tag{7.1.956}$$

De même nous avons :

$$\mathcal{Z}[\sin(n\omega_0)u[n]] = \frac{\sin\left(\omega_0 z^{-1}\right)}{1-2\cos\left(\omega_0 z^{-1}\right)+z^{-2}} \qquad |z|>1 \tag{7.1.957}$$

5. $r^n\cos[n\omega_0]u[n]$, $r^n\sin[n\omega_0]u[n]$

En appliquant la propriété de mise à l'échelle du domaine z à ce qui précède, nous avons :

$$\mathcal{Z}[r^n\cos(n\omega_0)u[n]] = \frac{1-r\,\cos\left(\omega_0 z^{-1}\right)}{1-2r\,\cos\left(\omega_0 z^{-1}\right)+r^2z^{-2}} \qquad |z|>r \tag{7.1.958}$$

et :

$$\mathcal{Z}[r^n\sin(n\omega_0)u[n]] = \frac{r\,\sin\left(\omega_0 z^{-1}\right)}{1-2r\,\cos\left(\omega_0 z^{-1}\right)+r^2z^{-2}} \qquad |z|>r \tag{7.1.959}$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour résumer :

$x[n]$	$X(z)=\mathcal{Z}(x[n])$	**RDC**
$A\delta[n]$	A	Partout
$A\delta\left[n-n_0\right]$	Az^{-n_0}	Partout
$A\cdot u[n]$	$\frac{A}{1-z^{-1}}=\frac{Az}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$u[n-k]$	$\frac{z^{1-k}}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$Aa^n\cdot u[n]$	$\frac{A}{1-az^{-1}}=\frac{Az}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$nA^na^n\cdot u[n]$	$\frac{Az^{-1}}{(1-Az)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$Aa^ne^{\mathrm{i}\omega n}\cdot u[n]$	$\frac{A}{1-ae^{j\omega}z^{-1}}=\frac{Az}{z-ae^{j\omega}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$Aa^n\cos(\omega n)\cdot u[n]$	$\frac{Az(z-a\cos\omega)}{z^2-(2a\cos\omega)z+a^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$Aa^n\cos(\omega n+\alpha)\cdot u[n]$	$\frac{\frac{A}{2}e^{j\alpha}}{1-ae^{\mathrm{i}\omega}z^{-1}}+\frac{\frac{A}{2}e^{-j\alpha}}{1-ae^{-j\omega}z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$A\cos(\omega n)\cdot u[n]$	$\frac{Az(z-\cos\omega)}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$A\sin(\omega n)\cdot u[n]$	$\frac{Az\sin\omega}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$An\cdot u[n]$	$\frac{Az^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{Az}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
$An^2\cdot u[n]$	$\frac{Az^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{(1-z^{-1})^3}=\frac{Az(z+1)}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
$Ana^n\cdot u[n]$	$\frac{Aaz^{-1}}{(1-az^{-1})^2}=\frac{Aaz}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$Aa^n\cdot u[-n-1]$	$\frac{-A}{1-az^{-1}}=\frac{-Az}{z-a}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$

TAB. 7.11 – **Transformées en $\mathcal{Z}$ les plus communes**

7.1.5.3.7 Transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale

La "transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale" d'un signal arbitraire $x[n]$ est définie comme :

$$\mathcal{UZ}[x[n]] = X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} \tag{7.1.960}$$

où pour rappel $\mathcal{U}$ et $u[n]$ sont une autre notation typique de la fonction Heaviside.

Certaines des propriétés de la transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale qui diffèrent légèrement de la transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale sont répertoriées ci-dessous :

P1. Avancée temporelle :

$$\begin{aligned}\mathcal{UZ}\left[x[n+1]\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+1]z^{-n} = z\sum_{m=1}^{+\infty} x[m]z^{-m} \\ &= z\left[\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} - x[0]\right] = zX(z) - zx[0]\end{aligned} \tag{7.1.961}$$

où nous avons assumé $m = n+1$.

P2. Délai temporel :

$$\begin{aligned}\mathcal{UZ}\left[x[n-1]\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-1]z^{-n} = z^{-1}\sum_{m=-1}^{+\infty} x[m]z^{-m} \\ &= z^{-1}\left[\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} + zx[-1]\right] = z^{-1}X(z) + x[-1]\end{aligned} \tag{7.1.962}$$

où $m = n-1$. De même, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{UZ}[x[n-2]] &= \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-2]z^{-n} = z^{-2}\sum_{m=-2}^{+\infty} x[m]z^{-m} \\ &= z^{-2}\left[\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]z^{-m} + zx[-1] + z^2x[-2]\right] \\ &= z^{-2}X(z) + x[-1]z^{-1} + x[-2]\end{aligned} \tag{7.1.963}$$

avec $m = n-2$. En général, nous avons :

$$\mathcal{UZ}[x[n-n_0]] = z^{-n_0}X(z) + \sum_{k=0}^{n_0-1} z^{-k}x[k-n_0] \tag{7.1.964}$$

P3. Convolution :

$$\mathcal{UZ}[x[n]*y[n]] = X(z)Y(z) \tag{7.1.965}$$

Si $x[n]$ et $y[n]$ sont tous deux causals, c'est-à-dire $x[n] = y[n] = 0$ pour $n < 0$, les transformées en $\mathcal{Z}$ unilatérales et bilatérales sont alors identiques.

En cours de traduction de l' anglais

P4. Différence temporelle :

$$\mathcal{UZ}[x[n]-x[n-1]]=(1-z^{-1})X(z) \quad \text{ROC}=R_x \tag{7.1.966}$$

Démonstration 7.3.35.

$$\mathcal{UZ}[x[n]-x[n-1]]=X(z)-z^{-1}X(z)-x[-1]=(1-z^{-1})X(z)-x[-1] \tag{7.1.967}$$

■ Q.E.D.

P5. Accumulation temporelle :

$$\mathcal{UZ}\left[\sum_{k=0}^{n} x[k]\right]=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)=\frac{z}{z-1}X(z) \tag{7.1.968}$$

P6. Théorème de la valeur initiale :

Si $x[n]=x[n]u[n]$, i.e., $x[n]=0$ pour $n<0$, alors :

$$x[0]=\lim_{z\to+\infty} X(z) \tag{7.1.969}$$

Démonstration 7.3.36.

$$\lim_{z\to+\infty} X(z)=\lim_{z\to+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}\right]=x[0] \tag{7.1.970}$$

Tous les termes avec $n>0$ deviennent nuls lorsque $z^{-n}=1/z^n\to 0$ étant donné que $z\to+\infty$, sauf le premier qui est toujours $x[0]$.

■ Q.E.D.

P7. Théorème de la valeur finale :

Si $x[n]=x[n]u[n]$, i.e., $x[n]=0$ pour $n<0$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} x[n]=x[+\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \tag{7.1.971}$$

Démonstration 7.3.37.

$$\mathcal{Z}\left[x[n]-x[n-1]\right]=X(z)-X(z)z^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[x[n]-x[n-1]\right]z^{-n} \tag{7.1.972}$$

i.e. :

$$(1-z^{-1})X(z)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\left[x[n]-x[n-1]\right]z^{-n} \tag{7.1.973}$$

En posant $z\to 1$ ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)&=\lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}[x[n]-x[n-1]\right]\lim_{N\to+\infty}[x[N]-x[-1]]\\&=\lim_{N\to+\infty} x[N]=x[+\infty]\end{aligned} \tag{7.1.974}$$

où $x[-1]=0$.

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

À finir en fonctions des dons

En cours de traduction de l' anglais

7.1.5.4 Transformée de Hilbert

Les informations sur la transformée de Hilbert sont souvent dispersées dans la plupart des manuels sur le traitement du signal. Leurs auteurs utilisent fréquemment des formules mathématiques sans les expliquer en détail au lecteur, à l'opposé de la transformée de Fourier, de Laplace ou de la transformée en $\mathcal{Z}$. Notre objectif ici est de faire une présentation plus stricte de la transformée de Hilbert mais toujours en gardant à l'esprit l'application au traitement du signal.

Definition (#7.1.283) : La "transformée de Hilbert" d'une fonction $f(t)$ est définie pour tout t par :

$$X(t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{7.1.975}$$

quand l'intégrale existe.

Il n'est normalement pas possible de calculer la transformée de Hilbert comme une intégrale impropre ordinaire en raison du pôle en $\tau=t$. Cependant, le P devant l'intégrale désigne la "valeur principale de Cauchy" qui élargit la classe de fonction pour laquelle la définition intégrale ci-dessus existe. Elle peut être définie comme suit :

Définition (#7.1.284) : La "valeur principale de Cauchy" est une méthode pour attribuer des valeurs à certaines intégrales impropres (voir section Calcul Différentiel et Intégral page ??) qui autrement seraient indéfinies. Selon le type de singularité dans l'intégrande f, la valeur principale de Cauchy est définie selon les règles suivantes :

- Pour une singularité au nombre fini b :

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0^+}\left[\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{b+\varepsilon}^{c} f(x)\mathrm{d}x\right] \tag{7.1.976}$$

où b est un point auquel le comportement de la fonction f est tel que :

$$\begin{aligned}&\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\pm\infty \text{ pour tout } a<b \text{ et}\\&\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\mp\infty \text{ pour tout } c>b\end{aligned} \tag{7.1.977}$$

- Pour une singularité à l'infini :

$$\lim_{a\rightarrow+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \tag{7.1.978}$$

où :

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\pm\infty \qquad \text{et} \qquad \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\mp\infty \tag{7.1.979}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dans certains cas il est nécessaire de traiter simultanément des singularités à la fois en un nombre fini b et à l'infini. Cela se fait généralement par une limite de la forme :

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int\limits_{b-\frac{1}{\varepsilon}}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{b+\varepsilon}^{b+\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\mathrm{d}x\right] \tag{7.1.980}$$

La valeur principale de Cauchy peut également être définie en termes d'intégrales de contour d'une fonction à valeurs complexes $f(z)$; $z=x+\mathrm{i}y$, avec un pôle sur un contour C. Définissons $C(\varepsilon)$ comme étant le même contour où la partie à l'intérieur du disque de rayon ε autour du pôle a été supprimée. À condition que la fonction $f(z)$ soit intégrable sur $C(\varepsilon)$, quelle que soit la taille de ε, alors la valeur principale de Cauchy est la limite :

$$\mathrm{P}\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{C(\varepsilon)} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.1.981}$$

✍**Exemple :**

Considérons l'expression mal définie :

$$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{7.1.982}$$

Comme la primitive de $1/x$ est égale à $\ln(x)$ il y a évidemment un problème... L'idée est donc d'écrire à la place :

$$\lim_{a\to 0+}\left(\int\limits_{-1}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\limits_{a}^{+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \tag{7.1.983}$$

mais comme la fonction $1/x$ est impaire, nous pouvons écrire ceci :

$$\lim_{a\to 0+}\left(-\int\limits_{a}^{+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\limits_{a}^{+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)=\lim_{a\to 0+}(0) \tag{7.1.984}$$

qui est évidemment égal à 0 ! Donc 0 est la valeur principale de l'intégrale initiale.

Remarque

Malheureusement, différents auteurs utilisent des notations différentes pour la valeur principale de Cauchy d'une fonction f, entre autres :

$$P\int f(x)\mathrm{d}x, PV\int f(x)\mathrm{d}x, \text{p.v.}\int f(x)\mathrm{d}x, \text{P.V.}\int f(x)\mathrm{d}x, \mathcal{P}\int f(x)\mathrm{d}x, P_v\int f(x)\mathrm{d}x, \int_L^* f(z)\mathrm{d}z, ⨍ f(x)\mathrm{d}x,\ldots$$

À finir en fonctions des dons

En cours de traduction de l'anglais

7.1.6 Produit scalaire fonctionnel (produit interne)

Le "produit scalaire fonctionnel" (très forte analogie avec le produit scalaire vu dans la section Calcul vectoriel) peut sembler inutile lorsque examiné pour la première fois en dehors d'un contexte d'application ou seulement à des fins de généralisation, mais il a en fait de nombreuses applications pratiques. Nous en ferons une utilisation directe dans la section Physique Quantique Ondulatoire et Chimie Quantique, ou encore plus important dans le contexte des polynômes trigonométriques à travers les séries et transformées de Fourier (voir section Suites et Séries page 1707) que l'on retrouve partout dans la physique et l'informatique moderne.

Cependant, si le lecteur n'a pas parcouru la section de Calcul Vectoriel et la partie traitant du produit scalaire vectoriel, nous recommandons fortement de la lire sinon ce qui suit risque d'être un peu incompréhensible.

Nous nous mettons dans l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues dans l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec produit interne défini par (nous retrouvons ici la notation spécifique du produit scalaire dans sa version fonctionnelle - c'est à dire intégrale - comme nous l'avions évoqué lors de notre définition du produit scalaire vectoriel dans la section de Calcul vectoriel) :

$$\langle f|g\rangle=\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x \qquad (7.1.985)$$

Une famille de polynômes orthogonaux, comme nous pouvons faire l'analogie avec le produit scalaire dans la section Calcul Vectoriel, est donc une famille de polynômes $(p_0,\ldots,p_n,\ldots)$ telle que :

$$\langle p_j|p_k\rangle=0 \qquad (7.1.986)$$

si $j\neq k$. Nous rappelons qu'une famille orthogonale est une famille libre. Nous avons également vu dans la section Calcul Vectoriel que dans l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ le seul choix cohérent possible était :

$$\langle f|g\rangle=\int_a^b f(x)\cdot \overline{g(x)}\mathrm{d}x \qquad (7.1.987)$$

Nous appelons les deux relations précédentes "produit scalaire L^2".

Rappelez-vous maintenant que si nous voulons montrer que quelque chose est un produit interne, nous devons montrer trois choses pour tout $f,g\in\mathbb{R}^2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$:

1. Symétrie : $\langle f|g\rangle=\langle g|f\rangle$ (ou, si le corps commutatif est constitué de nombres complexes $\mathbb{C}^n$, $\langle f|g\rangle=\overline{\langle g|f\rangle}$, c'est-à-dire que nous avons une "symétrie conjuguée)
2. Linéarité : $\langle\alpha f|g\rangle=\alpha\langle f|g\rangle$. Notez que cela implique également $\langle f|\alpha g\rangle=\alpha\langle f|g\rangle$ ($\bar{\alpha}$ dans le cas complexe) par symétrie
3. Définit positif : $\langle f,f\rangle\geq 0$ avec égalité si et seulement si $f=0$, la fonction zéro

En cours de traduction de l'anglais

Les deux premières propriétés découlent directement de la définition d'une intégrale. Pour la troisième propriété, c'est assez évident (l'intégrale de f^2 ne peut être nulle que si f est nulle).

Remarque

Si un tel produit scalaire existe, nous pouvons alors appliquer également l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous l'appelons "inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales".

Par conséquent, nous pouvons construire la "norme L^2 :

$$||f||_{L^2} = \sqrt{\langle f|g \rangle} = \left(\int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} \mathrm{d}x \right)^{1/2} \tag{7.1.988}$$

Remarque

Nous verrons plus loin que la définition ci-dessus n'est pas la plus générale puisque notamment les physiciens et les ingénieurs disent que les fonctions sont orthogonales sous une situation plus contraignante !

Le développement qui va suivre nous rappellera la procédure de Gram-Schmidt (voir section Calcul Vectoriel page ??) pour construire une famille orthogonale.

Théorème 7.4. Étant donnés $(p_0, \ldots, p_n, \ldots)$ une famille de polynômes linéairement indépendants définis sur $[a, b]$ et V l'espace vectoriel défini par cette famille. La famille $(y_0, \ldots, y_n, \ldots)$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$y_n = p_n - \sum_{j=0}^{n-1} \langle p_n | y_j \rangle \frac{y_j}{\|y_j\|^2} \text{ pour } n > 1 \tag{7.1.989}$$

et $y_0 = p_0$ est orthogonal et génère V.

Démonstration 7.4.1. Montrons par récurrence sur n que $(y_0, y \ldots, y_n, \ldots)$ est une famille orthogonale qui génère le même espace que $(p_0, \ldots, p_n, \ldots)$. L'assertion est valable pour $n = 0$. Supposons que l'assertion soit vraie pour $n \geq 0$, pour $0 \leq k \leq n$ nous avons :

$$\begin{aligned}\langle y_{n+1} | y_k \rangle &= \left\langle p_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \langle p_{n+1} | y_j \rangle \cdot \frac{y_j}{\|y_j\|^2} \middle| y_k \right\rangle = \langle p_{n+1} | y_k \rangle - \sum_{j=0}^{n} \langle p_{n+1} | y_j \rangle \cdot \langle y_j | y_k \rangle \cdot \frac{1}{\|y_j\|^2} \\ &= \langle p_{n+1} | y_k \rangle - \langle p_{n+1} | y_k \rangle \cdot \langle y_k | y_k \rangle \cdot \frac{1}{\|y_k\|^2} = \langle p_{n+1} | y_k \rangle - \langle p_{n+1} | y_k \rangle = 0\end{aligned} \tag{7.1.990}$$

$(y_0, \ldots, y_n, \ldots)$ est donc orthogonal. Finalement, nous obtenons l'égalité :

$$y_{n+1} = p_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \langle p_{n+1} | y_j \rangle \cdot \frac{y_j}{\|y_j\|^2} \tag{7.1.991}$$

■ Q.E.D.

Voyons un premier exemple très important qui concerne le traitement du signal et les statistiques relatives à l'analyse fréquentielle :

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Considérons l'exemple très important dans la physique moderne qui est l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques notées $P_{2\pi}$ qui forment un espace vectoriel (voir section Théorie des Ensembles page 429).

Nous définissons le produit scalaire de deux fonctions de cet ensemble par :

$$\forall f, g \in P_{2\pi} \quad \langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{-\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{7.1.992}$$

Le but de cette définition est de construire une base fonctionnelle abstraite $P_{2\pi}$ sur laquelle nous pouvons décomposer n'importe quelle fonction 2π-périodique ! ! !

L'idée la plus simple est alors d'utiliser les fonctions trigonométriques sinus et cosinus :

$$\begin{gathered}\cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \ldots, \cos(nx)\\ \sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \ldots, \sin(nx)\end{gathered} \tag{7.1.993}$$

Les relations ci-dessous montrent que les bases choisies ci-dessus sont orthogonales et forment donc une famille libre, de plus c'est une famille génératrice de l'espace vectoriel $P_{2\pi}$ car comme nous l'avons vu dans notre étude des séries de Fourier (voir section Suites et Séries page 1707) nous avons les valeurs suivantes :

$$\begin{gathered}\int_{0}^{2\pi} \cos(kx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \delta_{km}\pi\\ \int_{0}^{2\pi} \sin(kx)\sin(mx)\mathrm{d}x = \delta_{km}\pi\\ \int_{0}^{2\pi} \cos(kx)\sin(mx)\mathrm{d}x = 0\end{gathered} \tag{7.1.994}$$

où δ_{km} est le symbole Kronecker (voir section Calcul Tensoriel page 2015).

C'est donc aussi une base orthogonale mais pas orthonormée. Si nous voulons normaliser les vecteurs de la base il suffit évidemment de prendre :

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(3x), \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(3x), \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\end{gathered} \tag{7.1.995}$$

Remarque

Si le lecteur se souvient que pour une variable aléatoire X définie sur $\mathbb{R}$, la moyenne (espérance) est calculée comme (voir section Statistiques page 622) :

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \tag{7.1.996}$$

Nous pouvons alors assimiler :

$$\mathrm{E}(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{7.1.997}$$

où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1 \tag{7.1.998}$$

à l'espérance de la fonction $g(x)$! Analogie parfois bien utile en pratique !

Voyons maintenant un autre exemple qui est une extension du précédent et qui a également une grande importance en traitement du signal mais aussi en physique quantique et en chimie quantique :

✍**Exemple :**

Considérons une base de fonctions complexes de la forme $re^{\mathrm{i}n\varphi}$ avec $n\in\mathbb{Z}$. Nous pouvons donc écrire :

$$\left\langle ae^{\mathrm{i}m\varphi}|be^{\mathrm{i}m\varphi}\right\rangle=\int_{-\pi}^{+\pi} ae^{\mathrm{i}m\varphi}\cdot\overline{be^{\mathrm{i}n\varphi}}\mathrm{d}\varphi=ab\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\mathrm{i}(m-n)\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{7.1.999}$$

Nous obtenons :

$$ab\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\mathrm{i}(m-n)\varphi}\mathrm{d}\varphi=\begin{cases} ab\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} 1\mathrm{d}x=ab2\pi & m=n\\ ab\left[\dfrac{-\mathrm{i}}{m-n}e^{\mathrm{i}(m-n)\varphi}\right]_{-\pi}^{+\pi}=0 & m\neq n\end{cases} \tag{7.1.1000}$$

Il est évident que si nous prenons pour base des fonctions du type :

$$\varphi_n=\frac{1}{2\pi}e^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{7.1.1001}$$

alors nous avons une base orthonormée (et pas seulement orthogonale).

En ...duction d... ...is

Voyons un autre exemple qui nous sera utile dans la section de Mécanique Ondulatoire pour notre étude de la membrane circulaire idéale d'un tambour.

✍**Exemple :**

Nous avons démontré dans la section Suites et Séries que la fonction de Bessel(voir page **??**) $J_p(x)$ satisfait l'équation différentielle suivante (équation de Bessel) :

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 J_p}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}J_p}{\mathrm{d}x}+(x^2-p^2)J_p=0 \tag{7.1.1002}$$

qui peut s'écrire :

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}J_p}{\mathrm{d}x}\right)+(x^2-p^2)J_p=0 \tag{7.1.1003}$$

La variable p n'est pas nécessairement un nombre entier comme nous le verrons dans la section Génie Mécanique avec le cas d'étude du flambage auto-induit des poutres.

Il s'avère utile de définir une nouvelle variable t par $x=at$, où a est une constante que l'on prendra pour un zéro de J_p, soit $J_p(a)=0$. Définissons :

$$u(t)=J_p(at) \tag{7.1.1004}$$

ce qui implique :

$$u(1)=0 \tag{7.1.1005}$$

et en remplaçant dans (7.1.1003) cela donne :

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+(a^2t^2-p^2)u=0 \tag{7.1.1006}$$

comme $x\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ est équivalent à $t\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Nous pouvons aussi écrire l'équation obtenue en choisissant un autre zéro, b. En définissant :

$$v(t)=J_p(bt) \tag{7.1.1007}$$

ce qui implique :

$$v(1)=0 \tag{7.1.1008}$$

nous avons alors :

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)+(b^2t^2-p^2)v=0 \tag{7.1.1009}$$

Pour obtenir la relation d'orthogonalité, nous multiplions (7.1.1006) par v et (7.1.1009) par u. En soustrayant et en divisant par t donne :

$$v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)-u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)+(a^2-b^2)tuv=0 \tag{7.1.1010}$$

Les deux premiers termes de (7.1.1010) peuvent être combinés comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(vt\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-ut\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) \tag{7.1.1011}$$

puisque les termes supplémentaires présents dans (7.1.1011), mais pas dans (7.1.1010), lorsque les dérivées sont développées, sont égaux et opposés et s'annulent donc. Nous avons donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(vt\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-ut\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)+(a^2-b^2)tuv=0 \tag{7.1.1012}$$

Nous intégrons ensuite cela sur la plage t de 0 à 1 (0 puisque la fonction de Bessel n'est pas définie pour $t<0$ et jusqu'à 1 puisque c'est l'endroit où il y a un zéro par construction pour rappel !), ce qui donne :

$$\left[vt\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-ut\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right]_0^1+(a^2-b^2)\int_0^1 tu(t)v(t)\mathrm{d}t=0 \tag{7.1.1013}$$

Le terme intégré disparaît à la limite inférieure car $t=0$, et il disparaît également à la limite supérieure car $u(1)=v(1)=0$, voir (7.1.1005) et (7.1.1007). Ainsi, si $a\neq b$, (7.1.1013) donne :

$$\int_0^1 tu(t)v(t)\mathrm{d}t=0 \tag{7.1.1014}$$

qui, en utilisant (7.1.1004) et (7.1.1007), peut s'écrire :

$$\boxed{\int_0^1 tJ_p(at)J_p(bt)\mathrm{d}t=0} \tag{7.1.1015}$$

Ceci est l'équation d'orthogonalité souhaitée ! N'oubliez pas que nous exigeons que a et b soient des zéros distincts de J_p, donc les deux fonctions de Bessel dans (7.1.1015) disparaissent à la limite supérieure.

Voyons encore un autre exemple qui nous sera utile dans la section de Physique Quantique Ondulatoire lors de notre étude de l'oscillateur harmonique (voir page **??**) :

✍**Exemple :**

Nous introduirons dans la section de Physique Quantique Ondulatoire le "polynôme de Hermite du physicien" suivant :

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2} \tag{7.1.1016}$$

Par conséquent (voir le graphique correspondant dans la section Physique Quantique Ondulatoire à la page **??**) :

$$\begin{aligned}
&H_0=1\\
&H_1=2x\\
&H_2=4x^2-2\\
&H_3=8x^3-12x\\
&H_4=16x^4-48x+12\\
&H_5=32x^5-160x^3+120x\\
&H_6=64x^6-480x^4+720x^2-120\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{7.1.1017}$$

où nous remarquons presque immédiatement que (utile pour plus loin) :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}H_n=2^n n! \tag{7.1.1018}$$

Et nous devons prouver qu'ils sont orthogonaux (ou mieux encore : orthonormés !).

Pour cela nous introduisons la fonction de poids $w(x)=e^{-x^2}$, alors :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x&=(-1)^m\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{e}^{-x^2}\right)H_n(x)\mathrm{d}x\\
&=(-1)^{m-n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^{m-n}}{\mathrm{d}x^{m-n}}\mathrm{e}^{-x^2}\right)H_n^{(n)}(x)\mathrm{d}x\\
&=(-1)^{m-n}2^n n!\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^{m-n}}{\mathrm{d}x^{m-n}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{7.1.1019}$$

Nous obtenons donc (nous utilisons l'intégrale de Gauss comme démontré dans la section Statistiques 683) :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{si } m>n: & 0\\ \text{si } m=n: & n!2^n\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=n!2^n\sqrt{\pi}\end{cases} \tag{7.1.1020}$$

Enfin, en utilisant le symbole Kronecker (voir la section Calcul Tensoriel page 2015) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm} \tag{7.1.1021}$$

Voyons maintenant un dernier exemple utile pour notre étude du rotateur non rigide en chimie quantique (solution de la partie radiale de l'équation de Schrödinger hydrogénoïde) :

✍**Exemple :**

Si $L_m(x)$ et $L_n(x)$ sont des polynômes de Laguerre (voir section Calcul Algébrique page 1385) m,n étant des entiers positifs, alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn} \tag{7.1.1022}$$

où :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases} \tag{7.1.1023}$$

La fonction génératrice des polynômes de Laguerre donne :

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \dfrac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}\\ \sum_{m=0}^{+\infty} L_m(x)s^m = \dfrac{e^{-\frac{xs}{1-s}}}{1-s}\\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} L_n(x)L_m(x)t^n s^m = \dfrac{e^{-x\{t/(1-t)+s/(1-s)\}}}{(1-t)(1-s)}\end{gathered} \tag{7.1.1024}$$

Nous multiplions maintenant les deux côtés de ce qui précède par e^{-x} et intégrons les deux côtés de 0 à $+\infty$ par rapport à x, ce qui donne :

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x\right\}t^n s^m\\ &=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\int_0^{+\infty} e^{-x\{1+t/(1-t)+s/(1-s)\}}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\left|\frac{e^{-x\{1+t/(1-t)+s/(1-s)\}}}{-\{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\}}\right|_0^{+\infty}\\ &=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}}=\frac{1}{1-st}\\ &=(1-st)^{-1}=1+st+(st)^2+(st)^3+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}s^n t^n\end{aligned} \tag{7.1.1025}$$

Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x\right\}t^n s^m=\sum_{n=0}^{+\infty} s^n t^n \tag{7.1.1026}$$

Lorsque $m\neq n$, égalisant les coefficients de $t^n s^m$ des deux côtés de la relation ci-dessus donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x=0 \tag{7.1.1027}$$

Lorsque $m=n$, égalisant les coefficients de $t^n s^n$ des deux côtés de la relation précédente donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\left[L_n(x)\right]^2\mathrm{d}x=1 \tag{7.1.1028}$$

En combinant, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{mn} \tag{7.1.1029}$$

où :

$$\delta_{mn}=\begin{cases}0 & \mathrm{m}\neq\mathrm{n}\\ 1 & \mathrm{m}=\mathrm{n}\end{cases} \tag{7.1.1030}$$

Remarque

Nous avons déjà démontré dans la section de Calcul Algébrique à la page 1381 que les polynômes de Legendre (utiles pour notre étude de la Chimie Quantique) sont orthogonaux.

De ce que nous avons vu ci-dessus nous déduisons que :

$$\langle f|g\rangle=\int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\mathrm{d}x \tag{7.1.1031}$$

est en fait généralisé par :

$$\boxed{\langle f|g\rangle=\int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}w(x)\mathrm{d}x} \tag{7.1.1032}$$

où $w(x)$ est la "fonction de poids".

Ainsi l'ingénieur, le physicien, le mathématicien doit toujours être prudent lorsqu'il voit dans

un manuel une phrase du type : «*ces fonctions sont orthogonales*». En effet l'auteur/rédacteur devrait plutôt lire : «*ces fonctions sont orthogonales avec un poids donné*».

7.1.6.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales

Donnons maintenant une démonstration détaillée de ce que nous avons mentionné plus haut : "l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales". Car ce sera un résultat critique avec une application assez importante en Statistique et en Physique Quantique.

Théorème 7.5. Soient f et g des fonctions réelles continues sur l'intervalle fermé $[a,b]$. Alors :

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t \tag{7.1.1033}$$

Démonstration 7.5.1. Pour la démonstration, nous utilisons l'astuce suivante ! Nous posons $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(xf(t)+g(t))^2 \tag{7.1.1034}$$

Par conséquent, en utilisant les tailles relatives des intégrales définies :

$$0 \leq \int_a^b (xf(t)+g(t))^2\,\mathrm{d}t \tag{7.1.1035}$$

En utilisant la propriété de combinaison linéaire des intégrales :

$$0 \leq x^2 \int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t + 2x \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t \tag{7.1.1036}$$

Posons :

$$0 \leq Ax^2 + 2Bx + C \tag{7.1.1037}$$

où :

$$A = \int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \qquad B = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \qquad C = \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t \tag{7.1.1038}$$

L'équation quadratique $Ax^2+2Bx+C$ est non négative pour tout x. Il s'ensuit (en utilisant le même raisonnement que dans l'inégalité de Cauchy) que le discriminant $(2B)^2-4AC$ de ce polynôme doit être non positif.

Dès lors :

$$B^2 \leq AC \tag{7.1.1039}$$

et d'où le résultat !

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

Cela peut être interprété comme la version fonctionnelle de l'égalité de Cauchy-Schwarz pour des vecteurs réels que nous avons prouvée dans la section Calcul Vectoriel (voir page 1803) :

$$|\vec{x} \circ \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \tag{7.1.1040}$$

Rappelons que nous avons également prouvé la version complexe de cette dernière (voir page 2367) :

$$|\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle|^2 \leq \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle\langle\vec{y}, \vec{y}\rangle \tag{7.1.1041}$$

Cela nous amène naturellement à construire l'inégalité hermitienne de Cauchy-Schwarz pour les intégrales où $f, g \in \mathbb{C}$:

$$\left|\int_a^b \langle f(t), g(t)\rangle|\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \int_a^b |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \tag{7.1.1042}$$

Aussi parfois notée :

$$\left|\int_a^b f(t)\bar{g}(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \int_a^b |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \tag{7.1.1043}$$

parmi beaucoup d'autres notations avec de petites variations...

~100 %

47 votes, 71.49%

En cours de traduction de l' anglais

7.2. Analyse complexe

Avant de commencer cette section sur l'étude du calcul différentiel et intégral dans le cas généralisé des nombres complexes, je dois préciser que j'ai utilisé de nombreuses illustrations inspirées du PDF de E. Hairer (avec sa permission). Ce texte contient également de nombreuses phrases et développements tirés, homogénéisés et simplifiés du même PDF (au risque de faire grimper aux rideaux certains lecteurs puristes...) selon les notations et objectifs pédagogiques du reste du présent ouvrage.

Le sujet de l'Analyse Complexe est l'étude des fonctions $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ et leur différentiabilité (qui est différente de celle de $\mathbb{R}^2$). Les "fonctions holomorphes" (c'est-à-dire différentiables dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$) ont comme nous le verrons plus loin des propriétés surprenantes et élégantes qui peuvent être réutilisées dans le cas particulier des fonctions dans $\mathbb{R}^2$ (rappelez-vous que $\mathbb{C}$ est une généralisation de $\mathbb{R}^2$) qui ont des applications importantes en physique avancée (nous utiliserons les résultats de cette section pour notre étude de la physique quantique et également pour certaines applications de la mécanique des fluides et également pour des modèles avancés de l'évaluation d'options financières).

Avant de commencer, expliquons d'abord l'intérêt de l'Analyse Complexe de manière simplifiée !

Nous avons étudié dans le chapitre Algèbre une partie du calcul différentiel et intégral avec quelques théorèmes utiles et importants en physique et en ingénierie. Cependant, en restant dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ la liste des théorèmes s'épuise tant bien que mal et nous finissons par trouver en pratique beaucoup d'outils pertinents qui permettent de simplifier le calcul d'intégration que nous pouvons parfois trouver dans les applications industrielles. Alors, quand nous nous souvenons que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (donc l'ensemble des nombres complexes généralise l'ensemble des nombres réels) et que nous pouvons aussi construire une correspondance $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ comme nous le verrons, alors de nouveaux théorèmes apparaissent avec des résultats très intéressants qui peuvent être exploités pour les intégrales dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$! ! C'est pour cette raison que l'ingénieur doit connaître l'analyse complexe !

Après avoir étudié ce domaine particulier des mathématiques, il est courant de dire que le chemin le plus court entre deux vérités du domaine réel nécessite souvent de passer par le domaine complexe...

En cours de traduction de l'anglais

7.2.1 Applications linéaires

Une bonne introduction à l'analyse complexe et à sa représentation consiste à examiner d'abord (à des fins pédagogiques principalement) le cas particulier des applications linéaires complexes. Voyons cela !

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble et $V \subset \mathbb{C}$ un autre ensemble. Une fonction qui associe à chaque $z \in U$ un $w \in V$ tel que :

$$w = f(z) = f(x + \mathrm{i}y) \in V \tag{7.2.1}$$

est une "fonction complexe" :

$$f : U \mapsto V \tag{7.2.2}$$

Ce qui est important est de se rappeler (voir section Nombres 241) que nous pouvons identifier :

$$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{7.2.3}$$

et :

$$\boxed{w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2} \tag{7.2.4}$$

Nous avons ainsi deux fonctions de deux variables réelles x, y :

$$u(x, y), v(x, y) \tag{7.2.5}$$

qui sont les coordonnées du point w.

En cours de traduction de l' anglais

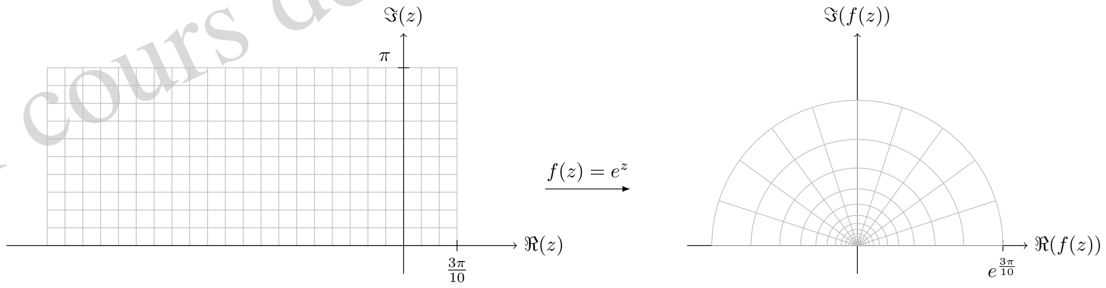


FIG. 7.68 – **Exemple d'une fonction complexe (application conforme)**

Définition (#7.2.285) : Une application est nommée "$\mathbb{C}$-linéaire" si par exemple une fonction du type :

$$w = f(z) = c \cdot z \tag{7.2.6}$$

où c est un nombre complexe fixe et z un nombre complexe arbitraire, satisfait :

$$f(cz_1 + cz_2) = cf(z_1) + cf(z_2) \tag{7.2.7}$$

C'est-à-dire que $f(z)$ doit être additif et homogène ou juste brièvement lorsque ces deux propriétés sont satisfaites nous disons que $f(z)$ est une "carte linéaire" .

Nous avons vu et démontré dans la section sur les Nombres lors de notre étude des nombres complexes, que la multiplication de deux nombres complexes pouvait être équivalente à une rotation orthogonale suivie d'une mise à l'échelle et que cette même multiplication pouvait être représentée sous forme matricielle ! Ou bien la transcription sous forme matricielle implique comme nous l'avons vu dans la section sur l'Algèbre Linéaire automatiquement la propriété de linéarité !

Ainsi le lecteur peut facilement vérifier qu'une matrice de rotation/mise à l'échelle est un exemple d'application $\mathbb{C}$-linéaire (sur demande nous pouvons détailler) que nous allons maintenant noter :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7.2.8}$$

Ce qui peut être typiquement représenté ainsi (nous voyons bien une rotation et une mise à l'échelle qui conservent les angles et les proportions) :

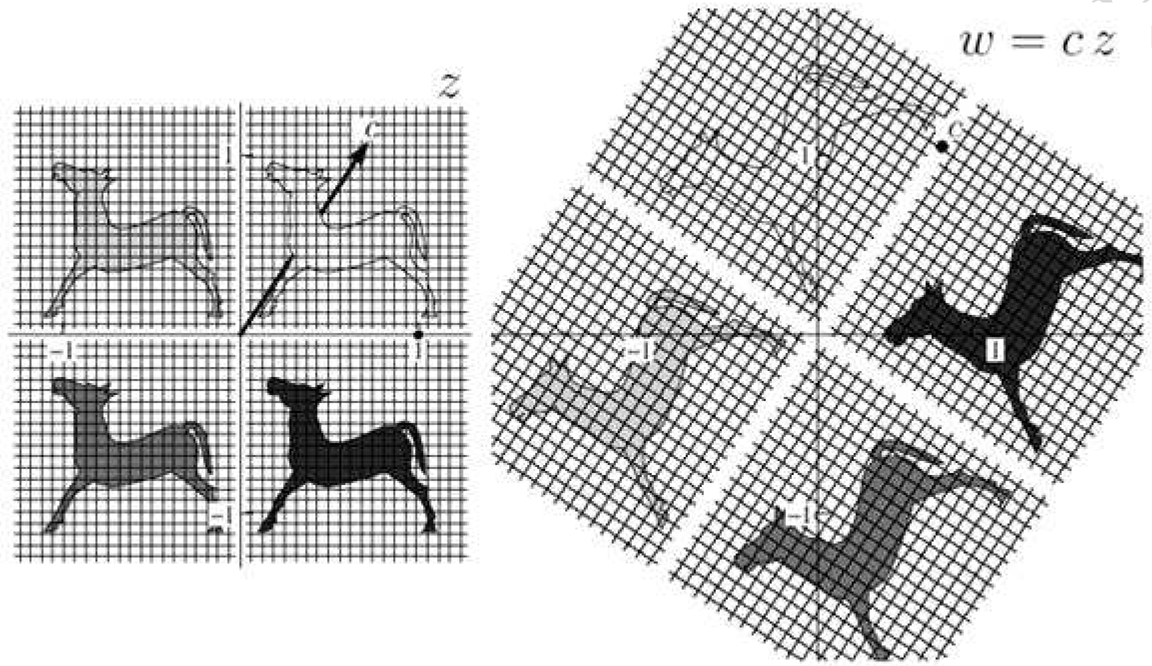


FIG. 7.69 – Exemple d'application $\mathbb{C}$-linéaire

C'est le fait que les proportions et les angles soient conservés qui rend une fonction complexe $\mathbb{C}$-linéaire. Sinon, nous dirions que la fonction est $\mathbb{R}$-linéaire.

Ainsi, une équation matricielle est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{7.2.9}$$

Voyons quelques exemples de fonctions $\mathbb{C}$ non linéaires assez remarquables.

✍**Exemples :**

E1. Considérons la fonction :

$$f(z) = z^2 \tag{7.2.10}$$

En coordonnées réelles cela donne :

$$f(z) = u + \mathrm{i}v = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & \dfrac{c_1 - b_1 x_2}{a_1} \\ x_2 & = & \dfrac{c_2 - a_2 x_1}{b_2} \end{cases} \tag{7.2.11}$$

Regardons donc ce que fait cette fonction avec les points du plan complexe qui coïncident avec les lignes verticales de ce même plan (ce qui nous amène à écrire $x = a$). Alors nous avons :

$$u = a^2 - y^2 \quad v = 2ay \tag{7.2.12}$$

et en éliminant y, nous retrouvons l'équation d'une parabole ou plutôt d'une famille de paraboles (pour plusieurs valeurs de b) ouvertes à gauche du plan complexe représenté.

Voici une représentation graphique du plan complexe sur lequel nous avons dessiné une tête de chat :

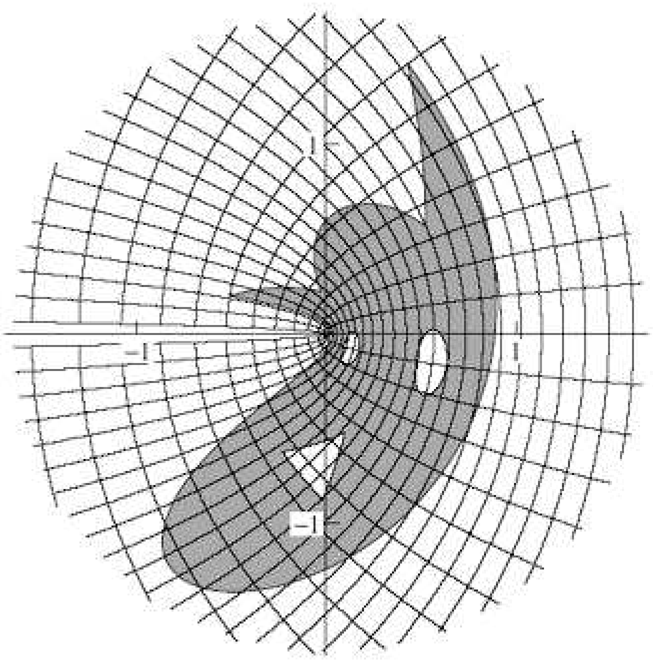


FIG. 7.70 – **Représentation complexe de l'image de la fonction exemple**

et si nous regardons le plan complexe pré-image correspondant alors nous avons deux têtes de chats qui apparaissent :

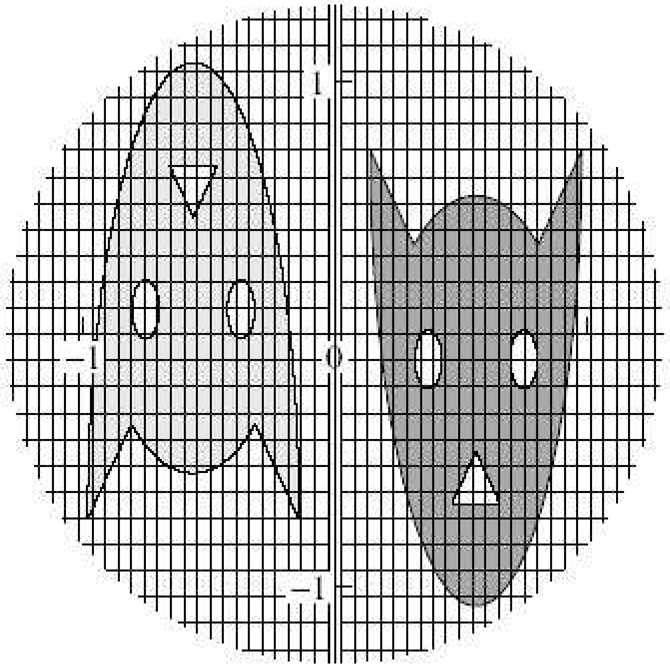


FIG. 7.71 – **Représentation pré-image de l'exemple de fonction**

L'apparence de ces deux têtes de chats est que cette fonction a 2 pré-images possibles pour chaque point image (c'est donc une fonction surjective - voir section Théorie des Ensembles page 403).

Voici un script Maple 17.00 sympa de Carl Ebehart pour vérifier cela (dommage que cela ne puisse pas être fait de manière plus simple dans Maple) :

```
> complextools[gridimage] := proc(p)
local llhc, width, height, xres, yres, clrs, V, H,
i,j,k,l,pz,x,y,z,f,g,xtcs,ytcs,opts,margs;
llhc := [-1, -1];
width := 2;height := 2;
xres := .25;yres := .25;
xtcs := 1; ytcs := 1;
clrs := [red, black];
opts := NULL;
opts := op(select(type,[args],‘=‘));
margs:= remove(type, [args] ,‘=‘) ;
if nops(margs) >1 and margs[2] <> ‘‘ then llhc := margs[2] fi:
if nops(margs) >2 and margs[3] <> ‘‘ then width := margs[3] fi:
if nops(margs) >3 and margs[4] <> ‘‘ then height := margs[4] fi:
if nops(margs) >4 and margs[5] <> ‘‘ then xres := margs[5] fi:
if nops(margs) >5 and margs[6] <> ‘‘ then yres := margs[6] fi:
if nops(margs) >6 and margs[7] <> ‘‘ then xtcs := margs[7] fi:
if nops(margs) >7 and margs[8] <> ‘‘ then ytcs := margs[8] fi:      if
nops(margs) >8 and margs[9] <> ‘‘ then clrs := margs[9] fi:
z:= x + I*y;
```

```
pz := evalc(p(z));
f := unapply(evalc( Re(pz)),x,y); g := unapply(evalc(Im(pz)),x,y);
V:= plot( [ seq([seq(op([[f(llhc[1] + i*xres
,llhc[2]+(j-1)*yres/ytcs),g(llhc[1] + i*xres
,llhc[2]+(j-1)*yres/ytcs)], [f(llhc[1] + i*xres , llhc[2]
+j*yres/ytcs),g(llhc[1] + i*xres , llhc[2] +j*yres/ytcs)]]),
j=1..ytcs*height/yres)], i = 0 .. width/xres) ],color=clrs[1]);
H := plot( [ seq([seq(op([[f(llhc[1]+(j-1)*xres/xtcs,llhc[2] +
i*yres), g(llhc[1]+(j-1)*xres/xtcs,llhc[2] + i*yres)], [f(llhc[1]
+j*xres/xtcs, llhc[2] + i*yres), g(llhc[1] +j*xres/xtcs, llhc[2]
+ i*yres)]]), j=1..xtcs*width/xres)], i = 0 .. height/yres)
],color=clrs[2]);
plots[display]([V,H],scaling=constrained,opts); end:
with(complextools);

>plots[display]([seq(plots[display]([gridimage(z->z),
gridimage(z->z^2)]),i=10)],insequence=true);
```

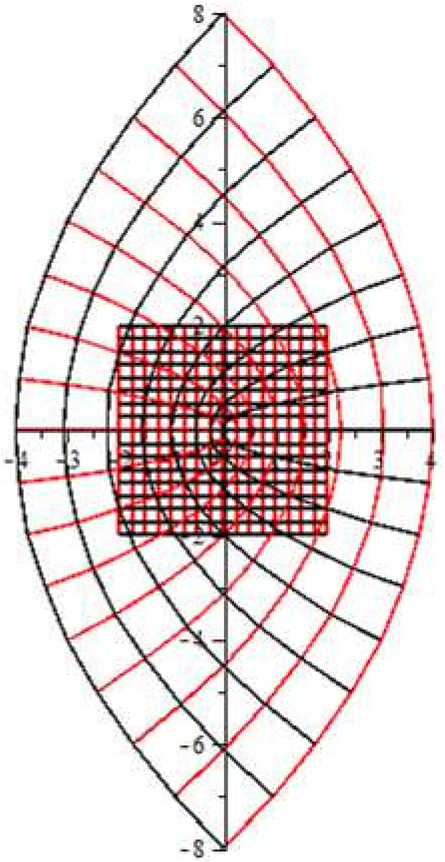


FIG. 7.72 – **Exemple d'application simple C-linéaire dans Maple 17.0**

E2. Une autre application intéressante est la "transformation de Cayley" utilisée dans

certains domaines de la physique et définie comme :

$$f(z)=\frac{z+1}{z-1} \tag{7.2.13}$$

ayant comme domaine de définition : $\mathbb{C}/\{1\}$.

Nous remarquons qu'il s'agit d'une fonction involutive puisque :

$$f(f(z))=f\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\frac{\dfrac{z+1}{z-1}+1}{\dfrac{z+1}{z-1}-1}=\frac{\dfrac{z+1+(z-1)}{z-1}}{\dfrac{z+1-(z-1)}{z-1}}=\frac{z+1+(z-1)}{z+1-(z-1)}=\frac{2z}{2}=z \tag{7.2.14}$$

et comme nous l'avons prouvé dans la section de Théorie de la Démonstration (voir page 179) que toute fonction d'involution est à la fois injective et surjective, alors la transformée de Cayley est une fonction bijective.

Cette fonction transforme l'axe imaginaire $\mathrm{i}y$ en cercle unité (et vice versa car involutif). Voyons cela :

$$\begin{aligned}f(z)=f(\mathrm{i}y)&=\frac{\mathrm{i}y+1}{\mathrm{i}y-1}=\frac{\mathrm{i}y+1}{\mathrm{i}y-1}\frac{-\mathrm{i}y-1}{-\mathrm{i}y-1}=\frac{y^2-\mathrm{i}y-\mathrm{i}y-1}{y^2-\mathrm{i}y+\mathrm{i}y+1}=\frac{y^2-2\mathrm{i}y-1}{1+y^2}\\&=\frac{y^2-1}{1+y^2}-\mathrm{i}\frac{2y}{1+y^2}=u+\mathrm{i}v\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

où :

$$u=\frac{y^2-1}{1+y^2}\qquad v=-\frac{2y}{1+y^2} \tag{7.2.16}$$

satisfait :

$$u^2+v^2=\frac{(y^2-1)^2+(-2y)^2}{(1+y^2)^2}=\frac{(y^4-2y^2+1)+(4y^2)}{1+2y^2+y^4}=1 \tag{7.2.17}$$

C'est-à-dire :

$$u^2+v^2=1 \tag{7.2.18}$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle comme prouvé dans la section de Géométrie Analytique.

E3. Comme autre exemple de fonction, considérons la "transformation Joukovski" définie par :

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{7.2.19}$$

Si le domaine de définition est construit en coordonnées polaires, regardez comment un cercle ou une ellipse se transforme avec cette fonction :

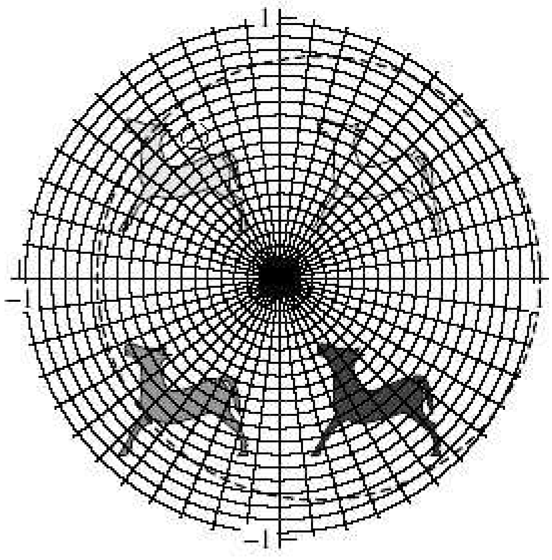


FIG. 7.73 – **Transformation en coordonnées polaires d'une ellipse avec la fonction exemple**

Le plan image sera alors :

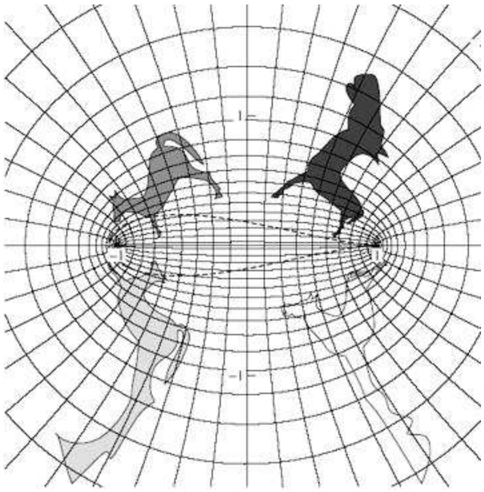


FIG. 7.74 – **Résultat de la transformation de Joukovski en coordonnées polaires**

Cela transforme ainsi les cercles respectivement centrés à 0 et les rayons passant par 0 en une famille d'ellipses cofocales et d'hyperboles. Pour prouver ce fait, nous utilisons les coordonnées polaires complexes (formule d'Euler) vues dans la section sur les Nombres (voir page 249) :

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\phi)) \tag{7.2.20}$$

et :

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{r(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\phi))} = r^{-1}\frac{1}{\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\phi)}\frac{\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\phi)}{\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\phi)} \\ &= r^{-1}\frac{\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\phi)}{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\phi)} = r^{-1}(\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\phi)) \end{aligned} \tag{7.2.21}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(r(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\phi))+\frac{1}{r}(\cos(\varphi)-\mathrm{i}\sin(\phi))\right)\\ &= \left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2r}\right)\cos(\varphi)+\mathrm{i}\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2r}\right)\sin(\phi) \end{aligned} \tag{7.2.22}$$

ainsi :

$$u=\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2r}\right)\cos(\varphi) \qquad v=\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2r}\right)\sin(\phi) \tag{7.2.23}$$

et nous voyons de suite que (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\cos^2(\varphi)+\sin^2(\phi)=\frac{u^2}{\left(\dfrac{r}{2}+\dfrac{1}{2r}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{2r}\right)^2}=1 \tag{7.2.24}$$

a la forme de l'équation d'une ellipse (voir section Géométrie Analytique page 2748) et nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{\cos^2(\varphi)}-\frac{v^2}{\sin^2(\phi)} &= \left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2r}\right)^2-\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2r}\right)^2\\ &= \left(\frac{r^2}{4}+2\frac{r}{2}\frac{1}{2r}+\frac{1}{4r^2}\right)-\left(\frac{r^2}{4}-2\frac{r}{2}\frac{1}{2r}+\frac{1}{4r^2}\right)\\ &= 2\frac{r}{2}\frac{1}{2r}+2\frac{r}{2}\frac{1}{2r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \end{aligned} \tag{7.2.25}$$

qui est l'équation d'une hyperbole (voir section Géométrie Analytique page 2748).

Cette fonction est utile dans le cas où nous plaçons intelligemment un cercle passant par le point $z=1$ (comme dans le cas de la première figure), le plan représenté en coordonnées polaires avec une ligne pointillée pourrait ressembler à une aile d'avion. Ceci permettait autrefois en aérodynamique (mais la technique est obsolète aujourd'hui) de transposer l'étude d'un champ vectoriel d'un profil d'aile d'avion à l'étude d'un profil de cercle et de faire ensuite la transformation de Joukovski.

En effet, voyons une partie de cela encore une fois avec Maple 4.00 :

```
> assume(x,real,y,real);
> z:=x+I*y;
> F:=1/2*(z+1/z);
> u:=Re(F);
> u:=evalc(u);
> v:=Im(F); > v:=evalc(v);
> with(plots):with(plottools):
> p1:=disk([0,0],1,color=black):
> p2:=implicitplot(seq(v=b8,b=-10..10),x=-4..4,y=-2..2,color=black):
> display([p2,p1],scaling=constrained);
```

Nous obtenons ainsi :

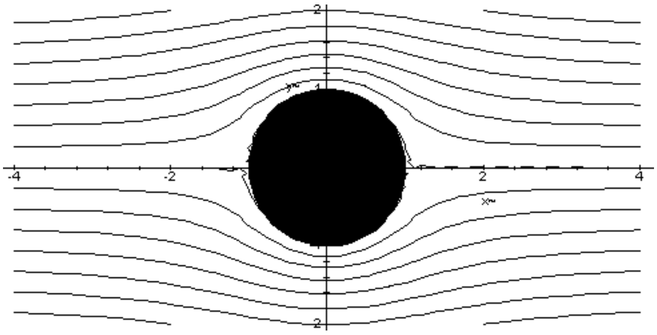


FIG. 7.75 – Exemple d'application important de la fonction Joukovski

Voyons un dernier exemple qui montre qu'un dipôle électrique avec son champ électrique et ses lignes de potentiel (voir section Électrostatique page ??) peut être vu comme l'émergence de la fonction $\mathbb{C}$-linéaire $1/z$:

✍**Exemples :**

E4. Toujours avec Maple 4.00b, nous écrivons :

```
>assume(x,real,y,real);
> z:=x+I*y;
> F:=1/z;
> u:=Re(F);u:=evalc(u);
> v:=Im(F);v:=evalc(v);
> with(plots):
> p1:=implicitplot(seq(u=a,a=-5..5),x=-1..1,y=-1..1,numpoints=1000):
> p2:=implicitplot(seq(v=b,b=-5..5),x=-1..1,y=-1..1,numpoints=1000,
color=green):
> display([p1,p2],scaling=constrained);
```

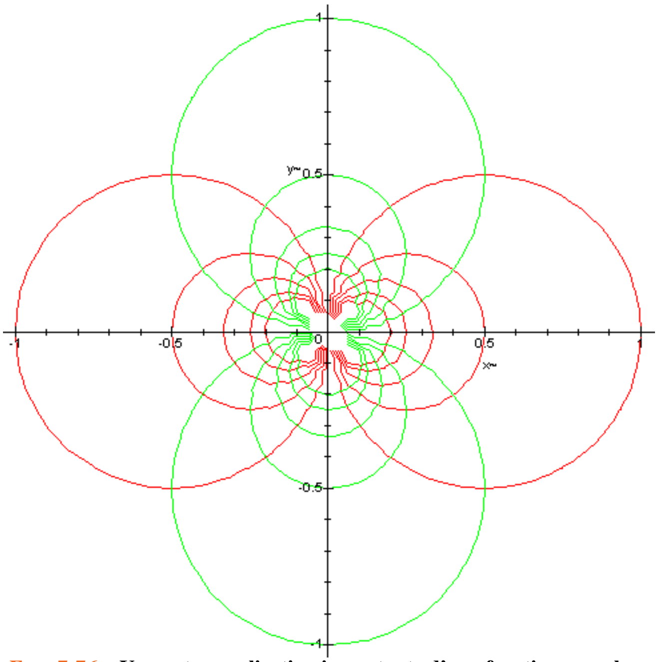


FIG. 7.76 – **Une autre application importante d'une fonction complexe**

7.2.2 Fonctions holomorphes

La définition de la dérivée par rapport à une variable complexe est naturellement formellement identique à la dérivée par rapport à une variable réelle.

Nous avons alors, si la fonction $f(z)$ est différentiable en z_0 :

$$\frac{\mathrm{d}f_h}{\mathrm{d}z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{(z_0+h)-z_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z) \qquad (7.2.26)$$

et nous disons (abusivement dans ce livre) que la fonction est "holomorphique" (tandis que dans $\mathbb{R}$ nous disons "différentiable") ou "analytique" dans son domaine ou dans un sous-ensemble de celui-ci si elle est différenciable en tout point.

En d'autres termes, une fonction holomorphe est une fonction à valeurs complexes d'une ou plusieurs variables complexes qui sont complexes et différenciables au voisinage de chaque point de son domaine. L'existence d'une dérivée complexe dans un voisinage est une condition très forte, car elle implique que toute fonction holomorphe est en réalité infiniment différentiable et égale à sa propre série de Taylor.

Remarques

R1. Une fonction complexe est dérivée comme une fonction réelle, il suffit de mettre z comme étant x... à la condition que ce que nous verrons dans la suite soit respecté !

R2. En fait si la fonction est holomorphe dans un sous-ensemble du plan complexe, nous verrons un peu plus loin dans notre étude de la convergence des séries entières qu'il s'agit alors toujours d'un sous-ensemble ouvert.

En cours de traduction de l'a is

De manière équivalente, nous disons que la fonction f est $\mathbb{C}$-différentiable si la limite suivante existe dans $\mathbb{C}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z_0) \tag{7.2.27}$$

Présentons et prouvons maintenant un théorème central pour l'analyse complexe nommé "théorème de Cauchy-Riemann" !

Si la fonction :

$$f(z)=f(x,y)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{7.2.28}$$

est $\mathbb{C}$-différentiable sur $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, alors nous avons :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}} \tag{7.2.29}$$

ce qui est un peu l'équivalent du théorème de Schwarz (limité à $\mathbb{R}$) prouvé dans la section Calcul Différentiel et Intégral (voir page 1453). Les deux relations ci-dessus sont appelées "conditions de Cauchy". Ce sont donc les deux conditions que doit vérifier une fonction complexe pour être différentiable sur z_0. Ainsi, il est possible d'utiliser ces relations pour examiner les points où la fonction n'est pas analytique.

Théorème 7.6. Si ces conditions sont satisfaites (ce que nous allons prouver juste ci-dessous), alors nous en déduisons que u et v doivent tous deux être des fonctions harmoniques de x et y.

Démonstration 7.6.1. Comme :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z_0) \tag{7.2.30}$$

alors en choisissant :

$$z=z_0+x \tag{7.2.31}$$

avec $x\in\mathbb{R}$, nous obtenons :

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(x_0+x,y_0)-f(x_0,y_0)}{z_0+x-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(x_0+x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x} \tag{7.2.32}$$

et quand x s'approche d'une petite valeur $\mathrm{d}x$, nous avons (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1432) :

$$\begin{aligned}f'(z_0)=\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{f(x_0+\mathrm{d}x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f(z_0)}{\partial x}=\frac{\partial(u(x_0,y_0)+\mathrm{i}v(x_0,y_0))}{\partial x}\\ =\frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)\end{aligned} \tag{7.2.33}$$

en choisissant :

$$z=z_0+\mathrm{i}y \tag{7.2.34}$$

En cours de traduction de l'anglais

avec $y \in \mathbb{R}$, nous obtenons :

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(x_0,y_0+\mathrm{i}y)-f(x_0,y_0)}{z_0+\mathrm{i}y-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(x_0,y_0+\mathrm{i}y)-f(x_0,y_0)}{\mathrm{i}y} \tag{7.2.35}$$

et lorsque y tend vers une petite valeur, nous avons (voir section Calcul Différentiel et Intégral 1432) :

$$\begin{aligned} f'(z_0)&=\lim_{\mathrm{d}y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\mathrm{i}\mathrm{d}y)-f(x_0,y_0)}{\mathrm{i}\mathrm{d}y}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}=-\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\\ &=-\mathrm{i}\frac{\partial(u(x_0,y_0)+\mathrm{i}v(x_0,y_0))}{\partial y}=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\right)\\ &=\frac{\partial}{\partial y}v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0)\end{aligned} \tag{7.2.36}$$

Ainsi, nous avons maintenant :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y&=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)\\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x&=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0)\end{aligned} \tag{7.2.37}$$

Mais rappelez-vous que nous avons prouvé dans la section de Calcul Différentiel et Intégral le théorème suivant (voir page 1453) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \tag{7.2.38}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)\right)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0)\right)\end{aligned} \tag{7.2.39}$$

Ainsi, en utilisant donc directement le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0)\right) \tag{7.2.40}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0)\right)=0 \tag{7.2.41}$$

Une solution triviale est évidemment d'avoir :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)=0)\\ &\frac{\partial}{\partial y}v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0)=0\end{aligned} \tag{7.2.42}$$

Nous sommes donc autorisés à écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}v(x_0,y_0)-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0)=0 \tag{7.2.43}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, nous terminons la démonstration !

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Donc pour que f soit différentiable dans le domaine complexe $\mathbb{C}$ (holomorphe) en un point, il suffit qu'il soit différentiable en fonction de deux variables réelles ($\mathbb{R}^2$-différentiable sur (x_0, y_0)) et que ses dérivées premières partielles satisfassent à ce stade les équations de Cauchy-Riemann.

Mais, pour qu'elle soit $\mathbb{C}$-différentiable, il faut que les équations de Cauchy-Riemann soient valides en tous points du plan complexe (nous parlons parfois de "fonctions complètes") et pas seulement dans un sous-domaine de celui-ci ! Sinon, elle contient donc des "singularités" et nous parlons alors de "fonction méromorphe" (qui est donc une fonction holomorphe sauf sur les points de singularités).

La fonction Gamma étudiée dans la section de Calcul Différentiel et Intégral (voir page 1552) avec son tracé effectué dans Maple 4.00b (code fourni !) est une fonction méromorphe bien connue.

Remarque

Géométriquement, nous prouverons plus tard qu'une fonction holomorphe a une interprétation possible dans le sens où elle est une transformation conforme (conservation des angles).

Notez donc que si $f(z)$ est $\mathbb{C}$-différentiable, il peut être développé comme une série de Taylor (voir section Suites et Séries page 1677) :

$$f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f(z_0)}{\mathrm{d}z^n} (z - z_0)^n \tag{7.2.44}$$

Notez également une chose importante. Si nous réécrivons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.2.45}$$

comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{7.2.46}$$

Alors nous disons que f est "irrotational" (voir section Calcul Vectoriel page 1865) puisque la première relation peut être vue comme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{rot}(\vec{f})_z = 0 \tag{7.2.47}$$

ce qui est une analogie importante ! Enfin, la deuxième équation :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7.2.48}$$

En cours de traduction anglais

disons aussi par analogie (mais cela s'arrête à une simple analogie !) que la fonction bivariée f est non divergente (voir section Calcul Vectoriel 1855) ce qui est une bonne manière mnémotechnique de se souvenir de cette équation.

Mettons aussi quelque chose d'autre en évidence. Si nous prenons les deux équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned} \tag{7.2.49}$$

et que nous les dérivons encore une fois, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\end{aligned} \tag{7.2.50}$$

et que nous additionnons ces deux relations, nous obtenons alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{7.2.51}$$

C'est la même chose avec v. Alors nous avons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{7.2.52}$$

Et nous connaissons très bien cette forme d'équations (équation de Maxwell-Poisson dans la section Electrodynamique et équation de Newton-Poisson dans la section Astronomie...). Il s'agit d'une équation d'onde également nommée "équation de Laplace" (rien à voir avec celle du même nom vue dans notre étude de l'hydrostatique !) et donnée par le Laplacien scalaire (voir section Calcul Vectoriel page 1876) :

$$\Delta\cdot u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \Delta\cdot v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{7.2.53}$$

Il est alors de tradition de dire que u est harmonique et nous pouvons arriver bien évidemment au même résultat avec v ! Bon évidemment... nous le savions, puisque nous avons déjà étudié dans le chapitre sur les Nombres que les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe pouvaient être mises sous forme trigonométrique.

Grâce à cette découverte, Riemann a ouvert l'application des fonctions holomorphes à de nombreux problèmes de la physique, puisque ces dernières équations sont satisfaites par le potentiel gravitationnel (équation de Newton-Poisson dans la section d'Astronomie à la page page **??**), par les champs électriques et magnétiques (équation de Maxwell-Poisson dans la section d'Électrodynamique à la page **??**), par la chaleur en équilibre (pas encore d'exemples dans ce livre) et par les mouvements sans rotationnel de certains fluides (pas encore d'exemples non plus dans ce livre pour l'instant).

En cours de traduction de l' anglais

Exemple :

Le potentiel d'un dipôle peut être décrit par la fonction holomorphe :

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \qquad (7.2.54)$$

La figure ci-dessous :

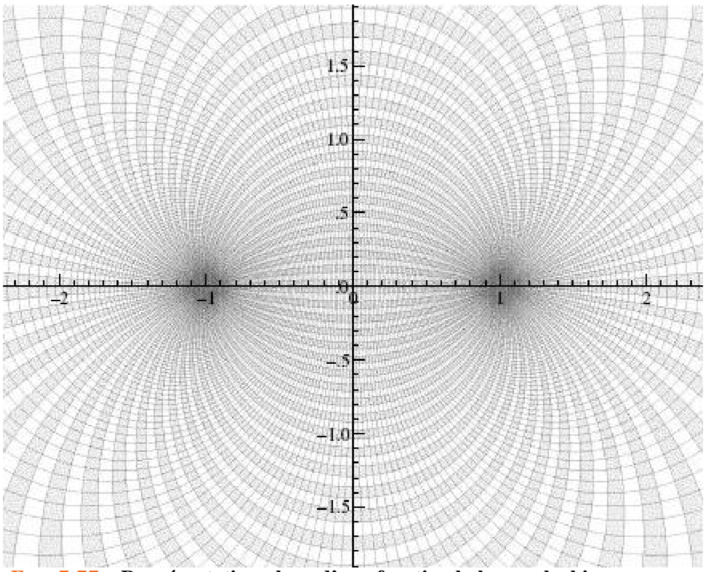


FIG. 7.77 – Représentation plane d'une fonction holomorphe bien connue...

montre les courbes de niveau des fonctions harmoniques $u(x, y)$ et $v(x, y)$ données comme parties réelle et complexe de la fonction $f(z)$ de cet exemple.

En cours d'... [anglais]

7.2.2.1 Orthogonalité des iso-courbes réelles et imaginaires

Nous allons maintenant prouver une propriété conviviale dont les fonctions satisfont aux conditions de Cauchy (c'est-à-dire qui sont des fonctions analytiques !). En effet, rappelons que nous avons déjà vu plus haut la fonction :

$$f(z) = z^2 \qquad (7.2.55)$$

ce qui a donné la figure suivants :

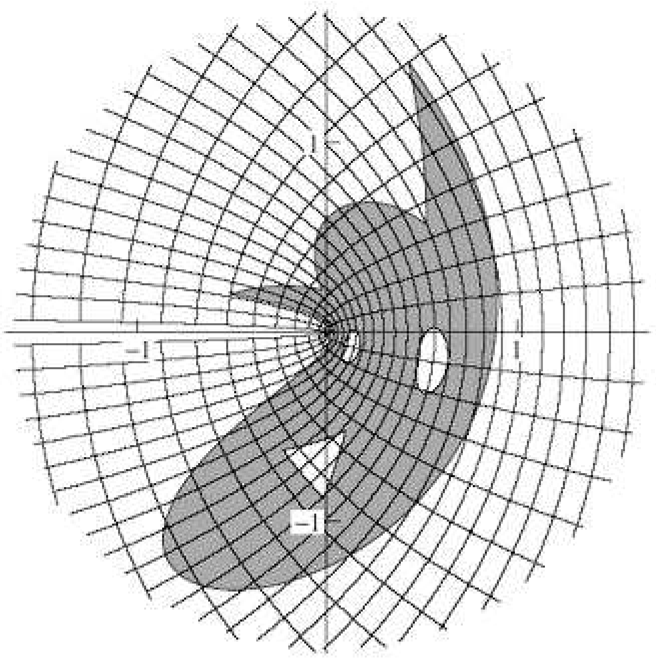


FIG. 7.78 – Rappel de la représentation plane d'une fonction complexe vue précédemment

En cours de ... l' anglais

Théorème 7.7. Les fonctions satisfaisant les conditions de Cauchy ont la propriété géométrique simple suivante : les droites dont la partie réelle de la fonction est constante $\mathcal{R}(f(z)) = c^{te}$ et les droites dont la partie imaginaire est constante $\mathcal{I}(f(z)) = c^{te}$ sont orthogonaux les uns aux autres (pensez à la forme trigonométrique des nombres complexes cela peut aider à mieux visualiser l'idée sous-jacent !).

Autrement dit, les fonctions complexes analytiques sont des fonctions de transformation d'une zone du plan en un nouveau plan où les angles sont conservés. Nous disons alors que la fonction est une "transformation complète".

Démonstration 7.7.1. Pour la démonstration, rappelez-vous que nous avons prouvé dans la section de Calcul Vectoriel que le gradient d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ est donné par :

$$\vec{\nabla}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad (7.2.56)$$

et dans le cadre de notre étude des isolignes dans la section de Géométrie Différentielle que le vecteur tangent aux isolignes de la fonction f sera toujours parallèle au vecteur du plan :

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad (7.2.57)$$

et que ces deux derniers vecteurs sont perpendiculaires, tels que :

$$\vec{\nabla}(f) \circ \vec{t} = 0 \tag{7.2.58}$$

Maintenant assimilons le vecteur tangent (parallèle) $\vec{t_u}$ aux isolignes réelles :

$$\Re(f(z)) = u(x,y) = c^{te} \tag{7.2.59}$$

avec :

$$\vec{t_u} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{7.2.60}$$

et le vecteur normal aux isolignes imaginaires :

$$\Im(f(z)) = v(x,y) = c^{te} \tag{7.2.61}$$

avec le gradient v de composantes :

$$\vec{\nabla}(v) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{7.2.62}$$

En utilisant les conditions de Cauchy démontrées ci-dessus, nous avons pour cette dernière relation :

$$\vec{\nabla}(v) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{7.2.63}$$

En comparant :

$$\vec{t_u} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}(v) = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{7.2.64}$$

nous voyons donc que $\vec{t_u}$ et $\vec{\nabla}(v)$ sont parallèles (collinéaires). Et comme $\vec{t_u}$ est colinéaire aux isolignes réelles et que $\vec{\nabla}(v)$ est perpendiculaire aux isolignes imaginaires nous avons terminé notre démonstration.

■ Q.E.D.

Le lecteur pourra prendre comme exemple la fonction :

$$f(z) = z^2 \tag{7.2.65}$$

détaillée mathématiquement et schématiquement plus haut ! Mais pour changer un peu, prenons un exemple qui nous accompagnera tout au long du reste de ce chapitre et qui est la fonction holomorphe suivante :

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \tag{7.2.66}$$

Ce qui nous donne avec Maple 4.00b :

En cours de traduction de l' anglais

```
 >assume(x,real,y,real);
> z:=1/(1+(x+I*y)^2);
> F:=1/z;
> u:=Re(F);
> u:=evalc(u);
> v:=Im(F);
> v:=evalc(v);
> with(plots):
> p1:=implicitplot(seq(u=a,a=-5..5),x=-5..5,y=-5..5,numpoints=1000):
> p2:=implicitplot(seq(v=b,b=-5..5),x=-5..5,y=-5..5,numpoints=1000,color=green):
> display([p1,p2]);
```

ce qui donne :

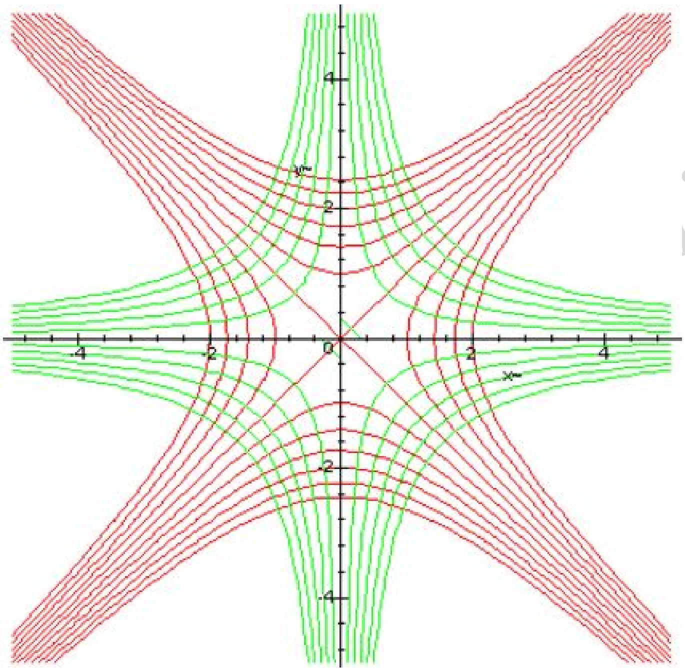


FIG. 7.79 – **Représentation d'une fonction holomorphe importante avec ses isolignes**

En cours d'anglais

7.2.3 Logarithme Complexe

Nous devons trouver pour toutes les fonctions construites dans $\mathbb{R}$ leur équivalent dans $\mathbb{C}$ tout en sachant que si nous réduisons le cas de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ nous devons retomber sur nos pattes !

Pour cela, commençons par la fonction la plus classique et académique qui est le logarithme et aussi la seule fonction pour laquelle nous aurons besoin de la version complexe dans d'autres sections de ce livre. Comme toujours, nous nous concentrerons uniquement sur les propriétés dont nous aurons besoin plus tard pour des applications pratiques et rien de plus !

De la même manière que nous avions construit le logarithme comme étant par définition (!) la fonction réciproque de l'exponentielle naturelle e^x dans la section d'Analyse Fonctionnelle,

nous partons d'abord de :

$$f(z)=e^z \tag{7.2.67}$$

où z est donc un nombre complexe et nous allons définir le logarithme complexe qui doit se réduire au logarithme naturel si z n'a pas de partie imaginaire !

Donc par définition le logarithme complexe sera :

$$\boxed{w=e^z \Leftrightarrow z=\text{Log}(w)} \tag{7.2.68}$$

et sur l'ensemble de ce site, le logarithme complexe sera différencié du logarithme réel par un L majuscule !

Notons z et w sous la forme d'Euler vue dans la section sur les Nombres :

$$\begin{aligned}w&=x+\text{i}y=r(\cos(\theta)+\text{i}\sin(\theta))=|w|e^{\text{iarg}(w)}=|w|(\cos(\arg(w))+\sin(\arg(w)))\\ z&=u+\text{i}v\end{aligned} \tag{7.2.69}$$

Nous avons alors :

$$w=e^z \Rightarrow r(\cos(\theta)+\text{i}\sin(\theta))=e^{u+\text{i}v}=e^u e^{\text{i}v}=e^u \tag{7.2.70}$$

Par correspondance, nous trouvons immédiatement :

$$r=|w|=e^u \Leftrightarrow u=\ln(r) \quad \text{et} \quad v=\arg(w)=\theta+2\pi k \tag{7.2.71}$$

avec $k\in\mathbb{Z}$. Il vient alors :

$$z=u+\text{i}v=\ln(r)+\text{iarg}(w)=\ln(r)+\text{i}(\theta+2\pi k)=\text{Log}(w) \tag{7.2.72}$$

Donc :

$$\boxed{z=\text{Log}(w)=\ln(r)+\text{i}(\theta+2\pi k)} \tag{7.2.73}$$

ou autrement écrit :

$$\boxed{\text{Log}(w)=\ln(|w|)+\text{iarg}(w)} \tag{7.2.74}$$

Donc si w n'a pas de partie imaginaire, nous retombons bien sur nos pattes puisque $\arg(w)$ devient nul.

Une grosse différence est mise en avant donc entre le logarithme des nombres complexes et réels : ces premiers peuvent prendre plusieurs valeurs à cause de l'argument ! !

Nous vérifions bien par ailleurs maintenant que :

$$e^{\text{Log}(w)}=e^{\ln|w|+\text{i}\arg(w)}=e^{\ln|w|}e^{\text{i}\arg(w)}=|w|e^{\text{i}\arg(w)}=w \tag{7.2.75}$$

Pour qu'une fonction ait un inverse, elle doit mapper des valeurs distinctes à des valeurs distinctes, c'est-à-dire être injective. Mais la fonction exponentielle complexe n'est pas injective, car $e^{z+2\pi\text{i}}=e^z$ pour tout z, puisque l'ajout de iθ à w a pour effet de faire tourner e^z dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de θ radians. Ainsi, tous les points de la forme $z+\text{i}k\theta$ sont tous mappés au même nombre par la fonction exponentielle. La fonction exponentielle n'a donc pas de fonction inverse au sens standard.

Il y a deux solutions pour ce problème :

En cours de traduction de l' anglais

1. La première consiste à restreindre le domaine de la fonction exponentielle à une région qui ne contient pas deux nombres qui diffèrent par un multiple entier de $2\pi i$: cela conduit naturellement à la définition de "branches" de $\text{Log}(w)$, qui sont certaines fonctions qui distinguent un logarithme de chaque nombre dans leurs domaines.

2. Une autre façon de résoudre l'indétermination est de considérer le logarithme comme une fonction dont le domaine n'est pas une région du plan complexe, mais une "surface de Riemann" qui couvre le plan complexe perforé d'une manière infinie-à-1.

Les branches ont l'avantage de pouvoir être évaluées sur des nombres complexes. D'un autre côté, la fonction sur la surface de Riemann est élégante dans la mesure où elle regroupe toutes les branches de $\text{Log}(w)$ et ne nécessite pas de choix arbitraire dans le cadre de sa définition.

Nous pouvons facilement le constater avec Maple 4.00b :

```
>plot3d([r*cos(f),r*sin(f),f],r=0..1,f=-2*Pi..2*Pi,axes=boxed,style=patch,
shading=ZHUE);
```

ce qui donne :

En cours d ... l' anglais

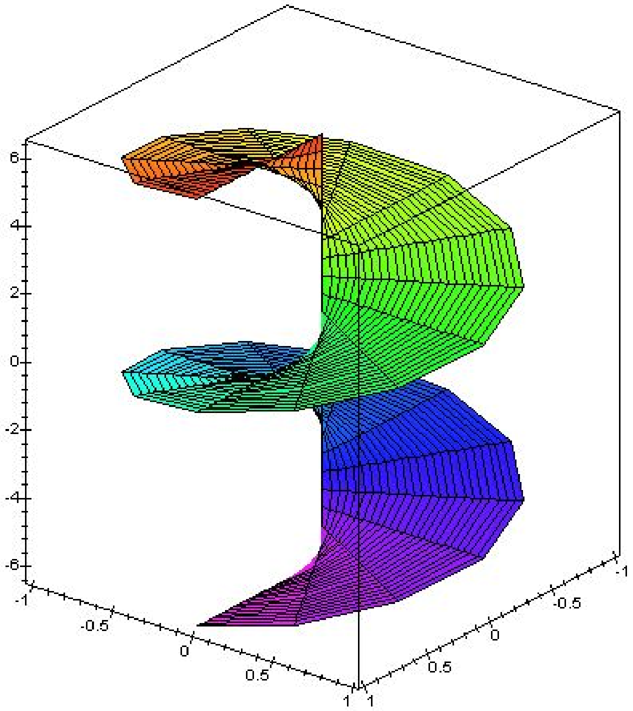


FIG. 7.80 – Tracé du logarithme complexe dans Maple 4.00b

Ou en haute résolution grâce à TikZ :

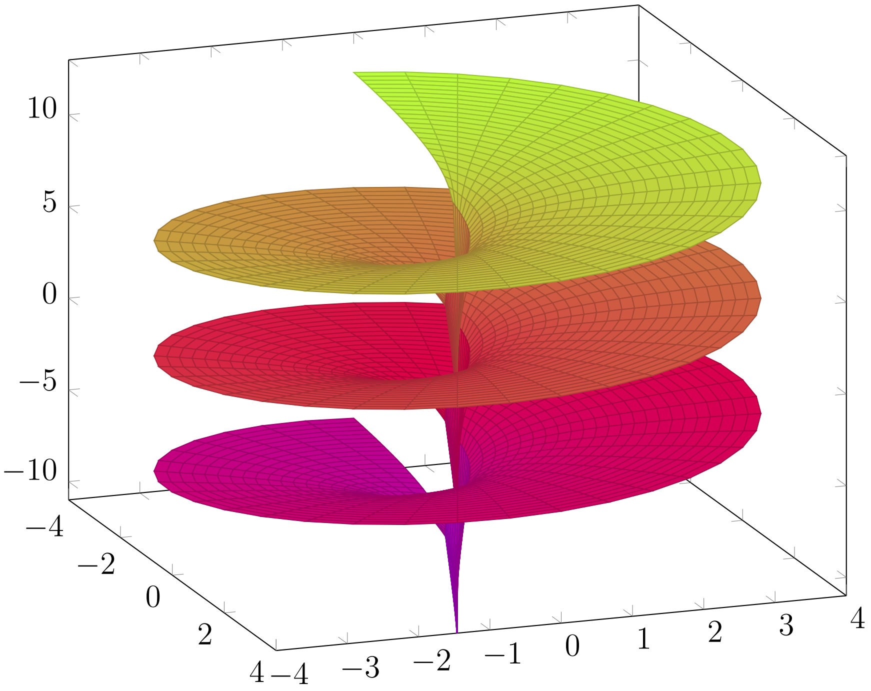


FIG. 7.81 – **Logarithme complexe avec TikZ**

Pour cette raison, nous ne pouvons pas toujours appliquer Log aux deux côtés d'une identité $e^{z_1}=e^{z_2}$ pour en déduire $z_1=z_2$. De plus, l'identité $\text{Log}(z_1z_2)=\text{Log}(z_1)+\text{Log}(z_2)$ peut échouer : les deux côtés peuvent différer d'un multiple entier de $2\pi\text{i}$.

Pour chaque nombre complexe non nul $w=x+\text{i}y$, la valeur principale $\text{Log}(w)$ est le logarithme dont la partie imaginaire se situe dans l'intervalle $[-\pi,+\pi]$. L'expression $\text{Log}(0)$ n'est pas définie car il n'y a pas de nombre complexe z satisfaisant $e^z=0$.

Alors, la valeur principale du logarithme complexe peut être définie par (voir section Trigonométrie page 2486) :

$$\text{Log}(w)=\ln(|w|)+\text{i}\arg(w)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})+\text{i}\arctan2(y,x) \tag{7.2.76}$$

On voyons aussi évidemment que la fonction $\text{Log}(w)$ est discontinue à chaque nombre réel négatif (nous pouvons le voir sur la figure ci-dessus), mais continue partout ailleurs dans $\mathbb{C}^*$.

Les surfaces de Riemann peuvent être considérées comme des versions déformées du plan complexe : localement près de chaque point, elles ressemblent à des parcelles du plan complexe, mais la topologie globale peut être très différente. Par exemple, elles peuvent ressembler à une sphère, à un tore ou à quelques feuilles collées ensemble.

Le point principal des surfaces de Riemann est que des fonctions holomorphes peuvent être définies entre elles. Les surfaces de Riemann sont aujourd'hui considérées comme le cadre naturel pour étudier le comportement global de ces fonctions, en particulier les fonctions à valeurs multiples telles que la racine carrée et d'autres fonctions algébriques, ou le logarithme.

Fondamentalement, une surface de Riemann n'est qu'une surface, du moins tant que la forme est concernée. Toutes les surfaces normales auxquelles vous pouvez penser (par exemple, plan, sphère, tore, ...) sont toutes des surfaces de Riemann. Nous disons que c'est une "surface de

En cours de traduction de l'anglais

Riemann", cela est dû au contexte, c'est que nous définissons la surface en utilisant des fonctions complexes et pour l'utiliser dans l'étude de fonctions complexes.

7.2.4 Intégration de Fonctions Complexes

Nous venons de voir précédemment comment vérifier si une fonction complexe $f(z)$ était dérivable (elle doit au moins respecter les équations de Cauchy-Riemann) en tout point.

Maintenant voyons le cas contraire qui est... l'intégration !

Nous avons bien évidemment en reprenant les notations vues dans la section de Calcul Différentiel et Intégral :

$$F(z)=\int f(z)\mathrm{d}z \tag{7.2.77}$$

soit sous forme explicite :

$$\begin{aligned}F(z)&=\int f(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)=\int (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\&=\left[\int(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)\right]+\mathrm{i}\left[\int(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)\right]\\&=\int u\mathrm{d}x-\int v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int v\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int u\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{7.2.78}$$

Bon cette expression établie, donnons une petite explication quant à sa lecture :

1. Nous savons que u et v dépendent tous les deux dans le cas général de x et y.
2. Nous savons que u et v représentent (voir exemples au début de cette section) des courbes fermées ou ouvertes ainsi que des droites lorsque x (ou respectivement y) est fixé et que l'autre variable associée, elle varie !

En cours de traduction de l'anglais

Donc chacun des termes comportant une intégrale dans l'expression écrite ci-dessus est une intégrale curviligne sur une famille de courbes ouvertes ou fermées (dont un cas particulier est des droites...) !

Cette intégrale peut être évaluée en utilisant le théorème de Green dans le plan (voir section Calcul Vectoriel page 1867) si nous considérons le cas particulier d'un chemin curviligne fermé tel que :

$$F(z)=\oint(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\oint(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y) \tag{7.2.79}$$

Abordons d'abord la partie réelle :

Nous avions effectivement démontré (il est très fortement conseillé de relire ce théorème de Green) dans le chapitre de Calcul Vectoriel que :

$$\oint(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y)=\int\limits_S\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}S_z=\int\limits_S\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.2.80}$$

Ce qui s'écrit dans notre situation :

$$\oint (u\mathrm{d}x + (-v)\mathrm{d}y) = \int\limits_S \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.2.81}$$

Or, si la fonction est holomorphe et satisfait donc aux équations de Cauchy-Riemann nous avons immédiatement :

$$\oint (u\mathrm{d}x + (-v)\mathrm{d}y) = -\int\limits_S \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{7.2.82}$$

Ainsi notre intégrale se réduit dans le cas particulier d'un chemin fermé à :

$$F(z) = \mathrm{i}\oint (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \tag{7.2.83}$$

Et... réutilisons le théorème de Green :

$$\oint (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \int\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.2.84}$$

Or, si la fonction est holomorphe (donc pour rappel dérivable en tout point du plan complexe ou d'un sous-ensemble ouvert de celui-ci) et satisfait donc aux équations de Cauchy-Riemann nous avons immédiatement :

$$\int\limits_S \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.2.85}$$

et nous obtenons ainsi le "théorème de Cauchy", ou "Cauchy-Goursat theorem" dans sa version généralisée aux fonctions non continues, qui dit que si une fonction est holomorphe (satisfaisant donc les équations de Cauchy-Riemann) et intégrée sur un contour fermé alors :

$$\boxed{\oint f(z)\mathrm{d}z = \oint (u + \mathrm{i}v)\mathrm{d}z = 0} \tag{7.2.86}$$

Comme corollaire (sans démonstration), toute fonction qui satisfait à la relation précédente est holomorphe (dans tout le plan complexe ou un sous-ensemble ouvert de celui-ci).

Ce résultat permet dans certains domaines comme la physique quantique des champs (on pense au potentiel de Yukawa qui n'est pas traité pour l'instant sur ce site) de calculer des intégrales définies réelles compliquées en utilisant la propriété ci-dessus. L'idée étant lors du choix du contour fermé de l'intégrale curviligne de s'arranger à faire apparaître l'intégrale définie réelle recherchée comme étant une partie seulement du chemin (en la généralisant au cas complexe) et de par l'égalité avec zéro en déduire sa valeur grâce aux autres parties de l'intégrale du chemin choisi (parties qui sont évidemment simples à calculer).

En d'autres termes, il s'agit de la calculer par différence. Toute la difficulté résidant dans la pratique à trouver la fonction $f(z)$ et le contour fermé permettant de faire apparaître la fonction $f(x)$ de l'intégrale définie recherchée...

En cours de traduction de l' anglais

À l'aide de ce résultat, faisons un exemple scolaire important qui nous sera utile par la suite (mais qui n'a aucun rapport avec le cas du calcul d'une intégrale définie réelle).

✍**Exemple :**

Calculons :

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} \tag{7.2.87}$$

Pour cela, nous allons utiliser la simplification qui consiste à se rappeler (voir section Nombres page 249) que :

$$z = re^{\mathrm{i}\theta} \tag{7.2.88}$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}z = r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \tag{7.2.89}$$

Nous pouvons alors écrire l'intégrale curviligne comme :

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\mathrm{d}\theta \tag{7.2.90}$$

Or comme sur un chemin fermé dérivable en tout point (donc sans sommets) l'angle à parcourir pour faire un tour complet ira nécessairement de 0 à $+\pi$. Il vient alors :

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i} \tag{7.2.91}$$

Avant de continuer remarquons un fait intéressant et important : Une intégrale (on ne parle pas de la primitive mais de l'intégrale !) d'une fonction du type $1/x$ dans $\mathbb{R}$ ne serait pas calculable. Or si nous généralisons le concept à $\mathbb{C}$, nous voyons que nous contournons... (le jeu de mots...) la singularité via une intégrale curviligne qui entoure la singularité. Et... et... dans notre calcul précédent z pourrait tout à fait n'avoir que la valeur réelle et pas l'imaginaire (ainsi z se réduit à x). Donc l'intégrale de $1/x$ devient alors calculable et a un résultat dans les complexes ce qui est remarquable !

Certains mathématiciens interprètent cela en figurant que $1/x$ est une projection plane d'un espace tridimensionnel dont l'axe imaginaire est perpendiculaire au plan $\mathbb{R}^2$ (voir figure ci-dessous). D'où le fait que $1/x$ soit intégrable dans $\mathbb{C}$.

Enfin, indiquons que $1/z$ est holomorphe sur tout le plan complexe excepté en 0 (la dérivée étant la même que pour $1/x$). La fonction $1/z$ n'est donc pas $\mathbb{C}$-différentiable !

Ceci étant fait, faisons un cas important et similaire avec l'intégrale curviligne suivante :

$$\oint \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z \tag{7.2.92}$$

où z_0 est un nombre complexe constant. Posons :

$$z - z_0 = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = \rho \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\varphi} \Rightarrow \mathrm{d}z = \rho \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi \tag{7.2.93}$$

Nous pouvons alors écrire si nous faisons qu'un seul tour dans le sens inverse des aiguilles (sens antihorlogique ou trigonométrique) d'une montre :

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int \frac{\rho \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi}{\rho \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{i} \int \mathrm{d}\varphi = 2\pi \mathrm{i} \tag{7.2.94}$$

qui n'est valable à nouveau que si notre chemin d'intégration évite z_0 sinon quoi il y a une singularité. Cette dernière intégrale est donc une petite généralisation simpliste de la précédente.

Maintenant montrons le théorème important qui nous intéresse au fait depuis le début de ce chapitre en utilisant les nombreux résultats démontrés jusqu'ici !

Nous savons que si une fonction $f(z)$ satisfait aux équations de Cauchy-Riemann, alors si nous évitons soigneusement la valeur z_0 (comme dans les calculs précédents), l'expression :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{7.2.95}$$

est aussi dérivable en tout point excepté en (donc l'expression n'y est plus holomorphe) qui est appelé une "singularité".

Effectivement, prendre une fonction holomorphe $f(z)$ satisfaisant Cauchy-Riemann et en soustraire une constante $(f(z_0))$ ne change en rien le fait que l'expression (en l'occurrence le numérateur dans dans relation précédente) restera holomorphe. Enfin, multiplier celle-ci par une fraction (dénominateur de la relation précédente) qui est elle aussi holomorphe donne une fonction holomorphe. Mais des singularités peuvent alors apparaître, nous parlons alors de "fonctions méromorphes" (il s'agit du rapport de deux fonctions holomorphes).

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle (singularité) pour la fonction (voir plus bas pour la notion de pôle/singularité). La fonction Gamma (voir le tracé dans la section Calcul Différentiel et Intégral à la page **??**) est un exemple célèbre de fonction méromorphe !

Dès lors, si nous en prenons l'intégrale curviligne sur un chemin fermé évitant de passer par z_0, le théorème de Cauchy nous donne immédiatement (rappelez-vous de la démonstration plus haut) :

$$\oint \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \mathrm{d}z = 0 \tag{7.2.96}$$

Or, ceci s'écrit aussi après réarrangement des termes :

$$\oint \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = f(z_0) \oint \frac{1}{z - z_0} \mathrm{d}z \tag{7.2.97}$$

Soit :

$$f(z_0)=\frac{1}{\displaystyle\oint\frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z}\oint\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{7.2.98}$$

Or, nous avons démontré plus haut que :

$$\oint\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=2\pi\mathrm{i} \tag{7.2.99}$$

Il vient alors le résultat appelé "théorème intégral de Cauchy", ou plus rarement "formule de Cauchy", (dont il existe une forme généralisée que nous démonterons plus bas) :

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z} \tag{7.2.100}$$

Au fait, dans la pratique toute la subtilité est de pouvoir ramener une fonction $g(z)$ holomorphe (qui satisfait donc les équations de Cauchy-Riemann) en la manipulant à une forme du type :

$$g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0} \tag{7.2.101}$$

quand c'est possible... alors le calcul de son intégrale curviligne (de chemin fermé) devient extrêmement simple puisqu'elle sera égale à :

$$2\pi\mathrm{i}f(z_0) \tag{7.2.102}$$

de par le théorème intégral de Cauchy !

Remarque

Nous savons donc calculer la valeur d'une intégrale curviligne d'une expression non holomorphe mais dont le numérateur lui l'est.

Attention ! Le signe de la valeur d'une intégrale curviligne va dépendre du sens dans lequel on parcourt son chemin d'intégration. Si le sens est direct (c'est-à-dire "antihorlogique" ou encore "trigonométrique") son signe sera positif ; si au contraire le sens est horlogique son signe sera négatif. Vous vous dites sans doute que cette précision est sans intérêt vu que cette valeur est généralement nulle. Certes, mais nous verrons plus loin l'importance de cette spécification lorsqu'il sera question du calcul des résidus.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Un exemple d'application important est nommé "théorème de la valeur moyenne de Gauss" qui indique, étant donné $f(z)$ une fonction analytique sur et à l'intérieur d'un disque $C_r : |z-z_0| = r$, alors :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta \quad (7.2.103)$$

En effet, à partir de la relation intégrale de Cauchy nous avons (nous faisons simplement le changement de variable $z = z_0 + re^{i\theta}$) :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})ire^{i\theta}}{(z_0+re^{i\theta})-z_0}d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \quad (7.2.104)$$

Il y a une relation équivalente pour la dérivée $f'(z_0)$ à celle donnée par le théorème intégral de Cauchy. Voyons cela :

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z_0+h)}{h}-\frac{f(z_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(z_0+h)-f(z_0))\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-(z_0+h)}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi ih}\left(\oint\frac{f(z)dz}{z-z_0-h}-\oint\frac{f(z)dz}{z-z_0}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi ih}\left(\oint\frac{f(z)dz}{z-z_0-h}\frac{(z-z_0)}{(z-z_0)}-\oint\frac{f(z)dz}{z-z_0}\frac{(z-z_0-h)}{(z-z_0-h)}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\oint\frac{1}{2\pi ih}\frac{f(z)\left[(z-z_0)-(z-z_0-h)\right]dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)} = \lim_{h\to 0}\oint\frac{1}{2\pi ih}\frac{hf(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)}
\end{aligned} \quad (7.2.105)$$

Alors :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} \quad (7.2.106)$$

en continuant ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
f''(z_0) &= \frac{2}{2\pi i}\oint\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}\\
f'''(z_0) &= \frac{6}{2\pi i}\oint\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^4}
\end{aligned} \quad (7.2.107)$$

En cours de traduction de l'anglais

Bref, nous remarquons donc que :

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{\mathrm{d}^n f(z_0)}{\mathrm{d}z^n}=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{7.2.108}$$

qui n'est autre que le "théorème intégral de Cauchy généralisé".

Ce résultat est très puissant car il montre que les fonctions holomorphes sont infiniment dérivables (à cause du dénominateur), soit analytiques, et il est beaucoup plus difficile de trouver un théorème équivalent avec des conditions aussi simples pour les fonctions réelles.

Si nous revenons maintenant à notre développement de Taylor d'une fonction complexe :

$$f(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(z_0)}{\mathrm{d}z^n}(z-z_0)^n \tag{7.2.109}$$

humm... et que voyons-nous ici ? Eh bien ceci ! :

$$\begin{aligned}f(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(z_0)}{\mathrm{d}z^n}(z-z_0)^n&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\\&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z(z-z_0)^n=\sum_{i=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\end{aligned} \tag{7.2.110}$$

Il en découle la relation suivante appelée "série de Laurent à puissances positives" (il en existe une version plus généralisée que nous allons démontrer plus loin) :

$$f(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{7.2.111}$$

qui donne donc l'expression formelle d'une fonction complexe sous forme de série infinie de puissances entières à proximité d'un point z_0 du plan complexe avec donc :

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{f^n(z_0)}{n!} \tag{7.2.112}$$

En se rappelant que $d^n f(z_0)/\mathrm{d}z^n$ s'écrit de manière équivalente $f^n(z_0)$, nous constatons que l'ensemble des deux relations précédentes nous redonne le développement en série de Taylor que nous avions obtenu en analyse réelle (voir section Suites et Séries page 1677) et qui était :

$$f(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n f(z_0)}{\mathrm{d}z^n}(z-z_0)^n \tag{7.2.113}$$

Ainsi, les séries de Taylor dans $\mathbb{R}$ ne sont qu'un cas particulier des séries de Laurent dans $\mathbb{C}$! ! !

Ceci est assez remarquable comme résultat car cela montre aussi que nous pouvons utiliser l'intégrale curviligne sur le plan complexe pour calculer les coefficients c_n de la série de Laurent au lieu de calculer les dérivées d'ordre n de la fonction f si ces dernières s'avéreraient trop

En cours de traduction de l'anglais

compliquées à déterminer. Ou inversement... calculer une simple dérivation au lieu de calculer une intégrale curviligne casse-tête (typiquement le cas en physique) en utilisant le fait que :

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{7.2.114}$$

Le seul point malheureux étant que cette dernière relation n'est calculable que si nous arrivons à mettre la fonction dans l'intégrale curviligne sous la forme :

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{7.2.115}$$

où n est un entier positif ou nul. Ceci est franchement loin d'être aisé dans la grande majorité des cas ! L'idée serait alors de trouver un chemin général pour l'intégrale curviligne, valable pour toute fonction $f(z)$ tel que ce dénominateur (qui contient en plus une singularité en z_0) disparaisse. Ce serait l'idéal... mais il nous faut une piste... et celle-ci va venir de l'étude de la convergence des séries de puissances complexes. Voyons de quoi il s'agit avec une approche qualitative !

En cours de traduction de l' anglais

7.2.4.1 Convergence d'une série complexe

Nous avons vu dans la section de Suites et Séries que nombre de fonctions réelles pouvaient être exprimées en série de Maclaurin (cas particulier des séries de Taylor en) sous la forme :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \tag{7.2.116}$$

Nous y avions également montré, uniquement par l'exemple, que ce développement en série de puissances infinie n'était valable pour certaines fonctions réelles que dans un certain domaine de définition appelé "rayon de convergence".

Même si ce rayon de convergence peut être déterminé plus ou moins facilement au cas par cas, il y a certains exemples déroutants qui ne pouvaient pas au début du 119ème siècle (calendrier holocène) être compris sans l'analyse complexe.

Voyons un exemple simple pour comprendre de quel type de problème il s'agit. Considérons pour cela les deux fonctions :

$$g(x)=\frac{1}{1-x^2} \quad \text{et} \quad h(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{7.2.117}$$

et avant de continuer notre exemple, rappelons que nous avons démontré dans la section de Suites et Séries la relation :

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{u_0-u_{n+1}}{1-q}=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{7.2.118}$$

relative à une série géométrique, c'est-à-dire une série dont les termes sont du type :

$$u_n=u_0q^n \tag{7.2.119}$$

Il vient dès lors immédiatement si $n\rightarrow+\infty$ et $q\in]-1,+1[$:

$$S_\infty=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{+\infty}=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k=u_0\frac{1-q^{+\infty+1}}{1-q}=u_0\frac{1-0}{1-q}=\frac{u_0}{1-q} \tag{7.2.120}$$

Si $u_0=1$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}u_k=\sum_{k=0}^{+\infty}u_0q^k=\sum_{k=0}^{+\infty}u_0=\frac{1}{1-q} \tag{7.2.121}$$

Donc si nous changeons la notation, nous avons :

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n \tag{7.2.122}$$

Il vient alors immédiatement :

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n \quad \text{et} \quad h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \tag{7.2.123}$$

En cours de traduction de l' anglais

Donc les deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ précédentes sont définies pour un développement en série infinie de puissances uniquement dans un rayon de convergence $x \in]-1,+1[$.

Nous obtiendrions donc le même résultat en faisant un développement en série de Maclaurin !

Nous voyons trivialement qu'il y a pour $g(x)$ deux singularités qui sont $x = \{-1,+1\}$ par contre, basiquement nous n'en voyons pas trivialement pour $h(x)$ si nous raisonnons uniquement dans $\mathbb{F}$ donc il peut être difficile pour cette dernière fonction de comprendre l'origine du rayon de convergence.

Effectivement, si nous traçons ces deux fonctions dans $\mathbb{R}$ avec Maple 4.00b nous obtenons respectivement :

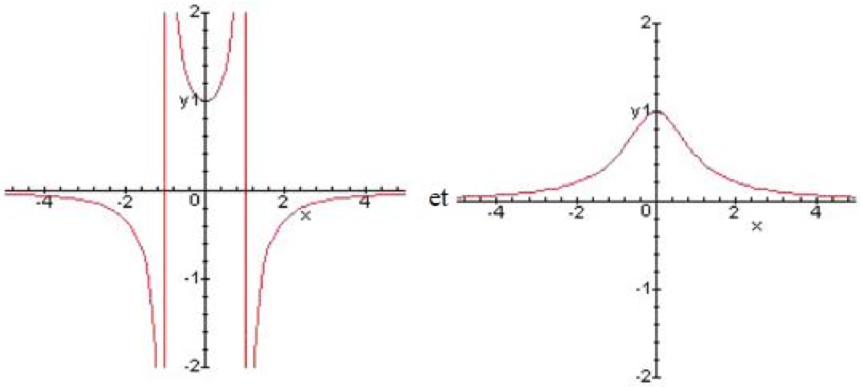


FIG. 7.82 – **Représentation dans Maple 4.00b des fonctions g et h**

d'où le problème de savoir pourquoi il y a quand même implicitement un rayon de convergence $x \in]-1,+1[$ pour $h(x)$? ? ?

Une manière encore plus flagrante de mettre en évidence le problème, c'est de montrer l'approche de ces deux fonctions par un développement en série de Maclaurin avec dix termes :

Pour $g(x)$ nous avons par exemple :

```
>with(plots):
>xplot:= plot(1/(1-x^2),x=-5..5,thickness=2,color=red):
>tays:= plots[display](xplot):
>for i from 1 by 2 to 10 do
tpl:= convert(taylor(1/(1-x^2), x=0,i),polynom):
tays:= tays,plots[display]([xplot,plot(tpl,x=-5..5,y=-2..2,
color=black,title=convert(tpl,string))])
od:
>plots[display]([tays],view=[-5..5,-2..2]);
```

En cours de traduction anglais

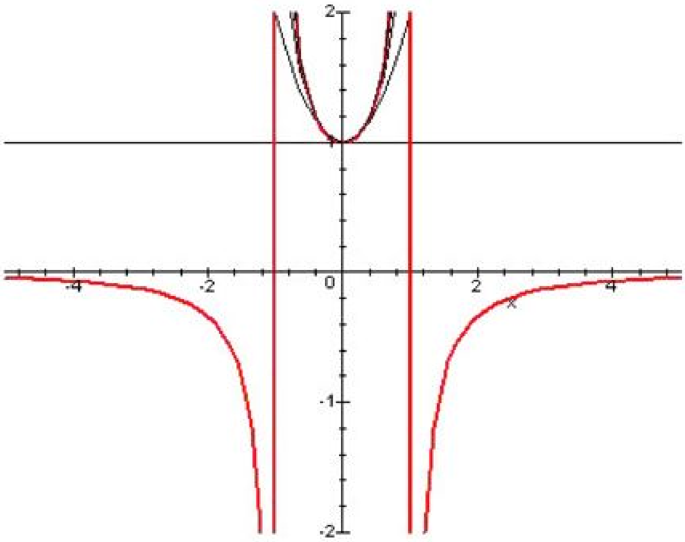


FIG. 7.83 – **Représentation plane de la fonction g pour visualiser le problème**

où nous voyons bien que la série de Maclaurin (ou l'expression en série de puissances) ne converge pas en dehors de $x \in]-1,+1[$ ce qui peut être intuitif à cause des deux singularités.

Pour $h(x)$ nous avons par contre :

```
 > with(plots):
> xplot:= plot(1/(1+x^2),x=-5..5,thickness=2,color=red):
> tays:= plots[display](xplot):
> for i from 1 by 2 to 10 do
tpl:= convert(taylor(1/(1+x^2), x=0,i),polynom):
tays:= tays,plots[display]([xplot,plot(tpl,x=-5..5,y=-2..2,
color=black,title=convert(tpl,string))])
od:
> plots[display]([tays],view=[-5..5,-2..2]);
```

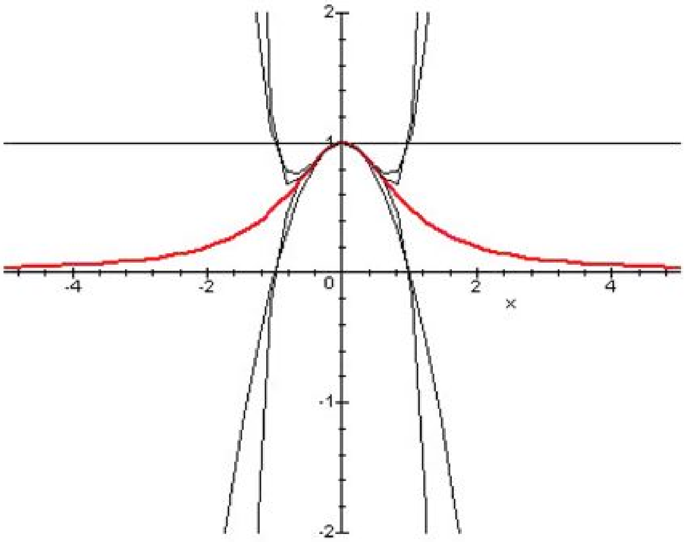


FIG. 7.84 – **Étonnamment, ici la série de Maclaurin ne converge pas**

En cours de traduction de l'anglais

où nous voyons bien que la série de Maclaurin (ou l'expression en série de puissances) ne converge pas non plus en dehors de $x \in]-1,+1[$ ce qui était déstabilisant et contre-intuitif au début de l'histoire de l'analyse réelle.

Aujourd'hui même un élève du secondaire sait qu'il est possible de raisonner aussi dans $\mathbb{C}$ et que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Donc l'analyse réelle n'est qu'un cas particulier et restreint de l'analyse complexe. Le fait d'étendre le domaine d'une fonction analytique donnée est nommé "continuation analytique". Comme nous allons le voir de suite, la continuation analytique réussit souvent à définir d'autres valeurs d'une fonction, par exemple dans une nouvelle région où une représentation en série infinie selon laquelle elle est initialement définie devient divergente !

La singularité pour $h(x)$ dans $\mathbb{C}$ vient du fait que celle-ci s'écrit :

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} \tag{7.2.124}$$

et qu'il y a donc deux singularités pour $z = \{-\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$ ce que nous voyons bien si nous représentons :

$$|h(z)| = \left|\frac{1}{1+z^2}\right| \tag{7.2.125}$$

avec Maple 4.00b (heureusement que nous avons maintenant l'équivalent d'un microscope dans la mathématique avec Maple...) :

```
>plot3d(abs(1/(1+(re+I*im)^2)),re=-3..3,im=-3..3,view=[-2..2,-2..2,-2..2]
,orientation=[-130,70],contours=50,style=PATCHCONTOUR,axes=frame,
grid=[100,100],numpoints=10000);
```

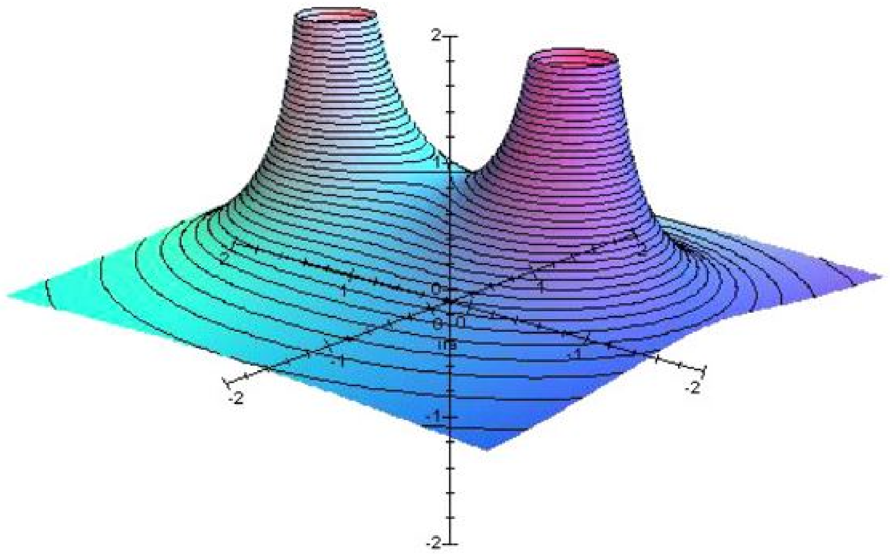


FIG. 7.85 – Représentation complexe de la fonction h pour mettre en évidence la raison de la divergence

où nous discernons les deux singularités sur l'axe imaginaire et la fonction h(x) sur l'axe réel (entre les deux pics). Donc lorsque nous développons une fonction en série de puissances, nous concluons que son rayon de convergence est défini par tout le plan complexe et non par l'axe traditionnel de l'analyse réelle.

En cours de traduction de l'anglais

Il est ainsi plus naturel de comprendre pourquoi nous parlions dans la section de Suites et Séries de "rayon" car vu du dessus, nous avons dans le plan complexe :

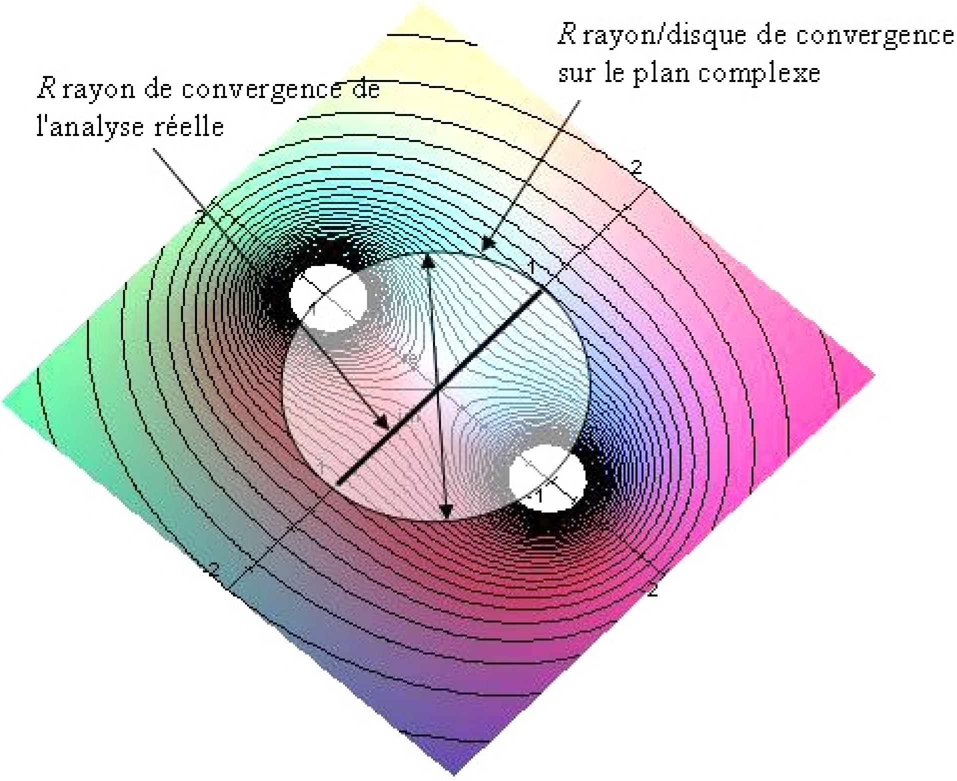


FIG. 7.86 – **Représentation des différents rayons de convergence de $h(z)$**

d'où le fait que nous parlons tantôt de disque de convergence (ouvert) et tantôt de rayon de convergence (ouvert). Par ailleurs, nous remarquons sur le graphique que le domaine de convergence est connexe (tout couple de points du domaine de convergence peut être relié par une droite qui est dans le domaine de convergence).

En cours de traduction anglais

Remarque

Rappelons qu'un sous-ensemble, intervalle ou disque "ouvert" signifie que nous n'en prenons pas les bords.

Nous comprenons alors mieux pourquoi la série de Taylor ne convergeait pas trivialement pour $h(x)$: elle doit converger sur tout le disque de convergence du plan complexe et pas seulement converger sur l'axe réel !

De tout ceci, nous déduisons que notre série de Laurent à puissances positives démontrée plus haut :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (7.2.126)$$

ne converge pas forcément, sans surprise..., sur tout le plan complexe (au même titre que les séries de Taylor sur la droite réelle puisqu'il s'agit de l'équivalent !) mais parfois uniquement dans un sous-domaine (connexe ?) ouvert de ce plan autour de z_0 (qui dans l'exemple particulier pris ici valait donc : 0).

Avec notre fonction $h(x)$ exprimée en utilisant un développement de Maclaurin sur 5 termes, nous voyons immédiatement avec Maple 4.00b que sur les bords du carré inscrit au disque de convergence, la série ne converge plus et nous y devinons le début des deux singularités :

```
>plot3d(abs(1-(re+I*im)^2+(re+I*im)^4-(re+I*im)^6+(re+I*im)^8),
re=-0.7..0.7,im=-0.7..0.7,view=[-1.5..1.5,-1.5..1.5,0..1.5]
,orientation=[-130,70],contours=50,style=PATCHCONTOUR,axes=frame,
grid=[100,100],numpoints=10000);
```

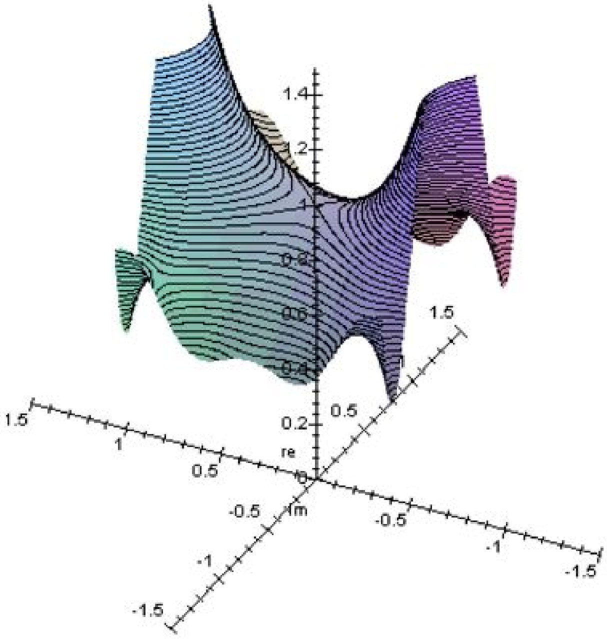


FIG. 7.87 – **Zoom sur la représentation complexe afin de comprendre la raison de la divergence**

un peu en dehors du disque de convergence, nous avons évidemment un peu n'importe quoi :

```
>plot3d(abs(1-(re+I*im)^2+(re+I*im)^4-(re+I*im)^6+(re+I*im)^8),re=-3..3,
im=-3..3,view=[-1.5..1.5,-1.5..1.5,0..1.5],orientation=[-130,70]
,contours=50,style=PATCHCONTOUR,axes=frame,grid=[100,100],numpoints=10000);
```

En cours de traduction de l'anglais

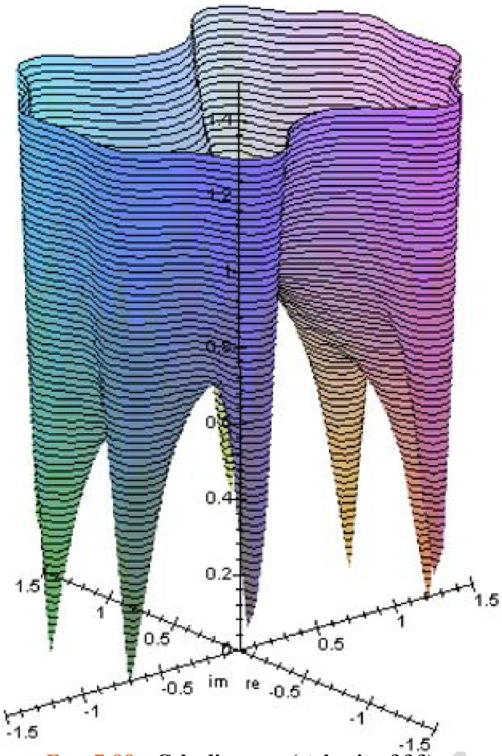


FIG. 7.88 – Cela diverge... (stalactites ? ? ?)

Il y a quand même quelque chose d'intéressant à essayer... puisque nous sommes maintenant sur un plan, et non plus sur une droite, il nous est possible de faire le développement de Taylor autour d'une singularité z_0 en déformant le disque convexe en une couronne simplement connexe telle que présentée ci-dessous (la couronne étant aussi la géométrie simplement connexe la plus simple découlant de la déformation d'un disque) :

En cours de traduction de l'anglais

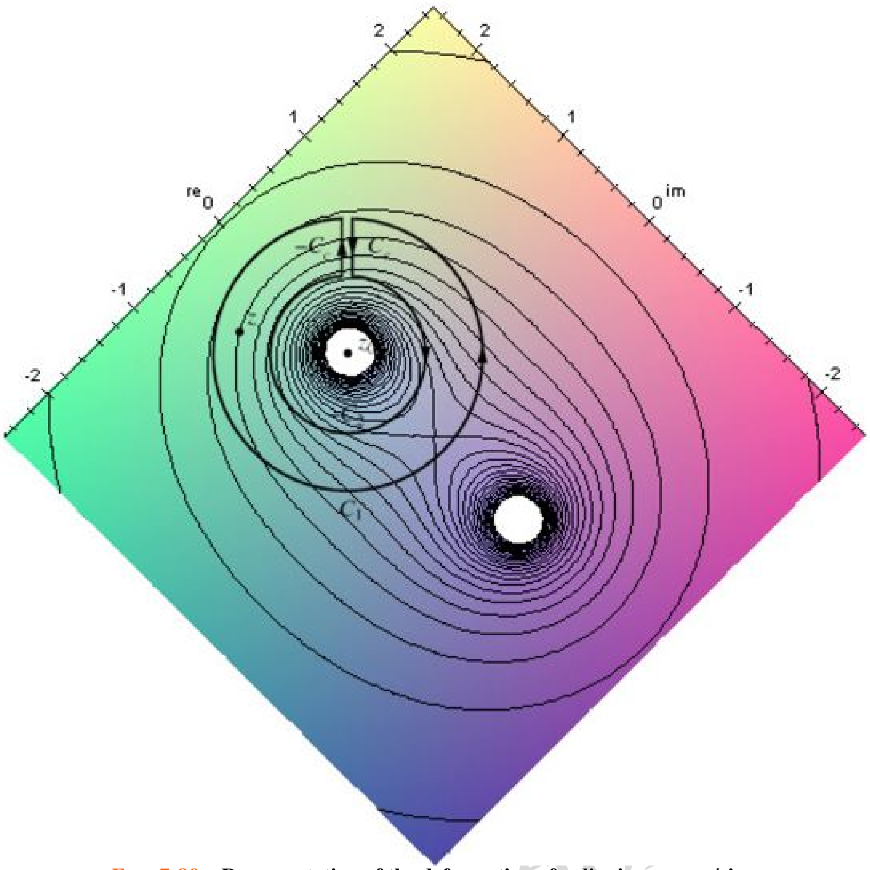


FIG. 7.89 – Representation of the deformation of a disc in a crown/ring

L'intérêt de ceci est de pouvoir déformer le domaine de convergence sur tout le plan complexe en évitant (contournant) toutes les singularités. Ainsi, contrairement aux séries de Taylor qui ne sont valables que sur un intervalle de l'axe des abscisses, nous aurions un nouveau type de série décrivant une fonction absolument partout, c'est-à-dire avant ET après (donc autour...) les singularités !

Donc évidemment nous allons imposer que dans la couronne déformée ci-dessus la fonction soit toujours holomorphe et analytique (comme dans le disque convexe initial). Avant de déterminer ce sur quoi nous allons tomber (série de Laurent généralisée), il nous faut d'abord faire une étude de la décomposition d'une intégrale en chemins :

En cours de traduction anglais

7.2.5 Décomposition en Chemins

Les intégrales curvilignes comme celles données précédemment peuvent aussi être écrites sous une autre forme assez classique et souvent utilisée dans la pratique.

Voyons cela ! D'abord, nous venons de démontrer dans le cas particulier d'une fonction holomorphe que :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{7.2.127}$$

Mais un chemin fermé peut être vu comme un chemin ayant un aller et un retour :

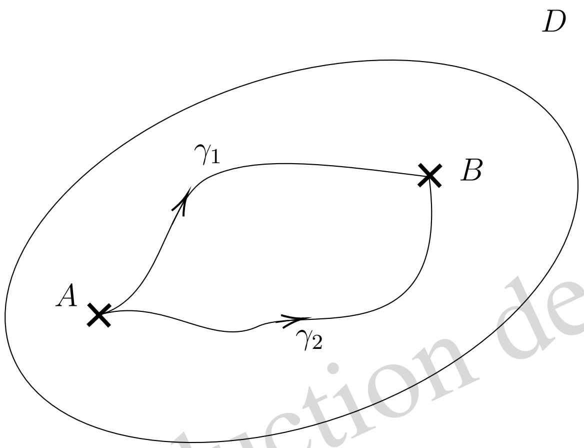


FIG. 7.90 – Représentation d'un chemin fermé avec son aller-retour

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.2.128}$$

Et maintenant vient ce qui nous intéresse... pour cela concentrons-nous sur une des intégrales curvilignes du type :

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.2.129}$$

Nous savons (1ère forme d'expression) que tout nombre complexe z du type :

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{7.2.130}$$

peut être (2ème type d'expression) écrit sous la forme (forme d'Euler) :

$$z(x,y) = x + \mathrm{i}y = r\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = re^{\mathrm{i}\theta} = z(r,\theta) \tag{7.2.131}$$

et pour intégrer sur un chemin, rien ne nous empêche d'en choisir un où r serait fixe (le module) et θ variable (nous n'aurions pas pu faire cela avec la première forme d'expression car en ne

faisant varier que la partie imaginaire ou réelle, nous ne pouvons pas obtenir de courbe alors que cela est possible avec la forme d'Euler d'un nombre complexe).

Nous avons alors :

$$z(\theta)=re^{\mathrm{i}\theta} \tag{7.2.132}$$

Nous pouvons dès lors écrire :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\gamma f(z(\theta))\mathrm{d}z(\theta) \tag{7.2.133}$$

et comme :

$$z'(\theta)=\frac{\mathrm{d}z}{\theta}\Leftrightarrow \mathrm{d}z=z'(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{7.2.134}$$

d'où :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\gamma f(z(\theta))z'(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{7.2.135}$$

ce que nous retrouvons souvent sous la forme suivante dans la littérature :

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\gamma f(z(t))\dot{z}(t)\mathrm{d}t} \tag{7.2.136}$$

En cours de traduction de l'anglais

7.2.5.1 Chemin inverse

Si C est une courbe allant d'un point P à un point Q, nous notons alors la même courbe mais parcourue de Q à P.

Paramétrisons maintenant C^-.

Si $C(t)$ est la courbe définie sur $[a,b]$ nous définissons la courbe $C^-(t)$ définie sur $[a,b]$ par :

$$C^-(t)=C(a+b-t) \tag{7.2.137}$$

En effet, nous avons alors bien avec cette paramétrisation :

$$C^-(a)=C(a+b-a)=C(b) \quad \text{et} \quad C^-(b)=C(a+b-b)=C(a) \tag{7.2.138}$$

et lorsque t croit de a à b, $a+b-t$ décroît de b à a. C^- n'est donc que C mais parcourue dans le sens inverse.

Nous avons alors en utilisant la dernière démonstration :

$$\int_{C^-} f(C^-)\mathrm{d}C^-=\int_a^b f(C^-(t))C'^-(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(C(a+b-t))C'(a+b-t)\mathrm{d}t \tag{7.2.139}$$

Posons :

$$u = a + b - t \tag{7.2.140}$$

d'où :

$$\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t \tag{7.2.141}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int\limits_{C^-} f(C^-)\mathrm{d}C^- &= \int\limits_a^b f(C(a+b-t))C'(a+b-t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(C(u))C'(u)(-\mathrm{d}u)\\ &= -\int\limits_a^b f(C(u))C'(u)\mathrm{d}u = -\int\limits_a^b f(C)\mathrm{d}C\end{aligned} \tag{7.2.142}$$

Donc si C^- et C sont les chemins d'une même fonction mais parcourus dans le sens inverse, nous avons en reprenant notre notation conventionnelle (attention dans le deuxième terme il est implicite que la paramétrisation est différente du premier !) :

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.2.143}$$

Soit :

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = 0} \tag{7.2.144}$$

Raison pour laquelle nous disons souvent que le signe de la valeur d'une intégrale curviligne va dépendre du sens dans lequel nous parcourons son chemin d'intégration. Si le sens est direct (c'est-à-dire "antihorlogique" ou encore "trigonométrique") son signe sera positif ; si au contraire le sens est horlogique son signe sera négatif (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1564).

En cours de traduction de l'anglais

7.2.6 Séries de Laurent

Cette dernière relation obtenue, nous pouvons revenir à notre déformation du disque de convergence en une couronne. Nous rappelons que l'idée étant initialement d'avoir l'expression analytique d'une fonction sous forme d'une série de puissances infinie dans un domaine restreint autour d'un point singulier et tout ceci... afin de pouvoir calculer pour les physiciens des intégrales curvilignes complexes en passant par une méthode utilisant les propriétés des séries complexes !

Commençons donc par le point (2), qui nous mènera plus facilement au point (1) c'est-à-dire obtenir l'expression analytique d'une fonction autour d'un point de singularité, en faisant un zoom sur notre couronne :

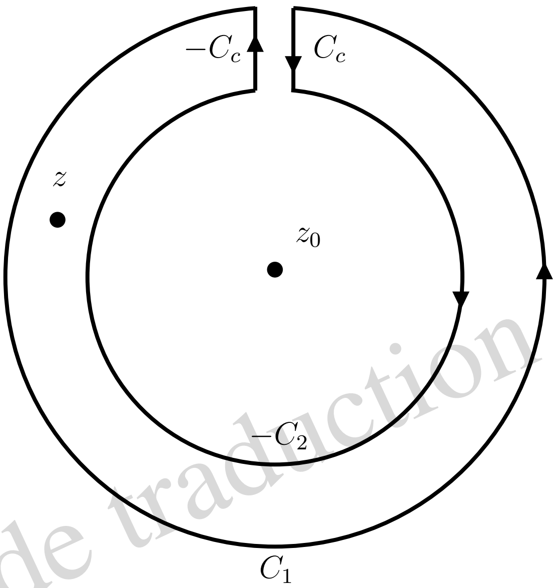


FIG. 7.91 – **Zoom sur la couronne du début**

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons donc si la fonction f est analytique et holomorphe dans la couronne de rayon extérieur R et rayon intérieur r, l'intégrale curviligne suivante dans toute la couronne (nous changeons la notation : $z = z'$ et $z_0 = z$) :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{f(z')}{z'-z} \mathrm{d}z' \tag{7.2.145}$$

où nous notons z le point où nous souhaitons connaître la fonction et z' la variable dont dépend f. Ce changement de notation se justifiera par la suite pour une raison purement pratique.

La couronne peut donc être décomposée en 4 chemins :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{C_1} \frac{f(z')}{z'-z} \mathrm{d}z' + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{C_c} \frac{f(z')}{z'-z} \mathrm{d}z' + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{-C_c} \frac{f(z')}{z'-z} \mathrm{d}z' + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{-C_2} \frac{f(z')}{z'-z} \mathrm{d}z' \tag{7.2.146}$$

Si les deux segments C_c et $-C_c$ sont infiniment proches, ils correspondent alors à un même chemin parcouru une fois dans un sens positif et une fois dans le sens négatif. Or, nous avons

démontré plus haut que :

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{7.2.147}$$

Il en découle donc que :

$$\int\limits_{C_c} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' = -\int\limits_{-C_c} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' \tag{7.2.148}$$

Ce qui nous amène à écrire :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C_1} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C_c} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C_c} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{-C_2} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C_1} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C_2} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' = f_1(z) + f_2(z) \end{aligned} \tag{7.2.149}$$

où nous avons mis un "+" entre les deux derniers termes, car comme nous allons le voir de suite, le critère de convergence associé à la notation traditionnelle condensée de ce domaine d'étude, fait émerger automatiquement le signe "-".

Pour les deux intégrales f_1, f_2, nous savons que la fraction peut s'écrire sous la forme d'une série géométrique déjà vue plus haut. Effectivement :

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{(z'-z_0)+(z_0-z)} = \frac{1}{z'-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{z'-z_0}} \tag{7.2.150}$$

en assimilant :

$$x = \frac{z-z_0}{z'-z_0} \tag{7.2.151}$$

où comme nous l'avons vu, la convergence impose que :

$$|z-z_0| \leq |z'-z_0| \tag{7.2.152}$$

afin que x soit en valeur absolue inférieur à 1.

Nous voyons alors apparaître la série géométrique infinie :

$$\frac{1}{z'-z_0} = \frac{1}{z'-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^n+\ldots\right] \tag{7.2.153}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{z'-z_0} = \frac{1}{z'-z_0}+\frac{z-z_0}{(z'-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(z'-z_0)^3}+\ldots+\frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}}+\ldots \tag{7.2.154}$$

En cours de traduction de l' anglais

Pour revenir à :

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_R}\frac{f(z')}{z'-z}\mathrm{d}z' \tag{7.2.155}$$

nous avons en tout point z à l'intérieur du cercle de rayon R dont le bord est décrit par la variable z' et de centre z_0 la convergence qui est assurée car :

$$|z-z_0|\leq|z'-z_0| \tag{7.2.156}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_R}f(z')\left[\frac{1}{z'-z_0}+\frac{z-z_0}{(z'-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(z'-z_0)^3}+\ldots+\frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^{n+1}}+\ldots\right]\mathrm{d}z' \tag{7.2.157}$$

Intégrant terme à terme, nous mettons en évidence le développement (déjà connu) :

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{7.2.158}$$

avec la définition des coefficients c_n, où n est un entier positif ou nul :

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z' \tag{7.2.159}$$

Ce développement peut faire penser au développement de Taylor au sens où seules des puissances positives (ou nulles) de $(z'-z_0)$ apparaissent, mais il n'en est pas un dans le cas de la couronne ! En effet, c_n ne peut pas être écrit cette fois-ci comme :

$$c_n=\frac{f^n(z_0)}{n!} \tag{7.2.160}$$

puisque, par hypothèse, $f(z)$ est supposée analytique dans la couronne seulement, et peut donc fort bien ne pas l'être à l'intérieur du petit cercle de rayon r, en particulier en z_0, auquel cas $f^n(z_0)$ peut tout simplement ne pas exister (répétons que z est strictement contraint à se trouver dans la couronne, soit $r<|z|<R$). Nous verrons plus loin ce qui ce passe quand $f(z)$ est holomorphe dans ce disque et que, notamment, z_0 n'est pas un point singulier.

Il nous faut encore traiter f_2. Nous faisons alors le même type de développement que pour f_1, avec la différence que maintenant :

$$|z-z_0|>|z'-z_0| \tag{7.2.161}$$

lorsque z' parcourt le petit cercle de rayon r. Pour faire apparaître une série géométrique, il faut écrire cette fois-ci :

$$\frac{1}{z-z'}=-\frac{1}{z-z'}=\frac{1}{(z-z_0)-(z'-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}} \tag{7.2.162}$$

En cours de traduction de l'anglais

D'où :

$$\frac{1}{z-z'}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}}=-\frac{1}{z-z_0}\left[1+\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)+\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)^n+\ldots\right] \tag{7.2.163}$$

Soit :

$$\frac{1}{z-z'}=-\frac{1}{z-z_0}-\frac{z'-z_0}{(z-z_0)^2}-\frac{(z'-z_0)^2}{(z-z_0)^3}-\ldots-\frac{(z'-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}-\ldots \tag{7.2.164}$$

Intégrant terme à terme, nous mettons en évidence le développement (nouveau) :

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{7.2.165}$$

avec :

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_r}f(z')(z'-z_0)^{-n-1}\mathrm{d}z' \tag{7.2.166}$$

En changeant n en $-n$ dans la sommation pour f_2, nous avons pour la somme $f_1(z)+f_2(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{7.2.167}$$

avec pour l'instant deux c_n distincts :

$$c_{n\geq 0}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z' \quad \text{et} \quad c_{n<0}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_r}f(z')(z'-z_0)^{-n-1}\mathrm{d}z' \tag{7.2.168}$$

Nous allons voir maintenant que des deux relations peuvent être réunies en une seule !

Si nous observons bien ces deux dernières relations, nous constatons qu'elles ne dépendent nullement de z (!) et c'est bien normal puisque les c_n sont les coefficients du développement en série de $f(z)$ et ceux-ci sont les mêmes en n'importe quel point du domaine de définition de la fonction où celle-ci est analytique !

Donc les deux contours (cercles) peuvent être fusionnés en un seul cercle tant que celui-ci est situé dans la couronne et a pour centre z_0 :

$$c_{n\geq 0}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z' \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{7.2.169}$$

Par ailleurs, le lecteur attentif aura remarqué que ce contour n'a même pas besoin d'être un cercle finalement. Il peut être quelconque tant qu'il est fermé et qu'il se trouve dans un domaine analytique !

Ainsi, nous obtenons les deux relations :

$$\boxed{\begin{aligned} f_{(z)}&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n \\ c_n&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_R}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z' \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)\end{aligned}} \tag{7.2.170}$$

En cours de traduction de l'anglais

Les deux relations précédentes définissent la "série de Laurent généralisée". Elle est remarquable et se distingue d'une série de Taylor au sens où elle contient toutes les puissances entières positives et négatives et les coefficients c_n ne sont pas a priori exprimables avec les dérivées de f.

La série de puissances $n \geq 0$ est appelée "partie régulière", celle des puissances négatives porte le nom de "partie principale".

La série des puissances négatives converge uniformément partout à l'extérieur de γ_r, celle des puissances positives à l'intérieur de γ_R. Au total le développement de Laurent converge uniformément dans le domaine commun, qui est la couronne et donc aussi sur le chemin unique γ.

Montrons maintenant un point que nous avions mentionné plus haut. Si le cercle ne contient pas de singularité, alors tous les coefficients :

$$c_{n<0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z')(z'-z_0)^{-n-1} \mathrm{d}z' \qquad (7.2.171)$$

sont nuls. Notons d'abord que $-n-1$ est un nombre entier positif ou nul que nous noterons p tel que :

$$c_{n<0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z')(z'-z_0)^{p} \mathrm{d}z' \quad p \in \mathbb{N} \qquad (7.2.172)$$

Nous avons alors l'intégrant suivant dans un chemin fermé :

$$f(z')(z'-z_0)^p \qquad (7.2.173)$$

Or, si nous enlevons la singularité cela impose que $f(z')$ est holomorphe (et de toute façon c'est imposé par tous les développements initiaux sur les séries de Laurent).

Comme $(z'-z_0)^p$ est un polynôme à puissance positive et non nulle et comme nous le savons, tout polynôme satisfaisant ces conditions est dérivable au moins une fois sans faire apparaître de singularité. Ainsi ce terme est aussi holomorphe.

En admettant que le produit de deux fonctions holomorphes est une fonction holomorphe et que le contour γ est fermé, nous avons alors en utilisant le résultat suivant démontré plus haut (pour une fonction holomorphe) :

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad (7.2.174)$$

la conséquence immédiate suivante :

$$\int\limits_{\gamma} f(z')(z'-z_0)^p \mathrm{d}z' = 0 \Rightarrow c_{n<0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z')(z'-z_0)^p \mathrm{d}z' = 0 \qquad (7.2.175)$$

s'il n'y a pas de singularité dans le petit cercle de la couronne. Nous retrouvons alors dans ce cas un développement avec les seules puissances positives, les $c_{n \geq 0}$ étant cette fois équivalents à :

$$c_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} \qquad (7.2.176)$$

En cours de traduction de l'anglais

conformément au théorème intégral de Cauchy généralisé démontré plus haut. A contrario, nous voyons bien que c'est la partie principale (quand elle existe) qui contient l'information sur le fait que f n'est pas a priori holomorphe dans le petit disque. L'existence de puissances négatives montre que f n'est visiblement pas bornée en z_0.

La classification des singularités d'une fonction se fondera précisément sur la considération des caractéristiques de la partie principale du développement de Laurent centré sur un point singulier de cette fonction.

✍**Exemple :**

Voyons donc à quoi ressemble la série de Laurent de notre fonction :

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2} \tag{7.2.177}$$

sur un domaine simplement connexe qui serait la couronne entourant la singularité i par exemple (nous aurions pu choisir la deuxième singularité $-\mathrm{i}$ mais il fallait bien en prendre une...). Ce qui équivaut donc à chercher le développement en série de puissances de $z-\mathrm{i}$.

Nous allons procéder de la manière suivante :

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} \tag{7.2.178}$$

Nous allons utiliser pour la suite :

$$f(z)=\frac{1}{(z+\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}+(z-\mathrm{i})}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})} \tag{7.2.179}$$

La deuxième fraction peut être exprimée en série géométrique si comme nous l'avons déjà vu :

$$\left|\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})}\right|<1 \tag{7.2.180}$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})}=1+\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})+\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})\right)^2+\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})\right)^3+\ldots \tag{7.2.181}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $-\mathrm{i}/2$ et divisons les ensuite par $z-\mathrm{i}$ (le deuxième terme du dénominateur de la fraction initiale) pour obtenir pour le terme de gauche :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(z-\mathrm{i})}\frac{-\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}&=\frac{-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}+(z-\mathrm{i})}\frac{1}{(z-\mathrm{i})}\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}z+2+z^2-2z\mathrm{i}-1}=\frac{1}{z^2+1}\end{aligned} \tag{7.2.182}$$

et pour le terme de droite, nous avons :

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3(z-\mathrm{i})-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^4(z-\mathrm{i})^2-\ldots \quad (7.2.183)$$

Nous avons alors au final pour notre série géométrique :

$$\frac{1}{z^2+1}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3(z-\mathrm{i})-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^4(z-\mathrm{i})^2-\ldots \quad (7.2.184)$$

Nous voyons donc sur cette série de Laurent autour de i de la fonction holomorphe $f(z)$ dans la couronne, apparaître les coefficients :

$$c_{-1}=-\frac{\mathrm{i}}{2}, c_0=-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2, c_1=-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3 \quad (7.2.185)$$

et nous avons alors avec Maple 4.00b

```
>plot3d(abs(-I/2*1/((re+I*im)-I)-(I/2)^2-(I/2)^3*(re-I*im)-
(I/2)^4*(re-I*im)^2-(I/2)^5*(re-I*im)^3),
re=-1.5..1.5,im=-1.5..1.5,view=[-2..2,-2..2,-1..2],
orientation=[-130,70],contours=50,style=PATCHCONTOUR,axes=frame,
grid=[100,100],numpoints=10000);
```

Ce qui donne le graphique suivant :

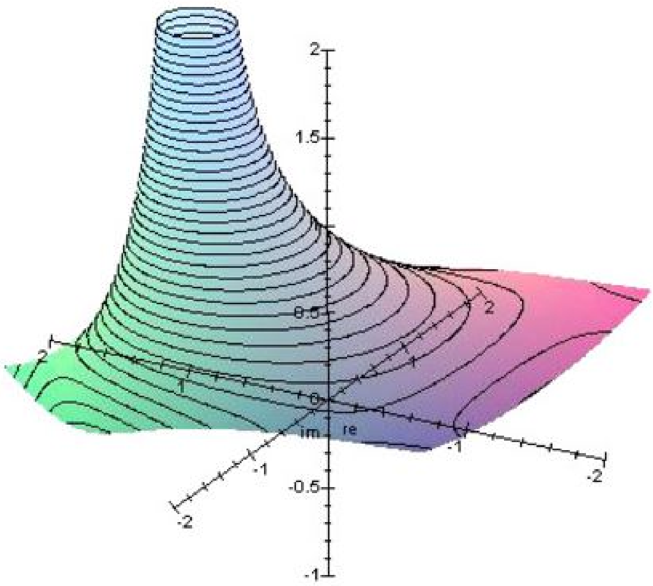


FIG. 7.92 – **Représentation de la série de Laurent $f(z)$ avec Maple 4.00b**

où nous voyons que la série de Laurent nous permet d'exprimer $f(z)$ dans un voisinage proche de la singularité i en prenant cinq termes.

Idem si nous faisons la somme des deux séries de Laurent pour les deux singularités avec sept termes :

```
>plot3d(abs(-I/2*1/((re+I*im)-I)-(I/2)^2-(I/2)^3*(re-I*im)-
(I/2)^4*(re-I*im)^2-(I/2)^5*(re-I*im)^3 -(I/2)^6*(re-I*im)^4
-(I/2)^7*(re-I*im)^5+I/2*1/((re+I*im)+I)+(I/2)^2+
(I/2)^3*(re+I*im)+(I/2)^4*(re+I*im)^2+(I/2)^5*(re+I*im)^3
+(I/2)^6*(re+I*im)^4 +(I/2)^7*(re+I*im)^5),re=-1.5..1.5,
im=-1.5..1.5, view=[-2..2,-2..2,-1..2],orientation=[130,70],
contours=50, style=PATCHCONTOUR, axes=frame,grid=[100,100],
numpoints=10000);
```

Cela nous nous donne le graphique suivant :

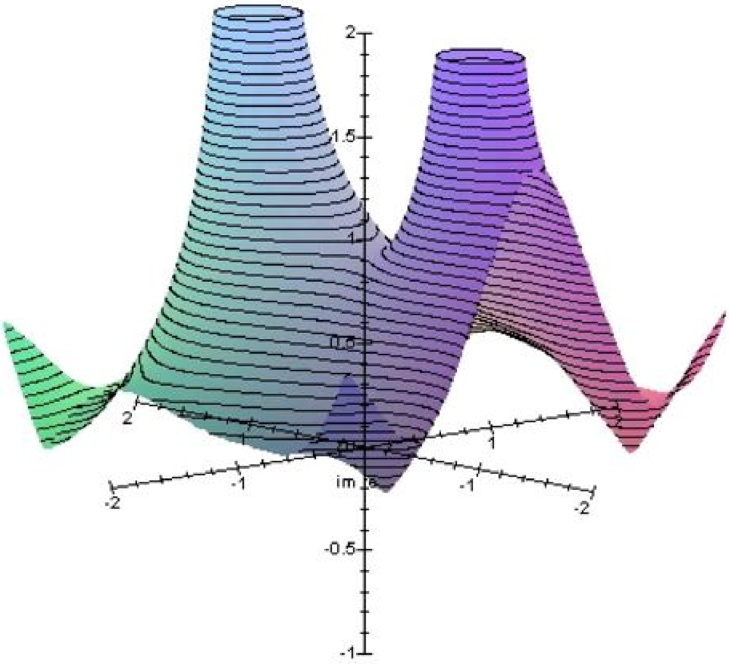


FIG. 7.93 – **Somme des deux séries de Laurent de $f(z)$ pour les deux singularités dans Maple 4.00b**

7.2.7 Singularités

Nous avons donc vu juste précédemment qu'il était possible de calculer l'intégrale curviligne d'une fonction, sous condition d'analycité, sur le contour d'une singularité. Notre objectif va maintenant être d'améliorer cette approche.

Nous avons déjà mentionné et mis en évidence dans nos démonstrations que l'intégrant dans le "théorème intégral de Cauchy" était de la forme :

$$\frac{f(z)}{z-z_0} \quad (7.2.186)$$

où $f(z)$ est bien définie en z_0.

Le point $z-z_0$ est bien évidemment une singularité de $f(z)$ et celle-ci n'y est donc pas définie.

Comme nous l'avons vu lors de notre démonstration des séries de Laurent, $f(z)$ peut être exprimée sous forme d'une série de Laurent positive dans un disque de convergence (ou ce qui revient au même, en série de Laurent dans une couronne non centrée sur une singularité...) sous la forme :

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z-z_0} &= \left(f(z_0) + \frac{1}{1!}f'(z_0)(z-z_0)^1 + \frac{1}{2!}f''(z_0)(z-z_0)^2 + \ldots\right) \\ &= \frac{f(z_0)}{z-z_0} + f'(z_0) + \frac{1}{2!}f'(z_0)(z-z_0) + \ldots \end{aligned} \tag{7.2.187}$$

Avant de continuer, il est d'usage en mathématiques de définir un petit vocabulaire conventionnel en ce qui concerne cette fois-ci les éventuelles singularités de $f(z)$!

Rappelons au préalable que nous savons, et nous avons démontré, que toutes les informations sur les singularités de $f(z)$ sont contenues dans la partie principale de la série de Laurent (les puissances négatives) définie sur la couronne entourant z_0 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \tag{7.2.188}$$

La classification ci-après porte sur les "singularités isolées", c'est-à-dire un point singulier où $f(z)$ est analytique partout dans le voisinage de z_0 excepté en z_0 lui-même. Cette classification, qui nous le verrons permettra de distinguer 3 types de points singuliers, nous sera utile lors du développement de la théorie des résidus plus loin.

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#7.2.286) :

D1. Lorsque la limite de la fonction $|f(z)|$ existe en z_0, nous disons que la singularité est un "point singulier éliminable" ou une "singularité apparente".

Par exemple :

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} \tag{7.2.189}$$

ne semble pas être définie en $z = z_0 = 0$ mais nous avons un numérateur ayant une série de Laurent sans puissances négatives (donc une simple série de Taylor). Il vient alors en faisant la série de Maclaurin (donc la série de Taylor en $z = z_0 = 0$ en d'autres termes...) :

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3} + \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots \tag{7.2.190}$$

Nous voyons que $f(z)$ n'a finalement aucun terme en puissance négative et donc que nous avons éliminé la singularité (ou qu'elle n'en contient au fait pas... ce qui est facilement vérifiable avec Maple 4.00b).

Donc une autre manière équivalente de définir une singularité éliminable, est de dire que le développement de Laurent de la fonction ne contient aucun terme en puissance négative.

D2. Lorsqu'en z_0 la limite de $|f(z)|$ n'existe pas, nous parlons de "singularité essentielle".

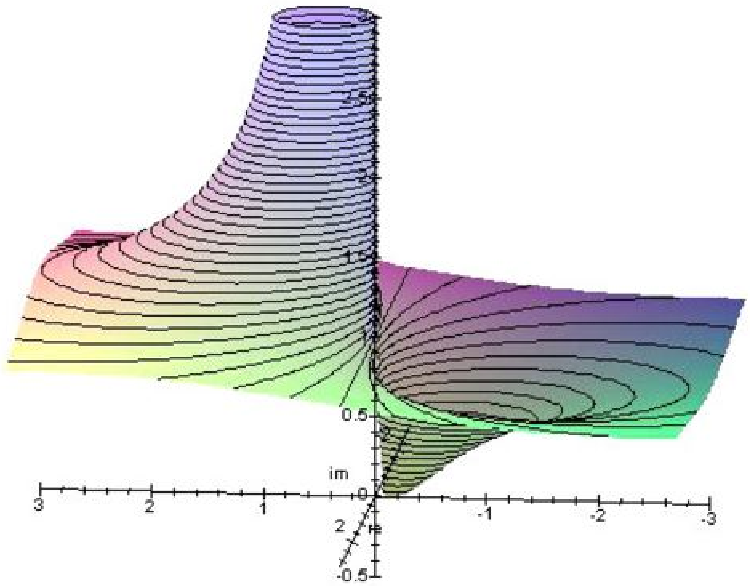
Par exemple, $z_0 = 0$ est une singularité essentielle pour la fonction :

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \tag{7.2.191}$$

En effet, si z tend vers zéro en venant de l'axe réel positif, la fonction diverge, plus précisément, elle tend vers $+\infty$. Si z vient du côté $\mathbb{R}_-$, la fonction tend vers zéro comme le montre bien le tracé Maple 4.00b suivant :

```
>plot3d(abs(exp(1/(re+I*im))),re=-5..5,im=-5..5,
view=[-3..3,-3..3,-0.5..3],orientation=[-130,70],contours=50,
style=PATCHCONTOUR,axes=frame,grid=[100,100],numpoints=10000)
>plot3d(abs(exp(1/(re+I*im))),re=-5..5,im=-5..5,
view=[-3..3,-3..3,-0.5..3],orientation=[-130,70],contours=50,
style=PATCHCONTOUR,axes=frame,grid=[100,100],numpoints=10000)
```

anglais



En cours

FIG. 7.94 – Singularité essentielle de $e^{1/z}$ avec Maple 4.00b

Effectivement :

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!} \tag{7.2.192}$$

Donc une autre manière équivalente de définir une singularité essentielle, est de dire qu'il y a un nombre infini de termes à puissances négatives dans la partie principale de la série de Laurent.

D3. Lorsqu'en z_0 la limite de $|f(z)|$ est $+\infty$, nous parlons de "pôle".

Il s'agit de la dernière catégorie dans laquelle nous pouvons ranger une fonction qui n'est classable ni dans la première, ni dans la deuxième définition précédente.

Donc une autre manière équivalente de définir un "pôle", est de dire qu'il y a un nombre fini de termes à puissances négatives dans la partie principale de la série de Laurent. Si ce nombre de termes est k, alors nous parlons de "pôle d'ordre k".

Remarques

R1. Nous disons parfois qu'une "singularité essentielle" est un " pôle d'ordre infini".

R2. Un pôle d'ordre 1 est appelé un "pôle simple". Un pôle d'ordre 2 est un "pôle double" et ainsi de suite...

Si nous reprenons notre exemple :

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2} \tag{7.2.193}$$

Nous avons démontré plus haut que la série de Laurent de cette fonction en

$$\frac{1}{z^2+1}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3(z-\mathrm{i})-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^4(z-\mathrm{i})^2-\ldots \tag{7.2.194}$$

Cette fonction a donc un pôle d'ordre 1 en $z_0=\mathrm{i}$ et aussi en $z_0=-1$ (et in extenso, nous devinons qu'elle en a un aussi en).

Cette fonction a donc un pôle trivial d'ordre 1 sur $z_0=\mathrm{i}$ et aussi sur $z_0=-1$ car dans ce dernier cas cette série infinie diverge vers $+\infty$ et nous pouvons facilement vérifier ceci avec la commande Maple 17.00 suivante :

```
>sum(-(I*(1/2))^n*(-2*I)^(n-2), n = 0 .. infinity)
```

7.2.8 Théorème des Résidus

Partons d'une fonction $f(z)$ dont le pôle est d'ordre inférieur ou égal à k.

Rendons-là analytique :

$$\phi(z)=(z-z_0)^k f(z) \tag{7.2.195}$$

c'est-à-dire que nous avons pris une fonction $f(z)$ que nous avons rendue analytique après élimination de ses pôles supposés en un nombre fini - ordre - inférieur ou égal à k en z_0.

Cette fonction $\phi(z)$ a alors un développement en série de Laurent dans un disque centré sur z_0.

Comme nous l'avons vu plus haut, nous pouvons alors en utilisant la relation ci-dessous :

$$\phi^{(k)}(z_0)=\frac{\mathrm{d}^k\phi(z_0)}{\mathrm{d}z^k}=\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}z \tag{7.2.196}$$

écrire :

$$\phi^{(k-1)}(z_0)=\frac{(k-1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^{k}}\mathrm{d}z \tag{7.2.197}$$

En cours de traduction de l'anglais

En utilisant $f(z)$ sous l'intégrale, il vient :

$$\phi^{(k-1)}(z_0)=\frac{(k-1)!}{2\pi\mathrm{i}}\oint f(z)\mathrm{d}z \tag{7.2.198}$$

Il faut bien analyser cette relation et comprendre qu'elle relie l'intégrale d'une fonction ayant des singularités avec la valeur en un point d'une fonction analytique n'ayant plus de singularités ! ! !

Cette dernière relation peut se réécrire en réarrangeant les termes :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(k-1)!}\phi^{(k-1)}(z_0) \tag{7.2.199}$$

Et en exprimant $\phi^{(k)}(z_0)$ en utilisant (autorisé car cette dernière fonction est analytique) le fait que :

$$\phi^{(k)}(z_0)=\frac{\mathrm{d}^k\phi(z_0)}{\mathrm{d}z^k} \tag{7.2.200}$$

Nous avons trivialement :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(k-1)}\phi(z_0)}{\mathrm{d}z^{(k-1)}} \tag{7.2.201}$$

Soit en explicitant $\phi(z)$ à nouveau :

$$\boxed{\oint f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(k-1)}}{\mathrm{d}z^{(k-1)}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]_{z=z_0}} \tag{7.2.202}$$

Cette dernière relation n'est pour rappel valable que pour UNE singularité isolée (au cas où vous auriez oublié les concepts introduits lors de notre présentation des singularités) et où k vaut au minimum 1 !

Les mathématiciens définissent alors :

$$\boxed{\mathrm{Res}[f(z);z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]_{z=z_0}} \tag{7.2.203}$$

comme étant le résidu de la fonction $f(z)$ au point étant une singularité isolée et ayant un pôle d'ordre k. Ou respectivement :

$$\mathrm{Res}[f(z);z_0]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint f(z)\mathrm{d}z \tag{7.2.204}$$

où l'intégrale curviligne est donc centrée en z_0.

Remarquons que le terme à droite de l'égalité dans la relation précédente correspond au coefficient c_{-1} de la série de Laurent. Effectivement :

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z'\Rightarrow c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{-1+1}}\mathrm{d}z'=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f(z')\mathrm{d}z' \tag{7.2.205}$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Res}[f(z);z_0]=c_{-1}} \tag{7.2.206}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Il vient donc qu'en une singularité isolée éliminable, le résidu est nul puisque comme nous l'avons vu plus haut, l'intégrale curviligne entourant un domaine sans singularité est nulle !

Bref, la relation :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z);z_0] = 2\pi\mathrm{i}c_{-1} \quad (7.2.207)$$

est très intéressante pour le physicien... car il y a donc une manière élégante lui permettant de calculer l'intégrale curviligne d'une fonction $f(z)$ non analytique ayant une unique singularité isolée et ce juste en connaissant l'ordre de ses pôles !

Par exemple si une fonction $f(z)$ n'a qu'un pôle d'ordre 1, il vient alors :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(1-1!)}\frac{\mathrm{d}^{1-1}}{\mathrm{d}z^{1-1}}\left[(z-z_0)^1 f(z)\right]_{z=z_0} = 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^1 f(z)\right] \quad (7.2.208)$$

et nous remplaçons donc z_0 par la valeur voulue dans la parenthèse $(z-z_0)$ et ensuite nous calculons la limite du terme entre crochets !

Maintenant pour aller plus loin, rappelons que le contour de l'intégrale curviligne :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z \quad (7.2.209)$$

et le chemin curviligne de l'intégrale :

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z' \quad (7.2.210)$$

sont au fait confondus (identiques) et les coefficients c_n ne dépendent pas de z ! La seule contrainte du chemin est qu'il soit fermé et dans un domaine analytique centré sur un point.

Donc si nous avons plusieurs singularités isolées, entourées par des chemins curvilignes reliés tels que présenté ci-dessous sur le plan complexe d'une fonction ayant un pôle d'ordre 3 (donc trois singularités non éliminables z_0, z_1, z_2) :

En cours de traduction de l'anglais

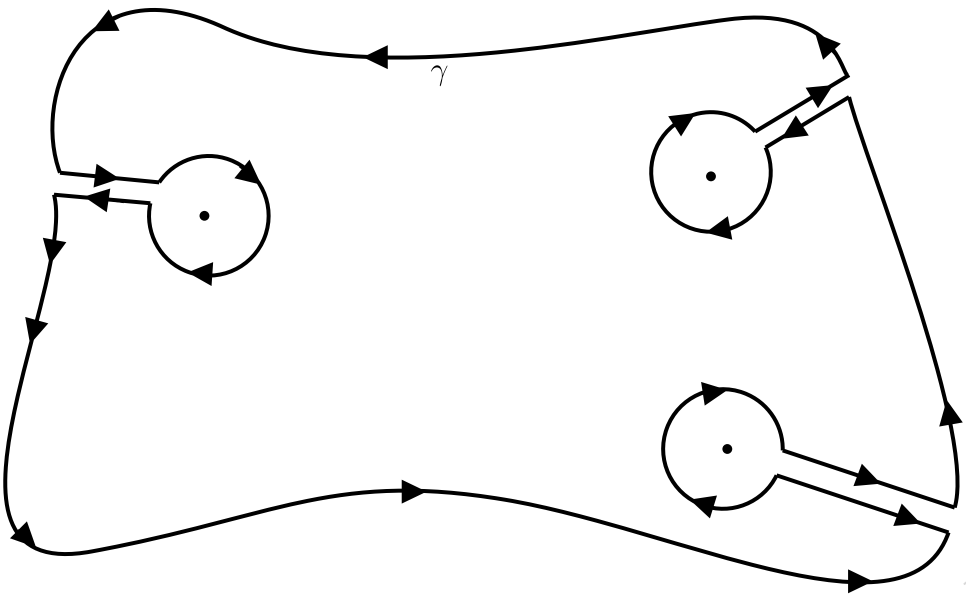


FIG. 7.95 – **Singularités multiples isolées entourées par des chemins curvilignes**

En cours de traduction de l'anglais

nous n'avons alors toujours qu'un seul chemin curviligne fermé mais dont les différentes singularités isolées sont reliées par des traverses où comme nous le savons, les chemins qui s'opposent, s'annulent ! Et rappelons que les coefficients sont les mêmes partout sur tout le chemin puisque celui-ci est dans un domaine analytique.

Nous avons alors la version généralisée du théorème des résidus pour une fonction f ayant f singularités isolées :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \text{Res}\left[f(z);z_i\right]$$
$$\text{Res}\left[f(z);z_i\right] = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k_i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k_i-1}}{\mathrm{d}z^{k_i-1}}\left[(z-z_i)^{k_i}f(z)\right] \tag{7.2.211}$$

avec cette approche rigoureuse digne des ingénieurs... qui notent cette dernière relation parfois :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum r_i \tag{7.2.212}$$

où r est donc un résidu. C'est un résultat important dans le domaine de résolution d'équations différentielles associées à certaines transformées de Laplace inverses (voir section Analyse Fonctionnelle page 2312). Ce résultat intermédiaire nous permettra d'en obtenir un autre un peu plus loin dont l'importance est majeure pour la section de Physique Quantique Corpusculaire.

✍**Exemple :**

Reprenons notre fonction :

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2} \tag{7.2.213}$$

Nous savons qu'elle a un pôle d'ordre 1 en $z_0=\mathrm{i}$ et un pôle d'ordre 1 en $z_0=-\mathrm{i}$. Donc si nous prenons cette fois la série de Laurent dans un chemin qui entoure les deux singularités (et non plus qu'une seule) nous avons alors une fonction avec un pôle d'ordre 2.

Il vient alors pour ce cas particulier :

$$\oint f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\text{Res}\left[f(z);z_i\right] \tag{7.2.214}$$

avec donc n valant 2.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[f(z);z_1\right]=\text{Res}\left[f(z);\mathrm{i}\right]&=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{(k_1-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k_1-1}}{\mathrm{d}z^{k_1-1}}\left[(z-z_1)^{k_1}f(z)\right]\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(1-1)!}\frac{\mathrm{d}^{1-1}}{\mathrm{d}z^{1-1}}\left[(z-\mathrm{i})^1\frac{1}{z^2+1}\right]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\right]\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\end{aligned} \tag{7.2.215}$$

et :

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[f(z);z_2\right]=\text{Res}\left[f(z);-\mathrm{i}\right]&=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{(k_2-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k_2-1}}{\mathrm{d}z^{k_2-1}}\left[(z-z_2)^{k_2}f(z)\right]\\&=\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{1}{(1-1)!}\frac{\mathrm{d}^{1-1}}{\mathrm{d}z^{1-1}}\left[(z-(-\mathrm{i}))^1\frac{1}{z^2+1}\right]\\&=\lim_{z\to-\mathrm{i}}\left[(z+\mathrm{i})\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\right]\\&=\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\mathrm{i}\end{aligned} \tag{7.2.216}$$

Nous pouvons vérifier cela avec Maple 4.00b :

```
>readlib(singular):
>singular(1/(1+z^2),z);
>readlib(residue):
>residue(1/(1+z^2),z=-I);
>residue(1/(1+z^2),z=I);
```

et dès lors :

$$\oint\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{2}\text{Res}\left[f(z);z_i\right]=0 \tag{7.2.217}$$

Au fait dans le cas présent, le théorème des résidus est nul car la fonction n'a pas de pôles à l'infini ce qui se vérifie puisque dans notre exemple :

$$\lim_{z\to\pm\infty} |f(z)| \neq \infty \tag{7.2.218}$$

Les physiciens quant à eux diraient que la force ne travaille pas sur le chemin... !

7.2.8.1 Pôle à l'infini

Nous avons dit juste précédemment que toute fonction qui n'avait pas de pôle à l'infini avait donc la somme des résidus de tous ces pôles qui était nulle. Ce résultat est très important en physique et mérite d'être approfondi !

Il est assez facile de reconnaître le nombre de pôles... mais pour reconnaître les pôles à l'infini on risque de se faire prendre au piège.

Considérons l'expression $f(z)\mathrm{d}z$. Si z est au voisinage de l'infini alors $1/z$ se trouve au voisinage de 0. Posons :

$$t = \frac{1}{z} \tag{7.2.219}$$

Nous avons alors :

$$f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \tag{7.2.220}$$

Donc le résidu à l'infini est tel que :

$$\text{Res}\,[f(z);\infty] = \text{R}\,[g(t);0] \tag{7.2.221}$$

avec :

$$g(t) = -\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) \tag{7.2.222}$$

Avec donc :

$$\text{Res}\,[g(t);0] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}\left[(t-0)^k g(t)\right] = -\lim_{t\to 0} \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}\left[t^k \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\right] \tag{7.2.223}$$

Cette dernière relation nous sera indispensable dans le chapitre de Physique Quantique Corpusculaire pour construire le modèle relativiste de l'atome d'hydrogène de Sommerfeld car nous aurons à y calculer une intégrale curviligne ayant un pôle.

Voyons un exemple avec la fonction qui nous accompagne depuis le début de ce chapitre. C'est-à-dire :

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} \tag{7.2.224}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il vient alors :

$$g(t) = -\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{1+t^2} \quad (7.2.225)$$

Or nous reconnaissons immédiatement la fonction initiale au signe près et qui n'a donc pas de pôle en 0. Donc $f(z)$ n'a pas de pôle à l'infini.

~100 %

14 votes, 61.43%

En cours de traduction de l' anglais

7.3. Topologie

La topologie (du grec : discours du lieu) est un domaine extrêmement vaste des mathématiques dont il est difficile de définir avec exactitude l'objet dont elle fait l'étude tellement les domaines où elle existe sont variés (topologie de la droite réelle, topologie des graphes, topologie différentielle, topologie complexe, topologie symplectique,...).

Nous distinguons principalement :

- La "topologie générale" qui établit les aspects fondamentaux de la topologie et étudie les propriétés des espaces topologiques et étudie les concepts inhérents aux espaces topologiques. Elle comprend une topologie par ensembles de points, qui est la topologie fondamentale utilisée dans toutes les autres branches (y compris des sujets tels que la compacité et la connectivité).
- La "topologie algébrique" qui tente de mesurer les degrés de connectivité à l'aide de constructions algébriques telles que les groupes d'homologie et d'homotopie.
- La "topologie différentielle" qui est le domaine traitant des fonctions différentiables sur des variétés différentiables. Elle est étroitement liée à la géométrie différentielle (voir la section du même nom dans le chapitre sur la Géométrie à la page 2822) et ensemble, elles constituent la théorie géométrique des variétés différentiables.
- La "topologie géométrique" étudie principalement les variétés et leurs intégrations (placements) dans d'autres variétés. Un domaine particulièrement actif est la topologie de basse dimension, qui étudie les variétés de quatre dimensions ou moins. Cela inclut la théorie des noeuds, l'étude des noeuds mathématiques.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Un "variété" est un analogue de dimension supérieure d'une courbe ou d'une surface. Une variété de dimension n est un espace, vous pouvez penser à une collection de points, qui ressemble localement à $\mathbb{R}^n$ pour un entier n. Toutes les courbes dans le plan bidimensionnel qui ne se coupent pas localement ressemblent à une partie d'une ligne. Toutes les surfaces lisses dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire les surfaces qui n'ont pas de plis, d'arêtes (limites) ou de points nets, ressemblent toutes localement au plan bidimensionnel. Ces surfaces sont donc des variétés bidimensionnelles. Il faut imaginer être capable d'arracher n'importe quel petit morceau de la surface lisse, puis de l'étirer, d'éliminer n'importe quelle « colline » et de ou « vallée » pour finir avec un morceau plat du plan bidimensionnel. Une variété est donc un espace localement euclidien.

L'image à avoir à l'esprit lorsque l'on pense aux variétés est la relation entre un globe et une carte. De petits morceaux du globe peuvent toujours être décrits par des cartes

(morceaux du plan bidimensionnel). De plus, le globe entier peut être couvert par une collection de cartes : un atlas.

Ce que nous pouvons dire dans un premier temps, c'est que dans ses fondements la topologie est très intimement liée à la théorie des ensembles, à l'étude de convergence des suites et séries, à l'analyse fonctionnelle, à l'analyse complexe, au calcul intégral et différentiel, au calcul vectoriel et à la géométrie pour ne citer que les cas les plus importants se trouvant dans la présent livre.

L'origine de la topologie provient des problèmes qu'ont posé les progrès de l'analyse fonctionnelle dans l'étude rigoureuse des fonctions continues, de leur dérivabilité, de leurs limites en un point (fini ou non), de l'existence d'extremums, etc. dans des espaces de dimensions supérieures (au fait, implicitement la topologie a pour objectif de créer des outils qui permettent facilement d'étudier les propriétés des fonctions dans toutes les dimensions). Tous ces concepts, demandaient pour le mathématicien une définition rigoureuse de l'idée intuitive de proximité, tout particulièrement lors d'opérations sur ces fonctions.

Nous allons essayer dans cette section d'identifier la base des structures qui permettent de parler de limites et de continuité et ce uniquement par curiosité en tant que consultants en R&D et ingénierie financière nous n'avons jamais vu d'application métier où les sujets ci-dessous sont absolument nécessaires pour développer une nouvelle entreprise ou résoudre un problème pratique.

La majorité des exemples que nous prendrons dans cette section seront dans $\mathbb{R}$ (la ligne droite $\mathbb{R}$ pour être plus exact...) car c'est le cas le plus utilisé par les ingénieurs (et la plupart du temps le seul !) et aussi parce que c'est celui que nous devrons utiliser pour les sections sur la Théorie des Graphes, les Statistiques, le Calcul Différentiel et Intégral ainsi que sur les Fractales. Lorsque nous restreignons notre étude de la Topologie à $\mathbb{R}$ nous parlons alors de "analyse réelle".

En cours de traduction de l'anglais

7.3.1 Topologie Générale

La topologie générale est la branche de la topologie traitant des définitions et des constructions de base de la théorie des ensembles utilisées en topologie. C'est le fondement de la plupart des autres branches de la topologie, notamment la topologie différentielle, la topologie géométrique et la topologie algébrique.

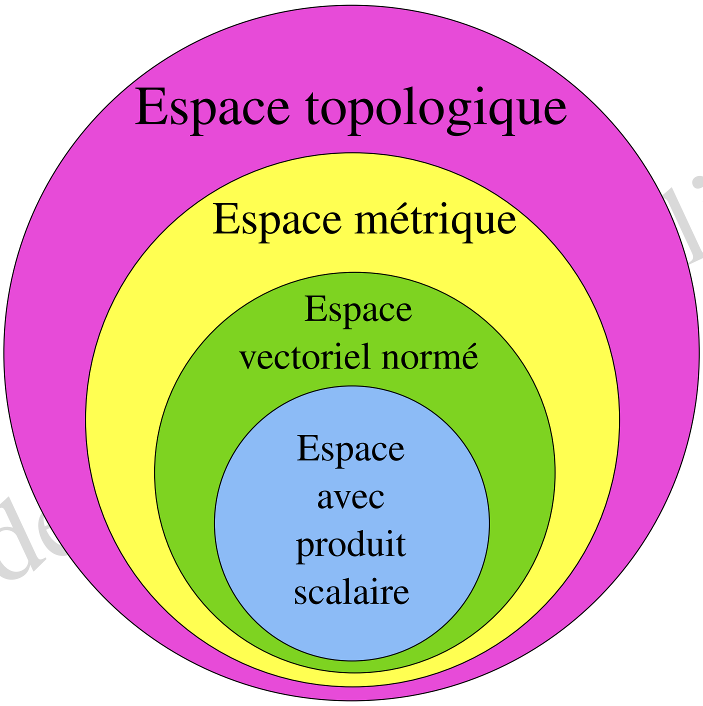
Les concepts fondamentaux de la topologie des ensemble de points sont la "continuité", la "compactivité" et "connectivité"

- Les fonctions continues amènent les points proches vers des points proches.
- Les ensembles compacts sont ceux qui peuvent être couverts par un nombre fini d'ensembles de taille arbitrairement petite.
- Les ensembles connectés sont des ensembles qui ne peuvent pas être divisés en deux morceaux éloignés.

Les expressions à proximité, arbitrairement petit et éloignés peuvent tous être précisés en utilisant des ensembles ouverts. Si nous modifions la définition de l'ensemble ouvert, nous modifions ce que sont les fonctions continues, les ensembles compacts et les ensembles connectés. Chaque choix de définition pour un ensemble ouvert est nommé "topologie". Un ensemble avec une topologie est nommé "espace topologique".

Les "espaces métriques" sont une classe importante d'espaces topologiques où les distances peuvent se voir attribuer un nombre (scalaire) nommé "métrique". Avoir une métrique simplifie de nombreuses preuves, et la plupart des espaces topologiques les plus courants sont des espaces métriques.

Nous comprenons donc mieux ce que nous allons étudier dans cette section qui peut être résumé par la figure suivante :



En cours de
l'anglais

7.3.1.1 Espaces topologiques

Les espaces topologiques forment le socle conceptuel sur lequel les notions de limite, de continuité ou d'équivalence sont définies.

Le cadre est suffisamment général pour s'appliquer à un grand nombre de situations différentes : ensembles finis, discrets, espaces de la géométrie, espaces numériques à n dimensions, espaces fonctionnels les plus complexes. Ces concepts apparaissent dans presque toutes les branches des mathématiques, ils sont donc centraux dans la vision moderne des mathématiques.

Définition (#7.3.287) : Soit un ensemble non vide X (la longueur d'une règle de plastique par exemple). Une "topologie $\mathcal{T}$"topologie" ou "espace topologique $(x, \mathcal{T})$" sur X est une famille de parties de X (de longueur de notre règle...) appelées "ouverts V" (comme les intervalles ouverts vus dans la section d'Analyse Fonctionnelle) telle que les axiomes suivants soient vérifiés :

A1. L'ensemble vide $\varnothing$ et X sont considérés comme des ouverts V et appartiennent obligatoirement à la famille de la topologie $\mathcal{T}$ (ces deux ouverts seuls constituent par ailleurs la "topologie grossière" la plus minimale satisfaisant à tous les axiomes) :

$$\varnothing \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad X \in \mathcal{T} \tag{7.3.1}$$

En d'autres termes, si nous imaginons notre règle en plastique, la mesure nulle (rigoureusement parlant : l'ensemble vide) doit appartenir à topologie définie sur la règle ainsi que la règle elle-même (vue comme sous-ensemble).

A2. Toute intersection finie d'ouverts de $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$:

$$V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{T} \quad \text{implique} \quad \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{T} \tag{7.3.2}$$

A3. Toute réunion d'ouverts de $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$:

$$V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{T} \quad \text{implique} \quad \bigcup_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{T} \tag{7.3.3}$$

Remarques

R1. Les mathématiciens notent fréquemment par la lettre O la famille des ouverts et F la famille des fermés. Convention que nous ne suivrons donc pas ici.

R2. Les fermés d'une topologie sont les complémentaires des ouverts. Par conséquent, la famille des fermés contient entre autres X et l'ensemble vide $\varnothing$...

R3. Il n'y a pas de différence entre partie et sous-ensemble d'un ensemble.

A4. Le couple $(X, \mathcal{T})$ forme un "espace de Hausdorff" ou "espace séparé" si de plus la propriété suivante dite "axiome de Hausdorff" est vérifiée :

$$\forall p, q \in X \quad \text{avec} \quad p \neq q, \exists V_p, V_q \in F \quad \text{tel que} \quad p \in V_p, q \in V_q \quad \text{et} \quad V_p \cap V_q = 0 \tag{7.3.4}$$

En cours d'anglais

Remarques

R1. Un exemple bien connu d'espace topologique est $\mathbb{R}$ muni de l'ensemble F engendré par les intervalles ouverts (par la loi d'union), c'est-à-dire les intervalles $]a, b[$.

R2. Nous verrons une application très concrète des espaces de Hausdorff lors de notre étude des fractales dans la section d'Informatique Théorique.

Définitions (#7.3.288) :

D1. Si nous notons par (X, V) un espace topologique, V désigne les ouverts de X, une "base", au sens topologique, de (X, V) est une partie B de V telle que tout ouvert de V soit réunion d'ouverts de B (c'est la même idée que les espaces vectoriels au fait mais appliquée à des ensembles... rien de bien méchant ! Pour voir un exemple vous pouvez aussi vous référer à la section de Théorie de la Mesure).

D2. En topologie, un sous-ensemble A d'un espace topologique X est nommé "ensemble dense" (en X) si pour chaque point x en X appartient à A ou est un point limite de A. De manière informelle, pour chaque point de X, le point est soit dans A, soit arbitrairement « proche » d'un membre de A. Par exemple, tout nombre réel est soit un nombre rationnel, soit un nombre arbitrairement proche. Donc $\mathbb{Q}$ est dense en $\mathbb{R}$.

7.3.2 Espace métrique et distance

Définition (#7.3.289) : Un "espace métrique" noté (X,d) ou encore X_d (ou même parfois juste X si le type de distance d ne peut pas être confondu) est par définition un ensemble X muni d'une application :

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \tag{7.3.5}$$

appelée "distance". Si la distance satisfait les "axiomes métriques" suivants :

A1. Positivité :

$$\forall x \neq y \in X \quad d(x,y) \geq 0 \tag{7.3.6}$$

A2. Séparation :

$$\forall x,y \in X \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{7.3.7}$$

A3. Inégalité triangulaire :

$$\forall x,y,z \in X \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{7.3.8}$$

A4. Symétrie :

$$d(x,y) = d(y,x) \tag{7.3.9}$$

En cours de traduction de l' anglais

nous disons alors que la distance est une "métrique". Si une distance respecte tous les axiomes ci-dessus à l'exception de l'inégalité triangulaire, nous disons alors que la distance est une "mesure de dissimilarité".

L'inégalité triangulaire est nécessaire pour définir une métrique car elle garantit que la distance entre deux points n'est jamais plus courte que la distance qui les sépare via un troisième point. Cette propriété est essentielle pour de nombreux concepts importants dans les espaces métriques, tels que la convergence et la continuité.

Remarques

R1. Certains lecteurs verront tout de suite que certaines de ces propriétés ont déjà été vues dans d'autres sections de ce livre lors de l'étude des distances entre points fonctionnels et lors de l'étude des normes (comme l'inégalité triangulaire démontrée dans la section de Calcul Vectoriel à la page 1805).

R2. Certains auteurs omettent l'axiome A1 ce qui est rigoureusement juste car découle trivialement de A3.

La "fonction distance" de est donc notée habituellement dans le sens le plus général qui soit en mathématiques (du moins pour autant que nous le sachions) :

$$d_{\text{name/symbol of distance}}(x,y) \tag{7.3.10}$$

nous verrons trois exemples bien plus loin avec un schéma.

Définition (#7.3.290) : Si nous n'imposons pas l'axiome A2, nous disons que d est une "semi-distance" sur X et si nous autorisons une semi-distance d à prendre la valeur $+\infty$, nous préférons dire que d est un "écart".

Remarques

R1. Si une distance d satisfait la propriété (nommée "inégalité triangulaire forte" ou "inégalité ultramétrique") :

$$\forall x,y,z \in X \quad d(x,y) \leq \max\{d(x,y),d(y,z)\} \tag{7.3.11}$$

propriété plus contraignante que l'inégalité triangulaire dans certains espaces, nous disons que d est "ultramétrique".

Un exemple de distance ultramétrique est l'arbre généalogique :

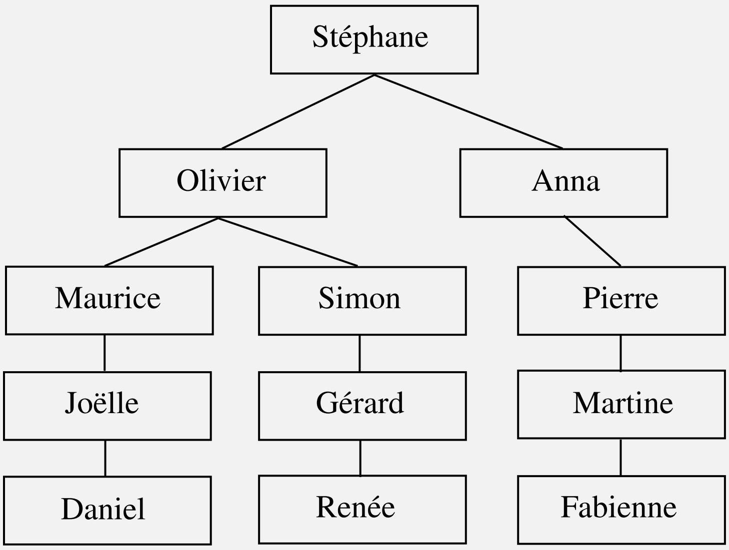


FIG. 7.96 – **Exemple de distance ultramétrique d'un organigramme**

Nous avons les distances suivantes :

$$\begin{aligned} d(\text{Daniel},\text{Stéphane}) &= 4 \\ d(\text{Renée},\text{Stéphane}) &= 4 \\ d(\text{Renée},\text{Fabienne}) &= 8 \\ d(\text{Daniel},\text{Fabienne}) &= 8 \\ d(\text{Daniel},\text{Renée}) &= 6 \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

Nous remarquons que les distances ne s'additionnent pas, mais que nous avons par contre :

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\} \tag{7.3.13}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} d(\text{Daniel}, \text{Fabienne}) \leq \max\{d(\text{Daniel}, \text{Renée}), d(\text{Renée}, \text{Fabienne})\} \\ 8 \leq \max\{6, 8\} \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

Notez que l'inégalité triangulaire forte implique l'inégalité triangulaire :

$$d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z)) \leq d(x,y) + d(x,z) \tag{7.3.15}$$

du fait que le maximum de deux nombres est inférieur ou égal à leur somme si les deux sont supérieurs ou égaux à zéro.

R2. Soit (X,d) un espace métrique et soit $F = \varnothing$ une partie de l'ensemble E. L'espace métrique (F,δ) où δ désigne la restriction $d_{F\times F}$ de d à est appelé "sous-espace métrique" de (X,d) (il convient de vérifier que la distance d est équivalente à la distance δ). Dans ce cas, nous disons aussi que F est munie de la distance induite par celle de X. Nous notons simplement d la distance induite.

Donnons maintenant quelques exemples :

✍**Exemples :**

E1. Si nous prenons pour X le plan, ou bien l'espace à trois dimensions de la géométrie euclidienne et une unité de longueur, la "distance" au sens usuel du terme est bien une distance au sens des 4 axiomes précédemment cités. Dans ces espaces, les trois points A, B, C satisfont comme nous l'avons démontré dans la section de Calcul Vectoriel :

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B) \quad d(A,B) \geq |d(A,C) - d(C,B)| \tag{7.3.16}$$

avec les autres inégalités obtenues par permutation circulaire de A, B, C. Ces inégalités sont bien connues par exemple entre les longueurs des côtés d'un triangle.

E2. Si nous prenons $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \geq 1$ et que nous dotons $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel euclidienne (et non pas non-euclidienne) et que nous prenons deux points :

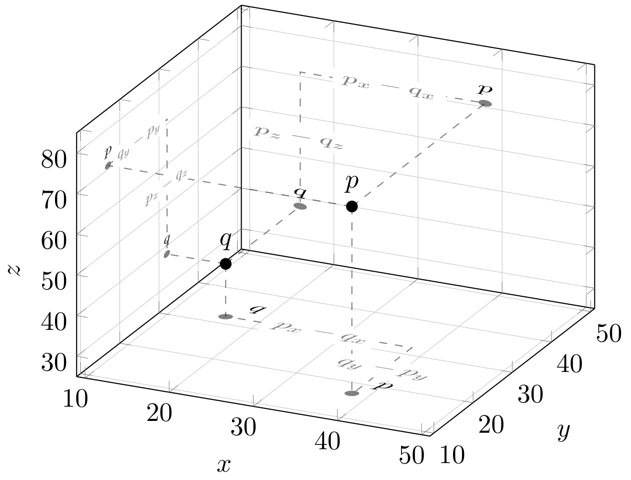
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{7.3.17}$$

dans $\mathbb{R}^n$, la distance est donnée alors par (nous avons déjà démontré cela dans la section de Calcul Vectoriel 1796) :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{7.3.18}$$

Cette distance est souvent représentée en trois dimensions comme suit :

$$\text{dist}(p,q)=\sqrt{(p_x-q_x)^2+(p_y-q_y)^2+(p_z-q_z)^2}$$



Cette distance satisfait aux quatre axiomes de la distance et nous l'appelons la "distance euclidienne" et est souvent notée L_2. Nous pouvons prendre (c'est une propriété intéressante pour la culture générale), que toute relation de la forme :

$$d(x,y)=\sqrt[p]{(x_i-y_i)^p} \tag{7.3.19}$$

est aussi une distance dans $\mathbb{R}^n$ (sans démonstration) apppelée "p-norme". Dans le cas particulier avec $n=1$, nous avons bien évidemment :

$$d(x,y)=|x-y|=\max(x-y,y-x) \tag{7.3.20}$$

qui est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et souventée notée L_2.

Les mathématiciens font encore plus fort en généralisant encore plus (la démonstration a peu d'intérêt pour l'instant) la relation antéprécédente (en prenant en compte la définition même de la distance) sous la forme :

$$\forall p\in[1,+\infty[\subset\mathbb{R}: \quad \delta_p(x,y)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(d(x,y))^n} \tag{7.3.21}$$

qui est appelée "distance höldérienne". Aussi parfois notée $L_p:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$:

$$\forall p\in[1,+\infty[\subset\mathbb{R}: \quad L_p(x)=||x||_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \tag{7.3.22}$$

Remarque

Suite à l'intervention d'un lecteur nous précisons qu'en toute rigueur l'inclusion ci-dessus devrait être notée $[1,+\infty[\subset\overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite achevée (précision également

En cours de traduction de l'anglais

valable pour l'inégalité de Minkowski ci-dessous).

Au même titre pour l'inégalité triangulaire, donnée alors par (voir section Calcul Vectoril page 1805) :

$$\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3: \quad \|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\Leftrightarrow\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{3}(x_i+y_i)^2}\leq\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{3}x_i^2}+\sqrt[2]{\sum_{i=1}^{3}y_i^2} \tag{7.3.23}$$

la généralisation, de par la vérification de l'existence de la distance höldérienne, nous donne la vraie "inégalité de Minkowski" :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},p\in[1,+\infty[\subset\mathbb{R}: \quad \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}\leq\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}+\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}y_i^p} \tag{7.3.24}$$

Continuons avec des exemples :

✍**Exemples :**

E3. Si nous prenons $X=\mathbb{C}$, nous considérerons la distance :

$$d(z,z')=|z-z'| \tag{7.3.25}$$

Ainsi, si $z=a+ib=(a,b)$ et $z'=a'+ib'=(a',b')$ nous avons le module qui de la même manière que la norme dans $\mathbb{R}^2$, forme une distance :

$$d(z,z')=\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2} \tag{7.3.26}$$

E4. Considérons aussi $E=\varnothing$ un ensemble arbitraire. Posons :

$$\delta(x,y)=1 \quad \text{si} \quad x\neq y \quad \text{et} \quad \delta(x,y)=0 \quad \text{si} \quad x=y \tag{7.3.27}$$

Il est assez facile de vérifier que cette distance vérifie les quatre axiomes et qu'elle est de plus ultramétrique. Cette distance est appelée "distance discrète" et le lecteur remarquera que, par analogie, nous avons opté d'exprimer cette distance par le symbole de la fonction Dirac δ (ce n'est pas innocent ! !) plutôt que de par le traditionnel d.

Il existe de nombreuses autres distances utilisées dans la pratique qui satisfont aux quatre axiomes de la distance. La technique utilisée pour mesurer les distances dépend de la situation particulière sur laquelle vous travaillez. Par exemple, dans certains domaines, la distance euclidienne peut être optimale et utile pour calculer les distances. D'autres applications nécessitent une approche plus sophistiquée pour calculer les distances entre des points ou des observations comme la distance cosinus. Comme une image vaut plusieurs fois mille mots voici une illustration des distances les plus connues qui respectent les quatre axiomes :

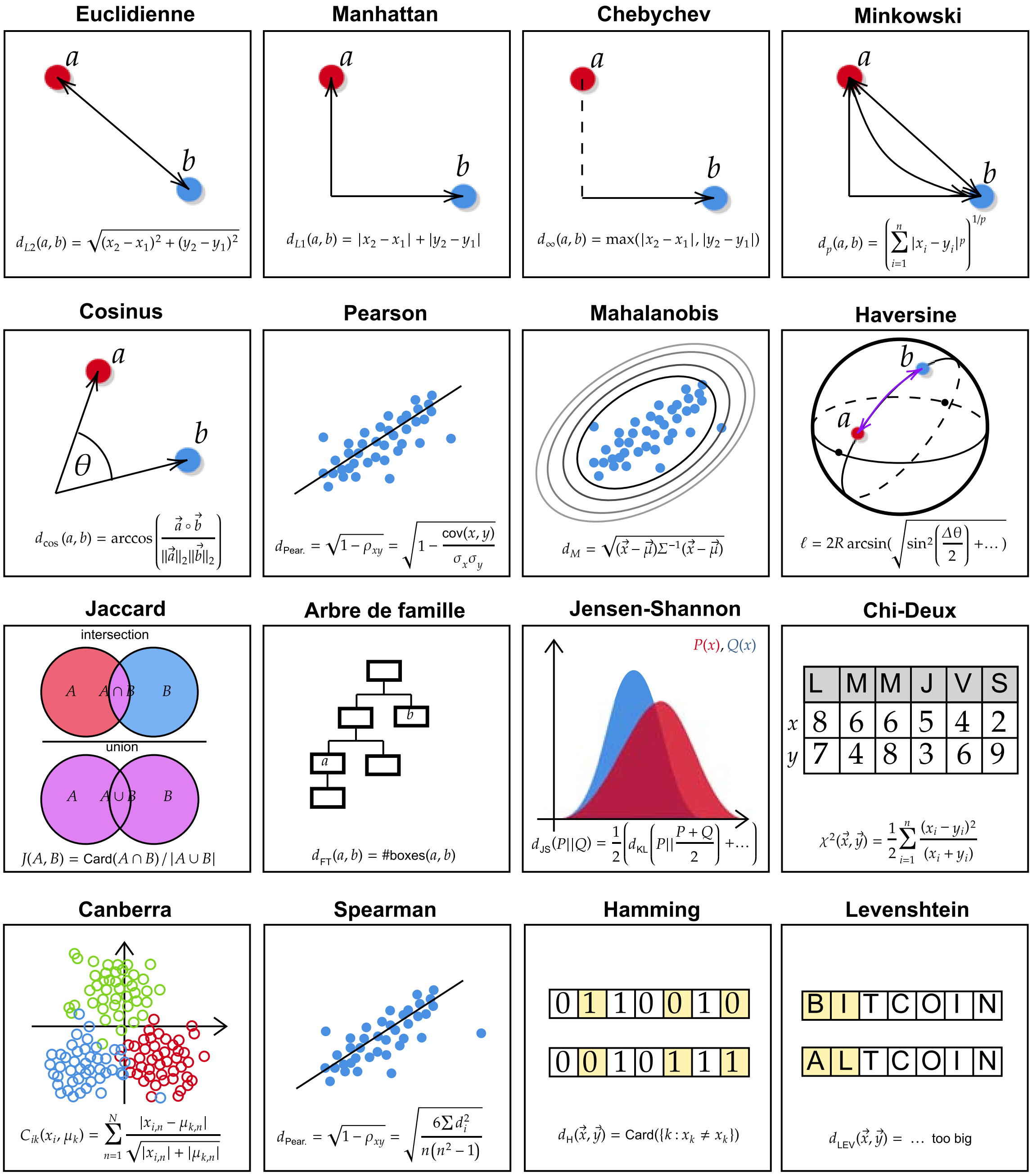


FIG. 7.97 – Types courants de distances

Nous avons déjà prouvé que la distance euclidienne satisfait les quatre axiomes à la page 1796. Nous n'avons pas fait la preuve que les quatre axiomes sont respectés pour toutes les autres distances visibles dans la figure ci-dessus dans ce livre (la preuve de l'inégalité triangulaire est assez ennuyeuse à écrire la plupart du temps).

Attention ! ! ! Certains informaticiens prétendent que la distance Sørensen-Dice et la distance Euclidienne au carré sont des distances... mais cette dernière ne respecte pas l'égalité du triangle à notre connaissance. De plus, il existe également diverses définitions de la distance cosinus et de la distance de Pearson et certaines d'entre elles ne respectent pas l'égalité triangulaire. Donc soyez prudent !

En cours de traduction de l' anglais

7.3.2.1 Distances Équivalentes

Parfois, deux distances différentes d et δ sur un même ensemble E sont assez ressemblantes pour que les espaces métriques liés $(E,d),(E,\delta)$ possèdent les mêmes propriétés pour certains objets mathématiques définis par d d'une part, et par δ d'autre part. Il existe plusieurs notions de ressemblances dont voici une première (avant les autres qui nécessitent des outils mathématiques que nous n'avons pas encore définis) :

Définition (#7.3.291) : Soient d et δ deux distances sur un même ensemble E, d et δ sont dites "distances équivalentes" s'il existe deux constantes réelles $c>0,C>0$ telles que :

$$\forall x,y\in E: \quad c\cdot d(x,y)\leq\delta(x,y)\leq C\cdot d(x,y) \tag{7.3.28}$$

Ainsi :

$$c\leq\frac{\delta(x,y)}{d(x,y)}\leq C \tag{7.3.29}$$

avec $c\leq C$. Nous notons cette équivalence par :

$$d\sim\delta \tag{7.3.30}$$

L'avantage de cette définition est la suivante : si nous avons une convergence pour l'une des métriques, alors nous avons également une convergence pour l'autre. Plus clairement :

$$d(x_n,x)\to 0\Leftrightarrow\delta(x_n,x)\to 0 \tag{7.3.31}$$

verbatim :

$$x_n\xrightarrow{d}x\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{\delta}x \tag{7.3.32}$$

7.3.2.2 Fonctions Lipschitziennes

Par rapport aux définitions ci-dessus, nous pouvons maintenant attribuer des propriétés supplémentaires à des fonctions telles que celles que nous avions définies dans la section Théorie des ensembles ou d'Analyse fonctionnelle et analysées (en partie...) dans la section Calcul Différentiel et Intégral. L'idée est aussi principalement de construire un ensemble d'outils permettant l'étude des propriétés différentielles de fonctions non différentiables !

Soient (E,d) et (F,δ) des espaces métriques, et soit $f:E\to F$ une fonction. Nous définissons les propriétés suivantes :

P1. Nous disons que f est une "isométrie" si (c'est plutôt intuitif... !) :

$$\forall x,y\in E: \quad \delta[f(x),f(y)]=d(x,y) \tag{7.3.33}$$

En cours de traduction de l' anglais

Exemple :

Sur $]0,+\infty[$, let $\delta(x,y)=|\log(x)-\log(y)|$ et sur $\mathbb{R}$ alors $d(x,y)=|x-y|$. Alors :

$$\begin{array}{ccc} (]0,+\infty[,\delta) & \longrightarrow & (\mathbb{R},d) \\ x & \mapsto & \log(x) \end{array}$$

est une isométrie !

P2. Si nous prenons la distance usuelle, la fonction L-Lipschitzienne ou "fonction Lipschitzienne d'ordre L", est alors définie sur un certain intervalle par :

$$\forall x,y\in E:\quad |f(x)-f(y)|\leq L|x-y| \tag{7.3.34}$$

que nous pouvons aussi écrire :

$$\forall x,y\in E:\quad \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leq L \tag{7.3.35}$$

ou ce qui reste pareil : toute ligne tracée entre deux points arbitraires du graphe doit avoir un coefficient de pente borné et fini (dérivée) entre L et $-L$.

Un tel L est appelé "constante de Lipschitz" pour la fonction f. Comme L peut être défini sur des intervalles (pas nécessairement sur tout le domaine de définition), la plus petite constante est parfois appelée "meilleure constante de Lipschitz".

Sinon, nous pouvons de manière équivalente définir une fonction comme étant continue Lipschitzienne si et seulement si il existe une constante L telle que, pour tout $x\neq y$:

$$\frac{\mathrm{d}(f(x),f(y))}{\mathrm{d}(x,y)}\leq L \tag{7.3.36}$$

Pour les fonctions à valeur réelle de plusieurs variables réelles, cela est vrai si et seulement si la valeur absolue des pentes de toutes les droites sécantes est délimitée par k.

Par conséquent tout Lipschitz doit être continu et toute fonction f qui a une valeur L bornée est plus restrictive que simplement être continue !

En cours de traduction de l'anglais

Exemples :

E1. La fonction $f(x)=\sin(x)$ est 1-Lipschitz car la dérivée du cosinus est comprise entre -1 et 1.

E2. La fonction $f(x)=x^2$ est localement Lipschitzienne car pour tout intervalle fermé et fini on peut trouver une borne L mais n'est pas globalement Lipschitzienne comme lorsque $x\to\pm\infty$ car alors la dérivée n'a pas non plus de limites.

E3. La fonction $f(x)=|x|$ n'a pas de dérivée sur $x=0$ au sens ordinaire. Mais sa dérivée au sens Lipschitzien sur $x=0$ est donnée par un intervalle fermé noté $\partial_L f(0)=[-1,1]$ donné par la borne de L comme les dérivées ordinaires sont inférieures supérieur ou égales à L en valeur absolue !

Ce dernier exemple nous montre que la notion de minimum local d'une fonction $f(x)$ au sens ordinaire se généralise avec la condition de Lipschitz. Comme nous pouvons maintenant simplement définir la condition de minimum local d'une fonction non lisse $f(x)$ comme :

$$0 \in \partial_L f(x) \tag{7.3.37}$$

plutôt que dans le sens ordinaire (plus restrictif) :

$$f' = 0 \tag{7.3.38}$$

Schématiquement pour une fonction continue Lipschitzienne, il existe un double cône (représenté en blanc) dont le sommet peut être translaté le long du graphe, de sorte que le graphe reste toujours entièrement à l'extérieur du cône.

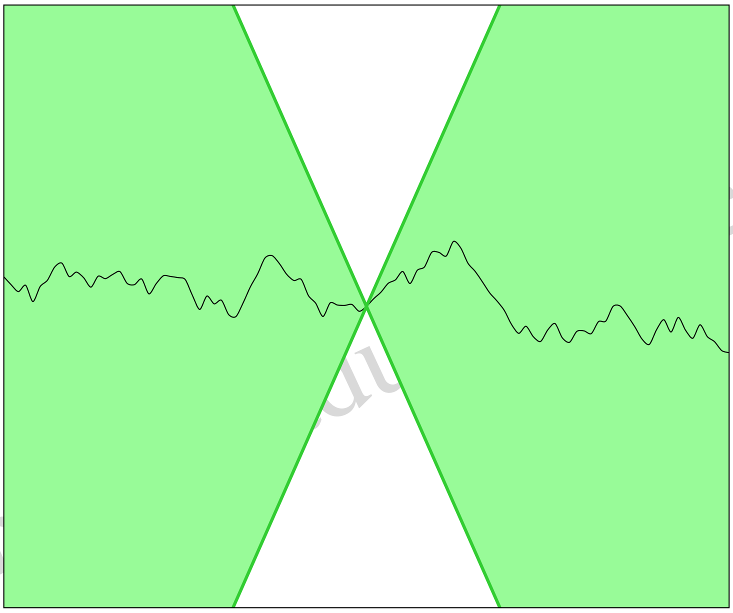


FIG. 7.98 – **Exemple d'une fonction Lipschitzienne (source : Wikipédia, auteur : Robert Zhang)**

En cours de traduction de l'anglais

Intuitivement, une fonction continue Lipschitzienne est donc limitée dans la vitesse à laquelle elle peut changer : il existe un nombre réel défini tel que, pour chaque paire de points sur le graphique de cette fonction, la valeur absolue de la pente de la droite qui les relie n'est pas supérieur à ce nombre réel ; cette borne est appelée "constante de Lipschitz" de la fonction (ou "module de continuité uniforme'). Par exemple, toute fonction qui a des dérivées premières bornées est Lipschitzienne.

P3. Si $L = 1$, nous disons que la fonction $f(x)$ est une "carte restreinte". Si $-1 < L < 1$, nous disons que $f(x)$ est "strictement contractante".

P4. Nous disons que deux espaces métriques sont des "espaces isométriques" s'il existe une isométrie surjective de l'un sur l'autre (ce qui est tout à fait naturel en géométrie...).

Remarques

R1. Une isométrie est toujours injective étant donné que par un des axiomes de la distance :

$$f(x)=f(y)\Rightarrow \delta[f(x),f(y)]=0=d(u,v)\Rightarrow u=v \tag{7.3.39}$$

mais en général n'est pas nécessairement surjective (pour un rappel de ces concepts voir page 403).

R2. Si (E,d) et (F,δ) sont isométriques, du point de vue de la théorie des espaces métriques ils ne sont pas discernables, car toutes leurs propriétés sont les mêmes, mais leurs éléments peuvent être de de nature très différente (séquences dans l'un et fonctions dans l'autre).

En cours de traduction de l' anglais

7.3.2.3 Continuité et Continuité Uniforme

Comme nous l'avons déjà vu dans la section Analyse Fonctionnelle (voir page 2201), une fonction continue est, grosso modo, une fonction pour laquelle de petits changements dans l'entrée entraînent de petits changements dans la sortie et qui permet l'analyse des limites. Autrement, une fonction est dite "discontinue". Formellement, cela était défini par :

$$\forall x_0 \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{7.3.40}$$

En d'autres termes rappelez-vous que cela signifie qu'une fonction est continue si pour chaque point x_0 du domaine E, nous pouvons faire les images de ce point ($f(x_0)$) et d'un autre point ($f(x)$) arbitrairement proche (d'une distance ε) si nous déplaçons l'autre point (x) suffisamment près (distance δ) de notre point donné.

Elle n'est donc pas continue si :

$$\exists x_0 \in E \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \tag{7.3.41}$$

La définition précédente n'est très bonne du point de vue des mathématiciens parce que :

1. Elle utilise un cas particulier de distance (la valeur absolue)
2. Elle définit la continuité uniquement pour un point donné x_0

Il est donc plus courant de généraliser en écrivant :

$$\boxed{\forall x_0 \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \forall x \in E: \quad d(x, x_0) < \lambda \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon} \tag{7.3.42}$$

Donnons maintenant une définition plus restrictive !

Definition (#7.3.292) : Une fonction $f(x)$ est "uniformément continue" si elle satisfait :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \forall x_0, x \in E: \quad d(x_0, x) < \lambda \Rightarrow \delta[f(x), f(x_0)] \leq \varepsilon} \tag{7.3.43}$$

avec $\lambda = \varepsilon / L$ et $L \neq 0$. En d'autres termes, si l'on peut rapprocher deux points aussi près qu'on le souhaite dans un espace, nous le pouvons aussi dans l'autre sens (ce qui assure en quelque sorte la dérivation !).

Elle n'est donc pas uniformément continue si :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \lambda > 0 \exists x_0, x \in E: \quad d(x_0, x) < \lambda \quad \text{et} \quad \delta[f(x), f(x_0)] \geq \varepsilon \tag{7.3.44}$$

Si nous comparons les deux relations :

$$\forall x_0 \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \forall x \in E: \quad d(x, x_0) < \lambda \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \tag{7.3.45}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0, \forall x_0, x \in E: \quad d(x_0, x) < \lambda \Rightarrow \delta[f(x), f(x_0)] \geq \varepsilon \tag{7.3.46}$$

la seule différence est l'ordre des quantificateurs. En effet, pour que quelque chose soit continu, vous pouvez vérifier "un x à la fois", donc pour chaque x, vous choisissez un ε puis trouvez un

En cours de traduction de l'anglais

$\varepsilon > 0$ qui dépend à la fois de x et ε pour que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Si nous voulons une continuité uniforme, nous devons d'abord choisir un ε, puis trouver un δ qui convient à TOUTES les valeurs x que nous pourrions avoir.

Comme les définitions précédentes ne sont pas faciles à comprendre pour tout le monde, voyons la version ingénieur de ces deux définitions :

Definitions (#7.3.293) :

D1. Une fonction $f(x) : E \to \mathbb{R}$ est "continue" en un point $x_0 \in A$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $delta > 0$ tel que chaque fois que $|x - x_0| < \delta$ (et $x \in E$) il s'ensuit que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

D2. Une fonction $f(x) : E \to \mathbb{R}$ est "uniformément continu" sur A si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ de telle sorte que chaque fois que $|x - x'| < \delta$ (et $(x, x') \in E$), il s'ensuit que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

En cours de traduction de l'anglais

Nous voyons donc mieux la différence : la continuité est définie en un point x_0, alors que la continuité uniforme est définie sur un ensemble E. En gros, la continuité uniforme nécessite l'existence d'un seul $\delta > 0$ qui fonctionne pour l'ensemble E, et non près du point unique x_0.

Le concept est illustré ci-dessous :

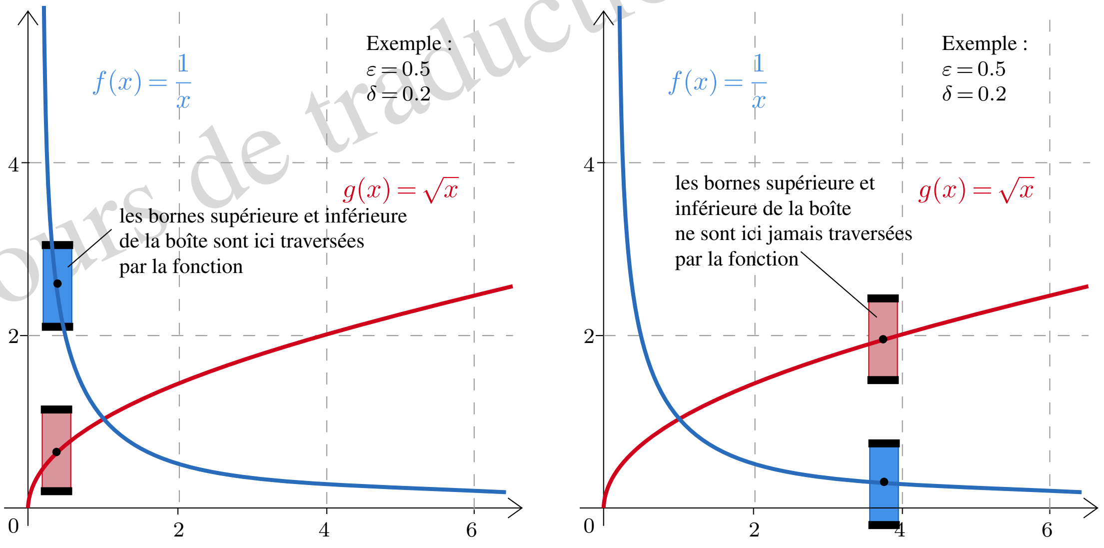
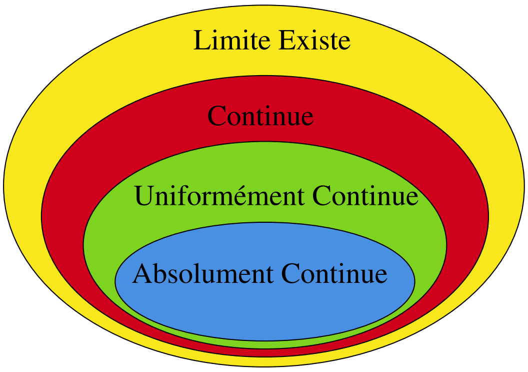


Fig. 7.99 – **Continuité uniforme illustrée (source Wikpedia, auteur : Eskil Simon Kanne Wadsholt)**

À un moment donné, le tracé de $f(x) = 1/x$ pénétrera le haut et/ou le bas d'une fenêtre (ici bleue) de hauteur $2\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et largeur $2\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tandis que (f) s'étend sur un intervalle x inférieur à δ, lorsque le centre de cette fenêtre se déplace sur le graphique dans la direction de $x = 0$. S'il existait une fenêtre dont le haut et/ou le bas ne sont jamais pénétrés par ce tracé lorsque la fenêtre se déplace sur le graphique dans la direction de $x = 0$, alors sa largeur serait infiniment petite, ce qui signifie que $f(x)$ n'est pas uniformément continue. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$, en revanche, est uniformément continue.

De cette définition, nous voyons que toute fonction uniformément continue est continue mais que la réciprocité n'est pas vraie (toute fonction uniformément continue n'est pas nécessairement continue) :



Si la distance choisie est connue (par exemple la valeur absolue des fonctions scalaires telles que $d = |\cdot|$ et $\delta = |\cdot|$) la notation de la définition précédente change évidemment un peu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0, x \in E: \quad |x_0 - x| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{7.3.47}$$

✍**Exemple :**

La fonction $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur l'intervalle $E = [0, +\infty[$.

Nous prouvons d'abord que notre fonction $f(x)$ est continue sur E. Rappelez-vous d'abord que :

$$\forall x_0 \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \forall x \in E: \quad d(x, x_0) < \lambda \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \tag{7.3.48}$$

Dans notre cas nous pouvons donc écrire et vérifier que :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0, x \in E: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon \tag{7.3.49}$$

Choisissons $x_0 = a - 1$ avec $a > 1$ et $\delta = \min(1, \varepsilon/2a)$ (notez que δ dépend de x_0 puisque a le fait) . Choisissons $x \in S$. Supposons que $|x - x_0| < \delta$. Alors $|x - x_0| < 1$ donc $x < x_0 + 1$ donc $x, x_0 < a$ donc :

$$|x^2 - x_0^2| = (x + x_0)|x_0| \leq 2a|x - x_0| < 2a\delta \leq 2a\frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon \tag{7.3.50}$$

Nous prouvons maintenant que $f(x)$ n'est pas uniformément continue sur E, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_0 \in E \exists x \in S: \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{et} \quad |x^2 - x_0^2| \geq \varepsilon \tag{7.3.51}$$

Soit $\varepsilon = 1$. Choisissons $\delta > 0$. Soit $x_0 = 1/\delta$ et $x = x_0 + \delta/2$. Alors $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$ mais :

$$|x^2 - x_0^2| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon \tag{7.3.52}$$

comme requis.

7.3.3 Ensembles Ouverts et Fermés

Définition (#7.3.294) : Considérons un ensemble E muni d'une distance d. Un sous-ensemble U de E est dit "sous-ensemble ouvert" si, pour chaque élément de U, il existe une distance r non nulle pour laquelle tous les éléments de E dont la distance à cet élément est inférieure ou égale à r, appartiennent à U, ce qui se traduit en langage mathématique :

$$U \text{ ouvert de } E \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r \in \mathbb{R}^+ | \forall y \in E : \quad d(x,y) \leq r \Rightarrow y \in U \tag{7.3.53}$$

En topologie, un sous-ensemble ouvert n'est alors qu'un concept abstrait généralisant l'idée d'un intervalle ouvert dans la ligne réelle.

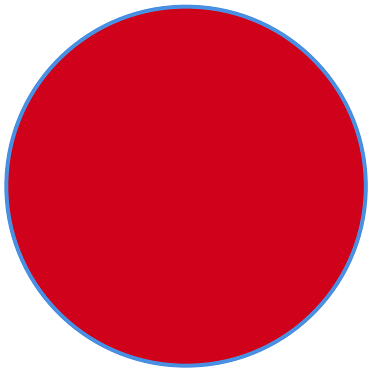
Remarque

Pour rappel, le symbole "|" signifie dans ce contexte "satisfait la propriété".

En pratique, cependant, les ensembles ouverts sont généralement choisis pour être similaires aux intervalles ouverts de la ligne réelle. La notion d'ensemble ouvert fournit une manière fondamentale de parler de proximité de points dans un espace topologique, sans définir explicitement un concept de distance.

✍**Exemple :**

Les points (x,y) satisfaisant $x^2+y^2=r^2$ sont coloriés en bleu. Les points (x,y) satisfaisant $x^2+y^2<r^2$ sont coloriés en rouge. Les points rouges forment un sous-ensemble ouvert du plan $\mathbb{R}^2$. Les points bleus forment un ensemble de limites. L'union des points rouge et bleu est un ensemble fermé.



Cette définition peut sembler complexe mais en fait, sa signification concrète est plus simple qu'il n'y paraît. En fait, selon cette définition, un ensemble ouvert dans un espace topologique n'est rien d'autre qu'un ensemble de points contigus et sans bords.

L'absence de bord découle de la condition $r \neq 0$. En effet, en raisonnant par l'absurde, si un ensemble ouvert U avait un bord, alors pour chaque point situé sur celui-ci (le bord) il serait toujours possible de trouver un point n'appartenant pas à U aussi proche que l'on veut de lui. Il s'ensuit que la distance r nécessaire devient donc nulle.

Définitions (#7.3.295) :

En ... de l'anglais

D1. Un "sous-ensemble fermé" est un "ouvert avec bord".

D2. Un "voisinage" d'un point E est un sous-ensemble de E contenant un sous-ensemble ouvert contenant ce point.

La définition d'un ensemble ouvert peut être simplifiée en introduisant une notion supplémentaire, celle de "boule ouverte" :

7.3.3.1 Boules

Soit x un élément de E :

Définition (#7.3.296) : Une "boule ouverte de centre x et de rayon $r>0$" ou "boule métrique de rayon r centrée en x" est le sous-ensemble de tous les points de E dont la distance à x est inférieure à r, ce que nous écrivons en général :

$$_{o}B_x^r(E)=\{y\in E|d(x,y)<r\} \tag{7.3.54}$$

Un ensemble ouvert peut également être défini comme un ensemble pour lequel il est possible de définir une boule ouverte en chaque point.

Typiquement dans le plan réel où d est la distance euclidienne :

$$_{o}B_x^r(\mathbb{R}^2)=\left\{y\in\mathbb{R}^2|d(x,y)<r\right\} \tag{7.3.55}$$

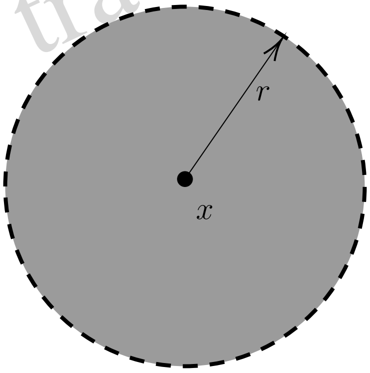


FIG. 7.100 – Une boule ouverte de rayon r, centrée au point x

Un ensemble ouvert peut également être défini comme un ensemble pour lequel il est possible de définir une boule ouverte en chaque point.

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Les ouverts ainsi définis forment ce que nous nommons une "topologie induite" par la distance d ou encore une "topologie métrique".

R2. Nous appelons une "couverture ouverte" U de E, un ensemble d'ouverts de E dont la réunion est E. En d'autres termes : une collection d'ensembles ouverts qui recouvrent

collectivement un autre ensemble.

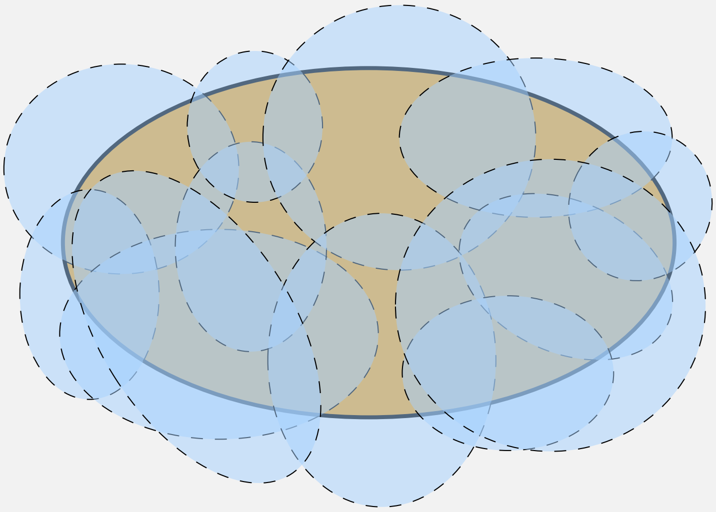
Formellement, si :

$$C=\{U_\alpha:\alpha\in A\} \tag{7.3.56}$$

est une famille indexée d'ensembles ouverts U_α, alors C est une couverture de X si :

$$E\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha \tag{7.3.57}$$

Visuellement de manière naïve cela donne :



Couverture Ouverte

Définition (#7.3.297) : Une "boule fermée" est similaire à une boule ouverte mais diffère dans le sens que nous y incluons les éléments situés à la distance r du centre :

$$_fB_x^r(E)=\{y\in E|d(x,y)<r\} \tag{7.3.58}$$

Remarque

Pour $0<r<r'$ les inclusions $_oB_x^r\subset B_x^r\subset B(x,r')$ sont des conséquences directes de la définition de boule ouverte et fermée.

✍**Exemple :**

La distance usuelle dans $\mathbb{R}$ est donnée par $d(x,y)=|x-y|$. Les boules y sont de simples intervalles. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$, nous avons :

$$_oB_x^r=]x-r,x+r[\quad\text{et}\quad {}_fB_x^r=[x-r,x+r] \tag{7.3.59}$$

Définition (#7.3.298) : Une "sphère" est donnée par :

$$S_x^r(E)=\{y\in E|d(x,y)=r\} \tag{7.3.60}$$

En cours de

Remarque

Puisque par définition, $r > 0$, les boules ouvertes et fermées ne sont pas vides car elles contiennent au moins leur centre. Par contre, une sphère peut être vide.

✍Exemple :

Avec $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ nous avons vu dans les exemples précédents que nous pouvions définir différentes distances. Pour les distinguer, nous les notons :

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \\ d_2(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \\ d_\infty &= \max\{y_i - x_i, x_i - y_i\} \end{aligned} \tag{7.3.61}$$

Alors, dans $\mathbb{R}^2$ les boules fermées de centre O et de rayon unité équivalentes aux trois formulations précédentes, ont la forme suivante (rappel : $0 < r \leq 1$ dans cet exemple) :

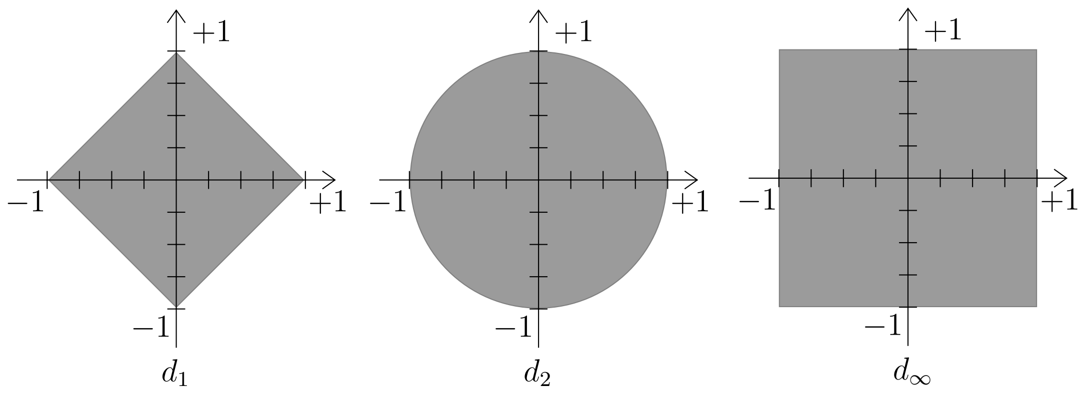


FIG. 7.101 – **Exemples de boules fermées de rayon unité avec différentes distances**

Par exemple en statistiques (voir la section du même nom) on utilise aussi (parmi beaucoup d'autres) la distance Chi-2 donnée par :

$$d_{\chi^2}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - x_i)^2}{x_i}} \tag{7.3.62}$$

Ou toujours dans le domaines des statistiques (multivariées) (voir la section Statistiques mais aussi celle de Génie Industriel) la "distance Mahalanobis" :

$$d_M(x) = \sqrt{(\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})} \tag{7.3.63}$$

Remarques

La démonstration que la distance de Mahalanobis est bien une distance est simple. En

effet, sans perte de généralité, réécrivons $x-\mu=\vec{x}$. Alors :

$$d_M(x)=\sqrt{\vec{x}^T\Sigma^{-1}\vec{x}} \quad (7.3.64)$$

Mais comme nous l'avons prouvé dans la section Statistiques à la page 597, Σ est semi-définie positive, donc Σ^{-1} est la plupart du temps inversible (voir section Statistiques page 598). Lorsqu'elle est inversible, toutes ses valeurs propres sont positives, alors Σ^{-1} est également semi-définie positive (voir section Algèbre Linéaire page 1931). Ceci implique que :

$$\vec{x}^T\Sigma^{-1}\vec{x}\geq 0 \quad (7.3.65)$$

La distance de Mahalonobis est donc bien une distance (il faudrait aussi prouver qu'elle respecte l'inégalité triangulaire pour montrer qu'elle est aussi une métrique !). Une autre façon de le voir en tant qu'ingénieur est simplement de considérer que comme $\Sigma^{-1}\vec{x}$ donne simplement juste un autre vecteur $\vec{y}$ tel que :

$$d_M(x)=\sqrt{\vec{x}^T\Sigma^{-1}\vec{x}}=\sqrt{\vec{x}^T\vec{y}}=\sqrt{\vec{x}\circ\vec{y}} \quad (7.3.66)$$

Et ceci est juste la distance euclidienne entre deux vecteurs différents !

Pour toute autre matrice semi-définie positive A autre que la matrice de variance-covariance nous définissons également la "métrique elliptique" :

$$d_e(x)=\sqrt{\vec{x}^TA^{-1}\vec{x}} \quad (7.3.67)$$

Ou dans la section sur les Codes Correcteurs d'Erreurs (voir page **??**) nous utilisons la distance de Hamming donnée par :

$$\forall x,y\in Q^n: \quad d_H(x,y)=\text{Card}\,\{i\in\mathbb{N}|x_i\neq y_i\}=\#\,\{i\in\mathbb{N}|x_i\neq y_i\} \quad (7.3.68)$$

et ainsi de suite...

7.3.3.2 Parties

Maintenant que nous avons défini les concepts de boules, nous pouvons enfin définir rigoureusement les concepts d'intervalles ouverts et fermés (qui dans un espace à plus d'une dimension sont nommés "parties") dont nous avons fait si souvent usage dans les sections d'Analyse Fonctionnelle et de Calcul Intégral Et Différentiel.

Définition (#7.3.299) : Soit (X,d) un espace métrique. Nous disons qu'une partie A de X est "bornée" s'il existe une boule fermée ${}_fB^r_{r0}(X)$ telle que $A\subseteq_f B^r_{r0}(X)$:

$$\forall x\in A,\, d(x_0,x)\leq r \quad (7.3.69)$$

Compte tenu de la remarque précédente sur les inclusions des boules, il est clair que nous pouvons remplacer l'adjectif "fermée" par "ouverte". De plus l'inégalité triangulaire entraîne que le caractère borné de A ne dépend pas du choix de x_0 (avec un x'_0 il suffit de remplacer r par $r'=r+d\,(x_0,x'_0)$).

En cours de traduction de

✍**Exemple :**

La topologie paire-impaire est la topologie où $X = \mathbb{N}$ et :

$$P = \{\{2k-1, 2k\}, k \in \mathbb{N}\} \qquad (7.3.70)$$

les partitions non bornées de rayon $r < 1$.

Nous voyons donc qu'à moins que P ne soit trivial, au moins un ensemble dans P contient plus d'un point, et les éléments de cet ensemble sont topologiquement indiscernables : la topologie ne sépare pas les points !

Définitions (#7.3.300) :

D1. Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Si X est un ensemble, nous disons qu'une fonction $f : X \mapsto Y$ est "bornée" si son image $f(X)$ est bornée (cas de la fonction sinus ou cosinus par exemple).

D2. Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie non vide de E. Pour tout $u \in E$ nous notons $d(u, A)$ et nous appelons "distance de u à A", le nombre réel positif :

$$d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a) = \inf \{d(u, a) | a \in A\} \qquad (7.3.71)$$

Nous prolongeons la notion en posant :

$$\forall u \in E : \quad d(u, \varnothing) = +\infty \qquad (7.3.72)$$

Si A et B sont deux parties (sous-ensembles) de E nous avons respectivement (c'est peut-être plus compréhensible ainsi pour certains lecteurs...) :

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) | x \in A, y \in B\} \qquad (7.3.73)$$

Il faut faire ici attention a bien interpréter $d(A, B)$ comme l'infinimum de la distance entre les ensembles A et B, car la distance entre les parties ne définit pas toujours une distance dans le sens usuel sur la partie par exemple de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Effectivement, si nous prenons encore une fois notre fameux exemple :

$$A = \{0\} \quad \text{et} \quad B = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\} \qquad (7.3.74)$$

nous avons $d(A, B) = 0$ quand $n \to 0$ alors que $A \neq B$.

Remarques

R1. Si le lecteur a bien compris la définition du concept de "parties" (et particulièrement l'exemple précédent) il remarquera qu'il n'existe pas nécessairement toujours $a \in A$ un tel que $d(u, A) = d(u, a)$. En conséquence, nous écrivons trivialement :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) \in A : \quad d(u, A) \leq d(u, \alpha) < d(u, A) + \varepsilon \qquad (7.3.75)$$

De plus, si un tel α existe, il n'est bien évidemment pas nécessairement unique.

En cours de traduction de l'anglais

R2. Il convient peut être de rappeler que cette distance satisfait également les quatre axiomes des distances.

D3. Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E. Nous appelons "adhérence" de A et notons $\text{adh}(A)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\text{adh}(A) = \{u \in E | d(u, A) = 0\} \tag{7.3.76}$$

Par exemple, l'adhérence de la partie (sous-ensemble) des rationnels $\mathbb{Q}$ (la partie A) de $\mathbb{R}$ (l'espace métrique E) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ lui-même puisque tout nombre réel est limite de rationnels.

En particulier, puisque $\forall u \in A : \quad = +\infty$, nous avons $\text{adh}(\varnothing) = \varnothing$, et puisque $\forall u \in E :$ $d(u, E) = 0$, nous avons $\text{adh}(E) = E$.

Remarques

R1. Tout élément de l'ensemble $\text{adh}(A)$ est dit "point adhérent" à A.

R2. Nous disons qu'une partie A de E est une "partie fermée" si elle est égale à son adhérence.

R3. Nous disons qu'une partie A de E est une "partie ouverte" si son complémentaire par rapport à E :

$$\complement_E A = A \setminus E \tag{7.3.77}$$

est fermé.

En cours de

Il s'ensuit que (de par les définitions) :

$$u \in \text{adh}(A) \Leftrightarrow \forall r > 0 : \quad {}_f B_u^r \cap A = \varnothing \tag{7.3.78}$$

et :

$$A \text{ est ouverte } \Leftrightarrow \forall u \in A, \exists \rho > 0 : \quad {}_f B_u^r \subset A \tag{7.3.79}$$

avec quelques propriétés (censées être très évidentes mais nous pouvons en donner la preuve sur demande) :

P1. Si $A \subset E$ et $B \subset E$ vérifient $A \subset B$, nous avons :

$$\forall u \in E : \quad d(u, B) \leq d(u, A) \tag{7.3.80}$$

P2. Pour tout $A \subset E$, tout $u \in E$ nous avons :

$$d(u, A) = d(u, \text{adh}(A)) \tag{7.3.81}$$

Dernière propriété qui a pour corollaire (évidente et donc sans preuve sauf sur demande) :

Si pour tout $u \in E$, nous avons $d(u, A) = d(u, B)$ et $A, B \neq \varnothing$, nous avons alors :

$$\text{adh}(A) = \text{adh}(B) \tag{7.3.82}$$

7.3.3.3 Boules Généralisées

La notion de distance d'un point à un ensemble permet d'étendre les notions de boule et de sphère vues précédemment. Nous allons voir maintenant les concepts de base d'une "boule généralisée" également appelée parfois "boule formelle".

D1. Soit $A \neq \varnothing$ et soit un $r > 0$. Nous appelons "boule ouverte généralisée" de centre A et de rayon r, l'ensemble suivant :

$$_oB_A^r = \{y \in E | d(y, A) < r\} \quad (7.3.83)$$

et respectivement "boule fermée généralisée" :

$$_fB_A^r = \{y \in E | d(y, A) \leq r\} \quad (7.3.84)$$

et respectivement "sphère généralisée" :

$$S_A^r = \{y \in E | d(y, A) = r\} \quad (7.3.85)$$

D2. Soit (E, d) un espace métrique et soient A, B deux parties non vides de E. Nous notons $g(A, B)$ et appelons "gap" (qui signifie "écartement" ou "espacement" en français) de A à B, le nombre réel supérieur ou égal à zéro :

$$\begin{aligned} g(A, B) &= \inf_{a \in A} g(a, B) = \inf_{b \in B} g(b, A) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} g(a, b) = \inf_{b \in A} \inf_{a \in B} g(a, b) \\ &= \inf\{d(a, b) | (a, b) \in A \times B\} \end{aligned} \quad (7.3.86)$$

Remarque

L'inégalité triangulaire $g(A, B) \leq g(A, C) + g(C, B)$ n'est pas valide dans le cadre des gap. Il suffit pour le démontrer, d'un seul et unique exemple qui contredirait l'inégalité.

✍**Exemple :**

Dans $\mathbb{R}$ prenons $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 3\}$ nous avons alors :

$$(g(A, B) = 1) > g(A, C) + g(C, B) = 0 + 0 = 0 \quad (7.3.87)$$

Il y a donc bien contradiction.

En cours de traduction de l'anglais

7.3.3.4 Diamètre

Définition (#7.3.301) : Soit (E,d) un espace métrique et soit A une partie non vide de E. Nous notons $\text{diam}(A)$ et nous appelons "diamètre" de A, le nombre réel positif non nul :

$$\text{diam}(A)=\sup\{d(a,b)|(a,b)\in A\times A\} \tag{7.3.88}$$

Toute partie non vide A d'un espace métrique vérifiant $\text{diam}<+\infty$ sera aussi dite "bornée".

Remarque

Nous considérons la partie vide $\varnothing$ comme un borné de diamètre A.

Si l'espace métrique (E,d) tout entier est borné, nous disons que la distance d est bornée. Par exemple, la distance discrète est bornée, la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Nous avons aussi les propriétés suivantes (les deux premières sont normalement triviales, la troisième découle de la définition du diamètre) :

P1. $\text{diam}(A)=0\Leftrightarrow A=\{a\}$ or $A=\varnothing$

P2. $A\subset B\Rightarrow \text{diam}(A)\leq\text{diam}(B)$

P3. $\text{diam}({}_fB_x^r)\leq 2r, \text{diam}({}_oB_x^r)\leq 2r, \text{diam}(S_x^r)\leq 2r$

> Attention ! ! ! Concernant cette dernière propriété il faut perdre l'habitude de penser avec la distance euclidienne. Le premier piège fréquent est de penser que le deuxième diamètre (celui de la boule ouverte) devrait être strictement inférieur mais ce serait oublier que le bord n'a pas d'épaisseur rigoureusement parlant !

Il y a aussi souvent une incompréhension qui pose souvent problème avec $\text{diam}(S_x^r)\leq 2r$. Pour s'en convaincre il suffit de prendre la distance discrète (qui vaut si deux points sont pas confondus 1, sinon 0). Ainsi, dans un espace métrique où nous prenons S_x^r avec $r=1$, nous avons $\text{diam}(S_x^1)\leq 1$ (c'est un cas intéressant car complètement contre-intuitif).

P4. $\text{diam}(A\cup B)\leq\text{diam}(A)+g(A,B)+\text{diam}(B)$

Pour s'en convaincre, dans $\mathbb{R}$ prenons $A=B$, nous avons alors (infériorité stricte triviale) :

$$(\text{diam}(A\cup B)=\text{diam}(A))\leq\text{diam}(A)+g(A,B)+\text{diam}B) \tag{7.3.89}$$

P5. A est borné si et seulement si : $\exists r>0, \exists x\in E:\quad A\subset_o B_x^r$

Définition (#7.3.302) : Nous appelons "excès de Hausdorff" ou "distance de Hausdorff" de X sur Y :

$$e(X,Y)=\sup\{d(x,Y)|x\in X\}=\max\{d(x,Y)|x\in X\} \tag{7.3.90}$$

En co... ction de l' anglais

que nous retrouvons aussi souvent noté dans la littérature avec la notation plus condensée :

$$e(X,Y) = d_H(X,Y) \quad (7.3.91)$$

ou plus explicitement :

$$d_{\mathrm{H}}(X,Y) = \max\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x,y),\ \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} d(x,y)\right\} \quad (7.3.92)$$

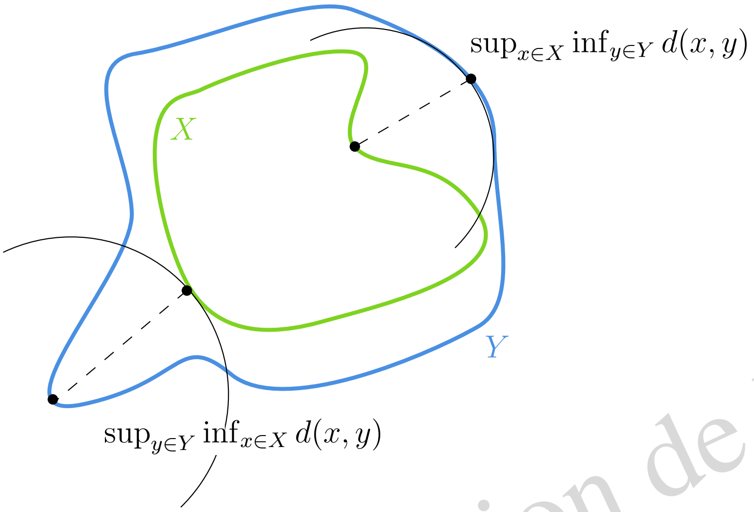


FIG. 7.102 – Composantes du calcul de d_H entre X et Y (source : Wikipédia)

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Prenons $X \subset \mathbb{R}^2$ le cercle unité centré à l'origine et pour Y le carré qui lui est circonscrit. Des notions de géométrie élémentaire nous amène évidemment à constater que la distance de Hausdorff entre le cercle et le carré est donc :

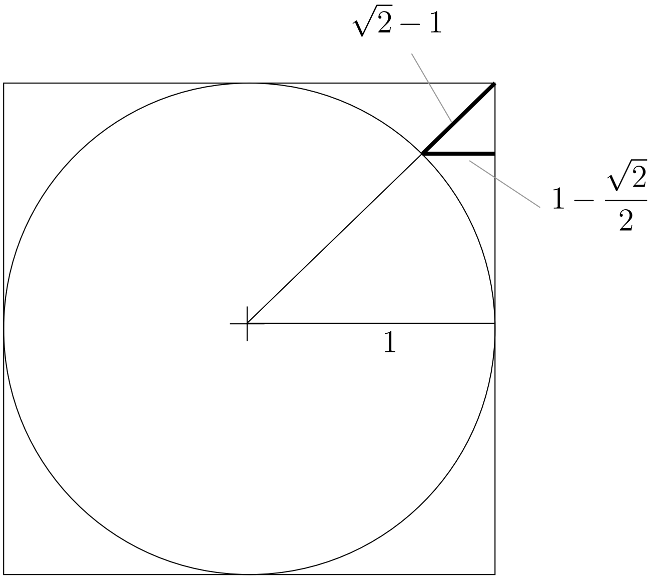


FIG. 7.103 – Exemple niveau lycée d'une distance de Hausdorff dans le plan

soit techniquement :

$$e(X,Y)=d_H(X,Y)=\sqrt{2}-1 \quad (7.3.93)$$

Remarque

Nous avons en général $e(X,Y)\neq e(Y,X)$ et ces quantités peuvent ne pas être finies.

7.3.4 Variétés

Nous introduisons maintenant les "variétés". Ce sont des espaces topologiques qui sont "localement comme $\mathbb{R}^2$" (notre espace par exemple...), c'est-à-dire locallement euclidiens.

Définitions (#7.3.303) :

D1. Une "variété topologique de dimension n" est un espace de Hausdorff M tel que pour tout $p\in M$ il existe un voisinage $U\subset M$ ouvert avec $p\in U$, un voisinage ouvert $U'\subset\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme tel que :

$$\varphi:U\mapsto U' \quad (7.3.94)$$

D2. Un "homéomorphisme" entre deux espaces est une bijection continue dont l'inverse est également continue.

D3. Les couples (U,φ) sont appelés des "cartes", U étant le "domaine de la carte" et φ "l'application de coordonnées". Au lieu de "carte" nous disons parfois aussi "système de coordonnées".

Remarque

Nous noterons par $\dim(M)$ la dimension d'une variété topologique. Ainsi :

$$\dim(M^n)=n \quad (7.3.95)$$

D4. Soit M une variété topologique de dimension n. Une famille A de cartes de M est appelée un "atlas" si pour tout $x\in M$, il existe une carte $(U,\varphi)\in A$ telle que $x\in U$.

Notons que si $(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)$ sont deux cartes de M telles que (ne vérifiant pas l'axiome de Hausdorff) $U_1\cap U_2\neq\varnothing$, alors l'application de changement de cartes :

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1\cap U_2)\rightarrow\varphi_2(U_1\cap U_2) \quad (7.3.96)$$

En cours de traduction de l'anglais

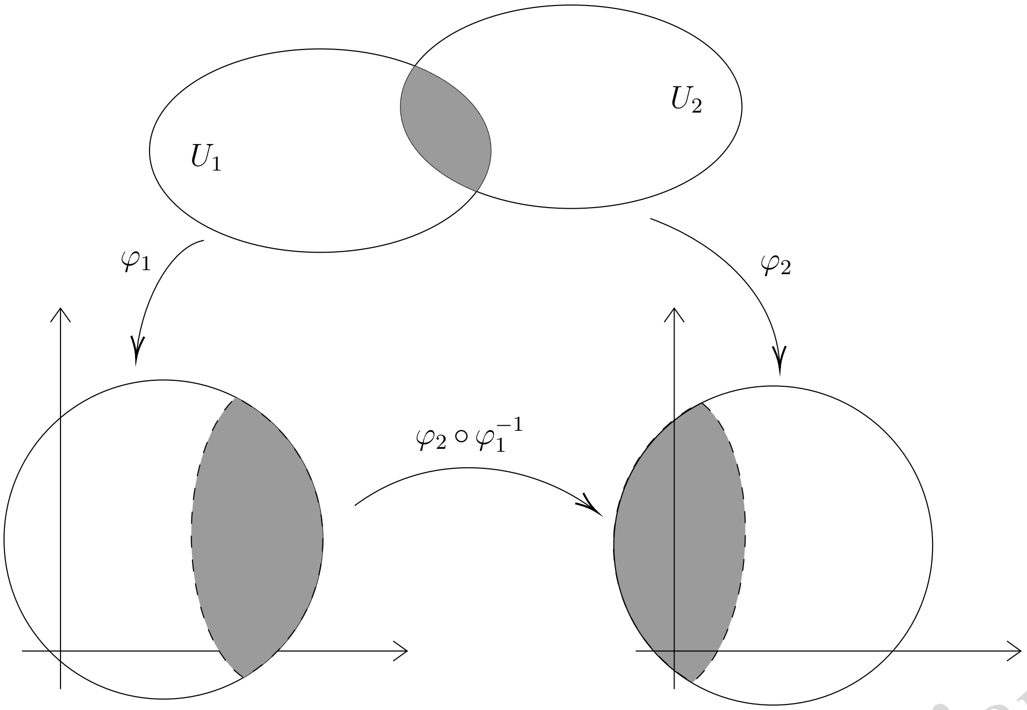


FIG. 7.104 – **Un mappage homéomorphique naif**

est évidemment aussi un homéomorphisme. On retrouve aussi parfois la figure ci-dessus dans les manuels scolaires sous une forme plus explicite :

En cours de traduction de l' anglais

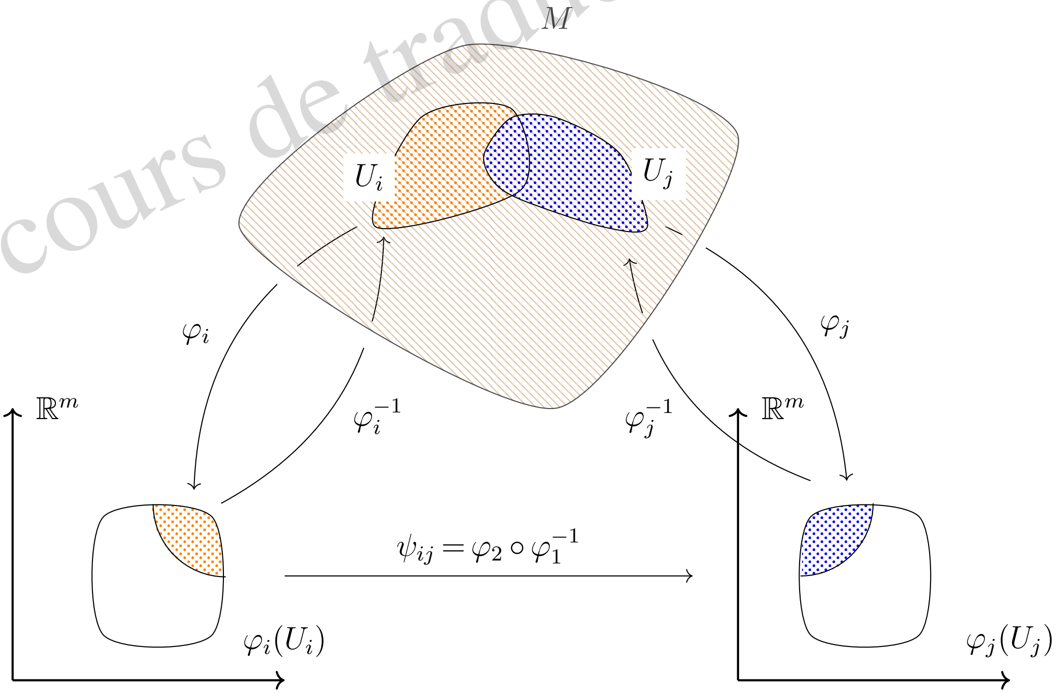


FIG. 7.105 – **Un mappage homéomorphique un peu plus complexe**

Plus "géométriquement", cela ressemble à ceci :

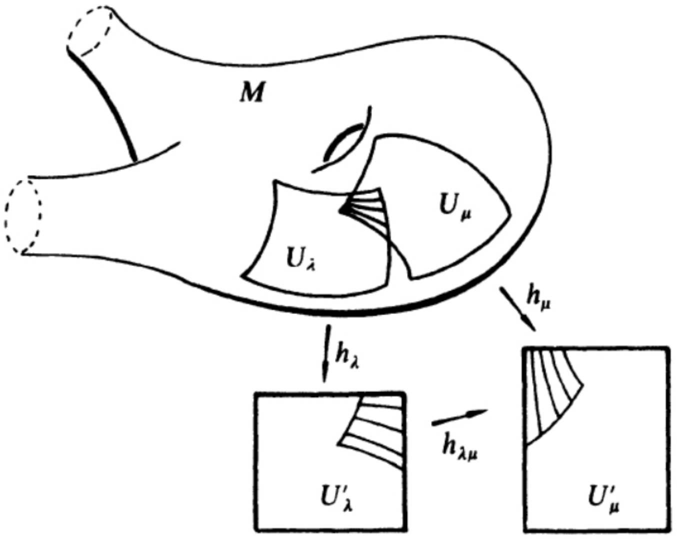


FIG. 7.106 – **Mappage homéomorphique intuitif (source : ?)**

7.3.4.1 Sous-Variétés

Définition (#7.3.304) : Un sous-ensemble d'une variété est lui-même une variété nommée "sous-variété".

✍**Exemple :**

Une sphère de l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{R}^3$ est une variété (algébrique) puisqu'elle est définie par une équation polynomiale. Par exemple et est évidemment lisse et localement euclidienne :

$$x^2+y^2+z^2-1=0 \tag{7.3.97}$$

définit la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. Son intersection avec le plan xy est un cercle donné par le système d'équations polynomiales :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-1&=0 \\ z&=0 \end{aligned} \tag{7.3.98}$$

Le cercle est donc lui-même une variété algébrique et une sous-variété de la sphère et aussi du plan.

En cours de traduction de l'anglais

7.3.4.2 Homéomorphismes de Surfaces

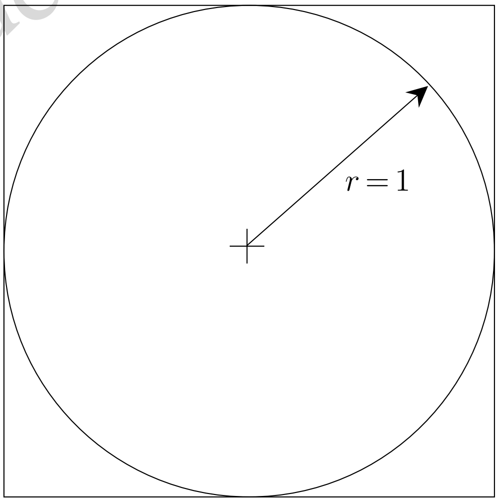
Définition (#7.3.305) : Dans le domaine mathématique de la topologie, un "homéomorphisme" ou "isomorphisme topologique" est une fonction continue entre des espaces topologiques qui a une fonction inverse continue. En gros, un espace topologique est un objet géométrique, et le l'homéomorphisme est un étirement et une flexion continus de l'objet dans une nouvelle forme. Ainsi, un carré et un cercle sont homéomorphes l'un par rapport à l'autre, mais une sphère et un tore ne le sont pas.

Plus formellement, rappelons qu'une application $\varphi : X \mapsto Y$ entre deux espaces topologiques est appelée un "homéomorphisme" si elle possède les propriétés suivantes :

1. φ est une bijection (un-à-un et sur)
2. φ est continue
3. La fonction réciproque φ^{-1} est continue

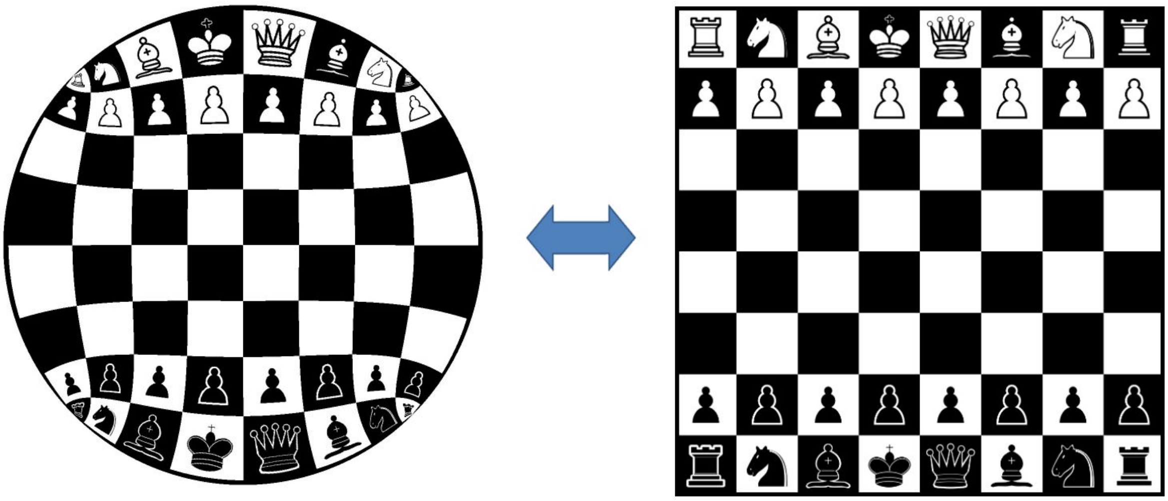
Pouvons-nous dire qu'un carré (étant une carte spéciale dans $\mathbb{R}^2$) est homéomorphe à un cercle (étant une autre carte spéciale dans $\mathbb{R}^2$), ou un tore en une tasse de thé... Si cela est possible, nous devons pouvoir trouver une expression bijective de forme fermée entre les deux surfaces.

Comme les concepts théoriques purs ne sont pas du tout intuitifs à notre avis, commençons par un cas particulier bidimensionnel. Montrons (prouvons) d'abord que nous pouvons transformer tous les points intérieurs du carré de côté 1 en tous les points intérieurs du cercle de rayon 1. Ceci est représenté par la figure bien connue suivante :



De tels mappages présentent un intérêt particulier en design industriel ou tout simplement à des fins de communication (effets Photoshop ou déformation de graphiques statistiques comme nous le faisons souvent dans le logiciel `R`) :

En cours de traduction de l'anglais



ou pour défisher les capteurs, miroirs ou photos de type fish eye :

glais

En cours

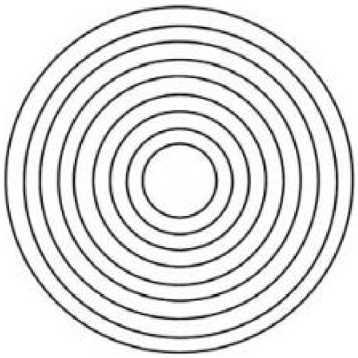
Rappelons que nous avons défini le disque unité comme l'ensemble :

$$\mathcal{D}=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u^2+v^2\leq 1\right\} \tag{7.3.99}$$

Si nous considérons le disque unité comme un continuum de cercles concentriques dont les rayons augmentent de zéro à un, nous pouvons paramétrer le disque unité comme l'ensemble :

$$\mathcal{D}=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u^2+v^2=t^2,0\leq t\leq 1\right\} \tag{7.3.100}$$

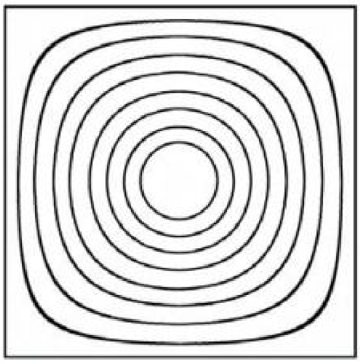
Ce faisant, nous avons introduit un paramètre t qui est la distance du point (u,v) à l'origine.



Par analogie avec le continuum circulaire du disque unitaire, nous pouvons noter la région carrée $[-1,1]\times[-1,1]$ comme l'ensemble :

$$\mathcal{S}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=t^2, 0\leq t\leq 1\right\} \tag{7.3.101}$$

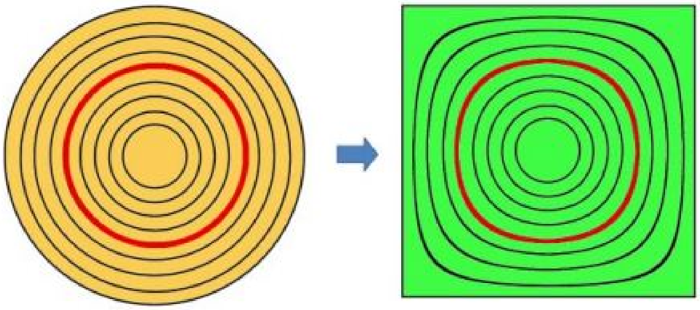
En d'autres termes, le carré peut être considéré comme un continuum de FG-cercles (voir section Géométrie Analytique page 2787) rétrécis et concentriques.



Les topologues notent la preuve que les points intérieurs de deux géométries sont homéomorphes dans ce cas particulier en utilisant la notation suivante :

$$\mathring{\mathcal{D}}\sim\mathring{\mathcal{S}} \tag{7.3.102}$$

Nous allons maintenant montrer que $\mathring{\mathcal{D}}\mapsto\mathring{\mathcal{D}}$ car c'est le cas le plus courant en pratique de notre point de vue. C'est-à-dire :



Nous pouvons établir une correspondance entre le disque unité et la région carrée en mappant chaque contour circulaire à l'intérieur du disque sur un contour squirculaire à l'intérieur du carré. En d'autres termes, nous mappons les courbes de niveau du continuum circulaire du disque à celles du continuum squirculaire du carré. Cela peut être fait en égalisant le paramètre t des deux ensembles pour obtenir l'équation

$$u^2+v^2=x^2+y^2-x^2y^2 \tag{7.3.103}$$

Nous nommons cette équation "condition de squircularité" pour mapper un disque circulaire sur une région carrée.

En cours de traduction de l'anglais

Il est facile de dériver le mappage FG-squirculaire en combinant la condition de squircularité :

$$t^2 = u^2 + v^2 = x^2 + y^2 - x^2y^2 \tag{7.3.104}$$

Nous pouvons alors aussi écrire :

$$t^2 = (t\cos(\theta))^2 + (t\cos(\theta))^2 = x^2 + y^2 - x^2y^2 \tag{7.3.105}$$

En passant des coordonnées polaires à cartésiennes (voir section Calcul Vectoriel page 1839)

$$t^2 = \left(t\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(t\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = x^2 + y^2 - x^2y^2 \tag{7.3.106}$$

Nous obtenons donc par équivalence :

$$u = t\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad v = t\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{7.3.107}$$

Après substitution du paramètre t, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2+y^2-x^2y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v &= \sqrt{x^2+y^2-x^2y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}} \tag{7.3.108}$$

En d'autres termes, il s'agit d'une cartographie radiale qui convertit les contours circulaires du disque en contours squirculaires du carré.

Nous allons maintenant dériver les équations inverses pour le mappage FG-squirculaire. Mais comme il est ennuyeux d'écrire cela en LaTeX et qu'il n'est pas très utilisé en pratique, nous omettrons ce dernier pour le moment...

En cours de traduction de l' anglais

7.3.4.3 Variétés Différentiables

Les "variétés différentielles" ou "variétés différentiables" sont les objets de base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Il s'agit de variétés, "espaces courbes" localement modelés sur l'espace euclidien de dimension n, sur lesquelles il est possible de généraliser une bonne part des opérations du calcul différentiel et intégral.

Une variété différentielle se définit donc d'abord par la donnée d'une variété topologique, espace topologique localement homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$. Les homéomorphismes locaux sont appelés "cartes" et définissent des systèmes de coordonnées locales. La structure différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes. Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable, ou de champ de vecteurs avec ses courbes intégrales.

En revanche, à moins de munir la variété de structures supplémentaires (telle qu'une métrique riemannienne), les calculs de dérivées d'ordre 2, la notion de mesure d'une partie, n'admettent pas de généralisation naturelle.

Définitions (#7.3.306) :

D1. Une "variété différentiable" est un espace topologique M où les applications φ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$.

D2. Un "difféomorphisme" est une application $\varphi : U \mapsto U'$ où U, U' sont des domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$ et si φ est un homéomorphisme et en plus si U, U' sont différentiables !

Remarque

N'oubliez pas que "différentiable" dans ce contexte signifiera toujours de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$.

D3. Soit une variété topologique $M := M^n$ (pour simplifier l'écriture), deux cartes $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ de M sont des "cartes compatibles" (plus précisément : compatibles de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$) si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

P1. $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ et l'application $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ de changement de cartes est un difféomorphisme.

P2. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$

Un atlas A de M est différentiable si toutes les cartes de A sont compatibles entre elles.

Remarque

Étant donné un atlas différentiable, il est parfois nécessaire de le compléter : nous disons qu'une carte de M est compatible avec un atlas différentiable si elle est compatible avec chaque carte de A. Un atlas de A est un "atlas maximal" si toute carte compatible avec A appartient déjà à A. Un atlas maximal est appelé une "structure différentiable".

En cours de ... l'anglais

~70 %

12 votes, 71.67%

7.4. Théorie de la Mesure

Attention ! Le niveau d'abstraction et de motivation requis pour lire et comprendre cette section est assez élevé pour les ingénieurs (public cible de cet ouvrage pour rappel). Le lecteur doit être à l'aise avec les concepts vus dans la section Théorie des Ensembles ainsi qu'avec celui de Topologie. Nous nous excusons également par avance pour le l'absence de figures pour illustrer certains concepts.

La mesure, au sens topologique, va nous permettre de généraliser la notion élémentaire de mesure d'un segment, ou d'une aire (au sens de Riemann, par exemple) et est indissociable de la nouvelle théorie de l'intégration que Lebesgue mettra en place de 11901 à 19021 (calendrier holocène) et que nous allons aborder ici afin de construire des outils mathématiques beaucoup plus puissants que l'intégrale simple de Riemann (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1482) avec des exemples pratiques et numériques dans MATLAB™.

En cours de traduction de l'anglais

Les philosophes des sciences qui ont développé la théorie de la mesure étaient largement préoccupés par des questions épistémiques telles que : nous ne pouvons pas observer de corrélations entre des objets physiques et des nombres réels, alors comment justifier l'utilisation de nombres réels en termes de choses que nous pouvons observer ? En effet, privilégieR une seule unité de masse, implique des nombres réels dans les faits de masse. Pourquoi ce dernier est-il mauvais ? :

1. Les nombres réels sont abstraits et donc causalement inertes
2. Les vrais chiffres n'existent pas fondamentalement
3. Les nombres réels sont des entités construites, et les entités construites ne peuvent pas être impliquées dans des faits fondamentaux

La Théorie de la Mesure va également nous permettre de définir avec rigueur le concept de mesure (peu importe la mesure de quoi) et ainsi de revenir sur des résultats importants de l'étude des probabilités (voir section Probabilités page 449). Effectivement, nous allons voir (nous définirons le vocabulaire qui suit plus loin) pourquoi (U, A, P) est[10] un "espace de probabilités" où A est au fait une "tribu" (aussi appelée "algèbre") sur U et P une mesure sur l'espace mesurable (U, A).

[10] La notation de ce tuple varie selon que l'on étudie la topologie, les statistiques ou le calcul intégral.

7.4.1 Espaces Mesurables

Quand en mathématiques, nous dérivons, intégrons ou comptons, nous effectuons de manière implicite une mesure d'un objet ou ensemble d'objets. Rigoureusement, les mathématiciens souhaitent définir comment peut être structuré la chose mesurée, comment faire une mesure de celle-ci et les propriétés en découlant !

La théorie de la mesure consiste à faire abstraction de l'idée de "taille". Qu'entend-on par taille ? La taille est un nombre que l'on attribue à un objet qui obéit à une propriété spécifique et intuitive : si nous divisons un objet, les tailles des morceaux doivent correspondre à la taille de l'ensemble.

Il existe de nombreux phénomènes qui suivent cette idée de base semblable à celle de la "taille", notamment des phénomènes tels que la masse, la longueur et le volume (et, comme nous le verrons plus tard : la probabilité !). Par exemple, si nous avons une boule d'argile et que nous la divisons en deux, alors les masses des deux plus petites boules d'argile s'additionneront à la masse de la boule d'argile d'origine.

Avant de pouvoir discuter des "tailles" d'objets et de morceaux d'objets, nous avons besoin d'une manière mathématique pour décrire un objet. La théorie de la mesure utilise un ensemble pour désigner l'objet que nous considérons. Par exemple, un ensemble peut représenter une boule d'argile. Étant donné notre objet/ensemble, nous avons alors besoin d'un moyen de décrire comment un ensemble peut être divisé en morceaux. Cette notion de « briser un objet en morceaux » est décrite par la définition ci-dessous.

Définitions (#7.4.307) :

D1. Soit E un ensemble, une "tribu" sur E est une famille $\mathcal{A}$ (cette notation vient du fait que beaucoup de gens parlent de "ensembles d'**A**lgèbres" au lieu de "tribu") de parties de E vérifiant les axiomes suivants :

A1. $E \in \mathcal{A}$ (voir exemples plus bas - E étant considéré comme élément de $\mathcal{A}$).

A2. Si A est un élément d'une tribu alors :

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \tag{7.4.1}$$

Ce qui signifie que $\mathcal{A}$ est "stable par passage au complémentaire". Cet axiome implique que l'ensemble vide est toujours un élément d'une tribu !

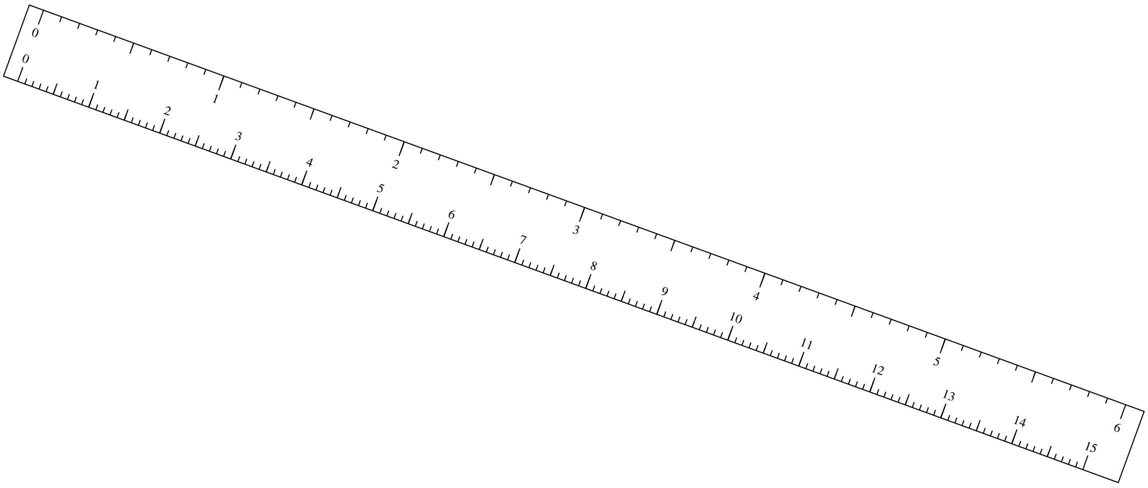
A3. Pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ nous avons :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_n \in \mathcal{A} \tag{7.4.2}$$

Nous disons alors que $\mathcal{A}$ est "stable par union dénombrable" ou aussi "fermé sous l'union d'ensembles".

Par exemple, la graduation d'une simple règle de mesure... satisfait ces trois axiomes.

En cours de traduction de l'anglais



Remarques

R1. Nous écrivons $E \in \mathcal{A}$ car nous considérons avec cette notation E non plus comme un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ mais comme un élément de $\mathcal{A}$!

R2. Les cas non dénombrables sont typiques de la topologie, de la statistique ou du calcul intégral !

D2. Si dans le troisième axiome nous imposons que $\mathcal{A}$ soit stable par union finie (non dénombrable), i.e. :

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A} \tag{7.4.3}$$

nous imposons alors la notion plus générale de "σ-algèbre. Ainsi, une tribu est nécessairement contenue dans un σ-algebra (mais le contraire n'est pas vrai car justement l'axiome est plus fort) tel que nous pouvons écrire :

$$\mathcal{A} \subseteq \sigma\text{-algebra}(\mathcal{A}) \tag{7.4.4}$$

En gardant ces propriétés à l'esprit, une autre façon d'imaginer cela est de considérer E comme une plaque de céramique fissurée. Le σ-algèbre décrit toutes les façons dont la plaque peut s'effondrer le long de ses "fissures" pour un type de fissure donné.

Remarque

Dans le domaine des probabilités, E est assimilé à l'Univers des événements et $\mathcal{A}$ à une famille d'événements et nous parlons "d'espace probabilisable" ou... "d'espace mesurable".

D'accord, nous avons passé un moment à réfléchir à la représentation d'objets et de morceaux d'objet. Maintenant, comment attribuer une "taille" à chaque pièce ? C'est là qu'intervient une mesure. Une mesure est simplement une fonction qui attribue une taille à chaque élément d'un objet. Comme nous l'avons vu précédemment, les tailles de deux morceaux d'un objet doivent totaliser la taille de l'ensemble, ce qui est exactement ainsi qu'une mesure est définie !

En cours de traduction ... is

D3. Étant donné un ensemble E et une σ-algèbre sur E, notée $\mathcal{A}$, la fonction :

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \tag{7.4.5}$$

est un "mesure de Lebesgue" si les propriétés suivantes sont valables pour μ (également parfois notées μ_L) :

P1. Non-négativité : $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \geq 0$

P2. L'ensemble vide a une mesure de Lebesgue nulle : $\mu(\emptyset) = 0$

P3. La mesure de Lebesgue est invariante, c'est-à-dire $\mu(A) + \mu(A + c^{te})$

P4. Additivité dénombrable : Étant donnés $A, B \in \mathcal{F}$ où $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

La première partie de la définition exige qu'une "taille" (c'est-à-dire une mesure) ne puisse pas être négative. C'est intuitif. La deuxième partie dit que la "pièce nulle" (c'est-à-dire rien) a une taille nulle. Enfin, la troisième partie dit que la somme des tailles de deux pièces d'un objet doit être égale à la taille des deux pièces collées ensemble.

D4. La paire $(E, \mathcal{A})$ est nommée "espace mesurable" et nous disons que les éléments de $\mathcal{A}$ sont des "ensembles mesurables".

D5. Le tuple $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est nommé "espace mesurable".

Par conséquent, un espace mesurable est simplement la combinaison d'un ensemble (c'est-à-dire un objet), d'une algèbre σ (c'est-à-dire des morceaux de l'objet) et d'une mesure μ (c'est-à-dire des façons de décrire les tailles des morceaux).

Intuitivement, chaque élément du σ-algèbre représente un "morceau" de l'objet. Le premier critère de la définition ci-dessus établit qu'une "pièce nulle" (c'est-à-dire une pièce de taille nulle) peut être considérée comme une pièce de l'objet. Le deuxième critère établit le fait que si nous cassons un morceau, A, de l'objet, alors l'objet restant A^c (le complément de A) est également un morceau valide. Enfin, le troisième critère établit le fait que si nous collons ensemble un ensemble dénombrable de pièces, la pièce résultante est également une pièce de l'objet.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Soit $E = \{1, 2\}$ un ensemble de cardinal 2. Les deux seules tribus qui satisfont les trois axiomes sont :

$$\mathcal{A}_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \qquad \mathcal{A}_2 = \{\varnothing, \{1, 2\}\} \tag{7.4.6}$$

Il n'y a pas d'autres tribus pour l'ensemble E donné que ces deux (la normale, et la maximale), car il ne faut pas oublier que l'union de chacun des éléments de la tribu doit aussi être dans la tribu (axiome A3), ainsi que le complémentaire d'un élément (axiome A2).

Nous voyons par ailleurs de cet exemple que si E est un ensemble alors $\{E, \varnothing\}$ est bien une tribu !

E2. L'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$ est aussi une tribu (dixit l'exemple précédent).

Une tribu $\mathcal{A}$ est aussi "stable par union des complémentaires dénombrables". En effet si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ nous avons (trivial en prenant comme référence le premier exemple ci-dessus) :

$$\bigcup_n A_i^c \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_n A_i^c\right)^c \in \mathcal{A} \tag{7.4.7}$$

Une tribu est aussi "stable par intersections dénombrables" (trivial en prenant aussi comme référence le premier exemple ci-dessus) :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A} \tag{7.4.8}$$

ce qui amène à ce qu'une tribu est stable par unions et intersections dénombrables. En particulier, si nous prenons deux éléments d'une tribu $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{A}$ avec pour rappel (voir section Théorie des Ensembles page 396) :

$$\boxed{A \setminus B = A \cap B^c} \tag{7.4.9}$$

Évidemment, il peut être prouvé avec un théorème général que les tribus (c'est-à-dire les algèbres) sont fermées sous intersections d'ensembles, différences, et différences symétriques mais nous considérons cela comme assez intuitif et non nécessaire dans un livre dédié à des ingénieurs.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Nous voyons aisément avec le premier exemple ci-dessus que si $(\mathcal{A}_i)_I$ est une famille de tribus sur E alors $\bigcap_I \mathcal{A}_i$ est une tribu (la vérification des trois axiomes est immédiate).

Bon c'est bien joli de jouer avec des patates et sous-patates... et leurs complémentaires mais passons à la suite....

Définition (#7.4.308) : Soit E un ensemble et $\mathcal{B}$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ tel que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$. Nous notons par définition :

$$\boxed{\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{S}} \mathcal{A}} \tag{7.4.10}$$

la "tribu engendrée" par $\mathcal{B}$. Dès lors $\sigma(\mathcal{B})$ est donc par définition la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$ (et par extension la plus petite tribu de E).

Ci-dessous nous avons trois petits exemples qui donnent l'occasion de vérifier si ce qui précède a été bien compris et qui donnent également la possibilité de mettre en évidence des résultats importants pour ce qui va suivre :

✍**Exemples :**

E1. Soit E un ensemble, $A \subset E, A \neq E$ et aussi $\mathcal{B} = \{A\}$ alors (lorsque A est vu comme un sous-ensemble de E comme le précise l'énoncé et non comme une famille de sous-ensembles !) :

$$\sigma(\mathcal{B}) = \{\oslash, E, A, A^c\} \qquad (7.4.11)$$

E2. Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur E alors :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \qquad (7.4.12)$$

E3. Soit $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{\{1,2\},3\}$ nous avons dès lors (prenez bien garde car maintenant A est une famille de sous-ensembles et non simplement un unique sous-ensemble !) la tribu engendrée suivante :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\{\varnothing\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\} \qquad (7.4.13)$$

Plutôt que de déterminer cette tribu en cherchant la plus petite tribu de $\mathcal{P}(E)$ contenant A (ce qui serait laborieux) nous jouons avec les axiomes définissant une tribu pour facilement trouver celle-ci.

Ainsi, nous trouvons donc bien dans $\sigma(A)$ au moins l'ensemble vide $\{\varnothing\}$ obligatoire ainsi que :

$$E = \{1,2,3,4\} \qquad (7.4.14)$$

selon l'axiome A1 et :

$$E = \{\{1,2\},\{3\}\} \qquad (7.4.15)$$

lui-même par définition de $\sigma(A)$ et les complémentaires de :

$$\{\{3\}^c = \{1,2,4\}, \{1,2\}^c = \{3,4\}, \{\{1,2\} \cup \{3\}\}^c = \{4\}\} \qquad (7.4.16)$$

selon l'axiome A2 ainsi que les unions :

$$\bigcup_i A_n = \{\{1,2\} \cup \{3\} = \{1,2,3\}, \{1,2\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}, \ldots\} \qquad (7.4.17)$$

selon l'axiome A3.

Définition (#7.4.309) : Soit E un espace topologique (voir section Topologie page 2429). Nous notons $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par les ouverts de E. $\mathcal{B}(E)$ est appelée la "tribu borélienne" sur E. Les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont appelés les "boréliens" de E.

Remarques

R1. La notion de borélien est surtout intéressante car elle est nécessaire à la définition de la "tribu de Lebesgue" et par suite à "la mesure de Lebesgue" qui nous amènera à définir

"l'intégrale de Lebesgue" !

R2. La tribu $\mathcal{B}(E)$ étant stable par passage au complémentaire, elle contient aussi tous les fermés !

R3. Si E est un espace topologique à base dénombrable, $\mathcal{B}(A)$ est engendré par les ouverts de la base.

✍**Exemple :**

Si $\mathbb{R}$ désigne l'espace des réels muni de la topologie euclidienne (voir section Topologie page 2434), la famille des intervalles ouverts à extrémités rationnelles est une "base dénombrable" (étant données les extrémités...) de $\mathbb{R}$ et donc engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Même remarque pour $\mathbb{R}^d$ avec comme base dénombrable la famille des pavés ouverts à extrémités rationnelles.

Théorème 7.8. Considérons maintenant $\mathcal{S}$ un ensemble dense (voir section Topologie page 2431) dans $\mathbb{R}$. Les familles suivantes engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\{]-\infty,a[\,,a\in\mathcal{S}\}\quad\{]-\infty,a]\,,a\in\mathcal{S}\}\quad\{]a,+\infty[\,,a\in\mathcal{S}\}\quad\{[a,+\infty[\,,a\in\mathcal{S}\}\tag{7.4.18}$$

Démonstration 7.8.1. Soit (la famille des ouverts) :

$$\mathcal{F}=\{]-\infty,a]\,,a\in\mathcal{S}\}\tag{7.4.19}$$

Nous avons évidemment :

$$\sigma(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{R})\tag{7.4.20}$$

De plus :

$$([a,+\infty[\cap]-\infty,b[)=[a,b[\text{ si }a<b\tag{7.4.21}$$

Donc les intervalles du type $[a,b[$ avec a et b dans $\mathcal{S}$ appartiennent aussi à $\sigma(\mathcal{F})$. Donc, si nous généralisons, avec $x<y$, il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{S}$ décroissant vers x et une suite (b_n) d'éléments de $\mathcal{S}$ croissant vers y tel que :

$$]x,y[=\bigcup_n[a_b,b_n[\in\sigma(\mathcal{F})\tag{7.4.22}$$

ce qui entraîne au même titre que $E\in\mathcal{A}$ que $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq\sigma(\mathcal{F})$. Les autres cas se traitent de manière analogue.

■ Q.E.D.

Théorème 7.9. Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $A\subseteq E$ (et $A\in\mathcal{A}$) (où A est donc considéré comme un sous-ensemble et non comme un élément !). La famille $\{A\cap B|B\in\mathcal{A}\}$ est une tribu sur A appelée "tribu trace" de $\mathcal{A}$ sur A, nous la noterons A. De plus, si $A\in\mathcal{A}$, la tribu trace est formée par les ensembles mesurables contenus dans A.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 7.9.1. Nous allons faire une démonstration par l'exemple (... oui donc ce n'est pas une vraie démonstration...). Pour cela nous vérifions les trois points qui définissent une tribu :

1. $A=(E\cap A)\Rightarrow A\in(A\cap\mathcal{A})$
2. Soient $B\in\mathcal{A}$, $A\setminus(A\cap B)=A\setminus B=A\cap B^c=A\cap B^c$ et alors $A\setminus(A\cap B)\in(A\cap\mathcal{A})$

> ✍**Exemple :**
>
> Soit $E=\{1,2,3\}$ alors (une tribu parmi d'autres - n'oubliez pas la stabilité par l'union !) :
>
> $$\mathcal{A}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\} \tag{7.4.23}$$
>
> Choisissons $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ (il est évident que $\{A\cap B|B\in\mathcal{A}\}$ est un tribu sur A). Alors :
>
> $$\begin{aligned} A\setminus(A\cap B)=\{1,2\}-(\{1,2\}\cap\{2,3\})=\{1,2\}-\{2\}=\{1\}\\ A\setminus B=\{1,2\}-\{2,3\}=\{1\}\\ A\cap B^c=\{1,2\}\cap\{2,3\}^c=\{1,2\}\cap\{1\}=\{1\}\end{aligned} \tag{7.4.24}$$
>
> et nous avons bien $\{1\}\in A$ et aussi $A\in(A\cap\mathcal{A})$.

3. Soit $(A\cap B_n)$ une séquence d'éléments de $A\cap\mathcal{A}$ $(B_n\in\mathcal{A})$ alors :

$$\bigcup_n(A\cap B_n)=A\cap\underbrace{\left(\bigcup_n B_n\right)}_{\in\mathcal{A}}\in A\cap\mathcal{A} \tag{7.4.25}$$

Le dernier énoncé de la proposition sera supposé évident (sinon, faites-le nous savoir !).

■ Q.E.D.

Soit maintenant E un ensemble, $\mathcal{C}$ une famille de parties de E et $A\subseteq E$ non vide. Nous notons par $A\cap\mathcal{C}$, la trace de $\mathcal{C}$ sur A et $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $A\cap\mathcal{C}$ sur A. Alors :

$$A\cap\sigma(\mathcal{C})=\sigma_A(A\cap\mathcal{C}) \tag{7.4.26}$$

En cours de traduction anglais

✍**Exemple :**

Soit l'ensemble $E=\{1,2,3,4\}, \mathcal{C}=\{\{1,2\},\{3\}\}, A=\{3,4\}$ alors :

$$A\cap\mathcal{C}=\{\oslash,\{3\}\} \quad \sigma_A(A\cap\mathcal{C})=\sigma_A\big(\{\oslash,\{3\}\}\big)=\{\oslash,\{3\},\{4\},\{3,4\}\} \tag{7.4.27}$$

et vérifions que $A\cap\sigma(\mathcal{C})=\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$:

$$\begin{aligned} A\cap\sigma(\mathcal{C}) &= \{3,4\}\cap\sigma\{\{1,2\},\{3\}\} \\ &= \{3,4\}\cap\{\oslash,\{3\},\{4\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\} \\ &= \{\oslash,\{3\},\{4\},\{3,4\}\} \end{aligned} \tag{7.4.28}$$

Donc l'égalité est vérifiée !

Un corollaire trivial de cette égalité est que si nous considérons un espace topologique E et $A\subseteq E$ muni de la topologie induite. Alors :

$$A\cap\mathcal{B}(E)=\mathcal{B}(A) \tag{7.4.29}$$

Nous étudierons plus en détail plus tard les σ-algèbres mais rappelons d'abord qu'une tribu (parfois appelée "algèbre des ensembles") sur E doit satisfaire les propriétés suivantes :

P1. Doit contenir E

P2. Doit être stable par le complémentaire

P3. Doit être stable par union ou intersection dénombrable

Rappelons (voir Théorie des Ensembles page 396) que si nous avons E qui est un ensemble, alors pour tout $A,B\subseteq E$ nous définissons la différence symétrique $A\Delta B$ entre A et B par :

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A) \tag{7.4.30}$$

Les propriétés triviales sont les suivantes :

P1. Une σ-algèbre est stable par différence symétrique ($A,B\in\mathcal{A}$ nous avons $A\Delta B\in\mathcal{A}$)

P2. $A\Delta B=B\Delta A$

P3. $A^c\Delta B^c=A\Delta B$

P4. $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

Théorème 7.10. Si $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre sur E, alors $(\mathcal{B},\Delta,\cap)$ est un "anneau de Boole" (ou "algèbre de Boole" mais attention avec le terme "algèbre" qui peut prêter à confusion avec la structure équivalente dans la Théorie des Ensembles) avec $\varnothing$ et E comme élément neutre "additif" (Δ) respectivement "multiplicatif" ($\cap$).

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Pour des rappels sur les éléments cités dans le paragraphe précédent, le lecteur pourra se reporter à la section de Théorie Des Ensembles à la page 376 et la section d'Algèbre De Boole (voir section Systèmes Logiques Formels page ??).

Démonstration 7.10.1. Δ ("addition") est associative car en développant nous obtenons (cela se vérifie en faisant un diagramme sagittal au besoin - les "patates") :

$$A\Delta(B\Delta C)=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C) \tag{7.4.31}$$

et cette dernière expression est stable par permutation (commutation) de A et C (même méthode de vérification). Donc :

$$A\Delta(B\Delta C)=C\Delta(B\Delta A)=(B\Delta A)\Delta C=(A\Delta B)\Delta C \tag{7.4.32}$$

Nous vérifions que $\varnothing$ est bien neutre par rapport à la différence symétrique (la démonstration que E est neutre par rapport à l'inclusion est évidente). Il est trivial que :

$$A\Delta\varnothing=\varnothing\Delta A \quad \text{et que} \quad A\Delta A=\varnothing \tag{7.4.33}$$

$(\mathcal{B},\Delta,\varnothing)$ est donc bien un groupe abélien par rapport à la loi Δ (différence symétrique).

Pour finir $\cap$ est distributif par rapport à Δ. En effet :

$$\begin{aligned}A\cap(B\Delta C)&=A\cap(B\setminus C\cup C\setminus B)\\&=(A\cap B\setminus C)\cup(A\cap C\setminus B)\\&=\big(A\cap B\setminus(A\cap C)\big)\cup\big(A\cap C\setminus(A\cap B)\big)\\&=(A\cap B)\Delta(A\cap C)\end{aligned} \tag{7.4.34}$$

Ce qui fait bien de $(\mathcal{B},\Delta,\varnothing)$ un anneau (qui de plus est un anneau commutatif).

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

7.4.1.1 Classes Monotones

Définition (#7.4.310) : Soit E un ensemble. Une "classe monotone" sur E est une famille $\mathcal{C}$ de parties de E vérifiant :

A1. $E\in\mathcal{C}$

A2. $A,B\in\mathcal{C}$ et $A\subseteq B\Rightarrow \setminus A\in\mathcal{C}$

A3. Si (A_n) est une suite croissante (attention au terme "croissant") d'éléments de $\mathcal{C}$ alors $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathcal{C}$ (stable par union dénombrable croissant).

Remarques

R1. Une suite croissante d'ensembles c'est : $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots$

R2. Les deux premiers points impliquent que $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire.

R3. L'ensemble des trois axiomes conduit à ce que la classe monotone soit stable par intersection décroissante. Une façon de vérifier cela consiste à prendre le complément de chaque élément de la suite croissante pour se rabattre sur la suite décroissante et vice versa.

Chaque σ-algèbre est une classe monotone, car les σ-algèbres sont fermées sous des unions et intersections dénombrables arbitraires.

Dès lors :

$$\mathcal{A} \subseteq \sigma\text{-algebra}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \tag{7.4.35}$$

De la même manière que pour les tribus, si nous considérons $(\mathcal{C}_i)_I$ une famille de classes monotones sur E. Alors $\bigcap_I \mathcal{C}_i$ est une classe monotone (la démonstration se vérifie immédiatement par les trois axiomes précédemment cités).

En ... de l'anglais

✍**Exemple :**

Si E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ est une classe monotone sur E. Plus généralement, une tribu est une classe monotone.

De manière équivalente aux tribus, considérons un ensemble E et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Soit $\mathcal{S}$ la famille de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ n'est pas vide car $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{S}$. Nous notons :

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \mathcal{T} \tag{7.4.36}$$

la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$. Dès lors $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$ (et satisfaisant bien évidemment aux axiomes).

Remarque

Si E est un ensemble et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ alors $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$, car $\sigma(\mathcal{C})$ est une classe monotone (et aussi une tribu) contenant $\mathcal{C}$ et donc elle contient aussi $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ (voir les exemples avec les tribus).

Le théorème (de la classe monotone) s'énonce ainsi :

Théorème 7.11. Soit E un ensemble. Si $\mathcal{C}$ est une famille de parties de E que nous imposons stable par intersections finies alors $\mathcal{C} = \sigma\mathcal{C}$ (nous devons donc prouver que la tribu minimale de $\mathcal{C}$ est égale à la classe monotone minimale de $\mathcal{C}$). Si nous n'imposons pas que $\mathcal{C}$ soit stable par intersections finies nous n'aurions pas nécessairement l'égalité !

Démonstration 7.11.1. Comme déjà dit $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ (c'est quasiment trivial). Nous allons démontrer dans un premier temps que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est donc aussi une tribu sur E. Pour ceci il suffit

de montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est (aussi) stable par union dénombrable (et non nécessairement par une suite croissante d'éléments !).

Considérons les familles suivantes pour la démonstration :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) | A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{C}\} \\ \mathcal{M}_2 &= \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) | A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}\end{aligned} \tag{7.4.37}$$

Par les définitions précédentes $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{C}$ mais $\mathcal{C}$ étant (imposé) stable par intersections finies entraîne que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_1$ et donc (c'est le même raisonnement que pour les tribus) :

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}) \tag{7.4.38}$$

$\mathcal{M}_1$ est une classe monotone en effet $E \in \mathcal{M}_1$, si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_1$ et que $A_1 \subseteq A_2$ (axiome 2) alors :

$$\forall B \in \mathcal{C}, \underbrace{A_1 \cap B}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{C})} \subseteq \underbrace{A_2 \cap B}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{C})} \tag{7.4.39}$$

et donc (ce qui appuie le fait que les autre éléments (A_n) satisfont la relation précédente) :

$$\forall B \in \mathcal{C}, (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \Rightarrow (A_2 \setminus A_1) \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \tag{7.4.40}$$

Si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}_1$ alors :

$$\forall B \in C, \left(\bigcup A_n\right) \cap B = \bigcup \underbrace{(A_n \cap B)}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{C})} \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \tag{7.4.41}$$

car $(A_n \cap B)$ est une suite croissante.

Ainsi $\mathcal{M}_1$ est bien une classe monotone et par $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$, nous avons donc :

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C}) \tag{7.4.42}$$

Cette dernière égalité implique $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_2$. Comme pour $\mathcal{M}_1$, nous montrons que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone et donc $\mathcal{C} = \mathcal{M}_2$, ce qui veut dire par extension que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est donc stable par intersections finies.

$\mathcal{M}(\mathcal{C})$ étant stable par passage au complémentaire ceci entraîne que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est, nous venons de le montrer, stable par unions finies (alors que nous voulons démontrer que c'est stable par union dénombrable !).

Soit à présent (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Nous considérons la suite :

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{7.4.43}$$

(B_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, donc :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \tag{7.4.44}$$

En cours de traduction de l'anglais

mais :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \qquad (7.4.45)$$

Donc :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \qquad (7.4.46)$$

Ainsi $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par union dénombrable et enfin $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une tribu. Or comme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$ cela nous amène donc à $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

■ Q.E.D.

Nous verrons plus tard quelques applications importantes de ce théorème (mais nous voulons d'abord améliorer le texte ci-dessus avec des figures et des exemples plus simples et pratiques !).

En cours de traduction de l'anglais

7.4.2 Mesure de Lebesgue en probabilités

La théorie des probabilités est devenue de plus en plus importante dans de multiples domaines de la science (et donc de l'ingénierie aussi !), comme nous l'avons déjà mentionné lors de notre étude du sujet. Pour approfondir la théorie des probabilités, il faut un livre complet, et pas seulement un chapitre comme nous le savons déjà. Pour les lecteurs qui ont l'intention de poursuivre leurs études sur les racines de la Théorie des Probabilités, cette sous-section vous donnera une bonne longueur d'avance. Pour les lecteurs qui n'ont pas l'intention d'approfondir les racines de la Théorie des Probabilités, cette sous-section vous donnera un avant-goût du sujet.

La théorie moderne des probabilités fait un usage majeur de la théorie de la mesure. Comme nous le verrons, une mesure de probabilité est simplement une mesure telle que... la mesure de tout l'espace est égale à 1. Ainsi, une compréhension approfondie des des paragraphes qui vont suivre traitant de la théorie des mesures et de l'intégration fournit une base solide pour la Théorie des Probabilités !

L'étude de la théorie moderne des probabilités basée sur la théorie de la mesure permet, grâce à des preuves et des définitions rigoureuses, d'expliquer aux ingénieurs ou aux personnes scientifiquement illétrées pourquoi :

- Une estimation ponctuelle a une probabilité nulle dans tous les problèmes impliquant des variables (ou combinaisons de variables) ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}$ et donc une telle estimation n'a pas de sens rigoureusement parlant
- Le point précédent explique pourquoi nous devrions toujours dans de tels cas calculer des plages d'estimation plausibles plutôt que des estimations ponctuelles qui ont une probabilité nulle
- Un événement ayant une probabilité nulle ne signifie pas qu'il ne peut pas se produire

- Que dans un univers infini avec un temps infini une séquence d'événements a une probabilité de 1 de se produire (voir page **??**)

Maintenant que nous avons une théorie de base sur les mesures, revenons à la définition de la "probabilité". Un espace de probabilité est simplement un espace de mesure où la mesure attribuée à l'objet entier est égal l'unité !

Définition (#311) : Un "espace de probabilité" W est un triplet unique $W = \{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ où :

- Ω est son espace d'échantillonnage
- $\mathcal{F}$ son σ-algèbre d'événements
- P sa mesure de probabilité

Pour rappels :

- L'objet Ω, appelé "espace échantillonnal", représente tous les futurs imaginables de l'univers. Considérons un simple tirage au sort. Avant de lancer la pièce, il existe de nombreuses façons imaginables de faire tourner la pièce dans les airs et de se déposer sur la table. L'ensemble des résultats est une représentation théorique de tous les futurs imaginables possibles dans lesquels ce processus se déroulera.
- Une σ-algèbre est simplement un moyen de partitionner tous ces futurs imaginables. Chacune de ces partitions est appelée un "événement". Par exemple, dans certains ensembles de futures, la pièce atterrit sur face – auquel cas nous dirions que l'événement "face" s'est produit. Dans d'autres futurs, la pièce atterrit sur pile. Si l'un de ces futurs se produit, alors nous disons que l'événement "pile" s'est produit.
- La mesure de probabilité attribue un degré de certitude à chaque partition des futurs concevables. Plus précisément, la mesure de probabilité attribue à chaque événement $\omega \in \Omega$ une valeur comprise entre 0 et 1 , qui représente notre degré de certitude (vraisemblance) que notre avenir sera contenu dans ω. Plus précisément, 1 représente la certitude totale que notre avenir sera contenu dans l'événement ω et 0 représente la certitude totale que notre avenir ne sera pas contenu dans ω.

Définition (#312) : Une "variable aléatoire" est un mappage :

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \tag{7.4.47}$$

qui assigne un nombre réel $X(\omega)$ a toute issue ω.

Tout cela soulève la question : pourquoi avons-nous besoin d'une Théorie de la Mesure pour tout cela ? Nous voyons d'abord que la Théorie de la Mesure fournit une description naturelle de l'incertitude des manières suivantes :

- Une σ-algèbre nous donne un moyen de garantir que si nous discutons de notre certitude quant à un événement qui se produit, nous pouvons également discuter de notre certitude quant à l'événement qui ne se produit pas. Autrement dit, le complément de tout élément du σ-algèbre se trouve également dans la σ-algèbre.

En cours de traduction de l'anglais

- La σ-algèbre garantit que nous pouvons discuter de la probabilité d'unions et d'intersections d'événements. Le fait que $P(\varnothing) := 0$ exprime l'impossibilité qu'aucun résultat ne se produise dans l'espace échantillon. Autrement dit, nous sommes certains de voir un avenir concevable.
- Le fait que $P(\Omega) := 1$ exprime qu'un certain résultat de l'espace échantillon se produira certainement. Autrement dit, 1 est la valeur qui équivaut à une certitude maximale.
- L'incertitude a une "taille" dans le sens suivant : si nous avons deux événements disjoints, alors la probabilité que l'un ou l'autre de ces événements se produise devrait être la somme des probabilités des événements individuels. En utilisant un espace de mesure pour modéliser l'incertitude, nous nous assurons que étant donné $A, B \subset \Omega$ où $A \cap B = \varnothing$, il s'ensuit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarques

R1. L'espace échantillon "Univers" Ω est l'ensemble de tous les échantillons ou événements élémentaires possibles $\omega : \Omega = \{\omega \,|\, \omega \in \Omega\}$.

R2. La σ-algèbre $\mathcal{F}$ est l'ensemble de tous les événements A considérés, c'est-à-dire les sous-ensembles de $\Omega : \mathcal{F} = \{A \,|\, A \subseteq \Omega, A \in \mathcal{F}\}$.

R3. La mesure de probabilité P attribue une probabilité $P(A)$ à chaque événement $A \in \mathcal{F} : P : \mathcal{F} \to [0,1]$. Avec $P(\Omega) = 1$ et $P(\omega_i) = p_i$.

Supposons que $n \in \mathbb{Z}^+$ et que Ω soit un ensemble contenant exactement n éléments. Soit $\mathcal{F}$ la collection de tous les sous-ensembles de Ω. Alors :

$$\frac{\text{counting measure on } \Omega}{n}$$

est une mesure de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Évidemment, sur des ensembles innombrables comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ qui sont fréquents en ingénierie, nous avons $P(\omega) = 0$.

En cours de traduction

✍**Exemple :**

Comme exemple plus spécifique de l'élément précédent, supposons que $\Omega = \{40, 41, \ldots, 49\}$ et $P =$ (mesure de comptage sur Ω) / 10 . Soit $A = \{\omega \in \Omega : \omega$ est pair$\}$ et $B = \{\omega \in \Omega : \omega$ est premier $\}$. Alors $P(A)$ [qui est la probabilité qu'un élément de cet espace échantillon Ω soit pair] est $\frac{1}{2}$ et $P(B)$ [qui est la probabilité que un élément de cet espace échantillon Ω est premier] est $\frac{3}{10}$.

Définition (#313) : La "σ-algèbre borélienne" est la plus petite σ-algèbre (voir page 2465) contenant un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Les ensembles dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont nommés "tribus boréliennes". L'extension au cas multidimensionnel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est simple. La σ -algèbre borélienne inclut donc tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui présentent un intérêt pour des applications pratiques (scientifiques ou d'ingénierie).

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et posons $\mathcal{B}$ comme désignant la σ-algèbre des sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}$. Définissons une fonction de distribution de densité $h : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$. Alors $h d\lambda$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Définition (#314) : Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité. Nous disons qu'un événement A se produit "presque sûrement" si la probabilité de A est 1, ou de manière équivalente si $P(\Omega \backslash A) = 0$.

7.4.2.1 Mesure de Lebesgue des nombres rationnels et irrationnels

Nous pouvons maintenant commencer à calculer la mesure de Lebesgue des nombres rationnels ! Le calcul utilise le premier lemme suivant :

Lemme 7.11.1. Si $X \subseteq Y$ sont tous deux des ensembles mesurables, $\mu(X) \leq \mu(Y)$. Bien que cette affirmation soit assez intuitive (un sous-ensemble ne doit pas être plus grand que son sur-ensemble), donnons-en un brève démonstration :

Démonstration 7.11.2. Nous pouvons décomposer Y comme $Y = X \cup (Y \backslash X)$ (ici $Y \backslash X$ est le complément relatif de X dans Y pour rappel). Puisque X et $Y \backslash X$ sont disjoints, par la troisième propriété (additivité dénombrable) de la mesure de Lebesgue μ introduite plus haut (voir page 2466) :

$$\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \backslash X) \geq \mu(X) \tag{7.4.48}$$

étant donné que $\mu(Y \backslash X) \geq 0$.

■ Q.E.D.

Nous prouvons maintenant le lemme suivant :

Lemme 7.11.2. La mesure de Lebesgue de tout ensemble singleton, $\{x\}$, est nulle.

Démonstration 7.11.3. Ce fait est relativement intuitif, car un singleton est le plus petit ensemble non vide possible ; si nous voulons avoir des ensembles non vides de mesure zéro, ils doivent sûrement inclure les singletons.

Soit x n'importe quel nombre réel. L'ensemble $\{x\}$ est mesurable, et pour tout $\varepsilon > 0$, $\{x\} \subset \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Dès lors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(\{x\}) \\ &\leq \mu\left(\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\ &= x + \frac{\varepsilon}{2} - \left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \varepsilon \end{aligned} \tag{7.4.49}$$

ainsi $0 \leq \mu(\{x\}) \leq \varepsilon$. Étant donné que $\varepsilon > 0$ était arbitraire, nous pouvons tout aussi bien poser $\varepsilon \to 0$, ce qui montre que $\mu(\{x\}) = 0$.

■ Q.E.D.

Enfin, nous sommes en mesure de calculer la mesure de Lebesgue des nombres rationnels :

En cours de traduction de l' anglais

Démonstration 7.11.4. Puisque les rationnels sont dénombrables, nous pouvons les énumérer comme $\mathbb{Q}=\cup_{i=1}^{+\infty}\{q_i\}$, ainsi :

$$\mu(\mathbb{Q})=\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(\{q_i\})=\sum_{i=1}^{+\infty}0=0 \tag{7.4.50}$$

Nous sommes arrivés au fait remarquable (et contre-intuitif) que la mesure de Lebesgue des nombres rationnels est nulle. Dans un sens très précis, presque tous les nombres réels ne sont pas rationnels.

■ Q.E.D.

Le lecteur doit garder à l'esprit que nous obtenons ce résultat parce que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. L'une des propriétés de la mesure de Lebesgue (par opposition à la mesure de Peano-Jordan, par exemple) est que la mesure d'une union dénombrable d'ensembles disjoints est la somme des mesures des ensembles individuels. Un seul point a une mesure de Lebesgue de zéro, donc un ensemble dénombrable, étant une union dénombrable de singletons, a également mesure de Lebesgue de zéro !

Revenons au problème de la comparaison de la taille des rationnels à l'intervalle unitaire $[0,1]$, qui a motivé notre introduction de la théorie de la mesure ci-dessus. La mesure de l'intervalle unitaire est $\mu([0,1])=1$, donc l'intervalle est plus grand que les rationnels.

Remarque

Les lecteurs assidus auront peut-être remarqué que notre démonstration selon laquelle les nombres rationnels ont une mesure nulle peut être appliquée à n'importe quel sous-ensemble dénombrable des nombres réels. Même si cela semble confirmer notre idée initiale selon laquelle les petits ensembles des réels sont ceux qui sont dénombrables, ce n'est pas vrai. L'ensemble de Cantor (voir section Fractales page ??), un exemple bien connu en analyse et topologie, est indénombrable et de mesure zéro. Par conséquent, la classe des petits sous-ensembles des nombres réels est bien plus grande que les seuls sous-ensembles dénombrables.

En cours de traduction de l'anglais

Soit P la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0,1]$. Si $\omega\in[0,1]$, alors ω est presque sûrement un nombre irrationnel (car l'ensemble des nombres rationnels a une mesure de Lebesgue 0).

Cet exemple montre qu'un événement ayant une probabilité 1 (équivalent à se produire presque sûrement) ne signifie pas que l'événement se produit définitivement. A l'inverse, un événement ayant une probabilité 0 ne signifie pas que l'événement est impossible. Plus précisément, si un nombre réel est choisi au hasard parmi $[0,1]$ en utilisant la mesure de Lebesgue comme probabilité, alors la probabilité que le nombre soit rationnel est de 0, mais cet événement peut toujours se produire.

En d'autres termes, une probabilité nulle ne signifie pas que l'événement est impossible ! Chaque fois que vous choisissez un nombre aléatoire parmi $[0,1]$, vous disposez d'un ensemble infini de résultats possibles, donc la probabilité de choisir un nombre dans n'importe quel sous-ensemble fini de $[0,1]$ est égale à zéro. Cependant, un événement impossible est défini autrement : C'est un événement qui ne peut pas se produire en raison des conditions expérimentales. Dans ce cas, il s'agit de choisir n'importe quel nombre en dehors de $[0,1]$.

Ainsi, les événements impossibles et zéro probables ont la même probabilité de 0, cependant les événements impossibles ne se produisent jamais, alors que les événements zéro probables sont possibles ! Ceci est parfois appelé le "théorème miracle". C'est pourquoi en science un "miracle" est associé à un événement impossible, mais la plupart des gens qui n'ont pas de diplôme universitaire en sciences associent (à tort !) les miracles à des événements zéro probables... Cela découle du fait qu'une longueur de segment $[1, 1]$ (un seul point, c'est à dire "singleton") est 0, cependant le point 1 (ainsi que tout autre point) existe !

À ce stade, le lecteur peut désormais comprendre ce que nous avons dit précédemment :

- Une estimation ponctuelle a une probabilité nulle dans tous les problèmes impliquant des variables (ou combinaisons de variables) ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}$ et donc une telle estimation n'a pas de sens rigoureusement parlant
- Le point précédent explique pourquoi nous devrions toujours dans de tels cas calculer des plages (intervalles) d'estimation plausibles plutôt que des estimations ponctuelles qui ont une probabilité nulle.
- Un événement ayant une probabilité nulle ne signifie pas qu'il ne peut pas se produire

En cou... l'anglais

Attention ! Sur internet, et notamment sur les réseaux sociaux (sans surprises...), se propage une désinformation qui consiste à affirmer (évidemment sans preuves !), que si une probabilité est suffisamment faible, alors l'événement lié peut être considéré comme ayant une probabilité strictement égale à zéro et donc est un événement impossible. C'est évidemment faux et nous l'avons donc prouvé ci-dessus ! Il est également très facile de réfuter expérimentalement cette affirmation stupide en utilisant simplement quelques dizaines de dés hexagonaux (parmi bien d'autres possibilités !).

quote 7.4:2480.#49

> *La théorie des probabilités [...] devient le supplément le plus heureux à l'ignorance et à la faiblesse de l'esprit humain. Si l'on considère les méthodes analyliques auxquelles cette théorie a donné naissance, la vérité des principes qui lui servent de base la logique fine et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problemes, les établissements d'utilité publique qui s'appuient sur elle, et l'extension qu'elle a reçue et qu'elle peut recevoir encore, par son application aux questions les plus importantes de la Philosophie naturelle et des sciences morales ; si l'on observe ensuite que dans les choses mêmes qui he peuvent être soumises au calcul, elle donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements, et qu'elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent, on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le systeme de l'instruction publique.*

Pierre-Simon de Laplace

~50 %

17 votes, 76.47%

En cours de traduction de l' anglais

8

Géométrie

La Géométrie est la discipline mathématique qui se concentre sur l'étude rigoureuse des espaces et des formes. (Larousse)

En cours de traduction de l' anglais

Contents

8.1 Trigonométrie **2486**
8.1.1 Radian 2486
8.1.2 Trigonométrie du Cercle 2491
8.1.2.1 Identités triangulaires trigonométriques remarquables 2502
8.1.3 Trigonométrie Hyperbolique 2515
8.1.3.1 Identités hyperboliques remarquables 2522
8.1.4 Trigonométrie Sphérique 2524
8.1.4.1 Théorème de Girard 2528
8.1.4.2 Formule des quatre parties 2530
8.1.5 Angle Solide 2531
8.2 Géométrie Euclidienne **2535**
8.2.1 Objets de la Géométrie Euclidienne 2535
8.2.1.1 Dimensions 2537
8.2.2 Constructions d'Euclides 2545
8.2.2.1 Droites et Segments 2548
8.2.3 Géométrie Plane 2555
8.2.3.1 Déplacements et Retournements 2556
8.2.3.2 Angles plans 2557
8.2.3.3 Triangles 2574
8.2.3.4 Parallélisme 2598
8.2.3.5 Cercles 2600
8.2.4 Axiomes de Hilbert 2610

8.2.4.1 Axiomes d'association (A) . . . 2611
8.2.4.2 Axiomes d'ordre (O) . . . 2611
8.2.4.3 Axiomes de congruence . . . 2612
8.2.4.4 Axiomes de continuité . . . 2612
8.2.4.5 Axiomes des parallèles . . . 2613
8.2.5 Barycentre (centroïde) . . . 2614
8.2.6 Transformations Géométriques . . . 2619
8.2.6.1 Translation . . . 2621
8.2.6.2 Homothétie (mise à l'échelle) . . . 2622
8.2.6.3 Transformation de cisaillement (obliquité) . . . 2625
8.2.6.4 Rotation . . . 2627
8.2.6.5 Réflexion . . . 2639
8.3 Géométries Non-Euclidiennes . . . 2643
8.3.1 Courbure(s) . . . 2645
8.3.2 Axiomes de la géométrie non-euclidienne . . . 2647
8.3.3 Théorèmes généralisés sur la somme des angles . . . 2648
8.3.4 Géodésique et Équation Métrique . . . 2649
8.3.5 Espaces de Riemann . . . 2653
8.4 Géométrie Projective . . . 2659
8.4.1 Perspective conique (perspective centrale) . . . 2661
8.4.1.1 Images de Points . . . 2665
8.4.1.2 Images de Droites . . . 2682
8.4.2 Projections affines . . . 2693
8.4.2.1 Perspective Isométrique . . . 2695
8.4.2.2 Perspective Oblique . . . 2701
8.4.2.3 Projection Orthogonale . . . 2703
8.4.3 Projections Sphériques . . . 2708
8.4.3.1 Projection Stéréographique . . . 2709
8.4.3.2 Projection Cylindrique . . . 2718
8.4.3.3 Projection de Mercator . . . 2719
8.4.3.4 Projection équivalente de Lambert (projection de Peter) . . . 2723
8.4.3.5 Projection de Mollweide . . . 2726
8.4.4 Autres perspectives et Lois de la Perspective Linéaire . . . 2732
8.4.5 Coordonnées Homogènes (coordonnées de projection) . . . 2739
8.4.5.1 Espace Projectif $\mathcal{P}^2$ . . . 2739
8.4.5.2 Espace Projectif $\mathcal{P}^3$ . . . 2741
8.5 Géométrie Analytique . . . 2744

En cours de traduction de l'anglais

8.5.1 Coniques . . . 2744
8.5.1.1 Approche Algébrique . . . 2745
8.5.1.2 Approche Géométrique . . . 2754
8.5.1.3 Théorème de Dandelin (sphères de Dandelin) . . . 2770
8.5.1.4 Classification des coniques par le déterminant . . . 2771
8.5.2 Paramétrisations . . . 2777
8.5.2.1 Équation du Plan . . . 2777
8.5.2.2 Équation de la Droite . . . 2781
8.5.2.3 Équation d'un Carré . . . 2787
8.5.2.4 Équation d'une Cycloïde . . . 2788
8.5.2.5 Équation d'une Épicycloïde . . . 2790
8.5.2.6 Équation d'une Spirale . . . 2792
8.5.2.7 Équation d'une Hypocycloïde . . . 2793
8.5.2.8 Surface de révolution . . . 2795
8.6 Géométrie Différentielle . . . 2822
8.6.1 Courbes paramétrées . . . 2822
8.6.2 Isoclines . . . 2829
8.6.3 Trièdre de Frenet . . . 2835
8.6.4 Nappes paramétrées . . . 2848
8.6.4.1 Métrique d'une nappe paramétrée . . . 2849
8.7 Formes Géométriques . . . 2856
8.7.1 Surfaces (aires) connues . . . 2857
8.7.1.1 Polygone . . . 2857
8.7.1.2 Rectangle . . . 2862
8.7.1.3 Carré . . . 2864
8.7.1.4 Triangle quelconque . . . 2865
8.7.1.5 Triangle isocèle . . . 2869
8.7.1.6 Triangle équilatéral . . . 2871
8.7.1.7 Triangle rectangle . . . 2874
8.7.1.8 Trapèze . . . 2875
8.7.1.9 Parallélogramme . . . 2877
8.7.1.10 Hexagone . . . 2878
8.7.1.11 Losange . . . 2883
8.7.1.12 Cercle . . . 2884
8.7.1.13 Ellipse . . . 2887
8.7.2 Volumes connus . . . 2893
8.7.2.1 Polyèdres . . . 2894

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.2 Corps usuels de révolution . . . 2927
8.7.3 Inégalité isopérimétrique (2D) . . . 2961
8.8 Théorie des Graphes . . . 2968
8.8.1 Types de Graphes et de Structures . . . 2969
8.8.2 Matrice d'adjacence de Graphes . . . 2997
8.8.3 Catégories . . . 3002
8.9 Théorie des Noeuds . . . 3006
8.9.1 Représentation des Tresses . . . 3006
8.9.1.1 Groupe de Tresses . . . 3008
8.9.2 Représentation des Noeuds . . . 3011
8.9.2.1 Groupe de Noeuds . . . 3015
8.9.3 Noeuds de Tait . . . 3020
8.9.4 Formalisation mathématique . . . 3024
8.9.4.1 Représentation Planaires . . . 3033

En cours de traduction de l'anglais

8.1. Trigonométrie

La trigonométrie fait partie intégrante de la science de la géométrie. La géométrie ayant pour racine étymologique "mesure de la Terre", la trigonométrie a elle pour racine étymologique "mesure des corps à trois angles (trigones)". Ainsi, la trigonométrie est une branche des mathématiques qui étudie les relations impliquant les longueurs et les angles des triangles.

Il existe actuellement quatre trigonométries connues (définies) couramment utilisées en mathématiques : la "trigonométrie circulaire" (assimilée à l'étude des "fonctions circulaires"), la "trigonométrie hyperbolique" et "trigonométrie sphérique" et un peu plus exotique la "trigonométrie elliptique" (liée aux intégrales elliptiques et à leur fonction elliptique associée). Nous proposons dans ce texte une tentative d'approche assez rigoureuse de toutes les relations les plus connues des trois premiers types de trigonométries (la dernière - la trigonométrie elliptique - sera réservée à une autre section de cet ouvrage).

Remarques

R1. Nous ne traiterons par contre pas ici des trigonométries quadratique et rhombique qui sont utilisées par les électroniciens et qui n'ont peu voire pas d'intérêt en physique théorique. La même remarque est valable pour la trigonométrie lemniscatique qui est en relation avec la mathématique pure et en particulier la fonction zêta de Riemann.

R2. Le lecteur qui chercherait la démonstration des dérivées et intégrales des fonctions trigonométriques définies ci-après devra se reporter à la section de Calcul Différentiel Et Intégral (voir chapitre Algèbre page 1432) où les dérivées et intégrales des fonctions usuelles que nous pouvons trouver dans les formulaires sont toutes démontrées.

Le but de cette section va être de déterminer les relations les plus courantes dans la trigonométrie et qui sont énormément utilisées dans toutes les autres section de livre (Mécanique, Astronomie, Statistiques, etc.). Signalons que la majorité des relations (mais pas toutes !) que nous allons démontrer ont été déterminées au 116e siècle (calendrier holocène) par des algébristes comme Viète.

8.1.1 Radian

Quand nous parlons de trigonométrie, la première chose qui devrait venir à l'esprit et s'imposer comme standard de mesures d'angles plans (voir le chapitre de géométrie plane pour la définition du concept d'angle) est la notion de "radians".

Définition (#8.1.315) : 1 "radian" (noté [rad]) est l'angle plan décrit par une sécante à un cercle, passant par son centre, tel que l'arc de cercle ainsi défini par l'axe horizontal passant par le centre du cercle et la sécante soit d'égale longueur au rayon de ce cercle.

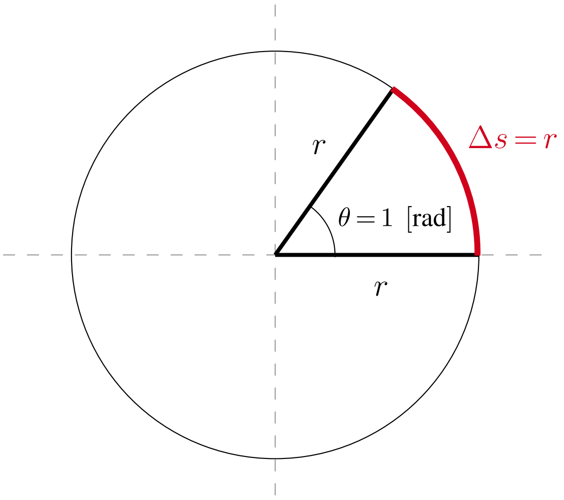


FIG. 8.1 – **Définition schématique du radian**

Remarque

Le radian est largement utilisé en physique, comme nous le verrons dans les chapitres correspondants de cet ouvrage, lorsque des mesures angulaires sont nécessaires. Par exemple, la vitesse angulaire est généralement mesurée en radians par seconde ([rad/s]). Un tour par seconde équivaut alors à 2π radians par seconde.

Par exemple, pour un cercle de rayon $R = 1$ donc de circonférence (ou "périmètre") $P = 2\pi R = 2\pi$ la longueur de l'arc défini par une sécante ayant un angle de 1 radian par rapport à l'horizontale passant par le centre du cercle sera égal à 1.

Il s'ensuit que l'angle pour un "tour" du cercle sera :

$$2\pi \text{ [rad]} \tag{8.1.1}$$

Ceci peut être résumé par l'illustration suivante :

En cours de traduction

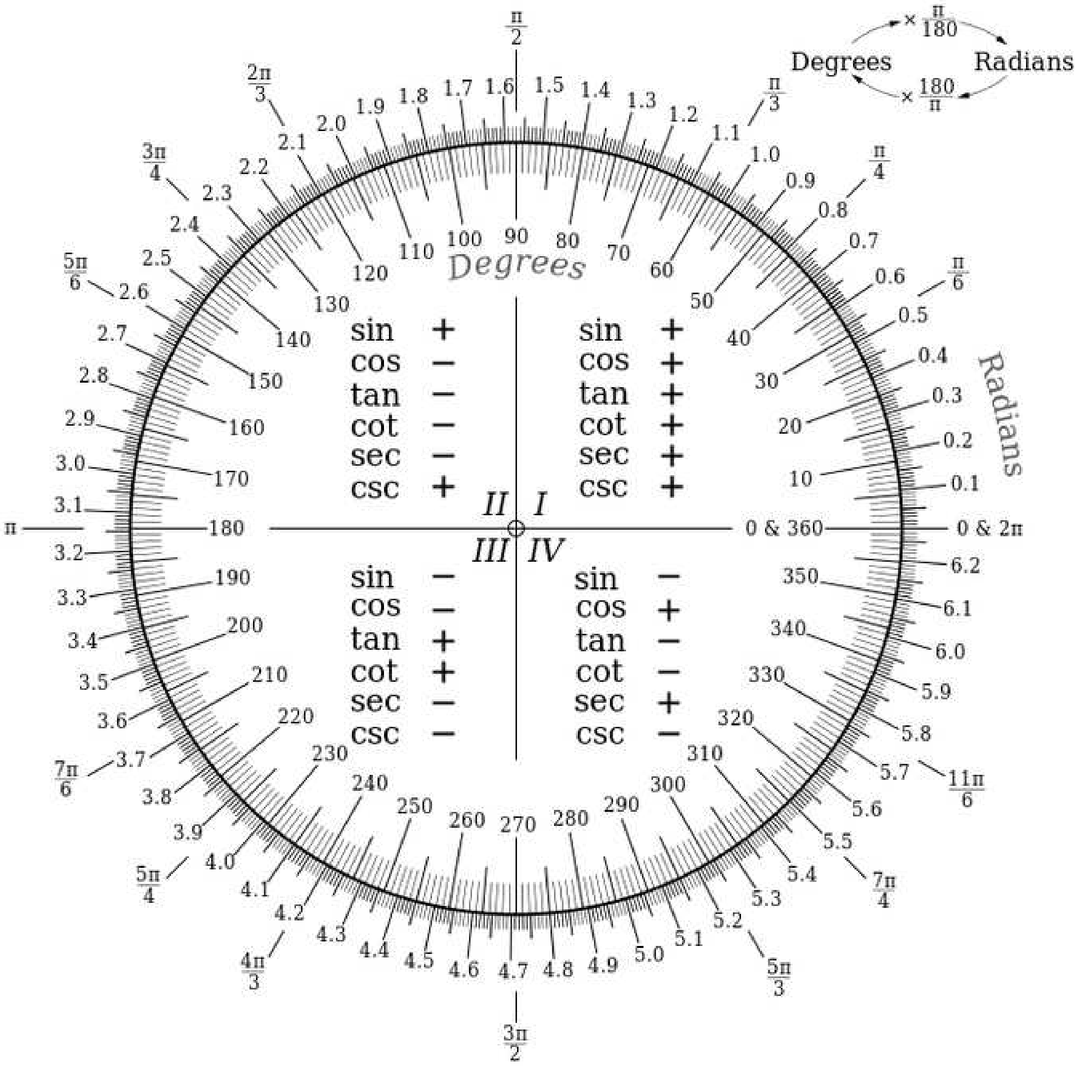


Fig. 8.2 – Un graphique pour convertir entre degrés et radians (source : Wikipedia)

L'exemple précédent peut être généralisé à n'importe quel cercle de rayon R car l'angle pour un tour complet sera toujours pour 2π[rad] un demi-tour complet, π[rad] pour un demi-tour et $\dfrac{\pi}{2}$[rad] pour un quart de tour...

Malheureusement, dans les lycées, la plupart des enseignants apprennent encore aux enfants à mesurer les angles en degrés. Heureusement la conversion à faire n'est pas trop difficile... (c'est une simple règle de trois) :

$$\boxed{\text{angle in radians} = \text{angle in degrees} \cdot \frac{\pi}{180}} \qquad (8.1.2)$$

Soit r la mesure d'un angle en radians, d la mesure du même angle en degrés, g la mesure du même angle en gradients (ancienne unité) nous avons par définition :

$$\boxed{\frac{r}{2\pi} = \frac{d}{360} = \frac{g}{400}} \qquad (8.1.3)$$

Les astronomes et les astrophysiciens aiment parler en minutes ou secondes d'arc comme :

$$1^\circ = 60' \text{ minutes arc} \qquad 1' = 60'' \text{ seconds arc} \tag{8.1.4}$$

Par exemple, si la Lune a un diamètre d'angle d'environ $29'$ $(0,5^\circ)$ dans le ciel et si nos yeux avaient une capacité d'exposition en profondeur, nous serions en mesure de voir qu'Andromède (M31) a un diamètre d'angle de $178'$ (3°), donc environ 6 fois plus large que la Lune !

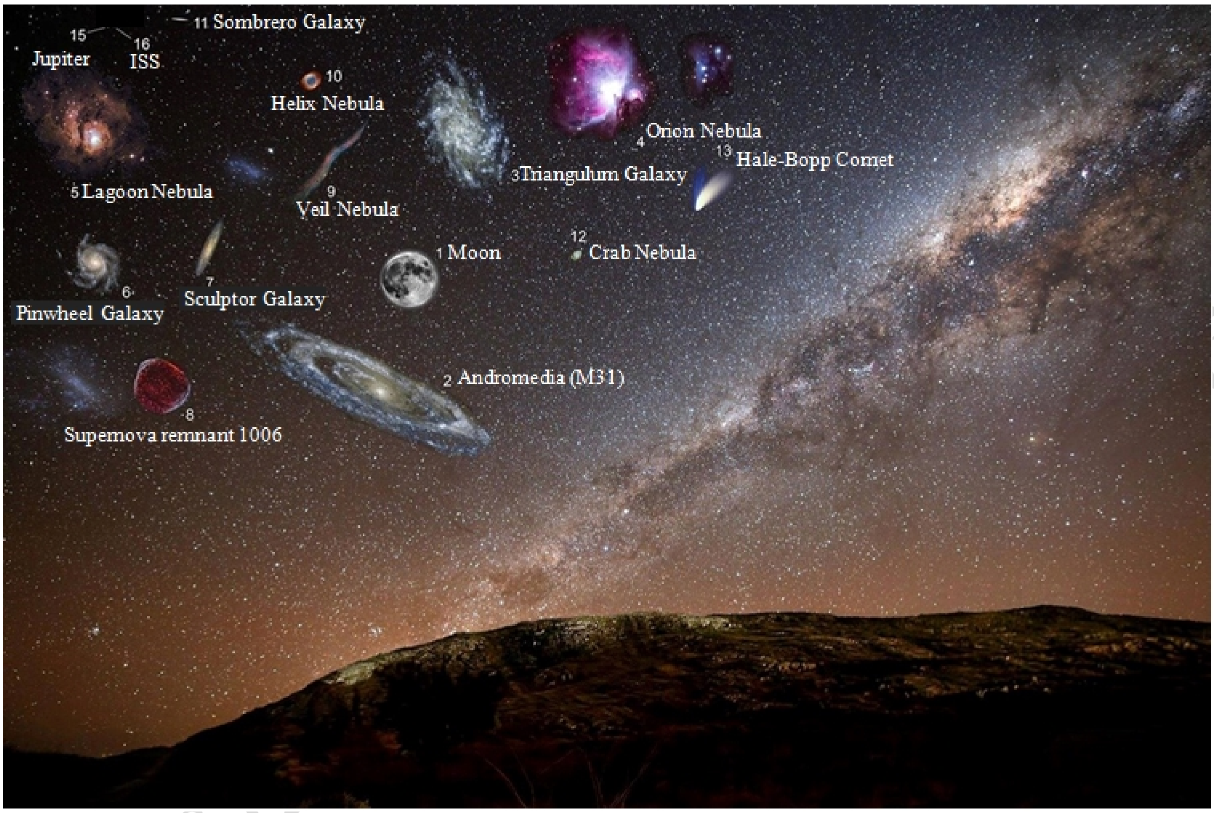


FIG. 8.3 – Le ciel terrestre vu si les yeux humains avaient des capacités d'exposition en profondeur

Voici un joli visuel résumant cette notion d'unités de sous-angles :

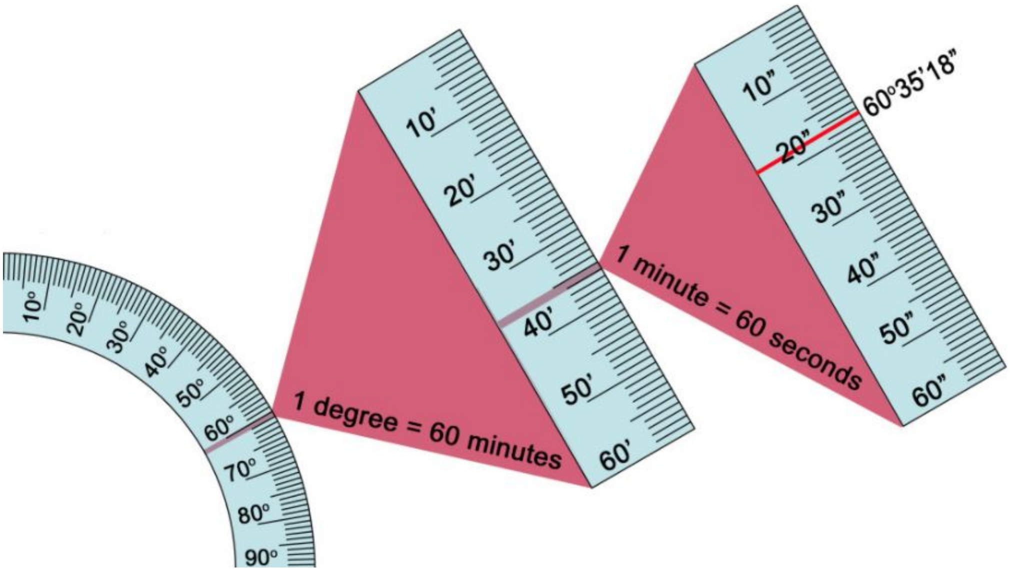


FIG. 8.4 – Degrés, minutes d'arc, secondes d'arc (auteur : ?)

En cours

✍**Exemple :**

Imaginez que vous observez au zénith (à votre perpendiculaire au sol) une énorme sphère de 51 kilomètres de rayon et à une distance de $5'000$ kilomètres.

La taille angulaire de cet objet lorsqu'il est à votre zénith est donnée par :

$$\alpha = \tan\left(\frac{51}{5000}\right) \cong 0.01 \cong 0.573^\circ = 0^\circ 34' 22.8" \tag{8.1.5}$$

Considérons maintenant ce même objet au niveau du sol, mais plus loin de vous, à une distance de $20'000$ kilomètres. Sa taille angulaire est alors :

$$\alpha = \tan\left(\frac{51}{5000}\right) \cong 0.0025 \cong 0.143^\circ = 0^\circ 8' 34.8" \tag{8.1.6}$$

D'où son changement de taille entre les deux positions d'environ un facteur 4.

En cours de traduction de l' anglais

8.1.2 Trigonométrie du Cercle

Soit la figure ci-dessous représentant un cercle quelconque centré à l'origine dans une base directe :

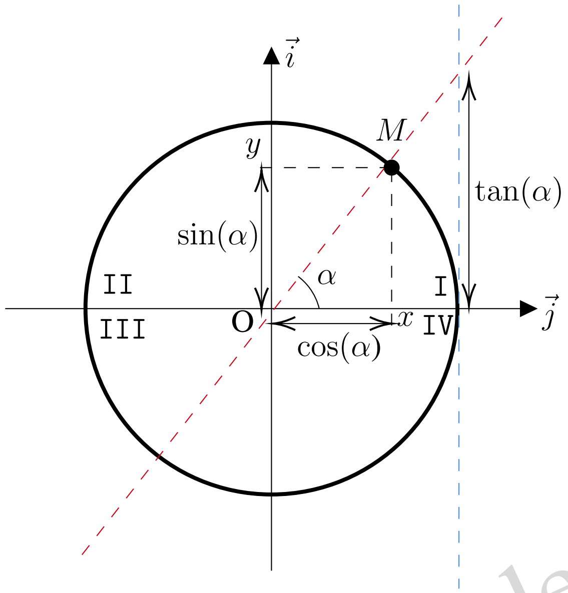


FIG. 8.5 – Soit la figure ci-dessous représentant un cercle quelconque centré à l'origine dans une base directe :

D'abord, de par l'application du théorème de Pythagore (voir section Géométrie Euclidienne page 2590) dans le triangle visible à droite dans la figure ci-dessus, nous avons :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{O}M}\| = R = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{8.1.7}$$

où R est le rayon du cercle.

Pour définir les fonctions trigonométriques pour l'angle α, commencez par n'importe quel triangle rectangle contenant l'angle α. Les trois côtés du triangle sont nommés comme suit :

1. "L'hypoténuse" est le côté opposé à l'angle droit, dans ce cas côté c'est le segment $\overline{\mathrm{O}M}$. L'hypoténuse est toujours le côté le plus long d'un triangle rectangle.
2. Le "côté opposé" est le côté opposé à l'angle qui nous intéresse.
3. Le "côté adjacent" est le côté adjacent à l'angle qui nous intéresse.

À partir de cette représentation nous pouvons définir des entités mathématiques nommées "fonctions trigonométriques du cercle", aussi parfois nommées par les anciens (...) "fonctions cyclométriques", comme (pour les plus connues) :

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha) = \frac{x}{R} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad && \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = \alpha \quad && \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \cos^{-1}(\alpha)\\
&\sin(\alpha) = \frac{y}{R} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad && \arcsin\left(\frac{y}{R}\right) = \alpha \quad && \csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \sin^{-1}(\alpha)\\
&\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} \quad && \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha \quad && \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \tan^{-1}(\alpha)
\end{aligned} \tag{8.1.8}$$

En cours de traduction de l'anglais

Il faut faire attention car suivant les auteurs $\arccos, \arcsin, \arctan$, peuvent être notés respectivement $\cos^{-1}, \sin^{-1}, \tan^{-1}$.

Lisez "cosinus" pour "cos", "sinus" pour "sin", "tangente" pour "tan", "cotangente" pour "cot", "sécante" pour "sec", "cosécante" pour "csc".

Remarques

R1. Lorsque le contexte le permet et qu'il ne peut y avoir d'ambiguïté, les parenthèses après le nom de la fonction trigonométrique peuvent être omises (c'est souvent le cas en physique).

R2. Les fonctions arc... sont donc les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques (fonctions bijectives) correspondantes !

En pratique (école ou ingénierie de haut niveau) il faut veiller à deux propriétés importantes :

1. Les fonctions trigonométriques sont loin d'être bijectives. En effet, ils ont tendance à se répéter périodiquement comme nous le verrons plus loin. Néanmoins, avec une légère restriction sur leur domaine de définition, ils peuvent acquérir cette qualité. Dans ce contexte, la perspective d'une réciprocité devient possible.

2. Si le signe de la parenthèse de l'arc tangente est négatif, alors on ne sait pas exactement dans quel quadrant (I, II, III ou IV) on se trouve donc on ne connaît pas le signe du numérateur ou du dénominateur ! C'est pour cette raison que la plupart des calculatrices et logiciels ont deux fonctions d'arc tangente : `arctan` et `arctan2`. La première donne un angle entre $\left[-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc on ne peut pas savoir précisément dans quel quadrant on se trouve. La seconde nous donne un angle entre $[-\pi,\pi]$ pour que nous puissions savoir dans quel quadrant nous nous trouvons mais nous devons fournir le signe du numérateur ou du dénominateur.

En cours de traduction de l'anglais

À partir de ces fonctions, on peut faire quelques combinaisons et définir des relations simples mais remarquables mais dont l'utilité est discutable (et qui sont très rarement utilisées) telles que :

$$\begin{aligned}\text{covers}(\alpha)&=1-\sin(\alpha)\\ \text{vers}(\alpha)&=1-\cos(\alpha)\\ \text{cexc}(\alpha)&=\csc(\alpha)-1\\ \text{exsec}(\alpha)&=\sec(\alpha)-1\end{aligned} \tag{8.1.9}$$

mais vous ne rencontrerez jamais ces fonctions dans ce livre car nous n'utilisons personnellement jamais de telles notations (c'est plutôt habituel dans certains livres américains).

Voici une jolie figure... qui résume tout ça :

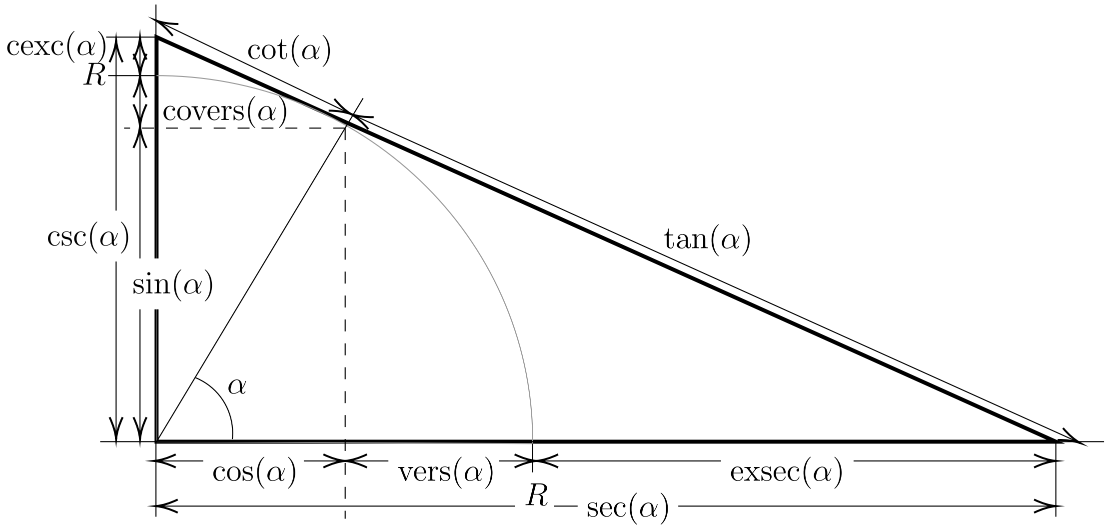
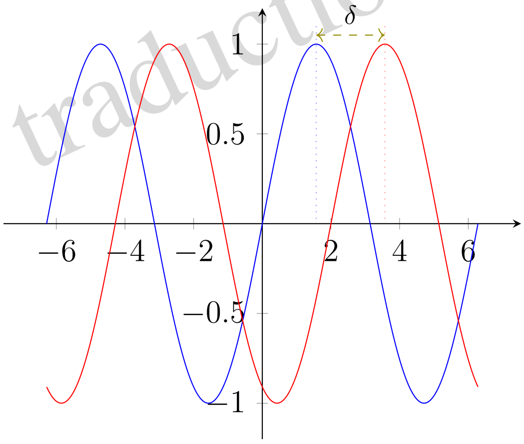


FIG. 8.6 – **Principe de conception des fonctions trigonométriques circulaires communes**

Définition (#8.1.316) : Nous nommons "décalage de phase" l'angle δ qui décale tout argument d'une fonction trigonométrique d'une valeur donnée. Par exemple comme illustré ci-dessous :

$$\sin(x + \delta) \quad (8.1.10)$$



En cours de traduction de l'anglais

OK pour les personnes lisant ce livre sur un ordinateur avec Adobe Flash Player installé et activé, voici une version animée (sinon voir ici : https://vimeo.com/575748635) :

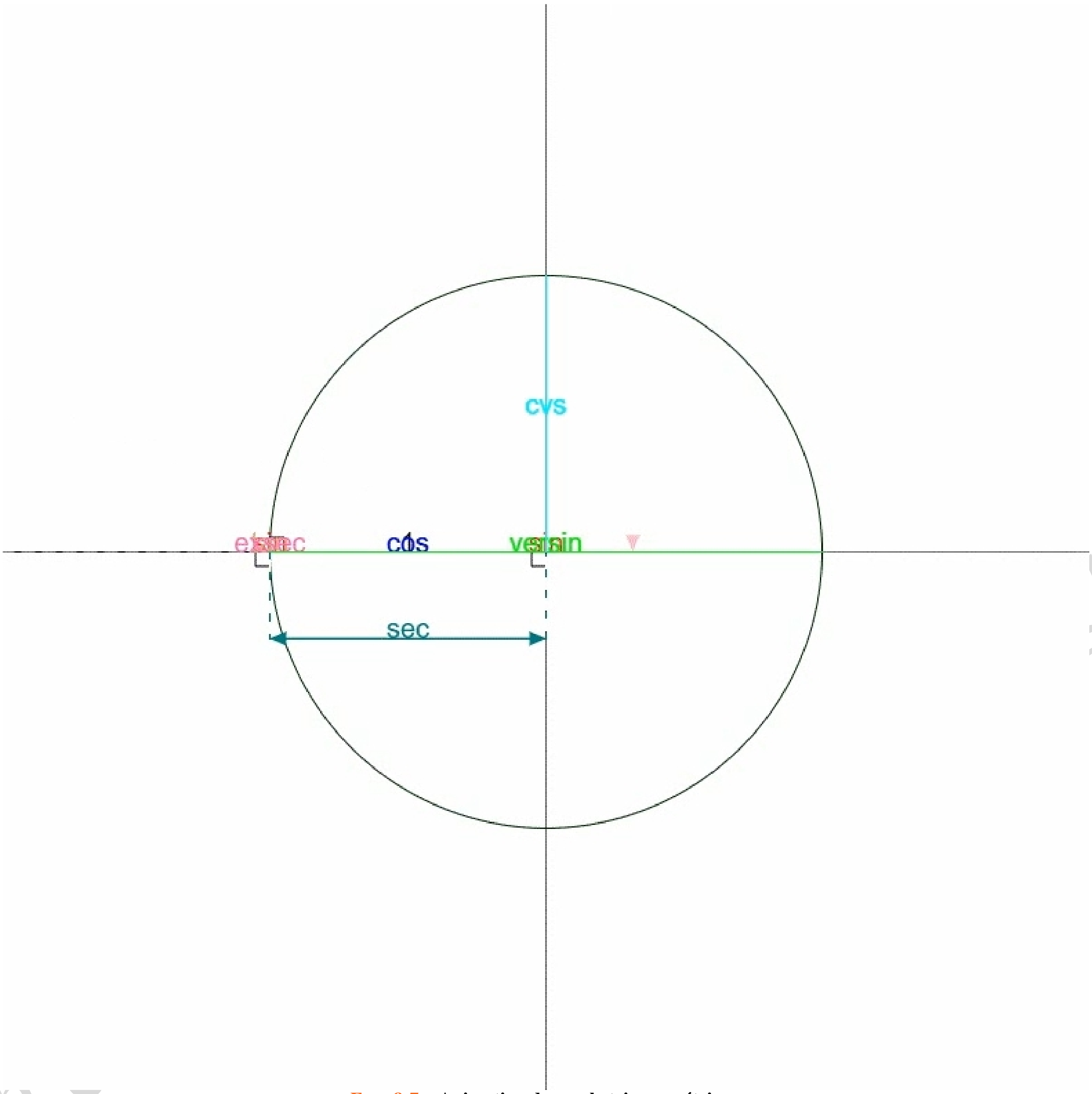


FIG. 8.7 – Animation du cercle trigonométrique

Voyons maintenant quelques propriétés angulaires très simples de ces fonctions communes :

P1. Si nous restons dans le cade de l'étude du cercle, donc nommé "trigonométrie circulaire", il faut poser pour les définitions ci-dessus : $R=1$. Ainsi, la signification physique de ces définitions apparaît plus clairement et il en résultera un certain nombre de propriétés et d'applications directement utilisables en physique théorique et en mathématiques pures.

Effectivement, si $R=1$ nous avons trivialement (voir section Calcul Vectoriel page 1839) :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M}=\cos(\alpha)\vec{i}+\sin(\alpha)\vec{j} \tag{8.1.11}$$

et en appliquant le théorème de Pythagore (voir section Géométrie Euclidienne page 2590) :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{O}M}\|=1=\sqrt{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)} \tag{8.1.12}$$

Dès lors :

$$\boxed{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1} \tag{8.1.13}$$

P2. Si est α un nombre réel, et $\forall k \in \mathbb{N}$, les réels α et $\alpha+2k\pi$ sont associés au même point M de par la périodicité du cercle trigonométrique. En effet, α et $\alpha+2k\pi$ sont deux mesures du même angle orienté. Ainsi :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} \quad \cos(\alpha \pm 2k\pi)=\cos(\alpha) \text{ et } \sin(\alpha \pm 2k\pi)=\sin(\alpha) \tag{8.1.14}$$

Idem pour toutes les fonctions trigonométriques qui découlent de la définition des fonctions sinus et cosinus.

Remarque

Dans la mesure des "angles orientés", nous disons que deux mesures sont congrues modulo $2k\pi$ [rad] si et seulement si leur différence est un multiple de $2k\pi$ [rad]. Cela caractérise deux mesures d'un même angle.

Par définition, le sinus et le cosinus de tout nombre réel font partie de l'intervalle $[-1,+1]$. Plus précisément, la position de M nous permet d'en savoir plus sur le cosinus et le sinus de α. Ainsi :

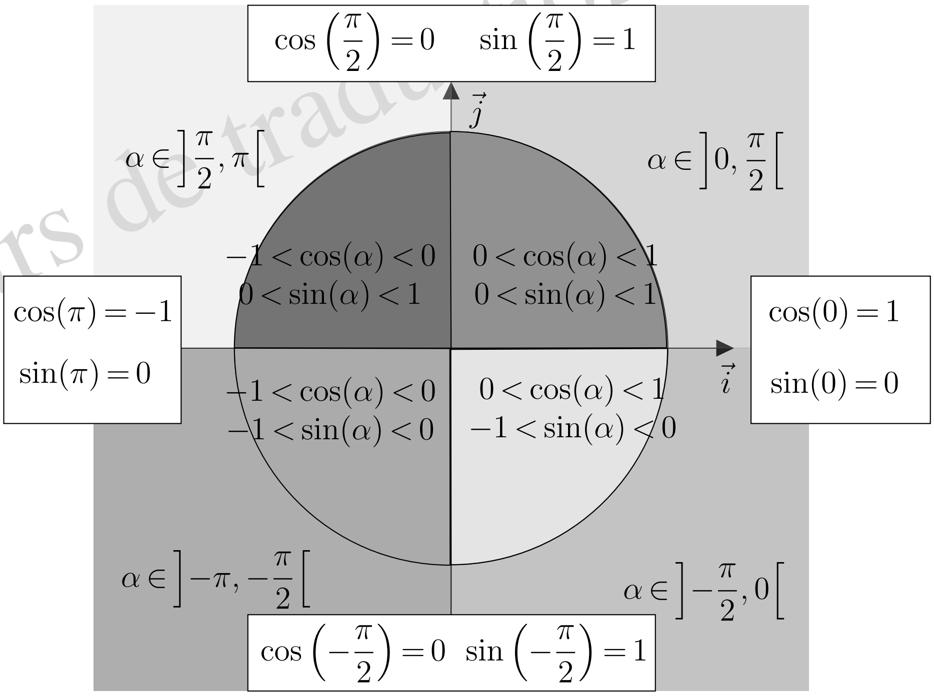


FIG. 8.8 – **Valeurs des angles remarquables des fonctions trigonométriques connues**

Il existe également une autre représentation des fonctions trigonométriques du cercle, un peu plus technique au sens visuel mais assez importante pour bien comprendre, plus tard, la mécanique ondulatoire (voir section du même nom à la page **??**) :

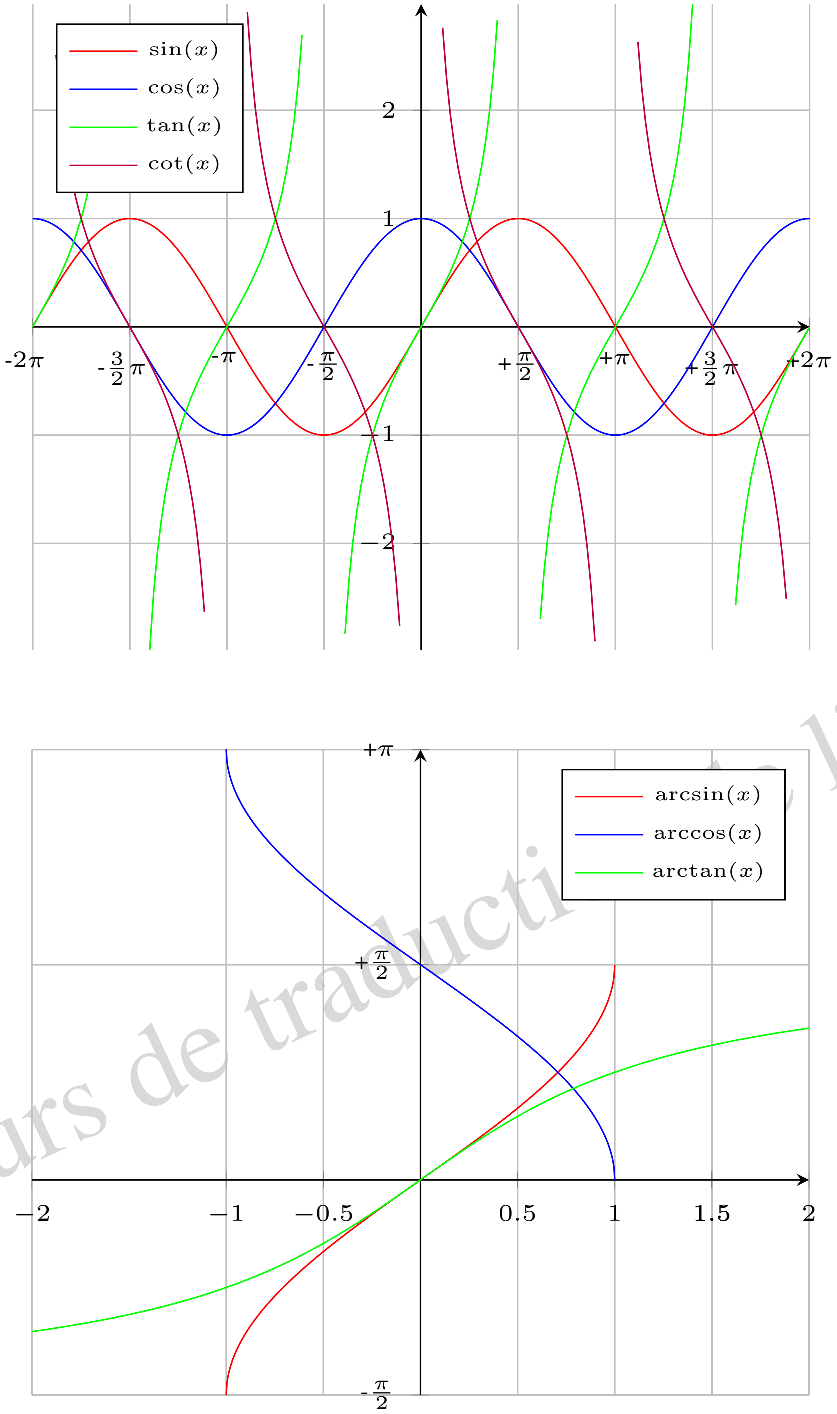


FIG. 8.9 – Graphiques de certaines fonctions trigonométriques circulaires courantes

En cours de traduction de l'anglais

Le lecteur devrait remarquer à ce stade sans trop de difficultés les propriétés suivantes (souvent utilisées en physique !) avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\sin(n\pi) &= 0\\ \cos(n\pi) &= (-1)^n\\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= (-1)^n\\ \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= 0\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

et reconnaître facilement que le sinus est une fonction impaire et la fonction cosinus une fonction paire (constat qui nous sera souvent utile dans divers développements mathématiques sur les séries trigonométriques).

Nous avons vu au début de cette section, que de par la définition des fonctions trigonométriques nous avons :

$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha)=\frac{1}{\tan(\alpha)}=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \tag{8.1.16}$$

et aussi :

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1 \Leftrightarrow \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}+1=\frac{1}{\sin^2(\alpha)} \Leftrightarrow \cot^2(\alpha)+1=\frac{1}{\sin^2(\alpha)} \tag{8.1.17}$$

De façon exactement identique nous démontrons que :

$$\tan^2(\alpha)+1=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \tag{8.1.18}$$

À partir de ces dernières relations nous tirons sans trop de peine que (algèbre élémentaire) :

$$\sin(\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}=\sqrt{1-\frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}}=\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}} \tag{8.1.19}$$

Identiquement nous aurons

$$\cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}=\sqrt{1-\frac{1}{1+\cot^2(\alpha)}}=\frac{\cot(\alpha)}{\sqrt{1+\cot^2(\alpha)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} \tag{8.1.20}$$

Par raisonnement inverse nous obtenons tout aussi facilement :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha)&=\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}\\ \cot(\alpha)&=\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}=\frac{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)}\end{aligned} \tag{8.1.21}$$

Il vient également sans difficultés en observant le cercle trigonométrique que :

$$\begin{aligned}&\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)\\ &\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin(\alpha)\\ &\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos(\alpha)\\ \\ &\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)\\ &\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos(\alpha)\\ &\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin(\alpha)\\ \\ &\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)\\ &\tan(\pi\pm\alpha)=\pm\tan(\alpha)\\ &\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\cot(\alpha)\end{aligned} \tag{8.1.22}$$

En cours de traduction de l'anglais

Ou résumé en une table pour les plus connues seulement :

Fonctions Trigonométriques	
Fonctions Paires $f(-x)=f(x)$	**Fonctions Impaires** $f(-x)=-f(x)$
$\cos(-x)=\cos(x)$ $\sec(-x)=\sec(x)$	$\sin(-x)=-\sin x$ $\csc(-x)=-\csc(x)$ $\tan(-x)=-\tan(x)$ $\cot(-x)=-\cot(x)$

TAB. 8.1 – **Fonctions trigonométriques paires et impaires**

Remarque

Le signe moins-plus "$\mp$" est généralement utilisé conjointement avec le signe "$\pm$" dans une même relation. Ainsi lorsque le premier est au niveau "$+$", alors l'autre est au niveau "$-$" et inversement.

Voici les figures qui résument comment analyser certaines de ces propriétés (pour les autres relations, la méthode est la même) :

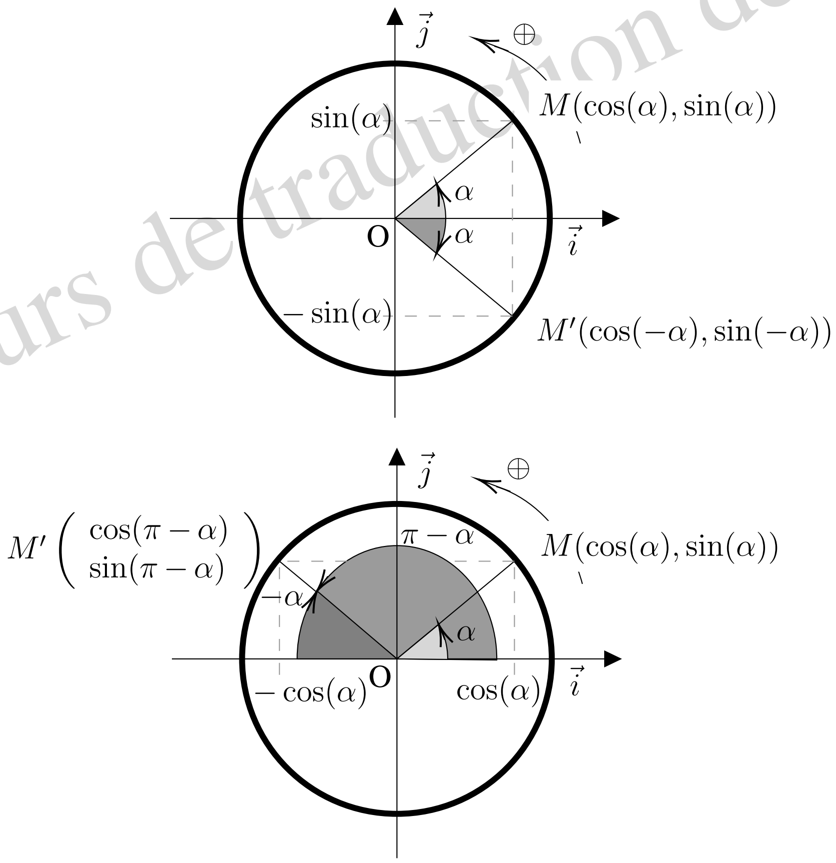
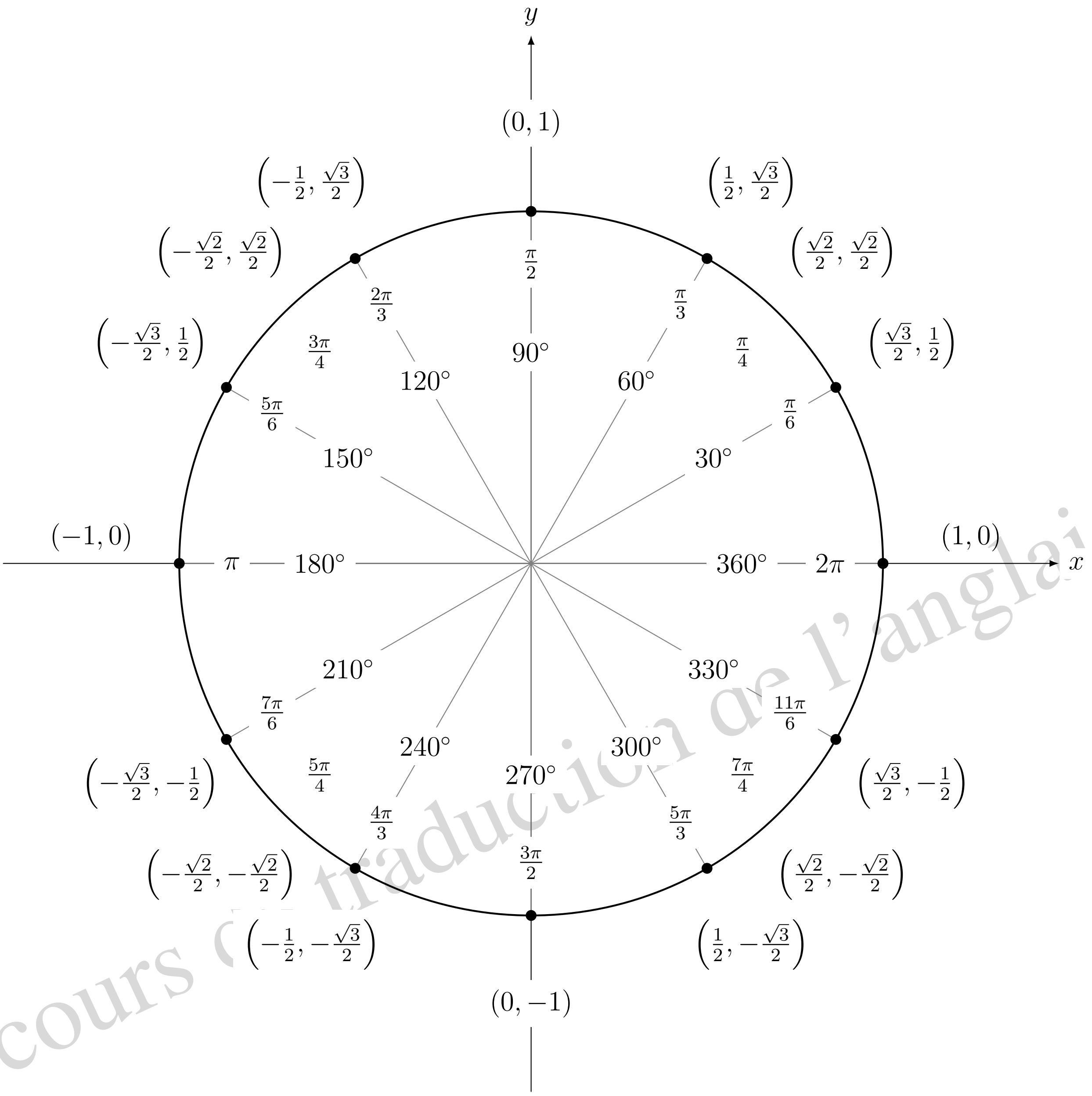


FIG. 8.10 – **Équivalences visuelles de certaines relations trigonométriques**

Voici quelques angles remarquables avec les valeurs associées des cosinus et sinus que beaucoup d'étudiants doivent apprendre par coeur lors de leurs études :

En cours de traduction de l'anglais



En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.11 – Quelques identités d'angles et valeurs trigonométriques conventionnelles associées pour le sinus et le cosinus

Fonctions trigono -métriques	**Les angles de** $\text{arcx}(x)$																
	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi}{3}$	$135°$ $\frac{3\pi}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi}{6}$	$180°$ π	$210°$ $\frac{7\pi}{6}$	$225°$ $\frac{5\pi}{4}$	$240°$ $\frac{4\pi}{3}$	$270°$ $\frac{3\pi}{2}$	$300°$ $\frac{5\pi}{3}$	$315°$ $\frac{7\pi}{4}$	$330°$ $\frac{11\pi}{6}$	$360°$ 2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(x)$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$

TAB. 8.2 – Quelques identités d'angles et tableau des valeurs trigonométriques associées conventionnelles

Introduisons maintenant une dernière définition concernant les fonctions du cercle trigonomé-

triques que nous retrouverons dans les sections d'Optique Ondulatoire ou lors de notre étude des transformées de Fourier dans la section des Séquences et Séries qui est le "sinus cardinal :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{8.1.23}$$

représenté par (avec Maple 4.00b) :

```
>with(plots):
>sinc:=sin(x)/x;
>plot([sinc(x)], x=-5*Pi..5*Pi, Sinc);
```

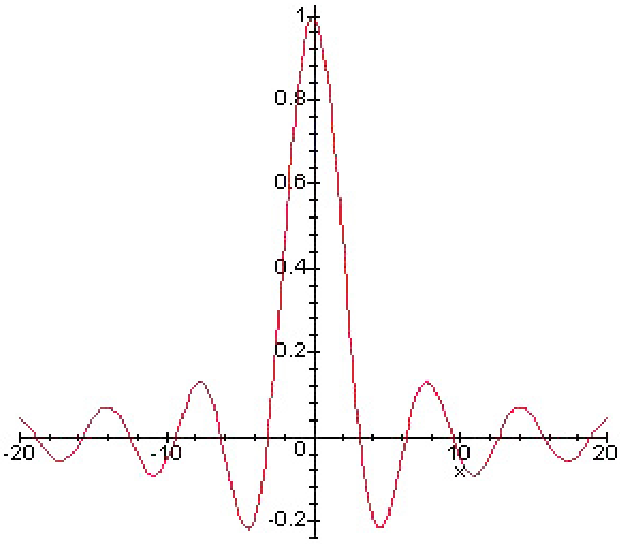


FIG. 8.12 – Tracé 2D de la fonction sinc dans Maple 4.00b

Ou dans une bien meilleure qualité en utilisant TikZ :

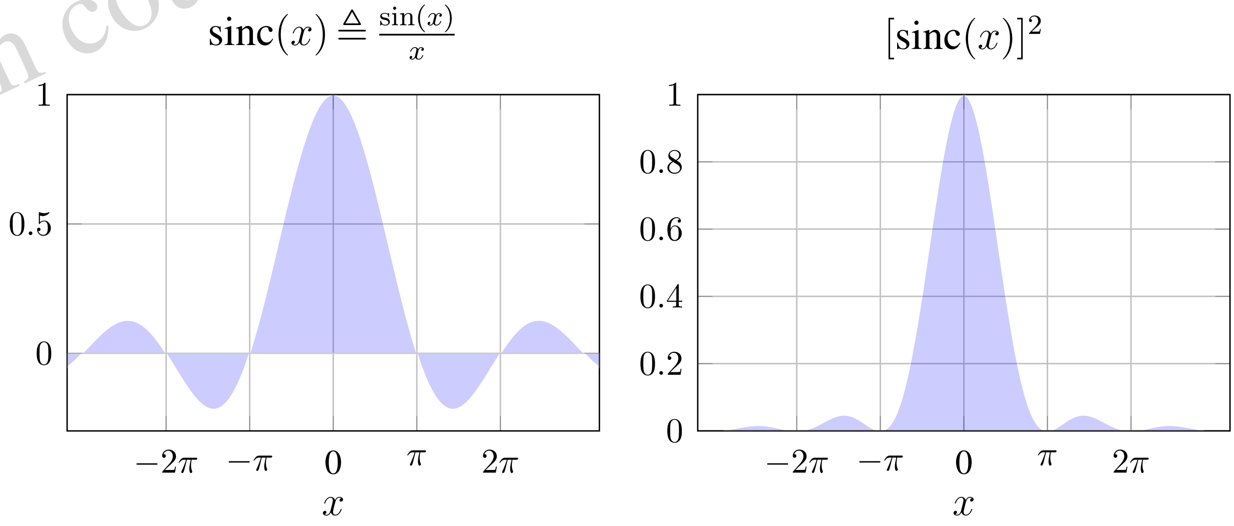


FIG. 8.13 – Sinus cardinal et son fameux équivalent au carré (auteur : Jimmy Roussel)

En cours de traduction de l'anglais

Même si les ingénieurs connaissent très bien les figures précédentes c'est surtout sa représentation pseudo-3D qui est connue du grand public car souvent utilisée pour des raisons marketing

comme faisant penser à une goutte d'eau tombant dans l'eau (figure réalisée avec Maple 4.00b) et c'est toujours joli à regarder... :

```
>plot3d(sin(sqrt(x^2+y^2))/(sqrt(x^2+y^2)),x=-20..20,y=-20..20);
```

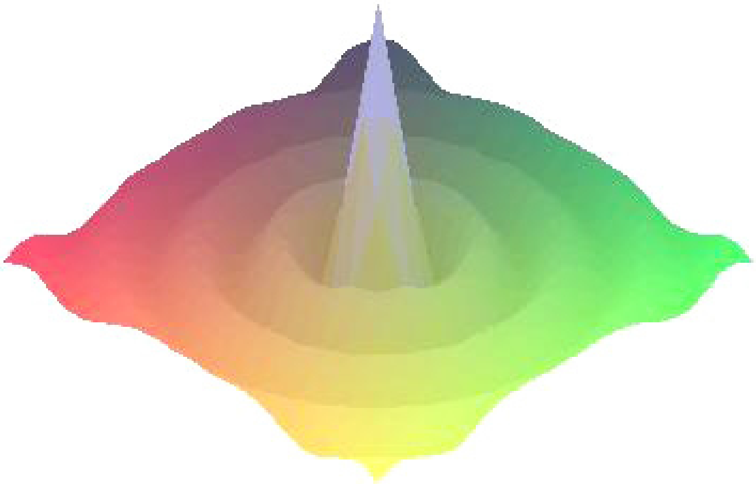


FIG. 8.14 – **Tracé pseudo 3D de la fonction sinc dans Maple 4.00b**

Ou dans une bien meilleure qualité en utilisant TikZ :

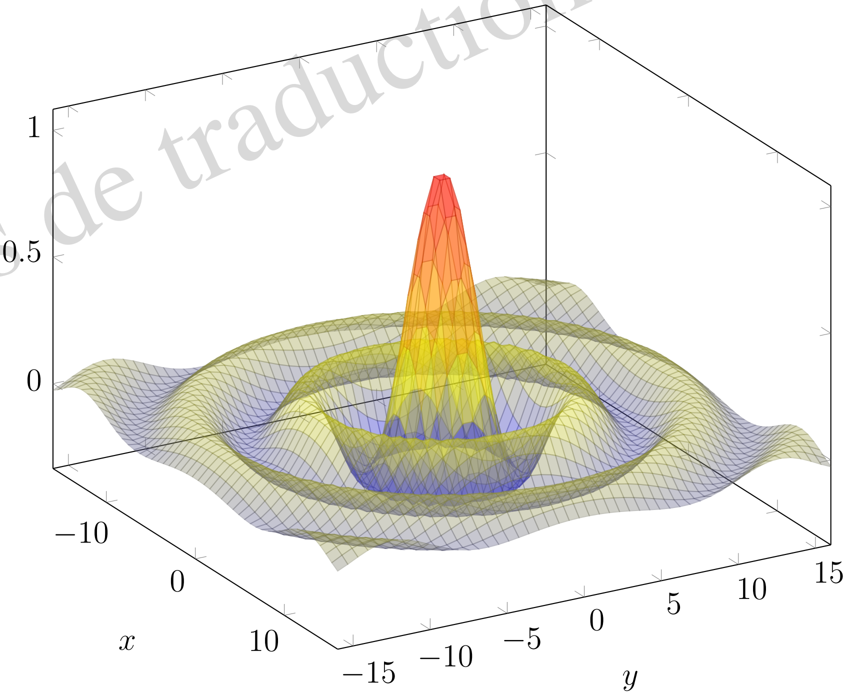


FIG. 8.15 – **Fonction sinusoïdale cardinale avec TikZ**

Dans les deux cas, la valeur à $x = 0$ est définie comme étant la valeur limite $\text{sinc}(0) = 1$ qui est vraiment facile à démontrer en utilisant la règle de l'Hôpital (voir section Calcul Différentiel et Intégral 1444).

Gardez à l'esprit que la fonction "sinc" est particulièrement importante dans le traitement du

En cours de traduction de l'anglais

signal et constitue la transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire. Elle est aussi importantdans certains phénomènes optiques !

8.1.2.1 Identités triangulaires trigonométriques remarquables

Le dessin ci-dessous va nous permettre d'établir des relations qui permettront de résoudre des équations impliquant des fonctions trigonométriques (toutes ces relations sont de première importance en physique pour la simplification de la résolution de problèmes !).

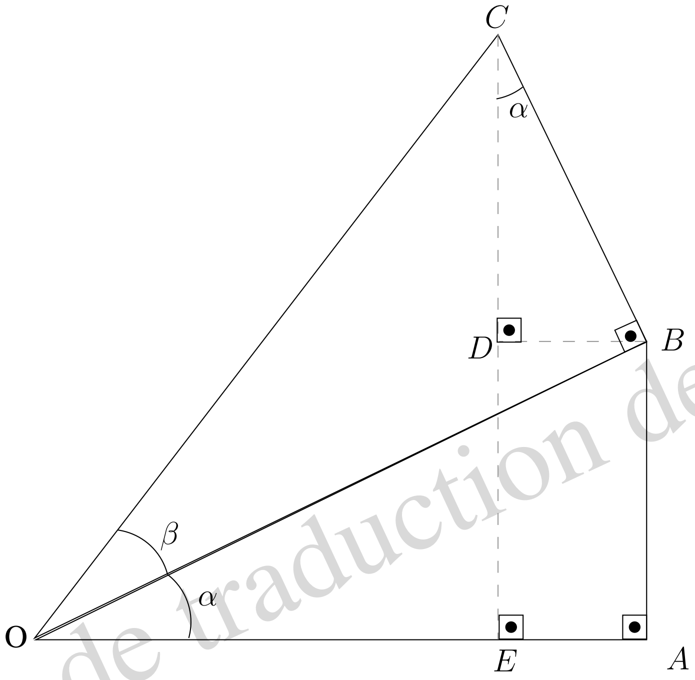


FIG. 8.16 – Construction de base pour la détermination des relations triangulaires trigonométriques remarquables

En cours de traduction de l'anglais

Nous noterons sur le schéma la relation suivante :

$$\overline{DE} = \overline{AB} \tag{8.1.24}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{CD}+\overline{DE}}{\overline{\mathrm{O}C}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{\mathrm{O}C}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{\mathrm{O}C}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{\mathrm{O}C}}\frac{\overline{CB}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{\mathrm{O}C}}\frac{\overline{\mathrm{O}B}}{\overline{\mathrm{O}B}} \\ &= \frac{\overline{CB}}{\overline{\mathrm{O}C}}\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{\mathrm{O}B}}{\overline{\mathrm{O}C}}\frac{\overline{AB}}{\overline{\mathrm{O}B}} = \sin(\beta)\cos(\alpha)+\cos(\beta)\sin(\alpha)\end{aligned} \tag{8.1.25}$$

En résumé :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\beta)\cos(\alpha)+\cos(\beta)\sin(\alpha) \tag{8.1.26}$$

Remarque

Nous avons hésité à encadrer toutes les principales identités des triangles mais en fait tous les résultats du dessus et du dessous sont importants et donc tout aurait été encadré... Nous nous excusons donc auprès du lecteur si l'absence de cadre perturbe...

Ce qui implique trivialement si $\alpha=\beta$:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{8.1.27}$$

et :

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin(\alpha)\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\sin(-\beta) \tag{8.1.28}$$

D'où :

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.1.29}$$

Nous avons également :

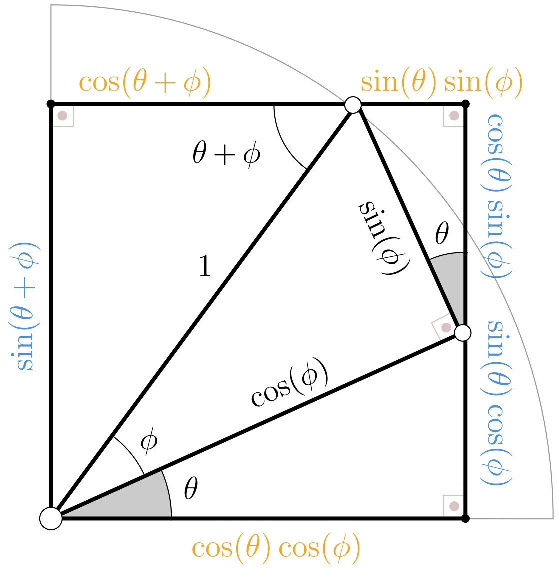
$$\begin{aligned}\sin\left([\alpha+\beta]+\frac{\pi}{2}\right)&=\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\alpha)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin(\alpha)(-\sin(\beta))+\cos(\alpha)\cos(\beta)\end{aligned} \tag{8.1.30}$$

D'où :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.1.31}$$

Ce qui implique trivialement si $\alpha=\beta$:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \tag{8.1.32}$$



$$\sin(\theta+\phi)=\sin(\theta)\cos(\phi)+\cos(\theta)\sin(\phi)$$
$$\cos(\theta+\phi)=\cos(\theta)\cos(\phi)-\sin(\theta)\sin(\phi)$$

En cours de traduction de l'anglais

Avec la relation déjà démontrée $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$ nous obtenons également les relations très importantes :

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1 \tag{8.1.33}$$

Relations avec lesquelles nous obtenons très facilement les ainsi nommées "formules de Carnot" :

$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \qquad \cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \tag{8.1.34}$$

et :

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.1.35}$$

Nous avons aussi :

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\dfrac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\dfrac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{8.1.36}$$

Ceci, pour en arriver à la relation :

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{8.1.37}$$

qui implique quand $\alpha=\beta$:

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \tag{8.1.38}$$

et évidemment :

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan(\alpha)+\tan(-\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(-\beta)}=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{8.1.39}$$

Donc pour résumer :

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\pm\tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{8.1.40}$$

Nous obtenons également de manière triviale à partir des relations précédentes (nous faisons un petit mélange et nous secouons...) :

$$\begin{aligned}\tan^2(\alpha)&=1-\frac{2\tan(\alpha)}{\tan(2\alpha)}\\ \tan^2(\alpha)&=\frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}\end{aligned} \tag{8.1.41}$$

Nous avons aussi en utilisant les résultats ci-dessus :

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cos(\alpha)=2\tan(\alpha)\cos^2(\alpha) \tag{8.1.42}$$

En cours de traduction de l'anglais

en utilisant la relation démontrée beaucoup plus haut :

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)}=\tan^2(\alpha)+1 \tag{8.1.43}$$

Dès lors :

$$\sin(2\alpha)=2\tan(\alpha)\cos^2(\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1}\Leftrightarrow\sin(\alpha)=\frac{2\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)+1} \tag{8.1.44}$$

Exactement de la même manière, nous obtenons (demandez-nous si vous avez besoin de détails) :

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)(1-\tan^2(\alpha)) \tag{8.1.45}$$

En utilisant toujours :

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)}=\tan^2(\alpha)+1 \tag{8.1.46}$$

Dès lors :

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)(1-\tan^2(\alpha))=\frac{1-\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1}\Leftrightarrow\cos(\alpha)=\frac{1-\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)+1} \tag{8.1.47}$$

Déterminons maintenant des formules trigonométriques supplémentaires qui semblent s'appeler "formule de Simpson" ou "formules d'addition trigonométriques" qui expriment la somme du sinus et /ou cosinus en produit du sinus et/ou du cosinus.

Compte tenu des identités déjà démontrées précédemment :

$$\begin{aligned}&(1)\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\&(2)\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned} \tag{8.1.48}$$

Qui peuvent aussi être résumées comme :

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.1.49}$$

Posons $\alpha+\beta=p$ et $\alpha-\beta=q$ et cela nous donne aussi :

$$\alpha=\frac{p+q}{2}\qquad\beta=\frac{p-q}{2} \tag{8.1.50}$$

Nous obtenons en sommant (1) et (2) :

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{8.1.51}$$

et en soustrayant :

$$\cos(p)-\cos(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{8.1.52}$$

En cours de traduction de l' anglais

Dans la même manière mais en partant de :

$$\begin{aligned}
(1) \quad \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) \\
(2) \quad \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned} \tag{8.1.53}$$

qui peut être aussi résumé par :

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.1.54}$$

Nous obtenons alors en sommant :

$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{8.1.55}$$

et en soustrayant :

$$\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \tag{8.1.56}$$

et en réinjectant les angles nous retombons facilement (normalement... mais si vous avez des difficultés dites-le-nous !) sur les "formules inverses de Simpson" :

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))
\end{aligned} \tag{8.1.57}$$

Nous avons aussi en partant de :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.1.58}$$

et nous divisons par $\cos(\alpha)\cos(\beta)$, pour obtenir :

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}=\tan(\alpha)+\tan(\beta) \tag{8.1.59}$$

Et exactement de la même manière nous obtenons :

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}=\tan(\alpha)-\tan(\beta) \tag{8.1.60}$$

Toutes ces relations nous seront utiles lors de notre étude de la physique générale (dans le chapitre de Mécanique Ondulatoire en particulier et donc in extenso en Électrodynamique et Acoustique) et particulièrement dans le cas de calculs d'intégrales ou de superposition d'ondes.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Pour résumer, les relations suivantes démontrées précédemment :

$$\begin{aligned}\cos(p)+\cos(q)&=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos(p)-\cos(q)&=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)+\sin(q)&=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)-\sin(q)&=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\\ \tan(\alpha)+\tan(\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\\ \tan(\alpha)-\tan(\beta)&=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\end{aligned} \tag{8.1.61}$$

sont donc appelées "formules de Simpson".

Dérivons également l'identité suivante qui nous sera utile dans la section Calcul différentiel et Intégral :

$$\begin{aligned}\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\\ &=\frac{0+\cos(x)}{0-\sin(x)}=-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=-\cot(x)\end{aligned} \tag{8.1.62}$$

et respectivement

$$\cot(x)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \tag{8.1.63}$$

Nous avons également cette identité qui nous sera utile dans la section Astronomie :

$$\begin{aligned}\tan^2(x)-\cot^2(x)&=\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}-\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\\ &=\frac{\sin^4(x)-\cos^4(x)}{\cos^2(x)\sin^2(x)}\\ &=\frac{\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)\left(\sin^2(x)-\cos^2(x)\right)}{(\cos(x)\sin(x))^2}\\ &=\frac{(1)(-\cos(2x))}{\frac{1}{4}\sin^2(2x)}\\ &=-4\frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}\end{aligned} \tag{8.1.64}$$

En cours de traduction de l'anglais

8.1.2.1.1 Théorème du Cosinus

Démontrons encore le théorème du cosinus qui nous sera très utile dans les sections de Géométrie, Cosmologie, d'Électrodynamique et de Mécanique.

Théorème 8.1. Dans un triangle quelconque, le carré de l'un des trois côtés est égal à la somme des carrés des deux autres diminuée du double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle compris entre eux :

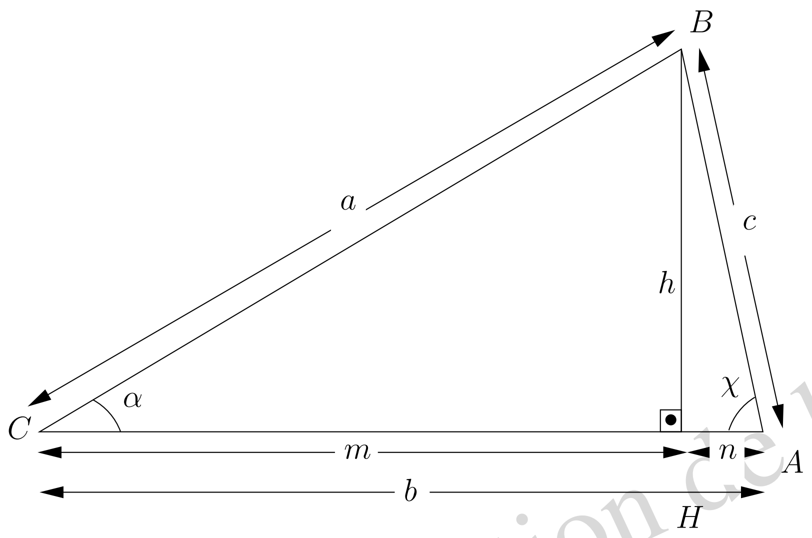


FIG. 8.17 – Construction pour la démonstration du théorème du cosinus

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 8.1.1. Une démonstration possible a le processus suivant en utilisant le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + m^2 \\ -c^2 &= h^2 + n^2 \\ \hline a^2 - c^2 &= m^2 - n^2 \\ a^2 - c^2 &= (m+n)(m-n) \\ a^2 - c^2 &= b(b-2n) = b^2 - 2nb \end{aligned} \tag{8.1.65}$$

Mais dans le triangle ABH, rectangle en H, nous avons la relation $n/c = \cos(\chi)$ d'où :

$$a^2 - c^2 = b(b-2n) = b^2 - 2nb = b^2 - 2bc\cos(\chi) \tag{8.1.66}$$

Nous obtenons donc une des relations du "théorème du cosinus" :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\chi)} \tag{8.1.67}$$

Par permutation circulaire, nous obtenons les deux autres relations connues.

■ Q.E.D.

Remarque

Le théorème du cosinus est parfois appelé "formule d'Al-Kashi"; par ailleurs si a est l'hypoténuse et son angle opposé un angle droit tel que $\cos(\chi)$ est nul, nous retombons sur le théorème de Pythagore. Voici pourquoi nous appelons parfois la formule d'Al-Kashi "formule de Pythagore généralisée".

Un cas intéressant d'application du théorème du cosinus est de déterminer la distance l entre un point b situé sur la circonférence du cercle et un point a situé à l'intérieur du cercle en fonction de la direction (angle) dans laquelle le regard se porte :

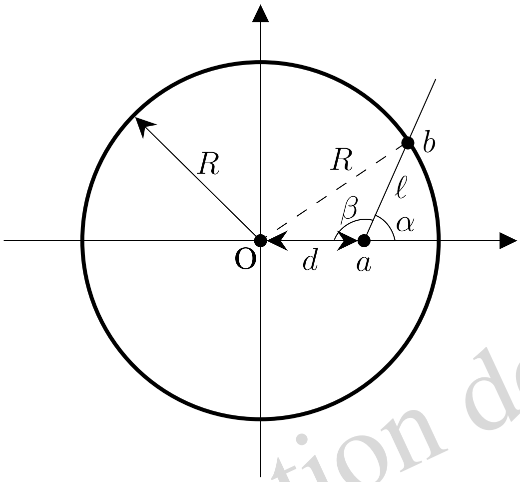


FIG. 8.18 – Distance d'un point à l'intérieur d'un cercle à sa circonférence

En cours de traduction de l' anglais

Nous pouvons donc appliquer le théorème du cosinus qui nous donne alors (connaissant d, R et β) :

$$R^2 = d^2 + l^2 - 2dl\cos(\beta) \quad (8.1.68)$$

Dès lors :

$$l^2 - (2d\cos(\beta))l - (R^2 - d^2) = 0 \quad (8.1.69)$$

Il s'agit donc d'une équation du deuxième degré dont le discriminant est (voir section Algèbre page 1364) :

$$\Delta^2 = (2d\cos(\beta))^2 + 4(R^2 - d^2) \quad (8.1.70)$$

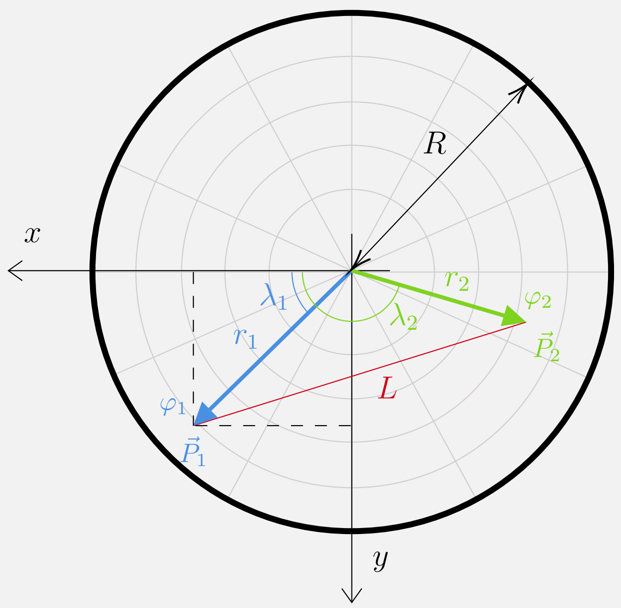
et dont les deux solutions sont (voir section Algèbre page 1364) :

$$l_{1,2} = \frac{2d\cos(\beta) \pm \sqrt{(2d\cos(\beta))^2 + 4(R^2 - d^2)}}{2} = d\cos(\beta) \pm \sqrt{(d\cos(\beta))^2 + (R^2 - d^2)} \quad (8.1.71)$$

Nous verrons également un cas d'application important dans le chapitre Formes Géométriques pour calculer la surface d'un triangle quelconque (formule de Héron) voir page 2867.

Remarque

Une autre application amusante de la loi des cosinus est la blague de la Terre plate. En effet, dans cette blague, la Terre est représentée par un disque de rayon R qui vu du dessus ressemblerait à :



où $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont deux localisations de cette Terre plate. Alors, à partir de la loi des cosinus, nous obtenons :

$$L = R \cdot \sqrt{r_1^2 + {r_2}^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\Delta\lambda)} \qquad (8.1.72)$$

avec :

$$r_1 = \left(1 - \frac{\varphi_1}{90^\circ}\right) \quad r_2 = \left(1 - \frac{\varphi_2}{90^\circ}\right) \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \qquad (8.1.73)$$

8.1.2.1.2 Loi des Sinus

Soit le triangle quelconque dont nous traçons deux hauteurs :

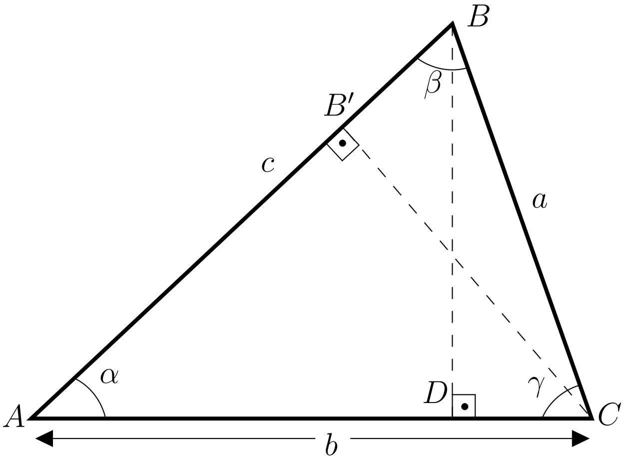


FIG. 8.19 – Construction pour la preuve de la loi des sinus

Dans le triangle ci-dessus nous avons les relations :

$$\sin(\alpha)=\frac{\overline{DB}}{c} \qquad \sin(\gamma)=\frac{\overline{DB}}{a} \tag{8.1.74}$$

ce qui nous conduit à l'expression :

$$\overline{DB}=c\sin(\alpha)=a\sin(\gamma) \tag{8.1.75}$$

d'où :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{c}{\sin(\gamma)} \tag{8.1.76}$$

Par un raisonnement similaire nous avons :

$$\sin(\alpha)=\frac{\overline{CB'}}{b} \qquad \sin(\beta)=\frac{\overline{c}}{a} \tag{8.1.77}$$

Ce qui donne :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)} \tag{8.1.78}$$

Le tout combiné nous fournit le "théorème des sinus" dont le plus bel exemple d'application sur ce site est certainement la détermination des points de Lagrange L4 et L5 dans la section d'Astronomie :

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}} \tag{8.1.79}$$

Évidemment, il n'y a pas ici toutes les relations trigonométriques (du cercle) existantes comme nous l'avons déjà dit, mais au moins les plus importantes qu'il faut savoir retrouver lors de l'étude de systèmes physiques.

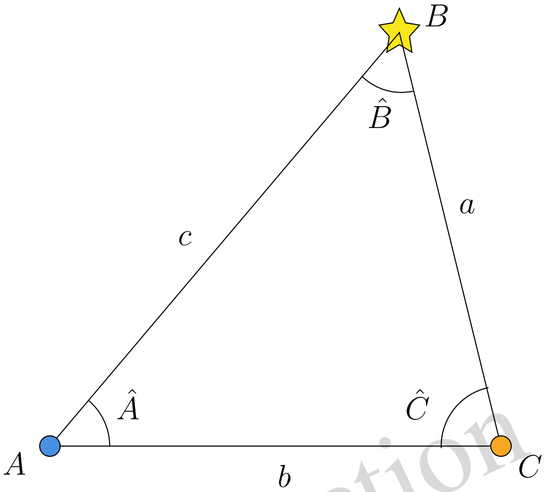
La loi des sinus est connue pour son application à la "triangulation" ! En trigonométrie et en géométrie, la triangulation est le processus de détermination de l'emplacement d'un point en formant des triangles jusqu'au point à partir de points connus. Les propriétés utilisées pour la triangulation sont :

En cours de traduction de l'anglais

- La somme des angles d'un triangle, égale à π radians (180°)
- La loi des sinus

Si nous notons a le côté opposé à l'angle $\hat{A}$ et c le côté opposé à l'angle $\hat{C}$, nous exprimons la loi des sinus comme suit :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})} \tag{8.1.80}$$



Dès lors :

$$\begin{aligned} AB=c=\frac{b\sin(\hat{C})}{\sin(\hat{B})} \\ CB=a=\frac{b\sin(\hat{A})}{\sin(\hat{B})} \end{aligned} \tag{8.1.81}$$

Nous avons évidemment :

$$\hat{C}=180°-\hat{A}-\hat{B} \tag{8.1.82}$$

✍**Exemple :**

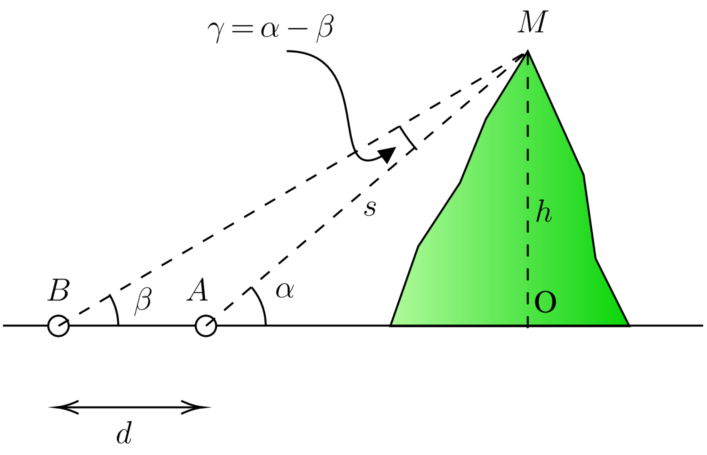
Abū Rayḥān Al-Bīrūnī, un scientifique musulman pionnier, a mis au point une méthode vraiment remarquable et ingénieuse pour calculer le rayon de la Terre (et par la suite sa circonférence) au 111 siècle (calendrier holocène), différente de celle d'Ératosthène (qui avait utilisé une autre méthode 13 siècles auparavant). Cette méthode était très simple et relativement précise, ne nécessitant que quatre mesures au total, puis l'application d'une relation trigonométrique pour arriver à la solution.

Pour mettre en oeuvre sa méthode, Biruni n'avait besoin que d'un astrolabe, d'une montagne appropriée avec un horizon plat devant elle afin que l'angle de dépression de

En cours de traduction de l'anglais

l'horizon puisse être mesuré avec précision et de connaissances de base en trigonométrie.

Considérons la figure ci-dessous illustrant le scénario :



Considérant le triangle rectangle OMA, la hauteur de la montagne h et la hauteur de la pente (inconnue) s sont évidemment liées par :

$$h = s \cdot \sin(\alpha) \tag{8.1.83}$$

En considérant les angles du triangle AMB, nous voyons facilement que $\gamma = \alpha - \beta$. Ensuite, en appliquant la loi des sinus à AMB, nous obtenons :

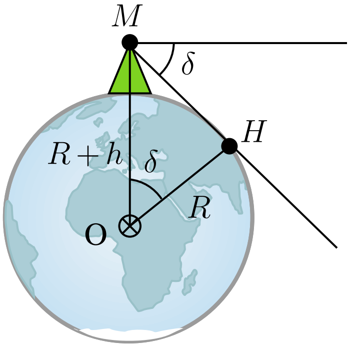
$$\frac{s}{\sin(\beta)} = \frac{d}{\sin(\alpha - \beta)} \tag{8.1.84}$$

En combinant les deux relations ci-dessus et en utilisant les identités trigonométriques prouvées plus tôt, nous obtenons facilement en utilisant la relation de Simpson prouvée plus tôt ci-dessus :

$$h = \left(\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}\right) d = \frac{\tan(\alpha)\cos(\alpha)\tan(\beta)\cos(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)} d = \left(\frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}\right) d \tag{8.1.85}$$

C'est la relation qu'Al Biruni a utilisée pour calculer la hauteur de la montagne. Les valeurs d'entrée $\{\alpha, \beta, d\}$ peuvent toutes être obtenues avec une bonne précision, de sorte que, à condition que les tangentes des angles puissent être évaluées avec précision, une excellente estimation de la hauteur h peut être effectuée. En fait, la relation a été utilisée en topographie jusqu'à nos jours !

Nous allons maintenant décrire comment al-Biruni a utilisé la hauteur de la montagne pour estimer la taille de la Terre. La seule mesure supplémentaire dont il avait besoin était l'angle d'inclinaison δ de l'horizon vu depuis le sommet de la montagne (M dans la figure ci-dessous) :



Il est clair que l'angle MOH est égal à δ. Il ressort également de la figure que $\cos(\delta) = R/(R+h)$. Cela implique :

$$R = \frac{\cos(\delta)}{1-\cos(\delta)} h \tag{8.1.86}$$

ce qui nous donne une formule pour le rayon terrestre R. A condition de pouvoir évaluer le cosinus d'un petit angle δ, al-Biruni pourrait utiliser cette formule pour obtenir R à partir de h et δ.

En cours de traduction de l'anglais

8.1.3 Trigonométrie Hyperbolique

Nous avons démontré dans la section d'Analyse Fonctionnelle que toute fonction $f(x)$ peut se décomposer en une fonction paire et impaire telle que :

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2} \tag{8.1.87}$$

Ainsi, pour la fonction $f(x)=e^x$, nous obtenons :

$$e^x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2} \tag{8.1.88}$$

Rappelons que lors de notre étude des nombres complexes (voir section Nombres page 250) nous avons démontré les formules d'Euler suivantes (qui généralisaient les fonctions trigonométriques à des fonctions allant de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) :

$$\cos(\phi)=\frac{e^{\mathrm{i}\phi}+e^{-\mathrm{i}\phi}}{2} \qquad \sin(x)=\frac{e^{\mathrm{i}\phi}-e^{-\mathrm{i}\phi}}{2\mathrm{i}} \tag{8.1.89}$$

et nous avons parlé du fait que même si ϕ devrait être la plupart du temps dans $\mathbb{R}$, il peut aussi être dans $\mathbb{C}$ et donc nous généralisons la définition du sinus et cosinus par analogie avec le sinus et le cosinus hyperboliques (nous donnerons l'origine de ce terme plus loin) par :

$$\boxed{\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}} \tag{8.1.90}$$

où $z\in\mathbb{C}$. Dès lors, nous pouvons alors bien évidemment définir :

$$\tanh(z)=\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \tag{8.1.91}$$

Et ainsi de suite... comme pour la trigonométrie circulaire.

Le lecteur notera au passage que :

$$\cos(z)=\cosh(\mathrm{i}z) \quad \cosh(z)=\cos(\mathrm{i}z) \tag{8.1.92}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$e^z=\cosh(z)+\sinh(z) \tag{8.1.93}$$

relation que nous pouvons encore mettre en analogie avec :

$$e^{\mathrm{i}x}=\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x) \tag{8.1.94}$$

Chose intéressante, nous pouvons travailler en trigonométrie avec des angles complexes ! ! Effectivement, si nous posons $a+ib$, nous avons alors :

$$e^{a+\mathrm{i}b}=\cosh(a+\mathrm{i}b)+\sinh(a+\mathrm{i}b) \tag{8.1.95}$$

Mais comme nous le savons (voir section Nombres page 1336) :

$$e^{a+\mathrm{i}b}=e^a e^{\mathrm{i}b}=re^{\mathrm{i}b}=r(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)) \tag{8.1.96}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors, nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$e^a\cos(b)+e^a\mathrm{i}\sin(b)=\cosh(a+\mathrm{i}b)+\sinh(a+\mathrm{i}b) \tag{8.1.97}$$

Donc la fonction hyperbolique d'un angle complexe existe et l'image en est un nombre complexe aussi. Nous pouvons ainsi voir abusivement la géométrie hyperbolique comme une sorte de généralisation de la trigonométrie du cercle aux angles réels et complexes.

Par opposition à la trigonométrie du cercle pour lequel nous avons démontré que :

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \tag{8.1.98}$$

En trigométrie hyperbolique, nous avons :

$$\sinh^2(z)-\cosh^2(z)=1 \tag{8.1.99}$$

La démonstration est simple :

$$\begin{aligned}\cosh^2(z)&=\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{e^{2z}-2e^ze^{-z}+e^{-2z}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{4}\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{4}=1+\frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4}=1+\frac{e^{2z}-2e^ze^{-z}+e^{-2z}}{4}\\&=1+\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2=1+\sinh^2(z)\end{aligned} \tag{8.1.100}$$

En réarrangent, nous avons :

$$\sinh^2(z)-\cosh^2(z)=1 \tag{8.1.101}$$

Avant de démontrer pourquoi cela est appelé "trigonométrique hyperbolique", voyons quelques identités importantes que nous utiliserons dans diverses sections de ce livre.

Nous rechercherons d'abord une forme fermée des fonctions sinus et cosinus hyperboliques réciproques. A cet effet, rappelez-vous que :

$$y:=\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \tag{8.1.102}$$

et que la recherche de la fonction réciproque consiste toujours à isoler la variable (cans le cas présent : z).

Dès lors :

$$2y-e^{-z}-e^z=2\cosh(z)-e^{-z}-e^z=0 \tag{8.1.103}$$

c'est-à-dire (en multipliant par $-e^z$) :

$$(e^z)^2-2ye^z+1=0 \tag{8.1.104}$$

en résolvant ce polynôme du deuxième degré en e^z puis en prenant le logarithme nous obtenons :

$$e^z_{1,2}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1} \tag{8.1.105}$$

En cours de traduction de l'anglais

Or comme $e^z > 0$ nous devons rejeter la solution avec le signe "-" (oui ! sinon avec $z \in \mathbb{R}$ nous pourrions avoir un e^z négatif). Il vient alors :

$$e^z = y + \sqrt{y^2 - 1} \tag{8.1.106}$$

d'où :

$$z = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \tag{8.1.107}$$

En procédant de même pour :

$$y := \sinh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{8.1.108}$$

Donc :

$$2y + e^{-z} - e^z = 2\sinh(z) + e^{-z} - e^z = 0 \tag{8.1.109}$$

c'est-à-dire (en multipliant par $-e^z$) :

$$(e^z)^2 - 2ye^z - 1 = 0 \tag{8.1.110}$$

en résolvant ce polynôme du deuxième degré en e^z nous obtenons :

$$e^z_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \tag{8.1.111}$$

Or comme $e^z > 0$ nous devons rejeter la solution avec le signe "-" (oui ! sinon avec un $z \in \mathbb{R}$ nous aurrions un e^z négatif). Il vient alors :

$$e^z = y + \sqrt{y^2 + 1} \tag{8.1.112}$$

Dès lors :

$$z = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \tag{8.1.113}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} z &= \text{arccosh}(y) &= \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \\ z &= \text{arcsinh}(y) &= \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \end{aligned} \tag{8.1.114}$$

Attention car suivant les auteurs arccosh et arcsinh se notent argcosh, argsinh ou encore $\cosh^{-1}, \sinh^{-1}$ (ces deux dernières écritures pouvant prêter à confusion avec l'inverse de la fonction hyperbolique correspondante !).

Pour étudier une représentation géométrique simple posons maintenant :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= X & \sin(\alpha) &= Y \\ \cosh(z) &= X' & \sinh(z) &= Y' \end{aligned} \tag{8.1.115}$$

En cours de traduction de l' anglais

avec une restriction à $\alpha, z \in \mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned} X &= [-1,1] \qquad Y = [-1,1] \\ X' &= [1,+\infty] \qquad Y' =]-\infty,+\infty[\end{aligned} \tag{8.1.116}$$

Cela peut être représenté comme suit :

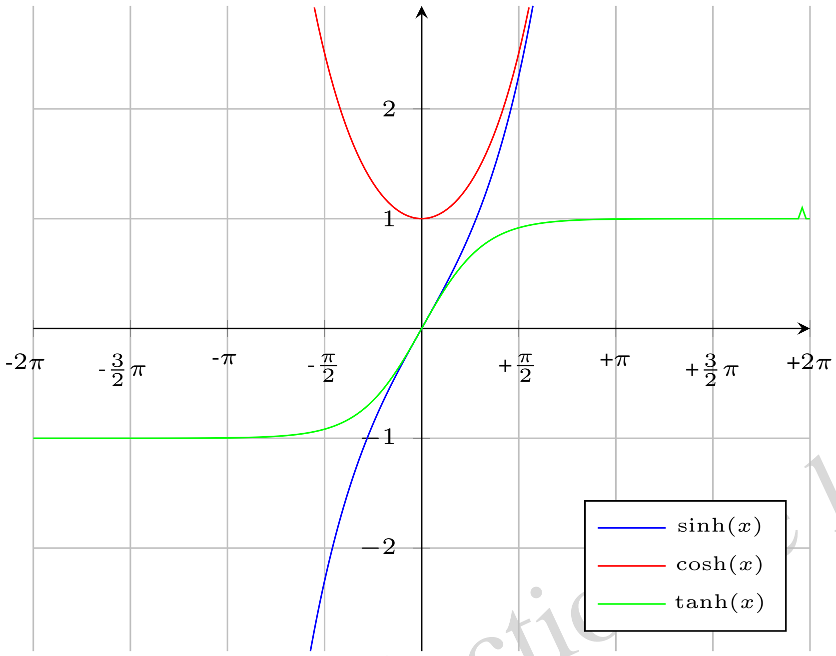


FIG. 8.20 – Domaine des fonctions hyperboliques

En cours de traduction de l'anglais

Avec cette nouvelle notation, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) &= X^2+Y^2 = 1 \\ \cosh^2(z)+\sinh^2(z) &= X'^2-Y'^2 = 1 \end{aligned} \tag{8.1.117}$$

Or, comme nous le verrons lors de notre étude des coniques dans la section de Géométrie Analytique :

1. La première de ces deux relations, constitue pour l'ensemble de définition donné, un cercle de rayon unité centré à l'origine. Le lecteur remarquera qu'il est assez curieux pour la trigonométrie du cercle d'obtenir un cercle... ☺

2. La deuxième de ces deux relations, constitue pour l'ensemble de définition donné, une hyperbole équilatérale orientée selon l'axe X dont le sommet est $S(1,0)$ et de foyer $F(\sqrt{2},0)$. Le lecteur remarquera à nouveau qu'il est assez curieux pour la trigonométrie hyperbolique d'obtenir une hyperbole... ☺

Pour le deuxième cas, cela nous amène à avoir la possibilité de représenter les deux principales fonctions trigonométriques hyperboliques comme suit :

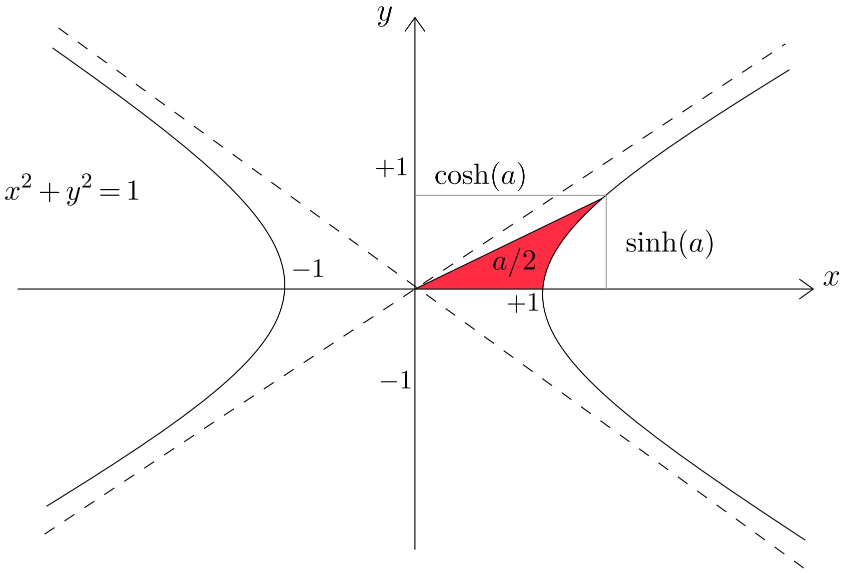


FIG. 8.21 – Équivalence des fonctions hyperboliques et de l'hyperbole (source : Wikipedia)

Cette figure est très intéressante car comme nous allons le démontrer maintenant, à partir du calcul de la zone rouge $a/2$, où a est assimilé à un "angle hyperbolique", nous pouvons également définir les fonctions trigonométriques hyperboliques !

Notons x et y l'abscisse et l'ordonnée du triangle rouge (en imaginant que ce soit un triangle complet). Nous avons donc (voir section Formes Géométriques page 2865) pour son aire (base multipliée par hauteur divisé par 2) :

$$A_{\text{tr}}=\frac{xy}{2} \tag{8.1.118}$$

Mais nous voyons qu'il faut soustraire une partie d'une aire sous l'hyperbole d'équation $X^2-Y^2=1$. Soit d'équation :

$$Y=\sqrt{X^2-1}:=\sqrt{t^2-1} \tag{8.1.119}$$

Et l'aire à soustraire est donc donnée par :

$$A_{\text{hyp}}=\int\limits_1^x \sqrt{t^2-1}\mathrm{d}t \tag{8.1.120}$$

L'aire de la zone rouge est donc donnée par :

$$A=A_{\text{tr}}-A_{\text{hyp}}=\frac{xy}{2}-\int\limits_1^x \sqrt{t^2-1}\mathrm{d}t \tag{8.1.121}$$

En utilisant la primitive prouvée dans la section Calcul Différentiel et Intégral (voir page 1513), nous obtenons :

$$A=\frac{xy}{2}-\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\right)\Bigg|_1^x \tag{8.1.122}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$A = \frac{xy}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad (8.1.123)$$

Mais nous pouvons récrire cela :

$$A = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) := \frac{a}{2} \qquad (8.1.124)$$

Ainsi :

$$a = x\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{x^2-1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad (8.1.125)$$

Finalement :

$$a = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = 2A \qquad (8.1.126)$$

Nous reconnaîssons ici la première relation des deux que nous avons prouvées un peu plus tôt si nous posons $z = a, y = x$:

$$\begin{aligned} z = \text{arccosh}(y) \quad &= \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) \\ z = \text{arcsinh}(y) \quad &= \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \end{aligned} \qquad (8.1.127)$$

L'interprétation est donc très intéressante : l'angle hyperbolique peut être vu comme le double de la surface du triangle rouge (ou si vous préférez : la moitié de l'angle hyperbolique est égale à la surface rouge) !

Ces deux relations :

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = X^2 + Y^2 = 1 \\ \cosh^2(z) + \sinh^2(z) = X'^2 - Y'^2 = 1 \end{aligned} \qquad (8.1.128)$$

devraient aider le lecteur nous espérons à comprendre l'origine du nom de la trigonométrie hyperbolique et de noter que l'étude de la trigonométrie hyperbolique, est analogue à l'étude de la trigonométrie circulaire sur le... cercle.

Si nous représentons le cercle trigonométrique et l'hyperbole trigonométrique et que nous ajoutons quelques informations supplémentaires, voici ce que nous obtenons :

En cours de traduction de l' anglais

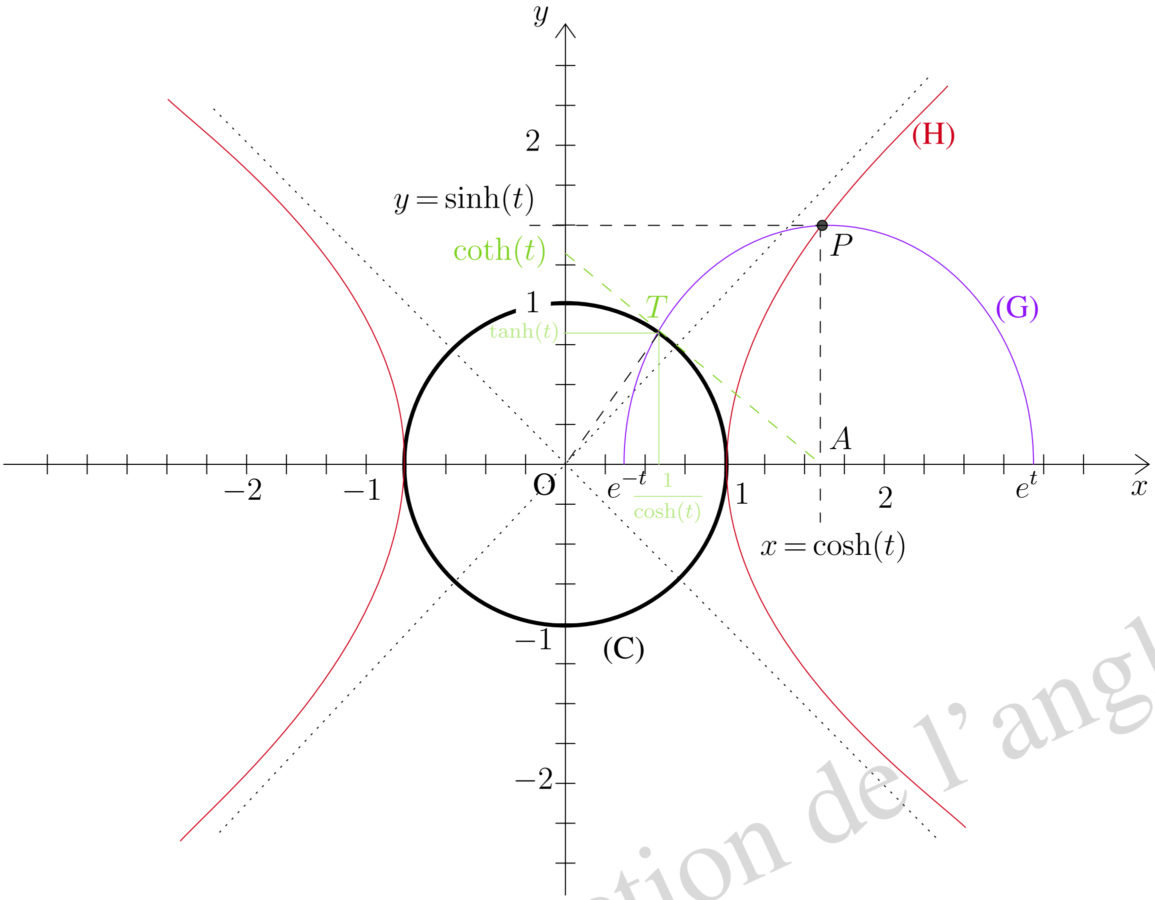


FIG. 8.22 – Définition visuelle des fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

En cours de traduction de l'anglais

Explications :

Pour tracer à la règle et au compas le point $P(x,y)$ de l'hyperbole, nous nous donnons x, donc le point $A(x,0)$. Nous traçons la tangente au cercle (C) qui passe par $A(x,0)$ ce qui nous donne le point de tangence T. Nous traçons le cercle (G) de centre $A(x,0)$ et passant par T. Ce cercle coupe l'hyperbole au point $P(x,y)$ à la perpendiculaire en $A(x,0)$ à Ox.

Nous voyons apparaître sur la figure plusieurs valeurs des fonctions hyperboliques correspondant à $x = \cosh(t), y = \sinh(t)$ mais aussi $\tanh(t), \coth(t)$ etc. Entre autres, le cercle (G) coupe l'axe Ox en deux points dont les abscisses sont e^t et e^{-t}.

Si le lecteur veut s'en assurer au moyen de la figure, il pourra contrôler qu'en tout point de l'hyperbole, les relations (entre autres) :

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{t} \qquad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t} \qquad \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \tag{8.1.129}$$

sont toujours vérifiées.

Nous obtenons (ça c'est juste pour avoir vu une fois à quoi ressemblent ces fonctions) avec Maple 4.00b :

```
>plot([sinh(x),cosh(x),tanh(x)],x=-2*Pi..2*Pi,color=[red,black,blue]);
```

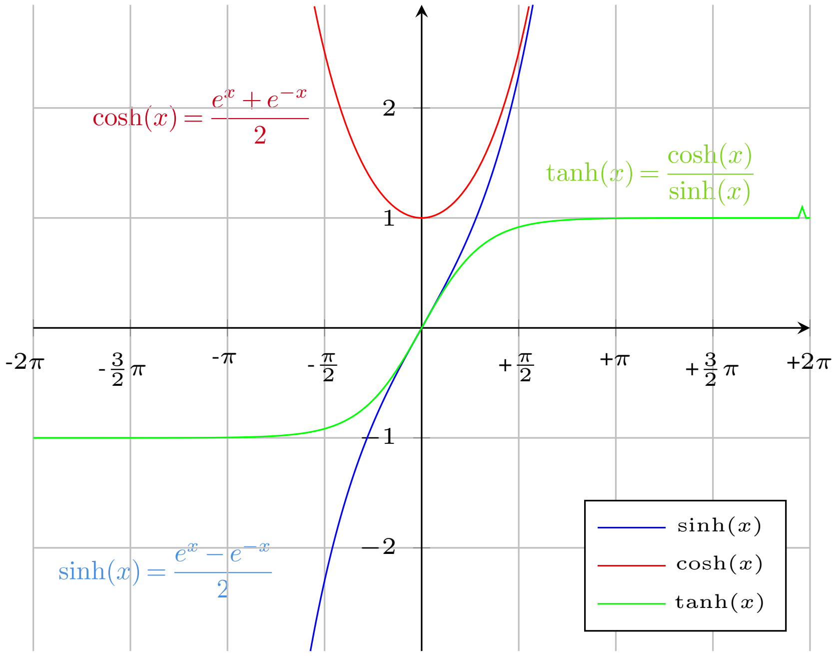


FIG. 8.23 – Tracé des fonctions trigonométriques hyperboliques usuelles

Nous retrouverons la fonction $\cosh(x)$ dans la section de Génie Civil par exemple dans le cadre des câbles suspendus. Nous retrouverons aussi les fonctions $\sinh(x)$ et $\tanh(x)$ dans le cadre de l'étude des vagues de gravité dans la section de Génie Marin Et Météo.

En cours de traduction de l'anglais

8.1.3.1 Identités hyperboliques remarquables

Le but est maintenant, comme pour la trigonométrie circulaire, de prouver certaines identités remarquables, mais pour la trigonométrie hyperbolique.

Nous partons de la définition :

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{8.1.130}$$

et :

$$\tanh(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \quad \coth(z) = \frac{1}{\tanh(z)} = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} \tag{8.1.131}$$

À partir de ces définitions et à l'aide des opérations élémentaires d'algèbre nous pouvons déterminer les relations remarquables suivantes (c'est beaucoup plus facile que la détermination de relations remarquables de la trigonométrie du cercle, donc sauf demande nous donnons ces relations sans démonstration).

Commençons par la plus simple :

$$\begin{aligned} &\cosh(z) + \sinh(z) = e^z && \cosh(z) - \sinh(z) = e^{-z} \\ &\cosh(-z) = \cosh(z) && \sinh(-z) = -\sinh(z) \\ &\tanh(-z) = -\tanh(z) && \coth(-z) = -\coth(z) \end{aligned} \tag{8.1.132}$$

Nous avons aussi :

$$\cosh^2(z)=\frac{1}{1-\tanh^2(z)}=\frac{\cosh(2z)+1}{2}\qquad \sinh^2(z)=\frac{\tanh^2(z)}{1-\tanh^2(z)}=\frac{\cosh(2z)-1}{2}\tag{8.1.133}$$

Et nous avons les relations complémentaires :

$$\begin{aligned}\cosh(a+b)&=\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b)\\ \cosh(a-b)&=\cosh(a)\cosh(b)-\sinh(a)\sinh(b)\\ \sinh(a+b)&=\sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)\sinh(b)\\ \sinh(a-b)&=\sinh(a)\cosh(b)-\cosh(a)\sinh(b)\end{aligned}\tag{8.1.134}$$

Suite à la demande d'un lecteur, démontrons la première et la troisième relations ci-dessus.

Pour la première :

$$\begin{aligned}&\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b)=\frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2}+\frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2}\\ &=\frac{1}{4}\left[\left(e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}\right)+\left(e^{a+b}-e^{a-b}-e^{-a+b}+e^{-a-b}\right)\right]\\ &=\frac{1}{4}\left[\left(2e^{a+b}+2e^{-a-b}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(e^{a+b}+e^{-(a+b)}\right)\right]=\cosh(a+b)\end{aligned}\tag{8.1.135}$$

et pour la troisième :

$$\begin{aligned}&\sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)\sinh(b)=\frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2}+\frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2}\\ &=\frac{1}{4}\left[\left(e^{a+b}+e^{a-b}-e^{-a+b}-e^{-a-b}\right)+\left(e^{a+b}-e^{a-b}+e^{-a+b}-e^{-a-b}\right)\right]\\ &=\frac{1}{4}\left[\left(2e^{a+b}-2e^{-a-b}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(e^{a+b}-e^{-(a+b)}\right)\right]=\sinh(a+b)\end{aligned}\tag{8.1.136}$$

Mentionnons également d'autres identités remarquables (encore une fois n'hésitez pas à nous demander les détails si vous avez besoin d'aide) :

$$\begin{aligned}\cosh(a)+\cosh(b)&=2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \cosh(a)-\cosh(b)&=2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sinh(a)+\sinh(b)&=2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sinh(a)-\sinh(b)&=2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}\tag{8.1.137}$$

et enfin (on s'arrête ici car on n'a besoin de rien d'autre pour étudier les autres chapitres et sections de ce livre) :

$$\begin{aligned}\tanh(a+b)&=\frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}\\ \tanh(a-b)&=\frac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}\\ \tanh(a)+\tanh(b)&=\frac{\sinh(a+b)}{\cosh(a)\cosh(b)}\\ \tanh(a)-\tanh(b)&=\frac{\sinh(a-b)}{\cosh(a)\cosh(b)}\end{aligned}\tag{8.1.138}$$

En cours de traduction de l'anglais

8.1.4 Trigonométrie Sphérique

L'objectif de la trigonométrie sphérique est de déterminer les relations remarquables existantes entre les angles et les côtés de formes projetées (dites également "formes géodésiques" car suivant la courbure de l'espace) sur la surface d'une sphère. Pour déterminer ces relations, nous allons nous intéresser au cas particulier d'une sphère de rayon unité et des relations entre les côtés d'un triangle sphérique (élément de surface plane élémentaire) et les différents angles existants (beaucoup utilisé en triangulation sphérique). Nous verrons que les résultats sont au fait indépendants du rayon de la sphère et de la forme considérée initialement.

Soit la figure sur laquelle se trouve un triangle géodésique de sommets A, B, C d'angles d'ouverture respectifs $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ et de côtés opposés a, b, c et trois vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tels que $\vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$ et que l'extrémité de $\vec{k}$ soit confondue avec le sommet A :

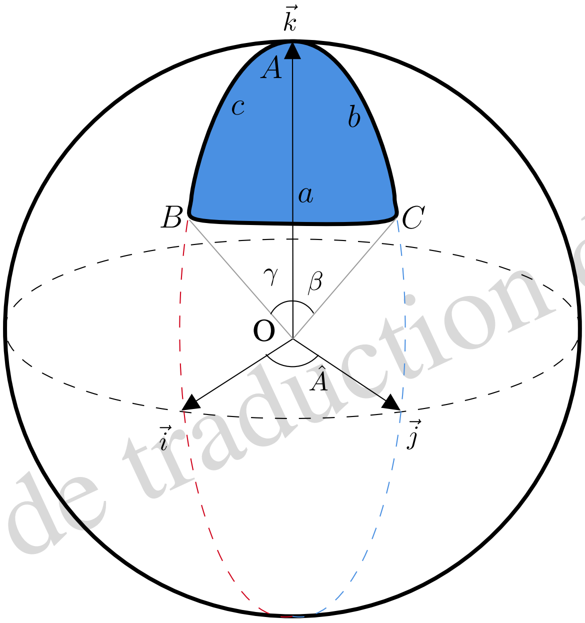


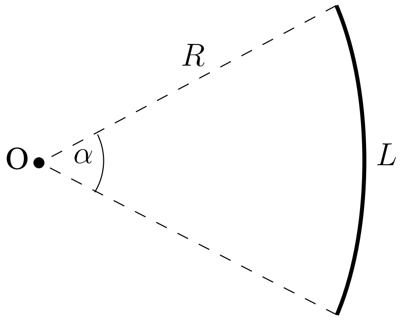
FIG. 8.24 – Construction pour introduire la trigonométrique sphérique

En cours de traduction de l' anglais

L'angle entre les points B et C, noté α, n'a pas pu être représenté sur le schéma ci-dessus faute de place.

Rappelons que le périmètre d'un cercle de rayon unité sur la sphère de rayon unité vaut bien évidemment $P = 2\pi R$ (voir section Géométrie Euclidienne page 2600). Le périmètre du cercle en fonction de l'angle d'ouverture de ce dernier étant donné par (relation très très souvent utilisée en physique ! ! !) :

$$L = 2\pi R \frac{\alpha}{2\pi} = R\alpha \qquad (8.1.139)$$



Si le cercle est de rayon $R=1$ (comme c'est le cas pour notre sphère), le calcul de la longueur de l'arc se simplifie et devient :

$$L=\alpha \tag{8.1.140}$$

Nous garderons cette contrainte du rayon unité pour la suite afin de simplifier les expressions que nous allons obtenir par la suite.

Conséquence relativement aux points sur notre sphère ; les côtés du triangle sont donnés par :

$$a=\alpha, b=\beta, c=\gamma \tag{8.1.141}$$

Considérons maintenant le produit scalaire (voir section Calcul Vectoriel page 1798) :

$$\overrightarrow{OB}\circ\overrightarrow{OC}=\|\overrightarrow{OB}\|\|\overrightarrow{OC}\|\cos(\alpha) \tag{8.1.142}$$

et comme $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ (rayon unité) nous avons :

$$\|\overrightarrow{OB}\|\|\overrightarrow{OC}\|\cos(\alpha)=\cos(\alpha)=\cos(a)=\overrightarrow{OB}\circ\overrightarrow{OC} \tag{8.1.143}$$

Si nous décomposons les deux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sur les vecteurs tangents unités nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}&=\cos(\gamma)\vec{k}+\sin(\gamma)\vec{i}\\ \overrightarrow{OC}&=\cos(\beta)\vec{k}+\sin(\beta)\vec{j}\end{aligned} \tag{8.1.144}$$

Cela nous donne :

$$\cos(a)=\overrightarrow{OB}\circ\overrightarrow{OC}=\left[\cos(\gamma)\vec{k}+\sin(\gamma)\vec{i}\right]\circ\left[\cos(\beta)\vec{k}+\sin(\beta)\vec{j}\right] \tag{8.1.145}$$

ce qui donne (distributivité du produit scalaire) :

$$\cos(a)=\cos(\gamma)\cos(\beta)\vec{k}\circ\vec{k}+\cos(\gamma)\sin(\beta)\vec{k}\circ\vec{j}+\sin(\gamma)\cos(\beta)\vec{i}\circ\vec{k}+\sin(\gamma)\sin(\beta)\vec{i}\circ\vec{j} \tag{8.1.146}$$

Comme $\vec{k}\circ\vec{k}=1$ et $\vec{k}\circ\vec{i}=\vec{k}\circ\vec{j}=0$, la relation précédente se réduit à :

$$\cos(a)=\cos(\gamma)\cos(\beta)+\sin(\gamma)\sin(\beta)\vec{i}\circ\vec{j} \tag{8.1.147}$$

Et comme :

$$\vec{i}\circ\vec{j}=\cos(\hat{A}) \tag{8.1.148}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous obtenons :

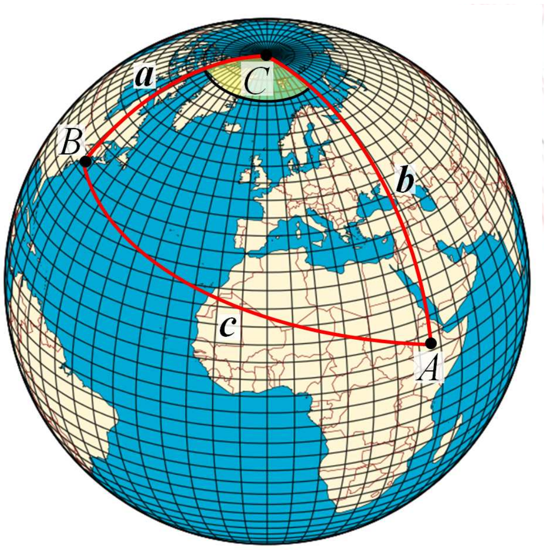
$$\cos(a)=\cos(\gamma)\cos(\beta)+\sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\hat{A}) \quad (8.1.149)$$

relation dite "relation fondamentale" ou "formule des cosinus" que nous pouvons donc (de par le rayon unité) tout aussi bien écrire :

$$\boxed{\cos(a)=\cos(c)\cos(b)+\sin(c)\sin(b)\cos(\hat{A})} \quad (8.1.150)$$

✍Exemple :

Sur le globe ci-dessous, Boston (B) et Addis-Abeba (A) sont représentés comme les sommets d'un triangle sphérique dont le sommet se trouve au pôle Nord (C). Boston se trouve à la latitude $42°19'$ Nord, ce qui signifie que l'arête a est sous-tendue par un angle central de $90°-42°19'\approx 47.68°$.



De même, Addis-Abeba, latitude $9°03'$ Nord, donne l'angle sous-tendant le bord b à environ $80.95°$. Et l'angle C est la somme des longitudes : $71°05'\,\text{O}+38°42'\,\text{E}\approx 109.78°$. Ainsi, la distance orthodromique c de B à A est donnée approximativement par :

$$\cos^{-1}\left(\cos\left(48°\right)\cos\left(81°\right)+\sin\left(48°\right)\sin\left(81°\right)\cos\left(110°\right)\right) \quad (8.1.151)$$

ce qui représente environ $98°=98\cdot 60$ milles nautiques (1 mille nautique $=1$ minute d'arc de grand cercle), soit environ $10'900$ [km].

Également souvent réorganisée comme suit (notamment dans les statistiques pour introduire le coefficient de corrélation partielle) :

$$\cos(\hat{A})=\frac{\cos(a)-\cos(c)\cos(b)}{\sin(c)\sin(b)} \quad (8.1.152)$$

Cette dernière relation est invariante par permutation circulaire des variables $a,b,c,\hat{A}$. Il est aussi intéressant de remarquer avant de continuer que si le triangle sphérique est à angle droit

en A, la relation précédente se simplifie en :

$$\cos(a) = \cos(c)\cos(b) \tag{8.1.153}$$

et si le triangle est suffisamment petit par rapport au rayon et que nous faisons un développement de Taylor (voir section Séquences et Séries page 1677) proche de 0 au deuxième ordre pour chacun des termes il vient :

$$\left(1-\frac{a^2}{2}\right) = \left(1-\frac{c^2}{2}\right)\left(1-\frac{b^2}{2}\right) \tag{8.1.154}$$

Dès lors :

$$\left(1-\frac{a^2}{2}\right) = 1-\frac{c^2}{2}-\frac{b^2}{2}+\underbrace{\frac{c^2b^2}{2}}_{\to 0} \tag{8.1.155}$$

Après simplification :

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{8.1.156}$$

nous retombons sur le théorème de Pythagore (voir section Euclidean Geometry page 2590). Dès lors :

$$\cos(a) = \cos(c)\cos(b) \tag{8.1.157}$$

est le pendant en géométrie sphérique (géométrie non-euclidienne) du théorème de Pythagore de la géométrie plane (géométrie euclidienne) !

Cette paranthèse fermée, revenons en à nos moutons ! Les sinus de tous les angles étant positifs (puisque tous compris dans l'intervalle $[0, \pi]$), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\hat{A})}{\sin(a)} &= \frac{\sqrt{1-\cos^2(\hat{A})}}{\sin(\hat{a})} = \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos(a)-\cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)}\right)^2}}{\sin(\hat{a})}\\ &= \frac{\sqrt{(1-\cos^2(b))(1-\cos^2(c))-\cos^2(a)-\cos^2(b)\cos^2(c)+2\cos(a)\cos(b)\cos(c)}}{\sin(a)\sin(b)\sin(c)}\\ &= \frac{1-\cos^2(a)-\cos^2(b)-\cos^2(c)+2\cos(a)\cos(b)\cos(c)}{\sin(a)\sin(b)\sin(c)}\end{aligned} \tag{8.1.158}$$

Cette dernière relation est bien évidemment également invariante par permutation circulaire des variables $a, b, c, \hat{A}$. Donc nous obtenons une relation remarquable du triangle sphérique, appelée "relation des sinus" ou "formule des sinus" :

$$\boxed{\frac{\sin(\hat{A})}{\sin(a)} = \frac{\sin(\hat{B})}{\sin(b)} = \frac{\sin(\hat{C})}{\sin(c)}} \tag{8.1.159}$$

Comme la trigonométrie sphérique est souvent utilisée pour des repérages terrestres, avec souvent 2 cercles très particuliers et orthogonaux : l'équateur terrestre et un méridien ou un parallèle quelconque, ce cas revêt un intérêt particulier. Dans le cas d'un triangle rectangle en A nous avons bien évidemment :

$$\frac{1}{\sin(a)} = \frac{\sin(\hat{B})}{\sin(b)} = \frac{\sin(\hat{C})}{\sin(c)} \tag{8.1.160}$$

En cours de traduction de l'anglais

Toutes les relations que nous avons déterminées jusqu'à maintenant nous permettent dans le cas où $\hat{A}=\pi/2$ et $R=1$ de tirer des relations très intéressantes pour la géophysique :

$$\begin{aligned}\sin(b)&=\sin(a)\sin(\hat{B})\\ \sin(c)&=\sin(a)\sin(\hat{C})\\ \cos(a)&=\cos(b)\cos(\hat{c})\\ \cos(\hat{C})&=\sin(\hat{B})\cos(c)\\ \cos(\hat{C})&=\sin(\hat{B})\cos(c)\\ \cos(\hat{B})&=\sin(c)\cos(b)\end{aligned} \tag{8.1.161}$$

Certes, nous n'avons pas présenté ici toutes les relations ou identités remarquables existant à propos de la trigonométrie sphérique, mais au moins les plus importantes qu'il convient de connaître pour la lecture des autres sections de ce livre.

Remarque

Nous définissons "l'excédent" ou "excès sphérique" par la quantité :

$$E=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi \tag{8.1.162}$$

En cours de traduction de l'anglais

8.1.4.1 Théorème de Girard

Pendant que nous y sommes, profitons-en pour calculer un problème classique qui est celui de la surface d'un triangle sur une sphère. Soit la figure :

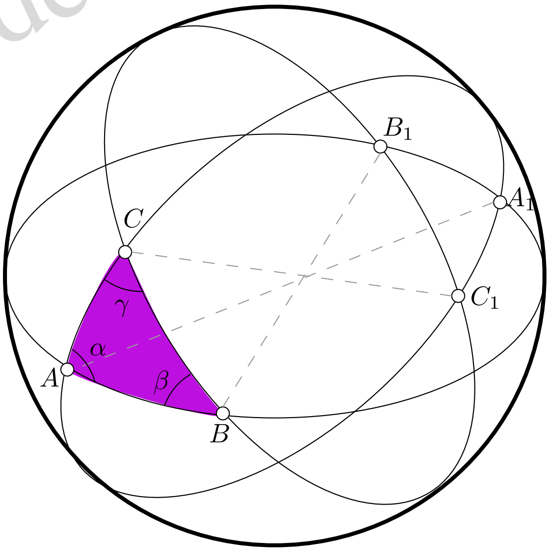


FIG. 8.25 – **Construction pour l'étude des angles d'un triangle sphérique**

Si nous prolongeons les arcs de géodésique $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ jusqu'à A_1, nous obtenons une tranche de sphère dont la surface est proportionnelle à l'angle α, en A. Si cet angle valait 2π, nous aurions toute la sphère et la surface vaudrait $4\pi R^2$ (voir section Formes Géométriques page

2934). Comme l'angle vaut α, la proportionnalité nous dit que S_1 vaut :

$$S_1 = \frac{\alpha}{2\pi} 4\pi R^2 = \alpha 2R^2 \tag{8.1.163}$$

De la même manière, si nous prolongeons les arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{BA}$ jusqu'à B_1 et si nous prolongeons les arcs $\overset{\frown}{CA}$ et $\overset{\frown}{CB}$ jusqu'à C_1, nous obtenons deux autres tranches dont les surfaces S_2 et S_3 valent :

$$S_2 = \beta 2R^2 \quad S_3 = \lambda 2R^2 \tag{8.1.164}$$

Supposons maintenant que nous additionnions ces trois surfaces :

$$S_1 + S_2 + S_3 = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma) \tag{8.1.165}$$

nous obtenons alors la moitié de la sphère $S_\odot$ (regarder la figure pour vous le représenter mentalement) plus de deux fois le triangle géodésique de surface S en rose sur la figure (car pris en compte deux fois en trop).

Il faut enlever deux fois la surface de ce triangle bleu pour obtenir la surface de la demi-sphère :

$$\frac{S_\odot}{2} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2S \tag{8.1.166}$$

Dès lors :

$$S_\odot = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 4S \tag{8.1.167}$$

comme $S_\odot = 4\pi R^2$, nous obtenons :

$$S = \frac{4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - S_\odot}{4} = \frac{4R^2(\alpha + \beta + \gamma) - 4\pi R^2}{4} \tag{8.1.168}$$

Après simplification nous en déduisons que la surface S du triangle ABC vaut :

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2\varepsilon \tag{8.1.169}$$

où ε est un angle solide (voir définition juste en bas). Cette dernière relation est parfois nommée "théorème de Girard". Plus communément noté :

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{R^2}} \tag{8.1.170}$$

et $K = 1/R^2$ est défini comme la "courbure" (elle indique à quel point la géométrie de la sphère s'écarte de la géométrie du plan euclidien où $K = 0$). Sur la base de sa définition, K semble dépendre du rayon de la sphère considérée comme une variété bidimensionnelle intégrée dans l'espace euclidien ambiant $\mathbb{R}^3$. La relation encadrée ci-dessus nous indique cependant que la courbure K peut être évaluée en effectuant simplement des mesures d'angles et d'aires sur la surface bidimensionnelle de la sphère. Il s'ensuit que K a une signification géométrique intrinsèque, indépendante de son intégration dans l'espace plat tridimensionnel, puisqu'elle peut être calculée en utilisant uniquement des mesures sur la surface sphérique.

Il est assez simple de généraliser cette notion à d'autres formes suivant la même philosophie (notamment celles composées de triangles...).

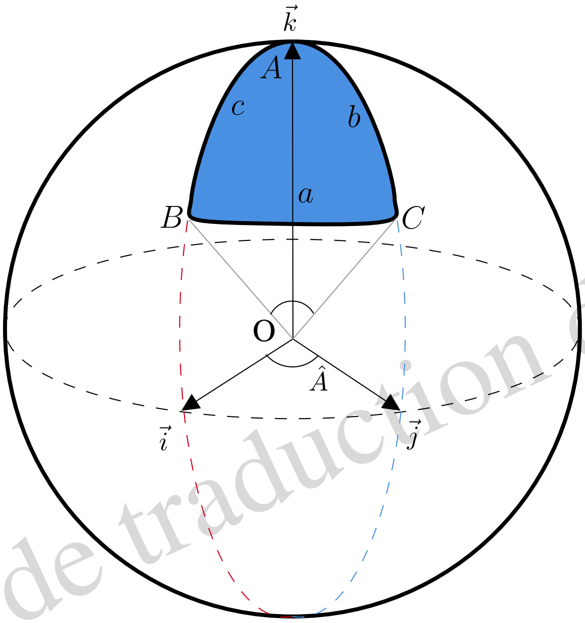
En cours de traduction de l'anglais

8.1.4.2 Formule des quatre parties

La "formule des quatre partiesformule des quatre parties" est un théorème mathématique de trigonométrie sphérique. Elle décrit la relation entre quatre parties consécutives d'un triangle sphérique.

Cette formule est particulièrement utile en astronomie, en géodésie et en navigation, où les triangles sphériques sont couramment utilisés. Dans ce livre, nous l'utiliserons pour démontrer la propriété d'un type particulier de cadran solaire !

Théorème 8.2. Soit $\triangle ABC$ un triangle sphérique sur la surface d'une sphère dont le centre est O :



En cours de traduction de l'anglais

Soient les côtés a, b, c du $\triangle ABC$ mesurés par les angles sous-tendus en O, où a, b, c sont opposés à A, B, C respectivement.

Nous avons :

$$\cos(a)\cos(\hat{C}) = \sin(a)\cot(b) - \sin(\hat{C})\cot(\hat{B}) \tag{8.1.171}$$

C'est-à-dire :

$$\cos(\text{ inner side }) \cdot \cos(\text{ inner angle }) = \sin(\text{ inner side }) \cdot \cot(\text{ other side }) - \sin(\text{ inner angle }) \cdot \cot(\text{ other angle }) \tag{8.1.172}$$

C'est ce que nous appellons la "formule des quatre parties", car elle définit la relation entre chacune des quatre parties consécutives du $\triangle ABC$.

Démonstration 8.2.1. Nous utilisons d'abord la formule du cosinus sphérique démontrée plus haut où nous avons pour rappel :

$$\begin{aligned}\cos(b) &= \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\hat{B})\\ \cos(c) &= \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)\cos(\hat{B})\end{aligned} \tag{8.1.173}$$

substituant $\cos(c)$, nous avons :

$$\cos(b)=\cos(a)[\cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a)\cos(\hat{C})]+\sin(a)\sin(c)\cos(\hat{B}) \tag{8.1.174}$$

Nous distribuons :

$$\cos(b)=\cos^2(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(\hat{C})+\sin(a)\sin(c)\cos(\hat{B}) \tag{8.1.175}$$

Nous réarrangeons :

$$\cos(b)\left(1-\cos^2(a)\right)=\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(\hat{C})+\sin(a)\sin(c)\cos(\hat{C}) \tag{8.1.176}$$

En utilisant une identité trigonométrique simple (somme des carrés du sinus et du cosinus) :

$$\cos(b)\sin^2(a)=\cos(a)\sin(b)\sin(a)\cos(\hat{C})+\sin(a)\sin(c)\cos(\hat{B}) \tag{8.1.177}$$

et en divisant les deux côtés par $\sin(a)\sin(b)$:

$$\cot(b)\sin(a)=\cos(a)\cos(\hat{C})+\frac{\sin(c)}{\sin(b)}\cos(\hat{B}) \tag{8.1.178}$$

En utilisant la loi sphérique démontrée plus haut et donnée pour rappel par :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{\sin(a)}=\frac{\sin(\hat{B})}{\sin(b)}=\frac{\sin(\hat{C})}{\sin(c)} \tag{8.1.179}$$

nous avons :

$$\cot(b)\sin(a)=\cos(a)\cos(\hat{C})+\frac{\sin(\hat{C})}{\sin(\hat{B})}\cos(\hat{B}) \tag{8.1.180}$$

En réorganisant et en simplifiant, nous obtenons finalement la "formule des quatre parties" :

$$\boxed{\cos(a)\cos(\hat{C})=\sin(a)\cot(b)-\sin(\hat{C})\cot(\hat{B})} \tag{8.1.181}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

8.1.5 Angle Solide

En géométrie spatiale, se pose le problème du concept d'angle d'ouverture d'une portion de l'espace (en extension à l'angle dit "angle plan" qui s'applique à $\mathbb{R}^2$). Nous définissons alors "l'angle solide" par la mesure de la portion d'espace limitée par une surface conique de sommet O et nous l'exprimons en "stéradian", obtenue par le rapport :

$$\Omega=\frac{S}{r^2} \tag{8.1.182}$$

S étant l'aire de la calotte découpée par le cône sur une sphère de rayon r.

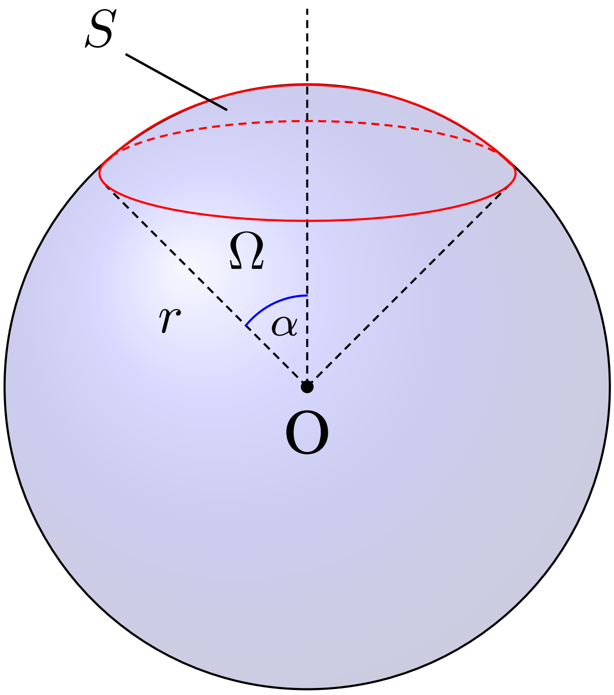


FIG. 8.26 – Configuration pour la définition de l'angle solide

En cours de traduction de l'anglais

Si α est le demi-angle du cône, nous obtenons pour ce rapport (pour le calcul de la calotte d'une surface sphérique voir la section traitant des Formes Géométriques à la page 2856) :

$$\Omega = 2\pi(1-\cos(\alpha)) = 4\pi\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{8.1.183}$$

D'où l'on conclut que l'angle solide total vaut par définition :

$$\Omega_{\text{tot}} = 4\pi \tag{8.1.184}$$

Nous pouvons également calculer "l'angle solide élémentaire" tel que représenté ci-dessous :

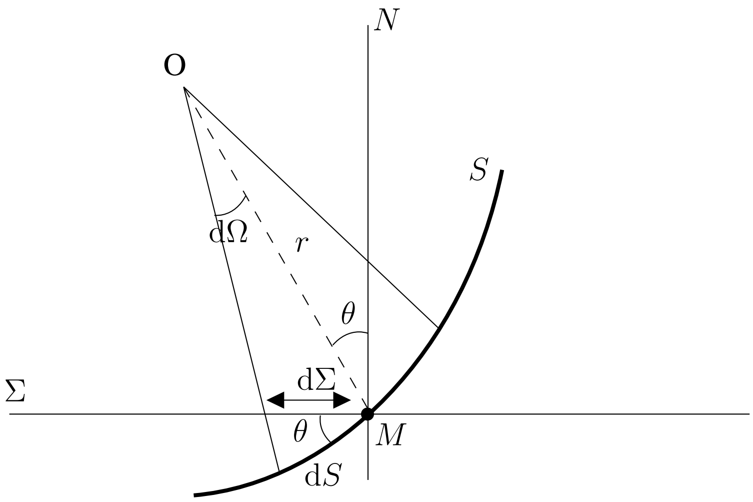


FIG. 8.27 – Configuration pour la définition de l'angle solide élémentaire

Soit un angle solide élémentaire $\mathrm{d}\Omega$ et $\overline{\text{O}M}$ l'axe du cône. Nous posons :

$$\overline{\text{O}M} = r \tag{8.1.185}$$

Nous considérons une surface Σ quelconque passant par le point M. $\mathrm{d}\Omega$ sur cette surface une portion $\mathrm{d}\Sigma$.

Si nous traçons la sphère $\mathcal{S}^2$ de centre O et de rayon r, cet angle solide découpe sur cette sphère une calotte d'aire $\mathrm{d}S$:

$$\mathrm{d}S = r^2 \mathrm{d}\Omega \tag{8.1.186}$$

Soit MN la normale à $\mathrm{d}\Sigma$ qui fait un angle θ avec OM. Nous avons, en assimilant $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}\Sigma$ à des portions de plan :

$$\mathrm{d}S = \cos(\theta)\mathrm{d}\Sigma \tag{8.1.187}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\Sigma\cos(\theta)}{2} \tag{8.1.188}$$

Ce concept d'angle solide nous sera très utile en particulier dans le domaine de la physique théorique qui traite du rayonnement thermique (voir sections sur l'Optique page **??** et Thermodynamique page **??** et Physique Atomique page **??**).

Nous pouvons encore calculer à partir des concepts précédents, l'angle solide élémentaire de révolution tel que présenté sur la figure ci-dessous :

En cours de traduction de l'anglais

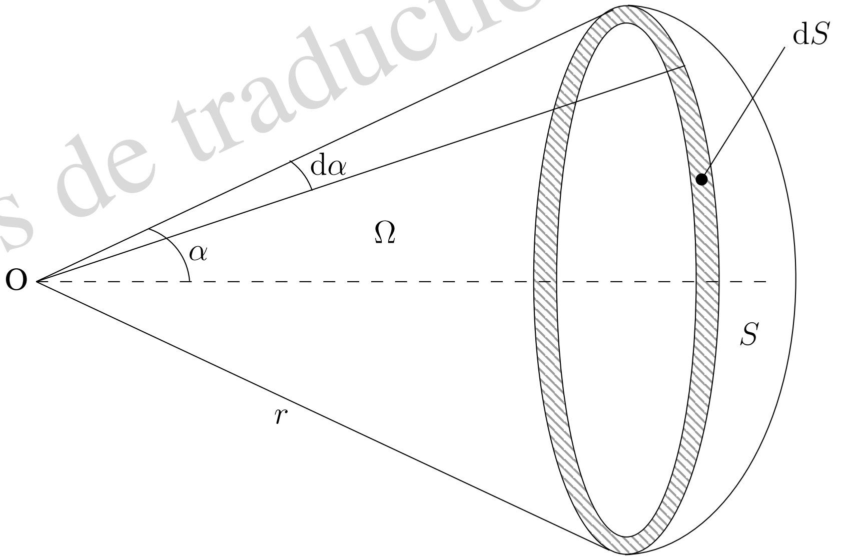


FIG. 8.28 – **Configuratio pour la définition de l'angle solide élémentaire de révolution**

Il est compris entre deux angles solides de révolution dont les demi-angles au sommet diffèrent de $\mathrm{d}\alpha$:

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}(2\pi(1-\cos(\alpha))) = 2\pi\sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{8.1.189}$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2} \tag{8.1.190}$$

Démonstration 8.2.2. Dans la section traitant des Formes Géométriques (voir section Formes Géométriques page 2934) nous avons démontré les différentes manières de calculer la surface d'une sphère. De ces calculs il avait été déduit que la surface élémentaire à R constant était :

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{8.1.191}$$

et puisque :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2} \tag{8.1.192}$$

l'angle solide élémentaire s'écrit alors :

$$\mathrm{d}\Omega = \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{8.1.193}$$

Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle α au sommet vaut :

$$\begin{aligned}\Omega &= \int \mathrm{d}\Omega = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\alpha} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta = \phi|_0^{2\pi} \cdot (-\cos(\theta))|_0^{\alpha} \\ &= 2\pi(-\cos(\alpha) - (-\cos(0))) = 2\pi(-\cos(\alpha)+1) = 2\pi(1-\cos(\alpha))\end{aligned} \tag{8.1.194}$$

■ Q.E.D.

~50 %

186 votes, 80.54%

En cours de traduction de l' anglais

8.2. Géométrie Euclidienne

L'objet de la "géométrie euclidienne" (appelée plus communément ""géométrie plane") est, en principe, l'étude des formes et des propriétés des corps naturels. La géométrie n'est cependant pas une science expérimentale, puisque son objet est, non pas d'étudier certains aspects de la Nature, mais une reproduction nécessairement arbitraire de celle-ci.

Nous allons dans cette section présenter implicitement, dans un premier temps, les cinq postulats de la géométrie euclidienne (dont les quatre premiers sont considérés aujourd'hui comme des axiomes) et ensuite développer autour de ceux-ci la géométrie de base que le lecteur aura besoin pour l'étude du reste du livre. Une fois ceci fait, nous résumerons notre étude en présentant de manière explicite les cinq postulats d'Euclide et ensuite les axiomes de Hilbert.

Remarque

Nous avons tenté de préserver au mieux les notations propres à Euclide en ayant toutefois une approche plus moderne de certains concepts et de présenter uniquement ceux qui sont utiles à l'ingénieur sur le marché du travail.

8.2.1 Objets de la Géométrie Euclidienne

En cours de traduction anglais

Avant d'énoncer les cinq postulats, il nous semble bon de définir quelques concepts intuitifs au préalable (nous présenterons plus tard les vingt-trois définitions d'Euclide juste avant ses cinq postulats !) :

Définitions (#8.2.317) :

D1. La notion expérimentale la plus simple est celle de "volume". Nous disons qu'un corps occupe un certain volume lorsqu'il occupe dans l'espace à trois dimensions une certaine place (pour des espaces à des dimensions supérieures, nous parlons de "hyper-volumes").

D2. Nous admettrons comme une chose évidente qu'un volume est limité par une "surface" ; mais si l'existence du volume est physiquement contrôlable et mesurable, la surface est une création de l'esprit ; c'est quelque chose d'analogue à une baudruche, par exemple, enveloppant un volume quelconque, mais d'analogue seulement. C'est une entité géométrique à deux dimensions sans épaisseur.

D3. Lorsqu'une surface est limitée, cette limite est une "ligne". Ici encore, la ligne est une création de l'esprit, une ligne n'a pas d'existence expérimentale ; c'est quelque chose d'analogue à la figure formée par un fil de fer. Etre géométrique encore mais d'une dimension sans hauteur ni largeur.

D4. Une "droite" est définie comme la ligne de plus court chemin joignant deux points sur une surface. En d'autres termes, une ligne droite est une ligne sans début ni fin, et donc infiniment longue.

D5. Quand une ligne est limitée (bornée), sa limite est un "point" : le point est quelque chose d'analogue à l'intersection de deux fils tendus. C'est encore une création de l'esprit, une entité géométrique (car cela est supposé ne pas avoir de largeur, pas de longueur, pas de hauteur... juste pas de dimensions).

Remarque

Il est d'usage, en géométrie, de représenter un point par une lettre $A, B, \ldots$; une ligne, ou une surface par une lettre entre parenthèses (mais cela est rarement respecté car nous supposons souvent que le lecteur sait de quoi nous parlons). Nous disons alors, par exemple : la ligne (L), la surface (S).

D6. L'expression le "segment $\overline{AB}$" désigne en général une ligne limitée par les points A et B. Nous dirons qu'un point M est sur le segment $\overline{AB}$, pour traduire le fait suivant : tout segment $\overline{AB}$ peut être séparé d'une infinité de façons en deux morceaux limités par A et M d'une part, par M et B d'autre part - fait inspiré au géomètre par la possibilité de couper expérimentalement un bout de fil de fer en deux, et cela d'une infinité de façons (nous y reviendrons plus loin).

Remarque

L'expression : «la ligne (L) est tracée sur une surface (S)»" signifie que la surface (S) pourrait être divisée en plusieurs morceaux, de manière que la ligne (L) soit la frontière ou une partie de frontière d'un de ces morceaux. Cette définition est inspirée du fait qu'il est possible de découper une étoffe, par exemple, en suivant avec des ciseaux un trait quelconque tracé sur cette étoffe.s

Lorsqu'une ligne (L) est tracée sur une surface (S), tout point M qui est situé sur la ligne (L) est aussi, par définition, situé sur la surface (S). Nous disons alors que c'est un "point de cette surface".

D7. Une "ligne semi-droite" est une ligne qui a une limite (ou sommet) d'un côté et est infinie de l'autre côté.

En cours de traduction de l'anglais

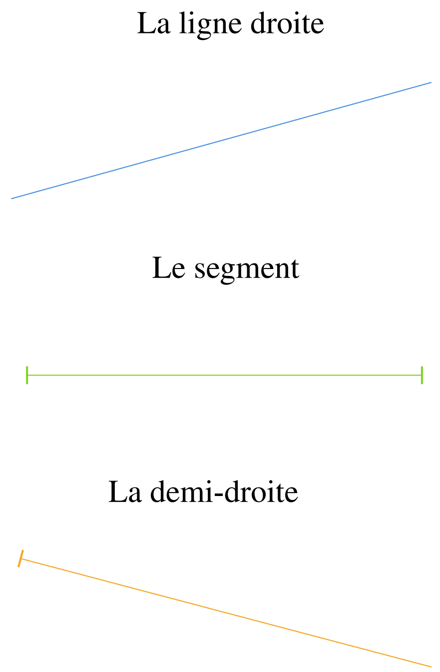


FIG. 8.29 – Différence entre ligne droite, segment et demi-droite

D8. Nous appellons "angle" (ou "angle plan") ou plus strictement "angle rectiligne" le plan partie limitée par deux demi-droites (voir plus loin la définition d'une demi-ligne).

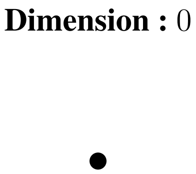
8.2.1.1 Dimensions

Nous avons parlé de volume, surface et de ligne auxquelles nous pouvons associer des dimensions. Mais qu'est-ce une dimension au fait ?

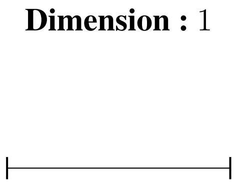
Nous allons tâcher d'essayer de définir au mieux cette dernière mais d'abord, il faut savoir qu'il existe en géométrie plusieurs types de dimensions. La plus connue et commune est celle que nous appelons la "dimension topologique".

Par exemple, le point (abstraction mathématique et géométrique) a une dimension topologique de 0, la courbe (trait continu d'épaisseur nulle) une dimension de 1, la surface une dimension de 2, un volume une dimension de 3 et un hyper-volume une dimension 4 (pour représenter un hyper-volume, prenez un volume dessiné sur papier (...) et faites-en une translation et reliez les sommets). Ce sont toutes des valeurs entières par définition :

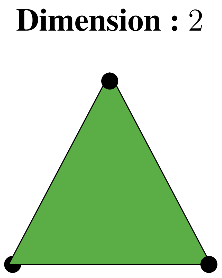
En cours de traduction de l' anglais



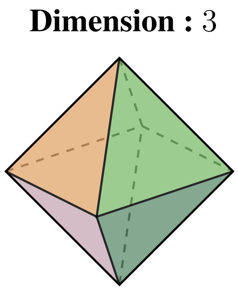
(a) Un point



(b) Une ligne (droite ou courbe)



(c) Figure/Surface plane (polygone, ellipse, etc.)



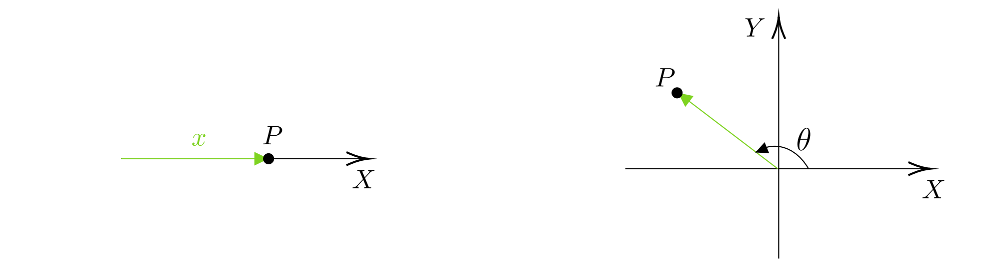
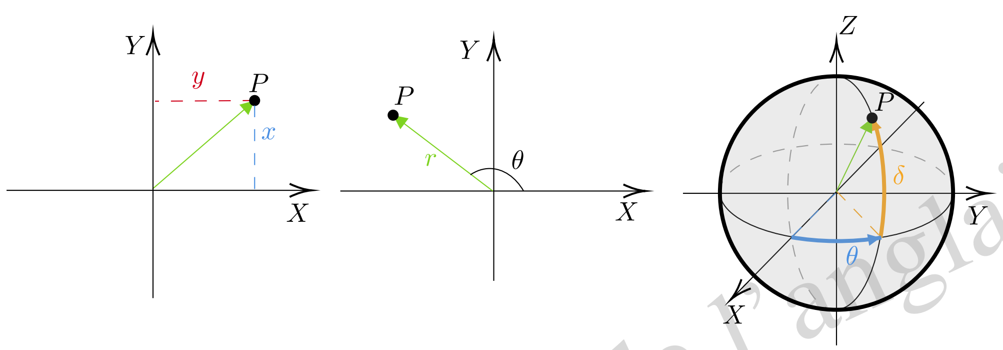
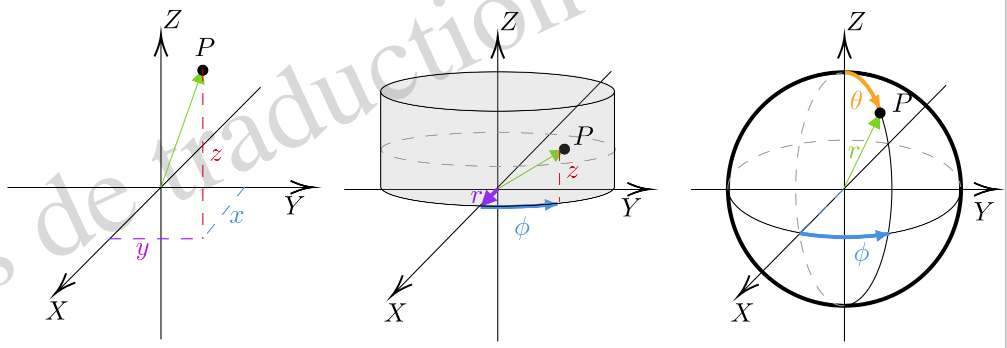
(d) Un solide ou corps (sphère, parallélépipède, etc.)

TAB. 8.3 – **Objets, représentations et dimensions correspondantes**

En physique et en mathématiques, la dimension d'un espace mathématique (ou d'un objet) est définie de manière informelle comme le nombre minimum de coordonnées nécessaires pour spécifier n'importe quel point à l'intérieur. Ainsi, une ligne a une dimension de un car une seule coordonnée est nécessaire pour y spécifier un point.

En mathématiques, la dimension d'un objet est une propriété intrinsèque indépendante de l'espace dans lequel l'objet est intégré. Par exemple, un point du cercle unité dans le plan peut être spécifié par deux coordonnées cartésiennes, mais une seule coordonnée polaire (l'angle) serait suffisante (pour plus de détails sur les systèmes de coordonnées voir la section Calcul Vectoriel), donc le cercle est unidimensionnel même s'il existe dans le plan bidimensionnel. Cette notion intrinsèque de dimension est l'une des principales différences entre la notion mathématique de dimension et ses usages courants.

En cours de traduction de l'anglais

Dimensions	Exemple de système de coordonnées
1	 Ligne graduée — Angle
2	 Cartésien — Polaire — Latitude et longitude
3	 Cartésien — Cylindrique — Sphérique

En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.30 – Exemple de quelques systèmes de coordonnées

Pour calculer la dimension de certains objets, nous allons utiliser la méthode de la géométrie métrique plane qui consiste à prendre un étalon de cet objet, c'est-à-dire cet objet lui-même mais en plus petit, et à le reporter sur notre objet un certain nombre de fois :

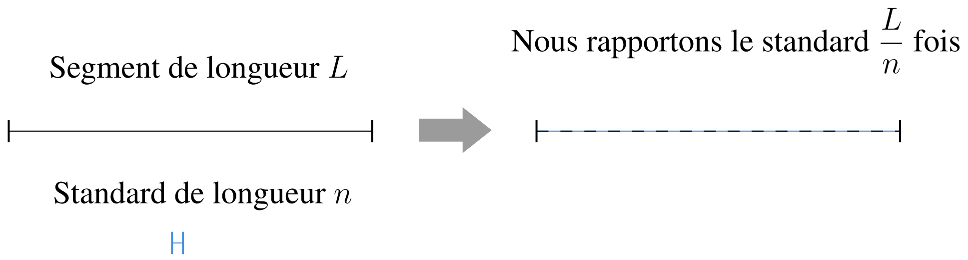


FIG. 8.31 – Concept de standard unidimensionnel

Soit L la longueur totale du segment. Nous allons prendre un étalon de longueur n que nous allons reporter sur le grand segment. Cet étalon sera reporté L/n fois. Nous remarquons que :

$$\frac{L}{n}=\left(\frac{L}{n}\right)^{1} \tag{8.2.1}$$

Nous pouvons appliquer le même raisonnement à une surface :

FIG. 8.32 – **Concept de standard bidimensionnel**

Soit L^2 la surface totale du carré. Cette fois, nous prenons un autre carré, plus petit, de côté n et de surface n^2. Nous reportons le petit carré sur le grand L^2/n^2 fois pour obtenir la surface du grand carré. Nous remarquons que :

$$\frac{L^2}{n^2}=\left(\frac{L}{n}\right)^{2} \tag{8.2.2}$$

Nous pouvons appliquer le même raisonnement à un volume :

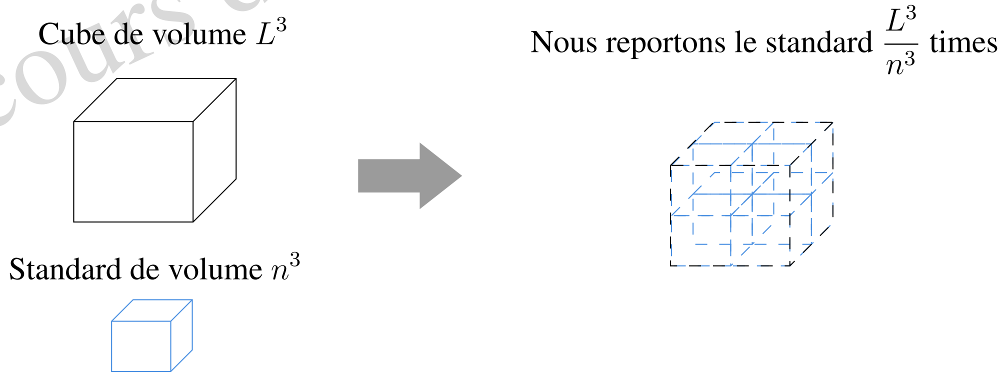


FIG. 8.33 – **Concept de standard tridimensionnel**

Soit L^3 le volume total du cube. Nous prendrons un cube standard de volume n^3 que nous rapporterons dans le grand cube. Cette norme sera rapportée L^3/n^3 fois. Nous remarquons que :

$$\frac{L^3}{n^3}=\left(\frac{L}{n}\right)^{3} \tag{8.2.3}$$

et ainsi de suite...

En cours de traduction de l' anglais

Au travers de ces trois exemples, nous avons fait apparaître le nombre 1 pour le segment, et le nombre 2 pour le carré, le nombre 3 pour le volume. Ces nombres sont la "dimension" de l'objet.

Ainsi, pour résumer :

1. Les lignes sont de dimension 1, car pour mesurer une longueur avec une division plus fine d'un facteur n d'un segment étalon, le nombre de subdivisions sera multiplié par le même facteur. Donc il y a une relation de puissance unitaire entre la subdivision et la mesure.

2. Les surfaces sont de dimensions 2, car pour mesurer une surface avec une division plus fine d'un facteur n d'un carré étalon, le nombre de subdivisions sera donné par la puissance carrée de n. Donc il y a une relation de puissance deux entre la subdivision et la mesure (si on prend des carrés deux fois plus petits pour couvrir une surface, il en faudra quatre fois plus).

3. Les volumes sont de dimension 3, car pour mesurer un volume avec une division plus fine d'un facteur n d'un cube étalon, le nombre de subdivisions sera donne par la puissance cubique de n. Donc il y a une relation de puissance trois entre la subdivision et la mesure (si on prend des cubes deux fois plus petits pour remplir un volume, il en faudra 8 fois plus).

Généralisons : soit N le nombre de fois que nous reportons l'étalon de longueur n sur notre objet de longueur L, et soit d la dimension de l'objet, nous avons :

$$N = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \Leftrightarrow d = \frac{\ln(N)}{\ln(n)} \tag{8.2.4}$$

Dans le cas des fractales (voir section Fractales page ??) les dimensions sont variables et fractionnaires. Considérons la courbe de Von Koch (par exemple) après une itération de la suite la définissant :

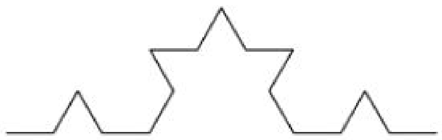


FIG. 8.34 – Courbe de Von Koch

Soit L sa taille tel que $L = 1$. Pour calculer sa dimension nous prenons l'élément fondamental de la courbe (ci-dessous en rouge) :

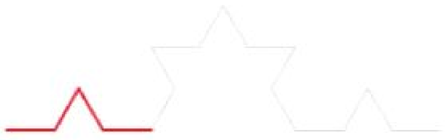


FIG. 8.35 – Choix de l'étalon pour la courbe de Von Koch

En cours de traduction de l'anglais

Soit n la taille de cet étalon tel que $n = 1/3$. Nous voyons très bien que nous pouvons le reporter 4 fois sur la courbe. Donc :

$$d = \frac{\ln(4)}{\ln\left(\dfrac{1}{1/3}\right)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \cong 1.26 \tag{8.2.5}$$

La dimension de la fractale de Von Koch a donc une valeur fractionnaire et est plus une courbre (parce que proche de 1), qu'une surface (qui est de dimension 2). Les choux-fleurs sont par exemple des fractales de dimension 2.33...

Nous pouvons donc calculer la dimension de n'importe quels objets fractals à la condition de connaitre leurs mesures.

Ne nous hasardons pas à aller chercher des objets complexes dans quelques galaxies alors que la fractale la plus connue se trouve dans votre assiette (la seconde étant vos poumons...). Eh oui ! Le chou-fleur est bien une fractale (au même titre que vos poumons) ! Vous avez sûrement déjà remarqué que quand nous découpons le chou-fleur (chose pas conseillée à tenter pour vos poumons...), nous le cassons au lieu de le couper, et ça donne plein de petits choux-fleurs, qui eux même peuvent donner d'autres plus petits choux fleurs. Cette particularité d'autosimilarité à différentes échelles fait du chou-fleur une fractale.

Calculons à présent la dimension fractale du chou-fleur. Quand nous cassons le chou-fleur, nous obtenons entre 12 et 14 branches qui ressemblent au chou-fleur entier à une dilatation près. Cette dilatation est, si nous la calculons, de facteur 3. Donc, selon la formule ci-dessus, la dimension fractale du chou-fleur est d'environ :

$$d = \frac{\ln(13)}{\ln(3)} \cong 2.33 \tag{8.2.6}$$

Donc le chou-fleur est plus une surface qu'un volume.

Faisons un dernier exemple avec la fractale du triangle de Sierpinski (voir section Fractales page ??) :

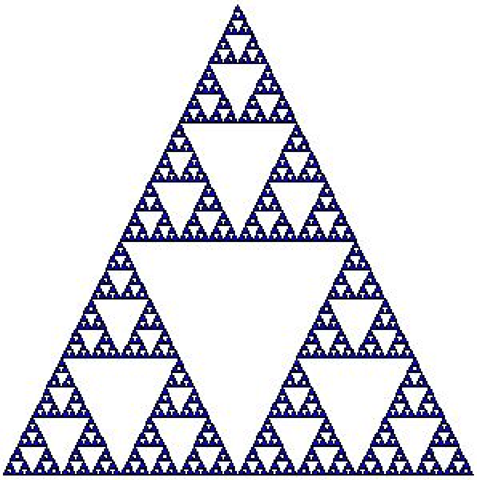


FIG. 8.36 – Fractale Triangle de Sierpinski

D'abord, il est évident que nous avons besoin d'un carré pour le recouvrir complétement. Avec des carrés deux fois plus petits, nous aurons besoin de trois carrés :

En cours de traduction de l'anglais

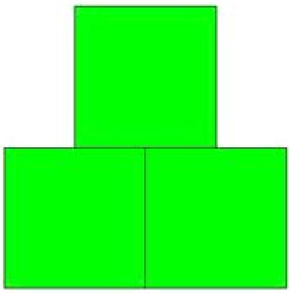


FIG. 8.37 – Trois carrés pour recouvrir la fractale de Sierpinski

Si nous divisons encore une fois la taille des carrés par deux, il nous faudra 9 carrés pour recouvrir le triangle :

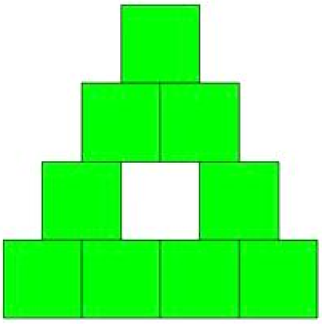


FIG. 8.38 – Neuf carrés pour recouvrir la fractale de Sierpinski

En cours de traduction de l'anglais

Si nous divisons encore la taille des carrés par deux il nous en faudra 27 :

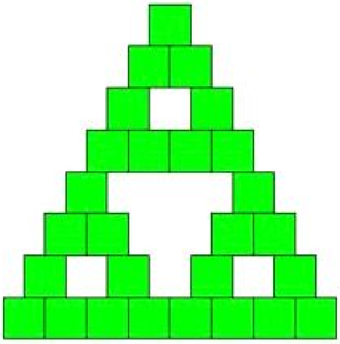


FIG. 8.39 – Vingt-sept carrés pour couvrir la fractale de Sierpinski

Et donc nous remarquons que :

$$3 = 2^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}, 9 = 4^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}, 27 = 8^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} \quad (8.2.7)$$

et donc :

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \cong 1.585 \quad (8.2.8)$$

Donc la fractale de Sierpinski est plus proche d'une surface que d'une courbe.

Il existe également d'autres dimensions. Prenons pour exemple, les "dimensions d'homothétie" dont voici quelques exemples simples (voir plus loin la définition rigoureuse de "l'homothétie") :

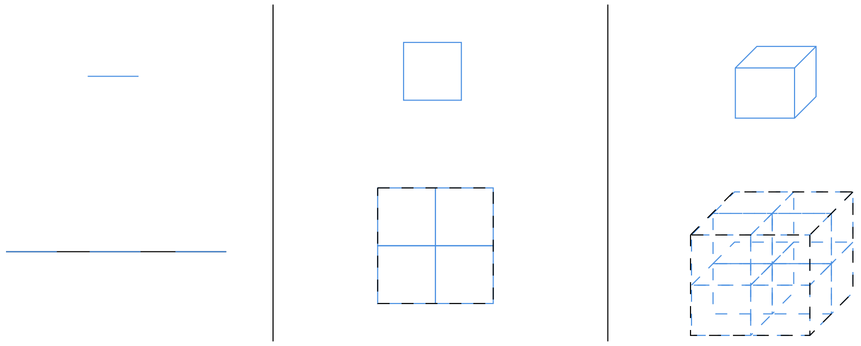


FIG. 8.40 – **Représentation des dimensions d'homothétie**

Le segment (tout à gauche), de dimension 1 a par homothétie, vu sa longueur, doublé et nous remarquons que :

$$d=1, H=2, N=2^1=2 \tag{8.2.9}$$

Le carré (au milieu), de dimension 2 a par homothétie, vu sa surface, doublé et nous remarquons que :

$$d=2, H=2, N=2^2=4 \tag{8.2.10}$$

Le cube (tout à droite), de dimension 3 a par homothétie vu son volume quadruplé et nous remarquons que :

$$d=3, H=2, N=2^3=8 \tag{8.2.11}$$

Le facteur de duplication d'échelle (homothétie) est donc égal à :

$$2^{\text{Topological dimension}} \tag{8.2.12}$$

Comme vous pouvez le voir, il s'agit toujours d'une valeur entière mais d'un autre type de dimension.

Le concept de dimensions ayant été introduit intéressons-nous maintenant aux postulats d'Euclide qui pourront paraître vagues dans un premier temps mais qui seront détaillés au fur et à mesure de notre lecture de cette section du livre.

En cours de traduction de l' anglais

8.2.2 Constructions d'Euclides

La construction de la géométrie euclidienne planaire repose sur vingt-trois définitions et cinq postulats (les quatre premiers sont aujourd'hui considérés comme des axiomes comme nous l'avons déjà évoqué).

Commençons par les définitions traditionnelles :

Définitions (#8.2.318) :

D1. Un "point" est ce qui n'a aucune partie.

D2. Une ligne est une "longueur" sans largeur.

D3. Les "extrémités" d'une ligne sont des points.

D4. Une "ligne droite" est une ligne qui s'étend uniformément avec les points sur elle-même.

D5. Une "surface" est ce qui a uniquement une longueur et une largeur.

D6. Les "côtés" d'une surface sont des lignes.

D7. Une "surface plane" est une surface qui repose uniformément avec les lignes droites sur elle-même.

D8. Un "angle plan" est l'inclinaison l'une par rapport à l'autre de deux lignes dans un plan qui se rencontrent et ne sont pas alignées.

D9. Et lorsque les droites contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé "angle rectiligne".

D10. Lorsqu'une ligne droite se trouvant sur une ligne droite rend les angles adjacents égaux les uns aux autres, chacun des angles égaux est un "angle droit", et la ligne droite se trouvant sur l'autre est appelée une "line perpendiculaire" à celle sur laquelle elle se trouve.

D11. Un angle "obtus" est un angle supérieur à un angle droit.

D12. Un angle "aigu" est un angle inférieur à un angle droit.

D13. Une "borne" est ce qui est une extrémité de quelque chose.

D14. Une "figure" est ce qui est contenu par une ou plusieurs bornes.

D15. Un "cercle" est une figure plane contenue par une ligne telle que toutes les lignes droites tombant sur elle à partir d'un point parmi celles situées à l'intérieur de la figure sont égales les unes aux autres.

D16. Et le point est appelé le "centre" du cercle.

D17. Un "diamètre" du cercle est toute ligne droite passant par le centre et terminée dans les deux directions par la circonférence du cercle, et une telle ligne droite coupe également le cercle en deux.

En cours de traduction de l'anglais

D18. Un "demi-cercle" est la figure contenu par le diamètre et la circonférence coupée par celui-ci. Et le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

D19. Les "figures rectilignes" sont celles qui sont contenues par des lignes droites, les figures trilatérales étant celles contenues par trois, les figures quadrilatérales celles contenues par quatre et les figures multilatérales celles contenues par plus de quatre lignes droites.

D20. Parmi les "figures trilatérales", un triangle équilatéral est celui qui a ses trois côtés égaux, un triangle isocèle celui qui a deux de ses côtés seuls égaux, et un triangle scalène celui qui a ses trois côtés inégaux.

D21. De plus, parmi les figures trilatérales, un "triangle rectangle" est celui qui a un angle droit, un "triangle à angle obtus" celui qui a un angle obtus, et un "triangle aigu-angulaire" celui qui a ses trois angles aigus.

D22. Parmi les figures quadrilatérales, un "carré" est celui qui est à la fois équilatéral et rectangle ; un "oblong" celui qui est rectangle mais non équilatéral ; un "losange" celui qui est équilatéral mais non rectangle ; et un "rhomboïde" celui qui a ses côtés opposés et ses angles égaux mais qui n'est ni équilatéral ni rectangle. Et que les quadrilatères autres que ceux-ci soient appelés "trapèzes".

D23. Les "lignes droites parallèles" sont des lignes droites qui, étant dans le même plan et se produisant indéfiniment dans les deux sens, ne se rencontrent dans aucune des deux directions.

En cours de traduction de l'anglais

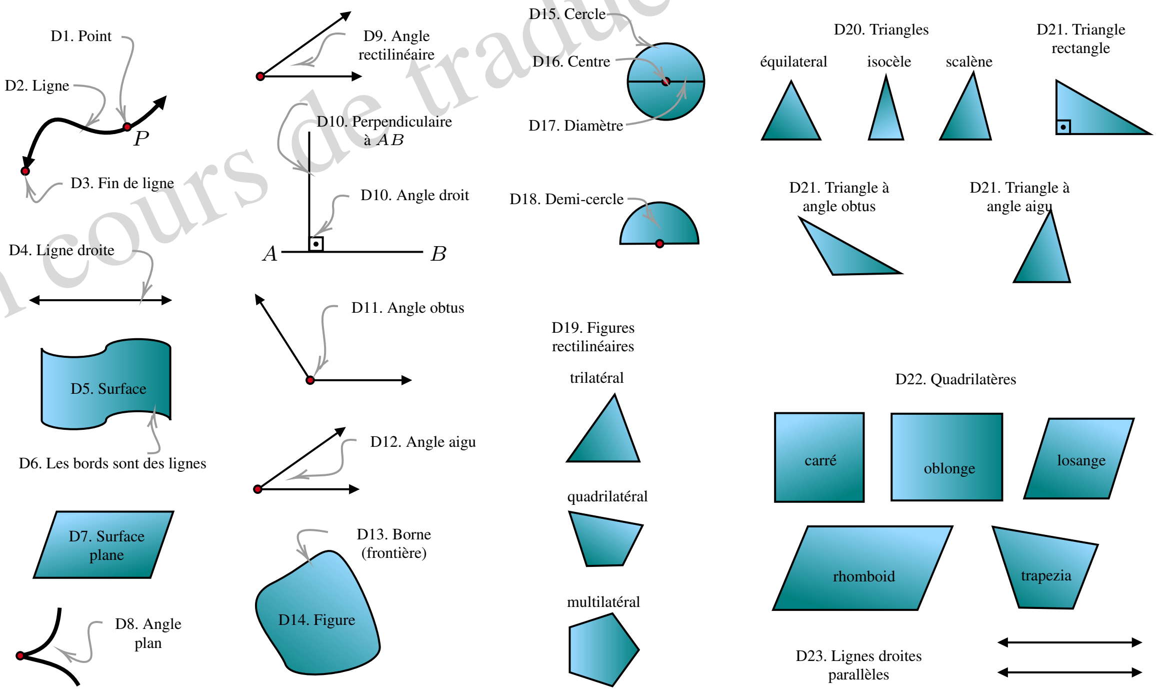


FIG. 8.41 – **Les 23 définitions d'Euclide illustrées**

Et maintenant, présentons les cinq postulats d'Euclide :

P1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

Sous forme moderne nous dirions que par deux points distincts A et B, il passe une droite et il n'en passe qu'une seule.

Autrement dit : Deux droites (D) et (D') qui ont deux points communs sont confondues, tout point de l'une est un point de l'autre et réciproquement.

Il résulte de ce postulat que deux droites (D) et (D'), ou bien n'ont aucun point commun, ou bien ont un seul point commun qui s'appelle le "point d'intersection" et sont alors des "droites sécantes" et "distinctes", ou bien ont plus d'un point commun et sont alors des "droites confondues".

P2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

Sous forme moderne nous dirions que tout segment $\overline{AB}$ est prolongeable en une droite passant par A et B (compte tenu du premier axiome, elle est unique dans une géométrie euclidienne).

P3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

Sous forme moderne nous dirions pour tout point A et tout point B distinct de A, nous pouvons décrire un cercle de centre A passant par B.

P4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Sous forme moderne nous dirions qu'à chaque angle $\widehat{xyz}$ du plan correspond sa mesure θ (aussi notée $\measuredangle AOB$ dans les petites classes), effectuée avec une unité choisie une fois pour toutes où θ est un nombre positif, inférieur à 2π. Réciproquement, soit un nombre positif quelconque compris entre 0 et 2π, nous admettrons qu'il existe une infinité d'angles égaux entre eux dont la mesure avec l'unité d'angle choisie soit θ.

P5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droites.

Sous forme moderne nous dirions que : étant donnés une droite et un point, il existe une unique droite passant par ce point et ne coupant pas la droite initiale.

En cours de traduction de l'anglais

Remarquons que ces postulats ont été construits de manière ancienne comme des constructions indépendantes. En mathématiques modernes, nous essayons toujours de définir des axiomes (ou postulats) basés sur des relations entre concepts et non comme des constructions indépendantes !

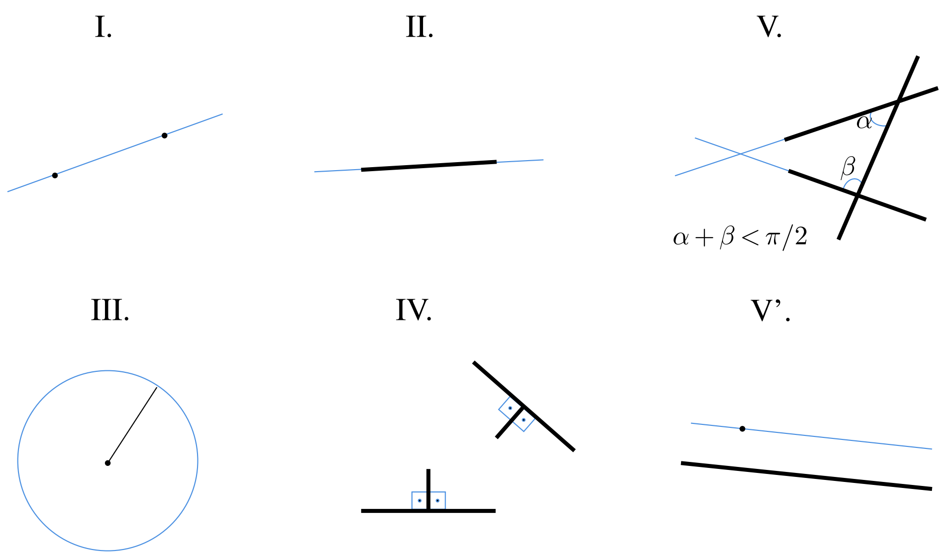


FIG. 8.42 – **Résumé illustré de cinq postulats d'Euclide**

Les postulats d'Euclide vont nous permettre de développer la notion de mesure d'une longueur, d'une aire, d'un volume, d'un angle, comme nous le verrons plus loin.

Le cinquième postulat d'Euclide ne peut pas être prouvé comme un théorème à partir des quatre premiers postulats, bien que cela ait été tenté par de nombreuses personnes. Euclide lui-même n'a utilisé que les quatre premiers postulats (la "géométrie absolue") pour les 28 premières propositions des *Éléments*, mais a été contraint d'invoquer le postulat des parallèle en tant que 29e. En 11823 (calendrier holocène), Janos Bolyai et Nicolai Lobachevsky réalisèrent indépendamment que des "géométries non euclidiennes" entièrement cohérentes pouvaient être créées dans lesquelles le postulat des parallèle ne tenait pas (Gauss avait également découvert mais supprimé l'existence de géométries non euclidiennes).

Les deux théorèmes les plus fondamentaux de la géométrie euclidienne sont le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès que nous démontrerons plus tard ! Un peu d'analyse permet d'aller plus loin avec la Trigonométrie que nous avons déjà développée dans la section précédente.

En cours de traduction de l'anglais

8.2.2.1 Droites et Segments

Dans un premier temps, la figure géométrique la plus simple (mis à part le point...) en géométrie euclidienne est la "ligne droite" et celle-ci est directement concernée par deux premiers postulats d'Euclide.

Définitions (#8.2.319) :

D1. La "ligne droite" est l'image donnée par un fil tendu d'épaisseur nulle et de longueur infinie.

Remarque

Nous pouvons également définir la "ligne droite" comme une infinité de points mis à côté les uns des autres dans une même direction sur un plan.

D2. Nous appelons "demi-droite" la portion de droite limitée à un point O appelé "origine".

Remarque

L'expression la "demi-droite $\overline{\mathrm{O}A}$" désigne la demi-droite d'origine O, point nommé le "premier", qui contient le point A.

D3. Nous disons que deux demi-droites $\overline{\mathrm{O}A}$, $\overline{\mathrm{O}B}$ sont des "demi-droites opposées" lorsqu'elles constituent la droite $\overline{AB}$ toute entière.

D4. Nous appelons "segment" $\overline{AB}$ une portion de droite limitée par deux points A et B. Ces points sont appelés les "extrémités" du segment.

8.2.2.1.1 Grandeurs de même espèce

Nous disons que des figures géométriques (sous-entendu des droites) sont des "grandeurs de même espèce" lorsqu'il est possible de définir :

1. Dans quel cas une figure (A) sera dite égale à une figure (B) et, si elles sont inégales, laquelle est la plus petite.
2. Ce que nous devons entendre par somme d'une figure (A) et d'une figure (B).

Les définitions choisies doivent être telles que si (A) est déclaré plus petit que (B) et (B) plus petit que (C), (A) soit déclaré aussi plus petit que (C).

Il faut, en outre, que la figure résutant de la somme de (A) et de (B) soit égale à celle qui est appelée : somme de (B) et de (A).

Enfin, la substitution dans une comparaison, une égalité ou une somme, d'une figure par une figure égale ne doit pas modifier le résultat des opérations.

Pour faire comprendre ce que sont des grandeurs de même espèce, prenons l'exemple des segments de droite :

- Nous admettrons qu'il est possible de décider de l'égalité de deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ lorsque nous pouvons les faire coïncider.
- Nous admettrons aussi qu'il est possible de remplacer le segment $\overline{A'B'} \in AB$ par un segment égal $\overline{AD}$ et porté sur la demi-droite AB.
- Enfin, nous admettrons qu'il est possible de distinguer entre trois points A, B, C, pris au hasard sur une droite, lequel est entre les deux autres.

En cours de traduction de l' anglais

Nous convenons alors de dire que le segment $\overline{A'B'}$ est plus petit que le segment $\overline{AB}$, ce qui s'écrit en abrégé (voir section Opérateurs page 287) :

$$\overline{A'B'} < \overline{AB} \tag{8.2.13}$$

lorsque le point C, obtenu en portant sur la demi-droite $\overline{AB}$ un segment $\overline{AC}$ égal à $\overline{A'B'}$, tombe entre A et B.

Si le point C était en B, les segments $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ seraient égaux et nous écririons alors :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \tag{8.2.14}$$

Nous convenons d'appeler la "somme de deux segments" $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, le segment $\overline{AC}$ obtenu en portant sur la demi-droite opposée à la demi-droite $\overline{BA}$ un segment $\overline{BC}$ égal à $\overline{A'B'}$. Nous traduisons cette opération en écrivant :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{A'B'} \tag{8.2.15}$$

Considérons toujours des grandeurs de même espèce... Ajouter entre elles plusieurs de ces grandeurs, c'est ajouter l'une d'elles à une autre, la somme obtenue à une troisième, etc. Par exemple, ajouter les segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, c'est ajouter $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ ce qui donne $\overline{AC}$, ensuite $\overline{AC}$ et $\overline{CD}$ ce qui donne $\overline{AD}$. Nous résumons l'opération en écrivant :

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \tag{8.2.16}$$

Multiplier une grandeur par un nombre entier n, c'est ajouter n grandeurs égales à celle-là. Par exemple, si nous avons $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, la relation précédente s'écrirait :

$$\overline{AD} = 3\overline{AB} = 3\overline{BC} = 3\overline{CD} \tag{8.2.17}$$

Nous allons définir ce que nous appelons "comparer deux grandeurs (A) et (B) de même espèce". Choisissons arbitrairement une grandeur (C) de même espèce que (A) et que (B) et plus petite que chacune d'elles. Formons une suite de grandeurs telles que :

$$(C_1) = (C), (C_2) = 2(C), \ldots, (C_p) = p(C) \tag{8.2.18}$$

Nous constatons que la grandeur (A) s'intercale entre deux grandeurs (C_p) et (C_{p+1}) et que (B) se trouve entre deux autres (C_q) et $(C_{q+1}$ par construction.

Nous disons alors par définition que le rapport des grandeurs (A) et (B) est un nombre $(A)/(B)$ positif compris entre :

$$\left[\frac{(C_p)}{(C_{q+1})}, \frac{(C_{p+1})}{(C_q)}\right] \tag{8.2.19}$$

✍**Exemple :**

Considérons alors, par exemple, deux segments quelconques $\overline{AB}, \overline{A'B'}$ mais différents (c.à.d. 1.2 [cm] et 3.5 [cm]) :

En cours de traduction de l'anglais

Pour réaliser l'opération précédente, utilisons une règle graduée dont l'unité sera la grandeur (C), un segment arbitrairement choisi (par exemple de 1 [cm]).

Nous appliquons le zéro de la règle en A, et B s'intercalera par construction entre deux graduations de la règle numérotée p et $p+1$ à moins que la grandeur (C) soit égale à $\overline{AB}$... (soit avec le choix pris comme exemple, B s'intercalera entre la 1ère et la 2ème graduation).

Pour $\overline{A'B'}$, nous appliquons le zéro de la règle aussi en A', et B' s'intercalera aussi entre deux grandeurs de la règle numérotée q et $q+1$ à moins que la grandeur C soit égale à $\overline{A'B'}$... (soit avec le choix pris comme exemple, B' s'intercalera entre la 3ème et la 4ème graduation).

Nous exprimerons le résultat de ces mesures et leur rapport en écrivant :

$$\frac{p}{q+1} < \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} < \frac{p+1}{q} \tag{8.2.20}$$

où le terme tout à gauche s'appelle une "esure par défaut" et celui à l'opposé une "mesure par excès".

Ainsi avec les mesures prises comme exemple nous avons donc :

$$\frac{1}{3+1} < \frac{\overline{1.2}}{\overline{3.5}} < \frac{1+1}{3} \Leftrightarrow 0.25 < 0.342 < 0.\bar{6} \tag{8.2.21}$$

Définition (#8.2.320) : Et en physique, nous appelons "mesure d'une grandeur" (A) le nombre positif qui mesure le rapport de cette grandeur et d'une grandeur (U) arbitrairement choisie et que nous appelons "l'unité", la mesure de l'unité étant "1", par définition.

En cours de trad

Nous pouvons montrer que si a est la mesure de (A), b celle de (B) évaluées toutes deux avec une même unité (U), le nombre $(A)/(B)$ est égal au rapport a/b. Ce rapport étant (et cela devrait être évident pour le lecteur à ce niveau) indépendant de l'unité de mesure choisie.

Remarque

Nous disons que (B) est une "partie aliquote" de (A) si le rapport $(A)/(B)$ est un nombre entier.

Nous conviendrons une fois pour toute, qu'en géométrie toutes les grandeurs de même espèce qui interviennent dans une figure donnée sont mesurées avec la même unité.

Soit $(A),(B),(C),\ldots,(S)$ des grandeurs de même espèce et $(A'),(B'),(C'),\ldots,(S')$, des grandeurs de même espèce, mais qui ne sont pas nécessairement de même espèce que les précédentes. Nous disons que ces grandeurs sont "homologues", si nous pouvons les grouper deux à deux, (A') homologue de (A), (B') homologue de (B), ..., etc., de manière que les conditions suivantes soient réalisées :

- Si (A) est égal à (B), (A') est égal à (B') ;

- Si (A) est plus petit que (B), (A') est plus petit que (B') ;
- Si (S) est la somme de (A) et de (B), (S') est la somme de (A') et de (B').

Pour calculer le rapport $(A)/(B)$, formons la suite $(C_1),(C_2),\ldots,(C_p)$ et pour calculer le rapport $(A')/(B')$, formons la suite $(C'_1),(C'_2),\ldots,(C'_p)$, obtenue comme la précédente, mais à partir de la grandeur (C') homologue de (C).

Il est évident que si (A) peut s'intercaler entre (C_p) et (C_{p+1}), (A') pourrait donc aussi s'intercaler entre (C'_p) et (C'_{p+1}) ; De même, si (B) peut être intercalé entre (C_q) et (C_{q+1}). Les ratios $(A)/(B)$ et $(A')/(B')$ seront bornés par les mêmes nombres :

$$\frac{p}{q+1} \qquad \frac{p+1}{q} \tag{8.2.22}$$

Par conséquent, le rapport de deux grandeurs (A) et (B) est égal au rapport des grandeurs homologues (A') et (B').

Si, en particulier, les grandeurs $(A),(B),\ldots$. sont mesurées avec une unité (U), et si les grandeurs $(A'),(B'),\ldots$ sont mesurées avec une unité (U'), homologue de (U), les rapports égaux :

$$\frac{(A)}{(U)} \qquad \frac{(A')}{(U')} \tag{8.2.23}$$

ne sont autres que les mesures de (A) et de (A'). Par conséquent :

Les mesures de deux grandeurs homologues (A) et (A') sont égales, à condition que les unités choisies pour les mesurer soient des grandeurs homologues.

Considérons maintenant sur une demi-droite le long de l'axe Ox un point M. Soit x la mesure (selon la définition précédente) de $\overline{\text{O}M}$. A chaque point M de la demi-droite correspond un nombre positif x et un seul ; nous admettrons qu'à un nombre positif x arbitrairement choisi correspond réciproquement un point M de la demi-droite et un seul.

Une conséquence de cette hypothèse est qu'il existe un point, et un seul, C qui divise le segment $\overline{\text{O}M}$ en parties égales. Ce point est le point de la demi-droite $\overline{\text{O}M}$, tel que :

$$\overline{\text{O}C} = \frac{\overline{\text{O}M}}{2} \tag{8.2.24}$$

Nous appelons ce point le "milieu du segment" $\overline{\text{O}M}$.

Théorème 8.3. Il existe un point M et un seul, situé sur le segment $\overline{AB}$ tel que la mesure du rapport $\overline{MA}/\overline{MB}$ soit égal à un nombre positif donné.

Remarque

Évidemment si $\lambda = 1$, ce point est le milieu du segment.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 8.3.1. Soit M un point quelconque du segment $\overline{AB}$; soit x, la mesure de $\overline{AM}$, et a la mesure de $\overline{AB}$: la mesure de $\overline{MB}$ sera $a-x$ puisque M est placé entre A et B. Nous aurons alors :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{x}{a-x} \tag{8.2.25}$$

Pour que ce rapport soit égal à λ, il faut, et il suffit, que x soit solution de l'équation :

$$\frac{x}{a-x} = \lambda \tag{8.2.26}$$

Or, cette équation admet la seule solution :

$$x = \frac{a\lambda}{1+\lambda} \tag{8.2.27}$$

À cette valeur positive x qui est inférieure à a correspond un point M et un seul de la demi-droite $\overline{AB}$ tel que $\overline{MA} = x$. Ce point M satisfait, et satisfait seul, aux conditions imposées.

■ Q.E.D.

Théorème 8.4. Il existe un point M et un seul de la droite $\overline{AB}$, situé en dehors du segment $\overline{AB}$, tel que le rapport $\overline{MA}/\overline{MB}$ soit égal à un nombre donné λ et défini différent de 1.

Démonstration 8.4.1. Démontrons cette unicité en deux étapes :

1. Supposons $\lambda > 1$. Soit M un point quelconque de la droite $\overline{AB}$ situé en dehors du segment $\overline{AB}$: ou bien A est sur le segment $\overline{MB}$, ou bien B est sur le segment $\overline{MA}$. Si A est sur le segment $\overline{MB}$, nous avons nécessairement $\overline{MB} > \overline{MA}$, donc :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} < 1 < \lambda \tag{8.2.28}$$

Le point M ne répond donc pas à la question de l'unicité.

Si B est sur le segment $\overline{MA}$ et que nous notons $\overline{MA} = x, \overline{AB} = a, \overline{MB} = x-a$. Nous aurons donc :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{x}{x-a} \tag{8.2.29}$$

Pour que ce rapport soit égal à λ, il faut, et il suffit que x soit solution de l'équation :

$$\frac{x}{x-a} = \lambda \tag{8.2.30}$$

Cette équation admet comme seule solution :

$$x = \frac{a\lambda}{\lambda-1} \tag{8.2.31}$$

qui donne une valeur de x qui sera toujours positive et supérieure à λ. À cette valeur positive et supérieure à a de x correspond un point M et un seul de la demi-droite $\overline{AB}$. Ce point M satisfait, et satisfait seul aux conditions imposées d'unicité.

En cours de traduction de l' anglais

2. Supposons maintenant $\lambda < 1$. Nous chercherons le point M pour lequel (nous avons simplement inversé le rapport) :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \frac{1}{\lambda} \tag{8.2.32}$$

est un nombre supérieur à 1. Il y en a un et un seul d'après le point (1). Il satisfait seul aux conditions imposées.

Remarque

Il n'existe aucun point M situé en dehors du segment $\overline{AB}$ pour lequel $\overline{MA}/\overline{MB} = 1$. En effet, si A est sur le segment $\overline{MB}$, nous avons, quel que soit M, $\overline{MA}/\overline{MB} < 1$, et si B est sur le segment $\overline{MA}$, $\overline{MA}/\overline{MB} > 1$....

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

8.2.3 Géométrie Plane

Passons maintenant à l'étude d'un objet géométrique de dimension supérieure à celle de la droite qu'est le plan et la surface.

Un plan est une surface plane et bidimensionnelle qui s'étend à l'infini. Un plan est l'analogue bidimensionnel d'un point (dimensions nulles), d'une ligne (une dimension) et d'un espace tridimensionnel. Les plans peuvent apparaître comme des sous-espaces d'un espace de dimension supérieure, comme avec les murs d'une pièce s'étendant à l'infini, ou ils peuvent jouir d'une existence indépendante à part entière, comme dans le cadre de la géométrie euclidienne.

Lorsqu'on travaille exclusivement dans l'espace euclidien à deux dimensions, nous utilisons l'article défini, donc "le plan" désigne l'espace tout entier. De nombreuses tâches fondamentales en mathématiques, géométrie, trigonométrie, théorie des graphes et représentation graphique sont réalisées dans un espace à deux dimensions, ou en d'autres termes, dans : "le plan".

Considérons une surface finie (S) et deux points A et B de cette surface. Deux cas peuvent se présenter :

1. Il y a des points du segment $\overline{AB}$ qui ne sont pas sur la surface (S). Nous dirons dans ce cas : "le segment $\overline{AB}$ coupe la surface" ; les points communs au segment $\overline{AB}$ et à la surface (S) sont les points d'intersection de la surface (S) et du segment $\overline{AB}$. Parmi ces points communs se trouvent, en particulier les points A et B.

2. Tous les points du segment $\overline{AB}$ sont des points de la surface (S). Nous disons alors que : "le segment $\overline{AB}$ est sur la surface (S)".

Définition (#8.2.321) : Nous appelons "plan" la surface telle que tout segment $\overline{AB}$ qui joint deux points arbitrairement choisis sur la surface, soit sur la surface.

Nous supposerons qu'une telle surface existe et que dans un espace euclidien de n'importe quel nombre de dimensions, un plan est déterminé de manière unique par l'un des éléments suivants :

- Trois points non colinéaires (points ne se trouvant pas sur une seule ligne).
- Une ligne et un point pas sur cette ligne.
- Deux lignes distinctes mais qui se croisent.
- Deux lignes parallèles.

Les propriétés suivantes sont valables dans l'espace euclidien tridimensionnel mais pas dans les dimensions supérieures, bien qu'elles aient des analogues en dimensions supérieures :

P1. Deux plans distincts sont soit parallèles, soit se coupent en une ligne.

P2. Une ligne est soit parallèle à un plan, soit elle le coupe en un seul point, soit elle est contenue dans le plan.

En cours de traduction de l'anglais

P3. Deux droites distinctes perpendiculaires à un même plan doivent être parallèles entre elles.

P4. Deux plans distincts perpendiculaires à une même ligne doivent être parallèles entre eux.

L'étude des plans sera faite plus loin dans cette section (mais l'analyse mathématique vectorielle d'un plan se fait elle dans la section de Géométrie Analytique). Nous nous concentrerons dans un premier temps sur l'étude des figures géométriques dessinées dans un plan donné, figures nommées "figures planes". Leur étude est liée au domaine de la "géométrie plane".

Toutes les formes existent dans un plan plat. Un plan peut être considéré comme une feuille plate, sans épaisseur, et qui s'étend indéfiniment dans les deux sens. Il est absolument plat et infiniment grand, ce qui le rend difficile à dessiner.

Remarques

R1. L'étude de la géométrie peut être divisée en deux grands types : la géométrie plane, qui ne traite que de deux dimensions, et la géométrie solide qui permet les trois. Le monde qui nous entoure est en apparence tridimensionnel, avec une largeur, une profondeur et une hauteur. La géométrie solide traite des objets dans cet espace, tels que des cubes et des sphères.

R2. En pratique, les figures sont dessinées soit sur une feuille de papier, soit sur la surface d'un tableau (ou sur un écran d'ordinateur).

8.2.3.1 Déplacements et Retournements

Soit (F) un dessin effectué sur un tableau plan : Effectuons sur un papier transparent, dont le recto est appliqué sur le plan du tableau, un calque (C) du dessin (F). Effectuons, en appliquant ce calque en un autre point du tableau, un nouveau dessin (F') identique à (F).

Deux cas majeurs sont à considérer :

1. Si le recto du papier transparent est demeuré appliqué sur le tableau, le dessin (F') se déduit de (F) par une opération appelée "déplacement" ou plus communément "translation".

2. Si, au contraire, le papier transparent a été retourné horizontalement ou verticalement, et si c'est le verso qui est appliqué sur le tableau, l'opération est appellée "retournement" ou plus communément "symétrie horizontale ou verticale".

À chaque point A du dessin (F), l'une quelconque de ces deux opérations fait correspondre un point A' du dessin (F'), que nous appelons "l'homologue" de A. Un segment $\overline{AB}$ de (F) vient en coïncidence avec un segment $\overline{A'B'}$ homologue de (F') ; ces deux segments sont par définition égaux et cela quels que soient A et B.

Dans la figure ci-dessous, le triangle rouge est une translation du triangle bleu. Le triangle vert est une symétrie horizontale du bleu plus une translation :

En cours de traduction anglais

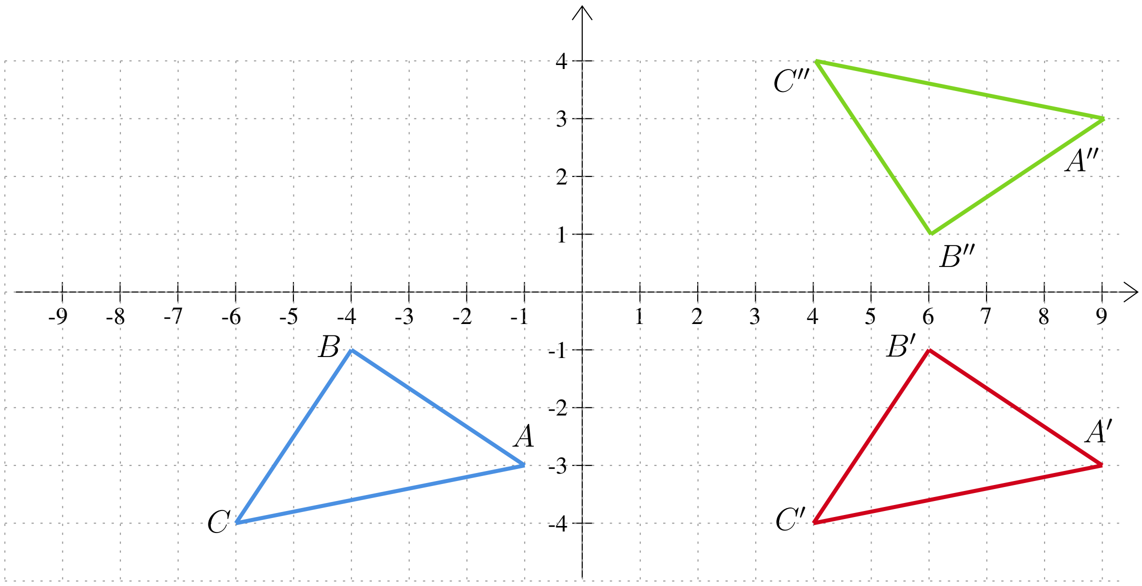


FIG. 8.43 – **Exemple illustré d'une translation et d'une symétrie**

Définition (#8.2.322) : Nous disons communément que le dessin (F) est "stackable" au dessin (F') et que ces dessins représentent des figures égales.

8.2.3.2 Angles plans

Nous avons déjà brièvement défini le concept "d'angle" dans la section précédente traitant de la trigonométrie. Nous avons maintenant en plus le quatrième postulat d'Euclide à notre disposition concernant ce concept.

Nous allons maintenant revenir plus en détails et en voir les concepts sous-jacents qui vont nous permettre d'aborder plus loin un objet particulièrement utile qu'est la (ligne) bissectrice !

En cours de traduction de l'anglais

Définitions (#8.2.323) :

D1. Nous appelons "angle" (ou "angle plan") ou plus rigoureusement "angle rectiligne" la portion de plan limitée par deux demi-droites OA, OB, par exemple. Le point O est appelé le "sommet" de l'angle, les demi-droites OA, OB, s'appellent les "côtés" de l'angle.

Dans les petites écoles, les angles sont mesurés avec un instrument appelé "rapporteur d'angles" :

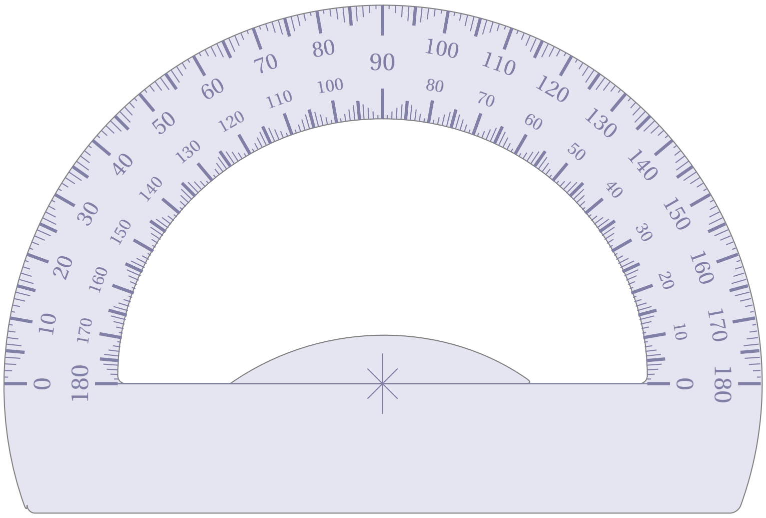


FIG. 8.44 – Un rapporteur demi-cercle marqué en degrés (180°)

En cours de traduction de l'anglais

D2. Nous appelons "angle formé par deux segments AB, AC", l'angle de sommet A dont les côtés sont les demi-droites AB, AC.

D3. Les demi-droites OA, OB divisent le plan en deux régions : elles définissent donc deux angles :

(a) L'un constitué par la région couverte de hachures (voir la figure à l'extrémité gauche ci-dessous) nommé "angle saillant".

(b) L'autre, constitué par la région couverte de hachures (voir la figure au centre ci-dessous) nommé "angle rentrant".

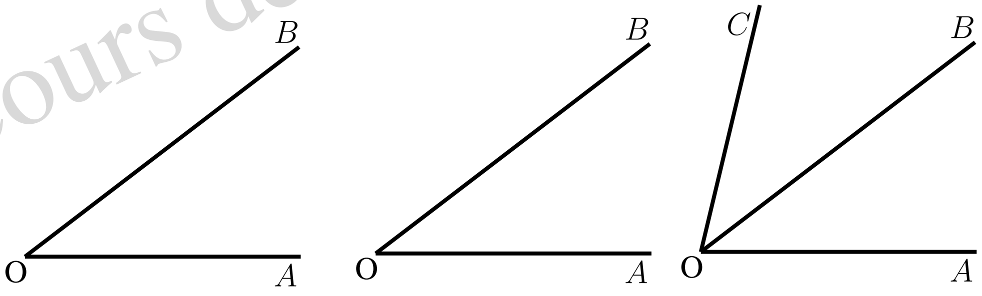


FIG. 8.45 – Angle saillant, rentrant, angles adjacents

La notation $\widehat{BOA}$ ou $\widehat{BOA}$ désigne un de ces deux angles : la lettre qui indique le sommet doit être (normalement) écrite au milieu (souvent on ne mentionne pas le sommet si le contexte est évidente). Lorsqu'aucune précision n'accompagne cette notation, elle représente par définition l'angle saillant ! !

D4. Nous appelons "angles adjacents" deux angles qui ont le sommet et un côté communs et qui sont placés de part et d'autre de ce côté commun. Sur la figure ci-dessus à l'extrême droite, les angles saillants $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, sont adjacents.

Soit, $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ deux angles d'un même plan. Nous avons admis précédemment qu'il existe un déplacement qui amène O$'$ en O et A' en un point A de la demi-droite OA ; ce

déplacement amène $\text{O}'B'$ soit en $\text{O}B_1$, de manière que les deux angles $(\widehat{A\text{O}B}, \widehat{A\text{O}B_1})$, ne soient pas adjacents, soit en $\text{O}B_2$, de manière que $(\widehat{A\text{O}B}, \widehat{A\text{O}B_2})$ et soient adjacents.

Dans ce dernier cas, un demi-tour supplémentaire autour de $\text{O}A$ amènera $\widehat{A\text{O}B_2}$ dans la position $\widehat{A\text{O}B_1}$. Ce déplacement et ce retournement, s'il y a lieu, remplace $\widehat{A'\text{O}'B'}$ par un angle $\widehat{A\text{O}B_1}$, égal par définition.

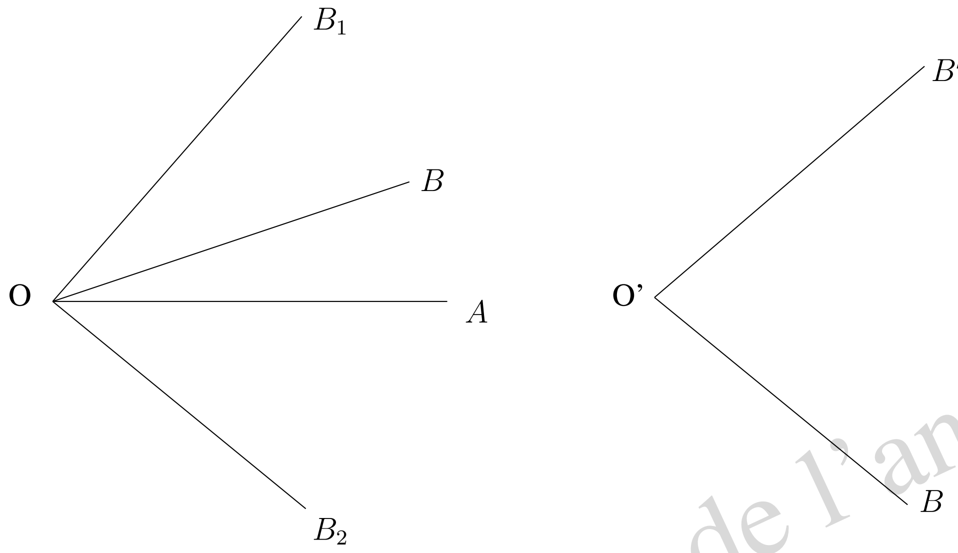


FIG. 8.46 – Représentation du déplacement de deux angles

En cours de traduction de l'anglais

Si $\text{O}B_1$ est confondu avec $\text{O}B$, il y a des points de l'un des deux angles $\widehat{A\text{O}B_1}$ et $\widehat{A\text{O}B}$ qui sont égaux, tout point de l'un étant un point de l'autre : nous dirons, dans ce cas, que les angles $\widehat{A\text{O}B}$, $\widehat{A'\text{O}'B'}$ sont des "angles égaux", ce qui s'exprime par l'égalité :

$$\widehat{A\text{O}B} = \widehat{A'\text{O}'B'} \tag{8.2.33}$$

Si $\text{O}B_1$ n'est pas confondu avec $\text{O}B$, il y a des points de l'un des deux angles $\widehat{A\text{O}B_1}$, par exemple, qui ne sont pas des points de $A\text{O}B$. Sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{A\text{O}B}$ est couvert de hachures, l'angle $\widehat{A\text{O}B_1}$ également. Les points dont nous parlons sont ceux de l'angle $\widehat{B\text{O}B_1}$ couvert une seule fois de hachures. Nous conviendrons de dire que l'angle $\widehat{A\text{O}B_1}$ et, par conséquent, l'angle égal à $\widehat{A'\text{O}'B'}$ sont, dans ce cas, plus grands que l'angle $\widehat{A\text{O}B}$, ce qui s'exprime par l'inégalité :

$$\widehat{A'\text{O}'B'} > \widehat{A\text{O}B} \tag{8.2.34}$$

Maintenant que nous sommes en mesure de comparer des angles, étudions comment nous pouvons sommer (et donc respectivement soustraire) ceux-ci.

Étudions d'abord le cas de la somme de deux angles $\widehat{A\text{O}B}$, $\widehat{B\text{O}C}$ adjacents. Deux cas peuvent se présenter suivant que les angles sont saillants ou rentrants :

(a) Soient $\widehat{A\text{O}B}$ et $\widehat{B\text{O}C}$ les deux angles à additionner (voir figure ci-dessous à gauche). Par définition, la somme de ces angles est l'angle $\widehat{A\text{O}C}$, ce que nous exprimons par l'égalité :

$$\widehat{A\text{O}C} = \widehat{A\text{O}B} + \widehat{B\text{O}C} \tag{8.2.35}$$

(b) Soit $\widehat{AOB}$ un angle saillant à additionner à l'angle rentrant $\widehat{BOC}$. Si nous couvrons de hachures successivement les deux angles (voir figure ci-dessous à droite), l'angle saillant $\widehat{AOC}$ se trouve couvert deux fois :

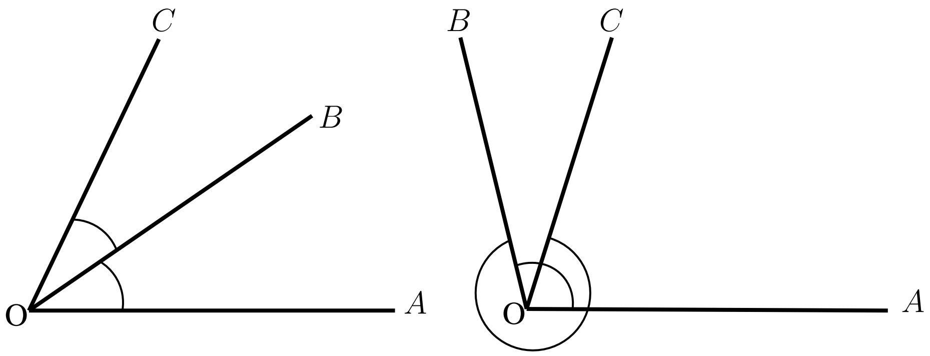


FIG. 8.47 – **Somme de deux angles adjacents**

Dans ce cas, la somme des angles $\widehat{AOB}$ (saillant) et $\widehat{BOC}$ (rentrant) est donc égale à $\widehat{AOC}$ augmenté de deux "angles plats" (voir plus loin la définition), ce qui s'exprime en écrivant :

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=\widehat{AOC}+2\,\text{angles plats} \tag{8.2.36}$$

Remarque

Ceci peut paraître confus à certains mais ceux qui auront déjà parcouru le chapitre de Trigonométrie savent que les angles du cercle trigonométriques sont égaux à eux-mêmes modulo 2π [rad].

Étudions maintenant le cas de la somme de deux angles quelconques :

La somme de deux angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ est par définition, égale à la somme de l'angle $\widehat{AOB}$ et d'un angle $\widehat{BOC}$ égal à l'angle et adjacent à l'angle $\widehat{AOB}$.

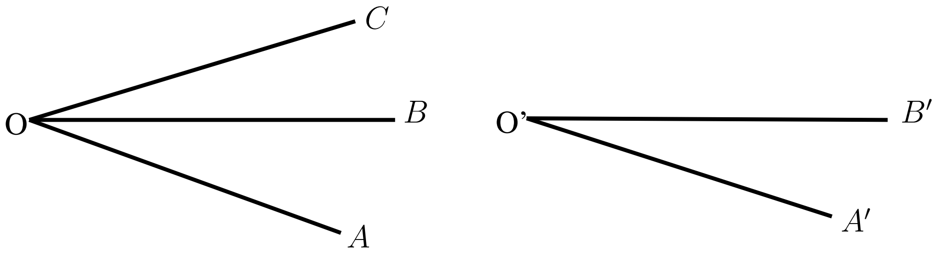


FIG. 8.48 – **Somme de deux angles quelconques**

Un pareil angle est obtenu par un déplacement qui amène O en O$'$ et A en un point OA, suivi ou non d'un retournement autour de OA.

Étudions comme dernier cas la somme de plus de deux angles :

La somme de plusieurs angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, etc., est, par définition, égale à la somme obtenue en ajoutant le premier au second, cette somme au troisième, et ainsi de suite.

En cours de rédaction de l'anglais

Soit $\widehat{A\text{O}B}$ le premier angle, $\widehat{B\text{O}C}$ le deuxième angle, $\widehat{K\text{O}L}$ un angle égal au dernier des angles à ajouter et adjacent au précédent. Le résultat de l'addition sera $\widehat{A\text{O}L}$ augmenté d'autant de fois deux angles plats que le plan a été recouvert au cours des opérations. On constate aisément que ce résultat ne dépend pas de l'ordre des angles à ajouter $\widehat{A\text{O}B}$, $\widehat{A'\text{O}'B'}$, etc.

D5. Deux angles formés par deux droites coupées par une sécante sont dits "angles alternes-internes" si :

(a) Ils sont situés de part et d'autre de la sécante ;
(b) Ils sont situés entre les deux droites ;
(c) ils ne sont pas des angles adjacents.

Dans l'exemple ci-dessous, les droites (X) et (Y) sont coupées respectivement en A et en B par la sécante (S) :

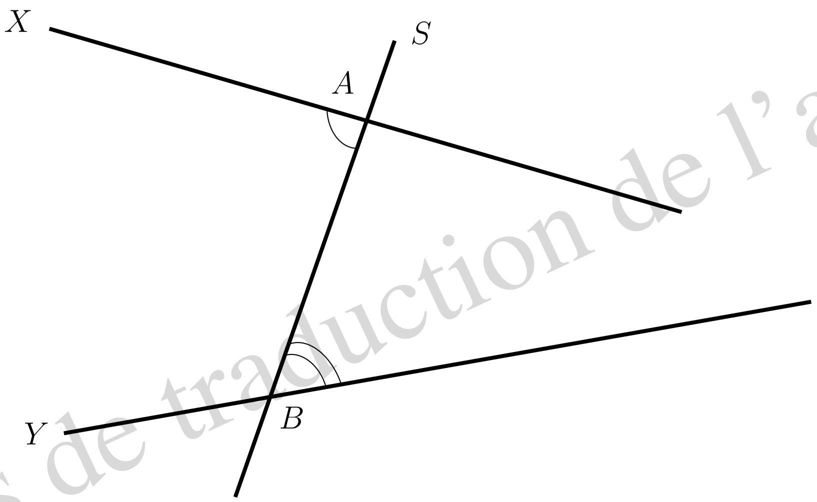


FIG. 8.49 – **Exemple particulier d'angle alterne-interne**

En cours de traduction de l'anglais

et les deux angles représentés sont les angles alternes-internes. Dans le cas où X et Y sont parallèles, les angles alternes-internes sont égaux.

C'est par ailleurs ce qui aurait permis à Ératosthène de déduire la circonférence de la Terre de manière purement géométrique (ce n'est donc pas inutile !)... même s'il existe d'assez bonnes évidences que quelqu'un d'autre l'a fait bien avant et qu'en réalité Ératosthène n'a pas fait les mesures lui-même mais s'est contenté de reprendre les résultats reportés dans un vieux papyrus conservé à la bibliothèque d'Alexandrie[1].

✍**Exemple :**

Effectivement Ératosthène utilisa l'observation qu'il fit sur l'ombre de deux objets situés en deux lieux, Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie, considérés situés sur le même méridien, le 21 juin (solstice d'été) au midi solaire local. C'est

[1] En effet, la description de l'expérience - notamment la position du Soleil à midi dans une ville donnée - conduit à la conclusion que l'expérience réelle et l'enregistrement de celle-ci en Égypte ont eu lieu très probablement 3,500 ans avant l'époque d'Ératosthène ! ! !

à ce moment précis de l'année que dans l'hémisphère nord le Soleil détient la plus haute position au-dessus de l'horizon. Or, dans une précédente observation, Ératosthène avait remarqué qu'il n'y avait aucune ombre dans un puits à Syène. Ainsi, à ce moment précis, le Soleil était à la verticale et sa lumière éclairait directement le fond du puits. Ératosthène remarqua cependant que le même jour à la même heure, un obélisque situé à Alexandrie formait une ombre. Le Soleil n'était donc plus à la verticale et l'obélisque avait une ombre décentrée. Ératosthène considérait parallèles les rayons lumineux du Soleil en tout point de la Terre (considérée comme sphérique). Il en déduisit que l'angle entre les rayons solaires et la verticale était de 7.2 degrés.

Ératosthène évalua ensuite la distance entre Syène et Alexandrie en faisant appel à un bématiste qui se basa sur le temps en journées de marche de chameau entre les deux villes : la distance obtenue était 787.5 kilomètres (mesure très proche de la réalité).

Par la théorie géométrique des angles alternes-internes congrus, Ératosthène proposa une figure simple : elle était composée d'un simple cercle ayant un angle au centre de 7.2 degrés qui intercepte un arc (reliant Syène à Alexandrie) de 800 kilomètres.

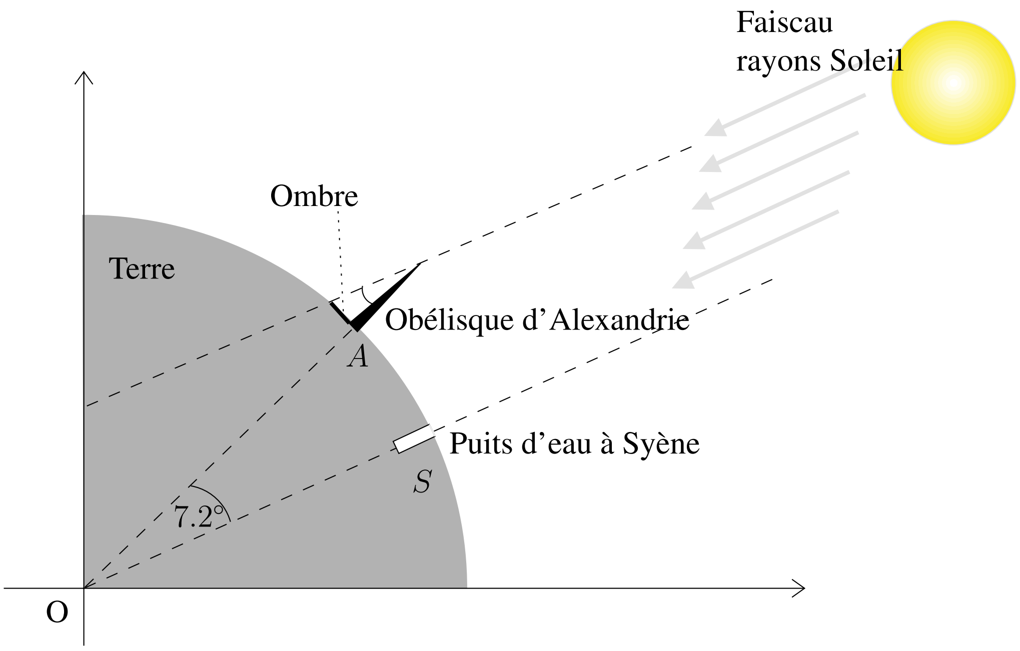
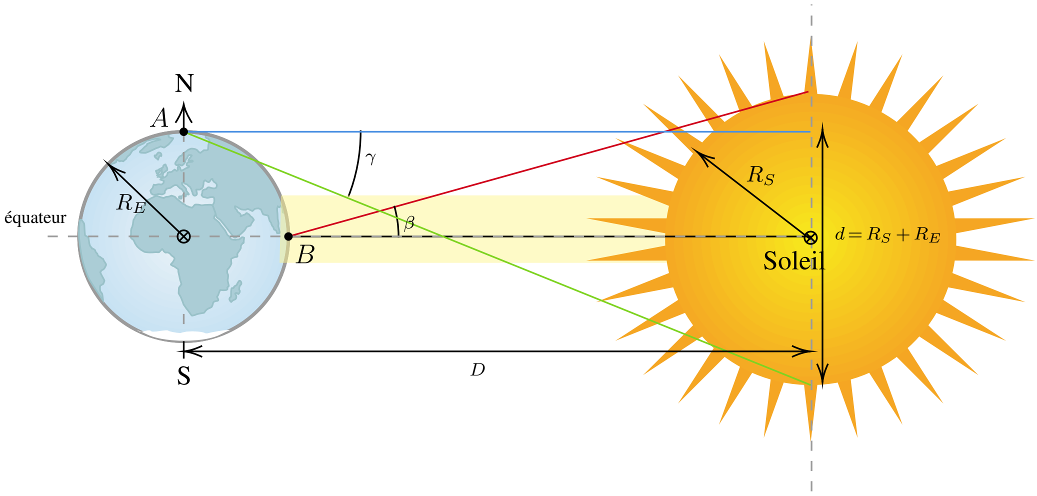


FIG. 8.50 – Principe d'utilisation des angles alterne-interne par Ératosthène

Par les rapports dans les cercles (déjà connus à l'époque), il calcula que la circonférence de la Terre était de par une simple règle de trois de $39,375$ kilomètres. Ce qui était une mesure remarquablement précise pour l'époque (les mesures actuelles donnent $40,075.02$ kilomètres).

Mais l'hypothèse des rayons parallèles est-elle satisfaisante ? Pour répondre, considérons la figure suivante :



Où nous prenons pour le rayon de la Terre $R_E \cong 6,371\,[\text{km}]$, pour le rayon du Soleil $R_S \cong 696,340\,[\text{km}]$ et pour la distance moyenne centre à centre de $D \cong 149,597,871\,[\text{km}]$ (voir la provenance de ces valeurs dans la section Astronomie page **??**).

Calculons d'abord β (en degrés) qui est la moitié de la taille angulaire (diamètre angulaire) du Soleil et correspond à l'angle le plus oblique qu'un rayon de lumière puisse être vu depuis l'équateur au solstice d'Été (point B sur la figure ci-dessus) :

$$\beta = \arcsin\left(\frac{R_S}{D - R_E}\right) \cong 0.26670959° \qquad (8.2.37)$$

dans la plupart des tables, nous pouvons trouver $2 \cdot \beta \cong 0.5332°$.

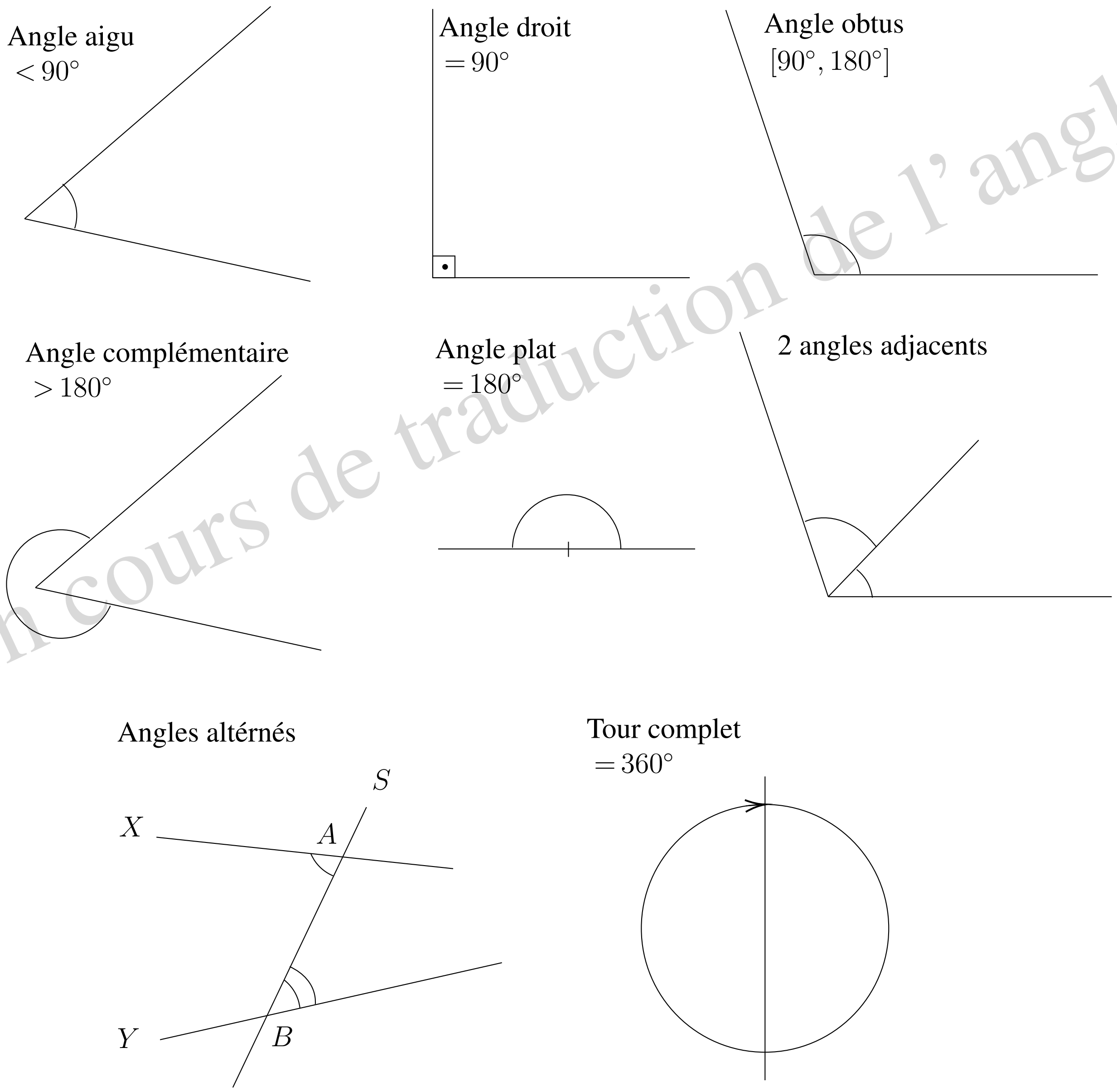
Prenons maintenant le cas le plus extrême de la figure ci-dessus en effectuant le même type de calcul pour le point A. Pour ce dernier, nous avons :

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{d}{D}\right) = \arcsin\left(\frac{R_S + R_E}{D}\right) \cong 0.269138339° \qquad (8.2.38)$$

Ainsi, dans le pire des cas, nous avons une différence de $0.00242875°$ entre les deux angles les plus extrêmes dans lesquels les personnes regardent le même point du Soleil. Ou si nous additionnons (les personnes aux points A et B regardent dans des directions opposées), nous avons $\beta + \gamma = 0.5358°$. Ainsi, quel que soit le scénario que nous prenions $\beta - \gamma = 0.00242875°$ ou $\beta + \gamma = 0,5358°$, l'affirmation - ou l'approximation - de rayons parallèles est tout à fait acceptable.

Attention ! ! ! Le calcul d'Eratosthène n'est pas une preuve expérimentale que la Terre est un géoïde (de forme sphérique/oblate !). En effet, les calculs conduiraient au même résultat si la Terre était plate, toroïdale ou de nombreuses autres formes non sphériques ! De meilleures évidences expérimentales directes sont : 1) Des photos satellites, 2) Des observations directes d'astronautes 3) L'observation de systèmes météorologiques de basse pression qui tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord en raison de l'effet Coriolis 4) Le pendule de Foucault précesse avec le temps 5) L'observation que les étoiles vues dans l'hémisphère sud ne sont pas les mêmes que celles vues dans l'hémisphère nord, etc.

Faisons un résumé de la plupart des types d'angles dont le lecteur doit se souvenir :



En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.51 – **Résumé des types d'angles**

8.2.3.2.1 Mesures des Angles

Nous avons défini l'égalité et la somme de deux ou plusieurs angles. Ces définitions satisfont aux conditions de grandeurs de même espèce que nous avons déjà vues précédemment.

Choisissons donc arbitrairement un angle du plan $\widehat{aob}$, qui sera l'unité d'angle pour le plan. La mesure du ratio :

$$\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{aob}} \tag{8.2.39}$$

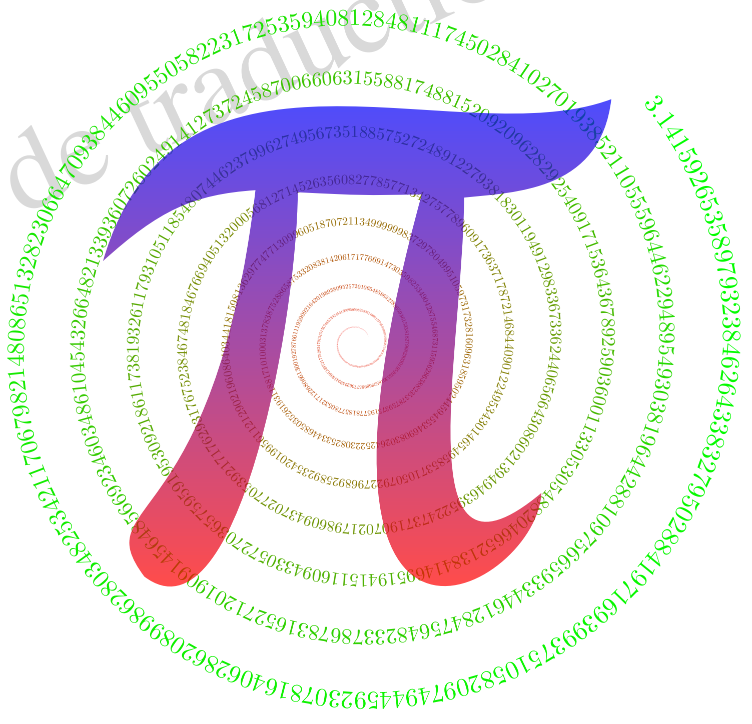
effectuée comme il a été expliqué précédemment lors de notre discussion sur les grandeurs de même espèce, sera un nombre positif noté la majorité du temps par des lettres grecques comme α ou θ par exemple, appelé par définition "mesure de l'angle $\widehat{AOB}$, avec l'unité choisie $\widehat{aob}$".

Nous désignons par la lettre grecque minuscule "pi" "pi" le nombre irrationnel :

$$\boxed{\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939\ldots} \tag{8.2.40}$$

qui est par définition la mesure d'un "angle plat" aussi appelé "angle plan" (nous avons déjà vu dans la section de Trigonométrie d'où venait cette valeur).

En cours de traduction de l'anglais



Le lecteur peut se référer à la section Méthodes Numériques pour voir une autre définition de π basée sur la circonférence du cercle et basée sur l'algorithme d'Archimède (voir page **??**).

Remarque

Comme tous les angles du plan sont plus petits que deux angles plats, le nombre θ (qui est la mesure de $\widehat{AOB}$) doit être inférieur à 2π.

Ayant défini l'angle plat, nous pouvons maintenant définir d'autres types d'angles d'usage courant :

Définitions (#8.2.324) :

D1. Nous appelons "angles droit", tout angle égal à la moitié d'un angle plat.

D2. Deux angles sont des "angles perpendiculaires", désignés par le symbole $\perp$, lorsqu'ils sont à la fois droits et adjacents.

D3. Nous appelons "angle aigu" tout angle inférieur à un angle droit et "angle obtus" tout angle supérieur à un angle droit.

D4. Nous appelons "angle orienté" ou "angle vectoriel", l'angle entre deux vecteurs ou lignes (voir section Calcul Vectoriel 1776) ayant la même origine et dont la valeur mesurée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sera considérée comme positive et négative si elle est prise dans le sens des aiguilles d'une montre.

L'exemple le plus connu d'angle orienté est le cercle unitaire trigonométrique :

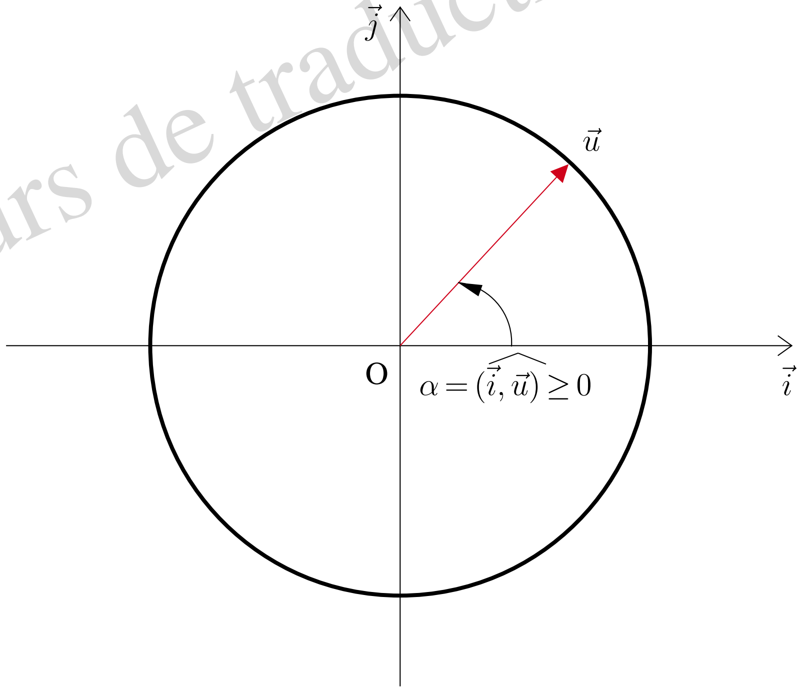


FIG. 8.52 – **Angle orienté positif ou nul**

En cours de traduction de l'anglais

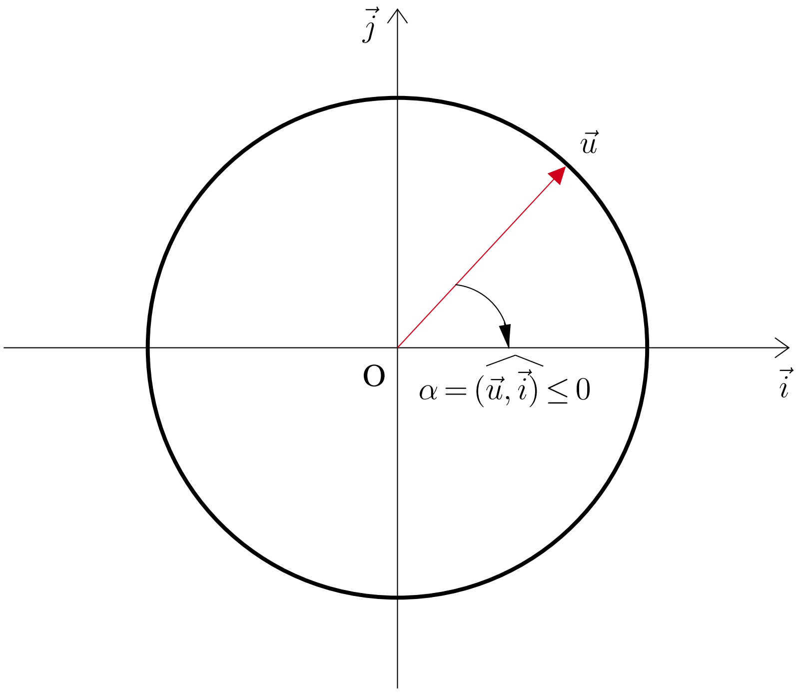


FIG. 8.53 – Angle orienté négatif ou nul

D5. Nous disons que deux angles sont des "angles supplémentaires" lorsque leur somme vaut deux angles droits (soit un angle plat).

D6. Nous disons que deux angles sont des "angles complémentaires" lorsque leur somme vaut un angle droit (ainsi deux angles complémentaires sont toujours droits...).

Les "angle interne" et "angle externe" d'un polygone régulier sont des angles complémentaires comme par construction :

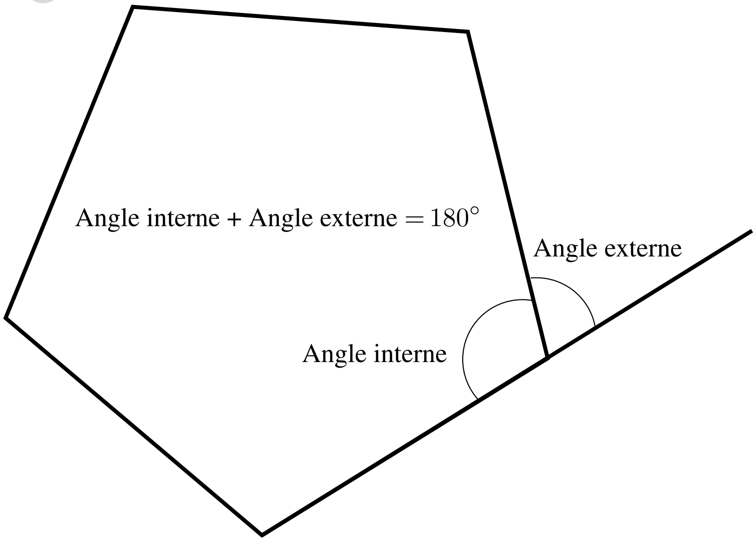


FIG. 8.54 – Angle interne + externe (source : Wikipédia)

Considérons maintenant les symboles α, β, γ comme les mesures de plusieurs angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$.

En cours de traduction de l'anglais

Nous n'insistons pas sur le fait évident que les égalités $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$ ou $\alpha = \beta$ sont équivalentes, ainsi que les inégalités $\widehat{AOB} < \widehat{BOC}$, $\alpha < \beta$. Ces remarques de bon sens s'imposeront chaque fois que des grandeurs de même espèce auront été mesurées, bien entendu avec la même unité !

En revanche, nous insisterons sur le fait que, d'après la définition même de la somme de plusieurs angles, $\alpha+\beta+\gamma$ est la mesure de l'angle augmentée d'autant de fois deux angles plats que le plan a été recouvert au cours des opérations d'addition :

$$\alpha+\beta+\gamma = \widehat{AOD} + 2n\pi \tag{8.2.41}$$

Le nombre entier n qui s'introduit dans ce calcul a une valeur qui pourrait être précisée, mais qui n'a pour le géomètre aucune importance, comme nous pourrons le constater ultérieurement. Nous décidons donc de ne pas écrire en géométrie le $2n\pi$ inutile (mais sous-entendu). Egalement, nous décidons par convention d'écrire :

$$\widehat{AOD} = \theta \tag{8.2.42}$$

Ainsi, nous avons :

$$\alpha+\beta+\gamma = \theta \tag{8.2.43}$$

cette convention d'écriture signifie que θ est la mesure de l'angle $\widehat{AOD}$ si nous avons $0 \leq \theta < 2\pi$.

Si θ est supérieur à 2π, cette égalité signifie que la mesure de l'angle $\widehat{AOD}$ est $\theta - 2n\pi$, n étant un nombre entier positif ou nul choisi de manière que nous ayons $0 \leq \theta - 2n\pi < 2\pi$.

En cours de la traduction de l'anglais

Remarques

R1. Si $\theta > 2\pi$ il n'y a qu'un seul entier positif unique n et un seul, tel que nous ayons $0 \leq \theta - 2n\pi < 2\pi$, c'est-à-dire :

$$\frac{\theta}{2\pi} - 1 < n \leq \frac{\theta}{2\pi} \tag{8.2.44}$$

car les deux nombres $(\theta/2\pi) - 1$ et $\theta/2\pi$ sont positifs et différents de 1.

R2. Dire que θ est la mesure de l'angle $\widehat{AOD}$ suppose que nous ayons $0 \leq \theta < 2\pi$ et entraîne l'égalité $\widehat{AOD} = \alpha$. Mais écrire $\widehat{AOD} = \alpha$ n'entraîne pas nécessairement, que θ soit la mesure de $\widehat{AOD}$; il faut, en outre, que l'on ait $0 \leq \theta < 2\pi$.

8.2.3.2.2 Unités de Mesures des Angles

Nous avons défini l'angle plat comme étant égal à π sans spécifier l'unité. C'est ce que nous allons maintenant nous appliquer à faire. Il existe (encore) plusieurs unités de mesures d'angle dont voici la liste des plus communes :

Définitions (#8.2.325) :

D1. Nous appelons "degré" la 180e partie de l'angle plat.

> **Remarque**
>
> La motivation initiale du choix du degré comme unité de rotations et d'angles semble être inconnue.

De nombreux calculs anciens sont effectués en degrés (et toujours encore aujourd'hui dans certains domaines de la physique/astronomie et ingénerie) ; les sous-multiples du degré sont : la "minute sexagésimale", égale au 60e du degré, et la "seconde sexagésimale", égale au 60e de la minute sexagésimale.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

La valeur :

$$\theta = 236°20'40''$$

se lit : trente degrés, dix-huit minutes, onze secondes. Ce type de mesure est courant encore en astronomie.

La conversion de degrés en angles décimaux fractionnaires est assez simple :

$$\begin{aligned} 236.345° &= 236° + 0.345° = 236° + 0.345° \frac{60'}{1} \\ &= 236° + 20.7' = 236° + 20' + 0.7' \frac{60''}{1'} \\ &= 236°20'42'' \end{aligned}$$

La plupart des pays du monde utilisent malheureusement encore aujourd'hui les degrés dans les écoles maternelles et secondaires mais sans utiliser la notation des minutes et des secondes (peu pratique pour des raisons pédagogiques).

D2. Comme nous l'avons déjà vu dans la section de Trigonométrie, nous appelons "radian" (noté [rad]) l'angle plan décrit par une sécante à un cercle, passant par son centre, tel que l'arc tel que défini par l'axe horizontal passant par le centre du cercle et la sécante soit de longueur égale au rayon du cercle :

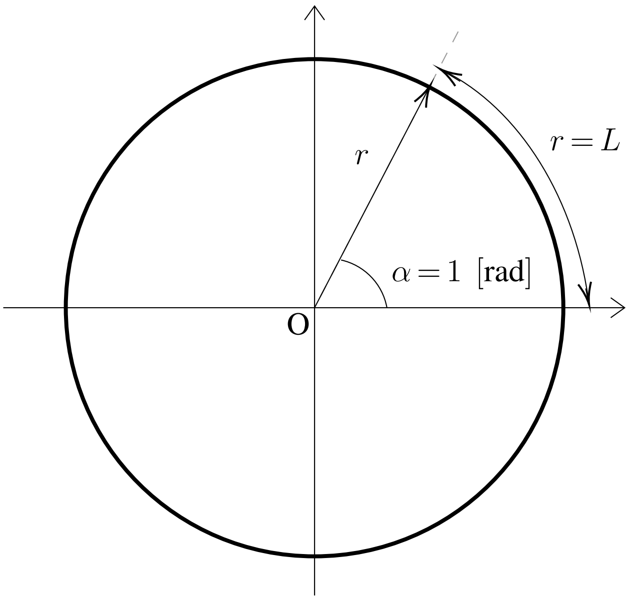


FIG. 8.55 – **Définition géométrique du radian**

Dans la plupart des travaux mathématiques au-delà de la géométrie appliquée, les angles sont généralement mesurés en radians plutôt qu'en degrés. Cela s'explique par diverses raisons ; par exemple, les fonctions trigonométriques ont des propriétés plus simples et plus "naturelles" lorsque leurs arguments sont exprimés en radians (voir section Trigonométrie page 2486).

Un tour complet ($360°$) est égal à 2π radians, donc un demi-tour de $180°$ est égal à π radians, ou de manière équivalente, le degré est une constante mathématique donnée par :

$$1° = \frac{2\pi}{260} = \frac{\pi}{180} \quad (8.2.45)$$

Ainsi, en radians, un angle plat est égal à π et tous les autres angles sont des multiples réels de cette constante.

En cours de traduction de l'anglais

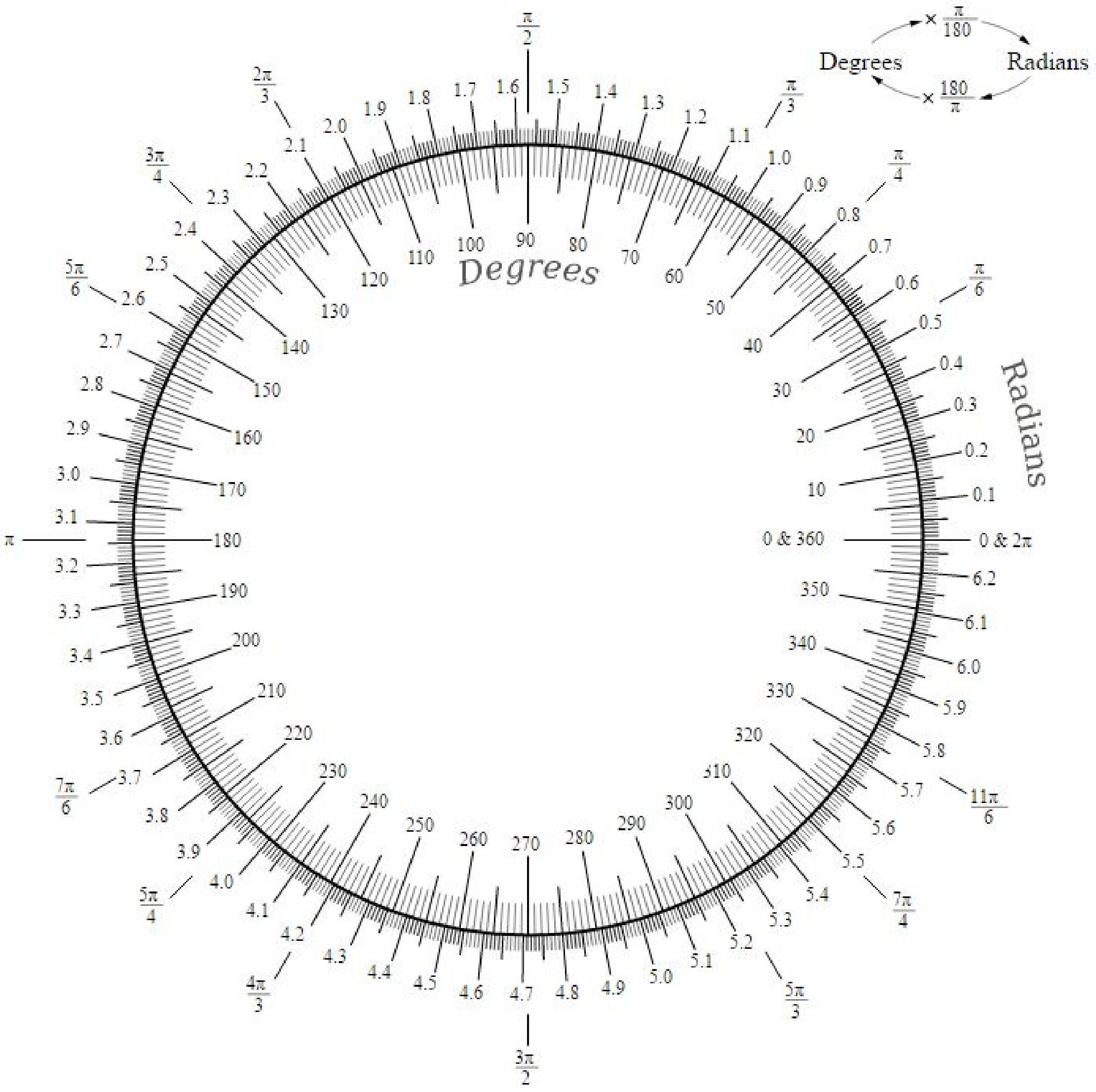


FIG. 8.56 – **Degrees-Radians conversions figure (source : Wikipedia)**

En cours ... ais

D3. Nous appelons "grad" la 200e partie d'un angle plat.

Le grade est également une ancienne unité d'angle. Ses sous-multiples sont : la "minute centésimale", égale au 100e du grade, et la "seconde centésimale", égale au 100e de la minute centésimale.

La valeur :

$$\theta = 40.184\,[\text{gr}]$$

se lit : quarante grades, dix-huit minutes, vingt-quatre secondes.

8.2.3.2.3 Bissectrice

Maintenant que nous savons comparer, additionner et mesurer des angles nous allons pouvoir nous pencher sur un concept important en géométrie qu'est celui de "bissectrice" et de quelques propriétés y relatives que nous réutiliserons plus loin pour des théorèmes importants.

Définitions (#8.2.326) :

D1. Nous appelons "bissectrice" la droite qui divise un angle en deux parties égales.

D2. Nous appelons "demi-bissectrice" la demi-droite qui divise un angle en deux parties égales.

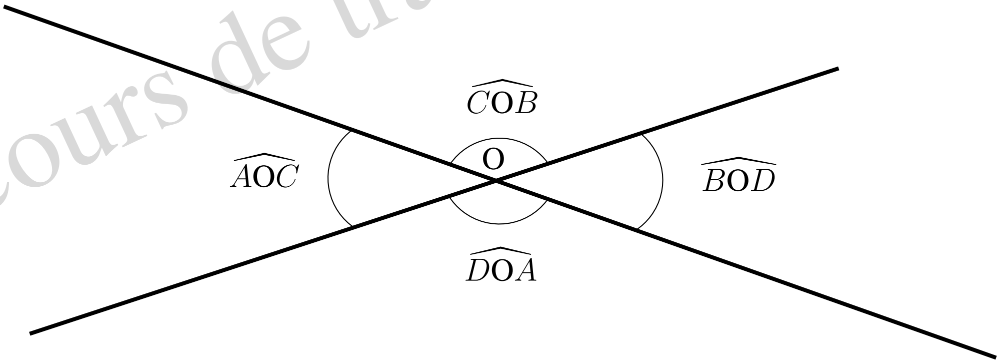
D3. Nous appelons "ligne de segment bissectric" la ligne droite (infinie) qui passe par le milieu d'un segment.

La "bissectrice perpendiculaire" d'un segment, qui, selon son nom, rencontre le segment à angle droit est particulièrement importante.

Deux droites AB et CD qui se coupent forment comme nous le savons déjà intuitivement, quatre angles :

$$\widehat{AOC}, \widehat{COB}, \widehat{BOD}, \widehat{DOA} \tag{8.2.46}$$

Les angles $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$, de même que les angles $\widehat{COB}$, $\widehat{DOA}$ dont les côtés sont opposés, sont dits "angles opposés par le sommet".



Trivialement, si θest la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$, la mesure de l'angle adjacent $\widehat{COB}$ est $\pi-\theta$. Celle de l'angle $\widehat{DOB}$ adjacent au précédent est $\pi-(\pi-\theta)$; celle de $\widehat{DOA}$ est $\pi-\theta$.

Soit OE la demi-bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$, OG celle de l'angle $\widehat{COB}$, OF celle de $\widehat{BOD}$, OH celle de $\widehat{DOA}$, nous aurons :

$$\widehat{COE}=\frac{\theta}{2} \qquad \widehat{COG}=\frac{\pi-\theta}{2} \tag{8.2.47}$$

et, par conséquent :

$$\widehat{GOE}=\frac{\pi}{2} \tag{8.2.48}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous aurions de même :

$$\widehat{GOF} = \widehat{FOH} = \widehat{HOE} = \frac{\pi}{2} \tag{8.2.49}$$

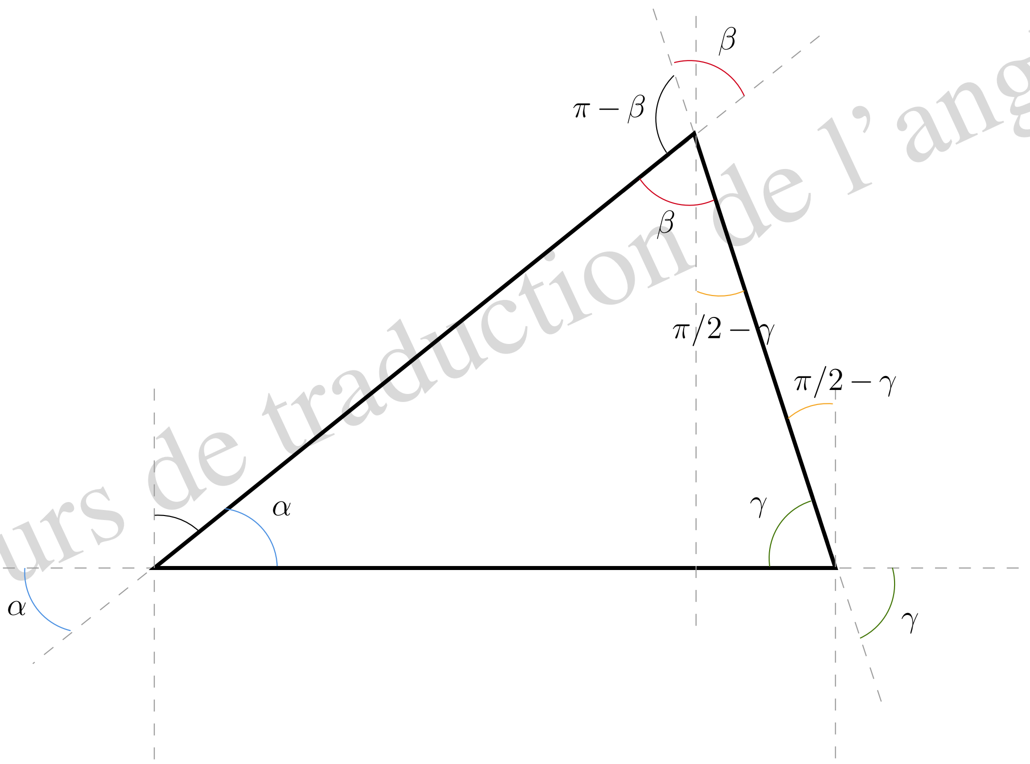
Nous résumons ainsi tous ces résultats et propriétés de mesure :

P1. Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

P2. Deux angles opposés par le sommet ont même bissectrice.

P3. Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont rectangulaires.

P4. Les bissectrices des angles formés par deux sécantes sont deux droites rectangulaires (à angle droit).



En cours de traduction de l' anglais

FIG. 8.57 – **Angles de triangle typiques utiles dans l'étude de la Statique**

8.2.3.3 Triangles

Nous avions étudié jusqu'à présent le concept de dimensions, de point, de segment, de ligne, d'angle et de plan ouvert (infini). Cependant un plan peut-être délimité par plusieurs lignes pour obtenir ainsi des formes géométriques (planes) dont les plus simples peuvent être considérées comme les triangles (pour de nombreuses autres voir la section Formes Géométriques à la page 2856).

Définition (#8.2.327) : Nous nommons "triangle" une figure (voir ci-dessous) formée de trois segments (ou lignes) AB, BC, CA, les points A, B, C n'étant pas aligné. Les segments AB, BC, CA, sont les "côtés" du triangle. Les points A, B, C sont les "sommets" du triangle. L'angle saillant $\widehat{BAC}$, qui contient tous les points de BC, est nommé angle $\hat{A}$ du triangle et BC est alors nommé le "côté opposé".

Remarque

Nous employons la notation $\hat{A}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible ; à défaut, nous utilisons la notation $\widehat{BAC}$ avec le même sens.

Il y a 6 éléments dans un triangle, à savoir : trois angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ et trois côtés finis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ qui sont plus simplement notés AB, BC, CA.

Nous désignerons par $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les longueurs des côtés mesurées avec la même unité ; par $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les mesures des angles.

Théorème 8.5. La somme des angles d'un triangle plan est toujours égale à π radians (ou $180°$). La démonstration est assez simple et est appelée "théorème de la somme des angles".

Démonstration 8.5.1. Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle quelconque, et D la parallèle à $\overline{BC}$ qui passe par A. Nous observons :

1. Les angles bleus ont même amplitude (mesure) car ils sont alternes-internes (le segment $\overline{BC}$ et la ligne D étant parallèles).
2. De même, les angles verts ont même mesure car ils sont alternes-internes.
3. Nous remarquons que la somme des angles bleu + rouge + vert sont égaux à un angle plat en A, puisque D est une droite. Donc angle bleu + angle rouge + angle vert $= 180°$.

D'après les égalités d'angles constatées en (1) et (2), nous déduisons que :

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \pi = 180° \quad (8.2.50)$$

En cours de traduction de l'anglais

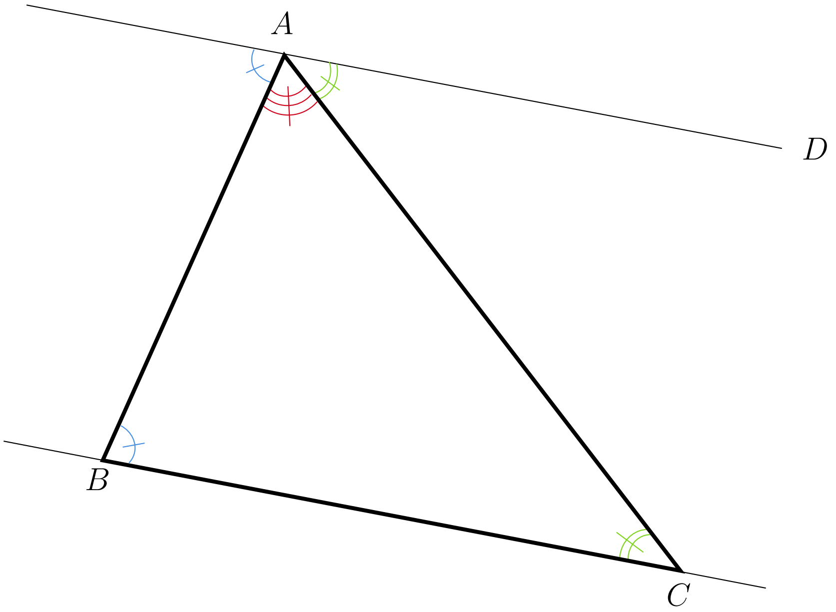


FIG. 8.58 – **Somme des angles d'un triangle plan**

Cette démonstration étant valable quel que soit le triangle tracé dans le plan.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Comme pour toutes les autres formes que nous verrons dans cette section, les calculs du périmètre et de l'aire (surface) sont donnés dans la section Formes géométriques à la page 2857.

8.2.3.3.1 Triangles Égaux (triangles congruents)

Définition (#8.2.328) : Nous disons que deux triangles sont des "triangles égaux" lorsque nous pouvons par un déplacement soit par un retournement ou les deux combinés, superposer tous les sommets du premier triangle au deuxième. Nous disons alors aussi que les triangles sont des "triangles homologues" ou "triangles isométriques".

Si un triangle ABC est congru à un triangle DEF, la relation peut s'écrire mathématiquement comme :

$$\triangle \mathrm{ABC} \cong \triangle \mathrm{DEF} \tag{8.2.51}$$

De cette définition, il résulte que deux triangles sont congruents lorsque l'une des deux propriétés suivantes est satisfaite :

P1. Ils ont un côté égal et deux angles égaux.

Démonstration 8.5.2. Nous affirmons donc que deux triangles qui ont des côtés égaux $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ entre deux angles égaux $\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$ sont égaux.

En d'autres termes, si 2 triangles ont 2 angles égaux 2 à 2, alors les 3e angles le sont aussi. Ceci étant dit nous pouvons maintenant prendre comme côté égal celui qui est situé entre 2 angles égaux sans perte de généralité.

Puisque $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ (voir figure ci-dessous), il existe un déplacement qui amène B' en B et C' en C. Ce déplacement amène A' en A_1 situé du même côté par rapport à la droite $\overline{BC}$, ou en A_2 symétrique de A_1 par rapport à cette droite.

Les deux segments (demi-droites) $\overline{BA}$ et $\overline{BA_1}$ font par hypothèse, avec $\overline{BC}$ le même angle $\hat{B}=\hat{B}'$. Comme elles sont par construction d'un même côté de $\overline{BC}$, elles sont confondues. Les deux demi-droites $\overline{CA}$ et $\overline{CA_1}$ sont confondues pour la même raison et parce que $\hat{C}=\hat{C}'$. A_1 est donc confondu avec A. Les deux triangles ABC, $A'B'C''$ sont donc égaux.

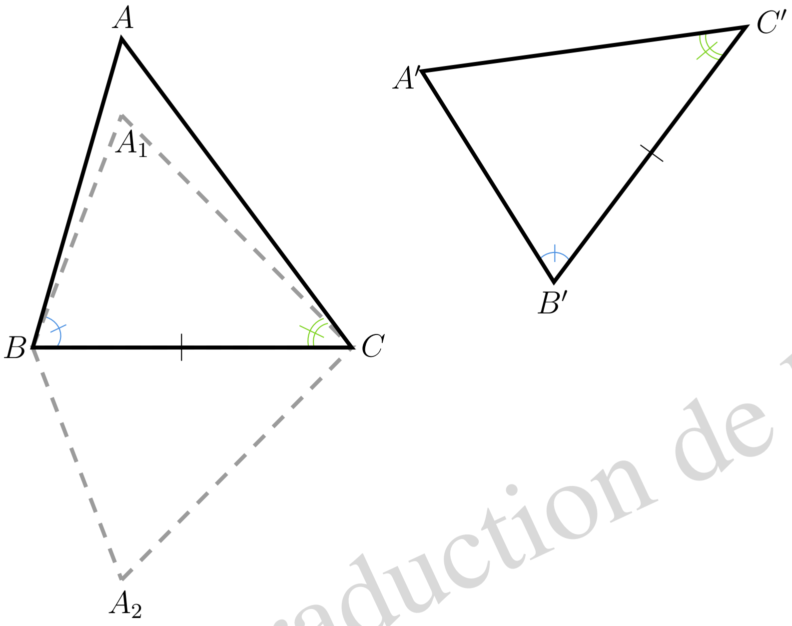


FIG. 8.59 – Deux triangles ayant côté égal et deux angles égaux

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Ce résultat est parfois nommé "théorème angle-côté-angle".

P2. Ils ont le même angle entre deux côtés de même longueur.

Démonstration 8.5.3. Nous disons donc que deux triangles d'angle égal $\hat{A}=\hat{A}'$ entre deux côtés égaux $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ et $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ sont égaux.

Puisque $AB=A'B'$ (voir figure ci-dessous) il existe un déplacement situé par rapport à $\overline{AB}$ du même côté que le point. S'il l'amenait C_2 en symétrique de C_1 par rapport à $\overline{AB}$, un demi-tour autour de $\overline{AB}$ l'amènerait en C_1. Les demi-droites (segments) $\overline{AC}$ et $\overline{AC_2}$ situées d'un même côté de $\overline{AB}$ font, par hypothèse le même angle avec $\overline{AB}$, puisque $\hat{A}=\hat{A}'$. Elles sont donc confondues. L'hypothèse $\overline{AC}=\overline{AC_1}$ entraîne alors que C_1 et C sont confondus. Les deux triangles ABC, $A'B'C'$ sont donc égaux (congruents).

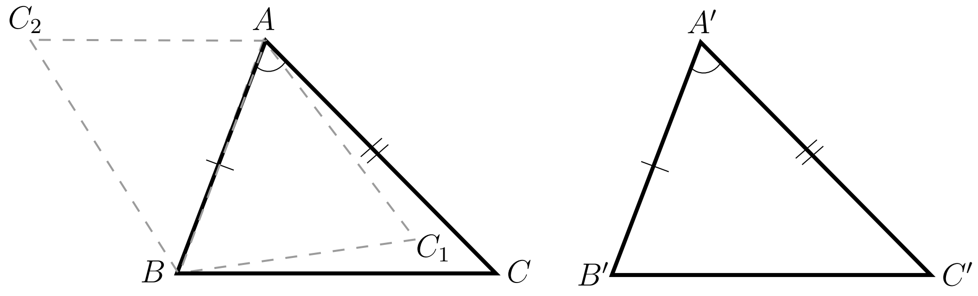


FIG. 8.60 – Déplacement montrant l'égalité des 2 triangles

■ Q.E.D.

Corollaire 8.5.1. En corollaire nous avons que deux triangles sont congruents si leurs trois côtés sont égaux. Ceci est parfois appelé "théorème CCC (côté-côté-côté)".

Concernant le dessin de symboles, il est courant de représenter divers angles égaux ou côtés égaux dans un triangle comme suivant :

En cours de traduction de l'anglais

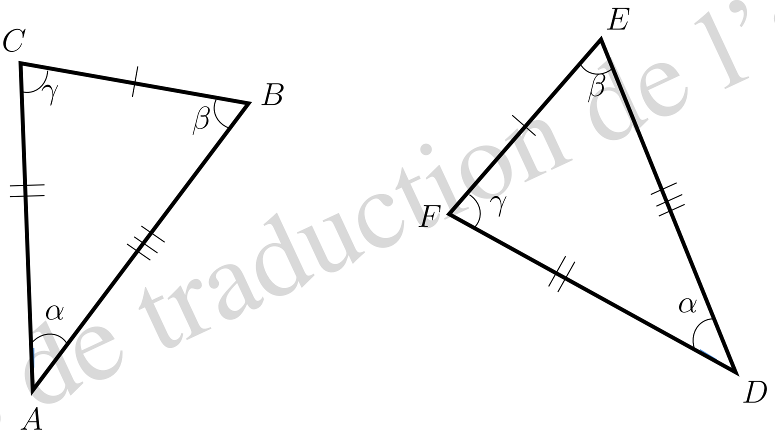


FIG. 8.61 – Première notation typique pour les triangles congruents

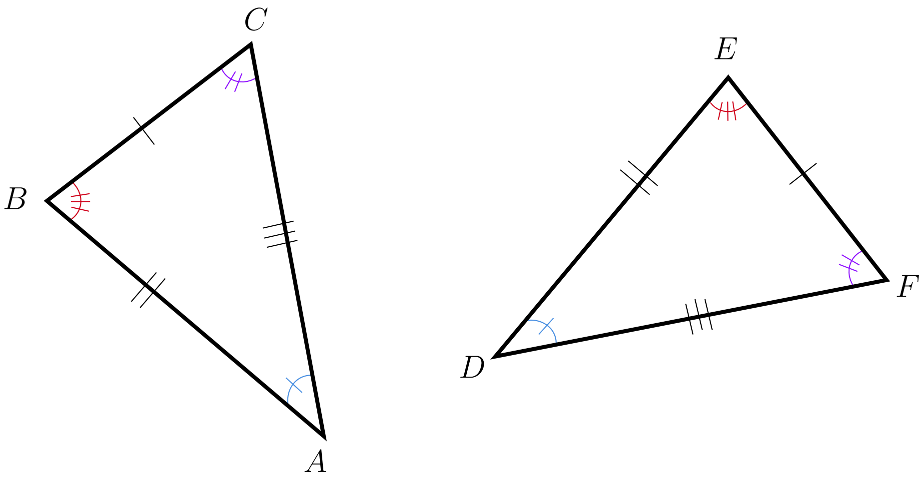


FIG. 8.62 – Deuxième notation typique pour les triangles congruents

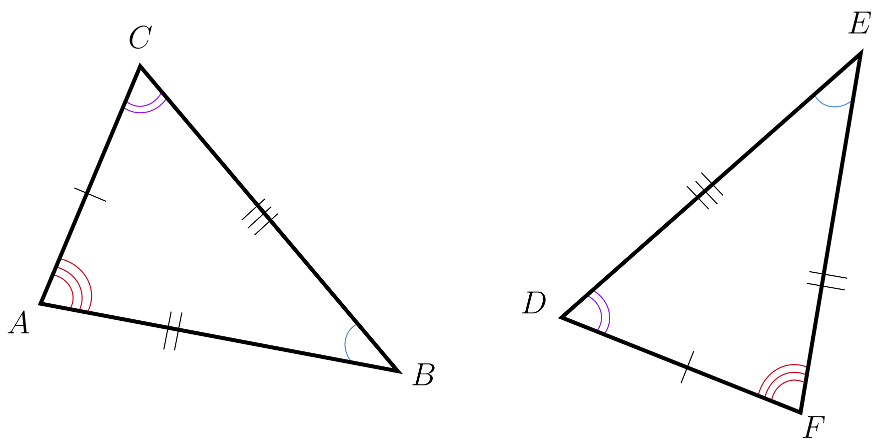


FIG. 8.63 – Troisième notation typique pour les triangles congruents

8.2.3.3.2 Triangles Isocèles

Définition (#8.2.329) : Nous disons qu'un triangle ABC est un "triangle isocèle" lorsque deux de ses côtés sont AB et AC sont égaux ("iso" signifiant "même"). Le troisième côté BC est alors appelé la "base" de ce triangle.

> **Remarque**
>
> Nous disons qu'un triangle est "scalène" quand il possède trois côtés inégaux.

Définition (#8.2.330) : Nous appelons "médiatrice" d'un segment $\overline{BC}$, la perpendiculaire à $\overline{BC}$ au point H de ce segment, milieu de $\overline{BC}$.

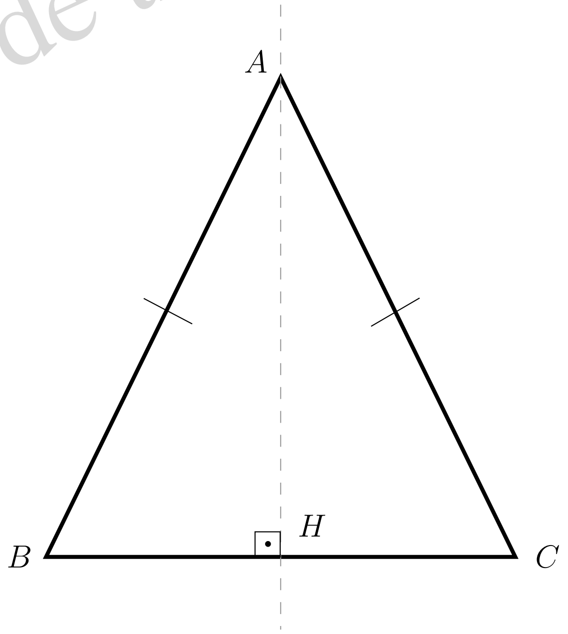


FIG. 8.64 – Représentation de la médiatrice dans un triangle isocèle

Théorème 8.6. Dans un triangle isocèle ABC comme représenté ci-dessus, les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ opposés aux côtés égaux sont égaux.

En cours de traduction de l'anglais

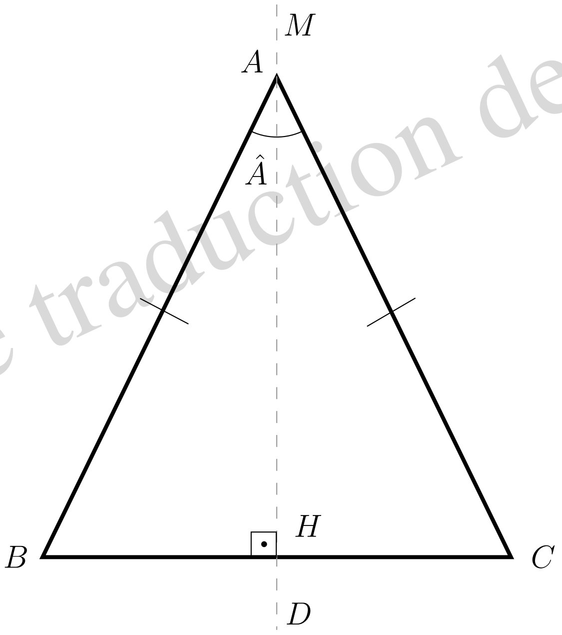
Démonstration 8.6.1. Les deux triangles (rectangles) BAH, CAH définis par la bissectrice de $\widehat{A}$ ont un angle égal $\widehat{BAH}=\widehat{CAH}$ par construction compris entre deux côtés égaux : $\overline{AH}$ qui est commun et $\overline{AB}=\overline{AC}$ par hypothèse. Comme les angles $\widehat{BHA}=\widehat{CHA}$ sont droits et égaux et que la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat (180° ou π radians), alors les angles $\widehat{HBA}$ et $\widehat{ACH}$ sont donc égaux.

■ Q.E.D.

Remarque

Cette dernière démonstration est celle à laquelle fait référence la bande-dessinée LOGICOMIX à la page 55 et c'est ce type de démonstration par induction logique qui aurait amené le jeune Bertrand Russell à s'intéresser à la logique pour devenir plus tard l'un des plus fameux logiciens de l'histoire.

Théorème 8.7. Dans un triangle isocèle ABC comme indiqué ci-dessus, la médiatrice de $\overline{BC}$ et la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ coïncident (figure ci-dessous).



En cours de traduction de l'anglais

En d'autres termes, le lieu des points équidistants M (à même distance) entre deux points donnés B et C est donné par la bissectrice (D) du segment $\overline{BC}$.

Remarque

En géométrie, un "lieu géométrique" est un ensemble de points (généralement, une ligne, un segment de ligne, une courbe ou une surface), dont l'emplacement satisfait ou est déterminé par une ou plusieurs conditions spécifiées.. Plus formellement on appelle "lieu géométrique" d'un point M, soumis à certaines contraintes (conditions), toutes les positions occupées par ce point M qui satisfont encore aux contraintes (conditions).

Démonstration 8.7.1. Nous prouverons d'abord que tout point du lieu géométrique est sur la droite (D) et ensuite que tout point de (D) est un point du lieu.

1. Tout point du lieu est sur la droite (D) :

   Autrement dit, l'hypothèse dans la figure ci-dessus, que $\overline{MB} = \overline{MC}$ entraîne que M est la médiatrice de $\overline{BC}$. En effet, si $\overline{MB} = \overline{MC}$, le triangle MBC est isocèle et le sommet M est sur la médiatrice de $\overline{BC}$ (cela coincide comme nous le savons avec la bissectrice).

2. Tout point de (D) est un point du lieu géométrique :

   Ce qui revient à dire que si M est sur la médiatrice de $\overline{BC}$, nous avons $\overline{MB} = \overline{MC}$. En effet, si M est sur la droite (D) qui rencontre en H, milieu de $\overline{BC}$, la droite BC, les triangles MHB, MHC sont égaux (deuxième cas d'égalité : $\widehat{BHM} = \widehat{CHM}$ parce que ces angles sont droits, $\overline{HM}$ commun ; $\overline{HB} = \overline{HC}$ parce que H est le milieu de $\overline{BC}$) : les côtés $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ sont donc égaux et nous avons bien $\overline{MB} = \overline{MC}$. Le point M est donc bien un point du lieu géométrique.

■ Q.E.D.

A l'aide de ce théorème nous pouvons en énoncer un second :

Théorème 8.8. Par un point A pris hors d'une droite $\overline{BC}$, nous pouvons mener à cette droite une seule et unique perpendiculaire (ou en d'autres termes : pour un point donnée en dehors d'une certaine ligne nous pouvons dessiner une seule et unique ligne perpendiculaire).

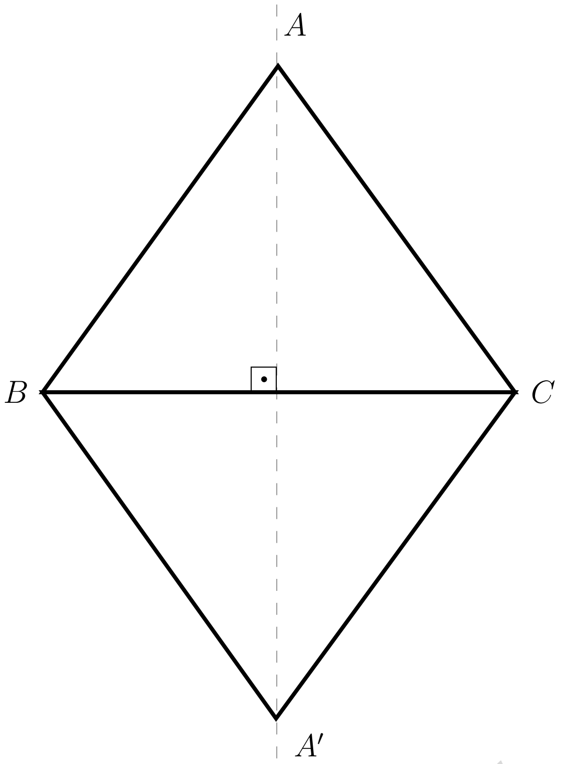
C'est un équivalent au cinquième postulat d'Euclide et une façon de construire un triangle isocèle puisque le sommet est sur la perpendiculaire de la base.

Démonstration 8.8.1. La démonstration est faite en deux étapes :

1. Il existe une ligne perpendiculaire :

   En effet, étant donné un triangle ABC, soumettons ce triangle à un demi-tour autour de BC (symétrie horizontale) comme dans la figure ci-dessous :

En cours de traduction de l'anglais



Le sommet A vient en A' symétrique par définition, par rapport à $\overline{BC}$. Puisque les figures, ABC et $A'BC$ sont égaux, $\overline{AB} = \overline{A'B}$ et $\overline{AC} = \overline{A'C}$.

$\overline{BC}$ est donc la médiatrice de $\overline{AA'}$ et les droites $\overline{BC}$ et $\overline{AA'}$ sont perpendiculaires. $\overline{AA'}$ est donc bien une perpendiculaire à $\overline{BC}$ menée par A.

2. La droite perpendiculaire est unique :

   Soit $\overline{AH}$ une perpendiculaire menée de A à $\overline{BC}$, elle rencontre la droite $\overline{BC}$ en un point H qui est différent soit de B, soit de C.

   Supposons que H soit différente de B. Les angles $\widehat{AHB}$, $\widehat{A'HB}$ qui se déduisent l'un de l'autre par retournement, sont égaux, et, comme chacun d'eux est droit, l'angle $\widehat{AHA'}$ est plat. Le segment $\overline{AH}$ est confondu avec le segment $\overline{AA'}$ et est donc bien la seule perpendiculaire à $\overline{BC}$ qui passe par le sommet A.

■ Q.E.D.

Définitions (#8.2.331) :

D1. Nous appelons "projection orthogonale" d'un point A sur une droite $\overline{BC}$ le point H où la perpendiculaire menée par A à cette droite la rencontre. Le point H s'appelle aussi "pied" de cette perpendiculaire.

Nous avons étudié la version vectorielle de cette projection dans la section de Calcul Vectoriel et qu'elle était notée $\text{proj}_{\overline{BC}}A$.

D2. Nous appelons "distance géométrique" du point A au segment $\overline{BC}$ la longueur du segment $\overline{AH}$.

En cours de traduction de l'anglais

Puisque dans la figure précédente $\overline{BC}$ est la médiatrice de $\overline{AA'}$, H est le milieu de $\overline{AA'}$; donc : Un point A et son symétrique A' par rapport à une droite (D) sont caractérisés par les deux propriétés suivantes que nous ne démontrerons pas car suffisamment intuitives :

P1. $\overline{AA'}$ est perpendiculaire (D)

P2. Le milieu de $\overline{AA'}$ est sur (D)

Le segment $\overline{AB}$, qui joint le sommet A à un point du segment $\overline{BC}$, autre que le pied H de la perpendiculaire menée de A à cette droite, s'appelle "droite oblique". Le point B s'appelant "pied d'oblique".

8.2.3.3.3 Triangles Équilatéreux

Définition (#8.2.332) : Un triangle ABC est dit "triangle équilatéral" lorsque ses trois côtés sont égaux. Dans la géométrie euclidienne familière, les triangles équilatéraux sont également équiangulaires ; c'est-à-dire que les trois angles internes $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sont également congrus entre eux et sont chacun égaux à $\pi/3$ (60°). Ce sont des polygones réguliers (voir définition plus bas), et peuvent donc également être appelés "triangles réguliers" :

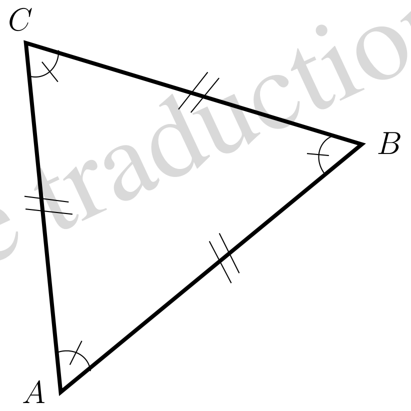


FIG. 8.65 – **Exemple de triangle équilatéral**

Comme pour toutes les autres formes que nous verrons dans cette section, le calcul du périmètre et de l'aire (surface) est donné dans la section Formes Géométriques à la page 2856.

8.2.3.3.4 Triangles Rectangles

Définition (#8.2.333) : Un "triangle rectangle" ou « triangle à angle droit" est un triangle dont un angle est un angle droit (c'est-à-dire un angle de 90° ou $\pi/2$ [rad]). La relation entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle est la base de la trigonométrie !

Le côté opposé à l'angle droit est appelé "hypoténuse" (côté c sur la figure). Les côtés adjacents à l'angle droit sont appelés "jambes". Le côté a peut être identifié comme "le côté adjacent à l'angle $\hat{B}$" et "opposé à (ou opposé à) l'angle $\hat{C}$", tandis que le côté b est le côté adjacent à l'angle $\hat{C}$ et opposé à l'angle $\hat{B}$.

En cours de traduction de l'anglais

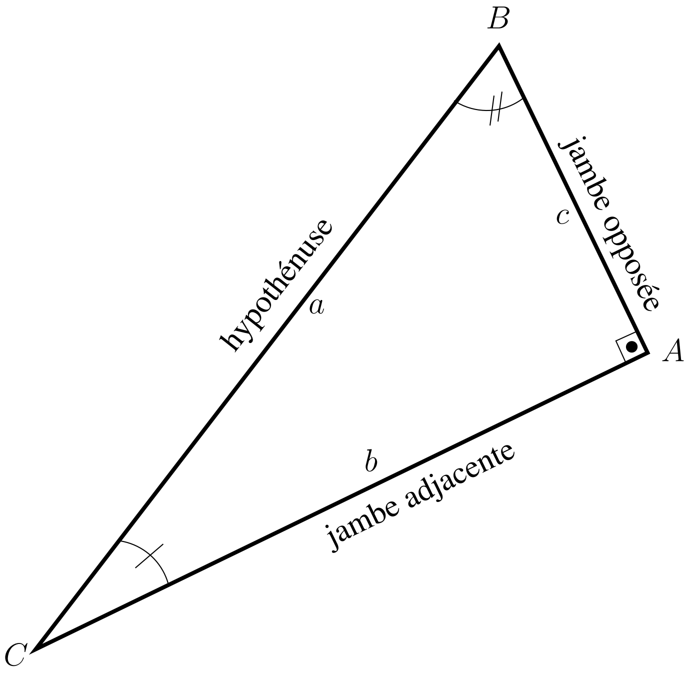


FIG. 8.66 – **Exemple de triangle rectangle**

Dire que le triangle est rectangle en A signifie que c'est en $\hat{A}$ que se trouve l'angle droit.

Une autre représentation assez courante d'un triangle rectangle dans les manuels de niveau collège est :

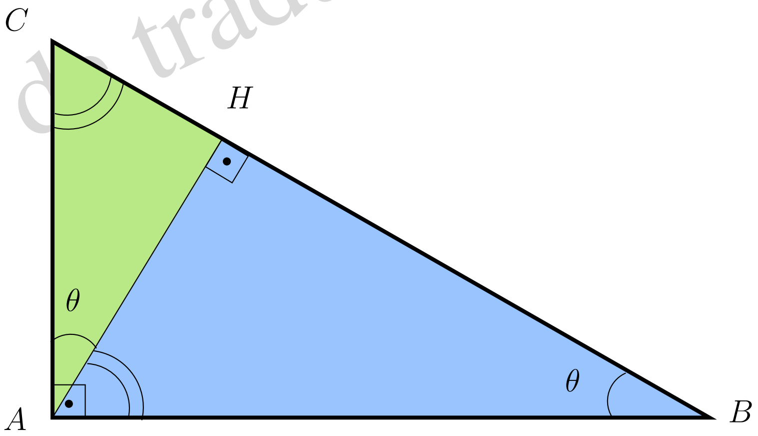


FIG. 8.67 – **Une autre représentation bien connue du triangle rectangle**

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Dans un triangle rectangle, le côté le plus grand est toujours le côté opposé à l'angle droit. Nous démontrons cette propriété avec le théorème de Pythagore (voir plus bas).

8.2.3.3.5 Triangles Rectangles-Isocèles

Définition (#8.2.334) : Un "triangle rectangle-isocèle" ABC est à la fois rectangle et isocèle, ce qui signifie qu'il a à la fois un angle droit et deux côtés de même longueur.

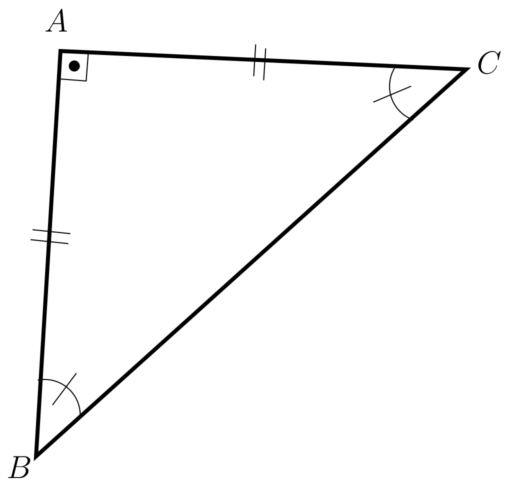


FIG. 8.68 – Exemple de triangle rectangle-isocèle

Le sommet principal (apex) correspond à l'angle droit. En effet, comme $\overline{BC}$, l'hypoténuse, doit être le côté le plus grand, ce sont les côtés $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ qui ont même longueur (plus petite).

Ainsi, pour résumer :

En cours de traduction de l' anglais

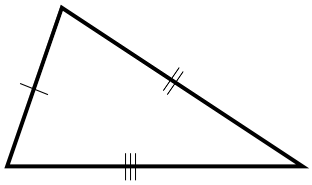
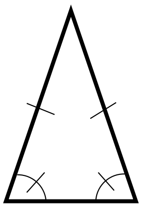
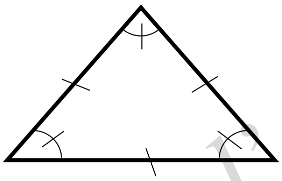
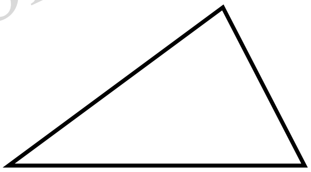
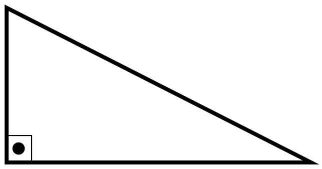
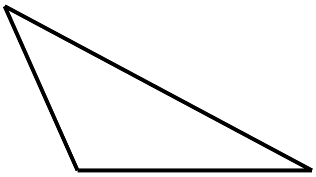
Basés sur les côtés	
Triangle scalène Les trois côtés ont des longueurs différentes. Ses angles sont également tous différents.	
Triangle isocèle Deux côtés ont des longueurs égales. Deux de ses angles sont également égaux.	
Triangle équilatéral (équiangulaire) Les trois côtés sont de même longueur. Les trois angles sont égaux (60°)	
Basés sur les angles	
Triangle aigu Tous les angles sont inférieurs à (90°)	
Triangle rectangle A un angle droit (90°)	
Triangle obtus A un angle à plus de 90°	

FIG. 8.69 – **Classification des triangles plans**

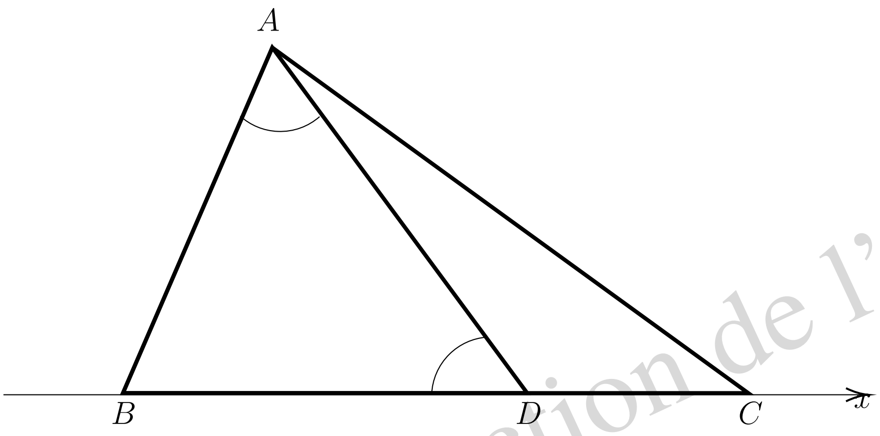
En cours de traduction de l'anglais

8.2.3.3.6 Inégalités dans les triangles

Voyons maintenant quelques inégalités (propriétés) intéressantes dans le triangle.

P1. Démontrons d'abord que dans tout triangle, un côté opposé à un angle droit ou obtus (supérieur à 90° donc ou $\pi/2$ [rad]...) est supérieur à chacun des deux autres côtés du triangle.

Démonstration 8.8.2. Considérons le triangle ABC ci-dessous dans lequel $\hat{A} \geq \pi/2$ et soit Cx le prolongement du côté $\overline{BC}$. Portons, sur la demi-droite Bx, une longueur $\overline{BD} = \overline{BA}$ pour construire un triangle isocèle dans le triangle initial :



Le triangle BAD est donc un triangle isocèle de base AD dont l'angle à la base BAD est bien évidemment aigu (inférieur à 90° ou $\pi/2$ [rad]).

Donc par construction $\widehat{BAD} < \widehat{BAC}$. La droite $\overline{AD}$ est intérieure par construction à l'angle $\widehat{BAC}$ et par suite :

$$\overline{BC} > \overline{BD} \qquad (8.2.52)$$

et comme $\overline{BD} = \overline{BA}$ par construction nous avons donc :

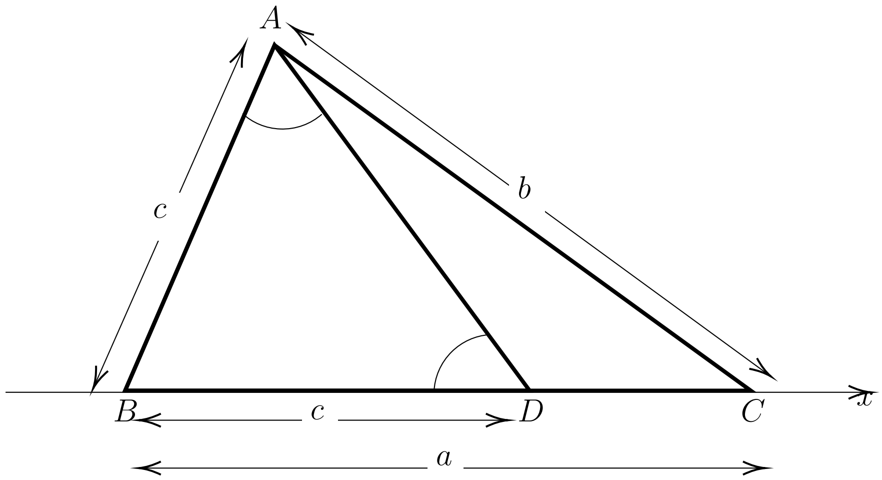
$$\overline{BC} > \overline{BA} \qquad (8.2.53)$$

Ce qui termine notre démonstration. Car la démarche est la même pour montrer que $\overline{BC} > \overline{CA}$.

■ Q.E.D.

P2. Dans tout triangle dont les côtés ont des longueurs strictement croissantes, un côté est toujours inférieur à la somme des deux autres.

En cours de traduction de l'anglais



Démonstration 8.8.3. Soit D le point du côté $\overline{BC}$ tel que soient les côtés $\overline{BD} = \overline{BA} = c$ du triangle isocèle construit ABD. Nous obtenons :

$$\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD} = a - c \tag{8.2.54}$$

Le triangle ABD étant isocèle, l'angle à la base $\widehat{ADB}$ est aigu et son supplément $\widehat{ADC}$ est obtus. Dans le triangle ADC, nous obtenons d'après la propriété P1 précédente que $\overline{DC} < \overline{CA}$, c'est-à-dire :

$$a - c < b \tag{8.2.55}$$

où :

$$a < b + c \tag{8.2.56}$$

il s'agit de la fameuse "inégalité triangulaire" sous forme géométrique. Nous la retrouverons dans de nombreux autres sections de ce livre dans des espaces et des concepts mathématiques plus abstraits.

La propriété est alors immédiate pour les autres côtés b et c par permutation de la méthode :

$$\begin{aligned} a &< b + c \\ b &< a + c \\ c &< a + b \end{aligned} \tag{8.2.57}$$

■ Q.E.D.

P3. Dans tout triangle un côté quelconque est supérieur à la différence des deux autres.

Démonstration 8.8.4. Supposons que nous ayons $a > b > c$. Donc nous avons aussi :

$$a + c > b \tag{8.2.58}$$

En retranchant c aux deux membres de l'inégalité donne :

$$a > b - c \tag{8.2.59}$$

En cours de traduction de l'anglais

La propriété est alors immédiate pour les autres côtés b et c par permutation de la méthode :

$$a > b - c \quad (8.2.60)$$
$$b > a - c \quad (8.2.61)$$
$$c > a - b \quad (8.2.62)$$

En définitive puisque :

$$a > b - c \quad \text{et} \quad a < b + c \quad (8.2.63)$$

pour tout triangle à côtés croissants nous avons :

$$\boxed{b - c < a < b + c} \quad (8.2.64)$$

■ Q.E.D.

8.2.3.3.7 Lignes intérieures remarquables des triangles

Un petit résumé sur les lignes intérieures remarquables des triangles est probablement nécessaire à ce stade (avant de continuer sur d'autres théorèmes des triangles) pour éviter si possible trop de confusion car nous avons donné beaucoup de définitions jusqu'à présent :

- La "bissectrice perpendiculaire" d'un segment est la ligne qui est perpendiculaire au segment et qui passe par son centre.
- La "hauteur" ou "altitude" d'un triangle est une ligne qui passe par un sommet du triangle et qui intercepte l'arête opposée à angle droit.
- La "bissectrice d'angle" d'un angle est la ligne semi-droite qui divise l'angle en deux angles égaux.
- La "médian" d'un triangle passe par un sommet et intercepte le bord opposé en son centre.
- La "médiatrice" est la ligne perpendiculaire au point de croisement de la médiane.

En cours de traduction de l' anglais

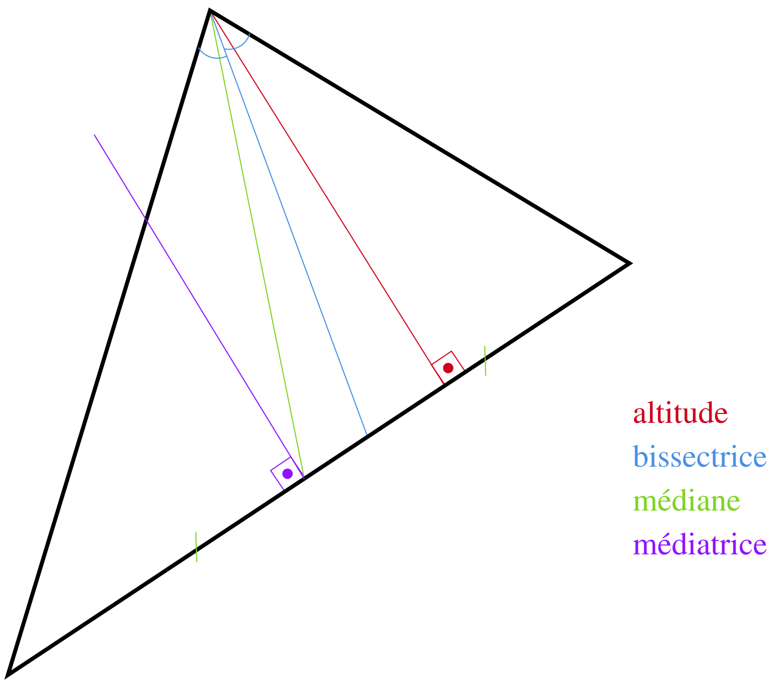


FIG. 8.70 – **Bissectrices, médiane, médiatrice et hauteur dans un triangle**

En cours de traduction de l'anglais

De toute évidence, dans certaines géométries, une partie de toutes les lignes ci-dessus ne sont pas discernables.

Dans un triangle :

- L'intersection de 3 altitudes est nommée "l'orthocentre".
- L'intersection de 3 médianes est appelée le "centroïde".
- L'intersection de 3 bissectrices d'angle est le "centre du cercle inscrit".
- L'intersection de 3 bissectrices perpendiculaires est le "centre du cercle circonscrit".

8.2.3.3.8 Théorème de Pythagore

Maintenant que nous avons vu ce qu'était le triangle et certaines de ses propriétés ainsi que le concept d'angle, nous pouvons démontrer le fameux "théorème de Pythagore" qui donne donc la relation que doivent satisfaire trois nombres qui représentent les côtés d'un triangle rectangle et faire de la trigonométrie du cercle (voir section Trigonométrie page 2491).

Théorème 8.9. Le carré de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Le théorème a fait l'objet de nombreuses démonstrations différentes - probablement le plus grand nombre de démonstrations pour un théorème mathématique. Elles sont très diverses, comprenant à la fois des démonstrations géométriques et des démonstrations algébriques, certaines datant de plusieurs milliers d'années. Le théorème peut être généralisé de diverses manières, y compris aux espaces de dimensions supérieures, aux espaces qui ne sont pas euclidiens, aux objets qui ne sont pas des triangles rectangles et, en fait, aux objets qui ne sont pas du tout des triangles, mais des solides de dimension n.

Parmi toutes les preuves possibles, nous avons choisi de présenter la suivante car elle nous semblait la plus simple pour les lecteurs (principalement les étudiants dans ce cas) :

Démonstration 8.9.1. Soit un carré (polygone à quatre angles droits) à l'intérieur duquel est inscrit un autre carré de côtés plus petits. Nous pouvons calculer la surface du carré inscrit grâce aux triangles rectangles résultant des espaces vides entre les deux carrés tels que présentés ci-dessous :

En cours de traduction de l'anglais

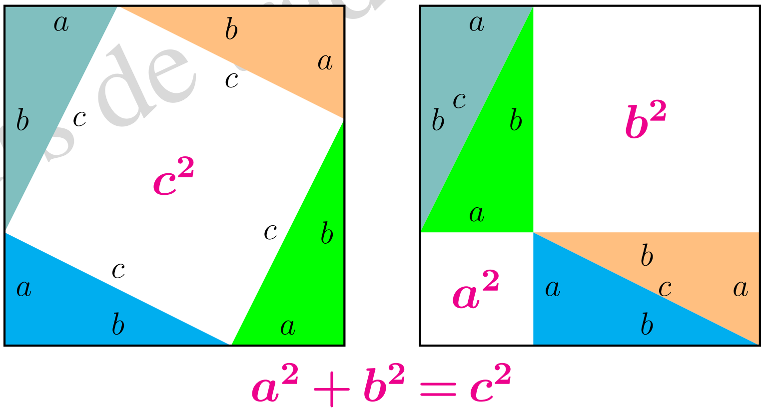


FIG. 8.71 – **Théorème de Pythagore illustré**

La surface de l'ensemble du carré est évidemment :

$$S=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{8.2.65}$$

et celui du carré blanc :

$$S=c^2 \tag{8.2.66}$$

Pour obtenir la surface du carré blanc nous pouvons soustraire du carré entier la surface des quatre triangles rectangles ayant chacun pour surface (voir section Formes Géométriques page

2865) :

$$S_{\Delta}=\frac{ab}{2} \tag{8.2.67}$$

La surface du carré blanc est bien sûr :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2-4\frac{ab}{2}=a^2+b^2=c^2 \tag{8.2.68}$$

Nous obtenons alors le résultat final du fameux "théorème de Pythagore" :

$$\boxed{a^2+b^2=c^2} \tag{8.2.69}$$

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit[2].

■ Q.E.D.

Dans le cas particulier où nous avons trois entiers a, b et c qui satisfont le théorème de Pythagore (il existe une infinité de combinaisons d'entiers satisfaisant le théorème de Pythagore), alors nous parlons de "triplet pythagoricien".

Remarque

C'est au chinois Tchao Kiung K'ing au 102e siècle (calendrier holocène) que nous devrions cette démonstration.

Il est souvent fait mention dans les petites classe de la réciproque du théorème de Pythagore qui nous dit : Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des 2 autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'hypoténuse sera alors le plus long côté du triangle.

En cours de traduction de l'anglais

8.2.3.3.9 Théorème de Thalès

Le "théorème de Thalès" (à ne pas confondre avec un autre théorème du même nom), est un théorème important de la géométrie élémentaire sur les rapports de divers segments de droite qui sont créés si deux droites qui se croisent sont interceptées par une paire de parallèles.

Ayant juste démontré le théorème de Pythagore et maintenant que les concepts de parallèles, segments, angles et autres nous sont connus, nous pouvons enfin démontrer le théorème de Thalès dont voici une possible démonstration qui nécessite d'abord le développement de deux lemmes :

Lemme 8.9.1. Triangles avec mêmes surfaces : Si deux triangles ont un côté commun et si les troisièmes sommets sont parallèles à ce côté commun, alors ils ont la même surface !

[2]Les historiens modernes semblent s'accorder sur le fait que Pythagore de Samos n'a jamais existé réellement (comme Homère, Adam, Ève, Moïse, Noé, Jésus, etc.), c'est pourquoi vous ne trouverez pas d'entrée à son sujet dans la section Biographies. Le théorème de Pythagore était également connu et utilisé par les Babyloniens et les Indiens des siècles avant Pythagore, mais il a peut-être été le premier à l'introduire auprès des Grecs

Démonstration 8.9.2. Soit la figure :

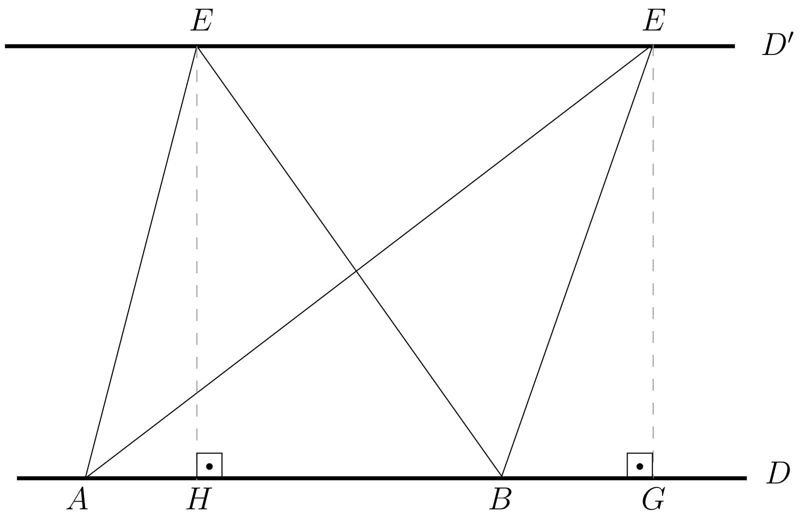


FIG. 8.72 – **Première construction pour la démonstration du théorème de Thalès**

Nous avons :

$$D//D' \tag{8.2.70}$$

$$\overline{EH} \perp D \tag{8.2.71}$$

$$\overline{FG} \perp D \tag{8.2.72}$$

$EFGH$ est un rectangle car ses côtés sont parallèles deux à deux et il a au moins deux angles droits. Donc ses côtés opposés ont même longueur : $\overline{EH} = \overline{FG}$.

$\overline{EH}$ est la hauteur relative à $\overline{AB}$ dans le triangle EAB et $\overline{FG}$ est la hauteur relative à $\overline{AB}$ dans le triangle FAB.

La surface du triangle ne dépend que de la longueur du côté et de la longueur de la hauteur relative à ce côté (voir section Formes Géométriques page 2865). Pour les deux triangles EAB et FAB, ces longueurs sont égales, donc ils ont la même surface !

Nous avons donc que si deux triangles ont un côté commun et si les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté commun, alors ils ont la même surface !

■ Q.E.D.

Lemme 8.9.2. Nous avons :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \tag{8.2.73}$$

Démonstration 8.9.3. Soit le rapport de proportions ("calcul proportionnel" ou "produit en croix") :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \tag{8.2.74}$$

En cours de traduction de l’anglais

alors :

$$ad = bc \tag{8.2.75}$$

Si $ad = bc$, alors :

$$ad + cd = bc + cd \tag{8.2.76}$$

où nous nous avons ajouté un même nombre positif ou négatif aux deux membres de l'égalité. D'où après factorisation :

$$d(a + c) = c(b + d) \tag{8.2.77}$$

et en appliquant inversement la règle des produits en croix :

$$\boxed{\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}} \tag{8.2.78}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Exposons maintenant en quoi consiste le théorème de Thalès :

Théorème 8.10. Si deux lignes sécantes sont coupées par des lignes parallèles, les segments de ligne coupés par les lignes parallèles de l'une des lignes sont proportionnels aux segments de ligne correspondants coupés elles par l'autre ligne et de cela nous pouvons également en déduire d'autres identités remarquables.

Démonstration 8.10.1. Soit la figure :

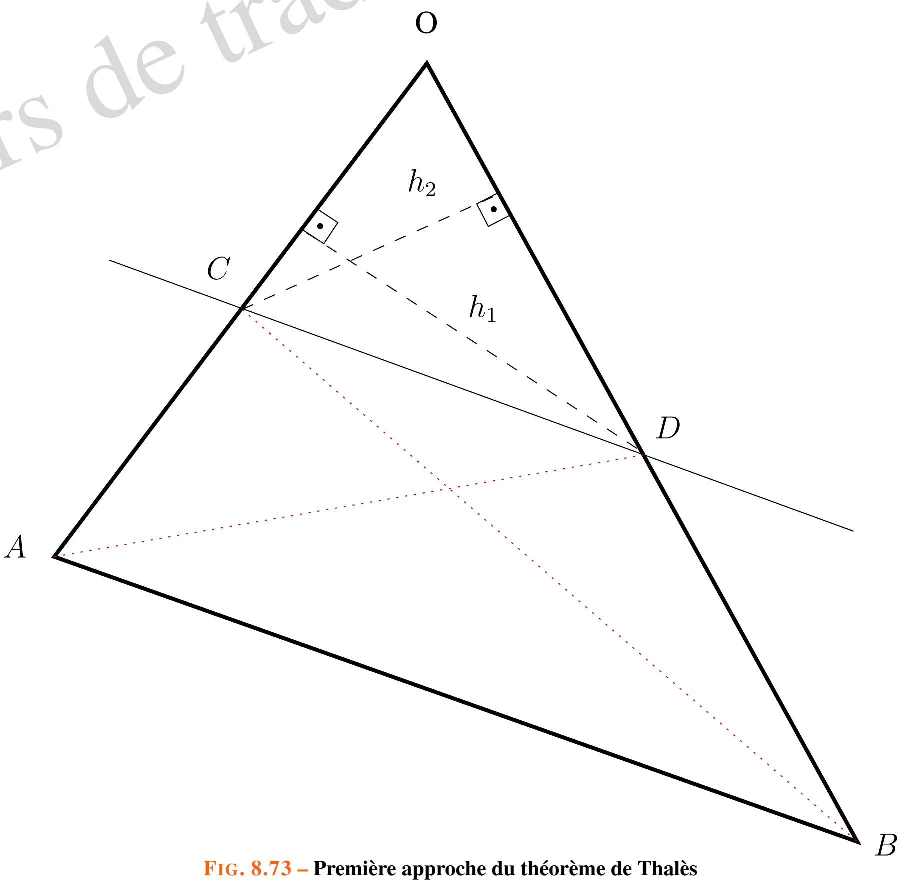


FIG. 8.73 – **Première approche du théorème de Thalès**

Avec :

$$\overline{AB}//CD \quad (8.2.79)$$
$$h_1 \perp \overline{\text{O}A} \quad (8.2.80)$$
$$h_2 \perp \overline{\text{O}B} \quad (8.2.81)$$

Nous avons montré précédemment que si deux triangles ont un côté commun et si les troisièmes sommets sont sur une parallèle, alors ils ont la même surface. Donc les triangles ΔACD et ΔBCD ont la même surface.

En ajoutant à chacune de ces deux surfaces celle du triangle $\Delta \text{O}CD$, nous obtenons que les triangles $\Delta \text{O}DA$ et $\Delta \text{O}CB$ ont la même surface !

Nous en déduisons qu'en utilisant à nouveau le rapport en croix :

$$\frac{S_{\Delta \text{O}CD}}{S_{\Delta \text{O}AD}} = \frac{S_{\Delta \text{O}CD}}{S_{\Delta \text{O}CB}} \quad (8.2.82)$$

Soit h_1 la hauteur issue de D dans le triangle $\Delta \text{O}CD$ et la hauteur h_2 issue de C dans le triangle $\Delta \text{O}CD$:

$$\frac{S_{\Delta \text{O}CD}}{S_{\Delta \text{O}AD}} = \frac{\overline{\text{O}C}\frac{h_1}{2}}{\overline{\text{O}A}\frac{h_1}{2}} = \frac{\overline{\text{O}C}}{\overline{\text{O}A}} \quad \text{et} \quad \frac{S_{\Delta \text{O}CD}}{\Delta S_{\text{O}CB}} = \frac{\overline{\text{O}D}\frac{h_2}{2}}{\overline{\text{O}B}\frac{h_2}{2}} = \frac{\overline{\text{O}D}}{\overline{\text{O}B}} \quad (8.2.83)$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{\overline{\text{O}C}}{\overline{\text{O}A}} = \frac{\overline{\text{O}D}}{\overline{\text{O}B}}} \quad (8.2.84)$$

Soit maintenant la figure :

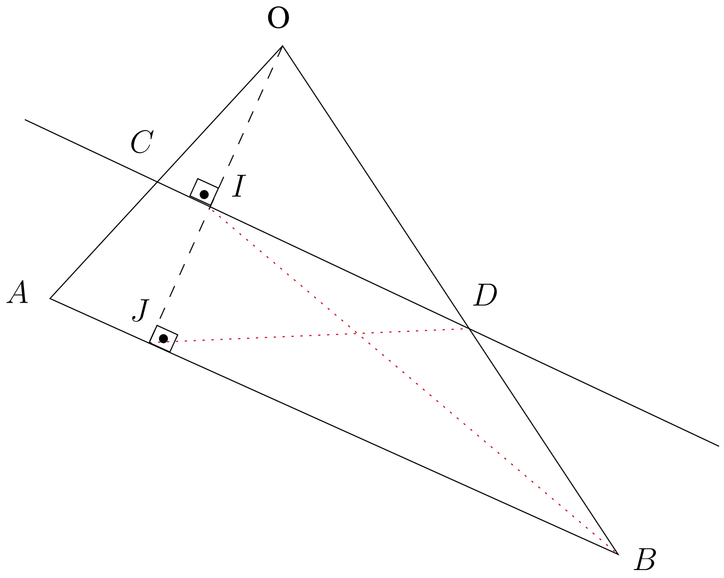


FIG. 8.74 – Deuxième approche du théorème de Thalès

En cours de traduction de l'anglais

Les triangles ΔIJD et ΔIDB ont la même surface d'après le premier lemme, de même pourles triangles $\Delta \mathrm{O}JD$ et $\Delta \mathrm{O}IB$ donc :

$$S_{\Delta \mathrm{O}JD} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{O}J}\cdot\overline{DI} \qquad S_{\Delta \mathrm{O}IB} = \frac{\overline{\mathrm{O}J}\cdot\overline{JB}}{2} - \frac{\overline{JI}\cdot\overline{JB}}{2} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{O}I}\cdot\overline{BJ} \tag{8.2.85}$$

d'où :

$$\overline{\mathrm{O}J}\cdot\overline{DI} = \overline{\mathrm{O}I}\cdot\overline{BJ} \tag{8.2.86}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{\overline{\mathrm{O}I}}{\overline{\mathrm{O}J}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{BJ}}} \tag{8.2.87}$$

De la même manière dans les triangles $\Delta \mathrm{O}IA$ et $\Delta \mathrm{O}CJ$, nous obtenons :

$$\frac{\overline{\mathrm{O}I}}{\overline{\mathrm{O}J}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AJ}} \tag{8.2.88}$$

D'après le deuxième lemme comme :

$$\boxed{\frac{\overline{\mathrm{O}I}}{\overline{\mathrm{O}J}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AJ}}} \tag{8.2.89}$$

Alors :

$$\frac{\overline{\mathrm{O}I}}{\overline{\mathrm{O}J}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{DI}+\overline{CI}}{\overline{BJ}+\overline{AJ}} = \frac{\overline{D}}{\overline{BA}} \tag{8.2.90}$$

En appliquant au triangle $\Delta \mathrm{O}JB$, ce que nous avons fait selon la première approche, nous avons aussi :

$$\frac{\overline{\mathrm{O}I}}{\overline{\mathrm{O}J}} = \frac{\overline{\mathrm{O}D}}{\overline{\mathrm{O}B}} \tag{8.2.91}$$

Donc finalement en reprenant tous les résultats obtenus :

$$\boxed{\frac{\overline{\mathrm{O}I}}{\overline{\mathrm{O}J}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{\mathrm{O}D}}{\overline{\mathrm{O}B}}} \tag{8.2.92}$$

qui constitue le "théorème de Thalès" des rapports (ratios).

■ Q.E.D.

Voici un excellent résumé de ce que nous avons vu jusqu'à présent sur le théorème de Thalès :

En cours de traduction de l'anglais

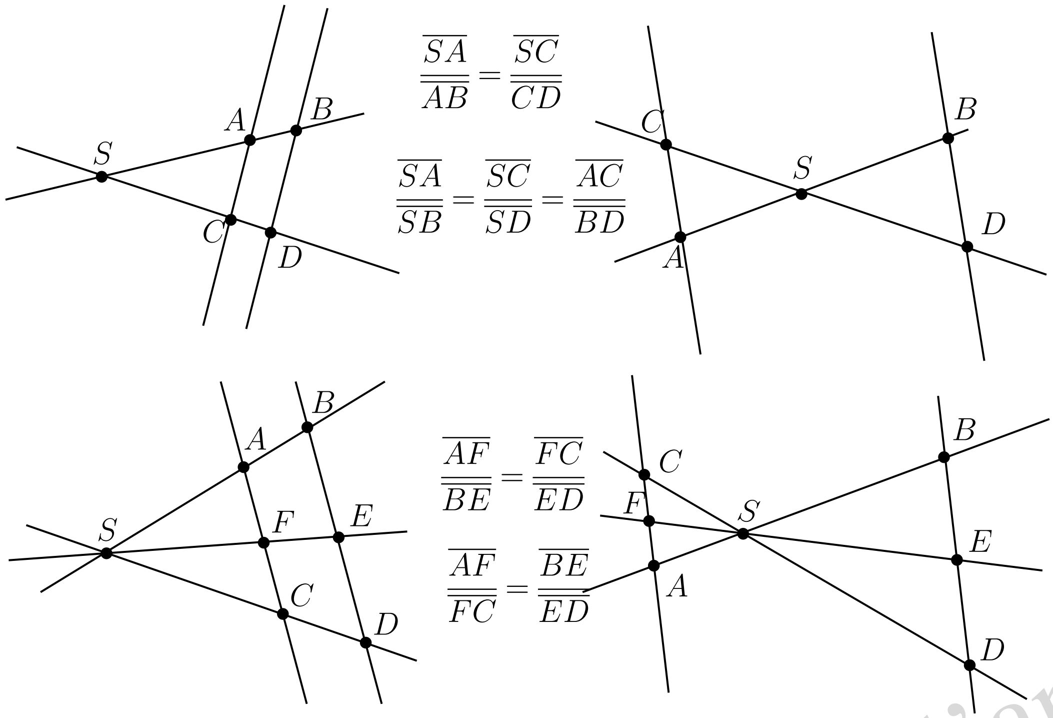
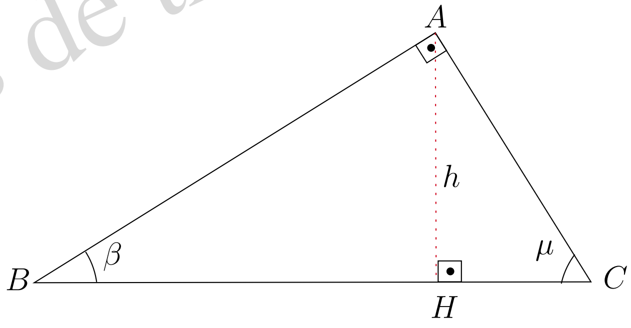


FIG. 8.75 – Les théorèmes de Thalès (source : Wikipédia)

En cours de traduction de l'anglais

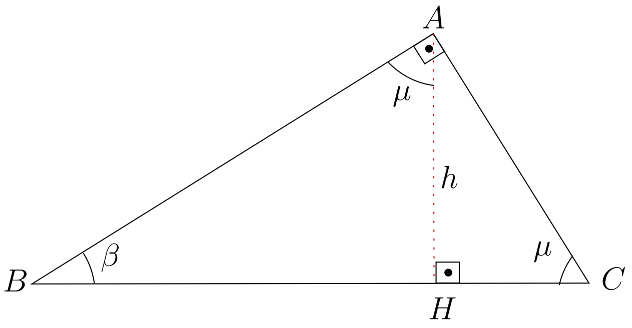
8.2.3.3.9.1 Théorème d'Euclide (du triangle)

Le théorème d'Euclide utilise le théorème de Thalès pour donner une relation dans le triangle rectangle ci-dessous :

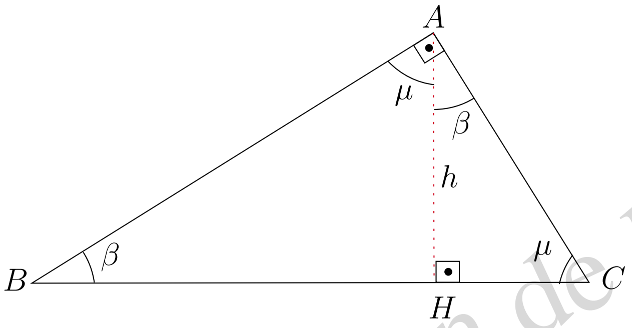


entre h (c'est-à-dire $\overline{AH}$) et $\overline{BH}$ et $\overline{HC}$.

À partir du triangle ci-dessus, nous voyons que $\beta + \mu = \pi/2$ car la somme de tous les angles d'un triangle dans le plan est égale à π. Par conséquent, nous pouvons en déduire que l'angle μ est également ici par la somme des angles de ΔABH doit également être égale à π :



En appliquant le même raisonnement au triangle ΔAHC nous voyons aussi que l'angle manquant est par déduction évidemment β lui-même :



En cours de traduction de l' anglais

Par conséquent, les deux triangles ΔABH et ΔAHC sont semblables et nous pouvons appliquer le théorème de Thalès tel que :

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{HC}} \tag{8.2.93}$$

En réorganisant, nous obtenons :

$$\overline{AH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{HC} \tag{8.2.94}$$

Ou écrit différemment :

$$\boxed{h^2=\overline{BH}\cdot\overline{HC}} \tag{8.2.95}$$

Et ceci est le "théorème d'Euclide" pour les triangles rectangles dans le plan.

Cependant, toujours dans les mêmes triangles nous pouvons écrire :

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \tag{8.2.96}$$

Nous obtenons donc la deuxième égalité du théorème d'Euclide pour les triangles rectangles :

$$\overline{AC}^2=\overline{HC}\cdot\overline{BC} \tag{8.2.97}$$

Et de même, nous pouvons obtenir la troisième égalité du théorème d'Euclide :

$$\overline{AB}^2=\overline{HB}\cdot\overline{BC} \tag{8.2.98}$$

Remarque

Il existe malheureusement trois théorèmes mathématiques appelés "théorème d'Euclide", ce nom est donc souvent assez déroutant ! En effet, l'un d'eux est le théorème vu ci-dessus, le deuxième est un théorème d'Euclide sur la congruence des triangles (non présenté dans le présent ouvrage) et le troisième concerne les nombres premiers (également non présenté dans le présent ouvrage) mais également appelé "lemme d'Euclide" (voir section Théorie des Nombres page ??).

8.2.3.4 Parallélisme

Définition (#8.2.335) : Nous appelons "parallèles" deux droites également distantes l'une de l'autre sur toute leur longueur.

Ce concept est directement relié au cinquième postulat d'Euclide et est souvent considéré comme le plus important ayant été montré qu'il ne peut être considéré comme un axiome car n'étant pas respecté dans les géométries non-euclidiennes (voir section Géométries Non-Euclidiennes page 2643).

Les conséquences de ce postulat sont les suivantes dans une géométrie euclidienne :

1. Si deux droites AB et CD sont parallèles, toute droite $E'F'$ qui coupe l'une coupe l'autre.

   Démonstration 8.10.2. Soit F le point commun à la droite CD et à la droite $E'F'$: si la droite $E'F'$ ne coupait pas la droite AB, elle lui serait parallèle, et par le point F passeraient deux droites CD et $E'F'$ parallèles à une même troisième AB, ce qui n'est pas le cas. Donc, la droite $E'F'$, coupe la droite AB.

   ■ Q.E.D.

2. Deux droites AB et CD parallèles à une même troisième $E'F'$ sont parallèles entre elles.

   Démonstration 8.10.3. Si la droite CD n'était pas parallèle à la droite AB, elle la couperait : elle couperait aussi la droite $E'F'$ parallèle à la droite AB, elle ne serait donc pas parallèle à $E'F'$.

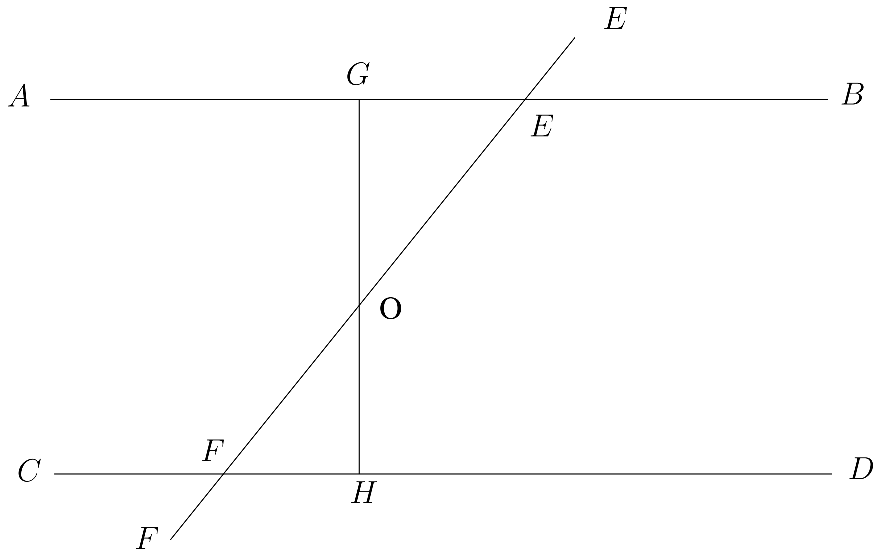
   ■ Q.E.D.

Théorème 8.11. Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante :

1. Les angles alternes-internes sont égaux ;
2. Les angles alternes-externes sont égaux ;
3. Les angles correspondants sont égaux.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 8.11.1. Considérons deux parallèles (coplanaires) AB et CD et la sécante EF :



1. Par le milieu O de EF menons la perpendiculaire $\overline{GH}$ à AB, qui est aussi perpendiculaire à CD. Les triangles rectangles EOG et FOH ont un angle aigu égal à $\widehat{G\text{O}E} = \widehat{F\text{O}H}$, et l'hypoténuse égale, OF =OE. Ils sont égaux, et les angles $\widehat{\text{O}FH}$ et $\widehat{GE\text{O}}$ sont égaux.

2. Les angles alternes-externes $\widehat{E'EB}$ et $\widehat{F'FC}$ sont égaux, car $\widehat{E'EB}$ est opposé par le sommet à l'angle $\widehat{GE\text{O}}$, qui est alterne-interne avec l'angle $\widehat{\text{O}FH}$.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

... et réciproquement si deux droites sont coupées par une sécante formant avec ces droites :

1. Soit deux angles-alternes internes égaux ;

2. Soit deux angles-alternes externes égaux ;

3. Soit deux angles correspondants égaux, ces deux droites sont parallèles.

alors ces deux droites sont parallèles !

Remarque

Pour démontrer le parallélisme de deux droites, il faut et il suffit que les angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondants, formés par ces deux droites avec une sécante, soient égaux. C'est-à-dire égal à $\pi/2$.

8.2.3.5 Cercles

Définition (#8.2.336) : Nous appelons "cercle" le lieu des points M du plan qui sont à une distance donnée R, nommé "rayon" du cercle, d'un point fixe O, nommé "centre du cercle". Ou en utilisant le concept de "lieu" défini précédemment : un cercle est défini comme le lieu d'un point qui est à une distance donnée d'un point fixe, le centre du cercle :

$$\overline{\mathrm{O}M} = R \tag{8.2.99}$$

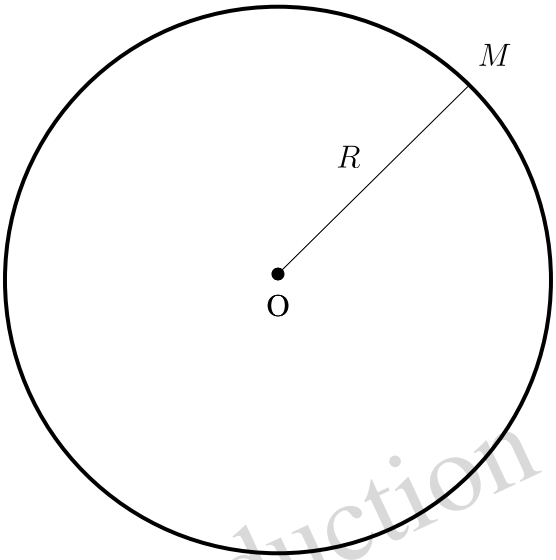


FIG. 8.76 – Cercle et Rayon

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Le mot "rayon" désigne soit le segment $\overline{\mathrm{O}M}$, soit sa mesure R.

Les cercles sont directement concernés par le troisième postulat d'Euclide que nous avions énoncé plus haut.

Nous appelons "diamètre" d'un cercle toute droite qui passe par le centre O du cercle. Tout diamètre rencontre le cercle en deux points A et B, tel que par construction :

$$\varnothing := \overline{\mathrm{O}A} = \overline{\mathrm{O}B} = R \tag{8.2.100}$$

que nous appelons "extrémités du diamètre". Nous réservons l'expression "diamètre $\overline{AB}$" pour le diamètre d'extrémités A et B. Nous disons que deux points d'un cercle sont "diamétralement opposés" quand ils sont les deux extrémités d'un même diamètre :

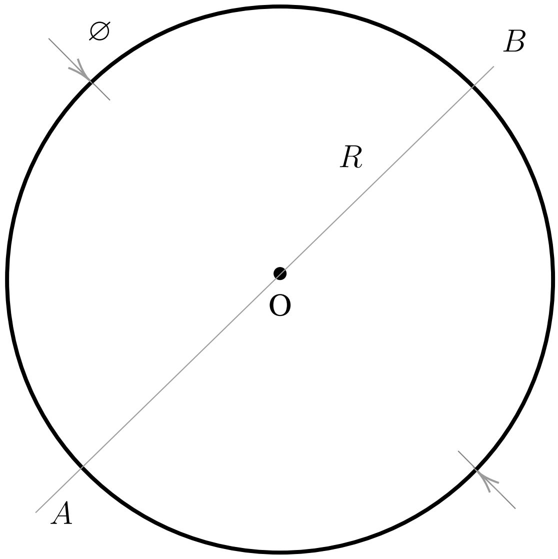
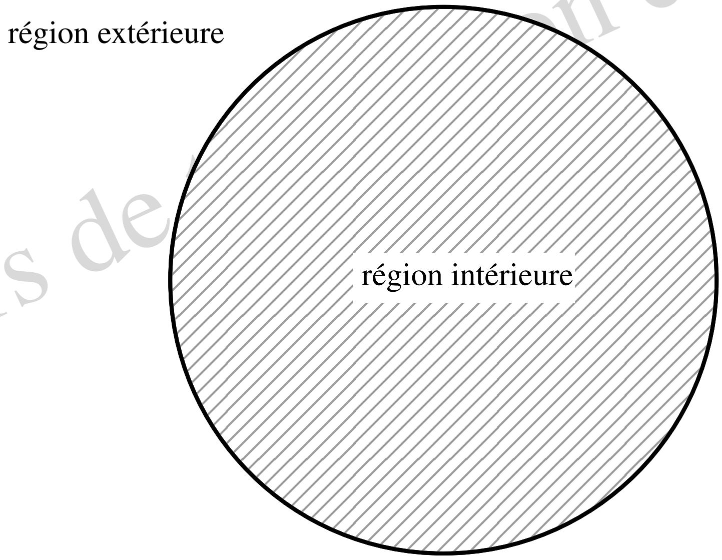


FIG. 8.77 – **Cercle et Diamètre**

Un cercle divise le plan en deux parties : une qui contient le centre, que nous appelons "région intérieure" et une qui ne le contient pas, que nous appelons "région extérieure" :



En cours de traduction de l'anglais

Théorème 8.12. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point P soit strictement intérieur à un cercle (C), de centre O et de rayon R, est $\overline{OP} < R$.

Démonstration 8.12.1. Il y a deux cas à considérer pour la démonstration :

1. La condition est nécessaire : Si, par hypothèse, P est à l'intérieur du cercle (C), il est situé soit en O, soit entre les extrémités A et B du diamètre délimité par le lieu géométrique des points M. S'il est en O, la proposition est évidente, s'il n'est pas en O, il est entre O et A par exemple, et nous avons $\overline{OP} < \overline{OA}$, c'est-à-dire $\overline{OP} < R$.

2. La condition est suffisante : Si, par hypothèse $\overline{OP} < R$, P est compris entre les extrémités A et B des lieux définis par les points M, donc à l'intérieur du cercle (C).

■ Q.E.D.

Corollaire 8.12.1. La condition nécessaire et suffisante pour que P soit extérieur au cercle (C) est $\overline{\text{O}P} > R$.

Nous appelons "corde d'un cercle" (C) le segment $\overline{CD}$ dont les extrémités C et D sont sur ce cercle.

Théorème 8.13. La médiatrice d'une corde $\overline{CD}$ est un diamètre et évidemment $C\text{O}D$ est un triangle isocèle.

Démonstration 8.13.1. La médiatrice Δ de $\overline{CD}$ (voir figure ci-dessous), corde du cercle (C) de centre O et de rayon R, passe par le point O parce que comme nous l'avons démontré lors de notre étude des triangles nous avons $\overline{\text{O}R} = \overline{\text{O}D} = R$.

En cours de traduction de l'anglais

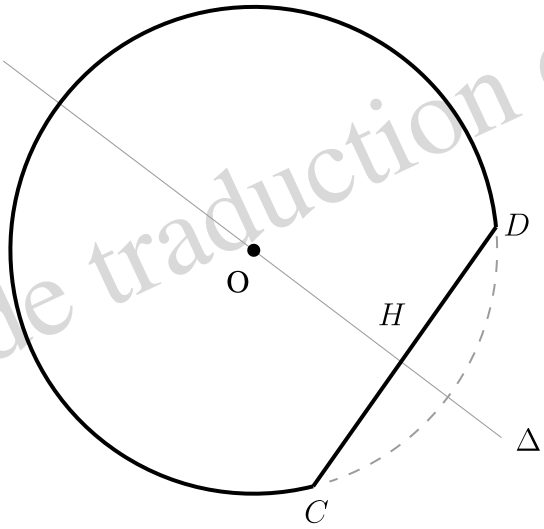


FIG. 8.78 – Médiatrice d'une corde d'un cercle

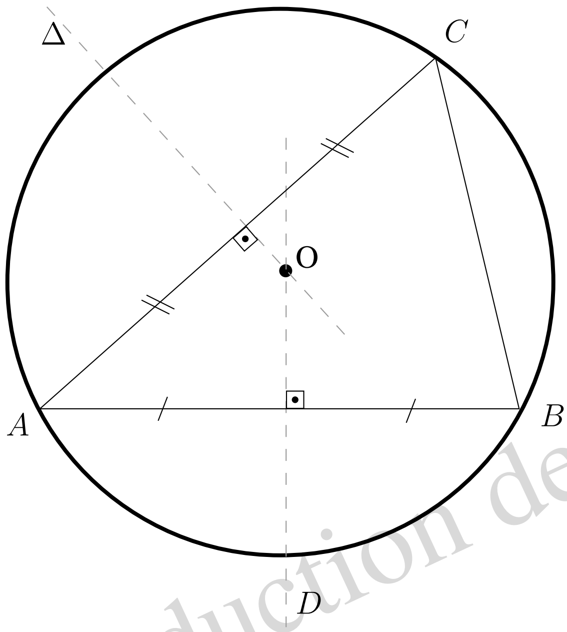
■ Q.E.D.

Corollaire 8.13.1. La perpendiculaire menée par le centre O d'un cercle à une corde $\overline{CD}$ passe par le milieu H de cette corde.

8.2.3.5.1 Théorème du cercle circonscrit

Théorème 8.14. Par trois points A, B, C non alignés, il passe un cercle et un seul. Ceci est le "théroème du cercle circonscrit".

Démonstration 8.14.1. D'abord, nous traçons la médiatrice D de $\overline{AB}$ et la médiatrice Δ de $\overline{AC}$. Si D et Δ étaient parallèles, la perpendiculaire $\overline{AB}$ à D serait perpendiculaire alors aussi à Δ, donc confondue avec $\overline{AC}$. Les points A, B, C seraient alignés. Donc D et Δ sont non parallèles et se coupent en un point O :



1. Il y a un grand cercle qui passe par A, B, C :

   Le point O étant sur D, médiatrice de $\overline{AB}$, $\overline{\text{O}A}=\overline{\text{O}B}$ par définition : le point O étant sur D, médiatrice de $\overline{AC}$, $\overline{\text{O}A}=\overline{\text{O}C}$. Le cercle (C), de centre O et de rayon $\overline{\text{O}A}$, passe par B (puisque $\overline{\text{O}A}=\overline{\text{O}B}$) et par C (puisque $\overline{\text{O}A}=\overline{\text{O}C}$). Il passe donc par A, B, C.

2. Il passe par A, B, C qu'un seul cercle :

   S'il passait par A, B, C un cercle différent du cercle (C) de centre O et de rayon $\overline{\text{O}A}$, son centre O' se trouverait sur la médiatrice de $\overline{AB}$ et de $\overline{AC}$ qui sont deux cordes de ce cercle ; il serait donc confondu avec O !

■ Q.E.D.

Remarque

La médiatrice de $\overline{BC}$, corde du cercle (C), passe par le point O. Nous pouvons donc dire (résultat important) que les trois médiatrices des côtés d'un triangle ABC concourent en un même point appelé "orthocentre".

Nous verrons plus loin qu'en utilisant la loi des sinus il est assez facile d'obtenir le diamètre du cercle circonscrit et donc sa surface si nous connaîssons ses angles internes. Mais si nous ne connaîssons pas ses angles internes il faut le théorème des angles au centre que nous démontrerons plus loin pour calculer sa surface.

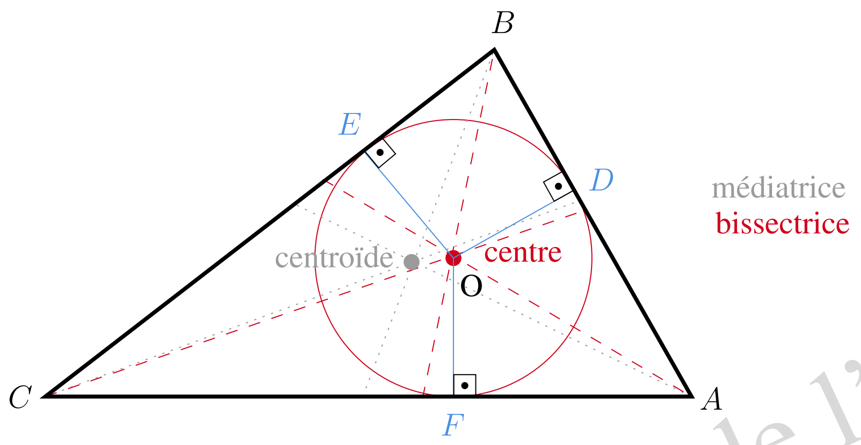
En cours de traduction de l' anglais

8.2.3.5.2 Théorème du cercle inscrit

Théorème 8.15. C'est l'inverse du théorème précédent et stipule donc qu'un cercle unique peut être inscrit dans n'importe quel triangle, c'est-à-dire que chaque triangle a un cercle inscrit qui lui est tangent.

Démonstration 8.15.1. Étant donné ABC, divisons en deux les angles aux sommets A et B.

Ces bissectrices d'angles doivent converger en un point O :



Nous localisons ensuite les points D, E et F sur les côtés $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CA}$ respectivement de sorte que :

$$\overline{\text{O}D} \perp \overline{AB} \qquad \overline{\text{O}E} \perp \overline{BC} \qquad \overline{\text{O}F} \perp \overline{CA}$$

Nous observons que les triangles $\Delta A\text{O}D$ et $\Delta A\text{O}F$ sont congruents ainsi que les triangles $\Delta B\text{O}D$ et $\Delta B\text{O}E$ par le théorème angle-côté-angle.

Étant donné que les côtés correspondants des triangles congruents sont égaux, nous savons également que :

$$\overline{\text{O}D} = \overline{\text{O}F} \quad \text{et } \overline{\text{O}D} = \overline{\text{O}E} \tag{8.2.101}$$

Dès lors :

$$R = \overline{\text{O}D} = \overline{\text{O}F} = \overline{\text{O}E} \tag{8.2.102}$$

Ainsi, le cercle de centre O et de rayon R est un cercle inscrit pour le triangle.

■ Q.E.D.

Nous pouvons être intéressés à calculer la surface du cercle inscrit de rayon R du triangle ΔABC connaissant uniquement les distances entre les points A, B et C.

Ainsi, en suivant la figure ci-dessus, nous considérons le triangle ΔABC dont le cercle inscrit a pour centre O, nous remarquons que :

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A\text{O}B} + S_{\Delta B\text{O}C} + S_{\Delta C\text{O}A} \tag{8.2.103}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}R+\frac{1}{2}\overline{BC}R+\frac{1}{2}\overline{CA}R \tag{8.2.104}$$

C'est-à-dire :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{R}{2}\left(\overline{AB}r+\overline{BC}r+\overline{CA}\right) \tag{8.2.105}$$

Ainsi :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{R}{2}P_{\Delta ABC} \tag{8.2.106}$$

Et donc :

$$\boxed{R=\frac{2S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}}} \tag{8.2.107}$$

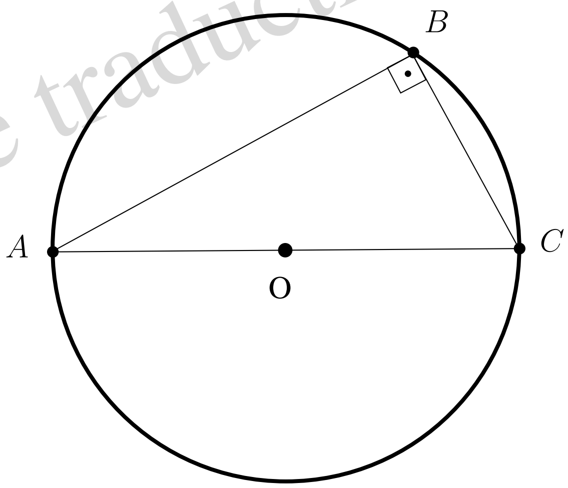
où P est le périmètre du triangle.

8.2.3.5.3 Théorème de Thalès du cercle

Théorème 8.16. Si A, B et C sont des points d'un cercle où le segment $\overline{AC}$ est un diamètre du cercle, alors l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle droit. C'est le "théorème de Thalès pour le cercle".

Démonstration 8.16.1. Étant donnée la figure :

En cours de traduction de l'anglais



Puisque $\overline{\text{O}A}=\overline{\text{O}B}=\overline{\text{O}C}$, les triangles $\Delta\text{O}BA$ et $\Delta\text{O}BC$ sont donc des triangles isocèles, et par l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle, $\widehat{\text{O}BC}=\widehat{\text{O}CB}$ et $\widehat{BA\text{O}}=\widehat{AB\text{O}}$.

Soit $\alpha=\widehat{BA\text{O}}$ et $\beta=\widehat{\text{O}BC}$. Les trois angles internes du triangle ABC sont α, $(\alpha+\beta)$ et β. Comme la somme des angles d'un triangle est égale à π [rad] (180°), nous avons :

$$\begin{aligned}&\alpha+(\alpha+\beta)+\beta=\pi\\&\Rightarrow 2\alpha+2\beta=\pi\\&\Rightarrow 2(\alpha+\beta)=\pi\\&\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{8.2.108}$$

■ Q.E.D.

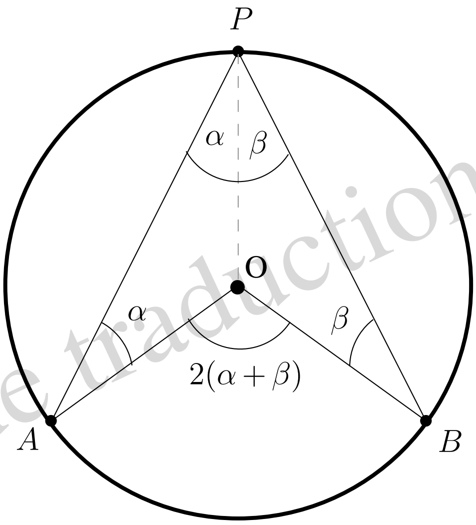
Corollaire 8.16.1. Si et seulement si le triangle inscrit est un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit se trouve au centre de l'hypoténuse.

8.2.3.5.4 Théorème de l'angle central

Le "théorème de l'angle central" est très utile pour résoudre des questions qui traitent des angles dans des cercles comme nous le verrons juste après. L'utilisation de ce théorème permet souvent de simplifier une situation compliquée en une situation plutôt simple.

Théorème 8.17. Le théorème de l'angle central stipule que l'angle au centre formé par deux points choisis A et B sur le cercle est toujours le double de l'angle inscrit formé par ces deux points. L'angle inscrit peut être défini par n'importe quel point P le long de l'arc extérieur AB et des deux points A et B.

Démonstration 8.17.1. Considérons la figure suivante :



En cours de traduction de l'anglais

Si nous notons $\widehat{APO} = \alpha$ et $\widehat{BPO} = \beta$ alors il s'ensuit que ΔPOA et ΔPOB sont des triangles isocèles qui :

$$\widehat{PAO} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{PBO} = \beta \tag{8.2.109}$$

En utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π (ou 180°) alors :

$$\widehat{POA} = \pi - 2\alpha \tag{8.2.110}$$
$$\widehat{POB} = \pi - 2\beta \tag{8.2.111}$$

Comme tous les angles au centre O doivent totaliser 2π (ou 360°), nous avons :

$$\widehat{AOB} = 2\pi - (\pi - 2\alpha) - (\pi - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) \tag{8.2.112}$$

Dès lors :

$$\boxed{\widehat{AOB} = 2\widehat{APB}} \tag{8.2.113}$$

N'oubliez pas que ce résultat est valable quelle que soit la position de P sur le cercle ! ! ! ! ! !

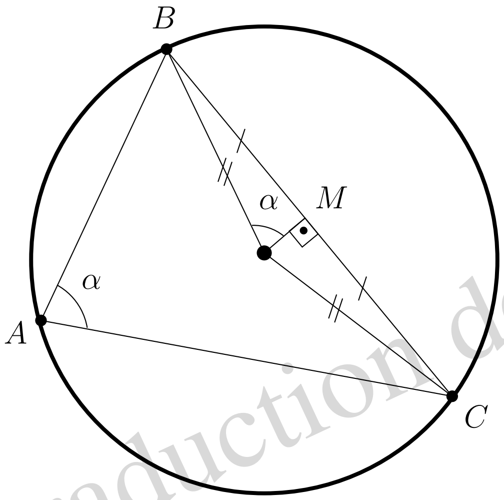
■ Q.E.D.

En utilisant ce théorème, nous pouvons maintenant démontrer que la relation qui apparaît dans la loi des sinus (voir section Trigonométrie page 2510) est le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Théorème 8.18.

$$\varnothing = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \tag{8.2.114}$$

Démonstration 8.18.1. Pour la démonstration, considérons la figure suivante :



Étant donné le triangle ABC, soit O le centre de son cercle circonscrit.

Notez que $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ en raison du théorème de l'angle central.

C'est-à-dire :

$$\widehat{BOC} = 2\alpha \tag{8.2.115}$$

Soit M le milieu de $\overline{BC}$.

Alors le triangle ΔBOM est congru au triangle ΔCOM par le théorème côté-côté-côté.

Nous avons alors :

$$\widehat{BOM} = \widehat{COM} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \tag{8.2.116}$$

puisque les angles congruents dans les triangles congruents sont égaux.

Par construction nous avons :

$$\widehat{OMB} = \widehat{OMC} = \frac{\pi}{2} \tag{8.2.117}$$

En cours de traduction de l'anglais

Écrivons maintenant :

$$\widehat{BOM}=\alpha \qquad (8.2.118)$$

Maintenant, dans le triangle rectangle BOM nous voyons que :

$$\sin(\alpha)=\frac{\overline{BM}}{\overline{BO}}=\frac{2\overline{BM}}{2\overline{BO}}=\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{2R}=\frac{\overline{BC}}{2R}=\frac{a}{\varnothing} \qquad (8.2.119)$$

Donc :

$$\varnothing=\frac{a}{\sin(\alpha)} \qquad (8.2.120)$$

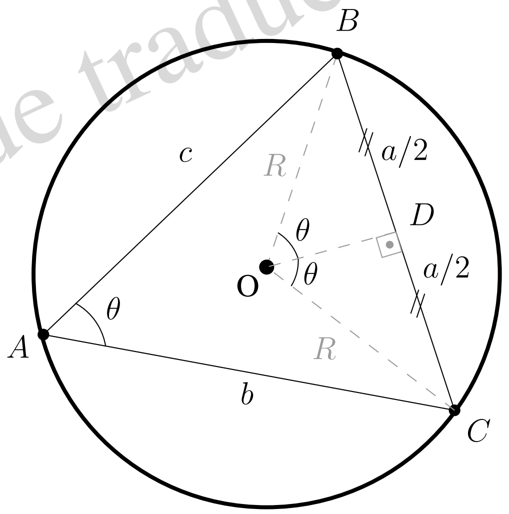
Ainsi, en appliquant la loi des sinus, nous concluons que :

$$\boxed{\varnothing=\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}} \qquad (8.2.121)$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons donc facilement calculer la surface en connaissant les angles internes. Mais considérons maintenant que nous ne connaissons pas les angles internes. Nous utilisons donc également le théorème de l'angle central et la figure suivante :



Du triangle ΔBDO nous avons :

$$\sin(\theta)=\frac{a/2}{R}=\frac{a}{2R} \qquad (8.2.122)$$

Comme nous le prouverons dans la section Formes Géométriques, la surface du triangle interne est :

$$S=\frac{1}{2}\text{base}\cdot\text{hauteur}=\frac{1}{2}b\cdot h \qquad (8.2.123)$$

Donc si nous choisissons b pour base du triangle et sachant que donc :

$$\sin(\theta) = \frac{h}{c} \tag{8.2.124}$$

nous obtenons :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\theta) = \frac{1}{2}bc\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{abc}{4R} \tag{8.2.125}$$

Dès lors :

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S_{\Delta ABC}}} \tag{8.2.126}$$

et nous pouvons alors facilement obtenir la surface du cercle circonscrit à partir de son rayon.

En cours de traduction de l'anglais

8.2.4 Axiomes de Hilbert

Euclide a rassemblé toutes les connaissances géométriques de son temps sous la forme de ces cinq postulats. Il a laissé son nom à la géométrie euclidienne qui utilise son cinquième postulat, à la géométrie non-euclidienne qui ne l'utilise pas, et aux espaces euclidiens.

Cette base postulée est néanmoins imparfaite, pour démontrer rigoureusement les théorèmes associés à cette géométrie, il est nécessaire d'admettre comme vrai des hypothèses supplémentaires implicites. David Hilbert construisit une axiomatique correspondante à l'idée que se faisait Euclide de la géométrie en ajoutant les hypothèses ad hoc.

Les axiomes de Hilbert sont eux regroupés en cinq catégories : l'association, l'ordre, la congruence, la continuité et les parallèles..

Le système d'axiomes de Hilbert est construit avec 6 notions primitives : trois termes primitifs et trois relations primitives.

Les trois termes primitifs sont :

1. Le point
2. La ligne
3. Le plan

Remarque

Les points, droites et plans sont considérés comme distincts par défaut.

Les trois relations primitives sont :

1. Celui de l'association définit le mot "contient", il correspond aux notions "est élément de" et "est inclus dans" de la Théorie des Ensembles.
2. Celui de "l'ordre" correspond à "une relation binaire" entre un couple de points et un point, il apparaît dans les expressions "entre" et permet de définir les segments.
3. La "congruence", qui correspond à trois "relations d'équivalence" pour les couples de points, les triangles et les angles.

En cours de traduction de l' anglais

Voici donc les "axiomes de Hilbert" :

8.2.4.1 Axiomes d'association (A)

A.A1. Soient deux points, il existe une droite passant par ces deux points.

A.A2. Soient deux points, il n'existe qu'une unique droite passant par ces deux points (in extenso la droite décrite en A.A1) est unique.

A.A3. Une droite contient au moins deux points, et pour une droite donnée, il existe au moins un point non contenu dans la droite.

A.A4. Soient trois points non contenus dans une droite, il existe un plan contenant ces trois points. Tout plan contient au moins un point.

A.A5. Soient trois points non contenus dans une droite, il n'existe qu'un unique plan contenant ces trois points.

A.A6. Soient deux points contenus dans une droite D et dans un plan A, alors A contient tous les points de d.

A.A7. Si deux plans A et B contiennent tous deux un point C, alors l'intersection de A et B contient au moins un autre point.

A.A8. Il existe au moins quatre points non coplanaires.

En cours de traduction de l'anglais

8.2.4.2 Axiomes d'ordre (O)

A.O1. Si un point B est entre les points A et C, B est aussi entre les points C et A, et il existe une droite contenant les trois points A, B, C.

A.O2. Soient deux points A et C, il existe un point B élément de la droite $\overline{AC}$ tel que C se situe entre A et B.

A.O3. Soient trois points contenus dans une droite, alors un et un seul se situe entre les deux autres.

A.O4. ("Axiome de Pasch") Soient trois points A, B, C non colinéaires, et soit une droite D contenue dans le plan ABC mais ne contenant aucun des points A, B, C : Si D contient un point du segment $\overline{AB}$, alors D contient aussi soit un point du segment $\overline{AC}$ soit un point du segment $\overline{BC}$.

8.2.4.3 Axiomes de congruence

Rappelons d'abord qu'intuitivement "congruent" signifie en géométrie "superposable" (exactement la même taille et la même forme) à l'opposé de "similaire" (une seule des deux propriétés est satisfaite).

A.G1. Soient deux points A, B et un point A' élément d'une droite d, il existe deux et deux uniques points C et D, tel que A' se situe entre C et D, et $\overline{AB}$ est congru à $\overline{A'C}$ et $\overline{AB}$ est congru à $\overline{A'D}$.

A.G2. La relation de congruence est transitive, c'est-à-dire, si $\overline{AB}$ est congru à $\overline{CD}$ et si $\overline{CD}$ est congru à $\overline{EF}$, alors $\overline{AB}$ est congru à $overlineEF$.

A.G3. Soit une droite d contenant les segments adjacents $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, et soit une droite contenant les segments adjacents $\overline{A'B'}$ et $\overline{B'C'}$. Si $\overline{AB}$ est congru à $\overline{A'B'}$ et $\overline{BC}$ est congru à $\overline{B'C'}$ alors $\overline{AC}$ est congru à $\overline{A'C'}$.

A.G4. Soit un angle $\widehat{ABC}$ et une demi-droite $\overline{B'C'}$, il existe deux et seulement deux demi-droites, $\overline{B'D}$ et $\overline{B'E}$, tel que l'angle $\widehat{DB'C'}$ est congru à l'angle $\widehat{ABC}$ et l'angle $\widehat{EB'C'}$ est congru à l'angle $\widehat{ABC}$.

A.G5. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que $\overline{AB}$ est congru à $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ est congru à $\overline{A'C'}$, et l'angle $\widehat{BAC}$ est congru à l'angle $\widehat{B'A'C'}$, alors le triangle ABC est congru au triangle $A'B'C'$.

Ces axiomes permettent donc de comparer les segments, et aussi les angles, de définir le milieu d'un segment, les droites orthogonales, de parler de triangles équilatéraux, isocèles, etc... Ils permettent également de définir rigoureusement les déplacements dont Euclide faisait si souvent usage sans les avoir définis.

En cours de traduction de l'anglais

8.2.4.4 Axiomes de continuité

A.C1. Aussi appelé "axiome d'Archimède" cet axiome assume que soient donnés $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ deux segments quelconques. Alors il existe toujours une suite finie de points $A_1, \ldots, A_n$ appartenant à la droite contenant le segment $\overline{AB}$ et tels que $A < A_1 < \ldots < A_{n-1} < B < A_n$ qui peuvent satisfaire $\overline{AA_1} \equiv \overline{AA_2} \equiv \ldots \overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{CD}$.

A.C2. Aussi appelé "axiome de Cantor" cet axiome assume que si (A_n) et (B_n) sont deux suites infinies de points et que l'on construit des segments de droite $\overline{A_iB_i}$ superposés tels que $\overline{A_kB_k} \subset \overline{A_iB_i}$ si $i < k$ (parfois aussi écrit $]A_{i+1}, B_{i+1}[\subset]A_i, B_i[$) situés sur une droite L et tels que $\forall \overline{CD}, \exists i : \overline{A_iB_i} \equiv \overline{CD}$, alors il existe un point X appartenant à l'ensemble des segments $\overline{A_iB_i}$. En d'autres termes : soit une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0 alors il y a un point commun à tous les segments.

Il n'est pas trivial que l'axiome d'Archimède soit le résultat de l'expérience d'un grand nombre de mesures et garantisse la mesurabilité des segments de droite. A un segment de droite quelconque peut être attaché un nombre réel appelé "longueur de segment de droite". L'axiome ne

garantit pas la relation inverse, selon laquelle un nombre réel quelconque peut être lié à un segment de droite par la longueur de ce segment de droite. Ce fait est garanti par l'axiome de Cantor.

8.2.4.5 Axiomes des parallèles

A.P1. Aussi connu sous le nom de "axiome Euclidien", il suppose qu'étant donné une droite L et un point P n'appartenant pas à L, il passe par P une et une seule droite L' qui est parallèle à d.

Autre formulation équivalente :

A.P1'. Étant donnée une droite L, un point P non compris dans L, alors il existe un plan contenant d et P. Ce plan contient une et une seule droite contenant P et ne contenant aucun point de d.

Tout ensemble non vide de points (dans le plan ou dans l'espace) cohérent avec le système axiomatique avec le postulat Euclidien forme la géométrie Euclidienne (plan Euclidien noté $\mathcal{E}^2$, ou espace euclidien noté $\mathcal{E}^3$) qui est aussi appelée "géométrie parabolique". L'un des théorèmes les plus connus découlant directement de l'axiome Euclidien de parallélisme est que la somme des angles intérieurs d'un triangle arbitraire est égale à π.

Nous ne pouvons pas réellement démontrer la non-contradiction logique de l'ensemble de ces axiomes. Cependant nous savons deux choses si nous faisons un parallèle avec ce que nous avons étudié dans les chapitres d'Arithmétique et d'Algèbre du présent livre (en particulier les sections sur la Théorie des Ensembles, l'Analyse Fonctionnelle, les Suites et Séries) :

1. Si ces axiomes sont contradictoires, alors la théorie des nombres réels est contradictoire.
2. Si le système d'axiomes obtenu en supprimant l'axiome de Cantor est contradictoire, alors la théorie des nombres rationnels est contradictoire.

Ainsi, la confiance qu'on a dans la solidité de ces axiomes repose sur celle qu'on a dans la théorie des nombres réels, qui est très grande.

En cours de traduction de l'anglais

8.2.5 Barycentre (centroïde)

Maintenant que nous avons abordé le minimum de la construction d'Euclide et d'Hilbert de la géométrie, nous pouvons passer à un niveau supérieur pour faire de l'analyse de propriétés des formes géométriques. Nous commencerons donc par étudier le concept de "barycentre", appelé également mais plus rarement "centroïde" et très important non seulement en géométrie mais aussi en mécanique classique, astronomie et bien d'autres domaiens ou des masses multiples doivent être ramenées à une seule entité virtuelle.

Remarque

La définition du barycentre nécessite certains des outils mathématiques définis dans la section de Calcul Vectoriel (voir page 1773). La lecture de cette section est donc recommandée si le lecteur souhaite comprendre ce qui va suivre.

Définition (#8.2.337) : Nous appelons "centre de gravite" ou "barycentre" ou "centroïde" des points A_i du plan ou de l'espace affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (où les α_i sont des réels tels que $\sum \alpha_i \neq 0$) l'unique point G (ou aussi parfois noté CM pour "Centre de Masse") tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \tag{8.2.127}$$

Le couple noté (A_i, α_i) est nommé "point pondéré" ou "point massif" dans le contexte de l'étude de la physique et lorsque $\alpha_i > 0$ cela représente le plus souvent une masse. Si tous les α_i ont la même valeur alors le centroïde est assimilé évidemment à la position moyenne de tous les points dans toutes les directions de coordonnées. Par conséquent un objet physique a une densité uniforme, alors son centre de masse est le même que le centroïde de sa forme !

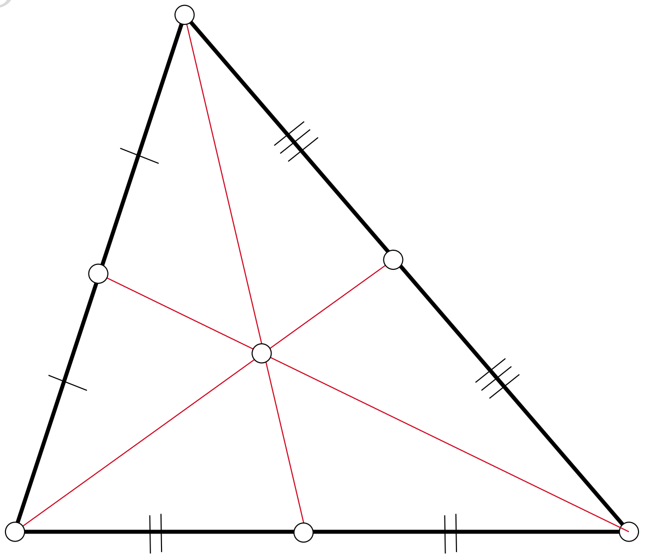


FIG. 8.79 – **Exemple de centroïde planaire (source : Wikpédia)**

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. En physique, le "centre d'inertie" d'un corps correspond au barycentre des particules qui composent le corps en question. Chaque particule étant pondérée par sa masse propre. C'est donc le point par rapport auquel la masse est uniformément répartie. Si la densité est constante, le centre d'inertie se confond avec le barycentre.

R2. Le "centre de gravité" d'un corps correspond au barycentre des particules qui composent le corps en question, chaque particule étant pondérée par son poids propre ! Très souvent en mécanique, la dimension des corps étant faible devant la rotondité de la terre, on considère un champ de gravité uniforme. Sous cette hypothèse, le centre de gravité et le centre d'inertie sont confondus.

R3. Lorsque pour tout point massif (A_i, α_i) nous avons $\alpha_i = \alpha_j \; \forall (i,j) \in \mathbb{N}^*$, nous parlons alors de "isobarycentre".

Pour un point O arbitraire, nous avons bien évidemment par simple addition vectorielle :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{\mathrm{O}A_i} - \overrightarrow{\mathrm{O}G}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{O}A_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{\mathrm{O}G} = \vec{0} \tag{8.2.128}$$

d'où le résultat majeur :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}G} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{O}A_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \tag{8.2.129}$$

En passant à la limite, si le domaine est continu, nous avons :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}G} = \frac{\displaystyle\int \overrightarrow{\mathrm{O}M} \mathrm{d}l}{\displaystyle\int \mathrm{d}l} = \frac{\displaystyle\int \overrightarrow{\mathrm{O}M} \mathrm{d}l}{L} \tag{8.2.130}$$

Nous pouvons très bien également travailler avec les éléments de surface ou de volumes (pour ne faire mention que des plus triviaux) pour déterminer le barycentre :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}G} = \frac{\displaystyle\iint \overrightarrow{\mathrm{O}M} \mathrm{d}S}{\displaystyle\iint \mathrm{d}S} = \frac{\displaystyle\iint \overrightarrow{\mathrm{O}M} \mathrm{d}S}{S} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{O}G} = \frac{\displaystyle\iiint \overrightarrow{\mathrm{O}M} \mathrm{d}V}{\displaystyle\iiint \mathrm{d}V} = \frac{\displaystyle\iiint \overrightarrow{\mathrm{O}M} \mathrm{d}V}{V} \tag{8.2.131}$$

✍**Exemple :**

Pour calculer le centre de gravité de la surface comprise entre l'axe Ox et la parabole de fonction $y = kx^2$ pour $0 \leq x \leq a$ nous avons (ne pas oublier que lorsque nous

En cours de traduction de l'anglais

calculons le centre de gravité selon l'axe y qu'il faut prendre le bon côté de la courbe !) :

$$\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}G_x\\G_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\iint x\mathrm{d}S}{\iint \mathrm{d}S}\\ \dfrac{\iint xy\mathrm{d}S}{\iint \mathrm{d}S}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\iint x\mathrm{d}S}{\iint \mathrm{d}S}\\ \dfrac{\iint xkx^2\mathrm{d}S}{\iint \mathrm{d}S}\end{pmatrix} \tag{8.2.132}$$

dans la première composante nous avons $\mathrm{d}S=y\mathrm{d}x$ donc l'intégrale double devient une intégrale simple !

Pour la seconde composante, nous ne pouvons pas utiliser $\mathrm{d}S=x\mathrm{d}y$ car cela représente un élément d'aire compris entre l'axe des y et la courbe parabolique. En effet, nous voulons l'aire extérieure (au-dessus de la courbe parabolique du point de vue de l'axe des y !). L'idée est donc de translater la parabole de a de façon à ce que la surface de la parabole par rapport à y soit celle attendue. Nous avons donc $\mathrm{d}S=(x-a)\mathrm{d}y$.

Pour la seconde composante, nous ne pouvons pas utiliser $\mathrm{d}S=x\mathrm{d}y$ car cela représente un élément d'aire compris entre l'axe des y et la courbe parabolique. En effet, nous voulons l'aire extérieure (au-dessus de la courbe parabolique vu du point de vue de l'axe des y !). L'idée est donc de translater la parabole de a de façon à ce que la surface de la parabole par rapport à y soit celle attendue. Nous avons donc $\mathrm{d}S=(x-a)\mathrm{d}y$.

Et dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\begin{pmatrix}\dfrac{\iint x\mathrm{d}S}{\iint \mathrm{d}S}\\ \dfrac{\iint xkx^2\mathrm{d}S}{\iint \mathrm{d}S}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\int_0^a xy\mathrm{d}x}{\int_0^a y\mathrm{d}x}\\ \dfrac{\int_0^b kx^2(x-a)\mathrm{d}y}{\int_0^b (x-a)\mathrm{d}y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\int_0^a xkx^2\mathrm{d}x}{\int_0^a kx^2\mathrm{d}x}\\ \dfrac{\int_0^a kx^2(x-a)2kx\mathrm{d}x}{\int_0^a (x-a)2kx\mathrm{d}x}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{\int_0^a x^3\mathrm{d}x}{\int_0^a x^2\mathrm{d}x}\\ k\dfrac{\int_0^a x^3(x-a)\mathrm{d}x}{\int_0^a x(x-a)\mathrm{d}x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\left.\frac{1}{4}x^4\right|_0^a}{\left.\frac{1}{3}x^3\right|_0^a}\\ \dfrac{\left.\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}ax^4\right|_0^a}{\left.\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right|_0^a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4}\dfrac{a^4}{a^3}\\ k\dfrac{\frac{1}{5}a^5-\frac{1}{4}a^5}{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4}a\\ k\dfrac{-\frac{1}{20}a^5}{-\frac{1}{6}a^3}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4}a\\ k\dfrac{3}{10}a^2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8.2.133}$$

Remarque

Lorsque nous calculons le centre de gravité d'une fonction, nous parlons alors de "courbe pesante".

Dans l'espace muni d'un repère $(\text{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en notant (x_i,y_i,z_i) les coordonnées du point pondéré (A_i,α_i) et celles de G, nous avons alors (dans le cas discret) :

$$x_G=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} \qquad y_G=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} \qquad z_G=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i} \tag{8.2.134}$$

Voyons quelques propriétés du centroïde (centre de masse/gravité/barycentre) :

P1. Soit $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)$, n points pondérés. Si $\sum\alpha_i\neq 0$, nous avons alors pour tout point M :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MA_i} \tag{8.2.135}$$

Démonstration 8.18.2.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}&=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\\&=\alpha_1\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1}\right)+\alpha_2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_2}\right)+\ldots+\alpha_n\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_n}\right)\\&=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}+\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}+\sum_{i=1}^{n}\alpha\overrightarrow{GA_i}\end{aligned} \tag{8.2.136}$$

Puisque par définition du barycentre :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0} \tag{8.2.137}$$

Nous avons alors bien :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG} \tag{8.2.138}$$

■ Q.E.D.

P2. Pour $\forall k\in\mathbb{R}^*$, les points pondérés $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ et $(A_1,k\alpha_1),(A_2,k\alpha_2),\ldots,(A_n,k\alpha_n)$ ont même barycentre car (invariance du barycentre) :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(k\alpha_i)\overrightarrow{GA_i}=\vec{0} \tag{8.2.139}$$

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 8.18.3. La démonstration est à notre avis immédiate (mais si vous ne la voyez pas n'hésitez pas comme toujours à nous contacter et nous l'écrirons).

■ Q.E.D.

P3. Le barycentre G de n points pondérés est invariant quand on remplace p d'entre eux, par leur barycentre G', affecté de la condition $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ de leurs coefficients, G est alors le barycentre de :

$$\left({G'}_i,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right),(A_{p+1},\alpha_{p+1}),\ldots,(A_n,\alpha_n) \tag{8.2.140}$$

Démonstration 8.18.4. $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_p,\alpha_p)$ Si G' est le barycentre des points pondérés $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_p,\alpha_p)$ alors :

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\overrightarrow{MG'} \tag{8.2.141}$$

Pour le cas particulier où $M=G$:

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\overrightarrow{GG'} \tag{8.2.142}$$

Or G étant le barycentre des n points pondérés $(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}+\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\overrightarrow{GG'}+\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0} \tag{8.2.143}$$

Comme :

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i+\sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\neq 0 \tag{8.2.144}$$

l'égalité précédente démontre bien que G est le barycentre des points pondérés :

$$\left({G'}_i,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right),(A_{p+1},\alpha_{p+1}),\ldots,(A_n,\alpha_n) \tag{8.2.145}$$

■ Q.E.D.

P4. Si $\sum\alpha_i=0$, pour tous points M,N :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{NA_i}=c^{te} \tag{8.2.146}$$

En cours de traduction de l' anglais

Démonstration 8.18.5. Pour $M \neq N$, calculons maintenant :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} \\
&= \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} - \alpha_1 \overrightarrow{NA_1} - \alpha_2 \overrightarrow{NA_2} - \alpha_2 \overrightarrow{NA_2} - \ldots - \alpha_n \overrightarrow{NA_n} \\
&= \alpha_1 \left(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{NA_1}\right) + \alpha_2 \left(\overrightarrow{MA_2} - \overrightarrow{NA_2}\right) + \ldots + \alpha_n \left(\overrightarrow{MA_n} - \overrightarrow{NA_n}\right) \\
&= \alpha_1 \overrightarrow{MN} + \alpha_2 \overrightarrow{MN} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MN} \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha) \overrightarrow{MN} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MN} = \vec{0}
\end{aligned} \tag{8.2.147}$$

comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, nous avons alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = c^{te} \tag{8.2.148}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Quand un corps a une certaine symétrie, les calculs se simplifient car le barycentre doit coïncider avec l'élément de symétrie. Si un corps, comme une sphère, un parallélépipède, etc., a un centre de symétrie, le barycentre est confondu avec lui. Si le corps a seulement un axe de symétrie, le barycentre est alors sur cet axe.

8.2.6 Transformations Géométriques

Les transformations dans le plan (et plus) sont habituellement définies rigoureusement à l'aide de la théorie des groupes (voir section Algèbre Ensembliste page 1398). Mais dans le cadre de la géométrie euclidienne, cette approche ne nous intéressera pas. Nous ferons donc dans ce section uniquement une approche très peu formelle (donc plus intuitive) des transformations élémentaires dans le plan que sont : la translation, l'homothétie, la rotation et le cisaillement. Pour la translation, nous verrons également l'équivalent dans l'espace car elle est très importante pour notre étude de la physique (en particulier pour l'étude du gyroscope).

Remarque

Par définition, "l'isométrie" est une transformation qui conserve les distances et les aires. Comme nous le verrons ci-après, la translation, la rotation et la réflexion sont des isométries, l'homothétie n'étant elle pas du tout une isométrie dans le plan.

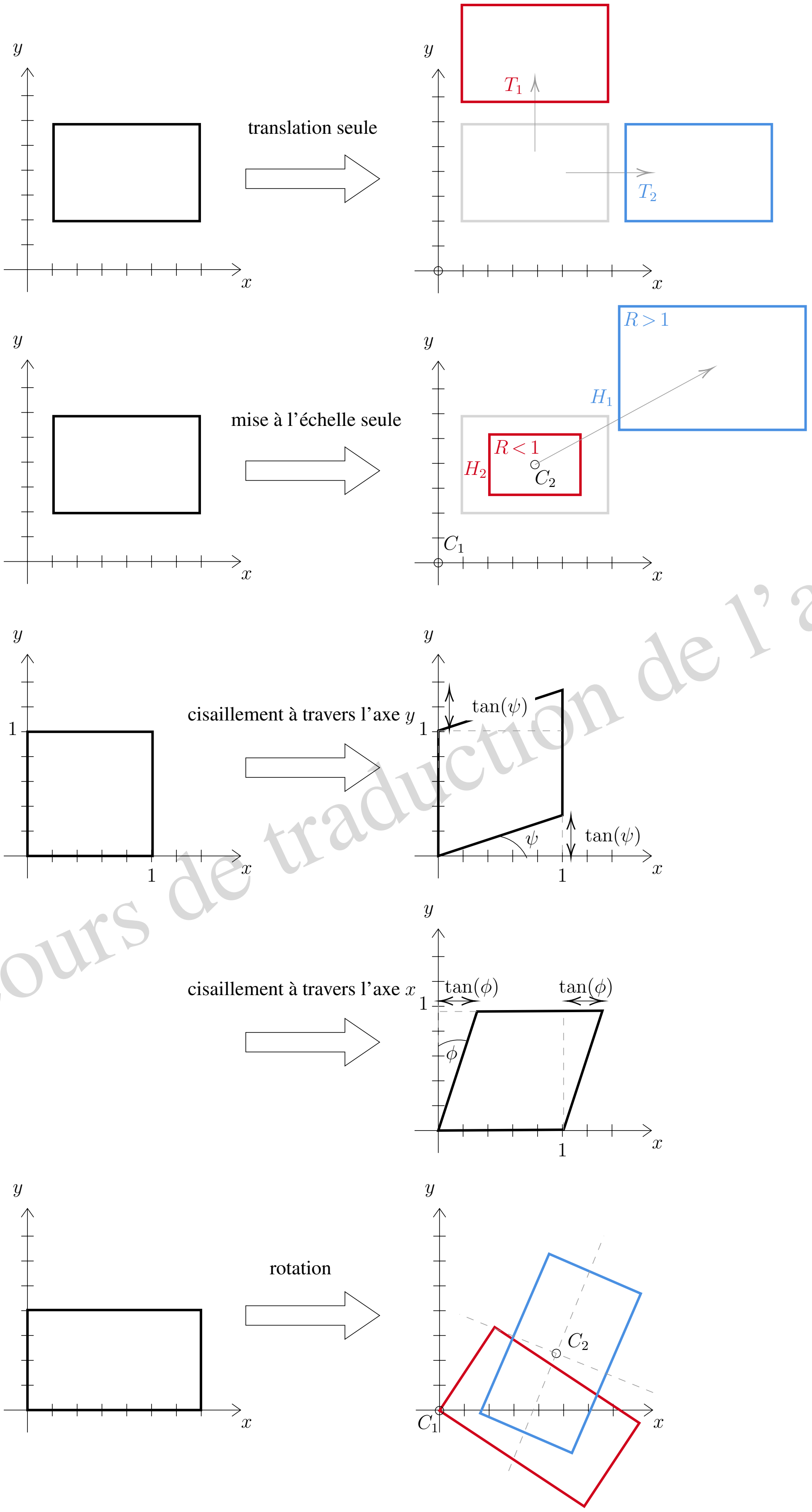


FIG. 8.80 – Type de transformations géométriques les plus courantes

En cours de traduction de l'anglais

8.2.6.1 Translation

Soit une droite dans un plan P sur laquelle deux points A et B définissent un segment de la droite noté $\overline{AB}$.

Définition (#8.2.338) : Une "translation" T ("déplacement dans une direction donnée" comme disait Euclide) de ce segment de droite associe à chaque point A et B de nouveaux points A' et B' tels que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Nous pouvons donc restreindre la notion de translation à un point uniquement tel que nous puissions écrire mathématiquement :

$$T : P \rightarrow P \Rightarrow T(A) = A' \tag{8.2.149}$$

Autrement dit, une fonction de transformation de type translation T de l'ensemble du plan dans lui-même associe à chaque pré-image au plus une seule et unique image. La translation est donc une fonction bijective. Nous pouvons donc définir une application de transformation réciproque notée T^{-1} telle que (rappel de ce qui a été vu en arithmétique) :

$$T^{-1}(A') = A \tag{8.2.150}$$

Nous disons par définition qu'un point est "invariant par translation" si et seulement si :

$$T(A) = A' = A \tag{8.2.151}$$

Dans un autre type de formalisme, le déplacement du point A au point B selon le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé "translation du vecteur" $\overrightarrow{AB}$ (voir section Calcul Vectoriel page 1793). Elle se traduit mathématiquement par la somme des coordonnées du point et de la matrice des coordonnées du vecteur (voir plus bas pour les détails).

Par exemple dans un espace à trois dimensions :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \tag{8.2.152}$$

La translation n'étant pas une transformation linéaire (voir section d'Algèbre Linéaire page 1907), nous ne pouvons nous autoriser à la représenter par la multiplication d'une matrice carrée comme nous le verrons pour les autres transformations suivantes.

Il faut pour cela (être capable d'exprimer cette transformation sous forme d'application linéaire d'une matrice carrée) passer alors par un artifice consistant à utiliser un système appelé les "coordonnées homogènes" (voir section Géométrie Projective page 2739) où les points du plan sont représentés par un vecteur à trois composantes (et respectivement ceux de l'espace par un vecteur à quatre composantes) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ w \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{aligned} x_h &= x \cdot w \\ y_h &= x \cdot w \end{aligned} \tag{8.2.153}$$

Dans le cadre de l'étude de la translation nous posons $w = 1$ car dans ce cas :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + T_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + T_y \cdot 1 \\ 0 + 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{8.2.154}$$

Ce système de coordonnées homogènes est applicable à toutes les autres transformations que nous verrons par la suite en rajoutant à chaque fois une coordonnée ((voir section Géométrie Projective page 2739).

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Une translation envoie une droite sur une droite parallèle (parallèle à l'originale bien évidemment !).

8.2.6.2 Homothétie (mise à l'échelle)

Soit une forme quelconque dans le plan (point, droite, ovale, polygone,...), un nombre R, et un point C placé à un endroit prédéfini.

Définition (#8.2.339) : Une "tranformation homothétique H" (appelée aussi "changement d'échelle") de rapport R et de centre C est l'application qui à chaque point M de la forme associe au segment $\overline{CM}$ un nouveau point colinéaire à $\overline{CM}$ mais disposé à une distance supérieure ou inférieure de rapport R par rapport au centre C tel que $\overline{CM'} = R \cdot \overline{CM}$.

Nous pouvons restreindre la notion d'homothétie à un segment de droite tel que nous puissions écrire mathématiquement :

$$H : P \to P \Rightarrow H(\overline{CM}) = R \cdot \overline{CM} = \overline{CM'} \tag{8.2.155}$$

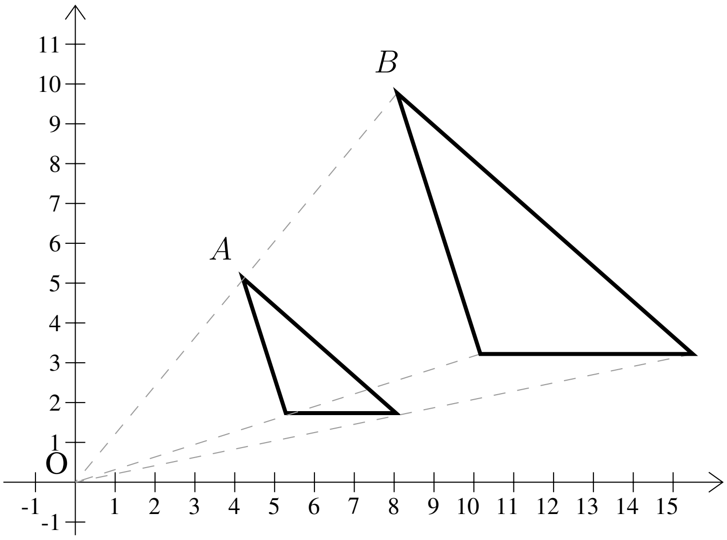
Autrement dit, une fonction de transformation de type homothétie de l'ensemble du plan dans lui-même associe à chaque pré-image au plus une seule et unique image. L'homothétie est donc une fonction bijective. Nous pouvons donc définir une application de transformation réciproque notée H^{-1} telle que :

$$H^{-1}(R \cdot \overline{CM}) = \overline{CM} \tag{8.2.156}$$

Si $R \neq 1$, alors C est le seul point invariant. Si $R = 1$, alors tous les points sont invariants et l'homothétie est dite de type "homothétie identité". Si $R = -1$, alors nous disons alors que nous avons une "symétrie centrale". La symétrie centrale est donc une rotation de $180°$ (ou π [rad]).

Dans un autre type de formalisme, une homothétie de centre O et de rapport k, associe au point A un point B tel que $\overline{\mathrm{O}B} = k\overline{\mathrm{O}A}$. Le point B se trouvant sur la droite OA et à une distance $\overline{\mathrm{O}B} = k\overline{\mathrm{O}A}$. Le signe de k détermine la position de B par rapport à O :

En cours de traduction de l' anglais



$$\overline{OB} = k\overline{OB} \Leftrightarrow (x', y', z') = k(x, y, z)$$

FIG. 8.81 – **Exemple d'homothétie de centre O**

Nous nous permettons maintenant de faire un petit passage dans la géométrie spatiale (le saut n'étant pas bien grand et nécessitant juste la connaissance du calcul vectoriel et de l'algèbre linéaire).

Nous pouvons également remplacer le scalaire k par une matrice carrée telle que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \quad (8.2.157)$$

Une solution triviale pour obtenir une homothétie est de poser que $b = c = d = f = g = h = 0$ d'où la forme matricielle diagonale évidente de k :

$$k = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (8.2.158)$$

Cette matrice est appelée "matrice de transformation par homothétie de centre O (origine du repère) et de rapport k" et donc l'homothétie étant une matrice diagonale commute avec toute application linéaire.

Evidemment pour le cas à deux dimensions nous avons immédiatement :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \quad (8.2.159)$$

où L est pour "largeur" et H est pour "hauteur".

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Notons que comme nous évaluons la surface d'un polygone en divisant celui-ci en un certain nombre de surfaces de triangles qui n'empiètent pas les uns sur les autres (même dans le limite du disque circulaire), de par l'expression de la surface d'un triangle qui fait intervenir la multiplication de la base et hauteur, alors le rapport des aires de deux polygones homthétiques est égal au caré du rapport d'homothétie k (puisque respectivement la base et la hauteur de chaque triangle subira une homothétie de rapport k est comme la surface d'un triangle est proportionnelle à la multiplication des deux... c'est logique).

Dans le cas présenté précédemment, l'homothétie conserve les formes dans tous les axes (sa géométrie est invariante par transformation) si nous utilisons en effet le même facteur k pour tous les axes (nous parlons alors de "mise à l'échelle uniforme"). Mais nous pourrions également utiliser la matrice suivante :

$$k = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \qquad (8.2.160)$$

qui elle déformerait l'objet selon un facteur différent pour chaque axe.

La transformation inverse de la mise à l'échelle est évidemment la mise à l'échelle du centre O et du rapport k^{-1} donc sous la forme d'une matrice :

$$k^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{bmatrix} \qquad (8.2.161)$$

Lorsque le centre d'homothétie ne coïncide pas avec l'origine du repère choisi (ce qui arrive quasiment tout le temps), la procédure de calcul des coordonnées du point image est très simple. Il faut :

1. Réaliser une translation pour faire correspondre le centre de l'homothétie avec l'origine du repère et appliquer cette translation à tous les points en jeu.

2. Réaliser l'homothétie proprement dite comme décrit précédemment (le centre est l'origine du repère).

3. Réaliser la translation inverse pour ramener le centre et l'image à sa place.

Pour clore, signalons que les opérations successives de translation et d'homothétie ne sont pas commutatives dans le cas général. Dans la pratique, on effectue souvent d'aborde l'homothétie et ensuite la translation.

En cours de traduction de l' anglais

8.2.6.3 Transformation de cisaillement (obliquité)

Définition (#8.2.340) : En géométrie plane, une "application de cisaillement" est une application linéaire qui déplace chaque point dans une direction fixe, d'une quantité proportionnelle à sa distance donnée par rapport à une ligne parallèle à cette direction. Ce type de mappage est également appelé "transformation de cisaillement", "transvection", ou simplement "cisaillement".

Avant de formaliser le cas général du cisaillement, considérons le cas particulier suivant d'un facteur de cisaillement k selon l'axe x :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} \tag{8.2.162}$$

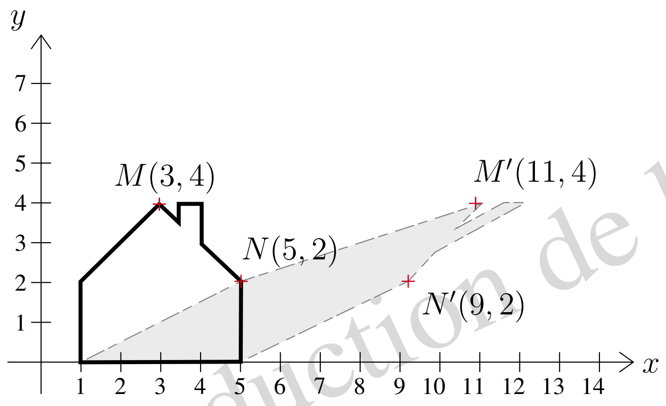


FIG. 8.82 – Homothétie avec cisaillement

En cours de traduction de l'anglais

Bon, généralisons tout ça ! En fait, pour le cisaillement, nous devons considérer le cas du cisaillement selon l'axe des x dont la situation peut être résumée par :

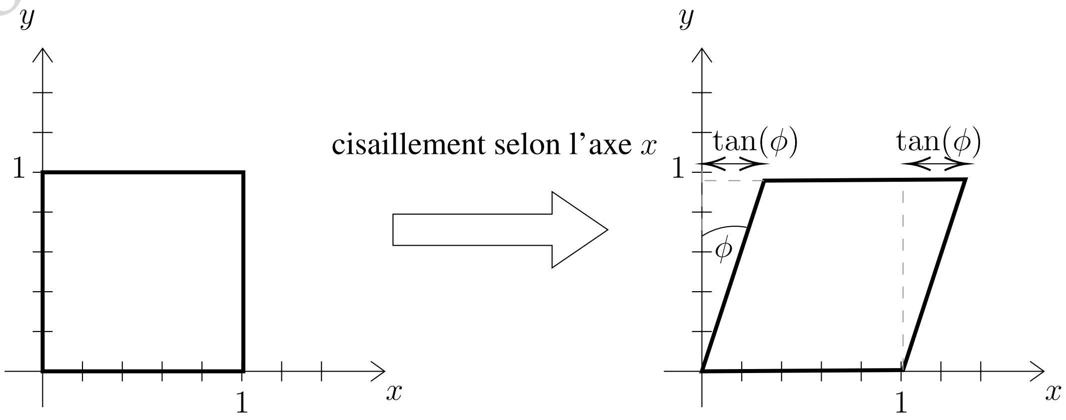


FIG. 8.83 – Cisaillement selon l'axe x

Il est donc immédiat que nous avons :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan(\phi) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y\tan(\phi) \\ y \end{pmatrix} \tag{8.2.163}$$

et le cas du cisaillement par l'axe y dont la situation peut être résumée par :

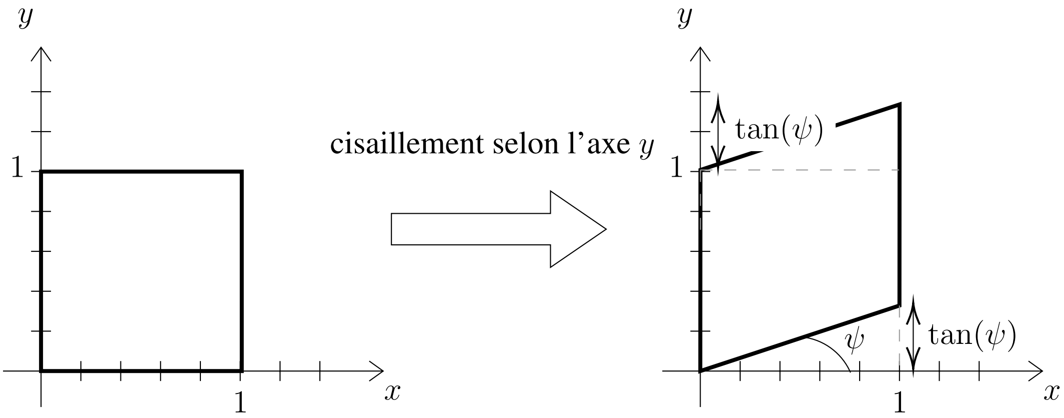


FIG. 8.84 – **Cisaillement selon l'axe y**

Il est donc immédiat que nous avons :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tan(\psi) & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\psi) \\ x\tan(\psi)+y \end{pmatrix} \quad (8.2.164)$$

En cours de traduction de l' anglais

8.2.6.4 Rotation

Soit une forme quelconque dans le plan (point, droite, ovale, polygone), un nombre α, et un point C placé à un endroit prédéfini.

Définition (#8.2.341) : Une "rotation R" R d'angle α et de centre C est l'application qui à chaque point M de la forme associe au segment $\overline{CM}$ un nouveau point mais ayant subi une rotation positive ou négative d'angle α et de centre C telle que $\overline{CM}$ et $\overline{CM'}$ ont même longueur mais pas même direction.

De cette définition, il ressort que l'axe de rotation d'un objet est le lieu de points de cet objet qui restent immobiles !

Remarque

La rotation est aussi, de manière plus académique, une application bijective dans le plan, nous pouvons donc aussi définir une application de transformation réciproque notée R^{-1}. Mais la rotation dans l'espace n'est pas bijective donc nous ne pouvons peut pas définir une transformation réciproque unique.

Si $\alpha \neq 0$, alors C est le seul point invariant. Si $\alpha = 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), alors tous les points sont invariants et la rotation est dite de type "rotation identité". Si nous choisissons un système d'axes perpendiculaires adéquat tel que leur intersection se confonde avec C et que $\pm\pi$ alors R est dite une rotation de symétrie centrale".

Dans un autre type de formalisme, la rotation s'exprime de manière beaucoup plus rigoureuse. Nous allons nous aider du dessin d'un cercle de rayon unité (donc dans le plan) pour étudier ce type de transformation. Nous allons considérer le premier cas où l'origine du repère et de la translation sont confondus :

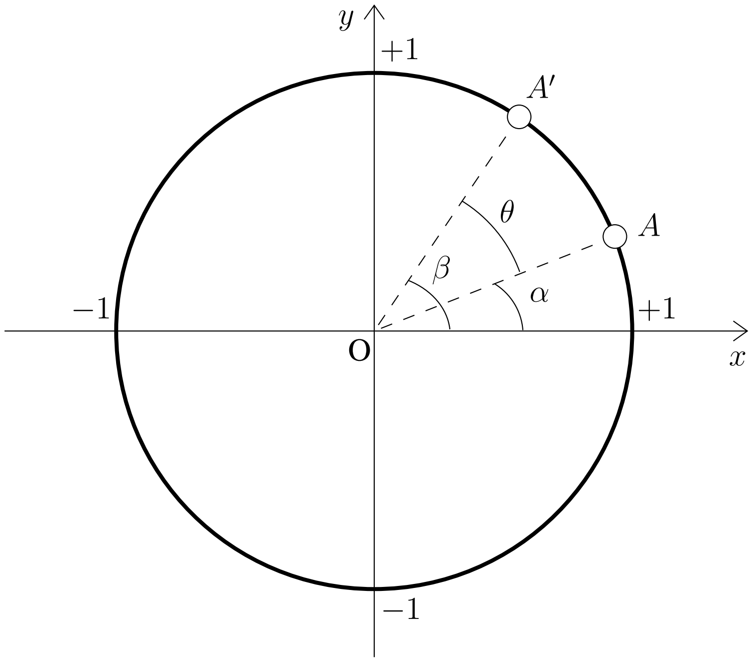


FIG. 8.85 – **Exemple de rotation dans le plan**

En cours de traduction de l'anglais

où A' est l'image A par la rotation de centre O et d'angle θ.

Nous avons dans le plan pour le point A (voir section Trigonométrie page 2491) :

$$x = r\cos(\alpha) \qquad y = r\sin(\alpha) \tag{8.2.165}$$

et identiquement pour le point A' :

$$x' = r\cos(\beta) \qquad y' = r\sin(\beta) \tag{8.2.166}$$

avec $\beta = \alpha + \theta$.

Ce qui nous amène à écrire :

$$\frac{x}{\cos(\alpha)} = \frac{x'}{\cos(\alpha+\theta)} = r \tag{8.2.167}$$

Alors, en utilisant les trigonométriques élémentaires démontrées dans la section de Trigonométrie à la page 2502 :

$$\begin{aligned} x' &= x\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha)} = x\frac{\cos(\alpha)\cos(\theta)-\sin(\alpha)\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} = x\cos(\theta) - x\frac{\sin(\alpha)\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \\ &= x\cos(\theta) - x\frac{y\sin(\theta)}{r\cos(\alpha)} = x\cos(\theta) - r\cos(\alpha)\frac{y\sin(\theta)}{r\cos(\alpha)} = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \end{aligned} \tag{8.2.168}$$

Identiquement (toujours en se basant sur la connaissances des identités trigonométriques), nous trouvons :

$$y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \tag{8.2.169}$$

Ce qui nous permet d'écrire la matrice de rotation dans le plan (en s'imaginant que l'axe Z sort de la feuille) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) & -y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) & y\cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{8.2.170}$$

Par conséquent, la matrice de rotation dans le plan est donnée par :

$$\boxed{R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}} \tag{8.2.171}$$

La transformation inverse consiste très simplement en la rotation de centre O (le même qu'auparavant) et d'angle $-\theta$ soit (nous utilisons à nouveaux les relations trigonométriques évidentes des angles opposés) :

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{8.2.172}$$

Une façon simple de le constater est de remarquer qu'il est immédiat que :

$$RR^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.2.173}$$

En cours de traduction de l'anglais

Lorsque nous voulons effectuer une rotation d'un objet autour de son barycentre (centroïde) il faut procéder comme pour la mise à l'échelle, c'est-à-dire : ramener le barycentre de la forme à l'origine O du référentiel par une translation, appliquer la rotation sur la forme et seulement après ramener la forme à sa position d'origine par une translation.

Lors de la rotation d'un objet dans l'espace (nous en profitons pour introduire ceci maintenant... car nous en avons besoin dans plusieurs notions de physique qui suivront dans ce livre), la transformation est assez similaire à la précédente sauf que le produit de deux rotations ne donne pas une rotation et qu'elle n'est pas commutative lorsque le nombre de dimensions est strictement supérieur à 2 (nous pouvons faire le calcul détaillé sur demande).

En effet, lors d'une rotation d'angle ϕ autour de l'axe z, la coordonnée z ne change pas. Ce qui nous amène à écrire la matrice de rotation dans l'espace tridimensionnel par rapport au plan $x-y$ comme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_Z(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\phi)+y\sin(\phi) \\ -x\sin(\phi)+y\cos(\phi)z \end{pmatrix} \tag{8.2.174}$$

Pour les personnes lisant ce livre sur un ordinateur avec Adobe Flash Player installé et activé, voici une version animée (sinon voir ici : https://vimeo.com/575753732) :

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, l'application de la matrice de rotation autour de l'axe z d'angle ϕ est :

$$\boxed{R_Z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \tag{8.2.175}$$

Nous pouvons donc voir que $R_Z(\phi)$ contient la matrice de rotation dans le plan $x-y$ que nous avons prouvée plus haut mais avec une composante supplémentaire selon l'idée de coordonnées homogènes ! ! !

La philosophie est alors toujours la même par rapport aux autres axes :

La rotation tridimensionnelle autour de l'axe x (par rapport au plan $z-y$) d'angle θ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_X(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos(\theta)+z\sin(\theta) \\ -y\sin(\theta)+z\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{8.2.176}$$

Pour les personnes lisant ce livre sur un ordinateur avec Adobe Flash Player installé et activé, voici une version animée (sinon voir ici : https://vimeo.com/575753223) :

Ainsi, l'application de la matrice de rotation autour de l'axe x d'angle θ est :

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix} \tag{8.2.177}$$

Et enfin la rotation tridimensionnelle autour de l'axe y (par rapport au plan $z-x$) d'angle γ :

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=R_Y(\gamma)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos(\gamma)-z\sin(\gamma)\\ y\\ x\sin(\gamma)+z\cos(\gamma)\end{pmatrix} \tag{8.2.178}$$

Pour les personnes lisant ce livre sur un ordinateur avec Adobe Flash Player installé et activé, voici une version animée (sinon voir ici : https://vimeo.com/575753505) :

En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, l'application de la matrice de rotation autour de l'axe y d'angle γ est :

$$R_Y(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma)\end{bmatrix} \tag{8.2.179}$$

Nous avons finalement trois matrices de rotation $R_X(\theta)$, $R_Y(\gamma)$, $R_Z(\phi)$ correspondant chacune à l'un des plans (xy, yz, xz) de l'espace tridimensionnel. Les trois angles cités ci-dessus sont nommés "angles d'Euler" et il n'y a malheureusement pas de convention dans la notation des angles, cela dépend des auteurs et des enseignants.

Ces trois matrices font partie du groupe des matrices d'ordre trois, noté "SO(3)" et nommé par les physiciens et les mathématiciens "groupe de rotations spatiales SO(3)" comme vu dans la section d'Algèbre Ensembliste. Toute rotation peut être représentée par la matrice produit résultant du produit de ces trois matrices (orthogonales) (dont le déterminant est égal à 1 comme démontré dans la section d'Algèbre Linéaire).

Remarque

Il n'y a pas qu'un seul vecteur propre pour une matrice de rotation. Il peut y en avoir un mais aussi trois au maximum. En effet, considérons une rotation d'un objet autour de l'axe z de π [rad] alors évidemment le vecteur propre z de composantes $(0, 0, 1)$ avec valeurs propres -1, $+1$ est évidemment un vecteur propre mais dans ce cas particulier $(1, 0, 0)$ est aussi un vecteur propre mais de valeur propre -1.

Toute rotation consiste ensuite en une composition de ces trois rotations mais il est important que le lecteur se souvienne de la section d'Algèbre Linéaire où nous avions vu que la multiplication matricielle n'est pas commutative. Ainsi, tourner autour de l'axe x de $90°$ ($\pi/2$ [rad]) et ensuite autour de l'axe z de $90°$ ($\pi/2$ [rad]) n'est pas équivalent à faire tourner d'abord selon l'axe z et ensuite selon l'axe x du même angle comme le montre l'image ci-dessous :

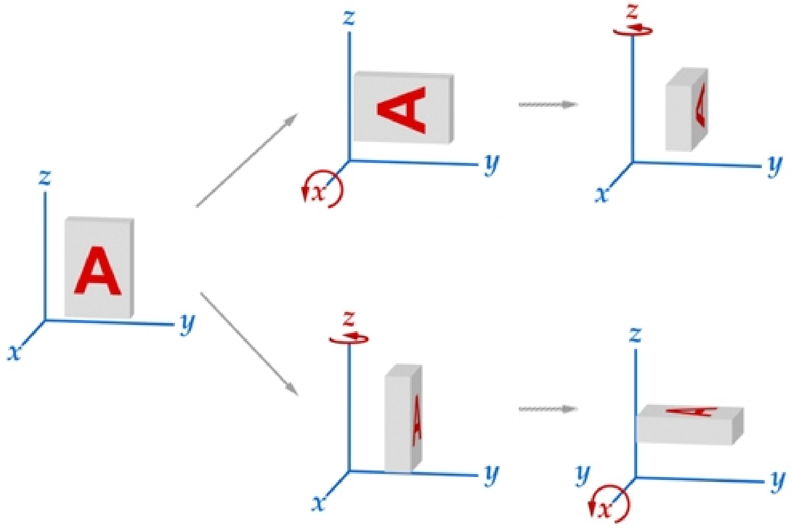


FIG. 8.86 – **Exemple de non commutativité de la matrice de rotation**

En cours anglais

Enfin, pour obtenir la matrice qui compose un cas particulier des trois rotations voici par exemple les commandes à fournir dans Maple 4.00b :

```
>X:=array([[1,0,0],[0,cos(theta),sin(theta)],[0,-sin(theta),cos(theta)]]);
>Y:=array([[cos(lambda),0,-sin(lambda)],[0,1,0],[sin(lambda),0,cos(lambda)]]);
>Z:=array([[cos(phi),sin(phi),0],[-sin(phi),cos(phi),0],[0,0,1]]);
>evalm(X&*Y&*Z);
```

Il n'est pas très intéressant de fournir à notre lecteur l'expression de $R_{XYZ} = R_X R_Y R_Z$ car les rotations ne sont pas commutatives et que donc (sauf cas particuliers) nous avons $R_{XYZ} \neq R_{XZY} \neq R_{YZX} \neq R_{YXZ} \neq R_{ZXY} \neq R_{ZYX}$. C'est pourquoi la plupart des ouvrages ne les donnent pas (sauf quelques PDF sur Internet).

Mais comme un lecteur l'a demandé pour R_{ZYX} donnons-le :

$$\begin{aligned}R_{ZYX} &= \begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & \sin(\gamma)\sin(\theta) & -\sin(\gamma)\sin(\theta)\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma)\sin(\gamma) & \cos(\gamma)\cos(\theta)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\phi)\cos(\gamma) & \cos(\phi)\sin(\gamma)\sin(\theta)+\cos(\phi)\cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\gamma)\sin(\theta)+\sin(\phi)\sin(\theta)\\ -\sin(\phi)\cos(\gamma) & -\sin(\phi)\sin(\gamma)\sin(\theta)+\cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\gamma)\sin(\theta)+\cos(\phi)\sin(\theta)\\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma)\sin(\gamma) & \cos(\gamma)\cos(\theta)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8.2.180}$$

Si nous cherchons à réaliser la composition d'une translation T et d'une rotation R et d'une mise à l'échelle H la matrice de transformation sera typiquement :

$$[R][H][T] \tag{8.2.181}$$

Remarques

R1. Nous rappelons (voir section Algèbre Linéaire page 1920) que la multiplication de deux matrices n'est en général pas commutatif.

R2. La similitude directe de centre C, de rapport R et d'angle est la composée de l'homothétie de centre C et de rapport R et de la rotation de centre C et d'angle α. Nous renvoyons le lecteur à la section sur les Nombres pour revoir que les nombres complexes (voir page 241) permettent formellement d'opérer avec les opérations d'addition et de multiplication à des similitudes (directes ou rétrogrades).

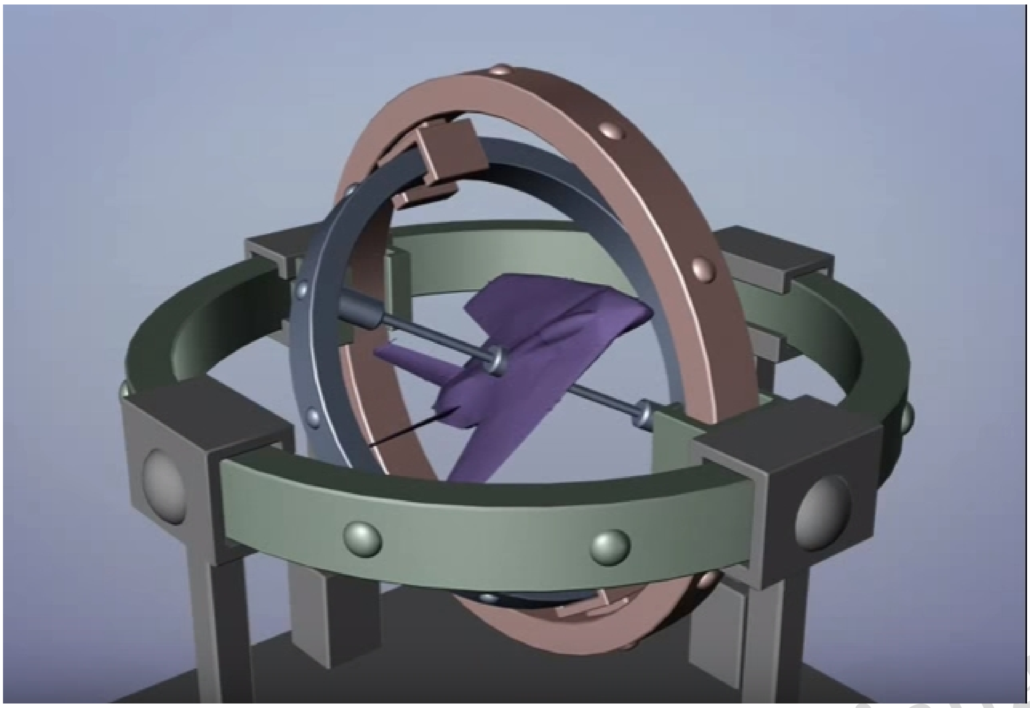
R3. Nous pouvons réaliser des rotations beaucoup plus puissantes et variables en utilisant des nombres quaternions (ou "nombres hypercomplexes"). Pour plus d'informations sur ce type de nombres, le lecteur doit se référer à la section Nombres où les quaternions (voir page 259) sont introduits avec beaucoup de détails qui expliquent plus clairement pourquoi ils sont parfois préférés en calcul 3D pour les rotations plutôt que les matrices de rotation.

8.2.6.4.1 Blocage de cardan

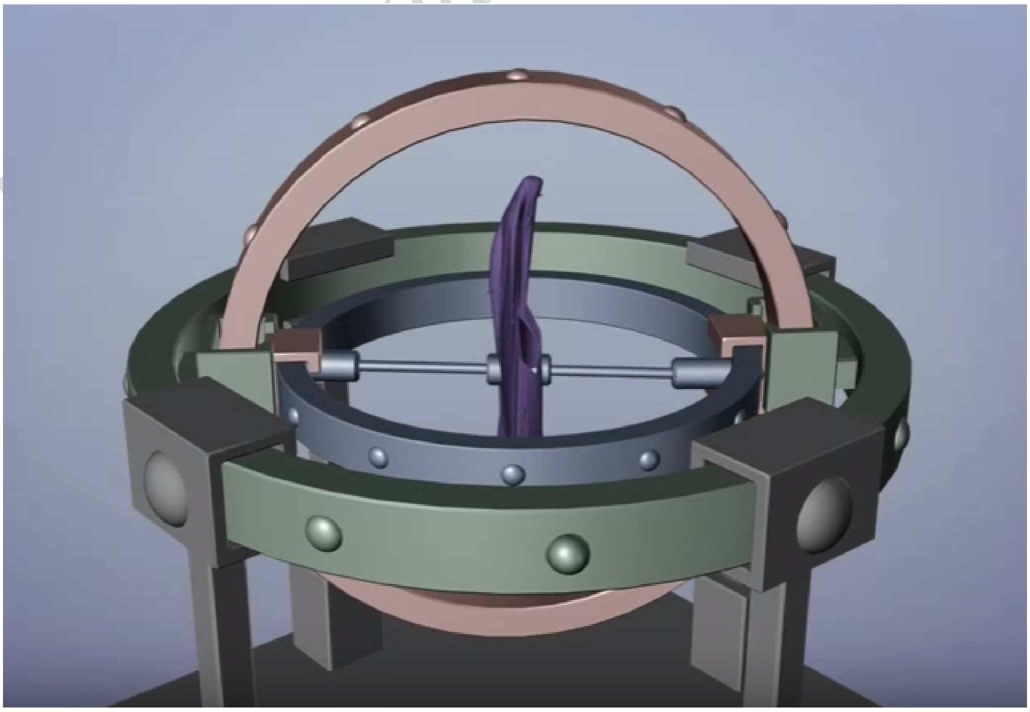
Le verrouillage du cardan est la perte d'un degré de liberté dans un mécanisme tridimensionnel à trois cardans qui se produit lorsque les axes de deux des trois cardans sont entraînés dans une configuration parallèle, « verrouillant » le système en rotation dans un espace bidimensionnel dégénéré.

Le problème du blocage de cardan apparaît lorsque nous utilisons les angles d'Euler (voir plus bas la définition) en mathématiques appliquées. Les développeurs de programmes informatiques 3D, tels que la modélisation 3D, les systèmes de navigation embarqués, la robotique et les jeux vidéo doivent veiller à l'éviter.

Avant d'entrer dans les détails mathématiques, montrons un exemple de blocage de cardan. Considérons la structure de type gyroscope suivante :



Dans la configuration ci-dessus, nous pouvons faire tourner le petit avion dans n'importe quel angle (ce qui signifie qu'un avion connaîtra sa position où qu'il aille). En effet, le disque intérieur peut tourner de manière unique, de même pour le disque intérieur et extérieur. Mais maintenant, si la configuration suivante se produit :



En cours de traduction de l'anglais

Le lecteur peut alors constater que le disque intérieur ne peut alors tourner que sur le même axe que le disque extérieur. Donc... oui ! ! ! Nous avons perdu un degré de liberté.

Le terme "verrouillage" utilisé dans ce cas est parfois source de confusion. En effet, nous voyons

sur la figure ci-dessus que les cardans ne se "verrouillent" pas réellement. Ils sont toujours libres de tourner comme ils le feraient normalement, aucun anneau n'est maintenu en place ou verrouillé de force en position. C'est juste que si deux des trois axes sont alignés, nous ne pouvons plus dire la différence entre une rotation autour d'un axe ou d'un autre. Nous ne le pouvons pas car ils sont effectivement le même axe dans cette position spéciale ! Les deux cardans tourneraient dans la même direction en même temps.

Ainsi, dans certaines orientations, un axe de roulis ou de tangage s'aligne sur l'un des autres. À ce stade, un changement dans le premier ne peut pas être distingué d'un changement dans l'autre. C'est un gros problème si nous devons suivre notre orientation avec précision.

Remarque

Il est dit que le célèbre problème de blocage du cardan s'est produit lors de la mission lunaire Apollo 11.

En langage formel, le blocage de cardan se produit à cause des angles d'Euler des rotations. En effet, les angles d'Euler fournissent un moyen de donner une description numérique de toute rotation dans l'espace tridimensionnel à l'aide de trois nombres, mais non seulement cette description n'est pas unique, mais il existe des points où tous les changements dans l'espace cible (rotations) ne peuvent pas être réalisés par un changement dans l'espace source (angles d'Euler). Il s'agit d'une contrainte topologique - il n'y a pas de carte de recouvrement du tore à 3 dimensions vers l'espace projectif réel à 3 dimensions ; la seule carte de recouvrement (non triviale) est celle de la sphère à 3 dimensions, comme dans l'utilisation des quaternions.

Une rotation dans l'espace 3D peut être représentée numériquement avec des matrices de plusieurs manières. L'une de ces représentations est celle que nous venons de voir :

$$R=R_ZR_XR_Y=\begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma)\end{bmatrix}\tag{8.2.182}$$

Observons ce qui se passe si $\theta=0$ (c'est-à-dire que nous bloquons la rotation autour de l'axe x) :

$$R=R_ZR_XR_Y=\begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma)\end{bmatrix}\tag{8.2.183}$$

Effectuons la multiplication matricielle :

$$\begin{aligned}R=R_ZR_XR_Y&=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0\\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \sin(\phi)\cos(\gamma)-\cos(\phi)\sin(\gamma) & \sin(\phi)\sin(\gamma)+\cos(\phi)\cos(\gamma) & 0\\ \cos(\phi)\cos(\gamma)+\sin(\phi)\sin(\gamma) & \cos(\phi)\sin(\gamma)-\sin(\phi)\cos(\gamma) & 0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{8.2.184}$$

Et enfin, en utilisant certaines de nos identités trigonométriques (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \sin(\phi-\gamma) & \cos(\phi-\gamma) & 0\\ \cos(\phi-\gamma) & \sin(\gamma-\phi) & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \sin(\phi-\gamma) & \cos(\phi-\gamma) & 0\\ \cos(\phi-\gamma) & -\sin(\phi-\gamma) & 0\end{bmatrix}\tag{8.2.185}$$

En cours de traduction de l'anglais

Changer les valeurs de ϕ et γ dans la matrice ci-dessus a les mêmes effets : l'angle de rotation $\phi - \gamma$ change, mais l'axe de rotation reste dans la direction z ! En effet, nous savons que dans une matrice de rotation, lorsque la première ligne et la première colonne sont fixes, nous avons une rotation autour de l'axe x, lorsque la deuxième ligne et la deuxième colonne sont fixes, nous avons une rotation autour de l'axe y, lorsque la troisième ligne et la troisième colonne sont fixes, nous avons une rotation autour de l'axe z. Donc, lorsque la troisième colonne est fixe mais qu'au lieu de la troisième ligne, c'est la première ligne qui est fixe, la rotation de la dernière colonne et de la première ligne de la matrice ne changera pas. La seule solution pour que ϕ et γ récupèrent des rôles différents est de changer θ.

Dans cette situation spécifique, le comportement de blocage du cardan ne peut PAS être évité. Les quaternions (voir page 259) peuvent identifier de manière unique une rotation, mais lorsqu'ils sont convertis en rotation d'Euler, ils perdent également un degré de liberté.

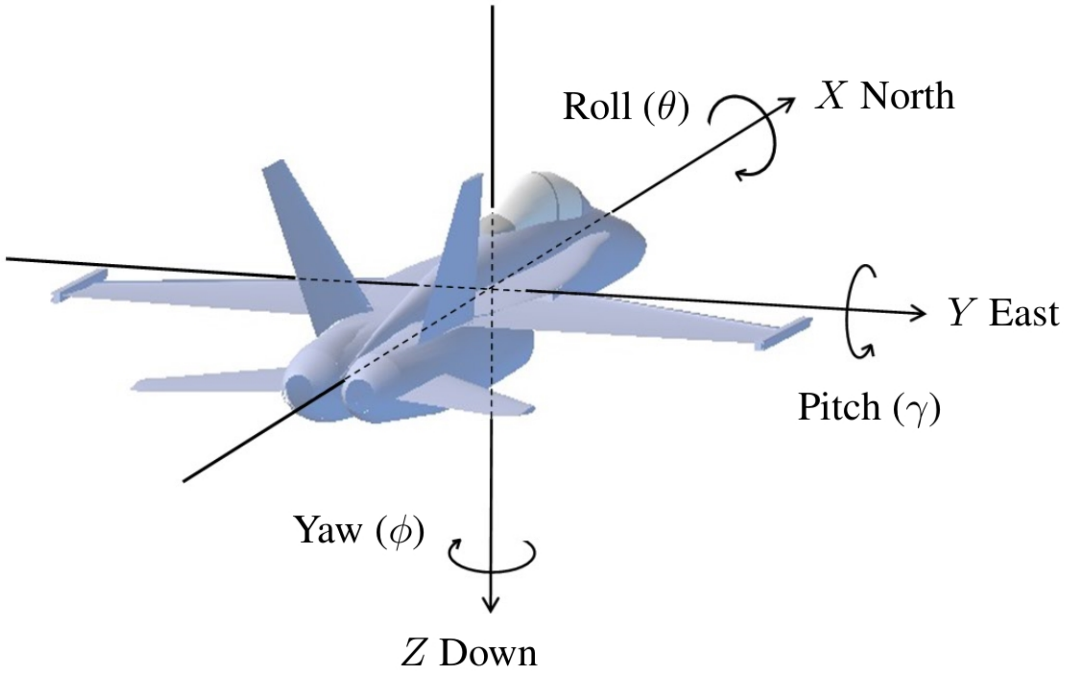


FIG. 8.87 – Rotation vocabulary in aeronautic science

8.2.6.4.2 Angles d'Euler

Revenons sur les angles d'Euler pour un résultat important pour notre étude ultérieure de l'effet gyroscopique en Mécanique Classique (notamment l'effet "nutation") !

Ainsi, nous caractérisons une orientation générale d'un corps par rapport au système inertiel xyz (voir figure ci-dessous) en terme des 3 rotations suivantes respectivement par tradition l'ordre suivant :

1. Rotation d'angle ϕ autour de l'axe z
2. Rotation d'angle θ autour du nouvel axe x_1', que nous nommons la "ligne de noeuds"
3. Rotation d'angle γ autour du nouvel axe x_3

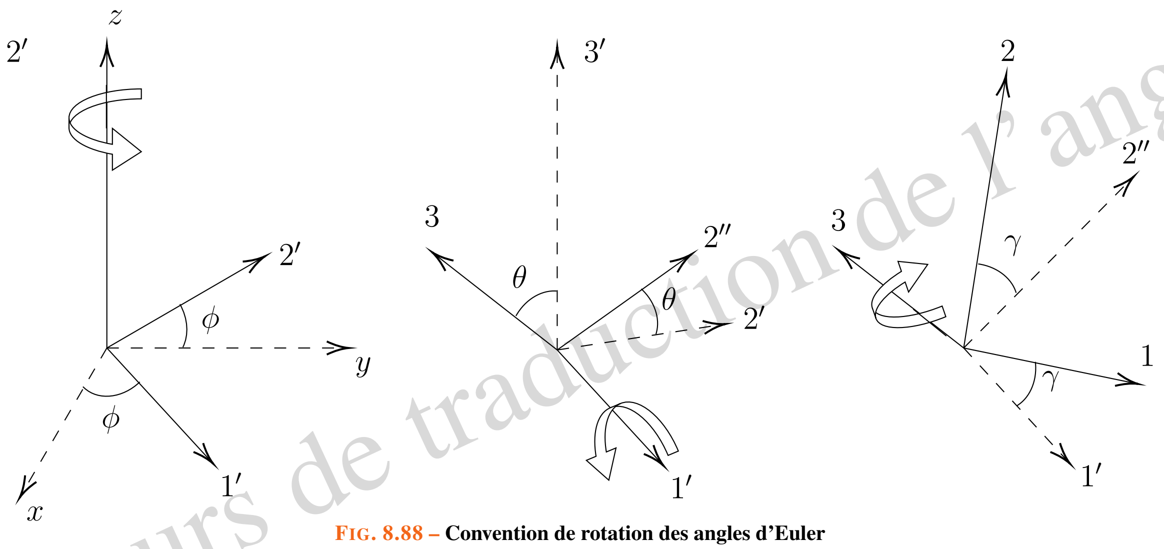


FIG. 8.88 – Convention de rotation des angles d'Euler

En cours de traduction de l'anglais

Formellement, comme nous le savons, cela est donné par :

$$R_{YXZ}=\begin{bmatrix}\cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (8.2.186)$$

Heureusement, la plupart du temps, nous n'avons pas besoin d'utiliser la matrice résultant de la multiplication des trois matrices ci-dessus. Dans la plupart des problèmes cinématiques, ce dont nous avons vraiment besoin, c'est de pouvoir écrire les composantes de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ dans les deux systèmes de coordonnées. Puisque $\vec{\Omega}$ décrit précisément la vitesse à laquelle les angles varient dans le temps, nous avons :

$$\vec{\Omega}=\dot{\vec{\phi}}+\dot{\vec{\theta}}+\dot{\vec{\gamma}}=\frac{\mathrm{d}\vec{\phi}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t}=\dot{\phi}\vec{e}_z+\dot{\theta}\vec{e}_{1'}+\dot{\gamma}\vec{e}_3 \quad (8.2.187)$$

puisque les trois rotations se font autour de ces axes particuliers.

Analysons chaque contribution à $\vec{\Omega}$:

1. $\dot{\vec{\phi}} = \vec{e}_z \dot{\phi}$ (relativement au système xyz). Suivant les rotations, nous constatons que par rapport au système 123 nous avons d'abord (le lecteur peut prendre les situations extrêmes où $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ pour voir que cela est exact) :

$$\vec{e}_z = \cos(\theta)\vec{e}_3 + \sin(\theta)\vec{e}_{2''} \tag{8.2.188}$$

mais nous remarquons que nous avons aussi dans la même idée :

$$\vec{e}_{2''} = \sin(\gamma)\vec{e}_1 + \cos(\gamma)\vec{e}_2 \tag{8.2.189}$$

Ainsi, nous avons :

$$\vec{e}_z = \cos(\theta)\vec{e}_3 + \sin(\theta)\vec{e}_{2''} = \cos(\theta)\vec{e}_3 + \sin(\theta)\left(\sin(\gamma)\vec{e}_1 + \cos(\gamma)\vec{e}_2\right) \tag{8.2.190}$$

Donc :

$$\dot{\vec{\phi}} = \dot{\phi}\vec{e}_z = \sin(\theta)\sin(\gamma)\dot{\phi}\vec{e}_1 + \sin(\theta)\cos(\gamma)\dot{\phi}\vec{e}_2 + \cos(\theta)\dot{\phi}\vec{e}_3 \tag{8.2.191}$$

par rapport au système 123.

2. $\dot{\vec{\theta}} = \vec{e}_{1'}\dot{\theta}$ (par rapport au système $1'2'3'$). Suivant les rotations, nous trouvons que par rapport au système 123 nous avons évidemment (le lecteur peut prendre les situations extrêmes où $\gamma = 0$ et $\gamma = \pi/2$ pour voir que c'est exact) :

$$\vec{e}_{1'} = \cos(\gamma)\vec{e}_1 - \sin(\gamma)\vec{e}_2 \tag{8.2.192}$$

Dès lors :

$$\dot{\vec{\theta}} = \vec{e}_{1'}\dot{\theta} = \left(\cos(\gamma)\vec{e}_1 - \sin(\gamma)\vec{e}_2\right)\dot{\theta} = \cos(\gamma)\dot{\theta}\vec{e}_1 - \sin(\gamma)\dot{\theta}\vec{e}_2 \tag{8.2.193}$$

par rapport au système 123.

3. $\dot{\vec{\gamma}} = \vec{e}_3\dot{\gamma}$. Suivant les rotations, nous avons alors immédiatement par rapport à 123 :

$$\dot{\vec{\gamma}} = \vec{e}_3\dot{\gamma} \tag{8.2.194}$$

Par conséquent, en additionnant les relations :

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\phi}} &= \sin(\theta)\sin(\gamma)\dot{\phi}\vec{e}_1 + \sin(\theta)\cos(\gamma)\dot{\phi}\vec{e}_2 + \cos(\theta)\dot{\phi}\vec{e}_3 \\
\dot{\vec{\theta}} &= \cos(\gamma)\dot{\theta}\vec{e}_1 - \sin(\gamma)\dot{\theta}\vec{e}_2 \\
\dot{\vec{\gamma}} &= \vec{e}_3\dot{\gamma}
\end{aligned} \tag{8.2.195}$$

La somme finement regroupée donne donc :

$$\vec{\Omega} = \left(\sin(\theta)\sin(\gamma)\dot{\phi} + \cos(\gamma)\dot{\theta}\right)\vec{e}_1 + \left(\sin(\theta)\cos(\gamma)\dot{\phi} - \sin(\gamma)\dot{\theta}\right)\vec{e}_2 + \left(\cos(\theta)\dot{\phi} + \dot{\gamma}\right)\vec{e}_3 \tag{8.2.196}$$

par rapport au système 123. Souvent noté sous la forme suivante :

En cours de traduction de l'anglais

Le système :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \sin(\theta)\sin(\gamma)\dot{\phi}+\cos(\gamma)\dot{\theta}\\ \Omega_2 &= \sin(\theta)\cos(\gamma)\dot{\phi}-\sin(\gamma)\dot{\theta}\\ \Omega_3 &= \cos(\theta)\dot{\phi}+\dot{\gamma}\end{aligned} \tag{8.2.197}$$

s'appelle "équations cinématiques d'Euler" et est très utile pour exprimer la vitesse de rotation d'un corps dans son propre référentiel (la plupart du temps son centre de masse).

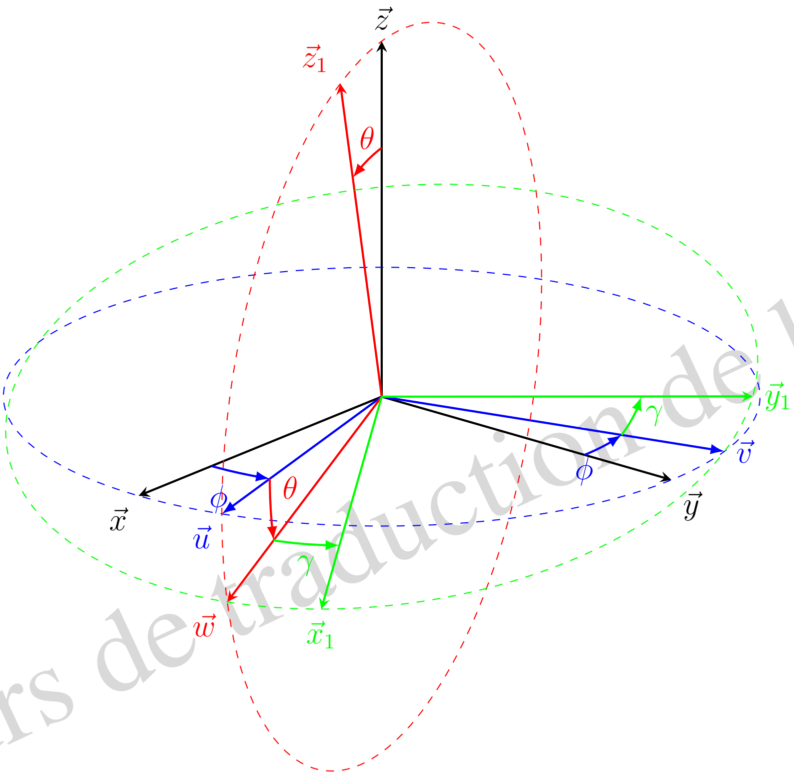


FIG. 8.89 – **Une autre représentation courante des angles d'Euler (auteur : Dorian Depriester)**

En cours de traduction de l'anglais

8.2.6.5 Réflexion

Définition (#8.2.342) : La "réflexion", appelée également "symétrie axiale", notée S_Δ (en géométrie), par rapport à la droite est l'application qui associe à chaque point M extérieur à Δ le point M' telle que soit Δ la médiatrice de $\overline{MM'}$. Si M appartient à Δ, alors $M = M'$.

Mathématiquement cela s'écrit :

$$S_\Delta : P \to P \Rightarrow S_\Delta(M) = M' \tag{8.2.198}$$

Autrement dit, une fonction de transformation de type réflexion de l'ensemble du plan dans lui-même associe à chaque pré-image au plus une seule et unique image. La réflexion est donc une fonction bijective. Nous pouvons donc définir une application de transformation réciproque notée S_Δ^{-1} telle que :

$$S_\Delta^{-1}(M') = M \tag{8.2.199}$$

Remarque

Tous les points de Δ sont trivialement invariants par la réflexion dans le plan.

Les axes de réflexion les plus évidents et les plus connus sont ceux inclus dans la forme elle-même, comme illustré par les exemples visibles dans la figure ci-dessous :

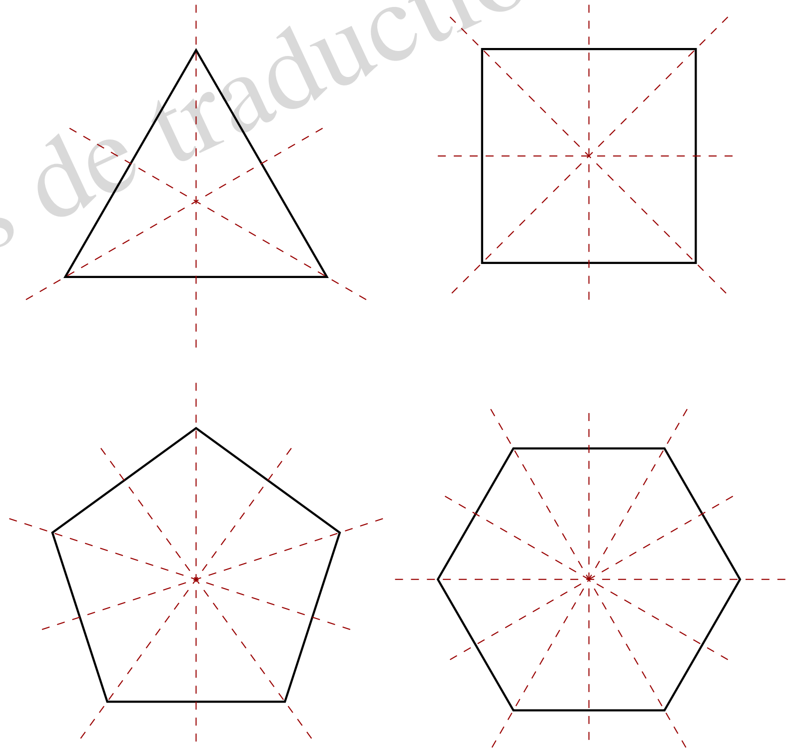


FIG. 8.90 – Axes de réflexion (auteur : Lauren K. Williams)

Sous forme matricielle les réflexions du plan sont extrêmement simples à formaliser en utilisant l'algèbre linéaire (voir section du même nom à la page 1898) comme le montrent les exemples ci-dessous :

En cours de traduction de l'anglais

- Réflexion par rapport à l'axe des y :

$$S_{\Delta_y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad (8.2.200)$$

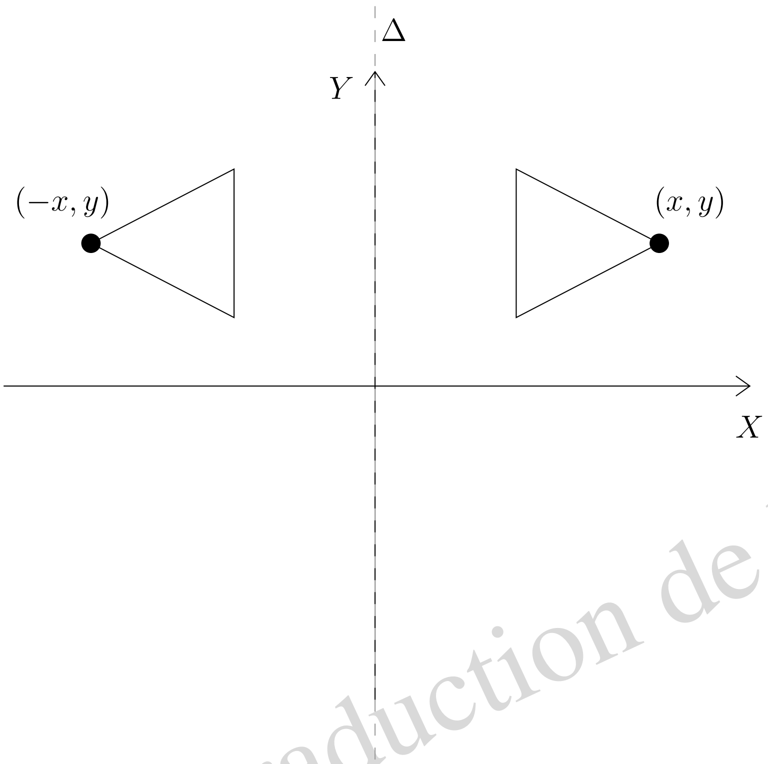


FIG. 8.91 – Réflexion par rapport à l'axe des Y

- Réflexion par rapport à l'axe des X :

$$S_{\Delta_x} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad (8.2.201)$$

En cours de traduction de l' anglais

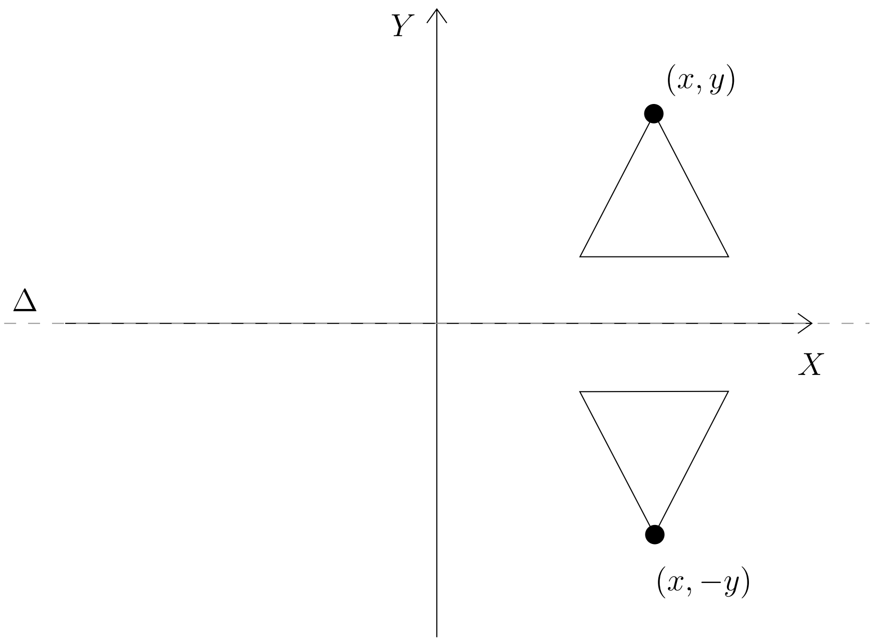


FIG. 8.92 – **Réflexion par rapport à l'axe des X**

- Réflexion par rapport à l'origine O :

$$S_\Delta = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad (8.2.202)$$

En cours de traduction de l' anglais

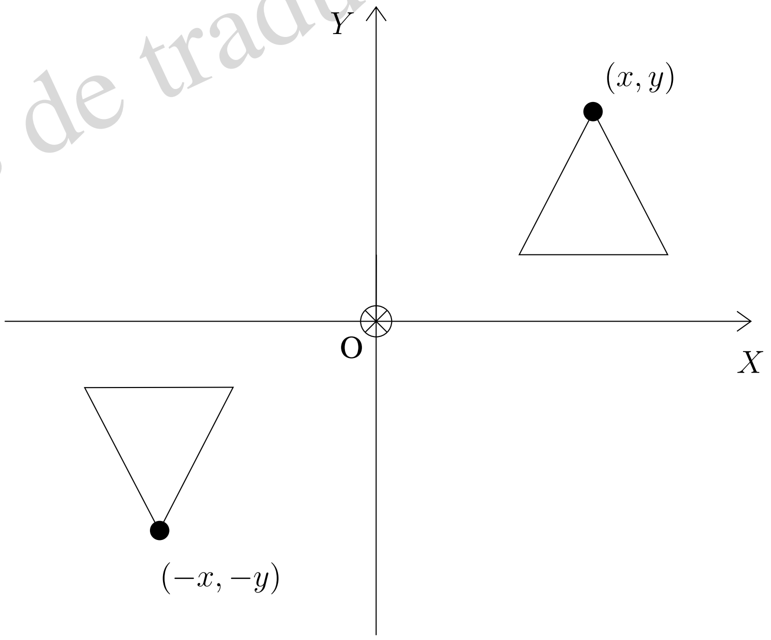


FIG. 8.93 – **Réflexion par rapport à l'origine**

Le lecteur a très probablement remarqué que toute matrice de réflexion n'est en fait que le cas particulier de la matrice de rotation plane et cela n'a pas été difficile à deviner puisque nous pouvons voir sur chaque figure qu'une réflexion n'est qu'une rotation autour d'un centre de rotation particulier.

Voici un assez bon résumé de ce que nous avons vu jusqu'à présent :

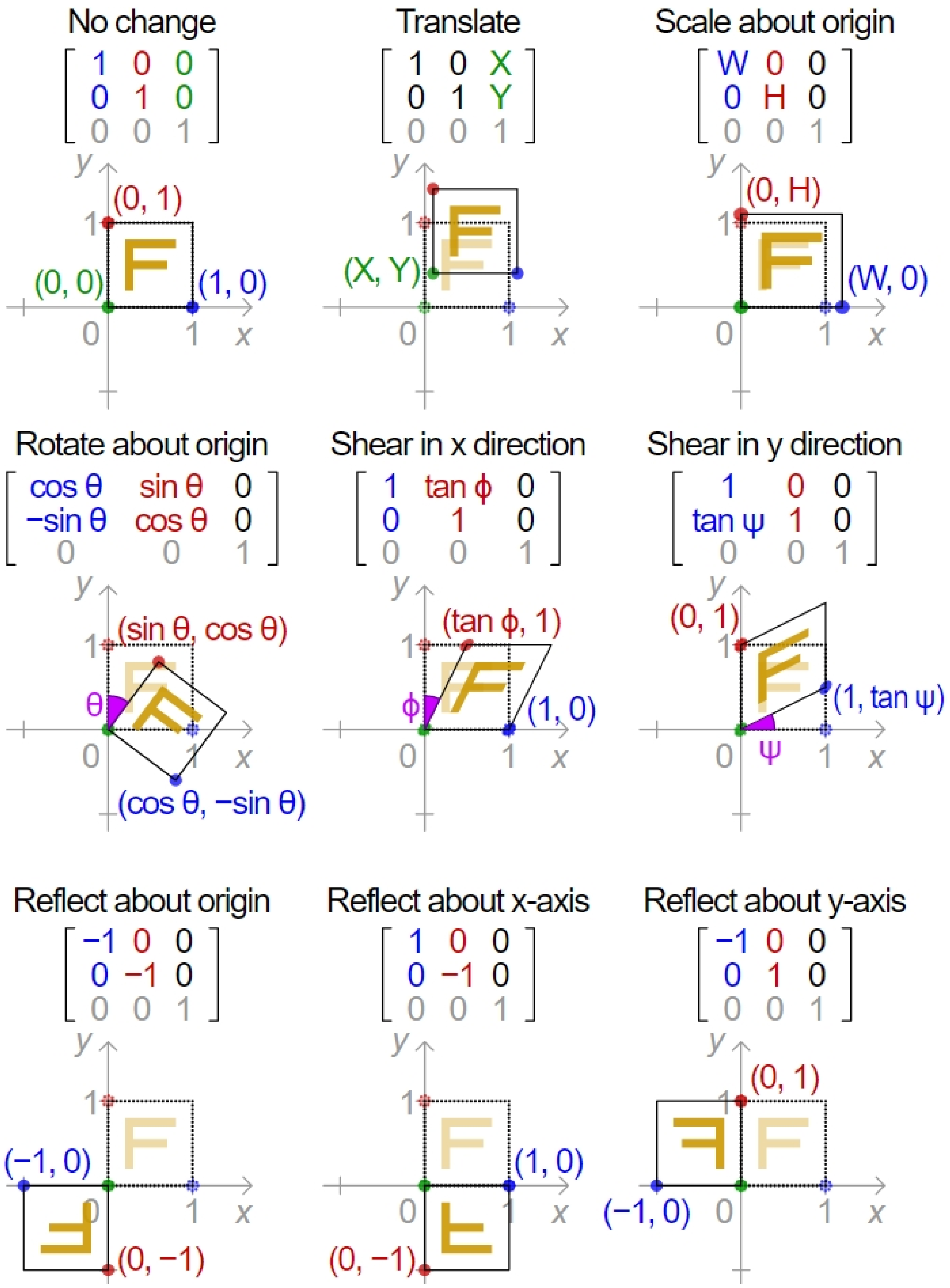


FIG. 8.94 – **Résumé des transformations affines (source : Wikipédia)**

~70 %
31 votes, 71.61%

8.3. Géométries Non-Euclidiennes

Le lecteur se rappellera peut-être lors de son parcours de la section sur la Géométrie Euclidienne (voir la page 2545) que la somme des angles d'un triangle est de 180 degrés. Cela vient de la géométrie euclidienne ou géométrie "plane", qui comprend quelque chose appelé le "postulat des parallèles" (c'est-à-dire le 5e postulat) qui stipule que si vous deviez dessiner deux points l'un à côté de l'autre, puis prolonger à partir de ces points deux lignes parallèles l'une à l'autre, ces lignes pourraient être prolongées à l'infini sans jamais se rapprocher ni s'éloigner ! Cela a un sens intuitif parfait ; la géométrie euclidienne semble être la structure de notre monde. Cependant, nos sens nous trompent souvent. Il s'avère que la gravité déforme littéralement la géométrie de l'espace-temps (pour une définition naïve et technique de "l'espace-temps", voir la section sur la Relativité Restreinte à la page **??**) elle-même, comme nous le verrons dans la section sur la Relativité Générale (voir page **??**). C'est vrai, à cause du champ gravitationnel, l'espace-temps n'est pas euclidien (et il y a une certaine quantité de gravité partout, puisqu'il s'agit d'une interaction à portée infinie). Si elle n'est pas euclidienne, que peut bien être cette géométrie ? Comme illustré ci-dessous, la géométrie sur des surfaces courbes est un peu différente de la géométrie sur des surfaces planes (euclidiennes) :

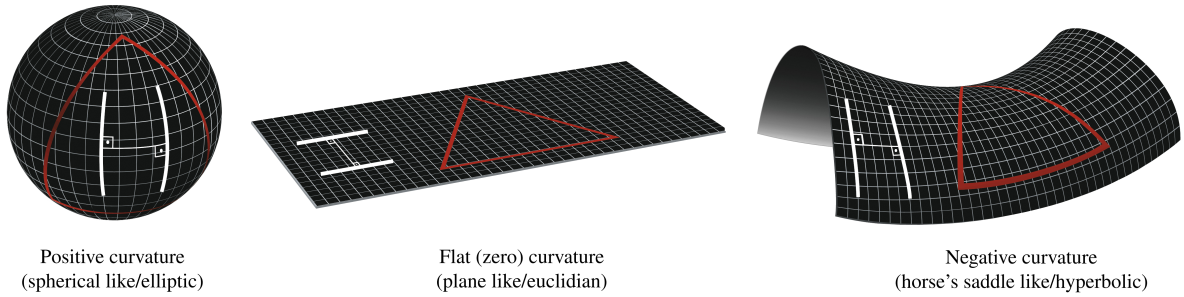


FIG. 8.95 – Courbes positives (elliptiques), négatives (hyperboliques) et plates (euclidiennes) (source : NASA / WMAP Science Team)

Dans une géométrie à courbure négative ("hyperbolique"), la somme des angles d'un triangle s'élève à moins de 180 degrés (π radian) et les lignes parallèles divergent les unes des autres. Dans une géométrie à courbure positive (également appelée géométrie "elliptique"), la somme des angles d'un triangle s'élève à plus de 180 degrés (π radian) comme démontré dans la section sur la trigonométrie et les lignes parallèles convergent les unes vers les autres. Une géométrie "plate", le cas euclidien, a une courbure nulle. C'est un cas particulier qui se situe exactement à mi-chemin entre les géométries hyperboliques et elliptiques et dans une géométrie a courbure nulle la somme des angles d'un triangle fait toujours 180 degrés (π radian) comme démontré à la page 2574. Une autre illustration ci-dessous montre l'échec du postulat des parallèles dans les espaces non euclidiens.

Nous supposons donc évidemment que les géométries non euclidiennes sont toutes les géométries qui ne satisfont pas nécessairement tous les axiomes de Hilbert (voir section Géométrie

Euclidienne page 2610) mais sans aucune contradiction entre elles (contrairement aux anciens axiomes d'Euclide, notamment celui sur les parallèles).

Une représentation particulière de ce type de géométrie consiste à définir les points comme étant répartis sur la surface d'une sphère (ce sont les intersection des diamètres de la sphère avec la surface), et les lignes, pour généraliser le concept de droite, (nous disons maintenant "géodésique"), comme les intersections de la surface de la sphère avec les plans contenant le centre de la sphère.
Deux points définissent alors de façon unique une ligne et un point est toujours donné par l'intersection de deux lignes. Cependant, dans cette géométrie, si nous nous donnons une ligne AB et un point P, il n'existe aucune ligne passant par P et ne coupant pas AB. Ainsi, le cinquième postulat d'Euclide n'est pas satisfait car en P nous ne pouvons tracer aucune parallèle à AB.

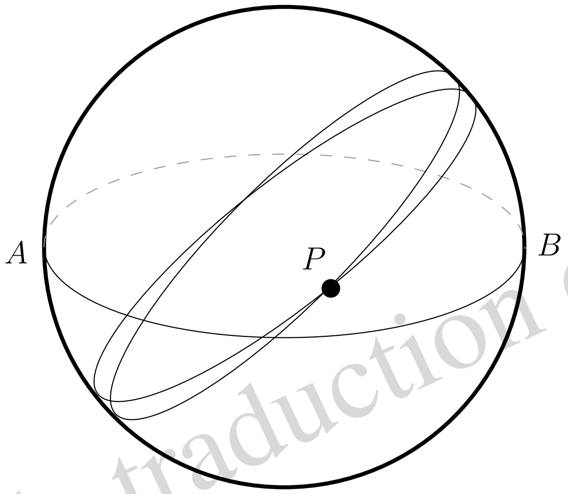


FIG. 8.96 – **Exemple illustré de la violation du 5ème postulat d'Euclide**

Erreurs de traduction de l'anglais

Remarque

Avant d'aborder cette section, nous recommandons vivement au lecteur d'avoir lu et si possible compris les section traitant de la Trigonométrie, de la Géométrie Euclidienne et du Calcul Tensoriel car nous allons en utiliser un grand nombre de résultats, non nécessairement triviaux, que nous avons pu y démontrer.

Dans le section de Géométrie Euclidienne, nous avons étudié un certain nombre de théorèmes relatifs aux plans. Insistons maintenant sur le fait que le "plan" est une figure bidimensionnelle dont la courbure est nulle et plongée dans un espace à 3 dimensions (donc le plan peut dès lors s'orienter). Ceci précisé, il convient peut-être de définir plus rigoureusement ce qu'est le concept intuitif de "courbure(s)".

8.3.1 Courbure(s)

Définition (#8.3.343) : Une figure est dite "courbe" s'il existe au moins un point situé sur la ou les droites définissant les frontières de la figure (surfaces, volumes, etc.) définissant une tangente sur la frontière et ne croisant pas cette même frontière ailleurs.

C'est Friedrich Gauss qui en 11824 (calendrier holocène) avait formulé la possibilité qu'il existe des alternatives aux géométries euclidiennes. Nous distinguons les géométries à "courbure négative", comme celle des russes Nikolaï Lobatchevsky (11829 selon le calendrier holocène) et Bolyai (11832 selon le calendrier holocène) (somme des angles d'un triangle inférieur à π, nombre infini de parallèles possibles à une droite passant par un point), des géométries à "courbure positive" comme celle de Riemann (11867 selon le calendrier holocène) (somme des angles d'un triangle supérieur à π, parallèles joignant les pôles).

Nous verrons dans cette section différentes géométries non euclidiennes, dont les plus connues sont les "géométries riemanniennes" (à courbure constante) et les "géométries Lobatchevsky" (de type hyperbolique à courbure non constante).

Remarque

La géométrie communément appelée "géométrie de Riemann" est un espace sphérique tridimensionnel, espace fini mais sans bornes, à courbure régulière, alternative au postulat Euclidien sur les parallèles.

L'intérêt de l'étude de ces géométries est que nous ne pouvons déterminer si l'Univers dans lequel nous vivons est fait d'un type de géométrie plutôt que d'un autre car étant donné notre taille (physique), plongés que nous sommes dans quelque géométrie que ce soit à faible courbure, toute surface de l'espace nous semble localement euclidienne (deux droites parallèles ne se coupent pas). Cependant, la Relativité Générale, qui fait usage à outrance du calcul tensoriel (généralisation de n'importe quelle géométrie) montre qu'il existe des zones de l'espace où la géométrie est très fortement courbée et donc localement non-euclidienne et seulement l'étude de ce genre de géométries nous permet de tirer des théories expliquant des observations qui ne sont pas exploitables uniquement avec l'intuition humaine.

Il faut aussi faire une distinction entre "courbure intrinsèque" et "courbure extrinsèque[3]". La courbure facile à visualiser est extrinsèque. La courbure physiquement significative est intrinsèque ! La courbure intrinsèque est ce dont traite la Relativité Générale ! Imaginez une feuille de papier posée à plat sur une table. Sur cette feuille se trouve un insecte. L'insecte marche le long du chemin le plus court sur la feuille du point A au point B. Nous pouvons tous convenir que la feuille est plate et que la ligne est droite. Enroulez maintenant la feuille de papier pour en faire un tube. L'insecte suit à nouveau le chemin le plus court du point A au point B. L'insecte aura parcouru exactement le même chemin sur le papier (en supposant que le chemin le plus court ne traverse pas la couture). Du point de vue du papier, le chemin est droit. De notre point de vue extérieur, le papier est courbé et le chemin suit le papier. L'exemple ci-dessus est un exemple de courbure extrinsèque. Nous avons un espace bidimensionnel (le papier) et un espace tridimensionnel plus grand (notre géométrie tridimensionnelle ordinaire) dans lequel il est intégré. La

[3]Une question courante sur Internet est de savoir si un espace ne peut être courbé que par rapport à un "espace droit" absolu ? Sinon, nous ne saurions jamais qu'il est courbé. Il doit y avoir une géométrie d'espace droit absolu sous-jacente à l'espace courbé ?

courbure du chemin dépend de la façon dont nous enroulons le papier, c'est-à-dire de la façon dont nous choisissons de procéder à l'intégration. Pour un habitant vivant à la surface du papier à l'aide de mesures effectuées uniquement sur cette surface, la courbure extrinsèque n'est pas détectable.

La courbure extrinsèque est une propriété de l'intégration. L'insecte trace le même chemin sur le papier, qu'il soit roulé ou déroulé. Ce n'est que de notre point de vue extérieur que nous pouvons voir une quelconque "courbure". Dans le cas d'une sphère, les choses ne sont pas aussi simples cependant. Nous ne pouvons pas enrouler une feuille de papier plate en une sphère sans l'étirer ou la froisser. Si l'insecte sur une sphère suit les chemins les plus courts et garde une trace précise des distances, il peut remarquer que la surface sur laquelle il vit n'est pas euclidienne. Les angles intérieurs d'un triangle totalisent plus de 180 degrés (π radians) comme nous l'avons déjà prouvé dans la section sur de Trigonométrie. L'exemple ci-dessus est un exemple de courbure intrinsèque. Pour un habitant vivant à la surface du papier en utilisant des mesures effectuées uniquement sur cette surface, la courbure intrinsèque est détectable. Voici maintenant la partie difficile... Dans les exemples ci-dessus, nous avons parlé d'une surface bidimensionnelle encastrée dans un espace euclidien tridimensionnel. C'était juste une aide à la visualisation. Nous pouvons parler de la géométrie d'un espace à deux (ou trois ou quatre ou plus) dimensions sans exiger qu'il soit intégré dans un espace de dimension supérieure. Une façon courante de le faire est d'imaginer que les habitants de l'espace sont capables de mesurer des distances. De n'importe quel point de l'espace à n'importe quel autre point de l'espace, ils peuvent mesurer la distance qui les sépare. La mesure de distance est la notion mathématique d'une "métrique". Un espace pour lequel une métrique existe est appelé un "espace métrique" tel que nous le connaissons (voir section de Topologie page 2429). Étant donné un espace métrique, nous pouvons définir la courbure intrinsèque en termes de métrique. Une façon standard de gérer un espace métrique en physique est de le diviser (si nécessaire) en morceaux et d'équiper chaque morceau d'un système de coordonnées cartésiennes. Il existe certaines règles concernant les limites et la façon de gérer les coutures entre les morceaux dont nous n'avons pas besoin de nous soucier. Le résultat est une "variété". Une surface d'une sphère peut être modélisée comme une variété à deux dimensions. Il n'y a pas d'intégration dans l'espace à trois dimensions et aucune notion significative de courbure extrinsèque. Il existe encore une courbure intrinsèque non nulle pour cet espace.

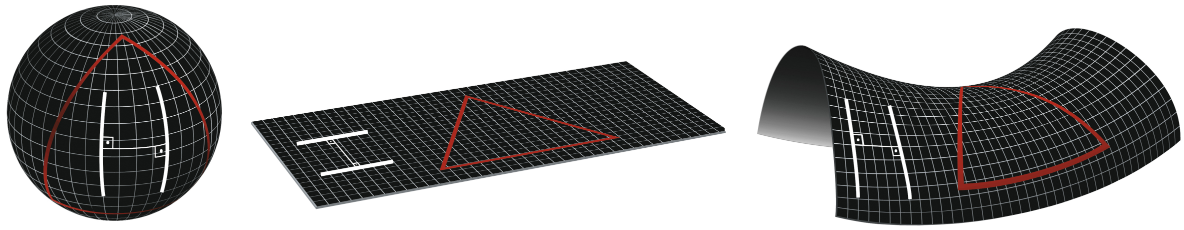
En cours de traduction de l'anglais

Définition (#8.3.344) : La "courbure intrinsèque" provient de la translation parallèle d'un vecteur tangent à un chemin de translation. Si un vecteur est translaté autour d'une boucle et qu'il ne parvient pas à revenir sur lui-même, il s'agit d'une courbure intrinsèque (voir un exemple dans la section de Calcul Tensoriel page 2088). "Courbure extrinsèque" est calculée par la translation parallèle d'un vecteur normal à une surface ou à un espace. Si la normale translatée s'écarte du vecteur normal en un point, la différence entre les deux vecteurs normaux définit la courbure extrinsèque pour une unité de translation le long de l'espace.

Avant de nous attaquer de manière formelle et abstraite à certaines géométries non-euclidiennes nous allons d'abord faire une introduction pragmatique et particulière de certains concepts qui ne nous sont pas totalement étrangers car déjà traités dans d'autres chapitres de manière théorique. Une fois cette introduction faite, qui nous sera très utile pédagogiquement parlant, nous aborderons les concepts vus plus rigoureusement.

8.3.2 Axiomes de la géométrie non-euclidienne

Pour obtenir une géométrie non euclidienne, il faut remplacer le postulat des parallèles A.P1 (ou son équivalent) que nous avons vu au cours de notre étude de la géométrie euclidienne par sa négation (A.NP1). Tout ce qui suit est à nouveau lié à cette figure :



Positive curvature (spherical like/elliptic) — Flat (zero) curvature (plane like/euclidian) — Negative curvature (horse's saddle like/hyperbolic)

Alors l'axiome des parallèles devient :

A.NP1. Le ainsi nommé "axiome de Lobatchevsky" ou "Postulat de la Parallèle Hyperbolique (PPH)", suppose qu'il existe au moins deux droites passant par le point P donné non situé sur une droite donnée et parallèles à cette droite (nous parlopns alors de "deux droites ultra-parallèles divergentes").

Une formulation alternative et plus simple est

A.NP1'. Il existe une droite L et un point P non situé sur L tels que par P passent au moins deux droites distinctes parallèles à l. Autrement dit : Par un point non situé sur une droite, il existe plusieurs droites parallèles à la droite donnée ! ! !

La forme ci-dessus de l'axiome de parallélisme assure l'existence d'un nombre infini de droites parallèles satisfaisant les conditions données. L'espace géométrique défini par le système axiomatique incluant l'axiome de Lobatchevsky est appelé "géométrie hyperbolique non-euclidienne". La géométrie de l'hyperboloïde à surface courbe peut être décrite comme une géométrie hyperbolique. Dans l'espace hyperbolique, les angles intérieurs d'un triangle arbitraire sont inférieurs à π.

Une deuxième forme possible de la négation de l'axiome de parallélisme est la suivante :

A.NP1. Il n'existe aucune droite passant par le point donné qui ne soit située sur une droite donnée et parallèle à cette droite.

L'espace géométrique défini par ce dernier système axiomatique a le nom "géométrie elliptique non euclidienne". La géométrie de la sphère (géométrie sphérique) peut être considérée comme une géométrie elliptique. Dans l'espace elliptique, les angles intérieurs d'un triangle quelconque sont supérieurs à π (voir la preuve ci-dessous).

En cours de traduction de l'anglais

8.3.3 Théorèmes généralisés sur la somme des angles

Nous avons déjà démontré le théorème de la somme des angles pour la géométrie euclidienne plus haut dans la section Trigonométrie à la page 2574. Voyons maintenant un cas pratique très important pour les géométries non-euclidiennes : le cas de la sphère !

Pour prouver que pour le cas sphérique la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180 degrés (π radian), il faut d'abord introduire le concept de Lune sur une sphère.

Définition (#8.3.345) : En géométrie sphérique, une "lune sphérique" (ou "biangle") est une aire sur une sphère délimitée par deux demi-grands cercles qui se rencontrent en des points antipodaux.

Étant donné la figure ci-dessous qui nous intéressera plus tard :

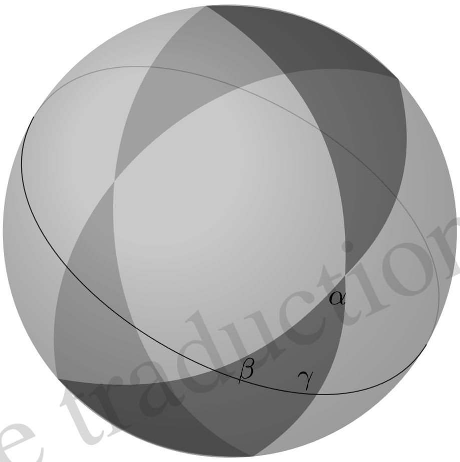


FIG. 8.97 – **Lunes sur une sphère**

En cours de traduction de l' anglais

nous avons 6 lunes notées $L(\alpha)$, $L(\bar{\alpha}$, $L(\beta)$, $L(\bar{\beta})$, $L(\gamma)$ et $L(\bar{\gamma})$.

Nous savons que la surface d'une sphère est $4\pi R^2$ (voir section 2934), la surface d'une Lune d'angle θ est alors directe :

$$S_{\text{Lune}}(\theta) = 4\pi R^2 \frac{\theta}{2\pi} = 2\theta R^2 \tag{8.3.1}$$

Maintenant que nous avons présenté ce qu'est une Lune et comment calculer sa surface, nous pouvons prouver le théorème de la somme des angles pour un espace sphérique non-euclidien !

Considérons les trois angles α, β et γ du triangle visible sur la sphère dans la figure ci-dessus.

Les six lunes créées par les angles du triangle englobent toute la sphère et chevauchent également la surface du triangle à l'avant et à l'arrière de la sphère 4 fois de plus. Ainsi, nous commençons avec le rayon d'une sphère plus 4 fois l'aire du triangle, ce qui donne les 6 lunes.

Dès lors :

$$4\pi R^2 + 4S_{\alpha\beta\gamma} = 2L(\alpha) + 2L(\beta) + 2L(\gamma) \tag{8.3.2}$$

En simplifiant nous obtenons :

$$2\pi R^2 + 2S_{\alpha\beta\gamma} = L(\alpha) + L(\beta) + L(\gamma) \tag{8.3.3}$$

À ce stade, nous devons utiliser le résultat précédent qui indique qu'une lune dont l'angle du coin est de θ radians a une aire de $2\theta R^2$:

$$2\pi R^2 + 2S_{\alpha\beta\gamma} = 2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 \tag{8.3.4}$$

Dès lors :

$$2\pi R^2 + 2S_{\alpha\beta\gamma} = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma) \tag{8.3.5}$$

Ainsi :

$$\pi + \frac{S_{\alpha\beta\gamma}}{R^2} = \alpha + \beta + \gamma \tag{8.3.6}$$

Et comme $S_{\alpha\beta\gamma}/R^2 > 0$, nous avons finalement :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi \tag{8.3.7}$$

Ce résultat est parfois appelé le "théorème du triangle sphérique".

Comme nous avons prouvé pour la géométrie euclidienne plate que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ et tout juste ci-dessus que pour la géométrie non-euclidienne sphérique que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, donc par déduction pour la géométrie hypergéométrique non-euclidienne nous avons $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

8.3.4 Géodésique et Équation Métrique

Revenons donc sur les concepts de géodésique et courbure dont nous avons souvent fait mention dans la section de Calcul Tensoriel (le fait de ne pas avoir lu ce chapitre ne pose aucun problème normalement à la compréhension de ce qui va suivre).

Considérons la surface bidimensionnelle d'une sphère de rayon R. Étant donnés deux points B et C diamétralement opposés, nous cherchons la plus courte distance s mesurée sur la sphère entre B et C. La courbe obtenue est comme nous le savons une "géodésique", notion qui généralise donc, pour une surface arbitraire, la notion de droite du plan :

En cours de traduction de l' anglais

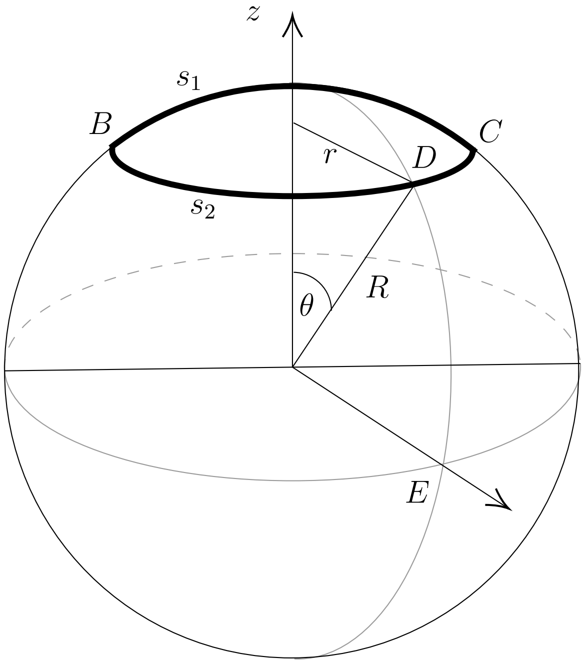


FIG. 8.98 – **Illustration du problème pour la recherche de la géodésique**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Nous supposerons comme intuitif que la longueur d'une courbe de l'espace tridimensionnel euclidien est toujours supérieure ou égale à la longueur de toute projection plane de cette courbe. La courbe géodésique est donc nécessairement une courbe plane.

Le rayon entre l'axe Oz et l'un des points B ou C est trivialement donné par un peu de trigonométrie élémentaire (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$r = R\sin(\theta) \tag{8.3.8}$$

Et donc la moitié du périmètre du cercle à hauteur de B et C sera donné par :

$$s_2 = \frac{P_2}{2} = \frac{2\pi R\sin(\theta)}{2} = \pi R\sin(\theta) \tag{8.3.9}$$

Et nous avons démontré dans la section de Trigonométrie que le périmètre d'un cercle dépendant de l'angle d'ouverture de ce dernier était donné par (α doit être en radians !) :

$$L = R\alpha \tag{8.3.10}$$

Il vient donc automatiquement :

$$s_1 = R2\theta \tag{8.3.11}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} s_1 &= R2\theta \\ s_2 &= R\pi\sin(\theta) \end{aligned} \tag{8.3.12}$$

Un tracé ou une approximation de Taylor montre facilement que $\pi\sin(\theta) \geq 2\theta$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ puis sur le même intervalle $s_2 \geq s_1$ (il y a égalité en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$).

Les géodésiques de la sphère sont donc les arcs de grands cercles s_1, trajets empruntés par les avions pour les vols intercontinentaux, et correspondent aux lignes obtenues entre la surface de la sphère et un plan passant par le centre de celle-ci !

Les propriétés géométriques des figures tracées sur la surface d'une sphère ne sont donc plus celles de la géométrie euclidienne. Ainsi, le plus court chemin d'un point B à un point C, sur la surface sphérique, est constitué par un arc de grand cercle passant par les points B et C. Les arcs de grand cercle jouent le même rôle pour la sphère que les droites dans le plan. Ce sont les "géodésiques" de la sphère.

Considérons maintenant deux surfaces bidimensionnelles : la surface de la sphère et celle du cylindre. Etant donnés deux points B et C, nous traçons la courbe géodésique entre ces points :

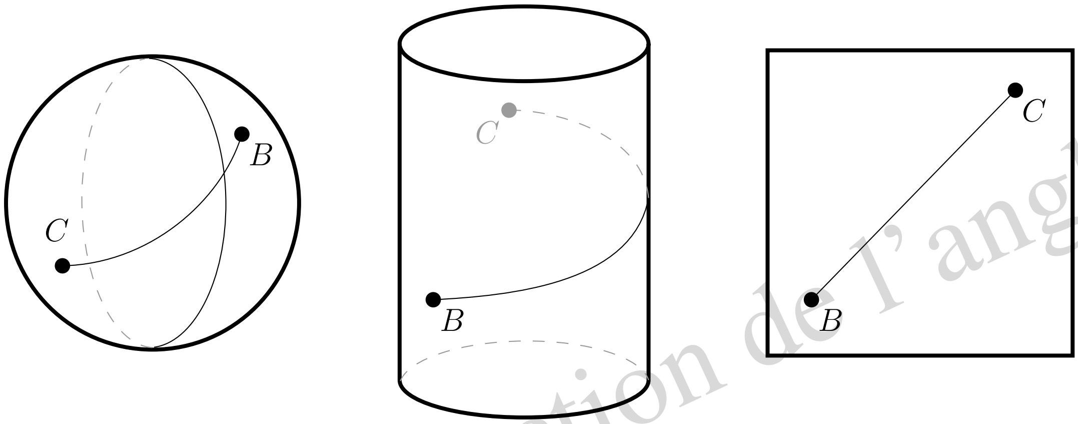


FIG. 8.99 – Représentation plan de la surface latérale d'un cylindre

En cours de traduction de l'anglais

Le cylindre peut être découpé parallèlement à son axe et déplié à plat. La géodésique apparaît ainsi comme une droite du plan. Nous disons alors que le cylindre est "intrinsèquement plat" (même si sa topologie diffère de celle du plan, il faut en particulier ici éviter que la coupure ne traverse la géodésique). Ce n'est évidemment intuitivement pas le cas de la surface de la sphère.

Dans le cas de la surface cylindrique, nous pouvons définir les coordonnées cartésiennes du plan $B(y_1, z_1)$ et $C(y_2, z_2)$ permettant d'écrire la longueur s de la courbe (droite) BC sous la forme du théorème de Pythagore :

$$s^2 = (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{8.3.13}$$

La métrique du plan est euclidienne et sous forme infinitésimale nous obtenons "l'équation métrique euclidienne" :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{8.3.14}$$

Sur le cylindre, le changement de variable donne $y = r\theta$ (avec l'angle en radians !) :

$$\mathrm{d}s^2 = (r\theta_2 - r\theta_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = r^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{8.3.15}$$

Ou sous forme locale :

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{8.3.16}$$

La surface du cylindre peut ainsi être représentée par des coordonnées cartésiennes analogues à celles du plan, la métrique de la surface du cylindre étant euclidienne sous forme infinitésimale et sous forme globale.

Remarque

La relation précédente correspond à ce que nous avions obtenu dans la section de Calcul Tensoriel pour l'équation métrique en coordonnées polaires.

Nous pouvons nous intéresser maintenant au problème d'écrire l'analogue du théorème de Pythagore pour une surface sphérique. L'impossibilité de découper la sphère et de l'aplatir pour épouser un plan suggère des difficultés...

C'est la raison pour laquelle l'équation de la métrique ne peut s'écrire sous forme générale comme le théorème de Pythagore. Effectivement, nous avons vu dans la section de Calcul Tensoriel (page 2074) que celle-ci était donnée pour une surface sphérique par :

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \tag{8.3.17}$$

Cependant, localement (c'est-à-dire dans une région de petite dimension devant le rayon de la sphère), les propriétés de la sphère peuvent être décrites par des coordonnées cartésiennes d'un plan tangent à sa surface (c'est la propriété essentielle des espaces de Riemann !) tel que l'équation métrique soit localement euclidienne :

$$\mathrm{d}s^2\cong r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2(\theta)\phi z^2 \tag{8.3.18}$$

En posant :

$$\mathrm{d}\xi=\sqrt{g_{\theta\theta}}\mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}\eta=\sqrt{g_{\phi\phi}}\mathrm{d}\phi \tag{8.3.19}$$

Nous avons alors :

$$\mathrm{d}s^2\cong g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2+g_{\phi\phi}\mathrm{d}\phi^2=\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2 \tag{8.3.20}$$

avec :

$$g_{\theta\theta}=r^2 \qquad g_{\phi\phi}=r^2\sin^2(\theta) \tag{8.3.21}$$

Alors que (θ,ϕ) sont les "coordonnées de Gauss", sont les "coordonnées de Riemann" du plan localement tangent. Ainsi, nous remarquons que l'espace Euclidien est un cas particulier des coordonnées de Gauss pour lequel nous avons (voir section Relativité Restreinte page ??) :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j=g_{11}\mathrm{d}u\mathrm{d}u+g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g_{21}\mathrm{d}v\mathrm{d}u+g_{22}\mathrm{d}v\mathrm{d}v\\&=1\mathrm{d}u\mathrm{d}u+0\mathrm{d}u\mathrm{d}v+0\mathrm{d}v\mathrm{d}u+1\mathrm{d}v\mathrm{d}v=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2\end{aligned} \tag{8.3.22}$$

et donc le tenseur métrique est une matrice identité (les éléments de la diagonale sont égaux à 1 le reste étant nul) :

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \tag{8.3.23}$$

Le lecteur aura peut-être remarqué que si nous prenons la base vectorielle des coordonnées polaires comme vu dans la section de Calcul Vectoriel mais sans les normaliser à l'unité (c'est-à-dire sans diviser le premier vecteur par r et le second par $\sin(\theta)$) nous avons :

$$g_{ij}=\vec{e}_i\circ\vec{e}_j \tag{8.3.24}$$

avec $i,j=\{\theta,\phi\}$ et ainsi de suite pour tout autre système de coordonnées.

En cours de traduction de l'anglais

8.3.5 Espaces de Riemann

Pour mieux comprendre ce qu'est un espace de Riemann, nous allons de suite passer par un petit exemple d'une surface à deux dimensions (exemple très classique) :

Considérons une sphère de rayon r, de surface S, située dans l'espace ordinaire à trois dimensions. Les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point M de la surface S peuvent s'exprimer, par exemple, en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (voir section Calcul Vectoriel page 1826). La sphère est entièrement décrite pour un rayon r donné et $0 \leq \phi < 2\phi$ et $0 \leq \theta < \pi$.

Trois tels paramètres, permettant de déterminer un point sur la surface d'une sphère, sont nous le savons (voir section Calcul Tensoriel page 2065) des coordonnées curvilignes sur la surface ou également dites "coordonnées de Gauss" (Gauss étant un des premiers mathématiciens à s'intéresser à l'étude des corps plongés dans les espaces non-euclidiens). D'autres paramètres quelconques u, v, w peuvent évidemment être choisis comme coordonnées curvilignes sur la surface.

L'élément linéaire de la surface $\mathrm{d}s^2$, carré de la distance entre deux points infiniment voisins M, M', s'écrit en fonction des coordonnées sphériques, comme nous l'avons démontré dans la section de Calcul Tensoriel et juste plus haut :

$$\mathrm{d}s^2 \cong r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \tag{8.3.25}$$

Nous obtenons ainsi une expression de l'élément linéaire en fonction des trois seules coordonnées de Gauss (r, θ, ϕ). Nous pourrions bien sûr imposer une étude locale (plan tangent) afin que l'élément linéaire ne soit plus fonction que de (θ, ϕ) comme nous l'avons vu plus haut :

$$\mathrm{d}s^2 \cong r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \tag{8.3.26}$$

Écrite à l'aide des trois paramètres, la surface de la sphère (considérée comme un espace à deux dimensions) constitue un exemple d'espace de Riemann à deux dimensions dont l'élément linéaire est de la forme générale bien connue (voir section de Calcul Tensoriel) :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{8.3.27}$$

où les $\mathrm{d}u^i, \mathrm{d}u^j$ sont les composantes contravariantes du vecteur $\mathrm{d}\vec{M} = \overrightarrow{MM'}$ par rapport au repère naturel $(M, \vec{e}_j)$.

Remarque

L'étude des figures sur des surfaces Riemanniennes fait partie de la géométrie différentielle à laquelle nous consacrons un chapitre entier dans cette section.

Considérons à présent une surface quelconque de coordonnées u^1, u^2. Les coordonnées cartésiennes x, y, z de l'espace ordinaire où se trouve plongée cette surface s'écrivent de manière générale avec les coordonnées de Gauss :

$$x = x(u^1, u^2) \qquad y = y(u^1, u^2) \qquad z = z(u^1, u^2) \tag{8.3.28}$$

Remarquons par ailleurs que l'équation métrique sous forme tensorielle :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{8.3.29}$$

En cours de traduction de l'anglais

peut s'écrire sous forme développée de la manière suivante (cette relation est démontrée avec une approche géométrique dans la section de Géométrie Différentielle à la page 2850) :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2} \tag{8.3.30}$$

avec :

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial}{\partial u}x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u}y\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u}z\right)^2 = (\partial_1 x)^2 + (\partial_1 y)^2 + (\partial_1 z)^2 \\
G &= \left(\frac{\partial}{\partial v}x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v}y\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v}z\right)^2 = (\partial_2 x)^2 + (\partial_2 y)^2 + (\partial_2 z)^2 \\
F &= \frac{\partial}{\partial u}x\frac{\partial}{\partial v}x + \frac{\partial}{\partial u}y\frac{\partial}{\partial v}y + \frac{\partial}{\partial u}z\frac{\partial}{\partial v}z = \partial_1 x\partial_2 x + \partial_1 y\partial_2 y + \partial_1 z\partial_2 z
\end{aligned} \tag{8.3.31}$$

Remarques

R1. L'expression donnée ci-dessus de l'élément linéaire $\mathrm{d}s$ s'appelle "forme quadratique fondamentale" de la surface considérée. Les coefficients E, F, G sont des fonctions des coordonnées curvilignes. De manière générale cette surface, considérée comme un espace à deux dimensions, constituera un exemple d'espace de Riemann, pour des coordonnées curvilignes arbitraires.

R2. Les différents espaces de Riemann constituent ce que nous appelons sous une forme générale (parce qu'il n'y pas que des espaces de type Riemannien à courbure constante) une "variété" munie d'une métrique Riemannienne. Une variété peut être définie (non formellement), par exemple, par un ensemble de points situés dans un espace préexistant. De manière générale une surface donne l'idée d'une variété à deux dimensions. La sphère et le tore sont des variétés à deux dimensions sans frontière. Un cylindre de révolution, un paraboloïde hyperbolique, sont des variétés à deux dimensions ouvertes, avec frontières à l'infini. Mais nous pouvons aussi envisager des variétés abstraites. C'est le cas par exemple d'un espace de configuration. Il s'agit alors d'un espace de points à n dimensions représenté par un ensemble q^i (ou noté u^i) de coordonnées généralisées (voir l'introduction au formalisme lagrangien dans la section de Mécanique Analytique page **??**), ces dernières pouvant avoir des valeurs comprises dans un domaine fini ou non.

Nous pouvons maintenant mieux définir ce qu'est un espace de Riemann.

Définition (#8.3.346) : Un "espace de Riemann" est une variété à laquelle nous avons attaché une métrique. Cela signifie que, dans chaque partie de la variété, représentée analytiquement au moyen d'un système de coordonnées , nous nous sommes donnés une forme différentielle quadratique :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{8.3.32}$$

qui constitue la métrique de l'espace.

Les coefficients g_{ij} ne sont pas entièrement arbitraires et doivent vérifier, nous l'avons démontré dans la section de Calcul Tensoriel, les conditions suivantes :

C1. Les composantes sont symétriques $g_{ij} = g_{ji}$.

C2. Le déterminant de la matrice g_{ij} est différent de zéro.

C3. La forme différentielle de l'élément linéaire $\mathrm{d}s^2$, et par conséquent le concept de distance défini par les g_{ij}, est invariante vis-à-vis de tout changement de coordonnées.

C4. Toutes les dérivées partielles d'ordre deux des g_{ij} existent et sont continues donc de classe $\mathcal{C}^2$.

Un espace de Riemann est donc un espace de points, chacun étant repéré par un système de n coordonnées u^i, doté d'une métrique quelconque telle que la forme différentielle de l'élément linéaire vérifiant les conditions précédentes. Cette métrique est dite dès lors "métrique Riemannienne".

Remarques

R1. Si la métrique est définie positive, c'est-à-dire si $g_{ij}u^iu^j$ pour tout vecteur $\vec{v}$ non nul, nous disons que l'espace est "proprement Riemannien". Dans ce cas, le déterminant de la matrice g_{ij} est strictement positif et toutes les valeurs propres de la matrice sont strictement positives (voir section Géométrie Analytique page 2771).

R2. Par définition, nous disons qu'une métrique d'un espace est euclidienne lorsque tout tenseur fondamental de cet espace peut être ramené, par un changement approprié de coordonnées, à une forme telle que (voir section Calcul Vectoriel page 1789) la base orthonormée canonique. C'est-à-dire : $g_{ij}=\delta_{ij}$.

R3. La définition des espaces Riemanniens montre que l'espace euclidien est un cas très particulier de ces espaces. Il n'existe donc qu'un seul espace euclidien alors que nous pouvons créer une infinité d'espaces Riemanniens.

Il est important de voir que :

$$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2 \tag{8.3.33}$$

Peut être réécrit :

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2}=E\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t^2}+2F\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t^2}+G\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t^2}=E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{8.3.34}$$

que nous notons par tradition :

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2}=E\dot{\mathrm{u}}^2+2F\dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{v}}+G\dot{\mathrm{v}}^2 \tag{8.3.35}$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}s=\sqrt{E\dot{\mathrm{u}}^2+2F\dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{v}}+G\dot{\mathrm{v}}^2}\mathrm{d}t \tag{8.3.36}$$

D'où la longueur d'une courbe sur toute surface différentielle :

$$\boxed{s(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\dot{\mathrm{u}}^2+2F\dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{v}}+G\dot{\mathrm{v}}^2}\mathrm{d}t} \tag{8.3.37}$$

En cours de rédaction

✍**Exemple :**

Considérons l'équation paramétrique d'une surface hyperbolique particulière :

$$\Sigma(u,v)=\begin{pmatrix}u\\v\\uv\end{pmatrix},\ u,v\in\mathbb{R}^2 \tag{8.3.38}$$

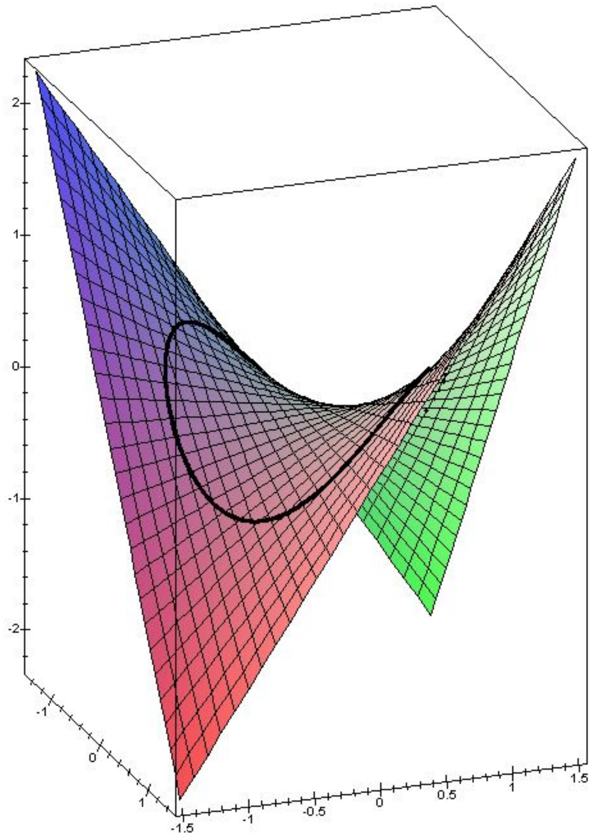
Nous prenons maintenant l'équation paramétrique d'un cercle de rayon 1 sur le plan :

$$\Gamma(u(t),v(t))=\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix} \tag{8.3.39}$$

C'est à dire visuellement avec Maple 4.00b :

```
>x:=u;y:=v;z:=u*v;
>with(plots):
>surface:=plot3d([x,y,z],u=-1.5..1.5,v=-1.5..1.5,grid=[30,30],
scaling=constrained,axes=boxed,style=PATCH):
>curve:=spacecurve([cos(t),sin(t),cos(t)*sin(t)],t=-4*Pi..4*Pi,
numpoints=1000,scaling=CONSTRAINED,orientation=[50,60],style=PATCH,
axes=NORMAL,color=black,thickness=3):
>display(surface,curve,orientation=[-20,70]);
```

Ce qui donne :



Ainsi :

$$\begin{aligned}E&=(\partial_1 x)^2+(\partial_1 y)^2+(\partial_1 z)^2=1^2+0^2+v^2=1+v^2\\G&=(\partial_2 x)^2+(\partial_2 y)^2+(\partial_2 z)^2=0^2+1^2+u^2=1+u^2\\F&=\partial_1 x\partial_2 x+\partial_1 y\partial_2 y+\partial_1 z\partial_2 z=0^2+0^2+uv=uv\end{aligned} \tag{8.3.40}$$

Nous avons alors :

$$s(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t^1}\sqrt{(1+v^2)\dot{\mathrm{u}}^2+2uv\dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{v}}+(1+u^2)\dot{\mathrm{v}}^2}\mathrm{d}t \tag{8.3.41}$$

Et nous voulons calculer le périmètre du cercle sur la surface. Par conséquent :

$$\begin{aligned}s(0,2\pi)&=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1+v^2)\dot{\mathrm{u}}^2+2uv\dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{v}}+(1+u^2)\dot{\mathrm{v}}^2}\mathrm{d}t\\&=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos^2(t))\dot{\mathrm{u}}^2+2\cos(t)\sin(t)\dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{v}}+(1+\sin^2(t))\dot{\mathrm{v}}^2}\mathrm{d}t\\&=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1+\sin^2(t))(-\sin(t))^2+2\cos(t)\sin(t)(-\sin(t))(\cos(t))+(1+\cos^2(t))(\cos(t))^2}\mathrm{d}t\\&=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1+\sin^2(t))(-\sin(t))^2-2\cos^2(t)\sin^2(t)+(1+\cos^2(t))(\cos(t))^2}\mathrm{d}t\\&=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos^2(t)\sin^2(t)+\sin^4(t)+\cos^4(t)}\mathrm{d}t\\&=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+(\cos^2(t)-\sin^2(t))^2}\mathrm{d}t\\&=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2(2t)}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8.3.42}$$

Nous faisons un changement de variable $\tau=2t$, et donc :

$$\mathrm{d}\tau=2\mathrm{d}t\qquad 2\pi\rightarrow 2\pi\qquad 0\rightarrow 0 \tag{8.3.43}$$

et dès lors :

$$s(0,2\pi)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{4\pi}\sqrt{1+\cos^2(\tau)}\mathrm{d}\tau \tag{8.3.44}$$

Comme l'intégrande est pair :

$$s(0,2\pi)=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2(\tau)}\mathrm{d}\tau \tag{8.3.45}$$

Nous avons alors :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2(\tau)}\mathrm{d}\tau = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2(\tau)}\mathrm{d}\tau = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{2-\sin^2(\tau)}\mathrm{d}x \tag{8.3.46}$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{\sin^2(\tau)}{2}}\mathrm{d}\tau = 4\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{8.3.47}$$

avec :

$$\boxed{E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2(\tau)}\mathrm{d}x} \tag{8.3.48}$$

et est appelée "intégrale elliptique complète de seconde espèce" (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1577). Cette intégrale ne peut pas être calculée formellement. Mais une intégration numérique donne :

$$s(0,2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2(\tau)}\mathrm{d}\tau \cong 7.6404 \tag{8.3.49}$$

En cours de traduction anglais

~30 %

26 votes, 80.77%

8.4. Géométrie Projective

DEPUIS epuis Chasles et jusque dans les années 1930 (calendrier holocène), la géométrie projective était souvent synonyme de "géométrie supérieure". Elle s'opposait à la géométrie euclidienne : élémentaire... et analytique. À l'époque de Monge, de Carnot, de von Staudt, on parlait aussi de "géométrie de position" ou de "situation". Ces géométries étudient les figures au point de vue de leurs positions respectives et des propriétés invariantes qui les lient dans une transformation géométrique (rotation, symétrie, homothétie,etc.) homographique tout particulièrement. Outre la division harmonique, notion de base, elle fait appel au célèbre rapport anharmonique (birapport), à l'inversion, l'involution, la transformation par polaires réciproques, la projection stéréographique[4], la corrélation, l'homologie, la dualité, les coniques, etc. (voir plus loin dans ce texte pour les définitions).

Définition (#8.4.347) : La "géométrie projective" est un domaine des mathématiques. Elle étudie les propriétés géométriques qui sont invariantes par rapport aux transformations projectives. Cela signifie que, par rapport à la géométrie élémentaire, la géométrie projective a un cadre différent, "l'espace projectif ", et un ensemble sélectif de concepts géométriques de base.

La géométrie projective est relativement abstraite en dehors de quelques généralités et principes de base exposés ci-dessous. Elle est donc relativement difficile à appréhender et requiert, avant de s'y plonger, une bonne connaissance en géométrie élémentaire voire, dans l'espace, une parfaite maîtrise de l'espace tridimensionnel, dans le cycle observation-représentation-interprétation. Ceci nous a amené à introduire certains concepts qui n'ont normalement pas leur place ici, mais qui nous le pensons, peuvent aider grandement l'intéressé à mieux comprendre cette branche des mathématiques.

Dans un premier lieu, nous allons étudier les concepts élémentaires de la perspective en s'attardant particulièrement sur le concept de présentation "projective" (il existe d'autres méthodes de perspective empiriques : cavalière, isométrique, militaire, . . . mais ces dernières n'ont pas de sens mathématique ou réel même si elles représentent assez convenablement des objets volumiques). Ensuite, nous étudierons les représentations mathématiques de quelques objets tridimensionnel dans le cadre d'applications pour enfin passer à l'étude de la géométrie projective dure. Enfin, nous étudierons la mathématique utilisée dans la représentation informatique des formes géométriques (splines, courbes de bézier, etc.).

Définition (#8.4.348) : La "perspective" désigne une manière de voir, d'analyser ou d'interpréter quelque chose, souvent influencée par des contextes culturels, historiques ou personnels. En arts visuels, c'est une technique permettant de représenter la profondeur et la tridimensionnalité sur une surface plane. En sciences sociales ou en philosophie, cela peut faire référence à un point de vue ou une position conceptuelle sur un sujet particulier.

En cours de traduction de l'anglais

[4] ie : projection sur un plan

Remarque

La "géométrie descriptive" est une forme artistique rigoureuse de la géométrie projective mais non formelle (dans le sens qu'elle n'est pas formalisée mathématiquement... du moins pour autant que nous le sachions).

En cours de traduction de l' anglais

8.4.1 Perspective conique (perspective centrale)

Un des problèmes de l'étude des volumes tridimensionnels et de leur représentation est le concept de "perspective". Effectivement, l'être humain ne peut voir les 3 dimensions d'un objet, c'est le cerveau qui interprète les ombres et reflets d'un objet afin que nous l'interprétions comme ayant un volume (il existe des illusions d'optique qui vont dans ce sens. . . : les "trompe l'oeil").

Voici un exemple animé d'une des illusions d'optique les plus célèbres, appelée l'illusion de table de Shepard, qui montre que nous ne devrions pas, statistiquement parlant, trop faire confiance à nos intuitions... :

En cours de traduction de l' anglais

L'animation ci-dessus fonctionnera pour les personnes disposant d'un lecteur PDF avec Adobe Flash Player installé et activé (sinon voir ici : `https://vimeo.com/575741013`).

Nous nous concentrerons dans les paragraphes suivants sur la "perspective conique", également appelée ""perspective centrale" ou "perspective linéaire". La perspective linéaire aurait été conçue vers 11415 (calendrier holocène) par l'architecte italien de la Renaissance Filippo Brunelleschi et documentée plus tard par l'architecte et écrivain Leon Battista Alberti en 11435

(calendrier holocène).

Remarque

Dans le domaine de la géométrie projective nous ne parlons pas de "perspective conique" mais de "projection conique".

Définition (#8.4.349) : La "perspective conique" ou "projection perspective" est par construction la représentation la plus proche de nos perceptions visuelles, elle permet notamment de voir une sphère comme un cercle étant donné que la vision humaine est basée sur un cône visuel qui, lorsqu'on regarde une sphère, équivaut à voir un cercle comme illustré ci-dessous :

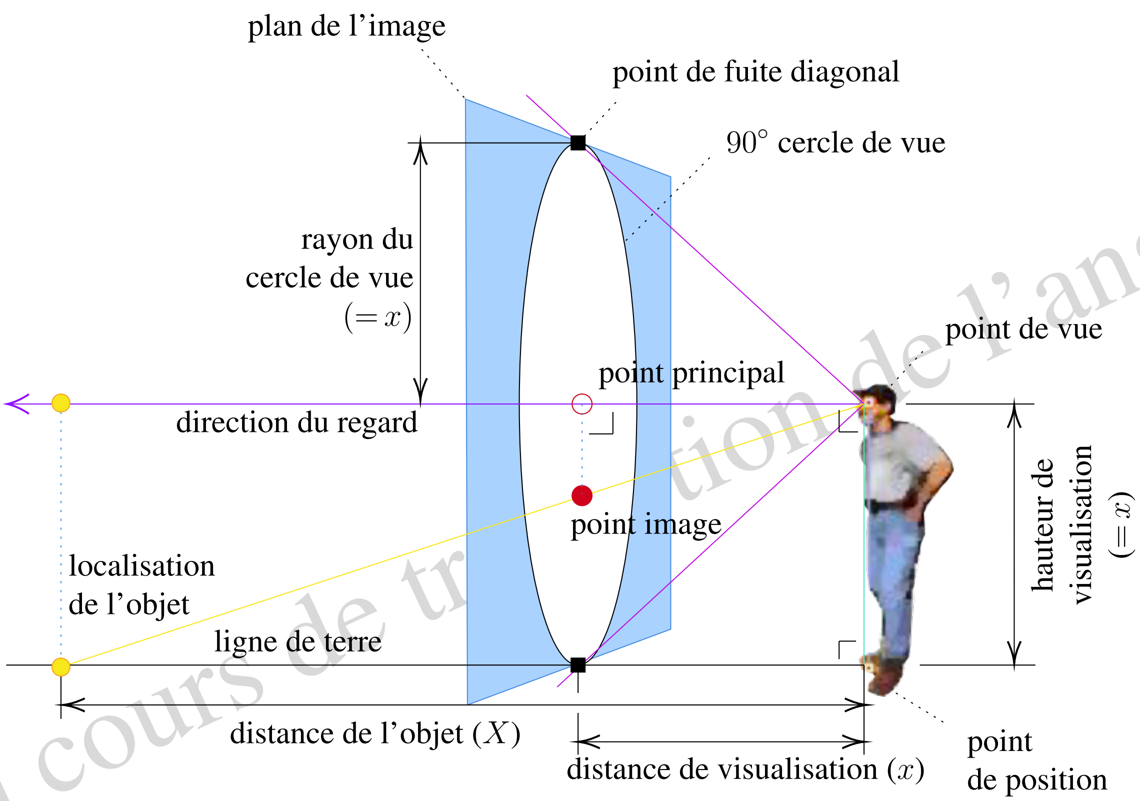


FIG. 8.100 – **Cône visuel et cercle de projection correspondant**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

La perspective conique est celle des peintres de la Renaissance. C'est aussi celle qui apparaît sur une photo.

La difficulté de la représentation en perspective est de traduire dans un plan (celui de la feuille de papier par exemple ou l'écran d'ordinateur) une construction qui est définie - de manière assez simple, d'ailleurs - dans l'espace à l'aide d'outils mathématiques.

Une projection conique de l'espace usuel à 3 dimensions est donc transformation projective qui envoie tous les points de cet espace sur un même plan de cet espace. Elle nécessite la donnée d'un point O (équivalent à la position de l'oeil de l'observateur) et d'un plan de projection appelé "tableau" ou encore Vitre de Dürer"" (l'équivalent de notre rétine) en se réferrant à une relativement vieille méthode de peinture :

FIG. 8.101 – Illustration de l'origine de la méthode du verre de Dürer

En cours de traduction anglais

Nous verrons lors des développements théoriques que contrairement aux projections affines (voir la sous-section suivants), la projection conique ne conserve pas le barycentre (donc les rapports de longueurs sur une droite donnée) mais elle conserve l'alignement et le birapport.

Lorsque nous parlons de perspective conique, nous utilisons quelques plans et droites particuliers dans l'espace tridimensionnel (voir figure plus bas) :

Définitions (#8.4.350) :

D1. Le "plan du tableau" ou "Vitre de Dürer", noté T, est le plan sur lequel nous faisons le dessin (plan de projection).

D2. Le "plan du sol", noté S, est un plan fixé, perpendiculaire au tableau T.

D3. Le "point de vue" (ou "centre de projection"), noté O, est un point hors de T et de S : c'est le point où devra se placer l'oeil pour que le dessin sur le tableau T coïncide avec l'image réelle.

D4. Le "plan de l'horizon", noté H, est le plan parallèle au plan du sol S passant par le point de vue O.

D5. La "ligne d'horizon", notée h, est l'intersection du plan d'horizon H et du tableau T.

D6. La "ligne de Terre", notée LT, est l'intersection du plan de sol S et du tableau T.

D7. Un plan ou une droite parallèles au plan du sol S sont appelés "horizontaux".

D8. Un plan ou une droite perpendiculaires au plan du sol S sont appelés "verticaux".

D9. Un plan ou une droite parallèles au tableau T sont appelés "frontaux".

D10. Un plan ou une droite perpendiculaires à T sont appelés de "bout".

Voici un schéma qui représente ces différentes notions :

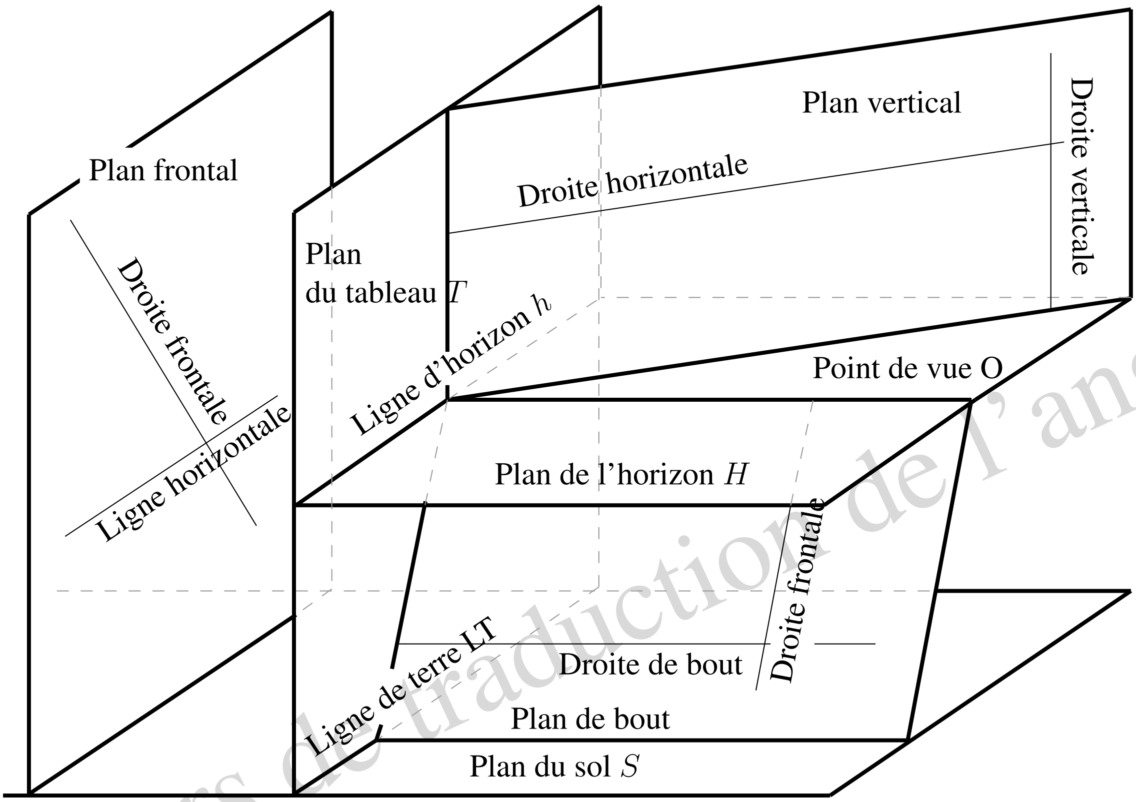


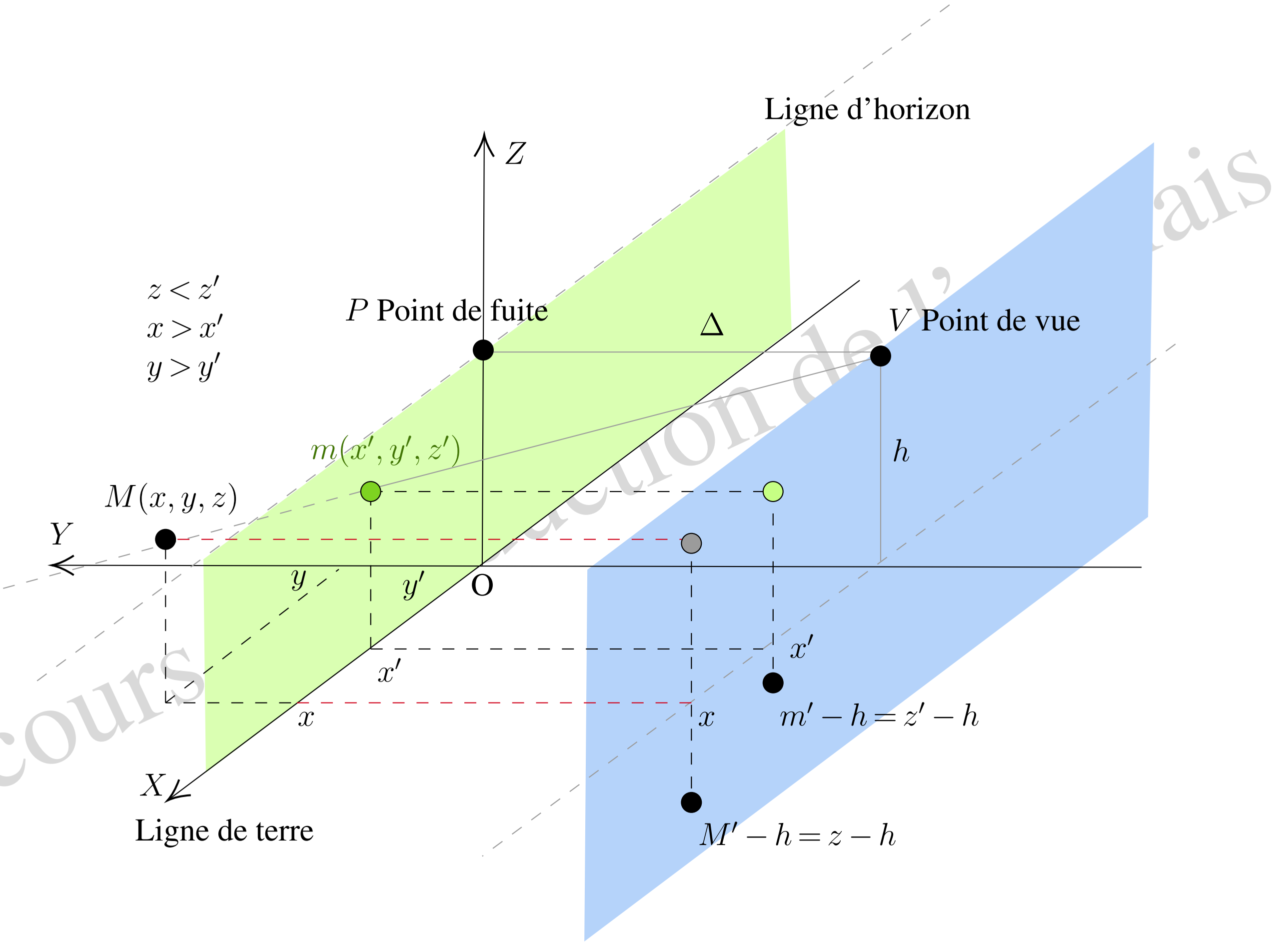
FIG. 8.102 – **Définition des plans et droites de la géométrie projective**

En cours de traduction de l'anglais

8.4.1.1 Images de Points

Tout objet volumique (ce qui ne peut être déterminé qu'au touché ou au niveau de l'abstraction mathématique) composé par un ensemble de points M, est à notre cerveau, l'image d'une projection plane m dont le support est une surface dans l'espace se trouvant entre l'objet observé et notre oeil.

En mathématiques, cette surface appelée donc "tableau" est délimitée dans sa vue centrale par la ligne d'horizon (là où se situent les points de fuite) et par un référentiel physique appelé donc la ligne de terre (voir schéma ci-dessous) :



En cours de rédaction de l'ouvrage français

FIG. 8.103 – Exemple visuel de ce qu'est le "tableau" en géométrie projective

La hauteur entre la ligne de terre et le point de vue est appelée la "hauteur d'horizon" et est notée h.

L'objectif à partir de ce schéma est de déterminer mathématiquement une représentation d'un objet volumique sur une surface (plan dans un cas simple, quelconque sinon) en connaissant l'équation de la droite entre le point M et le point V (point de vue) afin d'en déterminer les coordonnées d'intersection entre cette droite et le tableau.

Nous pouvons du schéma ci-dessus tirer les relations suivantes selon les théorèmes de Thalès

(voir section Géométrie Euclidienne page 2591) dans les différents triangles :

$$\frac{x}{x'}=\frac{z-h}{z'-h}=\frac{y+\Delta}{y'+\Delta} \tag{8.4.1}$$

avec $\Delta \geq 0$.

Si nous posons $y'=0$, conformément à ce que nous montre le schéma ci-dessus, les coordonnées du point m deviennent :

$$x'=x\frac{\Delta}{y+\Delta} \tag{8.4.2}$$

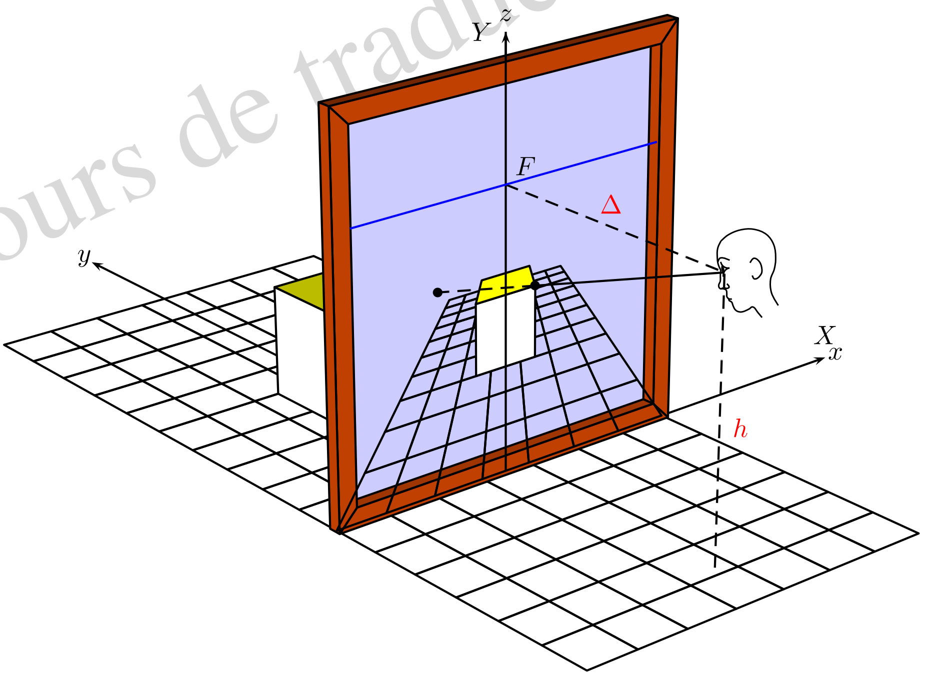
et :

$$z'=h+(z-h)\frac{\Delta}{y+\Delta}=\frac{hy+\Delta z}{y+\Delta} \tag{8.4.3}$$

Souvent résumé sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}X&=\frac{x\Delta}{y+\Delta}\\ Y&=\frac{hy+\Delta z}{y+\Delta}\end{aligned}} \tag{8.4.4}$$

et illustré par :



En cours de traduction de l'anglais

Notez que quelles que soient les valeurs de $h \geq 0$, $z \geq 0$ ou $\Delta \geq 0$, nous avons toujours $z' \geq 0$. Ainsi, en perspective linéaire, un objet ne peut jamais disparaître par le bas !

À partir de ces relations, le problème de la représentation plane d'une forme volumique est complètement résolu, puisque nous pouvons toujours projeter un point (ou la distance entre deux points) sur un tableau à partir des coordonnées de l'original.

Le terme Δ est communément appelé la "longueur focale" du point de vue à l'écran et les spécialistes de l'optique le notent habituellement par la lettre f.

Pour mieux comprendre ce dernier résultat, nous pouvons nous mettre dans le contexte d'une étude bidimensionnelle où l'observateur est à la hauteur de la ligne de Terre ($h=0$) et disposé de façon à représenter une personne regardant le tableau (assimilable à un écran télé, ordinateur ou tout autre) dans lequel nous posons les axes conventionnels x et y dans le plan de l'écran et z perpendiculairement (ainsi, relativement au premier schéma, Y devient Z et inversement).

Ainsi, la relation précédente des rapports :

$$\frac{x}{x'}=\frac{z-h}{z'-h}=\frac{y+\Delta}{y'+\Delta} \quad (8.4.5)$$

devient avec ce changement d'axes :

$$\frac{x}{x'}=\frac{y-h}{y'-h}=\frac{z+\Delta}{z'+\Delta} \quad (8.4.6)$$

et comme $h=0$ (ce qui est souvent le cas devant des écrans) :

$$y'=\frac{y(z'+\Delta)}{z+\Delta} \quad (8.4.7)$$

Remarque

Cette relation est une forme particulière de ce que nous appelons les "transformations homographiques". Nous reviendrons plus loin sur celles-ci et démontrerons certaines de leurs propriétés.

Si le tableau est posé sur l'axe du référentiel (le tableau de projection est assimilé à l'écran), nous avons alors $z'=0$ ce qui nous donne :

$$y'=\frac{y\Delta}{z+\Delta} \quad (8.4.8)$$

et en procédant de même :

$$x'=\frac{x\Delta}{z+\Delta} \quad (8.4.9)$$

Remarque

Ces deux dernières relations sont celles que nous utilisons pour faire des animations 3D programmées dans le logiciel Macromedia Flash 6.0 (voir exemple plus bas) ou en Javascript (voir aussi l'exemple plus bas) ou dans tout autre langage de programmation.

Nous voyons sur les deux dernières relations un terme identique :

$$\boxed{P=\frac{\Delta}{z+\Delta}} \quad (8.4.10)$$

En cours de traduction de l'anglais

Ce terme correspond à la "profondeur" de la perspective.

Dans certains ouvrages, cette profondeur est notée (simple mise en facteur) :

$$P=\frac{1}{1+\frac{z}{\Delta}} \tag{8.4.11}$$

Si nous considérons deux points (x_1, x_2 ou y_1, y_2) visibles de la surface d'un volume vu par un observateur et leur distance respective Δx ou Δy, ces grandeurs se conservent si les deux points se confondent dans le plan du tableau car nous avons alors :

$$P=1 \tag{8.4.12}$$

puisque $z=0, \forall\Delta$.

Il est intéressant d'étudier quelle doit être la valeur de la focale pour $z\neq 0$ afin d'avoir $\Delta x'=\Delta x$ ou $\Delta y'=\Delta y$. Ainsi, si nous prenons la limite :

$$\lim_{\Delta\to+\infty} P=\frac{\Delta}{z+\Delta} \tag{8.4.13}$$

en appliquant la règle de l'Hospital (dérivée au numérateur et dénominateur comme vu dans la section de Calcul Différentiel et Intégral à la page 1444) et en se rappelant que z est fixé, alors :

$$\lim_{\Delta\to+\infty} P=\frac{\Delta}{z+\Delta}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Delta}\Delta}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Delta}(1+\Delta)}=\frac{1}{0+1}=1 \tag{8.4.14}$$

De ce résultat, nous pouvons conclure la chose suivante :

Pour que toute distance réelle entre deux points non confondus dans le tableau mais se trouvant dans un même plan aient une distance de projection égale, il faut que les équations des deux droites qui déterminent leur intersection avec le tableau soient parallèles. Ce qui implique, puisque l'observateur est un point convergent, qu'il faut éloigner l'observateur à une distance infinie du plan pour conserver les grandeurs ainsi projetées sur le tableau : c'est la projection parallèle orthogonale" aussi parfois appelée "projection parallèle orthographique".

Un très bon exemple pour visualiser ces résultats est de programmer en pseudo-3D sur un ordinateur.

✍**Exemple :**

Il existe de nombreuses manières de faire de la 3D avec l'informatique. Les plus connues techniquement parlant sont avec OpenGL ou DirectX ou du C++ mais ne sont pas très faciles à aborder... nous allons donc voir comment faire tourner une pseudo-sphère dans l'espace projectif avec Macromedia Flash 6.0 dans le but de montrer comment s'appliquent les différents éléments théoriques présentés plus haut mais aussi de montrer que ce ne sont pas les seuls outils disponibles.

Pour cela, ouvrez le logiciel Macromedia Flash 6.0 et enregistrez la nouvelle animation

En cours de traduction de l'anglais

sous le nom *Cercle.fla : :*

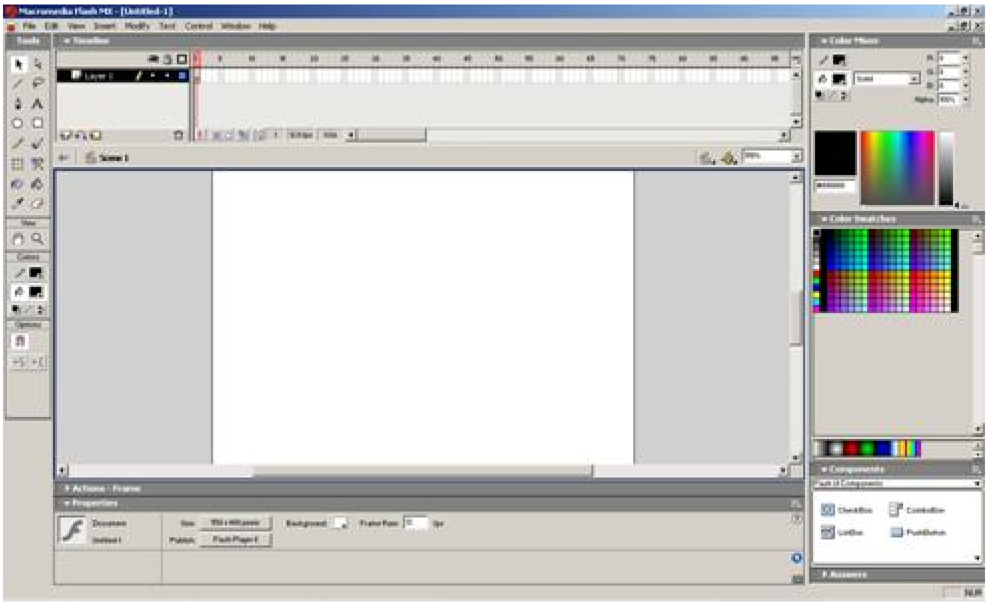


FIG. 8.104 – **Interface de Macromedia Flash 6.0**

Avec l'outil **Cercle** dans la barre de dessin, dessinez un cercle de dimension respectable dans la zone d'animation :

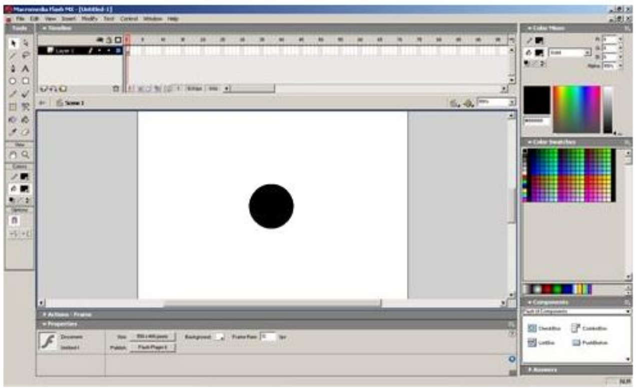


FIG. 8.105 – **Dessin d'un cercle dans la zone d'animation**

Ensuite après avoir sélectionné votre cercle, avec l'outil *Remplissage* choisissez un *Dégradé Radial* :

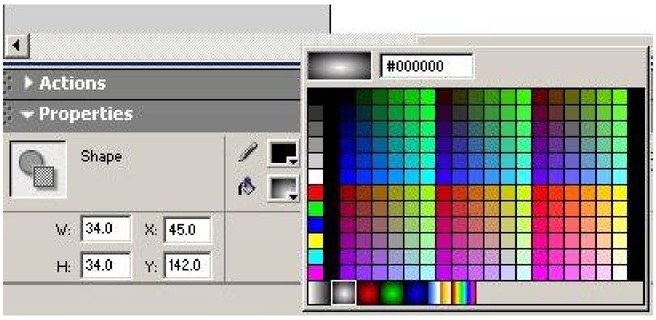


FIG. 8.106 – **Palette de couleurs pour remplissage du cercle**

Faites un clic-droit sur le cercle et choisissez l'option *Convertir en Symoble* et saisissez les informations telles que présentées ci-dessous :

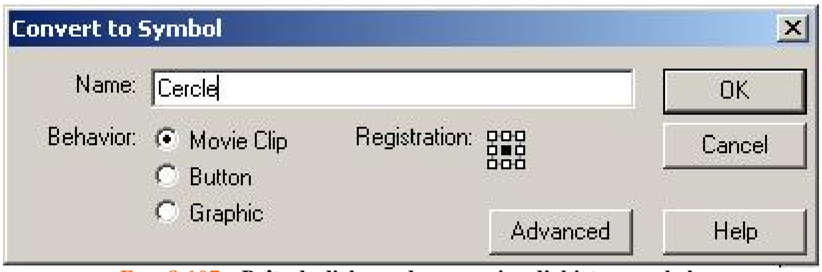


FIG. 8.107 – **Boîte de dialogue de conversion d'objet en symbole**

Renommez le calque où se trouve votre movie clip avec le nom *3d clip* :

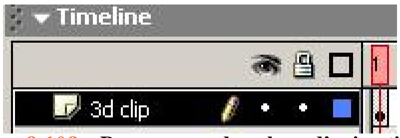


FIG. 8.108 – **Renommage du calque d'animation**

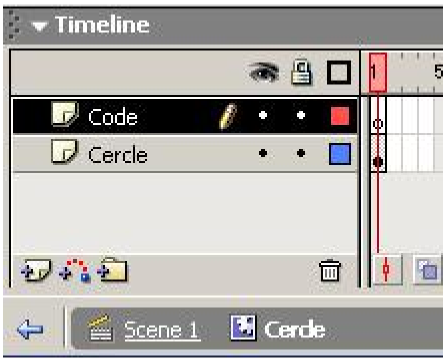
Faites un double-clic sur votre cercle pour entrer dans votre clip d'animation.

Sélectionnez-y à nouveau le cercle, faites un clic-droit dessus et sélectionnez **Convertir en Symbole** :

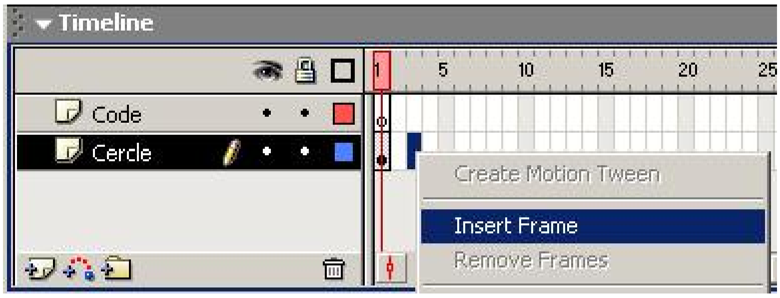
Ensuite, dans les propriétés du cercle saisissez-y le nom *Point* :

Maintenant, dans le clip d'animation nommé *Cercle*, nous allons insérer trois frames : la première pour définir les fonctions mathématiques recalculant les différentes variables, la deuxième qui appelle les fonctions, la troisième qui permet de relancer en boucle et indéfiniment la deuxième.

Afin de faire les choses au propre, nous allons créer un deuxième calque (en renommant celui qui contient notre cercle en *Cercle*) que nous appellerons *Code* :



Faisons un clic-droit sur la troisième image du calque contenant notre cercle :



et choisissons l'option **Insérer image** et pour le calque *Code* faites presque de même, mais en choisissant l'option **Insérer image clé**. Vous devriez alors obtenir le visuel suivant :

Ensuite en sélectionnant la première image du calque *Code* activez l'affichage des Actions pour y insérer le code suivant :

```
Radius = 100;
degrees = 0;
Xcenter=0;
Ycenter=0;
speed=2;

function setAngle () {
    Angle = degrees * (Math.PI / 180);
    degrees = degrees + speed;
}

function drawPoints () {
    Point._x = Radius * Math.cos(Angle)+Xcenter;
    Point._y = Radius * Math.sin(Angle)+Ycenter;
}
```

Faites de même avec la deuxième image du calque *Code*, mais en mettant :

```
setAngle();
drawPoints();
```

et enfin en faisant la même chose avec la troisième image du même calque, mais en mettant à l'intérieur :

```
gotoAndPlay(2);
```

Nous obtenons alors le résultat animé suivant (l'animation n'est visible que sur un lecteur PDF avec Adobe Flash installé et activé sinon allez voir ici https://vimeo.com/578782166) :

Nous allons maintenant faire intervenir l'axe Z en fixant Y (et en faisant donc bouger Z). Bien évidemment, nous ne verrons rien se passer en ce qui concerne Z tant que nous ne définissons pas la projection homographique et parce qu'un ordinateur est incapable de montrer basiquement le concept de profondeur... Le code s'écrit alors :

```
Radius = 100;
degrees = 0;
//coordonnées X,Y,Z dans le repère 3D imaginé
Xcenter=0;
Ycenter=0;
Zcenter=0;
speed=2;

function setAngle () {
    Angle = degrees * (Math.PI / 180);
    degrees = degrees + speed;
}

function drawPoints () {
    Point._x = Radius * Math.cos(Angle)+Xcenter;
    Point._y = Ycenter;
    Zpos = Radius * Math.sin(Angle)+Zcenter;
}
```

Le calcul de Zpos va nous permettre plus loin de calculer la profondeur du mouvement de l'objet selon l'axe Z. Et c'est là qu'interviendra la projection homographique.

Nous obtenons alors une pseudo-sphère qui tourne autour d'un axe dans un plan perpendiculaire à l'écran. Raison pour laquelle nous voyons la pseudo-sphère faire des allers-retours gauche/droite (le concept d'éloignement n'est pas encore présent faute de présence d'un facteur profondeur) :

L'animation ci-dessus fonctionnera pour les personnes disposant d'un lecteur PDF avec Adobe Flash Player installé et activé (sinon voir ici : https://vimeo.com/578782447).

Maintenant nous allons utiliser les relations :

$$x'(z) = xP = x\frac{f}{z+f}$$
$$y'(z) = yP = y\frac{f}{z+f} \quad (8.4.15)$$

démontrées plus haut. Si nous cherchons à représenter la profondeur de tout point du tableau de projection c'est le rapport de distance entre deux des points de ce tableau qui vont nous intéresser pour déterminer le changement d'échelle :

$$\frac{x'_2(z)-x'_1(z)}{x_2-x_1}\% = \frac{f}{z+f}\cdot 100 = P\cdot 100$$
$$\frac{y'_2(z)-y'_1(z)}{y_2-y_1}\% = \frac{f}{z+f}\cdot 100 = P\cdot 100 \quad (8.4.16)$$

Il faudra donc appliquer ce résultat comme définissant l'échelle du tableau de projection.

Nous avons alors le code suivant où la profondeur P joue sur la hauteur et la largeur de la surface d'animation de l'instance *Point* de notre pseudo-sphère :

```
Radius = 275;
degrees = 0;
//coordonnées X,Y,Z dans le repère 3D imaginé
Xcenter=0;
Ycenter=100;
Zcenter=0;
speed=2;
f=400;

function setAngle () {
    Angle = degrees * (Math.PI / 180);
    degrees = degrees + speed;
}

function drawPoints () {
    Point._x = Radius * Math.cos(Angle)+Xcenter;
    Point._y = Ycenter;
    Zpos = Radius * Math.sin(Angle)+Zcenter;
    P=f/(f+Zpos);
    //Puisque les échelles des objets sont
    //en % dans Flash
    _xscale = _yscale= P*100;
    //on joue avec la transparence de l'objet
    _alpha= P*100;
}
```

Ce qui nous donne :

et bien évidemment cela fonctionne quelle que soit l'équation paramétrique de la trajectoire ! Nous pouvons ensuite copier cette instance d'animation, changer la hauteur, l'angle de départ pour avoir les 4 sommets d'un cube qui tourne dans l'espace.

L'animation ci-dessus fonctionnera pour les personnes disposant d'un lecteur PDF avec Adobe Flash Player installé et activé (sinon voir ici : `https://vimeo.com/578783079`).

C'est la prochaine étape :

En effet, modifions notre code comme indiqué ci-dessous pour 4 pseudo-sphères tournant autour d'un axe z imaginaire sortant de l'écran (nous utilisons les matrices de rotation prouvées dans la section de géométrie euclidienne) et désolé pour les commentaires en français car nous avons d'abord fait le code pour les lecteurs français :

```
degrees = 0;
speed=1;
Xcenter=0;
Ycenter=0;

// On construit les coordonnées X des 4 pseudo sphères
x = new Array(-50, 50, -50, 50);
// et leurs coordonnées Y respectives dans un tableau à 4 dimensions
y = new Array(-50, -50, 50, 50);
// On compte le nombre d'éléments dans le tableau X (le même qu'en Y)
verticeNum = x.length;

// On duplique les points en les nommant Point0, Point1,... avec une boucle
for (c = 0; c < verticeNum; c++) {
   duplicateMovieClip ("Point", "Point" + c, c);
}
// On masque le Movie Clip ayant permis de générer les 4 pseudo-sphères
Point._visible = 0;

// function setAngle
function setAngle () {
    Angle = degrees * (Math.PI / 180);
    degrees = degrees + speed;
}

// fonction déjà connue...
function drawPoints () {
   for (c = 0; c < verticeNum; c++) {
      // On fait tourner autour l'axe Z sortant de l'écran
      // mais en utilisant la matrice de rotation vue plus haut
      Xpos = x[c] * Math.cos (Angle) + y[c] * Math.sin(Angle);
      Ypos =- x[c] * Math.sin (Angle) + y[c] * Math.cos(Angle);

      // et on repositionne les pseudo-sphères à l'aide de leurs coordonnées
      this["Point" + c]._x = Xpos + Xcenter;
      this["Point" + c]._y = Ypos + Ycenter;
    }
}
```

Ce qui nous donne en charme... quatre pseudo-sphères tournant autour d'un centre commun (l'animation ci-dessous fonctionnera pour les personnes disposant d'un lecteur PDF avec Adobe Flash Player installé et activé sinon voir ici : https://vimeo.com/578783905) :

Maintenant, nous inversons y et z à nouveau et appliquons la projection homographique :

```
degrees = 0;
speed=1;
Xcenter=0;
Ycenter=0;
Zcenter=0
f = 150;

//nous avons changé Y en Z sinon rien de particulier
x = new Array(-50, 50, -50, 50);
z = new Array(-50, -50, 50, 50);
verticeNum = x.length;

// rien de nouveau
for (c = 0; c < verticeNum; c++) {
   duplicateMovieClip ("Point", "Point" + c, c);
}
Point._visible = 0;

// rien de nouveau
function setAngle () {
    YAngle = degrees * (Math.PI / 180);
    degrees = degrees + speed;
}
function drawPoints () {
   for (c = 0; c < verticeNum; c++) {
      // On tourne autour de Y
      Xpos = x[c] * Math.cos (YAngle) - z[c] * Math.sin (YAngle);
      Zpos = x[c] * Math.sin (YAngle) + z[c] * Math.cos (YAngle);

      // La projection habituelle
      P = f /(f+Zpos);

      // et on redessine les points
      this["Point" + c]._x = Xpos * P + Xcenter;
      this["Point" + c]._y = Ycenter
      // on applique l'effet d'échelle à chaque sphère indépendamment
      this["Point" + c]._xscale = this["Point" + c]._yscale = P * 100;

      // On utilise une fonction de Macromedia Flash permettant
      // de dessiner les points sur des couches différentes sinon
      // les pseudo-sphère en se croisant se superposent
      this["Point" + c].swapDepths(P * 500);
   }
}
```

et nous obtenons (l'animation ci-dessous fonctionnera pour les personnes disposant d'un lecteur PDF avec Adobe Flash Player installé et activé sinon voir ici : https://vimeo.com/578784812) :

Pour la suite, nous allons générer 8 pseudo-sphère et au lieu de les faire tourner toujours autour du même axe, nous allons les faire tourner autour des trois axes x, y ou z en utilisant les variables `XAngle`, `YAngle` ou `ZAngle` et les matrices de rotation autour de chacun de ces axes respectifs :

```
Xdegrees = 0;
Ydegrees = 0;
Zdegrees = 0;
Xcenter = 0;
Ycenter = 0;
Zcenter = 0;
f = 150;

// Nous générons les 8 pseudo-sphères
x = new Array(-50, 50, -50, 50, -50, 50, -50, 50);
y = new Array(-50, -50, 50, 50, -50, -50, 50, 50);
z = new Array(50, 50, 50, 50, -50, -50, -50, -50);
verticeNum = x.length;

// Dupliquation des pseudo-sphères en Point1,Point2...
for (c = 0; c < verticeNum; c++) {
   duplicateMovieClip ("Point", "Point" + c, c);
}
// Nous masquon s le point d'héritage
Point._visible = 0;

// Nous définissons les angles selon chaque axe
function setAngle () {
```

```
    Xangle = Xdegrees * (Math.PI / 180);
    Yangle = Ydegrees * (Math.PI / 180);
    Zangle = Zdegrees * (Math.PI / 180);
    //l'angle sera déterminé par la position de la souris
    Xdegrees = this._ymouse;
    Ydegrees = this._xmouse;
    Zdegrees = sqrt(this._xmouse^2+this._ymouse);
}

// Nous calculons les points de chaque sphère
function drawPoints () {
    for (c = 0; c < verticeNum; c++) {
        // On tourne les pseudo-sphères autour de l'axe X en utilisant Xangle
        // et la matrice de rotation
        Ypos_Temp = y[c] * Math.cos (Xangle) + z[c] * Math.sin (Xangle);
        Zpos_Temp = - y[c] * Math.sin (Xangle) + z[c] * Math.cos (Xangle);

        // On tourne les pseudo-sphères autour de l'axe Y en utilisant Yangle
        // et la matrice de rotation
        Xpos_Temp = x[c] * Math.cos (Yangle) - Zpos_Temp * Math.sin (Yangle);
        Zpos = x[c]* Math.sin (Yangle) + Zpos_Temp * Math.cos (Yangle);

        // On tourne les pseudo-sphères autour de l'axe Z en utilisant Xangle
        // et la matrice de rotation
        Xpos = Xpos_Temp * Math.cos (Zangle) + YPos_Temp * Math.sin (Zangle);
        Ypos = - Xpos_Temp * Math.sin (Zangle) + Ypos_Temp * Math.cos (Zangle);

        // Perspective (j'ai rajouté le Zcenter pour être plus exact!
        P = f/ (f + Zpos + Zcenter);

        // On dessine
        this["Point" + c]._x = Xpos * P + Xcenter;
        this["Point" + c]._y = Ypos * P + Ycenter;
        this["Point" + c]._xscale = this["Point" + c]._yscale = P * 100;

        // Z-Sorting
        this["Point" + c].swapDepths(P * 500);
    }
}
```

et voici le résultat final (l'animation ci-dessous fonctionnera pour les personnes ayant un lecteur PDF avec Adobe Flash player installé et activé sinon voir ici : https://vimeo.com/578785768) :

La technologie Adobe Flash étant pratiquement morte depuis que j'ai écrit le code ci-dessus... un lecteur anonyme a réécrit ce code en WebGL et voici ce que cela donne (si vous voulez donner le même exemple dans d'autres langages n'hésitez pas) :

```
<html>
<head>
    <script type="text/javascript">
        window.onload = startDemo;

        function Point3D(x,y,z) {
            this.x = x;
            this.y = y;
            this.z = z;

            this.rotateX = function(angle) {
                var rad, cosa, sina, y, z
                rad = angle * Math.PI / 180
                cosa = Math.cos(rad)
                sina = Math.sin(rad)
                y = this.y * cosa - this.z * sina
                z = this.y * sina + this.z * cosa
                return new Point3D(this.x, y, z)
            }

            this.rotateY = function(angle) {
                var rad, cosa, sina, x, z
                rad = angle * Math.PI / 180
                cosa = Math.cos(rad)
```

```
        sina = Math.sin(rad)
        z = this.z * cosa - this.x * sina
        x = this.z * sina + this.x * cosa
        return new Point3D(x,this.y, z)
    }

    this.rotateZ = function(angle) {
        var rad, cosa, sina, x, y
        rad = angle * Math.PI / 180
        cosa = Math.cos(rad)
        sina = Math.sin(rad)
        x = this.x * cosa - this.y * sina
        y = this.x * sina + this.y * cosa
        return new Point3D(x, y, this.z)
    }

    this.project = function(viewWidth, viewHeight, fov, viewDistance) {
        var factor, x, y
        factor = fov / (viewDistance + this.z)
        x = this.x * factor + viewWidth / 2
        y = this.y * factor + viewHeight / 2
        return new Point3D(x, y, this.z)
    }
}

var vertices = [
    new Point3D(-1,1,-1),
    new Point3D(1,1,-1),
    new Point3D(1,-1,-1),
    new Point3D(-1,-1,-1),
    new Point3D(-1,1,1),
    new Point3D(1,1,1),
    new Point3D(1,-1,1),
    new Point3D(-1,-1,1)
];

// Define the vertices that compose each of the 6 faces. These numbers are
// indices to the vertex list defined above.
var faces = [[0,1,2,3],[1,5,6,2],[5,4,7,6],[4,0,3,7],[0,4,5,1],[3,2,6,7]]

var angle = 0;

function startDemo() {
    canvas = document.getElementById("thecanvas");
    if( canvas && canvas.getContext ) {
        ctx = canvas.getContext("2d");
        setInterval(loop,33);
    }
}
```

```
        function loop() {
            var t = new Array();

            ctx.fillStyle = "rgb(255,255,255)";
            ctx.fillRect(0,0,400,200);

            for( var i = 0; i < vertices.length; i++ ) {
                var v = vertices[i];
                var r = v.rotateX(angle).rotateY(angle).rotateZ(angle);
                var p = r.project(400,200,128,3.5);
                t.push(p)
            }

            ctx.strokeStyle = "rgb(0,0,0)"

            for( var i = 0; i < faces.length; i++ ) {
                var f = faces[i]
                ctx.beginPath()
                ctx.moveTo(t[f[0]].x,t[f[0]].y)
                ctx.lineTo(t[f[1]].x,t[f[1]].y)
                ctx.lineTo(t[f[2]].x,t[f[2]].y)
                ctx.lineTo(t[f[3]].x,t[f[3]].y)
                ctx.closePath()
                ctx.stroke()


            }
            angle += 2
        }
    </script>
</head>
<body>
    <canvas id="thecanvas" width="400" height="200">
        Your browser does not support the HTML5 canvas element.
    </canvas>
</body>
</html>
```

En cours de traduction de l'anglais

Pour voir ce code fonctionner, copiez-le et exécutez-le sur votre propre ordinateur ou vous pouvez visiter l'URL suivante :

http://www.sciences.ch/htmlen/cube.htm

8.4.1.2 Images de Droites

Déterminons à partir des résultats précédents, l'image d'une droite parallèle à la ligne de terre (donc à l'axe x) du tableau XY. Dans ce cas, nous avons :

$$z = a \qquad y = b \tag{8.4.17}$$

où a et b sont des constantes et pour toute valeur de h. Ce qui nous donne d'après les relations obtenues plus haut :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\Delta}{\Delta + a}x \\ y' &= h + (b-h)\frac{\Delta}{\Delta + a} = \frac{ha + \Delta b}{\Delta a} = c^{te} \end{aligned} \tag{8.4.18}$$

Donc toute droite parallèle à la ligne de Terre devient en perspective une droite se trouvant à une hauteur y' dans le plan parallèle à XY de notre écran (on pouvait le deviner intuitivement...).

Pour toute droite parallèle à l'axe z de l'écran (donc dans sa "profondeur"), nous avons :

$$x = a \qquad y = b \tag{8.4.19}$$

où a et b sont des constantes et pour toute valeur de h. Ce qui nous donne :

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\Delta}{\Delta + z} a \\ y' &= h + (b - h)\frac{\Delta}{\Delta + z} \end{aligned}\right\} : \frac{\Delta}{\Delta + z} = \frac{x'}{a} \Rightarrow y' = h + (b - h)\frac{x'}{a} \tag{8.4.20}$$

Les lignes droites d'équation :

$$y' = h + (b - h)\frac{x'}{a} \tag{8.4.21}$$

passent toutes par le point $P(x' = 0, y' = h)$ lorsque $z \to +\infty$ qui est le "point de fuite principal" et par le point $P(x' = a, y' = b)$ lorsque $z \to 0$ tel que représenté sur la projection ci-dessous faite dans Adobe Photoshop (les lignes horizontales ont été rajoutées pour donner l'effet de perspective) :

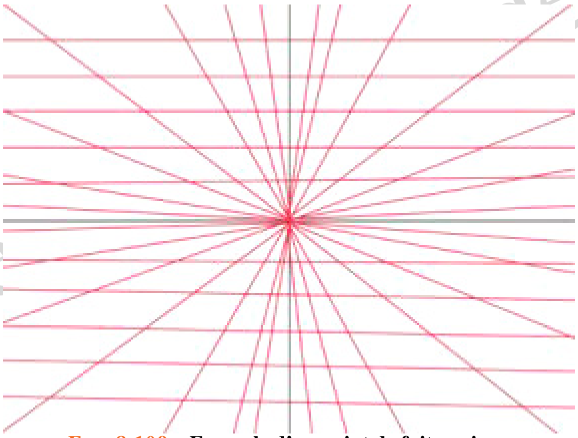
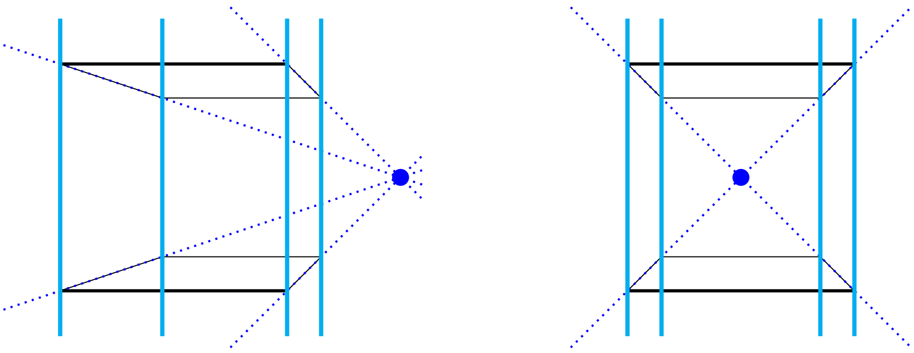


FIG. 8.109 – **Exemple d'un point de fuite unique**

Ou sous forme plus académique :



C'est pourquoi les ombres des objets vus du sol semblent diverger (et donc certaines personnes illettrées scientifiquement affirmeront que le Soleil est local...), alors qu'en réalité vues d'en

En cours de de l'anglais

haut (sur la photo ci-dessous grâce à un drone) elles sont bien parallèles car le Soleil est relativement éloigné de nous (environ 150 millions de kilomètres) :

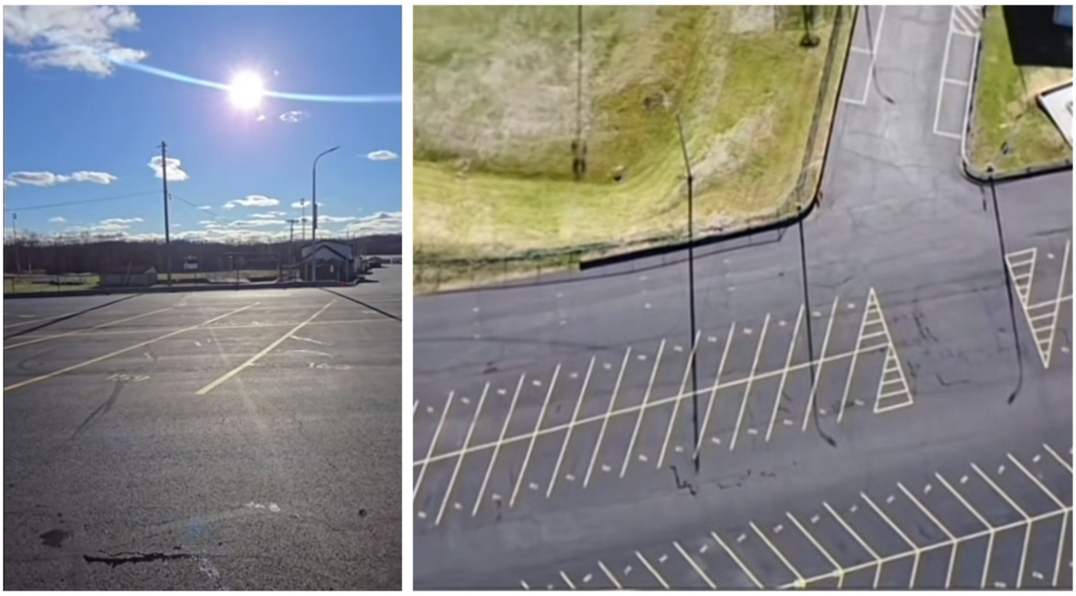


FIG. 8.110 – Ombres divergentes dues à la perspective

En cours de traduction de l'anglais

À partir de la figure ci-dessus, nous pouvons définir le concept de "angle de fuite" donné par la figure ci-dessous :

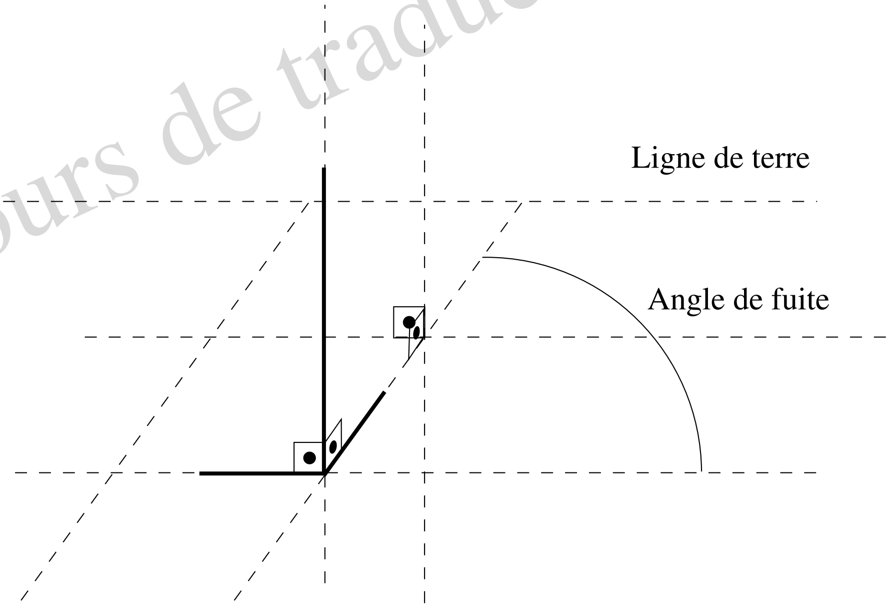
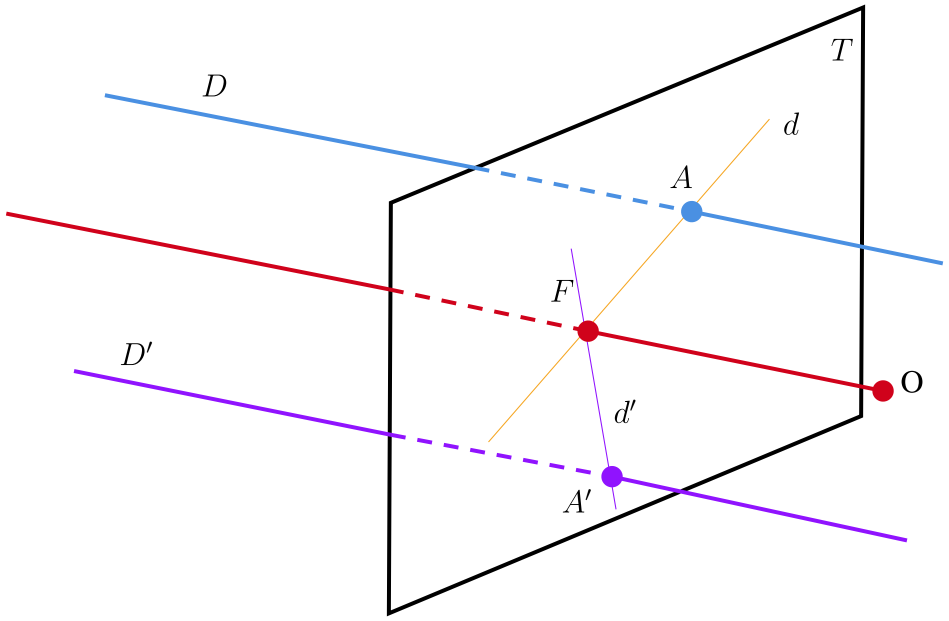


FIG. 8.111 – Exemple d'angle de fuite

Une représentation géométrique autre peut aider à mieux comprendre le résultat. Rappelons donc que le point de fuite d'une droite (D) est le point d'intersection F du plan du tableau T avec la droite parallèle à D passant par O. Deux droites parallèles (D) et (D') ont donc le même point de fuite. Représenté comme ci-dessous :



Si nous notons A le point d'intersection de (D) avec T, le dessin en perspective de D est la droite $\overline{AF}$, intersection de T avec le plan contenant O et D. Puisque deux droites parallèles ont le même point de fuite F, elles sont donc représentées par deux droites sécantes en F.

En cours de traduction de l'anglais

Pour toute droite quelconque se situant dans le plan XZ de l'écran (donc dans sa "profondeur"), nous avons :

$$z = mx + p \tag{8.4.22}$$

et pour $y = 0$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\Delta}{\Delta + z} x \Rightarrow x = \frac{\Delta + z}{\Delta} x' \\ y' &= h + (y - h)\frac{\Delta}{\Delta + z} = h - h\frac{\Delta}{\Delta + z} = \frac{hz}{\Delta + z} \end{aligned} \tag{8.4.23}$$

De cette dernière équation, nous déduisons :

$$z = -\frac{\Delta}{y' - h} y' \tag{8.4.24}$$

en portant z dans l'expression de x :

$$x = \left(1 + \frac{z}{\Delta}\right) x' = \left(1 - \frac{y'}{y' - h}\right) x' = -\frac{hx'}{y' - h} \tag{8.4.25}$$

nous remplaçons x et y dans l'équation de la droite $z = mx + p$, et calculs et simplifications faits, nous trouvons :

$$y' = \frac{mh}{\Delta + p} x' + \frac{ph}{\Delta + p} \tag{8.4.26}$$

Examinons le cas particulier de droites passant par les sommets opposés d'un carrelage, c'est-à-dire inclinées à $\pm\pi/4$ donc avec un coefficient directeur (une pente) de ± 1.

L'image de ces droites est alors donnée par :

$$y' = \pm \frac{h}{\Delta + p} x' + \frac{ph}{\Delta + p} \tag{8.4.27}$$

Si $y' = h$, nous avons selon la relation ci-dessus :

$$x' = \pm \Delta \tag{8.4.28}$$

cela signifiant que toute projection de droites de coefficient directeur ± 1 se situant dans le plan xy pour tout x' constitue des points de fuite secondaires situés sur la ligne d'horizon à une distance égale de part et d'autre du point de fuite principal tel que représenté ci-dessous (dans le contexte d'un cours sur Adobe Photoshop, nous y avons rajouté un cube dans cette perspective) :

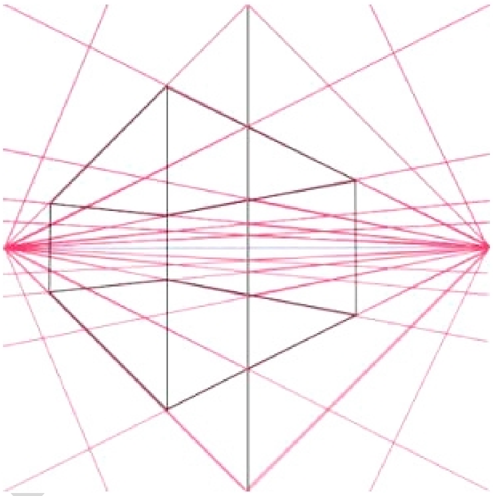
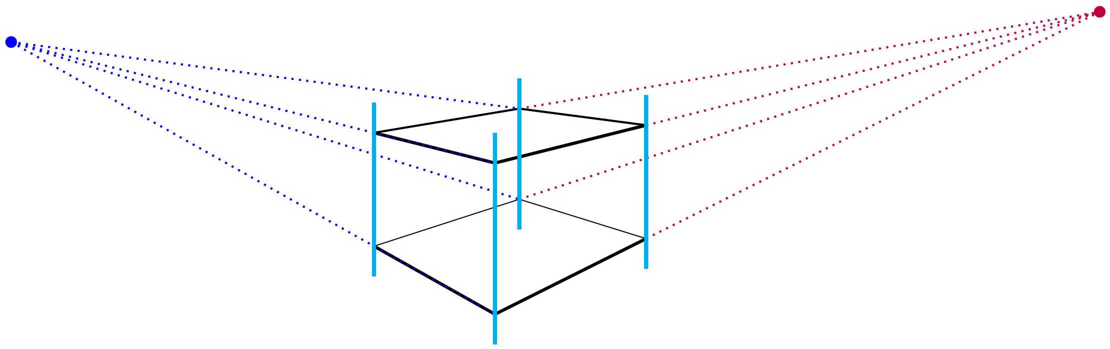


FIG. 8.112 – **Exemple de points de fuite secondaires**

En cours de traduction de l'anglais

Ou de maniere plus académique :



Nous voyons bien dans la figure ci-dessus la symétrie par rapport à l'axe vertical et les deux points de fuites qui sont l'origine du carrelage.

Considérons maintenant des droites parallèles à l'axe Y de la table (écran) et leur équation de

projection si $x=a$ et $z=b$:

$$x'=\frac{\Delta}{\Delta+b}a=c^{te}$$
$$y'=h+(y-h)\frac{\Delta}{\Delta+b} \tag{8.4.29}$$

Ces droites images restent donc des droites parallèles à l'axe y. Autrement dit, les droites images restent parallèles aux droites "objet" tel que représenté ci-dessous (pour différentes positions du point d'observation) :

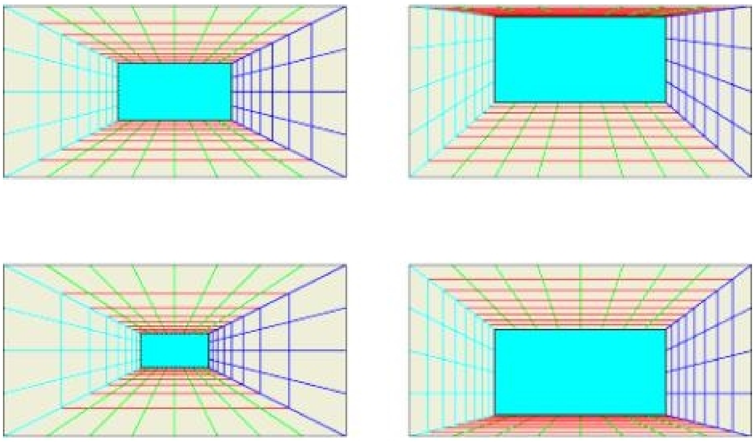


FIG. 8.113 – Perspectives différentes basées sur les valeurs des constantes

Prenons pour exemple de ce dernier résultat, des segments de même hauteur H dont le pied est sur le plan horizontal :

$$y=H \qquad x=a \tag{8.4.30}$$

La hauteur du segment image se déduit par :

$$y'=H'=h+(H-h)\frac{\Delta}{\Delta+b} \tag{8.4.31}$$

Considérons maintenant $x=a$, c'est-à-dire des colonnes verticales de même hauteur H alignées sur la droite $x=a$:

En cours de traduction anglais

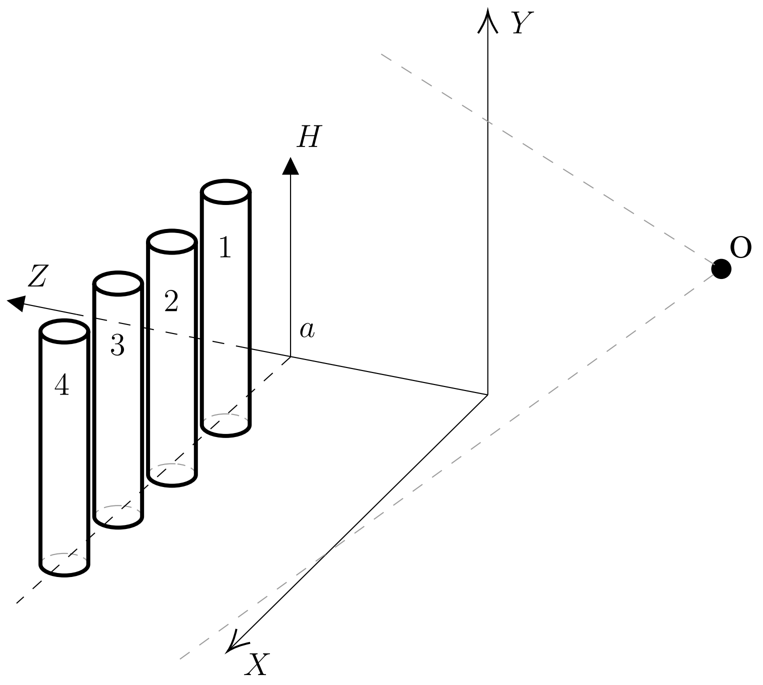


FIG. 8.114 – **Problème de perspective des colonnes alignées**

Calculons les coordonnées des sommets images :

$$x' = \frac{\Delta}{\Delta + b} a \Rightarrow \frac{\Delta}{\Delta + b} = \frac{x'}{a}$$
$$y' = H' = h + (H - h)\frac{\Delta}{\Delta + b} = h + \frac{H - h}{a} x \tag{8.4.32}$$

C'est évidemment l'équation d'une droite et remarquons que toutes ces droites joignant les sommets passent par le point de coordonnées $(x' = 0, y' = h)$ qui n'est d'autre que le point de fuite principal P.

Ainsi, comme nous l'expérimentons dans la vie réelle, si nous considérons la figure ci-dessus correspondante aux développements précédents lorsque $H < h$ les colonnes semblent avoir leur hauteur qui diminue à mesure qu'elles sont plus éloignées de l'observateur et si $h > H$ la hauteur des colonnes semble augmenter.

De la discussion précédente, nous avons donc aussi une nouvelle méthode pour faire tourner un objet dans un espace tridimensionnel. Au lieu de faire tourner l'objet autour de différents axes, nous pouvons imaginer utiliser les équations ci-dessus pour faire tourner le spectateur autour de l'objet (c'est-à-dire un point de vue...).

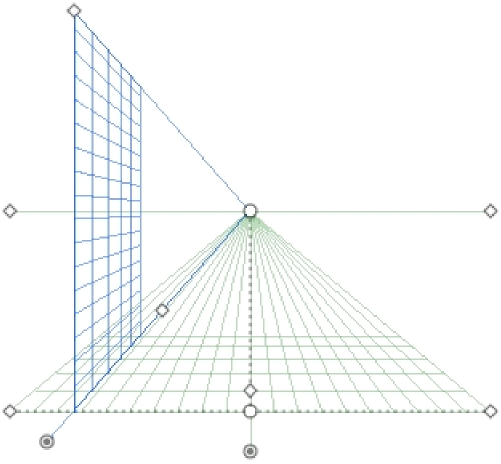
Nous n'avons considéré jusqu'ici que la perspective projective sur un plan. D'ailleurs, pour travailler sur n'importe quelle méthode de projection (sphère sur un plan, plan sur une sphère, sphère sur sphère, n'importe quoi sur n'importe quoi) il suffit simplement d'étendre l'analyse que nous avons faite ci-dessus dans un système de coordonnées adapté au système étudié (coordonnées polaires, coordonnées cylindriques, coordonnées sphériques, ...). C'est probablement ainsi que certains logiciels de simulation 3D l'utilisent pour projeter une image sur une surface réfléchissante comme un verre ondulé semi-transparent à la différence que sur ordinateur une surface n'a pas un nombre infini de points mais un nombre limité de pixels et donc la projection nécessite un lissage par des techniques d'interpolation particulières.

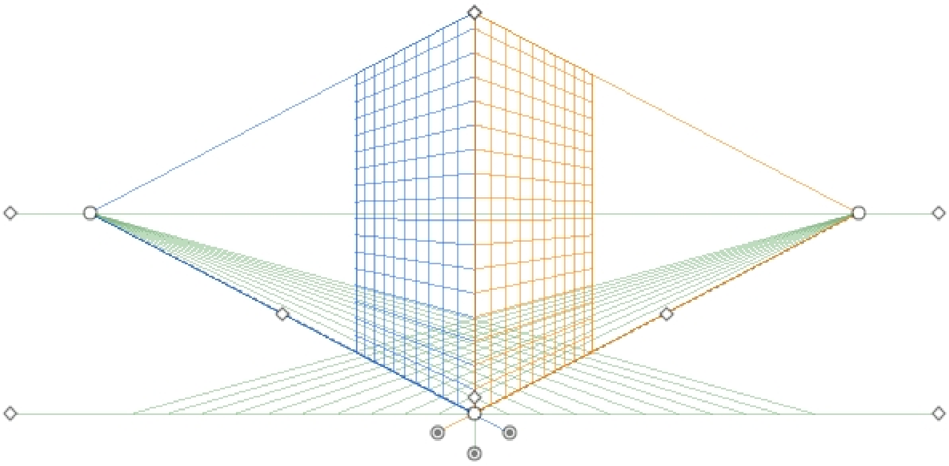
En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Des résultats que nous avons obtenus ci-dessus, nous pouvons tirer une conclusion intéressante et intuitive : Pour que l'observateur d'une photo ou d'un tableau voie l'image telle qu'elle était à l'origine, celui-ci doit se placer à des coordonnées déterminées du tableau (de la photo ou du tableau).

Un logiciel comme Adobe Illustrator propose depuis le début des années 12010 (calendrier holocène) un outil pour créer des perpsectives à un point de fuite, à deux points de fuite et à trois points de fuite :





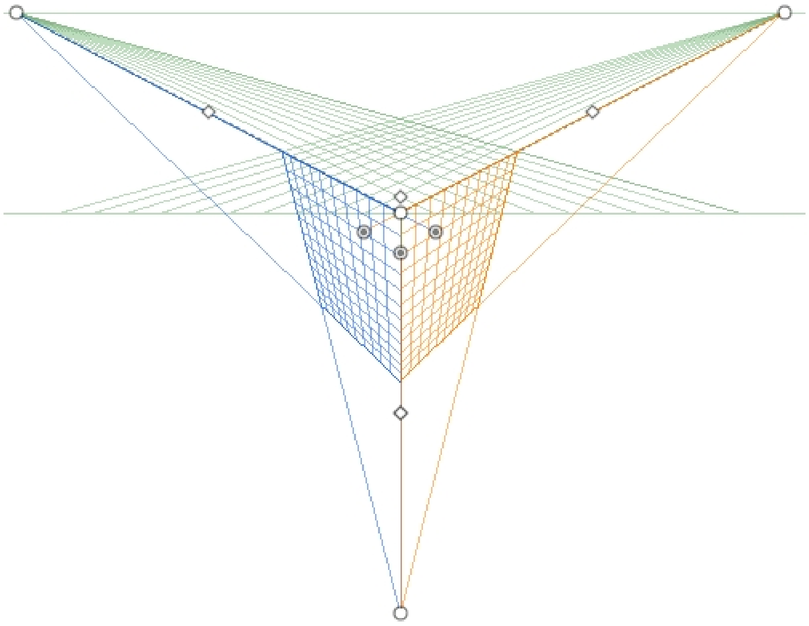
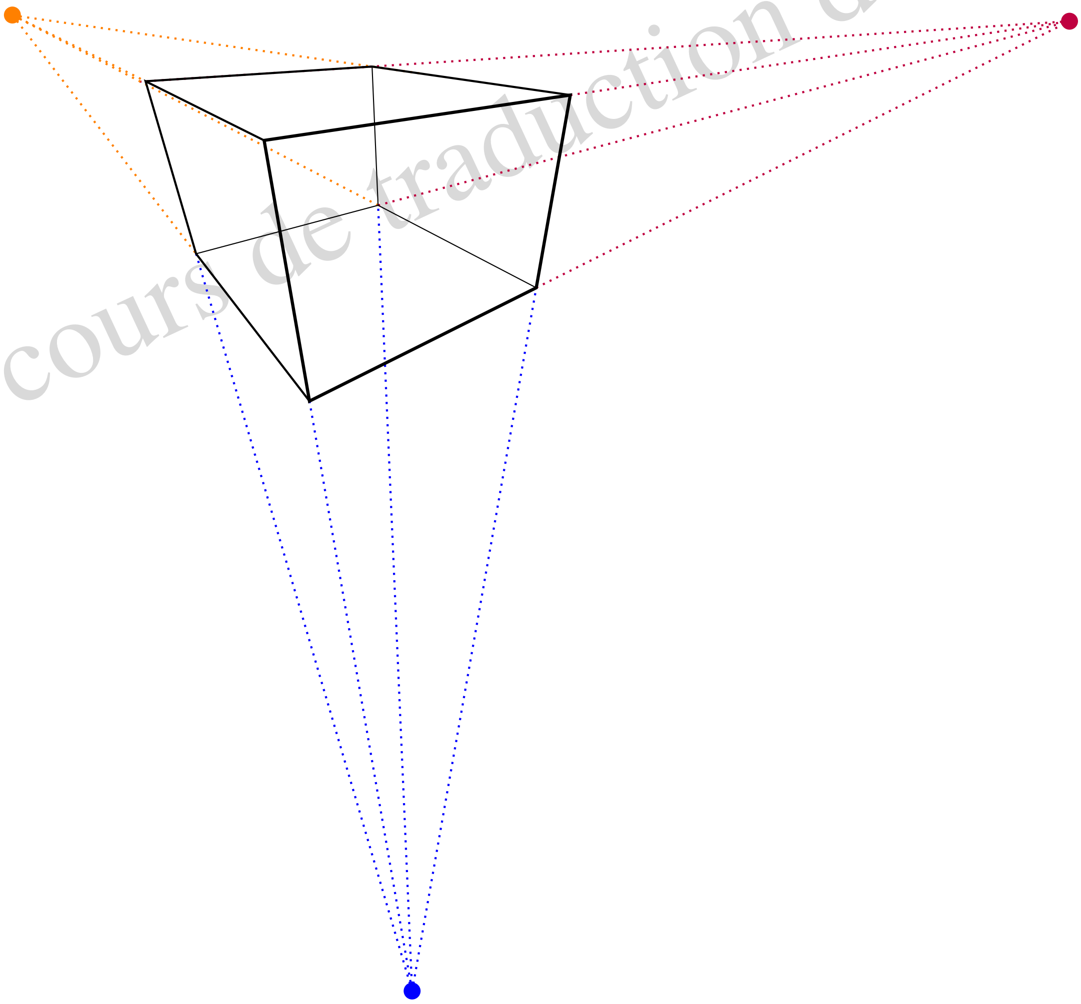


FIG. 8.115 – Perspectives à 1, 2 et 3 points de fuite générées par Adobe Illustrator

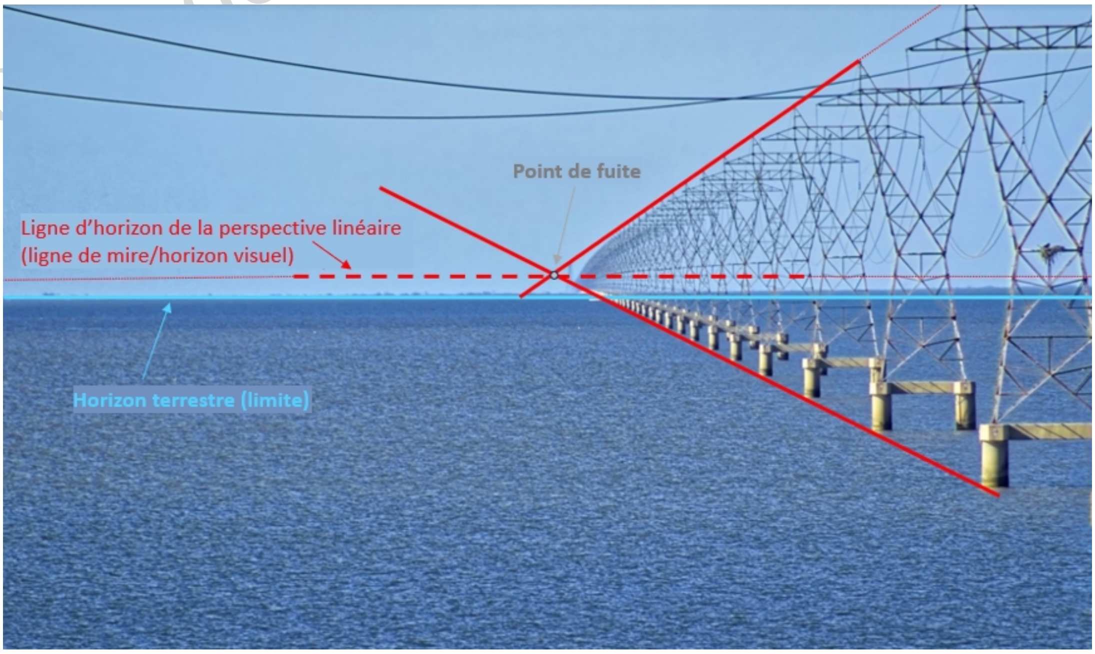
Ou de manière plus académique :



En cours de traduction de l' anglais

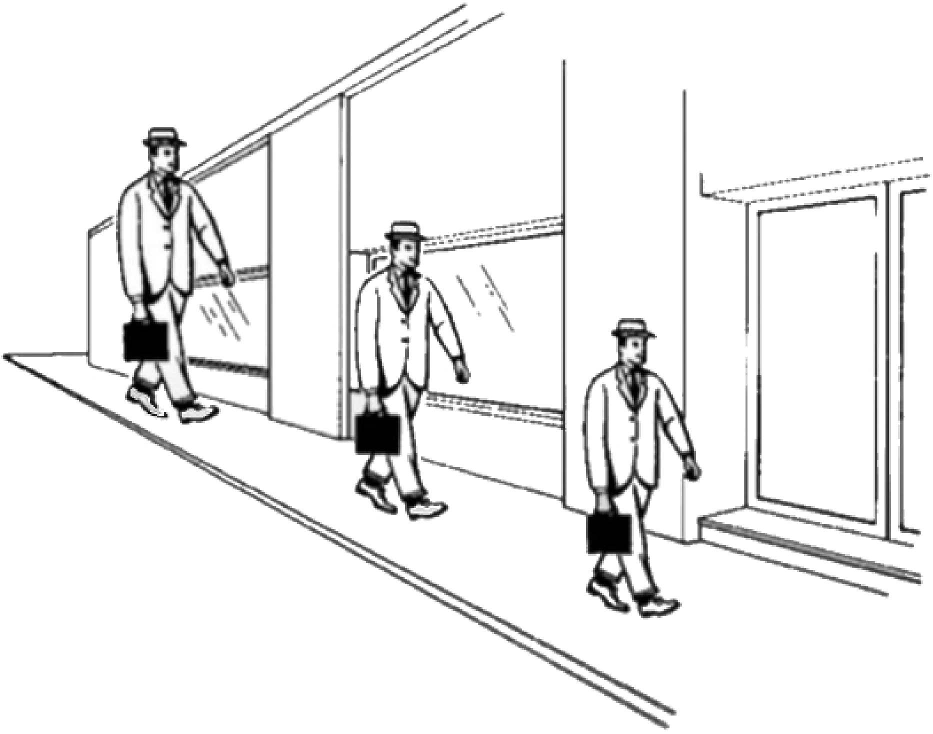
Et pour finir un clin d'oeil à tous nos platistes préférés (...) :

Et une dernière bonne avec un rappel pour ne pas confondre la limite d'un objet sur une projection et la ligne d'horizon (ligne de visée) :



Le lecteur doit garder à l'esprit que l'oeil et le cerveau humains ne sont pas des outils très précis, exacts et impartiaux pour étudier la Nature. Un exemple simple et bien connu est l'illustration

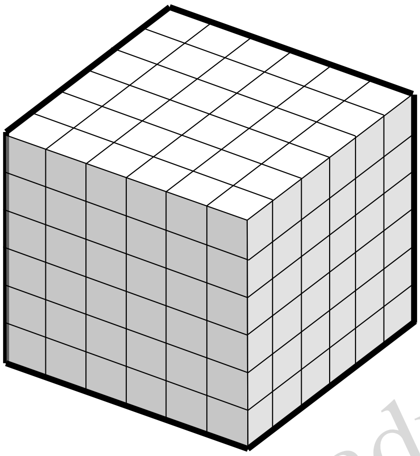
ci-dessous, qui met en scène une perspective linéaire où les individus semblent avoir des tailles différentes, alors qu'en réalité, avec une règle, nous pouvons vérifier que leur taille est toujours la même... :



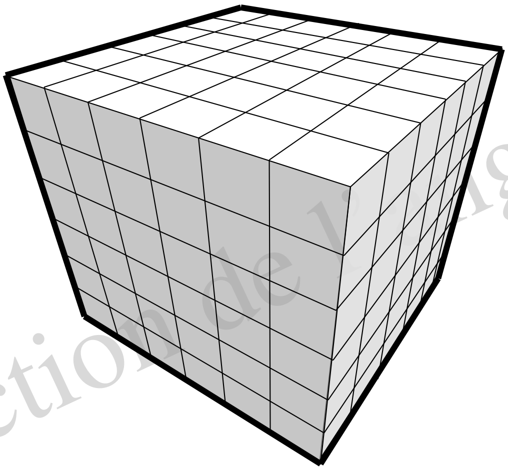
En cours de traduction anglais

8.4.2 Projections affines

Même si la meilleure méthode de la représentation en perspective est la méthode la perspective conique, nous ne pouvons nous permettre systématiquement de faire de grosses quantités de calcul pour représenter un volume. Ainsi, il est possible de définir des techniques de perspectives qui découlent d'une approximation des résultats mathématiques obtenus précédemment pour arriver à deux techniques (il en existe un plus grand nombre mais ces deux perspectives sont de loin les plus utilisées) que l'on retrouve quotidiennement sur de nombreux supports papiers techniques ou artistiques. Ces deux techniques sont respectivement la "projection isométrique" et la "projection orthogonale qui font partie de la famille des "projections affines (en fait l'emploi du mot "projection" doit être compris comme "projection sur la Table de l'observateur" et donc c'est aussi une perspective).



projection isométrique



projection perspective

Un exemple de transformation projective qui n'est pas affine est la photographie à travers un appareil photo :

Définition (#8.4.351) : Une "projection affine" de l'espace usuel à trois dimensions est une transformation affine qui envoie tous les points de cet espace sur un même plan de cet espace. Si le point $M(x, y, z)$ n'est pas sur le plan de projection, lui et son image $m(x', y', z')$ forment une droite dont la direction est constante : nous l'appelons "direction de projection". La perspective qui en découle est appelée familièrement "perspective parallèle" ou encore "perspective cylindrique".

En cours de traduction de l'anglais

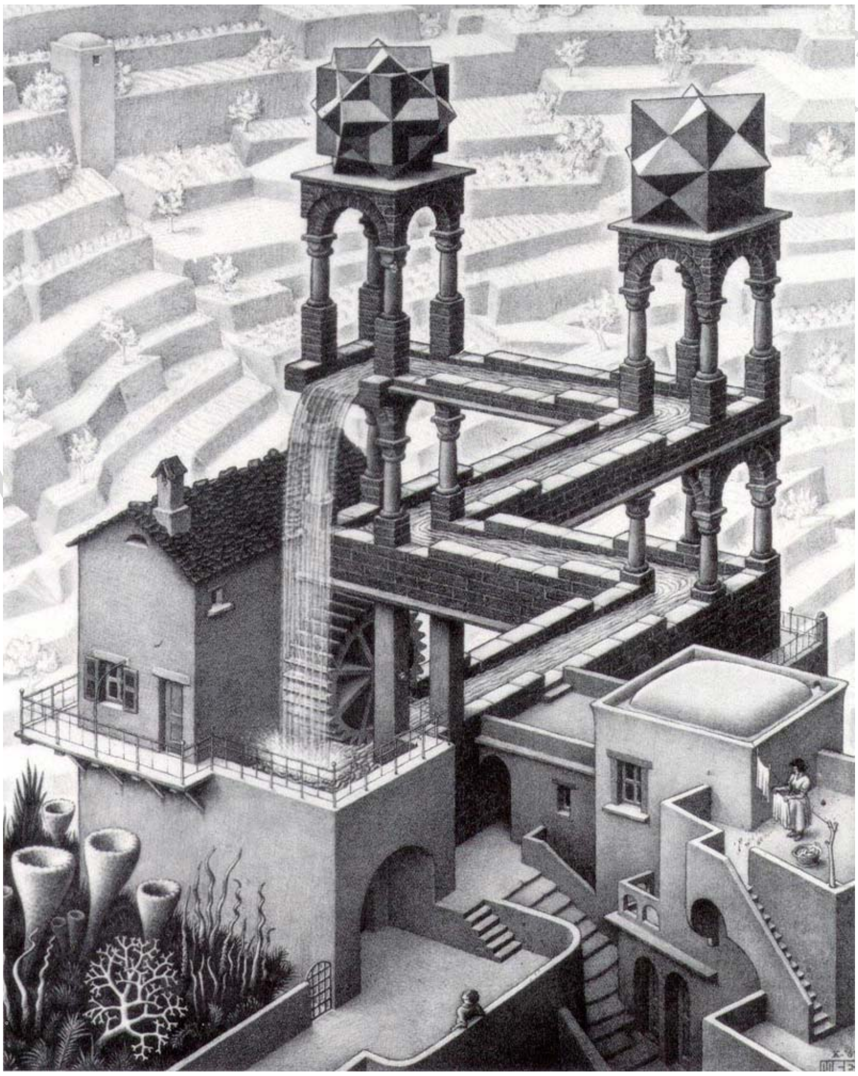
Comme toutes les transformations affines de l'espace, une projection affine préserve :

- Le parallélisme entre les lignes
- Le barycentre, c'est-à-dire l'ensemble des proportions existant sur une ligne donnée

Seules les longueurs et les angles situés dans un plan parallèle au plan de projection sont conservés.

Présentons brièvement ces deux techniques car elles doivent faire partie de la culture générale de l'ingénieur.

Comme toute projection et toute perspective, la perte de la troisième dimension et le non-respect de la transformation mathématique réelle induisent de possibles erreurs d'interprétation. Ceci a été largement utilisé par l'artiste Maurits Cornelis Escher Escher pour créer des situations impossibles :



En co
anglais

8.4.2.1 Perspective Isométrique

La projection isométrique est une méthode de représentation visuelle d'objets tridimensionnels en deux dimensions dans des dessins techniques. Il s'agit d'une projection parallèle (l'objet est tourné le long d'un ou plusieurs de ses axes par rapport au plan de projection) dans laquelle les trois axes de coordonnées apparaissent également raccourcis (d'où le terme "iso") et l'angle entre deux d'entre eux est estimé à 120 degrés ($2\pi/3$ [rad]) :

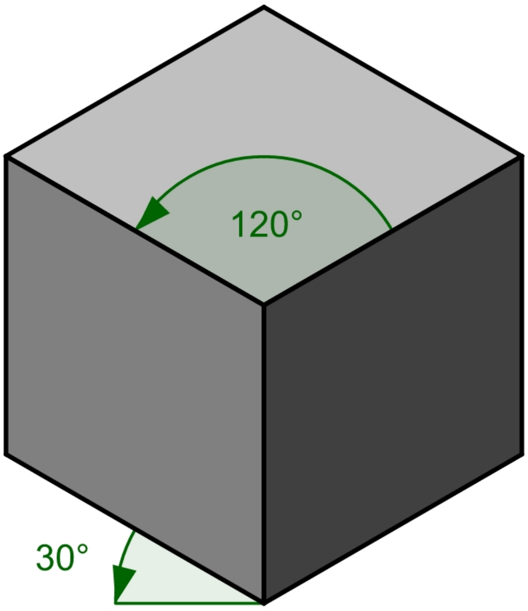


FIG. 8.116 – Angles isométriques (source : Wikipédia)

En cours de traduction de l'anglais

En effet, comme nous le verrons au cours de notre étude de la géométrie analytique, l'angle de 30° ci-dessus n'est qu'une approximation de l'angle entre le plan xy et le plan (isométrique) vertical au vecteur $\vec{n}=(1,1,1)$ passant par le coin d'un cube de côtés égaux de longueur 1. En fait le choix de l'angle est empirique et par exemple dans les jeux informatiques il varie entre 30° et 60° selon l'éditeur de jeu.

Considérons quelques formes 3D en utilisant la méthode de dessin isométrique. Dans la figure ci-dessous provenant de Wikipédia (année 12016 selon le calendrier holocène), les dimensions en noir sont supposées être les vraies longueurs telles qu'elles sont trouvées dans une projection orthographique (voir plus bas). Les dimensions en rouge sont utilisées lors du dessin avec la méthode de dessin isométrique. Les mêmes formes 3D dessinées en projection isométrique apparaîtraient plus petites ; une projection isométrique montrerait les côtés de l'objet raccourcis, d'environ 80%.

En fait nous allons voir que la figure ci-dessous provenant de Wikipédia (année 12016 selon le calendrier holocène) est en fait assez erroné ou du moins peut amener le lecteur à un certain malentendu ! ! ! !

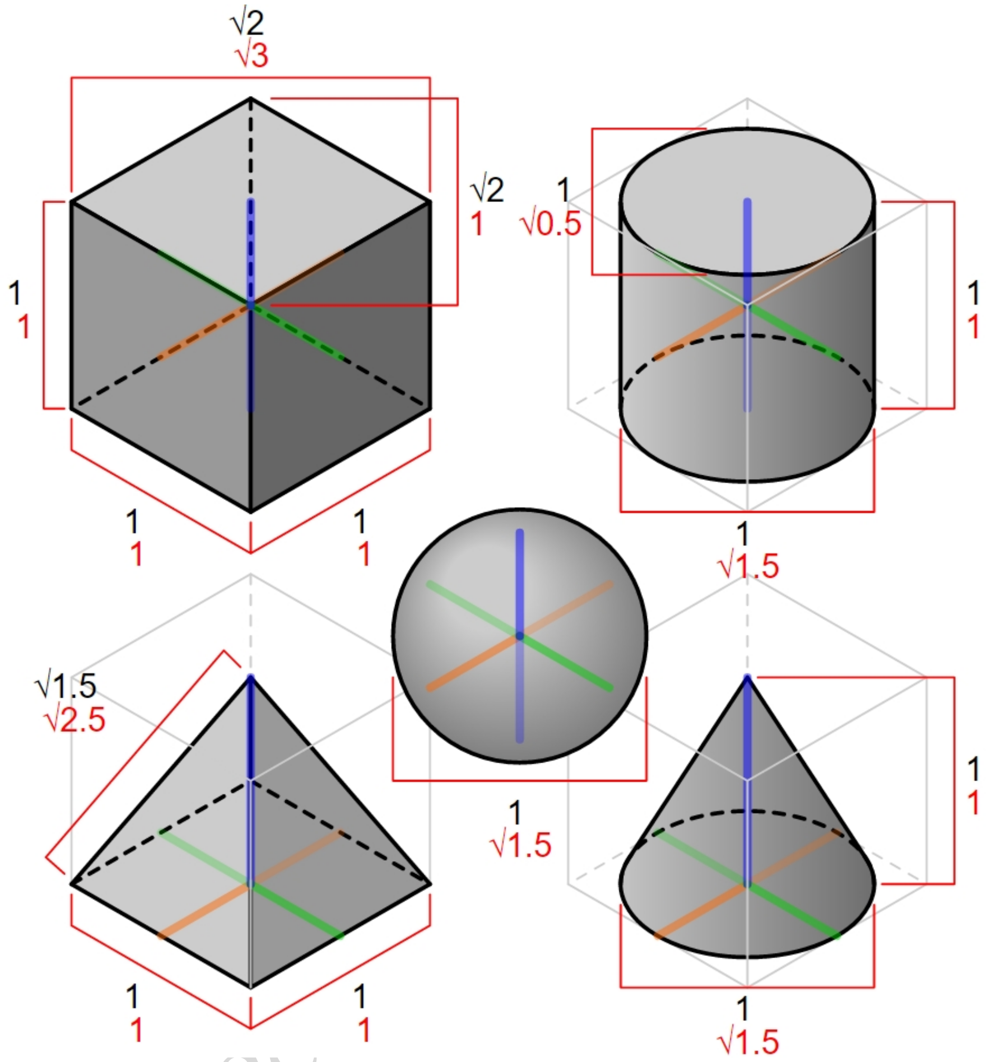


FIG. 8.117 – Volumes isométriques (source : Wikipédia)

Ok, regardons de plus près la figure ci-dessus. Pour prouver d'où viennent ces valeurs, nous devons utiliser les outils mathématiques de changement de base (voir section Algèbre Linéaire page 1966). Ce sera une très belle application de l'Algèbre Linéaire et du Calcul Vectoriel ! ! !

Considérons donc la situation suivante :

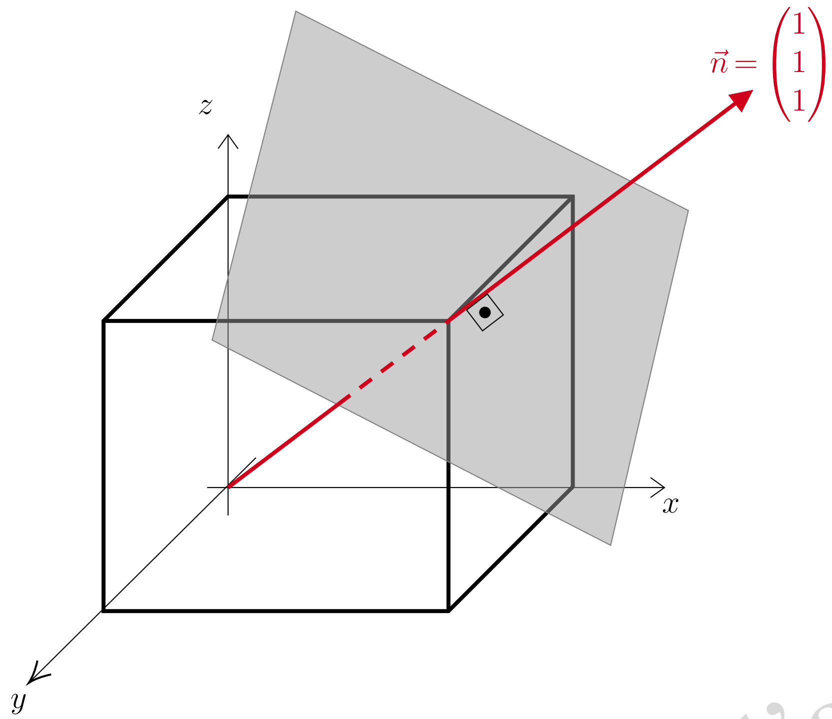


FIG. 8.118 – **Plan isométrique pour trouver les dimensions du cube**

En cours de traduction de l' anglais

Pour simplifier la détermination de la nouvelle base dans le plan nous ferons bien passer notre plan par l'origine (plan affine isométrique) de telle sorte que son équation devienne donc :

$$x+y+z=0 \tag{8.4.33}$$

Évidemment, comme notre plan est perpendiculaire à $\vec{n}=(1,1,1)$ il vient immédiatement qu'un premier vecteur de base de notre base 2D orthonormée sera le vecteur :

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \tag{8.4.34}$$

Nous pouvons facilement contrôler que ce point appartient bien à notre plan affine isométrique d'équation :

$$x+y+z=0 \tag{8.4.35}$$

en remplaçant simplement les valeurs et en constatant que l'égalité est respectée.

Nous recherchons maintenant le deuxième vecteur orthonormé de notre base plane. Nous utilisons donc d'abord simplement le produit vectoriel :

$$\vec{u}_2=\vec{n}\times\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} \tag{8.4.36}$$

Nous pouvons également contrôler facilement que ce point appartient bien à notre plan affine isométrique.

Et nous devons normaliser à l'unité tel que finalement :

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} \tag{8.4.37}$$

Nous calculons maintenant les images des vecteurs de la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la projection orthogonale sur notre plan affine isométrique P :

$$\begin{aligned}
\text{proj}_P\vec{e}_1 &= (\vec{e}_1 \circ \vec{u}_1)\vec{u_1} + (\vec{e}_1 \circ \vec{u}_2)\vec{u_2} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\\
\text{proj}_P\vec{e}_2 &= (\vec{e}_2 \circ \vec{u}_1)\vec{u_1} + (\vec{e}_2 \circ \vec{u}_2)\vec{u_2} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\\
\text{proj}_P\vec{e}_3 &= (\vec{e}_3 \circ \vec{u}_1)\vec{u_1} + (\vec{e}_3 \circ \vec{u}_2)\vec{u_2} = \frac{4}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} - 0 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8.4.38}$$

Finalement, la matrice de projection dans la base canonique est :

$$\boxed{Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\-1 & 2 & -2\\-1 & -1 & 4\end{bmatrix}} \tag{8.4.39}$$

Ok maintenant considérons la projection de l'origine $(0, 0, 0)$ nous avons alors évidemment :

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\-1 & 2 & -2\\-1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{8.4.40}$$

et maintenant un de ses vecteurs unitaires X ou Y :

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\-1 & 2 & -2\\-1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \tag{8.4.41}$$

Nous obtenons donc pour la norme de la distance d'un vecteur unitaire de la base d'origine du plan XY :

$$\sqrt{\frac{2^2}{3^2} + \frac{(-1)^2}{3^2} + \frac{(-1)^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{8.4.42}$$

Et enfin le vecteur unitaire le long de l'axe z :

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\-1 & 2 & -2\\-1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix} \tag{8.4.43}$$

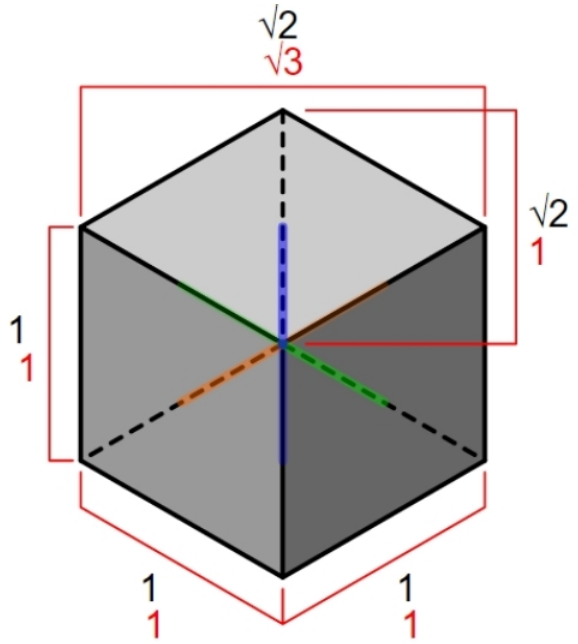
Nous obtenons donc pour la norme de la distance d'un vecteur unitaire de la base d'origine le long de l'axe Z :

$$\sqrt{\frac{2^2}{3^2} + \frac{(-2)^2}{3^2} + \frac{(4)^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \cong 2.828 \tag{8.4.44}$$

Revenons maintenant à la figure de Wikipédia :

En cours de traduction de l' anglais

- D'abord le cube...



Ainsi, les côtés réels d'un cube de longueur égale à 1 se transforment de la même manière que le vecteur de base comme vu juste avant. C'est-à-dire qu'une transformation isométrique par Z donne pour les côtés dans ou parallèles au plan XY :

$$Z:1\rightarrow\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{8.4.45}$$

et le long de l'axe Z :

$$Z:1\rightarrow\sqrt{\frac{8}{3}} \tag{8.4.46}$$

Donc, lorsque Wikipédia dit que les distances sont réduites, c'est vrai... mais ils omettent de dire que cela ne se produit que dans deux directions de l'espace. De plus, lorsque sur la figure ils montrent que 1 en dimensions réelles est égal à 1 pour les côtés en perspective isométrique, c'est complètement faux.

La distance entre les deux sommets horizontaux supérieurs est donnée par le calcul de la norme de la projection :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \tag{8.4.47}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-2\\-1&2&-2\\-1&-1&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} \tag{8.4.48}$$

Donc la norme est :

$$\sqrt{\frac{3^2}{3^2}+\frac{(-3)^2}{3^2}+\frac{0^2}{3^2}}=\sqrt{2} \tag{8.4.49}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et donc la diagonale d'origine se transforme en :

$$Z : \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} \tag{8.4.50}$$

Alors encore une fois Wikipédia se trompe. En fait sur Wikipédia ils prennent pour dimension originale des côtés la valeur inverse de $\sqrt{2/3}$, c'est-à-dire $\sqrt{3/2}$. En effet nous avons dans ce cas :

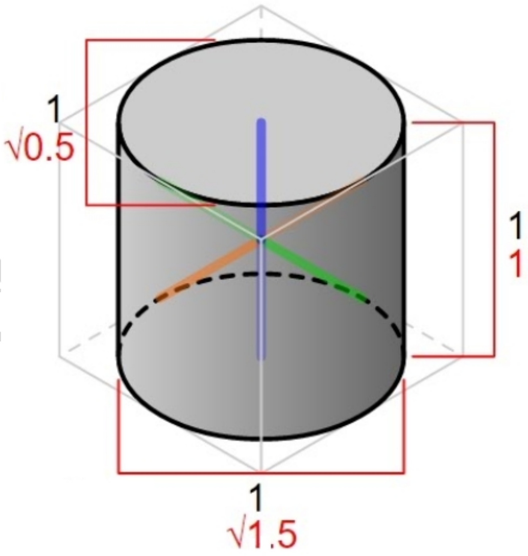
$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{8.4.51}$$

Ainsi la norme est :

$$\sqrt{\frac{3^2}{(\sqrt{3}\sqrt{2})^2}+\frac{(-3)^2}{(\sqrt{3}\sqrt{2})^2}+\frac{0^2}{(\sqrt{3}\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\sqrt{2\cdot 3^2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \tag{8.4.52}$$

Nous retombons donc sur la valeur donnée par Wikipédia...

- Deuxièment le cylindre



En cours de l'anglais

La hauteur du cylindre suit exactement la même procédure que pour le cube et la remarque relative au nombre de Wikipédia reste la même !

Ce qui nous intéressera donc ici c'est surtout "l'ellipse isométrique" (aussi nommée "iso-cercle") visible sur la figure ci-dessus et nous nous intéresserons aux axes mineur et majeur de cette dernière.

Tout d'abord, pour trouver ces valeurs, nous devons projeter le cercle sur le plan isométrique. La figure (où nous avons ajouté un cercle sur le cube) est maintenant donnée par :

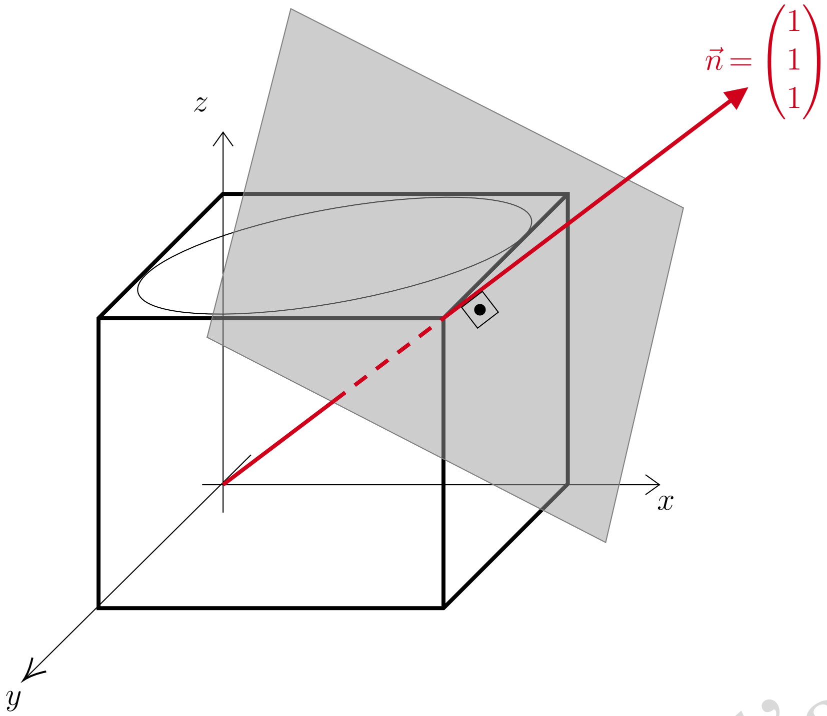


Fig. 8.119 – Plan isométrique pour trouver les dimensions de l'isocercle

En cours ... tion de l' anglais

À terminer en fonction des dons

8.4.2.2 Perspective Oblique

Prenons une vue (par exemple la vue de face), et nommons les axes "x" (horizontal) et y (vertical) comme d'habitude. L'axe z étant l'axe perpendiculaire à la vue (également comme d'habitude).

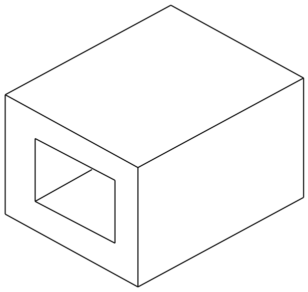
En projection isométrique, nous traçons l'axe z avec un angle par rapport à l'axe x (par exemple $\pi/6$ $(30°)$ ou parfois $\pi/4$ $(45°)$), et nous reportons ensuite les distances en multipliant par un coefficient inférieur à 1 qui est empirique en utilisant des règles trigonométriques de base.

Remarque

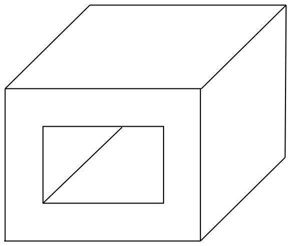
Les projections obliques pour tous les angles autres que $\pi/4$ sont appelées "projections cavalières". Lorsque l'angle est égal à $\pi/4$ nous parlons alors de "projection cabinet".

La projection oblique est un type simple de dessin technique d'une projection graphique utilisée pour produire des images bidimensionnelles d'objets tridimensionnels. Les objets ne sont pas

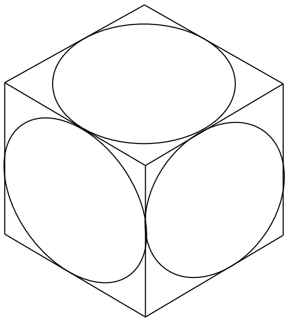
en perspective, ils ne correspondent donc à aucune vue d'un objet qui peut être obtenue dans la pratique, mais la technique donne des images quelque peu convaincantes et utiles :



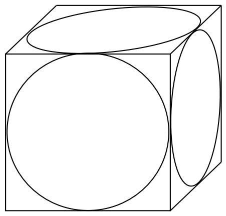
Pictural Isométrique



Pictural Oblique



Pictural Isométrique



Pictural Oblique

Dans le système de coordonnées picturales obliques, un seul axe forme un angle. L'angle peut être compris entre 0 et 90 degrés ($\pi/2$ [rad]) ; cependant, l'angle le plus couramment utilisé est 45 degrés ($\pi/4$ [rad]).

Nous l'utilisons donc souvent lorsqu'une figure doit être dessinée à la main, par exemple sur un tableau noir (leçon, examen oral).

En cours de traduction de l' anglais

8.4.2.3 Projection Orthogonale

Si la direction de projection est orthogonale au plan de projection, alors la perspective transforme une sphère en cercle. C'est donc un type de perspective utilisable en dessin comme alternative à la perspective conique (avec laquelle elle va d'ailleurs coïncider quand l'oeil de l'observateur est placé infiniment loin du "tableau").

La projection orthogonale la plus simple à exprimer est évidemment celle qui envoie l'espace sur un plan parallèle au tableau, il s'agit de la "projection orthogonale parallèle" ou "projection orthographique" de distance d. Autrement dit, tel que par exemple pour la "vue du-dessus" on ait pour tout point du volume :

$$M(x,y,z) \rightarrow m(x,y,d) \tag{8.4.53}$$

Nous obtenons alors trivialement les coordonnées dans un repère orthonormé 2D propre à ce plan où $x=x'$ et $y=y'$:

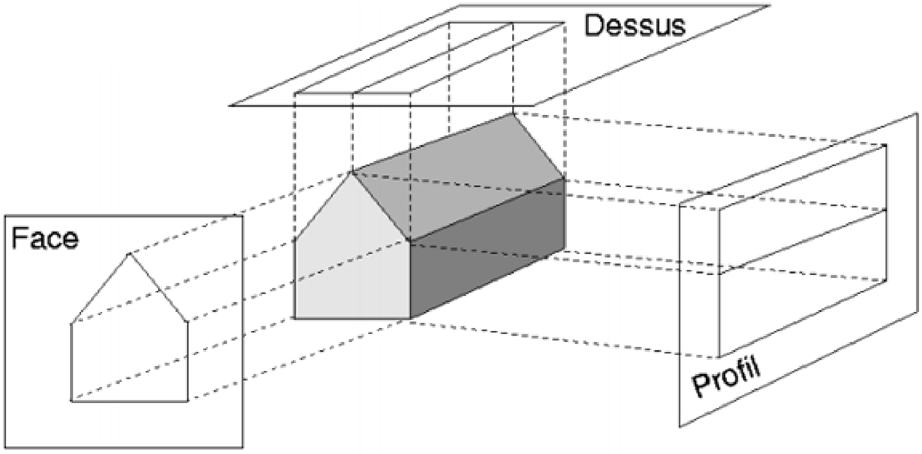
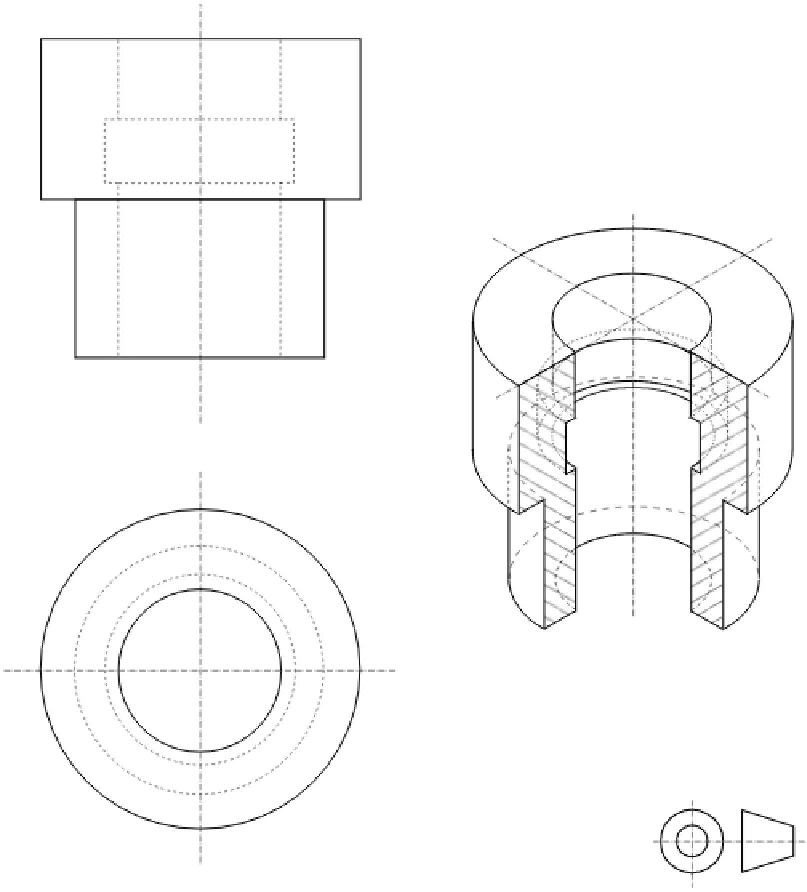


FIG. 8.120 – Projection orthogonale typique...

En cours ... anglais

De nos jours, des logiciels comme AutoCAD, Inventor, Cathia etc... génèrent automatiquement des projections orthogonales à partir d'une vue isométrique d'un dessin.



anglais

FIG. 8.121 – **Projection orthogonale avec un logiciel**

En infographie, l'une des matrices les plus courantes utilisées pour la projection orthographique peut être définie par un 6-uplet, (gauche, droite, bas, haut, proche, loin), qui définit les plans de découpage (c'est-à-dire la région de l'espace oculaire qui contient toute la géométrie que vous souhaitez afficher). Ces plans forment une boîte dont le coin minimum est (gauche, bas, -près) et le coin maximum est (droite, haut, -loin). La boîte est ensuite translatée de sorte que son centre soit à l'origine, puis elle est mise à l'échelle du cube unité qui est défini par un coin minimum à $(-1,-1,-1)$ et un coin maximum à $(1,1,1)$.

La transformation orthographique pour obtenir la canonique peut être donnée par la matrice suivante :

$$C_V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\text{droite}-\text{gauche}} & 0 & 0 & -\frac{\text{droite}+\text{gauche}}{\text{droite}-\text{gauche}} \\ 0 & \frac{2}{\text{haut}-\text{bas}} & 0 & -\frac{\text{haut}+\text{bas}}{\text{haut}-\text{bas}} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\text{loin}-\text{près}} & -\frac{\text{loin}+\text{près}}{\text{loin}-\text{près}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.4.54}$$

qui est en fait évidemment une mise à l'échelle suivie d'une translation de la forme (les positions

sont abrégées maintenant par leur première lettre) :

$$C_V = ST = \begin{bmatrix} \frac{2}{d-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{h-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+d}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{h+b}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{l+p}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.4.55)$$

Comme illustré dans la figure ci-dessous :

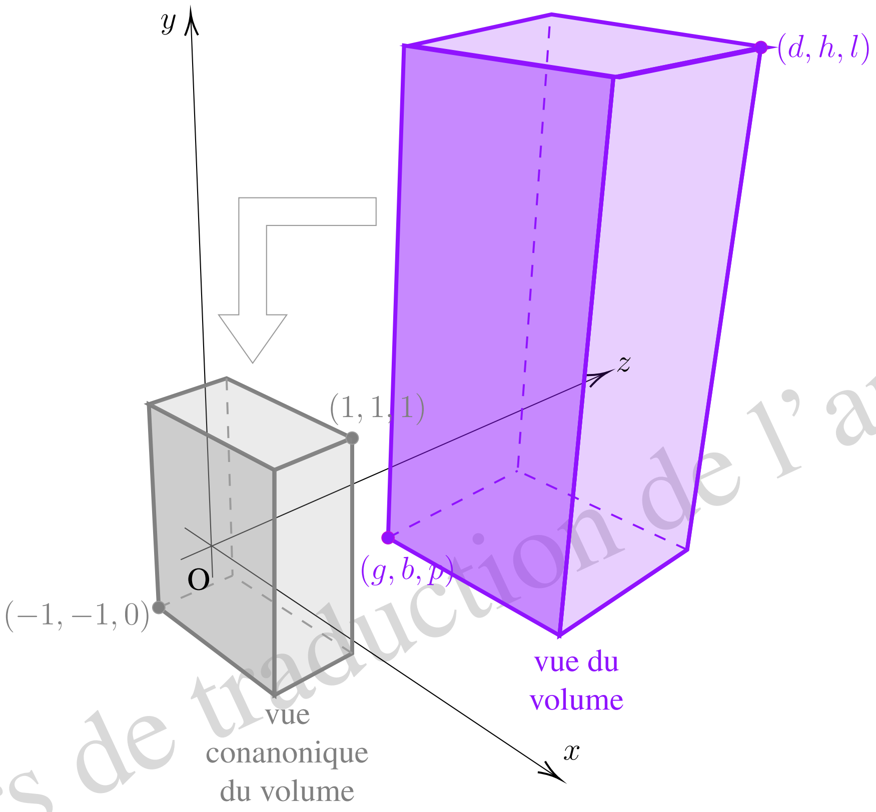


FIG. 8.122 – Transformation canonique pour projection orthogonale

En cours de traduction de l'anglais

Si l'origine de la matrice C_V n'est pas évidente voici les détails pour l'obtenir :

L'approche la plus simple consiste à considérer chacun des trois axes séparément et à calculer comment mapper les points le long de cet axe à partir du volume de vue d'origine vers le volume de vue canonique. Nous commençons par la coordonnée x. Un point dans notre volume de vue aura une coordonnée x sur la plage $[l, d]$, et nous voulons le transformer dans la plage $[-1, +1]$!

Donc tout d'abord nous voyons que nous avons :

$$l \leq x \leq r \quad (8.4.56)$$

Maintenant, en vue de réduire la plage à la taille souhaitée, nous soustrayons l de tous les termes pour produire un zéro sur le côté gauche. Une autre approche que nous pourrions adopter ici serait de translater la plage de sorte qu'elle soit centrée sur zéro, plutôt que d'avoir l'un de ses points d'extrémité à zéro, mais l'algèbre est un peu plus nette de cette façon, donc nous allons le faire comme ceci pour des raisons de lisibilité :

$$0 \leq x - l \leq r - l \quad (8.4.57)$$

Maintenant qu'une extrémité de notre plage est positionnée à zéro, nous pouvons la réduire à la taille souhaitée. Nous voulons que la plage de valeurs x soit large de deux unités, de $+1$ à -1, donc nous multiplions par $2/(r-l)$. Notez que $r-l$ est la largeur de notre volume de vue et est donc toujours un nombre positif, nous n'avons donc pas à nous soucier des inégalités qui changent de directions :

$$0 \leq \frac{2x-2l}{r-l} \leq 2 \tag{8.4.58}$$

Ensuite, nous soustrayons un de tous les termes pour produire notre plage souhaitée de $[-1,+1]$:

$$-1 \leq \frac{2x-2l}{r-l} - 1 \leq +1 \tag{8.4.59}$$

Un peu d'algèbre de base nous permet d'écrire le terme central sous la forme d'une seule fraction :

$$-1 \leq \frac{2x-r-l}{r-l} - 1 \leq +1 \tag{8.4.60}$$

Enfin, nous divisons le terme central en deux fractions pour qu'il prenne la forme $px+q$. Pour cela, nous devons regrouper nos termes de cette manière afin que les équations que nous dérivons puissent être facilement traduites sous forme matricielle :

$$-1 \leq \frac{2x}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \leq +1 \tag{8.4.61}$$

Le terme central de cette inégalité nous donne maintenant l'équation dont nous avons besoin pour transformer x dans le volume de vue canonique :

$$x' = \frac{2x}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \tag{8.4.62}$$

Les étapes nécessaires pour obtenir une formule pour y sont exactement les mêmes. Il suffit de remplacer x par y, d par h et g par b. Plutôt que de les répéter ici, nous allons simplement afficher le résultat :

$$y' = \frac{2y}{t-b} - \frac{t+b}{t-b} \tag{8.4.63}$$

Enfin, nous devons dériver une relation pour z. C'est un peu différent dans ce cas car nous mappons z sur la plage $[0,+1]$ plutôt que $[-1,+1]$, mais cela devrait vous sembler très familier. Voici notre condition de départ, une coordonnée z sur la plage $[p,l]$:

$$n \leq z \leq f \tag{8.4.64}$$

Nous soustrayons n de tous les termes afin que l'extrémité inférieure de la plage soit positionnée à zéro :

$$0 \leq z-n \leq f-n \tag{8.4.65}$$

Et maintenant, il ne reste plus qu'à diviser par $l-p$ pour produire une plage finale de $[0,+1]$. Comme précédemment, nous remarquons que $l-p$ indique la profondeur de notre volume de visualisation et ne sera donc jamais négatif :

$$0 \leq \frac{z-n}{f-n} \leq 1 \tag{8.4.66}$$

En cours de traduction de l'anglais

Finalement, nous divisons cela en deux fractions pour que cela prenne la forme $pz+q$:

$$0 \leq \frac{z}{f-n} - \frac{n}{f-n} \leq 1 \tag{8.4.67}$$

Cela nous donne notre formule pour transformer z :

$$z' = \frac{z}{f-n} - \frac{n}{f-n} \tag{8.4.68}$$

Nous sommes maintenant prêts à écrire notre matrice de projection orthographique centrée. Pour récapituler notre travail jusqu'à présent, voici les trois équations de projection que nous avons obtenues :

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.4.69}$$

Pour chaque point (x,y,z), le point transformé serait :

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.4.70}$$

Il est souvent plus utile d'utiliser des coordonnées homogènes. La transformation ci-dessus peut être représentée pour des coordonnées homogènes comme suit :

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.4.71}$$

Pour chaque vecteur homogène (x,y,z), le vecteur transformé sera évidemment :

$$P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.4.72}$$

Bien que ce soit la méthode la plus utilisée dans l'industrie sur papier (ou sur écran), elle présente cependant un inconvénient : l'effet réel de profondeur est entièrement perdu et c'est pourquoi la projection orthogonale est souvent accompagnée d'une vue en projection isométrique de l'objet d'intérêt.

En cours de traduction de l' anglais

8.4.3 Projections Sphériques

Les projections sphériques sont un domaine important de l'ingénierie topographique et géographique (et donc de la navigation). A notre connaissance, il existe pas loin de 200 différentes techniques de projection sphérique.

En effet, il est impossible de représenter les trajectoires d'une sphère sur une surface plane de telle sorte que toutes les distances restent les mêmes. Pour dessiner une carte d'une sphère, il faut donc faire des compromis. La plupart des cartes adoptent l'une des deux stratégies possibles, soit la préservation des surfaces, soit la préservation des angles. La projection stéréographique (c'est-à-dire la projection sur un plan) est une façon de réaliser des cartes, et elle préserve les angles. Elle est utilisée depuis l'Antiquité à cette fin, et ses propriétés géométriques de base étaient déjà connues à l'époque.

Nous nous concentrerons dans ce livre uniquement sur les projections sphériques les plus connues et sans également détailler les problèmes de projection d'images d'une sphère vers un plan lorsque le nombre de points (pixels) n'est pas infini...

Par exemple, voici un résumé de quelques projections sphériques bien connues[5] :

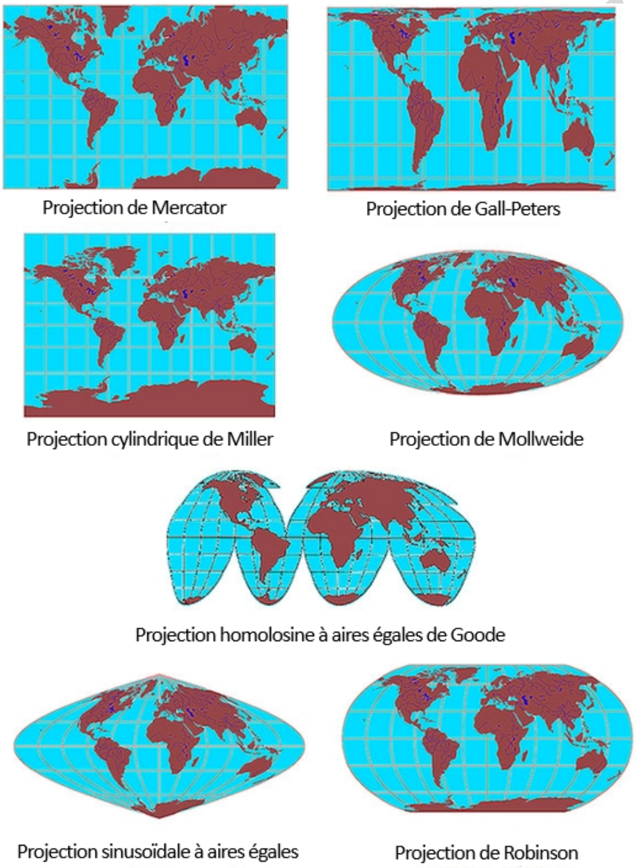


FIG. 8.123 – Différentes projections sphériques et cylindriques comme Mercator, Gall-Peters, Mollweide, Robinson, etc. (auteur : Mike Bostock)

En cours ... e l' anglais

[5] Le choix de la projection utilisée à l'école dépend principalement du gouvernement du pays car certaines projections accordent plus d'importance à certains pays qu'à d'autres... Mais de toute façon, n'importe quel élève peut maintenant voir une sphère terrestre dans sa classe et c'est la seule projection totalement conforme existante !

Ou avec une idée plus détaillée de chaque technique et de son nom correspondant :

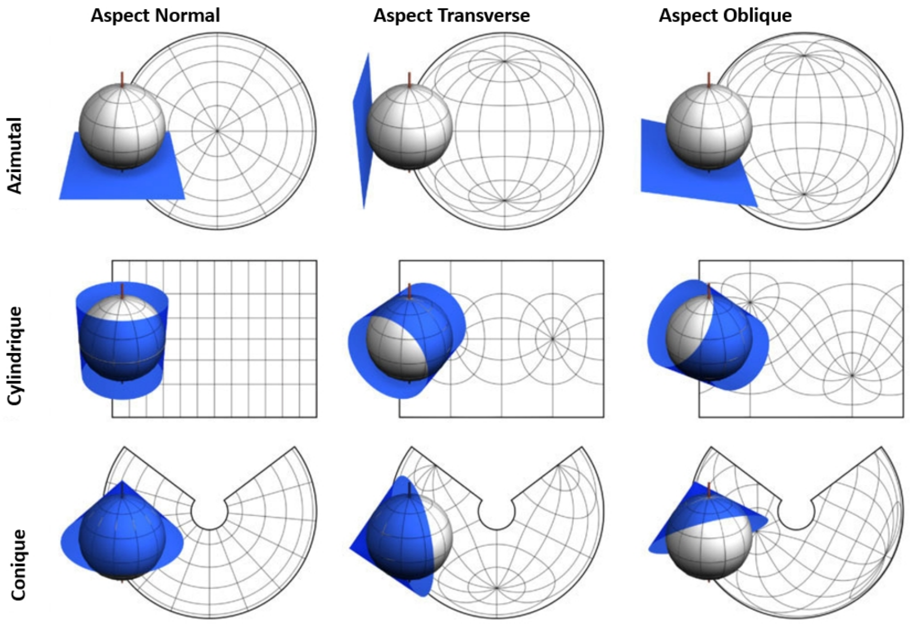


FIG. 8.124 – **Vue technique de diverses techniques de projections sphériques**

> **Remarque**
>
> Une liste exhaustive des projections sphériques est donnée sur la page web de la liste des projections du logiciel Geocart disponible ici :
>
> https://www.mapthematics.com/ProjectionsList.php

8.4.3.1 Projection Stéréographique

La "projection stéréographique" (au sens classique du terme), ou plus précisément la "projection azimutale normale", est une façon de projeter les points situés sur une surface sphérique sur un plan. De telles projections sont couramment utilisées dans la cartographie de la Terre et de l'espace où la géométrie est souvent intrinsèquement sphérique et doit être affichée sur une surface plane telle que du papier ou un écran d'ordinateur. Toute tentative de cartographie d'une sphère sur un plan nécessite une distorsion, les projections stéréographiques ne font pas exception et ne constituent en effet pas une approche idéale si une distorsion minimale est souhaitée.

Un modèle physique des projections stéréographiques consiste à imaginer une sphère transparente posée sur un plan. Si nous appelons le point où la sphère touche le plan le "pôle sud", nous plaçons une source lumineuse au "pôle nord". Chaque rayon de lumière passe par un point du plan et frappe ensuite le plan, c'est la projection stéréographique du point sur la sphère.

Pour obtenir la formule de projection d'un point (x,y,z) situé sur la sphère, supposons que la sphère est centrée à l'origine et qu'elle a un rayon r. Le plan est constitué de tous les points $z=-r$ et la source lumineuse est au point $(0,0,r)$. La section transversale de cet arrangement est illustrée ci-dessous dans ce que nous appelons communément un "diagramme de Schlegel" qui ressemble à ceci en pseudo-perspective :

En cours de l'anglais

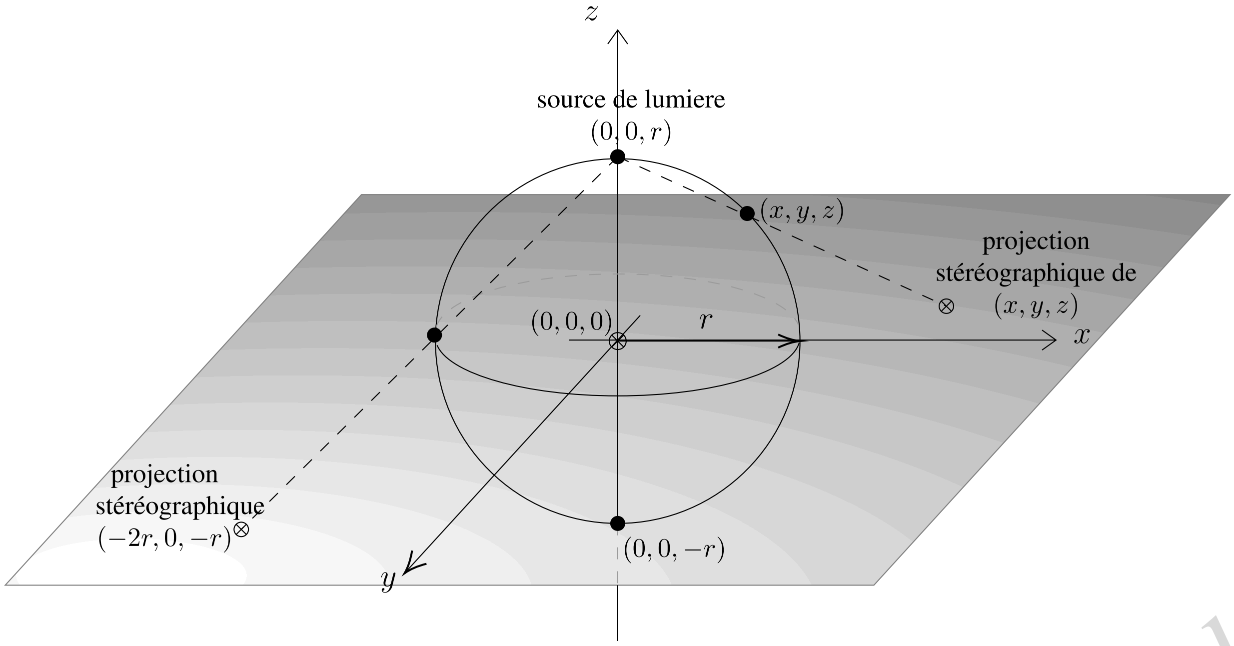


FIG. 8.125 – **Diagramme de Schlegel en pseudo-perspective (projection stéréographique)**

En cours de traduction de l' anglais

et dans la vue de face :

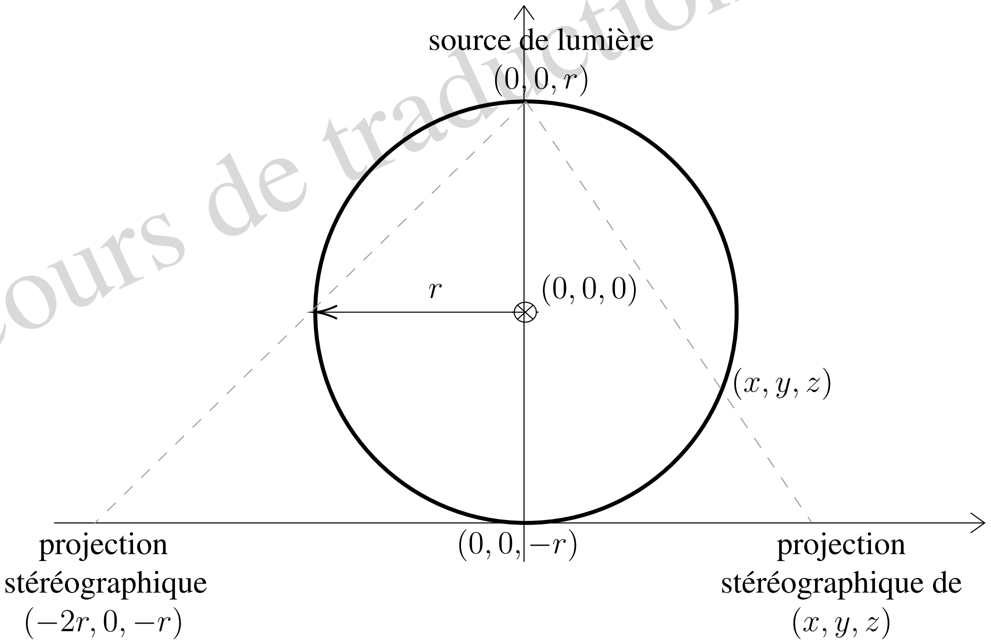


FIG. 8.126 – **Diagramme de Schlegel en vue de face**

Comme nous pouvons le voir ci-dessus, la projection de $(0,0,r)$ donne évidemment $(0,0,-r)$ et en utilisant le théorème de Thalès (ou "théorème d'interception") tel que prouvé dans la section de Géométrie Euclidienne (voir page 2591), nous avons immédiatement que la projection de $(-r,0,0)$ est $(-2r,0,r)$.

Considérons maintenant l'équation de la droite passant par $P_1=(0,0,r)$ et passant par un point

$P_2 = (x, y, z)$ de la sphère. Nous avons donc pour le point projeté P :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + a(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \tag{8.4.73}$$

En résolvant ceci pour a pour la composante z, nous obtenons :

$$-r = r + a(z - r) \tag{8.4.74}$$

ou :

$$a = \frac{2r}{r - z} \tag{8.4.75}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} + \frac{2r}{r-z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2rx}{r-z} \\ \dfrac{2ry}{r-z} \\ -r \end{pmatrix} \tag{8.4.76}$$

Notez que :

- Le pôle Sud est au centre des points projetés
- Les lignes de latitude se projettent sur des cercles concentriques autour de $(0, 0, -r)$
- Les lignes de longitude se projettent sur les rayons à partir du point $(0, 0, -r)$
- Il y a peu de distorsion près du pôle Sud
- L'équation projete sur un cercle de rayon $2r$
- La distorsion augmente à mesure que l'on se rapproche du pôle nord pour finalement devenir infinie au pôle nord
- Comme nous pouvons le voir sur l'image ci-dessous, les angles sont préservés (puisque la latitude et la longitude sont toujours perpendiculaires sur le plan projeté)

En cours de traduction de l' anglais

FIG. 8.127 – Projection stéréographique de la Terre (source : ?)

En cours de traduction de l'anglais

Certains auteurs ont placé l'origine du repère au centre de la sphère. La relation précédente devient donc :

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}\dfrac{2rx}{r-z}\\ \dfrac{2ry}{r-z}\\ 0\end{pmatrix} \tag{8.4.77}$$

et prenons pour rayon $r=1$. Nous avons alors :

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{1-z}\\ \dfrac{y}{1-z}\\ 0\end{pmatrix}=\left(\dfrac{x}{1-z},\dfrac{y}{1-z},0\right) \tag{8.4.78}$$

Et comme nous notons les composantes des points projetés par a,b,c au lieu de x,y,z, nous obtenons :

$$\vec{P}=\left(\dfrac{a}{1-c},\dfrac{b}{1-c},0\right) \tag{8.4.79}$$

Et comme la dernière coordonnée est toujours 0, nous écrivons seulement :

$$\vec{P}=\left(\dfrac{a}{1-c},\dfrac{b}{1-c}\right) \tag{8.4.80}$$

Et lorsque le plan de projection est assimilé au plan de projection (complexe), alors nous obtenons la relation que nous retrouvons la plupart du temps dans les livres :

$$\boxed{P=\dfrac{a}{1-c}+\mathrm{i}\dfrac{b}{1-c}=\dfrac{a+\mathrm{i}b}{1-c}} \tag{8.4.81}$$

Théorème 8.19. La projection stéréographique est une projection conforme (c'est-à-dire qu'elle conserve les angles). C'est-à-dire :

Si nous considérons la projection stéréographique$\pi : S^2 \setminus \{\vec{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$ comme nous l'avons démontré, défini par :

$$\pi : (x,y,z)^T \Rightarrow \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)^T \tag{8.4.82}$$

avec $x^2+y^2+z^2=1$ et $\vec{e}_3=(0,0,1)^T$.

Étant donnés deux chemins φ et γ de type $\mathcal{C}^1$ sur la sphère (c'est-à-dire deux applications différentiables dans lesquelles la dérivée est continue pour rappel...) tels que (choix empirique) :

$$\varphi(0)=\gamma(0) \tag{8.4.83}$$

et tel que $\varphi(0)=\gamma(0)\neq\vec{e}_3$, nous voulons vérifier si (nous utilisons la notation entre parenthèses pour le produit scalaire pour ne pas le confondre avec le symbole rond de composition de fonction) :

$$\frac{\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\rangle}{||(\pi\circ\varphi)'(0)||\cdot||(\pi\circ\gamma)'(0)||}=\frac{\langle\varphi'(0),\gamma'(0)\rangle}{||\varphi'(0)||\cdot||\gamma'(0)||} \tag{8.4.84}$$

où $\varphi'(0)$ et $\gamma'(0)$ sont les vecteurs tangents de φ et γ sur le point 0 et $(\pi\circ\varphi)'(0)$ et $(\pi\circ\gamma)'(0)$ sont leurs vecteurs tangents correspondants sur le plan de projection.

Démonstration 8.19.1. Pour faire la démonstration commençons par développer les expressions $(\pi\circ\varphi)'(0)$ et $(\pi\circ\gamma)'(0)$. Écrivons $\varphi=(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)^T$. Nous avons :

$$\pi\circ\varphi=\left(\frac{\varphi_x}{1-\varphi_z},\frac{\varphi_y}{1-\varphi_z}\right)^T \tag{8.4.85}$$

Simplifions le dénominateur en posant :

$$\vec{u}=\vec{\varphi}-\vec{e} \tag{8.4.86}$$

Nous obtenons alors :

$$\pi\circ\varphi=\left(-\frac{u_x}{u_z},-\frac{u_y}{u_z},0\right)^T \tag{8.4.87}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}(\pi\circ\varphi)'(0)&=\left(\frac{-u_x{}'(0)\cdot u_z(0)+u_x(0)\cdot u_z{}'(0)}{u_z(0)^2},\frac{-u_y{}'(0)\cdot u_z(0)+u_y(0)\cdot u_z{}'(0)}{u_z(0)^2},0\right)^T\\&=\frac{1}{u_z(0)}\left(-u_x{}'(0),-u_y{}'(0),0\right)^T+\frac{u_z{}'(0)}{u_z(0)^2}\left(u_x(0),u_y(0),0\right)^T\\&=-\frac{1}{u_z(0)}\left(u_x{}'(0),u_y{}'(0),u_z{}'(0)\right)^T+\frac{u_z{}'(0)}{u_z(0)^2}\left(u_x(0),u_y(0),u_z(0)\right)^T\\&=-\frac{1}{u_z(0)}\vec{u}{}'(0)+\frac{u_z{}'(0)}{u_z(0)^2}\vec{u}(0)\end{aligned} \tag{8.4.88}$$

En cours de traduction de l'anglais

Et de même, en posant :

$$\vec{v}=\vec{\gamma}-\vec{e}_3 \qquad (8.4.89)$$

nous obtenons :

$$(\pi\circ\gamma)'(0)=-\frac{1}{v_z(0)}\vec{v}\,'(0)+\frac{v'_z(0)}{v_z(0)^2}\vec{v}(0) \qquad (8.4.90)$$

Développons maintenant $\langle(\phi\circ\varphi)'(0),(\phi\circ\gamma)'(0)\rangle$:

$$\begin{aligned}&\left\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\right\rangle=\left\langle-\frac{1}{u_z(0)}u'(0)+\frac{u_z'(0)}{u_z(0)^2}u(0),-\frac{1}{v_z(0)}v'(0)+\frac{v_z'(0)}{v_z(0)^2}v(0)\right\rangle\\&=\frac{1}{u_z(0)\,v_z(0)}\langle u'(0),v'(0)\rangle\\&-\frac{v_z'(0)}{u_z(0)\,v_z(0)^2}\langle u'(0),v(0)\rangle-\frac{u_z'(0)}{u_z(0)^2v_z(0)}\langle u(0),v'(0)\rangle+\frac{u_z'(0)}{u_z(0)^2}\frac{v_z'(0)}{v_z(0)^2}\langle u(0),v(0)\rangle\end{aligned} \qquad (8.4.91)$$

Le changement de variables nous amène immédiatement à :

$$\varphi(0)=\gamma(0)\Leftrightarrow u(0)=v(0) \qquad (8.4.92)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}&\left\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\right\rangle=\\&=\frac{1}{u_z(0)^2}\langle u'(0),v'(0)\rangle-\frac{v_z'(0)}{u_z(0)^3}\langle u'(0),u(0)\rangle-\frac{u_z'(0)}{u_z(0)^3}\langle v(0),v'(0)\rangle+\frac{u_z'(0)\,v_z'(0)}{u_z(0)^4}\langle u(0),u(0)\rangle\end{aligned} \qquad (8.4.93)$$

Et comme par construction :

$$\langle\varphi,\varphi'\rangle=0 \qquad (8.4.94)$$

et que nous avons aussi :

$$\langle u,u'\rangle=\langle\varphi-\vec{e}_3,\varphi'\rangle=-\langle\vec{e}_3,\varphi'\rangle=-\varphi'_z=-u'_z \qquad (8.4.95)$$

et identiquement :

$$\langle v,v'\rangle=-v'_z \qquad (8.4.96)$$

alors le produit scalaire ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}&\left\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\right\rangle\\&=\frac{1}{u_z(0)^2}\langle u'(0),v'(0)\rangle+2\frac{v_z'(0)\,u_z'(0)}{u_z(0)^3}+\frac{u_z'(0)\,v_z'(0)}{u_z(0)^4}\langle u(0),u(0)\rangle\\&=\frac{1}{u_z(0)^2}\langle u'(0),v'(0)\rangle+\frac{u_z'(0)\,v_z'(0)}{u_z(0)^4}\left(\langle u(0),u(0)\rangle+2u_z(0)\right)\end{aligned} \qquad (8.4.97)$$

Mais :

$$\begin{aligned}\langle u(0),u(0)\rangle+2u_z(0)&=\langle u(0),u(0)\rangle+2\langle u(0),e_3\rangle=\langle u(0),u(0)+2e_3\rangle\\&=\langle\varphi(0)-e_3,\varphi(0)+e_3\rangle=\varphi_x^2+\varphi_y^2+(\varphi_z-1)(\varphi_z+1)\\&=\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2-1^2=1-1=0\end{aligned} \qquad (8.4.98)$$

En cours de traduction de l' anglais

étant donné que par construction $\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2=1$.

Donc finalement notre numérateur est donné par :

$$\left\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\right\rangle=\frac{1}{u_z(0)^2}\left\langle u'(0),v'(0)\right\rangle=\frac{1}{(\varphi_z(0)-1)^2}\left\langle\varphi'(0),\gamma'(0)\right\rangle \tag{8.4.99}$$

Calculons maintenant le premier terme du dénominateur $||(\pi\circ\varphi)'(0)||$:

$$\begin{aligned}\left\|(\pi\circ\varphi)'(0)\right\|^2&=\left\langle-\frac{1}{u_z(0)}u'(0)+\frac{u_z'(0)}{u_z(0)^2}u(0),-\frac{1}{u_z(0)}u'(0)+\frac{u_z'(0)}{u_z(0)^2}u(0)\right\rangle\\&=\frac{1}{u_z(0)^2}\left\langle u'(0),u'(0)\right\rangle+2\frac{u_z'(0)^2}{u_z(0)^3}+\frac{u_z'(0)^2}{u_z(0)^4}\left\langle u(0),u(0)\right\rangle\end{aligned} \tag{8.4.100}$$

car pour rappel (voir démonstration juste plus haut) $\langle u,u'\rangle=-u'_z$.

Mais nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle&=\langle\varphi-\vec{e}_3,\varphi-\vec{e}_3\rangle=\varphi_x^2+\varphi_y^2+(\varphi_z-1)^2\\&=\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2-2\varphi_z+1=1-2\varphi_z+1=2(1-\varphi_z)=-2u_z\end{aligned} \tag{8.4.101}$$

Par conséquent, les expressions précédentes deviennent :

$$\left\|(\pi\circ\varphi)'(0)\right\|^2=\frac{1}{u_z(0)^2}\left\langle u'(0),u'(0)\right\rangle=\frac{1}{(\varphi_z(0)-1)^2}\left\langle\varphi'(0),\varphi'(0)\right\rangle \tag{8.4.102}$$

De la même manière :

$$\left\|(\pi\circ\gamma)'(0)\right\|^2=\frac{1}{(\gamma_z(0)-1)^2}\left\langle\gamma'(0),\gamma'(0)\right\rangle \tag{8.4.103}$$

Pour terminer, nous posons :

$$\begin{aligned}\left\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\right\rangle&=\frac{1}{(\varphi_z(0)-1)^2}\left\langle\varphi'(0),\gamma'(0)\right\rangle\\\left\|(\pi\circ\varphi)'(0)\right\|^2&=\frac{1}{(\varphi_z(0)-1)^2}\left\langle\varphi'(0),\varphi'(0)\right\rangle\\\left\|(\pi\circ\gamma)'(0)\right\|^2&=\frac{1}{(\gamma_z(0)-1)^2}\left\langle\gamma'(0),\gamma'(0)\right\rangle\end{aligned} \tag{8.4.104}$$

dedans :

$$\frac{\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\rangle}{||(\pi\circ\varphi)'(0)||\cdot||(\pi\circ\gamma)'(0)||} \tag{8.4.105}$$

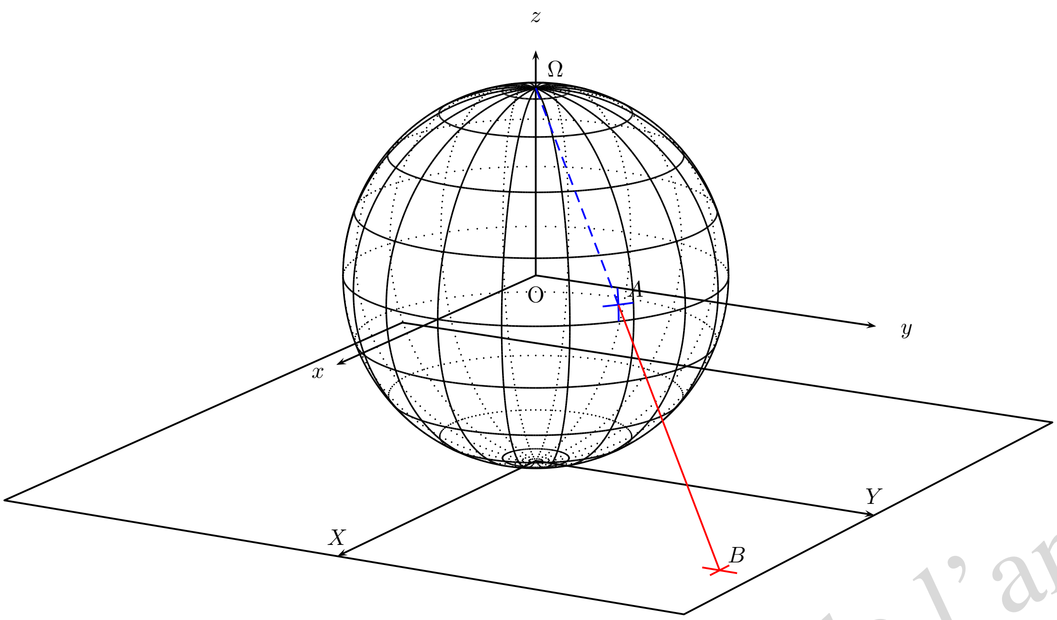
et nous obtenons :

$$\frac{\left\langle(\pi\circ\varphi)'(0),(\pi\circ\gamma)'(0)\right\rangle}{\left\|(\pi\circ\varphi)'(0)\right\|\cdot\left\|(\pi\circ\gamma)'(0)\right\|}=\frac{\left\langle\varphi'(0),\gamma'(0)\right\rangle}{\sqrt{\left\langle\varphi'(0),\varphi'(0)\right\rangle}\sqrt{\left\langle\gamma'(0),\gamma'(0)\right\rangle}}=\frac{\langle\varphi'(0),\gamma'(0)\rangle}{\|\varphi'(0)\|\cdot\|\gamma'(0)\|} \tag{8.4.106}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

De nombreuses personnes ont besoin de logiciels 3D pour projeter une image (une image plate) sur une sphère. Comment les logiciels font-ils l'inverse d'une projection stéréographique ? Pour le voir, considérons d'abord l'illustration suivante réalisée par Manuel Luque :



Dans la figure ci-dessus, nous avons d'abord :

$$\text{O}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \Omega=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{8.4.107}$$

et nous avons aussi :

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{8.4.108}$$

et nous avons aussi :

$$B=\begin{pmatrix}X\\Y\\-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{\Omega A}=\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{\Omega B}=\begin{pmatrix}X\\Y\\-2\end{pmatrix} \tag{8.4.109}$$

et trivialement :

$$\overrightarrow{\Omega A}=k\overrightarrow{\Omega B}\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}X\\Y\\-2\end{pmatrix} \tag{8.4.110}$$

Le problème posé est le suivant : nous nous donnons les coordonnées d'un point B du plan $z=-1$, il faut en déduire les coordonnées du point A de la sphère $x=f(X,Y); y=g(X,Y); z=h(X,Y)$.

Tout d'abord nous avons facilement :

$$\begin{cases} x=kX\\ y=kY\\ 1-z=2k \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=k^2\left(X^2+Y^2\right)\\ k=\frac{1-z}{2} \end{array} \tag{8.4.111}$$

En cours de traduction de l'anglais

Sachant que $x^2+y^2=1-z^2$, nous obtenons en remplaçant :

$$1-z^2=\frac{(1-z)^2}{4}\left(X^2+Y^2\right) \Longrightarrow 4(1+z)=(1-z)\left(X^2+Y^2\right) \tag{8.4.112}$$

Dès lors :

$$z=\frac{X^2+Y^2-4}{X^2+Y^2+4} \tag{8.4.113}$$

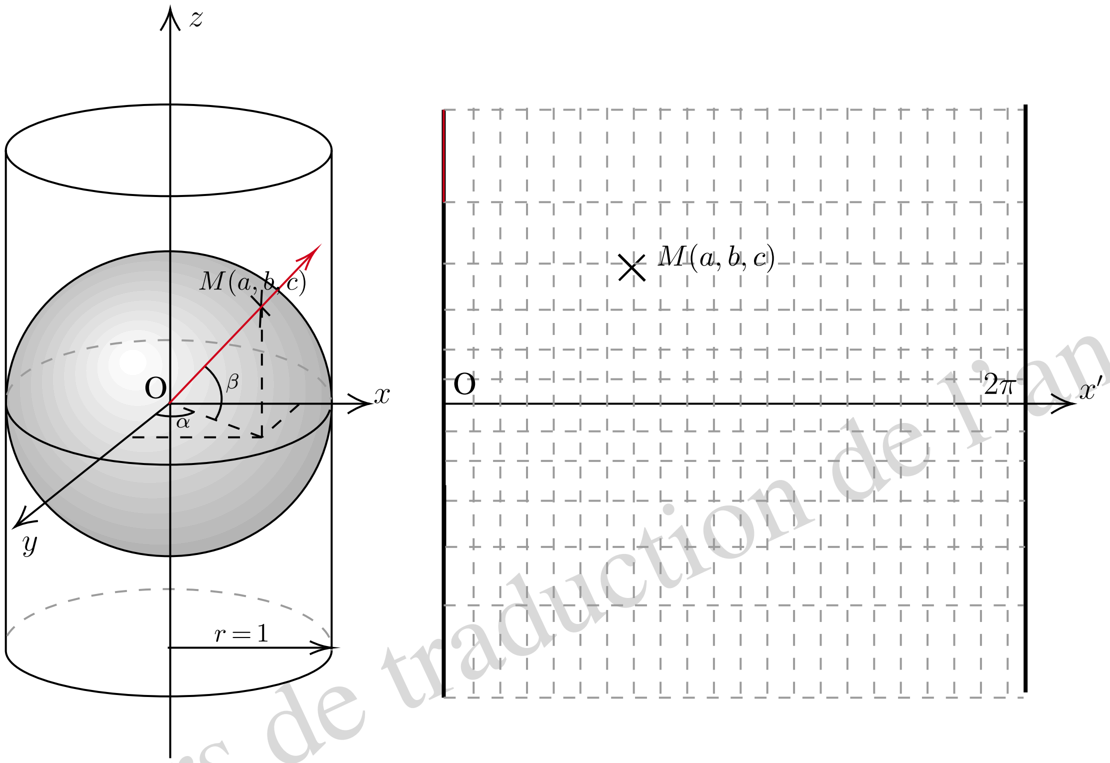
En faisant la même chose pour les deux autres coordonnées, nous obtenons :

$$\begin{cases} x=\frac{4X}{X^2+Y^2+4} \\ y=\frac{4Y}{X^2+Y^2+4} \\ z=\frac{X^2+Y^2-4}{X^2+Y^2+4} \end{cases} \tag{8.4.114}$$

En cours de traduction de l' anglais

8.4.3.2 Projection Cylindrique

La "projection cylindrique" (au sens classique du terme) ou plus précisément appelée "projection cylindrique normale" est une projection dans laquelle les lignes de latitude sont projetées sur des lignes parallèles équidistantes et les lignes de longitude sur des lignes parallèles pas nécessairement équidistantes. La figure ci-dessous illustre la projection de base, une ligne est projetée depuis le centre de la sphère à travers chaque point de la sphère jusqu'à son intersection :



En cours de traduction de l'anglais

Comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessus, il est tout d'abord assez évident que :

$$\tan(\beta) = \frac{z'}{r} = \frac{z'}{1} \Rightarrow z' = \tan(\beta) = \tan\left(\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{8.4.115}$$

et pour x', nous avons évidemment :

$$x' = \alpha = \operatorname{sgn}(x)\arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \tag{8.4.116}$$

avec pour rappel :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} \tag{8.4.117}$$

Alors finalement :

$$\begin{aligned} x' &= \alpha = \operatorname{sgn}(x)\arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ z' &= \tan(\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned} \tag{8.4.118}$$

Schématiquement les étapes de construction sont les suivantes :

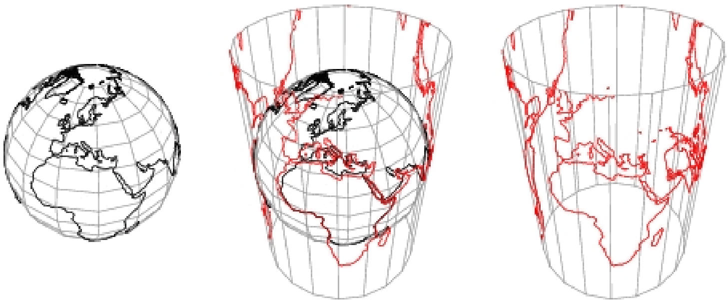
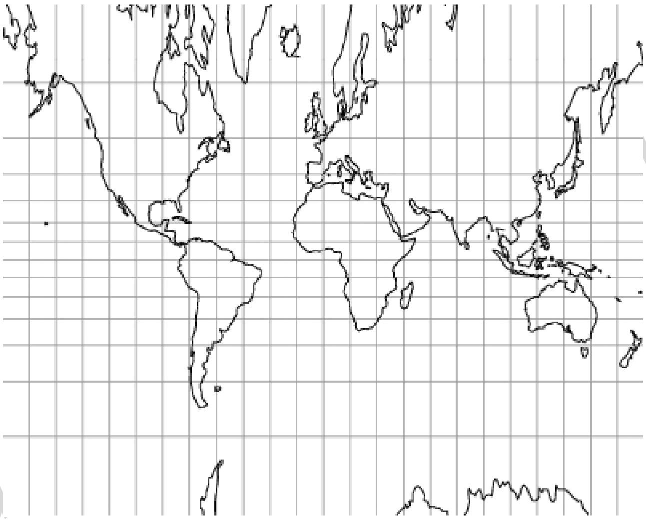


FIG. 8.128 – **Projection cylindrique de la Terre**

ce qui donne :



En cours de traduction depuis l'anglais

Il devrait être assez évident (sans démonstration) que cette projection ne conserve pas les aires, mais conserve les angles !

8.4.3.3 Projection de Mercator

Une "projection de Mercator" ressemble à une projection cylindrique mais présente une distorsion différente dans l'espacement des lignes de longitude (la même idée s'applique à la "projection stéréographique de Gall" ou "projection de Gall-Peters" que nous n'aborderons pas dans ce livre). La projection de Mercator est encore au début du 121e siècle la projection la plus couramment utilisée pour cartographier la Terre sur une surface plane (elle privilégie, en utilisant le biais humain, les pays habités par des chrétiens de couleur blanche...).

Comme la projection cylindrique Nord et Sud sont toujours verticales, on ne peut donc pas représenter les pôles car les mathématiques y ont une singularité à l'infini.

Le résultat d'une telle projection est :

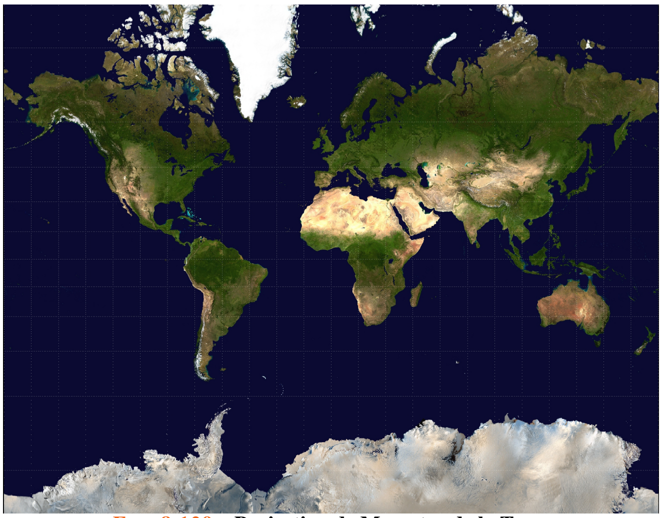


FIG. 8.129 – **Projection de Mercator de la Terre**

La projection cartographique de Mercator avec les tailles et les formes réelles des pays superposées :

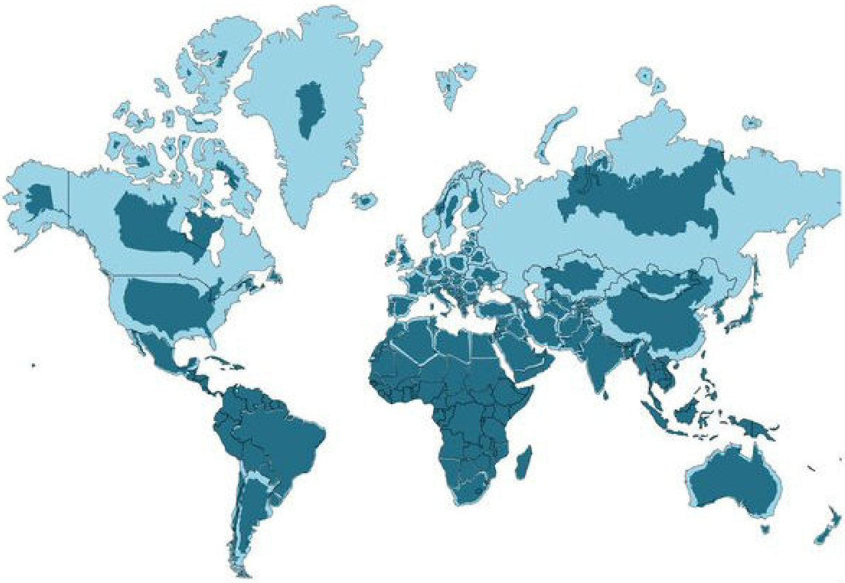


FIG. 8.130 – **Projection cartographique de Mercator avec les tailles et formes réelles des pays superposées (auteur : Neil Kaye)**

Comme nous l'avons vu précédemment, la projection cartographique cylindrique est spécifiée par une formule reliant les coordonnées géographiques de latitude β et de longitude α aux coordonnées cartésiennes de la carte avec l'origine sur l'équateur et l'axe des x le long de l'équateur. Par construction, tous les points sur le même méridien se trouvent sur la même génératrice du cylindre à une valeur constante de x, mais la distance y le long de la génératrice (mesurée à partir de l'équateur) est une fonction arbitraire de la latitude, $y(\beta)$. En général, cette fonction ne décrit pas la projection géométrique (comme celle des rayons lumineux sur un écran) du centre du globe vers le cylindre, qui n'est qu'une des nombreuses façons de projeter conceptuellement une carte cylindrique.

Comme le cylindre est tangent au globe de rayon R à l'équateur, le facteur d'échelle entre le globe et le cylindre est évidemment égal à l'unité sur l'équateur mais nulle part ailleurs. En

particulier, comme le rayon d'un parallèle, ou d'un cercle de latitude, est $R\cos(\beta)$, le parallèle correspondant sur la carte doit avoir été étiré d'un facteur de :

$$\frac{R}{R\cos(\beta)} = \frac{1}{\cos(\beta)} = \sec(\beta) \tag{8.4.119}$$

Ce facteur d'échelle sur le parallèle est conventionnellement noté k et le facteur d'échelle correspondant sur le méridien est noté h.

Les relations entre $y(\beta)$ et les propriétés de la projection, telles que la transformation des angles et la variation d'échelle, découlent de la géométrie des petits éléments correspondants sur le globe et la carte. La figure ci-dessous montre un point P de latitude β et de longitude α sur le globe et un point Q voisin de latitude $\phi+\delta\phi$ et de longitude $\alpha+\delta\alpha$. Les segments verticaux $\overset{\frown}{PK}$ et $\overset{\frown}{MQ}$ sont des arcs de méridiens de longueur $R\delta\beta$ (voir la démonstration dans la section Trigonométrie). Les segments horizontaux $\overset{\frown}{PM}$ et $\overset{\frown}{KQ}$ sont des arcs de parallèles de longueur $R\cos(\beta)\delta\alpha$ (toujours issus de la même démonstration de la section Trigonométrie). Les points correspondants sur la projection définissent un rectangle de largeur δx et de hauteur δy :

En cours de traduction de l'anglais

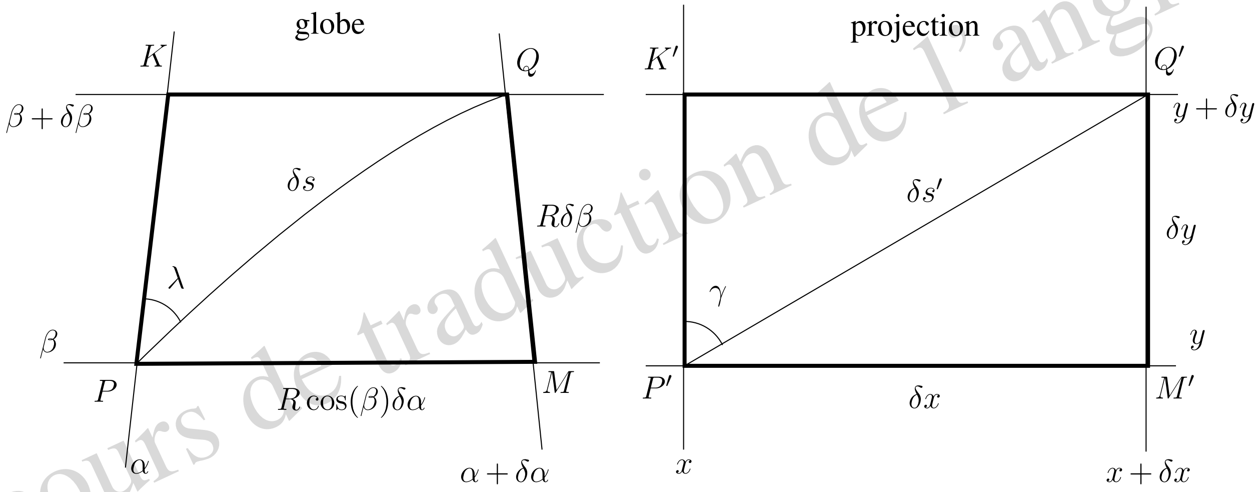


FIG. 8.131 – **Construction de la fonction de projection de Mercator**

Pour les petits éléments, l'angle $\widehat{PKQ}$ est approximativement un angle droit et donc :

$$\tan(\lambda) \cong \frac{R\cos(\beta)\alpha}{R\delta\beta} = \frac{\cos(\beta)\delta\alpha}{\delta\beta} \qquad \tan(\gamma) \cong \frac{\delta x}{\delta y} \tag{8.4.120}$$

Les facteurs d'échelle mentionnés précédemment du globe au cylindre sont donnés par :

- Facteur d'échelle parallèle :

$$k(\alpha) = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{PM}} = \frac{\delta x}{R\cos(\beta)\delta\alpha} \tag{8.4.121}$$

- Facteur d'échelle méridien :

$$k(\alpha) = \frac{\overline{P'K'}}{\overline{PK}} = \frac{\delta y}{R\delta\alpha} \tag{8.4.122}$$

Considérons maintenant que le plan de projection que nous prenons a pour coordonnées x l'intervalle $[-\pi R, +\pi R]$ (le tout étant alors égal à $2\pi R$). Alors pour tout méridien :

$$x = R(\alpha - \alpha_0) \tag{8.4.123}$$

En effet, il est facile de voir que si $(\alpha - \alpha_0) = 2\pi$, nous avons bien $x = 2\pi r$ quand nous prenons le temps $\alpha_0 = 0$. Mais dans le cas général, nous avons évidemment :

$$\delta x = R\delta\alpha \tag{8.4.124}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\tan(\gamma) \cong \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{R\delta\alpha}{\delta y} = \frac{R\dfrac{\tan(\lambda)\delta\beta}{\cos(\beta)}}{\delta y} = \frac{R\sec(\beta)}{\delta y/\delta\beta}\tan(\lambda) \cong \frac{R\sec(\beta)}{y'(\beta)}\tan(\lambda) \tag{8.4.125}$$

Où nous avons considéré que :

$$\frac{\delta y}{\delta\beta} \cong \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\beta} = y'(\beta) \tag{8.4.126}$$

Le choix de la fonction $y(\beta)$ pour la projection de Mercator est déterminé par l'exigence que la projection soit conforme[6] (!), une condition qui peut être définie comme l'égalité des angles comme démontré plus haut. La condition selon laquelle un cap de navigation d'azimut constant λ sur le globe est mappé dans un relèvement de grille constant γ sur la carte. En définissant $\lambda = \gamma$ dans :

$$\tan(\gamma) \cong \frac{\sec(\beta)}{y'(\beta)}\tan(\lambda) \tag{8.4.127}$$

donne immédiatement après réarrangement :

$$y'(\beta) = R\sec(\beta) \tag{8.4.128}$$

avec $y(0) = 0$, en utilisant les primitives démontrées dans la section de Calcul Différentiel et Intégral (voir page 1513) nous avons immédiatement :

$$y(\beta) = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) \tag{8.4.129}$$

Alors finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} &x = (\alpha - \alpha_0) \\ &y = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) \end{aligned}} \tag{8.4.130}$$

En cours de traduction de l'anglais

[6]Très utile pour les navigateurs car il y a quelques siècles, ils utilisaient principalement un compas magnétique (et aussi des techniques de positionnement des étoiles pour double vérification...) pour diriger leur bateau. Avec une carte conforme, il suffit de tracer une ligne droite entre deux points de la carte (points de départ et d'arrivée), de mesurer l'angle par rapport aux lignes verticales de la grille de la carte et après, il suffit de garder à l'esprit pendant la conduite du bateau de conserver cet angle avec le compas par rapport à la direction Nord pour atteindre votre cible.

Dans la première équation α_0 est la longitude d'un méridien central arbitraire, généralement, mais pas toujours, celui de Greenwich (c'est-à-dire zéro).

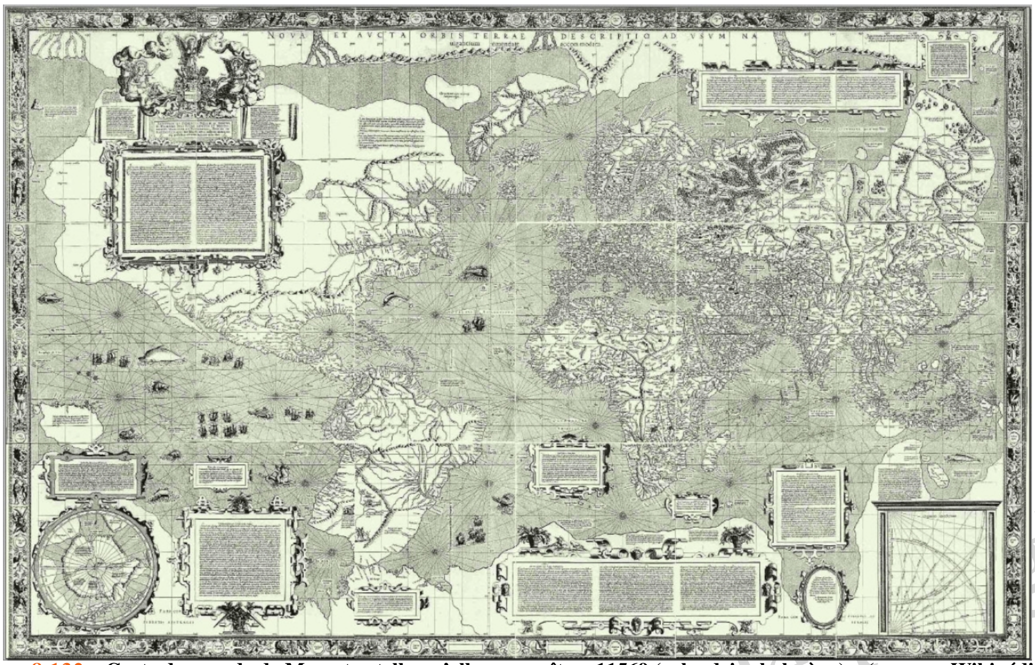


FIG. 8.132 – Carte du monde de Mercator telle qu'elle apparaît en 11569 (calendrier holocène)... (source : Wikipédia)

8.4.3.4 Projection équivalente de Lambert (projection de Peter)

L'idée derrière la "projection équivalente de Lambert", également appelée "projection cylindrique à surface équivalente de Lambert" ou parfois "projection de Peter" (à ne pas confondre avec la "projection de Gall-Peter" !), est assez simple comme l'illustre la figure ci-dessous :

En cours de traduction de l'anglais

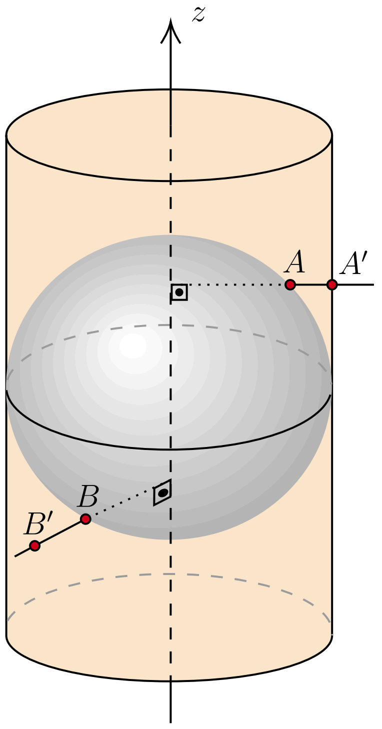


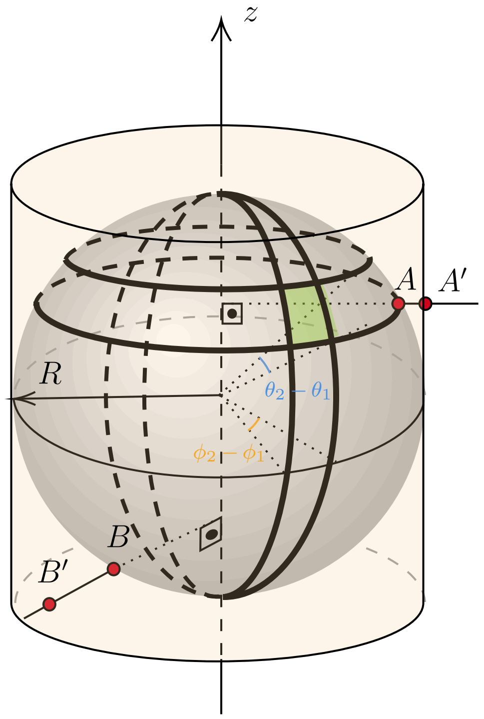
FIG. 8.133 – **Projection équivalente de Lambert (ou projection à aires égales de Lambert)**

En cours de traduction de l' anglais

Supposons que nous ayons un globe terrestre comme visible ci-dessus. Il suffit d'enrouler une feuille de papier autour du globe comme sur la figure ci-dessus et de projeter horizontalement chaque point de la sphère sur le cylindre. Pour cela, si A est un point de la sphère, nous prenons la droite passant par A et perpendiculaire à l'axe des pôles. Cette droite coupe le cylindre en A' : le point A' représente le point A sur la carte.

Ou plus explicitement :

Maintenant, en utilisant la figure suivante, démontrons que la projection cylindrique de Lambert conserve les aires (c'est son énorme avantage par rapport à la carte de Mercator qui biaise les aires des pays), en d'autres termes, il s'agit d'une projection nommée "projection authalique :



En cours de traduction de l'anglais

Pour cette démonstration, nous nous intéresserons à une petite zone de la sphère délimitée par les parallèles de latitude θ_1 et θ_2 et des méridiens de longitude ϕ_1 et ϕ_2. Nous noterons R le rayon de la sphère et nous supposerons que $\theta_2 - \theta_1$ et $\phi_2 - \phi_1$ sont positifs et petits.

Selon cette hypothèse, l'aire de cette région est celle d'un petit rectangle (voir figure ci-dessus). A la latitude θ_1, le rayon de la parallèle est évidemment $R\cos(\theta_1)$. Alors par une simple règle de trois, la longueur de l'arc d'angle $\phi_2 - \phi_1$ est égale à $R(\phi_2 - \phi_1)\cos(\theta_1)$, car la longueur de l'aire est le produit du rayon par l'angle en radian (voir section Trigonométrie page 2524).

Quelle est maintenant la hauteur de ce rectangle ? Comme le méridien est un cercle de rayon R et que la hauteur du rectangle est donnée par l'angle $\theta_2 - \theta_1$, alors cette hauteur est donnée approximativement par $R(\theta_2 - \theta_1)$. Alors l'aire de notre petite région est approximativement égale à :

$$R^2(\theta_2 - \theta_1)(\phi_2 - \phi_1)\cos(\theta_1) \qquad (8.4.131)$$

Calculons maintenant l'aire de sa projection sur le cylindre. Cette projection est maintenant un rectangle réel. La parallèle a été projetée sur un cercle de rayon R. Comme l'angle correspondant est resté le même, soit $\phi_2 - \phi_1$, la largeur du rectangle est $R(\phi_2 - \phi_1)$. Pour la hauteur, le lecteur doit remarquer que la tangente au méridien à la latitude θ_1 fait un angle de :

$$\frac{\pi}{2} - \theta_1 \qquad (8.4.132)$$

avec l'horizontale. La projection sur la verticale d'un segment de longueur $R(\theta_2 - \theta_1)$ est alors égale à :

$$R(\theta_2 - \theta_1)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = R(\theta_2 - \theta_1)\cos(\theta_1) \qquad (8.4.133)$$

L'aire (surface) sur la carte est alors égale à :

$$R^2(\theta_2 - \theta_1)(\phi_2 - \phi_1)\cos(\theta_1) \qquad (8.4.134)$$

Ainsi, la surface est la même que celle de la petite surface de la sphère. Ceci achève la preuve que la projection cylindrique de Lambert conserve la surface.

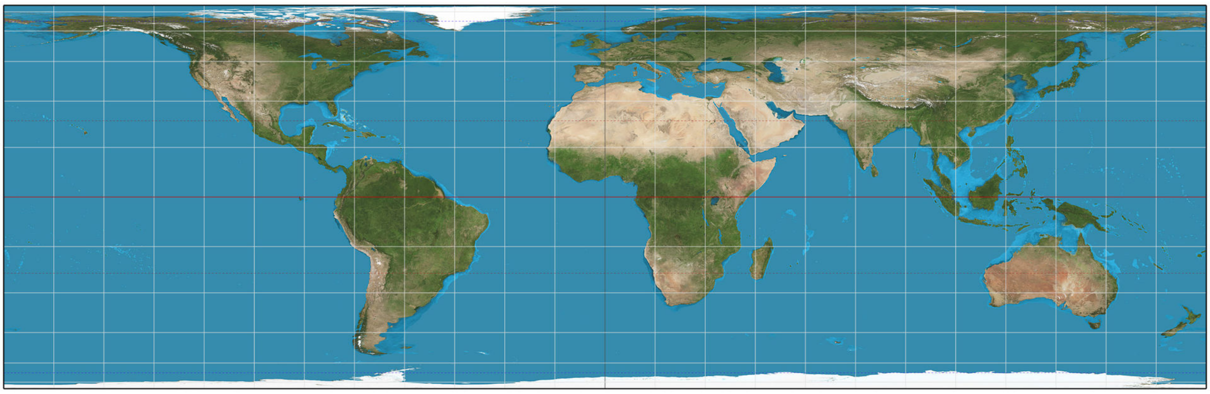


FIG. 8.134 – Projection de Lambert de la Terre (source : Wikipédia)

8.4.3.5 Projection de Mollweide

La "projection de Mollweide" est une projection cartographique pseudo-cylindrique à surface équivalente très connue, généralement utilisée pour les cartes globales du monde ou du ciel nocturne (elle est également connue sous le nom de "projection de Babinet", "projection homolographique", "projection homolographique" et "projection elliptique"). La projection échange la précision de l'angle et de la forme contre la précision des proportions de surface, et en tant que telle est utilisée lorsque cette propriété est nécessaire, comme pour les cartes représentant les distributions mondiales.

Pour information, le texte qui suit est entièrement inspiré de l'article [270] où la méthode est déduite en détail à l'aide de trois démonstration différentes. Nous nous concentrerons ici sur ce qui nous semble le plus simple des trois dérivations qui ont du sens.

Les projections pseudocylindriques ont en commun des lignes parallèles droites de latitude et des méridiens courbes. Jusqu'au 119e siècle (calendrier holocène), la seule projection pseudo-cylindrique dotée de propriétés importantes était la projection sinusoïdale ou Sanson-Flamsteed. La projection sinusoïdale présente des parallèles de latitude également espacés, une échelle vraie le long des parallèles et une équivalence ou une surface égale. En tant que carte du monde, elle présente l'inconvénient d'une forte distorsion aux latitudes proches des pôles, en particulier celles éloignées du méridien central :

En cours de traduction de l'anglais

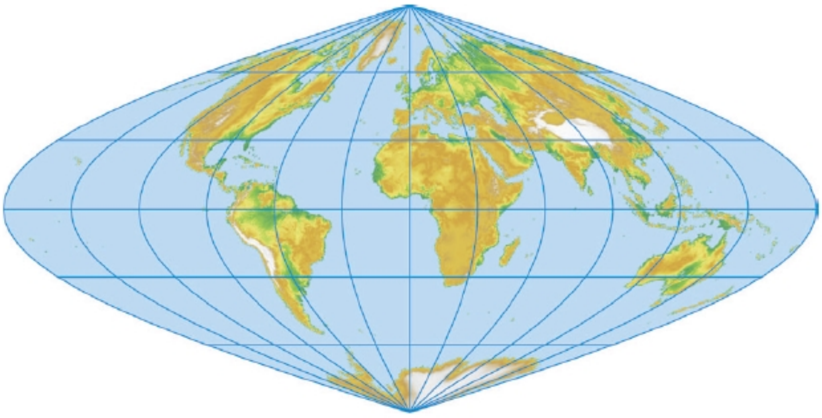


FIG. 8.135 – **Projection de Sansons ou Sanson-Flamsteed ou sinusoïdale**

En 11805 (calendrier holocène), Mollweide a annoncé une projection de carte du monde à surface égale qui est esthétiquement plus agréable que la projection sinusoïdale car le monde est placé dans une ellipse avec des axes dans un rapport et tous les méridiens sont des demi-ellipses également espacées. La projection de Mollweide était la seule nouvelle projection pseudo-cylindrique du 119e siècle (calendrier holocène) à susciter bien plus qu'un intérêt académique :

l'anglais

En cour

FIG. 8.136 – **Mollweide projection**

O'Connor et Robertson ont déclaré que Mollweide a produit la projection cartographique pour corriger les distorsions de la projection de Mercator, utilisée pour la première fois par Gerardus Mercator en 11569 (calendrier holocène). Bien que la projection de Mercator soit bien adaptée aux cartes marines, sa très grande exagération des zones terrestres dans les hautes latitudes la rend inadaptée à la plupart des autres objectifs. Dans la projection de Mercator, les angles d'intersection entre les parallèles et les méridiens, ainsi que la configuration générale des terres, sont préservés, mais en conséquence, les surfaces et les distances sont de plus en plus exagérées à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur. Pour corriger ces défauts, Mollweide dessina sa projection elliptique ; mais en préservant la relation correcte entre les surfaces, il a été contraint de sacrifier la configuration et la mesure angulaire. La projection de Mollweide est restée relativement inutilisée jusqu'à ce que J. Babinet la réintroduise en 11857 (calendrier holocène) sous le nom de "projection homolographique".

Les équations bien connues des projections de Mollweide que nous allons démontrer plus loin

se lisent comme suit :

$$x = \sqrt{2}R\sin(\beta) \qquad y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\lambda\cos(\beta) \qquad 2\beta + \sin(2\beta) = \pi\sin(\varphi) \tag{8.4.135}$$

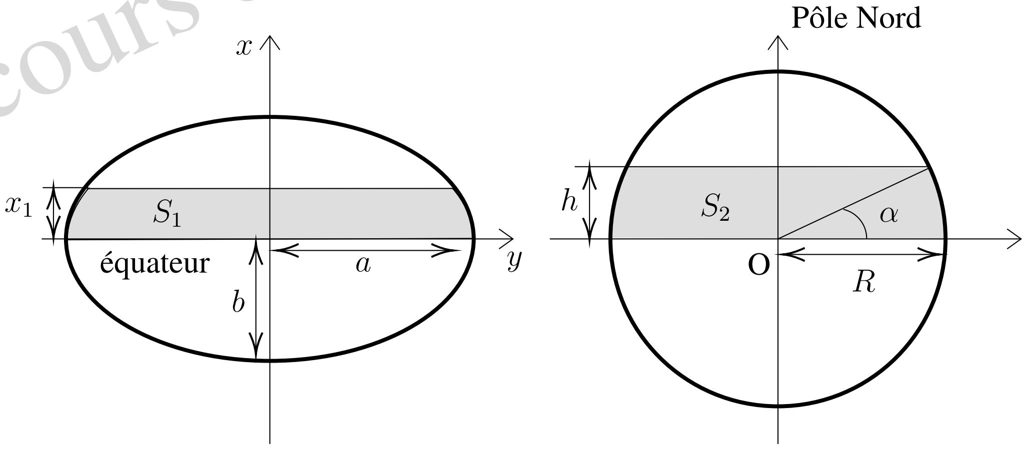
Dans ces formules, x et y sont des coordonnées rectangulaires dans le plan de projection, φ (angle de latitude) et λ (angle de longitude) sont des coordonnées géographiques des points sur la sphère et R est le rayon de la sphère à cartographier. L'angle β est un angle auxiliaire qui est relié à la latitude φ par la relation $2\beta + \sin(2\beta) = \pi\sin(\varphi)$. Pour une latitude φ donnée, l'équation $2\beta + \sin(2\beta) = \pi\sin(\varphi)$ est une équation transcendante en β. Dans le passé, elle était résolue en utilisant des tables et une méthode d'interpolation. De nos jours, elle est généralement résolue en utilisant une méthode numérique itérative, comme la bissection ou la méthode de Newton-Raphson.

Démonstration 8.19.2. Étant donné le rayon R de la Terre, supposons l'aspect équatorial d'une projection à surface égale avec les propriétés suivantes :

- Une carte du monde est délimitée par une ellipse deux fois plus large que haute
- Les parallèles se transforment en lignes droites parallèles avec une échelle uniforme
- Le méridien central est une partie de la ligne droite ; tous les autres sont des arcs semi-elliptiques

En cours de traduction de l'anglais

Supposons une carte de la taille de la Terre ; définissons deux régions, S_1 sur la carte et S_2 sur la Terre, toutes deux délimitées par l'équateur et un parallèle (la figure montre une représentation 2D mais la géométrie de gauche est une ellipse - pas un ellipsoïde ! - et celle de droite une sphère) :



La propriété d'égalité des aires peut être utilisée pour calculer x pour φ donné. Étant donné x et λ (longitude), y peut être calculé immédiatement à partir de l'équation de l'ellipse, puisque l'échelle horizontale est constante. L'équation de l'ellipse centrée sur l'origine, avec l'axe majeur sur l'axe y, est comme nous le savons déjà :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{8.4.136}$$

Pour $0 \leq x \leq a$:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{8.4.137}$$

La zone entre l'axe y et le parallèle mappé dans $x = x_1$ est :

$$S_1 = 2\int_0^{x_1} y\mathrm{d}x = 2\frac{b}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \tag{8.4.138}$$

Introduisons l'angle auxiliaire :

$$x = a\sin(\beta) \qquad 0 \leq x \leq a, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \tag{8.4.139}$$

et :

$$\mathrm{d}x = a\cos(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{8.4.140}$$

alors :

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int\sqrt{a^2\left(1 - \sin^2(\beta)\right)}a\cos(\beta)\mathrm{d}\beta = a^2\int\cos^2(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{8.4.141}$$

Étant donné que :

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \tag{8.4.142}$$

Alors :

$$\begin{aligned} a^2\int\cos^2(\beta)\mathrm{d}\beta &= a^2\int\frac{1 + \cos(2\beta)}{2}\mathrm{d}\beta = \frac{a^2}{2}\left(\int\mathrm{d}\beta + \int\cos(2\beta)\mathrm{d}\beta\right) \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\beta + \frac{\sin(2\beta)}{2}\right) + c^{te} \end{aligned} \tag{8.4.143}$$

Et ainsi :

$$S_1 = 2\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\left(\beta + \frac{\sin(2\beta)}{2}\right) + c^{te}\right)\Bigg|_0^{\beta} = \frac{ab}{2}(2\beta + \sin(2\beta)) = 2R^2(2\beta + \sin(2\beta)) \tag{8.4.144}$$

pour $0 \leq \beta \leq \pi/2$, correspondant à $x_1 = a\sin(\beta)$ et parce que $ab\pi = 4R^2\pi$.

Calculons maintenant la "zone sphérique" :

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\theta=\mathrm{lat}_1}^{\mathrm{lat}_2} 2\pi r'\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=\mathrm{lat}_1}^{\mathrm{lat}_2} 2\pi r\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi r\int_{\theta=\mathrm{lat}_1}^{\mathrm{lat}_2}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi r(-\sin(\theta))\Big|_{\theta=\mathrm{lat}_1}^{\mathrm{lat}_2} = 2\pi r(\sin(\mathrm{lat}_1) - \sin(\mathrm{lat}_2)) \end{aligned} \tag{8.4.145}$$

Ainsi, sur une sphère, l'aire entre l'équateur et le parallèle φ (soit $\mathrm{lat}_2 = 0$) est :

$$S_2 = 2\pi Rh = 2\pi R^2\sin(\varphi) \tag{8.4.146}$$

En cours de traduction de l'anglais

Mais comme $S_1 = S_2$, alors :

$$2R^2(2\beta + \sin(2\beta)) = 2\pi R^2 \sin(\varphi) \quad (8.4.147)$$

Dès lors :

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow 2R^2(2\beta + \sin(2\beta)) = 2\pi R^2 \sin(\varphi) \quad (8.4.148)$$

En simplifiant, nous retombons sur la troisième relation de la projection de Mollweide :

$$2\beta + \sin(2\beta) = \pi \sin(\varphi) \quad (8.4.149)$$

L'angle auxiliaire β, comme déjà mentionné, doit être trouvé par interpolation ou approximation successive.

Enfin, l'échelle horizontale étant uniforme, à partir des deux égalités (rappelons que la $ab\pi$ à gàuche gauche est la surface de la projection elliptique 2D et le $4R^2\pi$ de droite est la surface de la sphère projetée !) :

$$ab\pi = 4R^2\pi \qquad b = 2a \quad (8.4.150)$$

Nous obtenons :

$$a = \sqrt{2}R \quad (8.4.151)$$

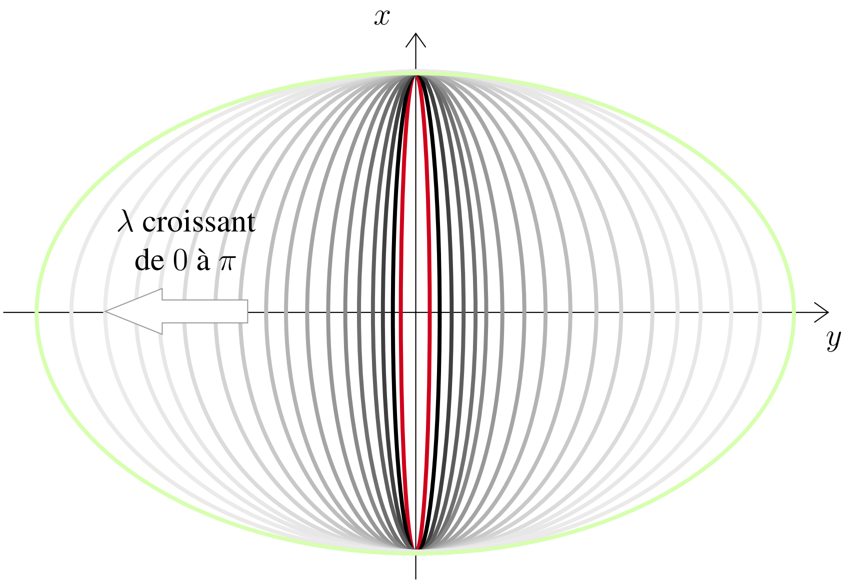
et nous pouvons donc revenir à la première relation de la projection de Mollweide :

$$x = a\sin(\beta) = \sqrt{2}R\sin(\beta) \quad (8.4.152)$$

Maintenant, rappelez-vous que λ est la longitude qui va de 0 [rad], à $-\pi$ à l'Ouest jusqu'à $+\pi$ à l'Est. Comme λ est symétrique, à partir du méridien 0 [rad], il suffit d'avoir une des valeurs de l'angle allant vers l'Ouest ou l'Est pour faire la cartographie sur l'ellipse (car elle est symétrique !). L'idée astucieuse est maintenant de réduire la projection elliptique de sorte que lorsque la latitude est proche de zéro, nous obtenons une très petite ellipse de projection comme visible en rouge ci-dessous et lorsqu'elle est égale à $+\pi$, nous obtenons l'ellipse de projection entière en vert ci-dessous (rappelez-vous que nous faisons cela dans la direction horizontale de y). Ainsi, en multipliant la fonction elliptique y par le rapport λ/π, nous obtiendrons le rétrécissement attendu :

$$y = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\frac{\lambda}{\pi} \quad (8.4.153)$$

En cours de traduction de l'anglais



Dès lors :

$$y=\frac{2\lambda}{\pi}\sqrt{2R^2-x^2}=2\sqrt{2R^2-2R^2\sin^2(\beta)}\frac{\lambda}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\pi}R\sqrt{1-\sin^2(\beta)} \tag{8.4.154}$$

Nous retombons alors sur la deuxième relation de la projection de Mollweide :

$$y=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\lambda\cos(\beta) \tag{8.4.155}$$

Nous avons les trois relations et ceci termine les démonstrations !

■ Q.E.D.

Bien que la condition appliquée soit qu'une moitié de la sphère soit projetée sur un disque, les équations de projection finales sont valables pour la sphère entière et donnent son image située dans une ellipse.

Considérons la forme de la projection de Mollweide de la sphère entière. De :

$$x=\sqrt{2}R\sin(\beta) \qquad y=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\lambda\cos(\beta) \tag{8.4.156}$$

il est facile d'obtenir l'équation d'un méridien dans la projection :

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}R}\right)^2+\left(\frac{\pi y}{2\sqrt{2}R\lambda}\right)^2=1 \tag{8.4.157}$$

Il est évident que pour un λ donné, la relation ci-dessus est l'équation d'une ellipse. Il s'ensuit que le demi-axe a est constant, tandis que b dépend de la longitude λ. Si nous prenons $\lambda=\pi$, alors $b=2\sqrt{2}R$, et $a:b=1:2$ et c'est le rapport des demi-axes dans la projection de Mollweide. La question se pose : est-il possible de trouver une projection pseudo-cylindrique à aires égales qui donnera le monde entier dans une ellipse arbitraire satisfaisant un rapport donné $a:b$ ou $b:a$? La réponse est oui (!) et cela conduit à la "projection de Mollweide généralisée". Mais comme la démonstration n'a aucun intérêt dans la présent manuel, le lecteur peut se référer à [270] pour une démonstration détaillée.

La projection de Mollweide est donc une projection pseudo-cylindrique dans laquelle l'équateur est représenté par une ligne horizontale droite perpendiculaire à un méridien central de la moitié de sa longueur. Les autres parallèles se compriment près des pôles, tandis que les autres méridiens sont également espacés à l'équateur. Les méridiens à 90degrés Est et Ouest forment un cercle parfait, et la Terre entière est représentée dans une ellipse proportionnelle $2:1$.

Notez que les projections de Mollweide et de Hammer sont parfois confondues, car elles sont toutes deux à aire égale et partagent la limite elliptique ; cependant, cette dernière conception a des parallèles courbes et n'est pas pseudo-cylindrique :

En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.137 – Projection de Hammer

8.4.4 Autres perspectives et Lois de la Perspective Linéaire

Nous pouvons aussi choisir n'importe quel autre angle de perspective et cela ne garde rien d'égal mais qui est juste bien adapté à la technologie ou à la perception humaine. Par exemple les jeux Diablo II ou Age of Empire utilisent un angle en degrés de $53.130102°$ (arrondi à 53) comme pour les vieux écrans $4:3$[7] cela donne comme résultat qu'un objet ayant une ligne de fuite dans le coin supérieur gauche de l'écran $4:3$ passera aussi par le coin inférieur droit de l'écran. C'est donc juste un choix de confort !

En cours de traduction de l'anglais

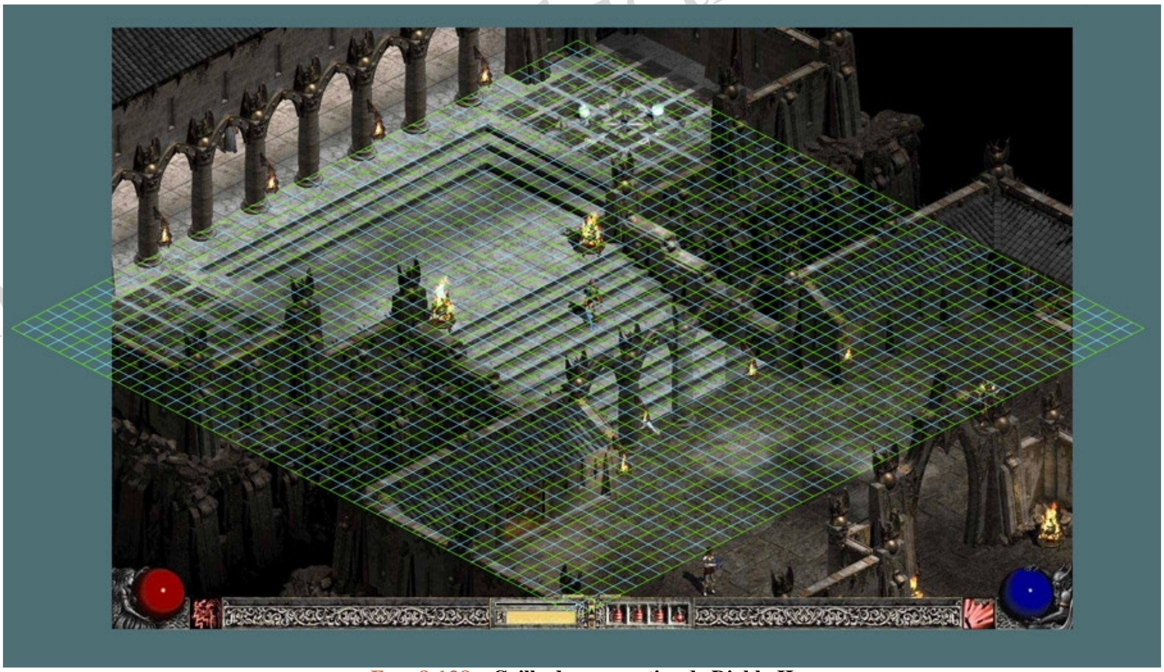


FIG. 8.138 – Grille de perspective de Diablo II

Alternativement, il existe également quelques jeux qui utilisent une projection trimétrique où un axe est $1:2$ et l'autre est $2:1$ comme ci-dessous :

[7]L'origine du $4:3$ est intéressante et utile car le ratio forme un triangle de Pythagore, c'est à dire que la longueur de la diagonale (hypoténuse) est une valeur entière exacte (de pixels...).

FIG. 8.139 – Exemple de projection trimétrique

En cours de traduction de l'anglais

Pour résumer, nous avons vu jusqu'à présent les projections suivantes :

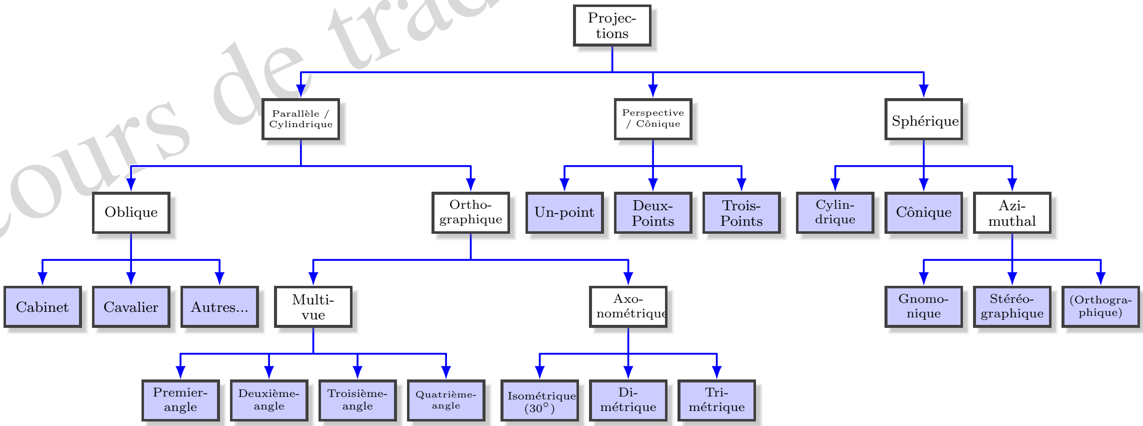
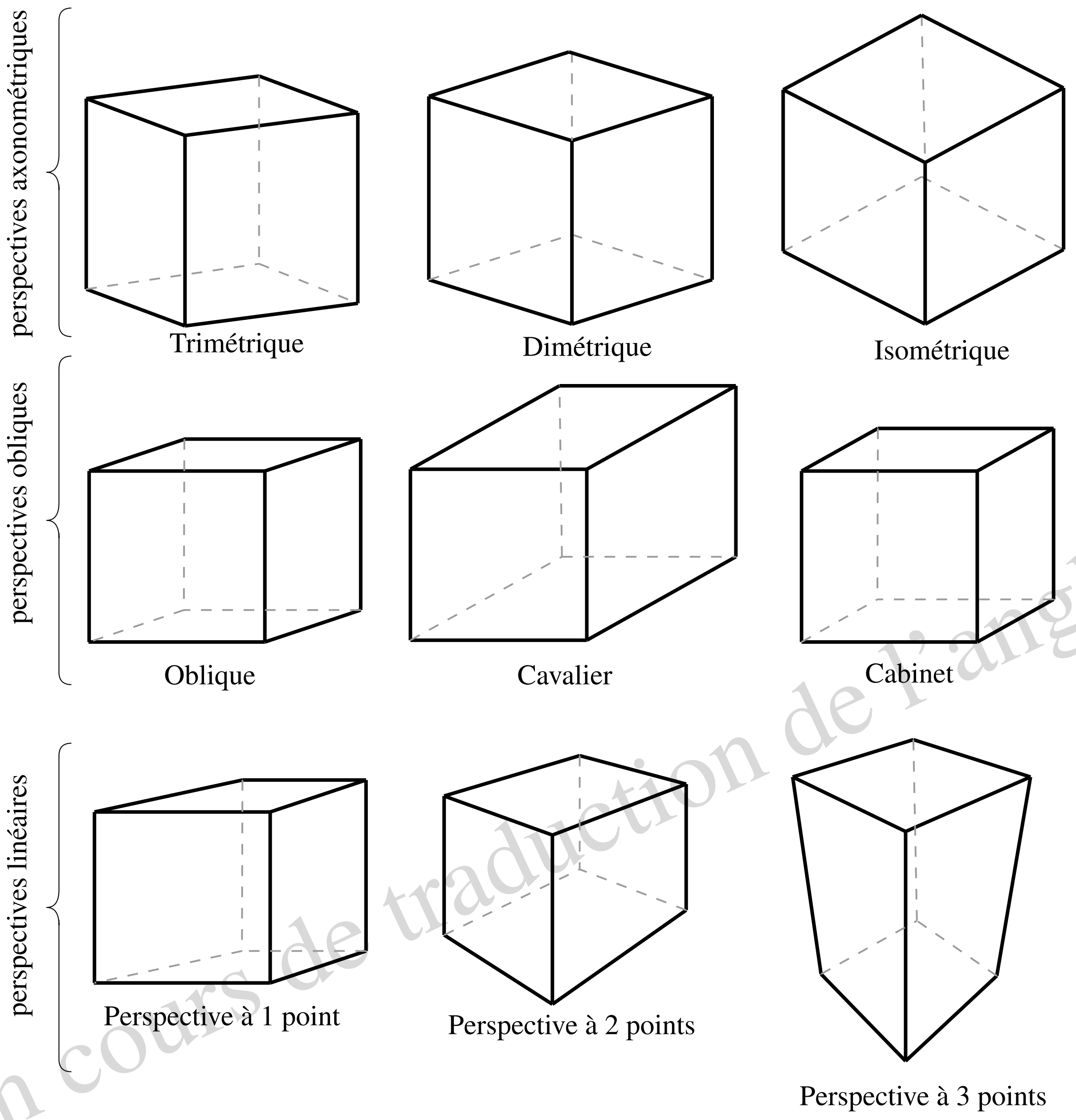


FIG. 8.140 – Organigramme non exhaustif des différentes méthodes de projection

Et un résumé visuel non exhaustif :



En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.141 – **Quelques types de projections courants**

Le lecteur dispose désormais de suffisamment de connaissances pour comprendre pleinement les lois de la perspective linéaire :

L1. **La loi de la ligne d'horizon :** Cette loi stipule qu'il n'y a qu'une seule ligne d'horizon (mais il peut ne pas y avoir de ligne d'horizon comme dans l'espace intergalactique par exemple).

L2. **La loi de la hauteur des yeux :** La ligne d'horizon, lorsqu'elle existe, est la ligne du niveau des yeux de l'observateur (et évidemment la hauteur des yeux est indépendante de la direction du regard !).

L3. **La loi des points de fuite :** Cette loi stipule que toutes les lignes droites qui définissent le contour d'une forme ou d'un objet, si elles sont prolongées, arrivent sur la ligne d'horizon à un point de fuite lorsque l'on considère une projection/perspective conique (et

donc toutes les lignes droites parallèles définissant le contour d'une forme ou d'un objet convergent sur la ligne d'horizon aux mêmes points de fuite[8]).

Notez que les points de fuite n'ont pas besoin d'être alignés sur la ligne d'horizon, même si c'est le cas le plus courant !

Lorsque le point de fuite est placé au zénith (au-dessus de l'horizon), nous levons les yeux pour voir l'objet. Nous parlons alors de "vue en oeil de ver", car nous sommes dans la position d'un ver regardant vers le zénith. Toutes les lignes de fuite au-dessus de la ligne d'horizon sont des lignes descendantes.

Lorsque le point de fuite est placé au nadir (sous l'horizon), nous regardons vers le bas. C'est ce qu'on appelle la "vue à vol d'oiseau". Toutes les lignes de fuite situées sous la ligne d'horizon sont des lignes ascendantes.

Remarques

Dans la perspective à deux points, nous traçons des lignes verticales, verticales ! Dans la perspective à trois points, nos lignes verticales forment un angle, convergeant vers le troisième point de fuite au-dessus ou en dessous. La perspective à deux points est généralement suffisante pour la plupart des scènes de base, tandis que la perspective à trois points correspond à la réalité (car la perspective à deux points ne tient pas compte de la distorsion verticale).

L4. **La loi de diminution :** Cette loi stipule que lorsque les objets s'éloignent de nous, ils semblent devenir petits et peuvent même sembler disparaître si leur taille est inférieure au pouvoir de résolution de l'oeil humain.

Dans des conditions idéales, l'œil humain a un pouvoir de résolution de 60 secondes d'arc (soit une résolution angulaire de 0.008 degré). Chez une personne âgée, la capacité à distinguer certains objets est toutefois quelque peu réduite. Cela est dû principalement à la taille réduite de la pupille, mais aussi aux contraintes de la vision anatomique et physiologique.

L5. **La loi du recouvrement :** Cette loi stipule que lorsqu'un objet est devant un autre, il va le recouvrir et décrire leurs relations spatiales. Si le plan de projection est courbe (courbure positive comme une sphère par exemple) le paysage peut être devant des objets qui sont plus éloignés que l'horizon.

L6. **La loi de convergence :** Cette loi stipule que lorsque des lignes parallèles s'éloignent de nous, elles semblent converger, ou se rencontrer, en un point lorsque nous considérons une projection/perspective conique. Nous pouvons également dire cela à l'envers : lorsque des lignes parallèles viennent vers nous, elles divergent, ou s'éloignent.

L7. **La loi de la perspective atmosphérique :** Cette loi décrit les propriétés qui affectent l'apparence d'un objet lorsqu'il s'éloigne dans un environnement ayant une atmosphère isotrope et homogène aux conditions standards de température et de pression :

- Les variations claires et sombres d'une même couleur se rapprochent créant moins de contraste (la lumière est diffusée dans une atmosphère)

[8]Toutes les lignes droites de fuite au-dessous de la ligne d'horizon sont dites "lignes ascendantes" et toutes les lignes droites de fuite au-dessous de la ligne d'horizon sont dites "lignes descendantes".

En cours de traduction de Opera Magistris

- Les couleurs deviennent moins saturées (pour les mêmes raisons que le point précédent)
- Les couleurs deviennent plus froides, se déplaçant vers le bleu et le violet dans une atmosphère typiquement terrestre lors d'une journée ensoleillée
- Les bords deviennent plus doux (encore une fois en raison du pouvoir de résolution de l'oeil humain ou de tout autre appareil intermédiaire)
- Nous voyons moins de détails jusqu'à ce que l'objet ne puisse plus être distingué de son arrière-plan (pouvoir de résolution à nouveau) ou disparaisse sous l'horizon lorsque le plan projectif est une géométrie à courbure positive

Ci-dessous, nous avons un résumé illustré de ces sept lois :

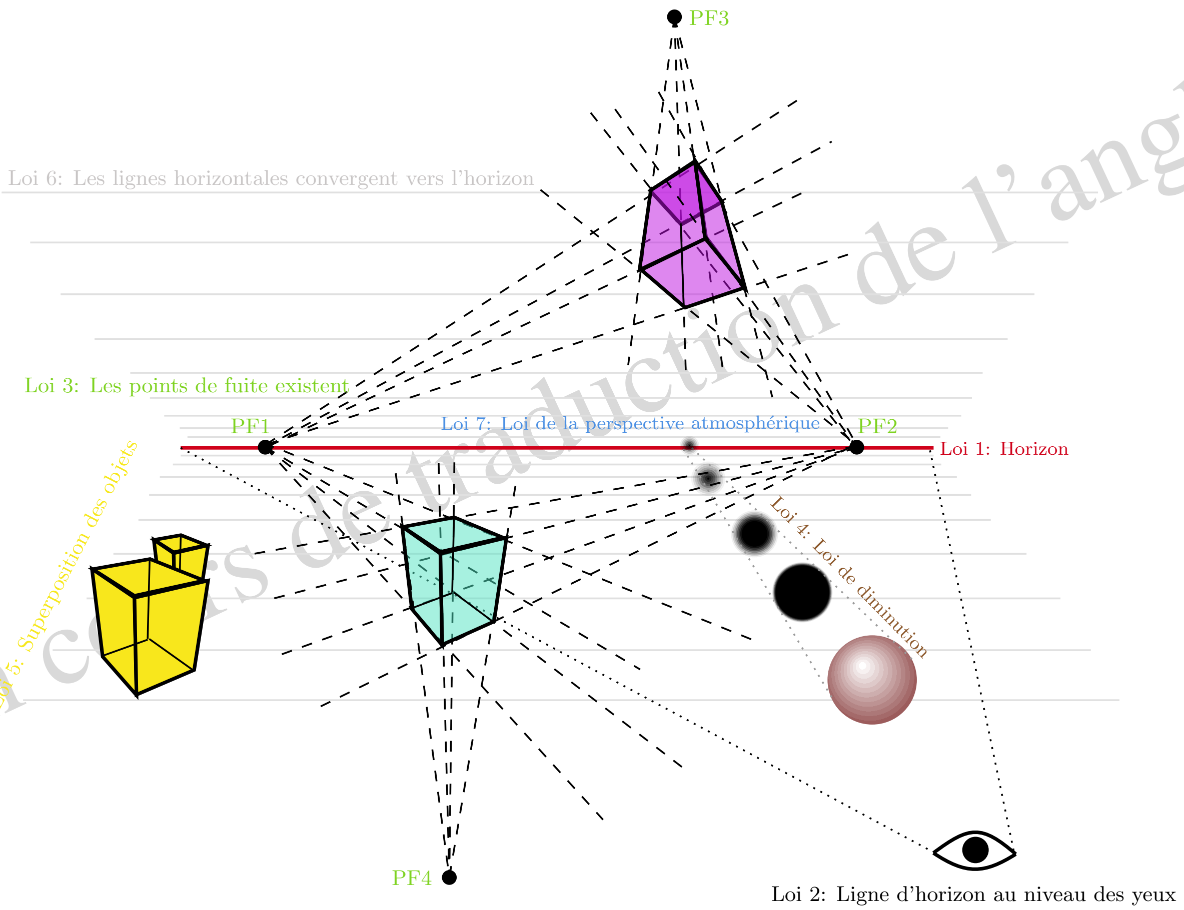


FIG. 8.142 – Résumé visual des sept lois de la perspective linéaire

En cours de traduction de l'anglais

Deux lignes parallèles avec les lois de la perspective semblent converger alors qu'en fait ce n'est pas le cas :

FIG. 8.143 – Effet de perspective de convergence de rails de chemin de fer

Le même effet de perspective se produit avec des rayons crépusculaires qui semblent converger localement alors qu'en fait ils sont presque parfaitement parallèles :

FIG. 8.144 – Rayons crépusculaires

Et idem pour les ombres qui semblent diverger (alors qu'en fait elles convergent vers la source) vers la gauche pour les objets qui sont à gauche et diverger à droite pour les objets qui sont à

En cours de traduction de l'anglais

droite :

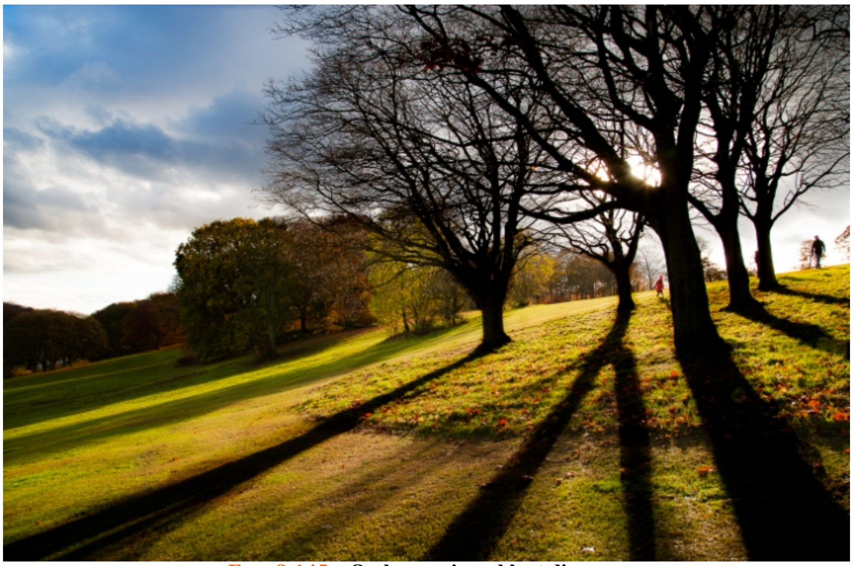
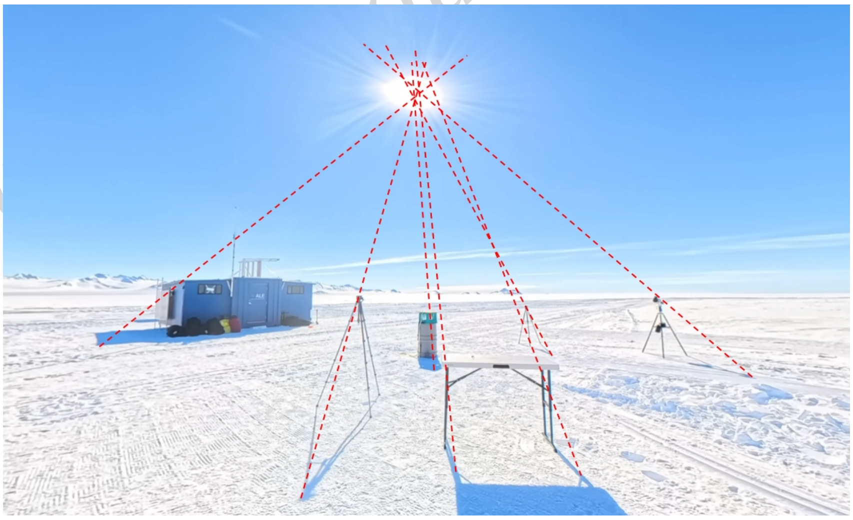


FIG. 8.145 – **Ombres qui semblent diverger**

ou encore les ombres en Antarctique pendant le Soleil de minuit (ici avec une caméra grand angle qui déforme un peu les objets) si nous traçons les lignes de fuite des ombres nous voyons que bien qu'elles donnent l'impression de converger vers un Soleil local conformément aux lois de la perspective linéaire (alors que nous démontrerons dans la section d'Astronomie qu'il est environ à 150 millions de kilometres) et que les ombres semblent diverger sur le sol :



En cours de traduction de l'anglais

Définition (#8.4.352) : Le "Soleil de minuit" est la période pendant laquelle le disque solaire entier (déterminé grâce à un filtre solaire) reste continuellement visible pendant 24 heures ou plus au-dessus de l'horizon, se produisant en Été aux latitudes au Nord du cercle polaire arctique ($66°33'$ N) et au Sud du cercle polaire antarctique ($66°33'$ S), en raison de l'inclinaison de l'axe de la Terre (malheureusement certains scientifiques utilisent une définition non académique légèrement différente, d'où une variation de quelques jours dans la valeur de la période).

8.4.5 Coordonnées Homogènes (coordonnées de projection)

En mathématiques, les "coordonnées homogènes", introduites par August Ferdinand Möbius au 119e siècle (calendrier holocène), rendent les calculs possibles dans l'espace projectif comme les coordonnées cartésiennes le font dans l'espace euclidien. Les coordonnées homogènes sont largement utilisées en infographie et plus particulièrement pour la représentation de scènes en trois dimensions (3D) car elles sont adaptées à la géométrie projective et elles permettent de caractériser les transformations de l'espace sous une forme algorithmique optimale. La notation sous forme matricielle est plus particulièrement employée dans les bibliothèques de programmation graphique 3D telles que OpenGL et Direct3D.

Nous avons démontré lors de notre étude des transformations dans le plan et l'espace (voir section Géométrie Euclidienne page 2619) que parmi la translation, l'homothétie, la rotation ou la réflexion que la translation ne pouvait être représentée sous forme matricielle sans passer par une astuce qui a consistait à ajouter une dimension supplémentaire factice au vecteur des coordonnées ainsi qu'à la matrice associée à la transformation.

8.4.5.1 Espace Projectif $\mathcal{P}^2$

Ainsi, nous avions vu que la translation dans $\mathbb{R}^2$ pouvait s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+T_x \\ y+T_y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8.4.158)$$

Ainsi, toujours dans $\mathbb{R}^2$, une homothétie de facteur k qui s'écrivait :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix} \qquad (8.4.159)$$

devient en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x \cdot x \\ S_y \cdot y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8.4.160)$$

Ainsi, toujours dans $\mathbb{R}^2$, une rotation d'angle θ dans la plan $x-y$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8.4.161)$$

devient (et comme nous l'avons démontré, il s'agit bien d'une rotation autour de l'axe z) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8.4.162)$$

Donc toujours dans $\mathbb{R}^2$, la réflexion qui était écrite selon l'axe x par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \qquad (8.4.163)$$

En cours de traduction de l' anglais

devient :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \Delta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.4.164}$$

et ainsi de suite pour d'autres transformations que nous avons démontrées et qui ont été résumées dans la figure suivante que nous avons déjà vue et où les coordonnées homogènes sont en gris :

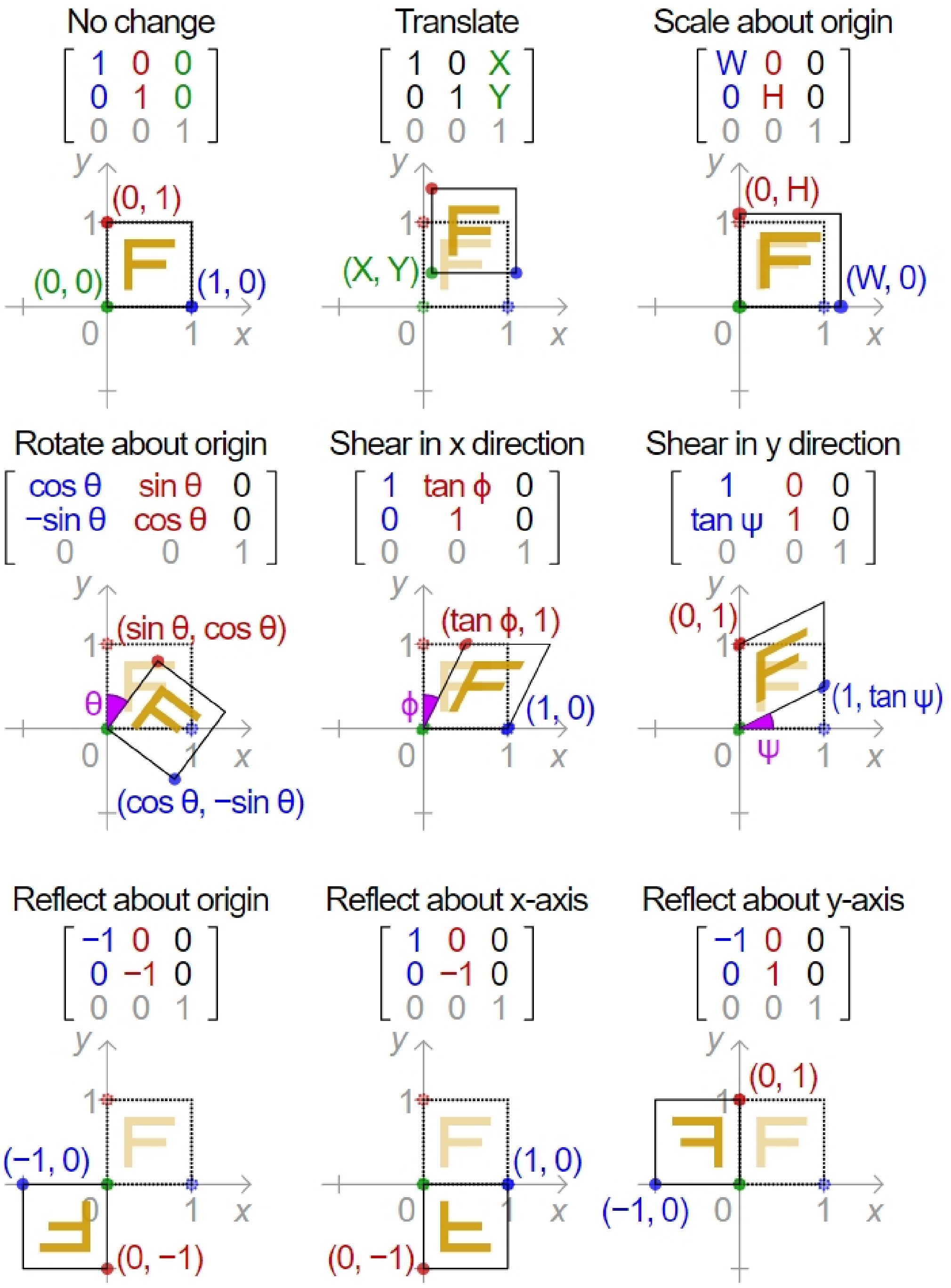


FIG. 8.146 – Résumé des transformations de coordonnées homogènes

Les mathématiciens disent alors que lorsque nous utilisons les transformations ci-dessus ou la composition de certains d'entre eux, nous nous plaçons dans l'espace projectif $\mathcal{P}^2$.

8.4.5.2 Espace Projectif $\mathcal{P}^3$

Verbatim, nous pouvons faire la même chose avec un point P de $\mathbb{R}^3$ qui sera alors dans $\mathcal{P}^3$ représenté par un vecteur de 4×1 coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \tag{8.4.165}$$

Ainsi, nous avons dans l'espace les matrices de transformations suivantes :

- Pour les translations :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.4.166}$$

- Pour les rotations il suffit bien sûr en 3D d'avoir comme nous l'avons déjà démontré :

$$R_{ZYX} = R_Z R_Y R_X = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{8.4.167}$$

Mais si nous voulons travailler avec des coordonnées de projection, cela devient évidemment :

$$R_{ZYX} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.4.168}$$

- Pour les homothéties (mises à l'échelle) évidemment :

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.4.169}$$

- Dans l'espace, nous pouvons pousser dans deux directions d'axes de coordonnées et garder la troisième fixe. Voici la transformation de cisaillement dans les directions $x-$ et $y-$ avec des facteurs de cisaillement a et respectivement b, en gardant la coordonnée $z-$ identique (ce n'est donc qu'un des cas particuliers possibles) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+az \\ y+bz \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.4.170}$$

Ainsi, un point (x,y,z) dans l'espace est transformé en $(x+az, y+bz, z)$. Par conséquent, la coordonnée z ne change pas, tandis que (x,y) est "poussé" dans la direction de $(a,b,0)$ avec un facteur z.

En cours de traduction de l'anglais

Les mathématiciens disent alors que lorsque nous utilisons les transformations ci-dessus ou la composition de certains d'entre eux, nous nous plaçons dans l'espace projectif $\mathcal{P}^3$.

Nous avons démontré plus haut que dans le cas de la perspective conique, que nous avions les transformations homographiques suivantes :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x\Delta}{z+\Delta} \\ y' &= \frac{y\Delta}{z+\Delta} \\ z' &= \Delta \end{aligned} \quad (8.4.171)$$

où x', y', z' sont la projection des points de relation x, y, z sur la table avec une distance focale Δ pour rappel...

Ce qui est traditionnellement noté en posant $z := z+\Delta$ et $f := \Delta$:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x\cdot f}{z} \\ y' &= \frac{y\cdot f}{z} \\ z' &= f \end{aligned} \quad (8.4.172)$$

où nous voyons donc que si la distance focale f est infinie, l'objet se confond avec le plan XY ou que si l'objet est infiniment loin (ou si l'objet est infininement loin ce qui est équivalent...).

Posons :

$$\frac{z}{f} = s \quad (8.4.173)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} sx' &= x \\ sy' &= y \\ z' &= f \\ s &= \frac{z}{f} \end{aligned} \quad (8.4.174)$$

Ou mieux :

$$\begin{aligned} sx' &= x \\ sy' &= y \\ sz' &= z \\ s &= \frac{z}{f} \end{aligned} \quad (8.4.175)$$

Nous utilisons alors la matrice suivante pour la projection conique :

$$P_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.176)$$

En cours de traduction de l' anglais

et ensuite nous normalisons les coordonnées par le rapport z/f. En effet (un lecteur a demandé les détails) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{z}{f}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{f}{z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{xf}{z} \\ \frac{yf}{z} \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8.4.177)$$

~80 %

35 votes, 82.29%

En cours de traduction de l' anglais

8.5. Géométrie Analytique

La "géométrie analytique" est la branche de la géométrie qui s'occupe de l'étude des formes géométriques et de leurs propriétés en utilisant les outils avancés du Calcul Algébrique tels que l'analyse fonctionnelle, le calcul vectoriel ou l'algèbre linéaire. Sa frontière se situe au niveau des outils utilisés et a pour origine les travaux de René Descartes au début du 117e siècle (calendrier holocène). La "géométrie vectorielle" est donc un sous-famille de la géométrie analytique et nous en ferons aussi bien usage dans la présente section que dans celle de Géométrie Différentielle.

Remarque

Lorsque nous faisons usage pour ces mêmes études du calcul différentiel et intégral, alors nous faisons de la "géométrie différentielle" (voir section du même nom à la page 2822).

La géométrie analytique est un très vaste domaine (comme tout le reste dans ce livre) alors... nous n'aborderons ici que les éléments absolument indispensables à l'étude de la physique (et en particulier l'astronomie et la physique quantique corpusculaire) et de l'ingénierie (génie spatial). Ces éléments sont par ailleurs souvent étudiés dans les petites classes et sont (cités dans l'ordre) : les coniques, les équations de la droite, du plan, de la sphère, etc... leurs intersections, leurs plans tangents et encore bien d'autres.

Le lecteur remarquera que nous commençons cette section avec les coniques et non les lignes droites, et ce simplement parce que nous utiliserons beaucoup plus de propriétés des coniques que des lignes droites dans ce livre. Pour les propriétés géométriques analytiques des lignes droites, voir la sous-section après les coniques.

8.5.1 Coniques

Il nous a été très difficile de choisir s'il fallait mettre l'étude des coniques dans le chapitre d'Algèbre ou de Géométrie. Nous avons finalement décidé de mettre cette étude dans le présent chapitre (donc de Géométrie...) qui permet de supposer que le lecteur ayant fait une lecture linéaire du site a déjà parcouru tous les chapitres et sections présentant les outils mathématiques nécessaires à l'étude des coniques. Nous espérons que notre choix s'avérera le meilleur pour le lecteur.

L'étude des coniques sera très utile dans la section d'Astronomie (nous devons à Kepler de nombreux résultats sur l'étude des coniques) et aussi dans les sections d'Optique Géométrique, de Statistique et de Génie Industriel. Il convient donc d'entrer dans les détails de ce sujet.

En cours de traduction de l'anglais

8.5.1.1 Approche Algébrique

Soit $(\text{O},\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Les courbes algébriques les plus simples que nous trouvons après les droites dont les équations sont sous forme générale (rappel) :

$$ax+by+c=0 \tag{8.5.1}$$

sont les courbes du deuxième degré, appelées "coniques analytiques", à savoir par extension :

$$\boxed{\underbrace{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy}_{\text{quadratic term}}+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0} \tag{8.5.2}$$

avec α,β,γ non tous nuls.

Les courbes de second degré correspondantes sont appelées "coniques" (appelées également "quadriques" de par la présence d'un terme quadratique). La conique sera dite "conique propre" si c'est une ellipse, une parabole ou une hyperbole comme nous allons le voir plus loin.

Cette dernière relation peut aussi s'écrire sous forme matricielle (écriture très importante dans la pratique des Méthodes Numériques comme nous le verrons dans la section du même nom ainsi que dans la classification des équations différentielles comme nous le verrons dans la section de Calcul Différentiel Et Intégral) :

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \dfrac{\beta}{2} \\ \dfrac{\beta}{2} & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \zeta = \vec{x}^T A\vec{x}+B^T\vec{x}+C \tag{8.5.3}$$

notation pour laquelle il existe plusieurs variantes...

Par exemple, la fonction :

$$f(x,y)=x^2+y^2+2bxy-5x-4y+g \tag{8.5.4}$$

donne pour différentes valeurs de g les tracés suivants :

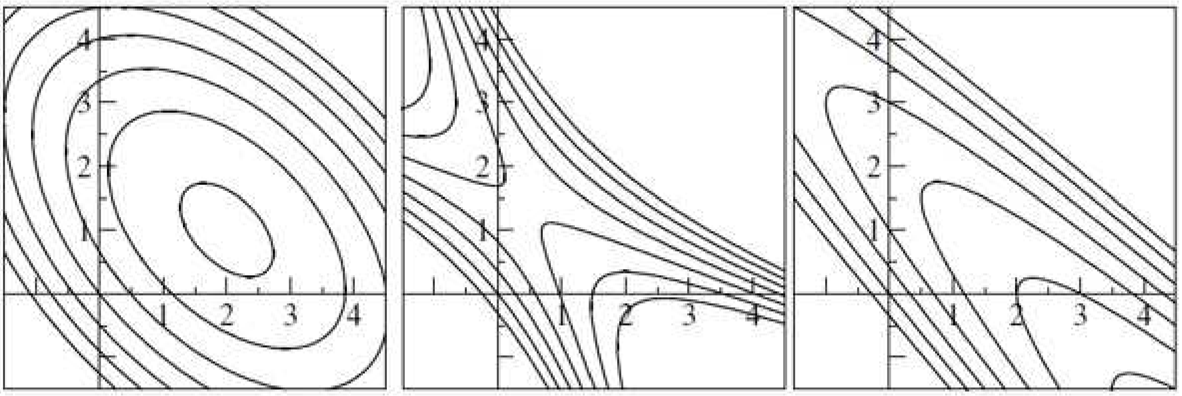


FIG. 8.147 – Coniques avec respectivement $b=0,5,1,5$ et 1 et plus de valeurs de g

Notre première tâche va consister à obtenir, par translation et rotation du repère dans lequel cette relation est exprimée, une équation réduite beaucoup plus simple en éliminant le terme en xy.

En cours de traduction de l'anglais

En effet, choisissons un nouveau repère se déduisant de l'ancien par une rotation d'angle . Soit x' et y' les nouvelles coordonnées des points. Nous avons (voir section Géométrie Euclidienne page 2628) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{8.5.5}$$

D'où :

$$\begin{aligned} x &= \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y &= \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

L'équation devient :

$$\alpha(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')^2 + \beta(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y')^2 \tag{8.5.7}$$

$$+\gamma(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y') + \ldots = 0 \tag{8.5.8}$$

Nous cherchons donc à ce que les termes en $x'y'$ regroupés soient tels que :

$$-2\alpha\cos(\theta)\sin(\theta) + 2\beta\cos(\theta)\sin(\theta) + \gamma(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \tag{8.5.9}$$

Puisque (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) \tag{8.5.10}$$

par substitution, nous obtenons :

$$(\beta - \alpha)\sin(2\theta) + \gamma\cos(2\theta) = 0 \tag{8.5.11}$$

Pour avoir que les termes en $x'y'$ se simplifient, il suffit donc de choisir l'angle de rotation θ tel que :

$$\frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} = \tan(2\theta) \tag{8.5.12}$$

Nous considérerons alors désormais l'équation :

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0} \tag{8.5.13}$$

1. Si nous posons que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Et que nous divisons par β, nous pouvuons revenir à une équation du type suivant :

$$y^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0 \tag{8.5.14}$$

   où :

   - Si $\gamma \neq 0$, nous nous retrouvons avec une équation décrivant la figure d'une "parabole" d'axe parallèle à OX.
   - Si $\gamma = 0$, il s'agit d'un cas dégénéré (une conique dégénérée est une conique réduite à être deux droites parallèles ou non ou à une seule droite).

2. Si nous posons $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ le cas se traite comme précédemment.

En cours de traduction de l'anglais

3. Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, nous pouvons supprimer les termes δx et εy de la façon suivante :

$$\alpha\left(x+\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2+\beta\left(y+\frac{\varepsilon}{2\beta}\right)+\gamma=0 \tag{8.5.15}$$

et par un simple changement de repère via des translations, nous arrivons donc à une équation du type :

$$\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma=0 \tag{8.5.16}$$

- Si $\gamma=0$ les relations précédentes se simplifient en :

$$\alpha X^2=-\beta Y^2 \tag{8.5.17}$$

Et donc il est évident que si $\operatorname{sgn}(x)=\operatorname{sgn}(y)$ il n'y a que la solution triviale $X=Y=0$ si nous restons dans $\mathbb{R}$. Au contraire si $\operatorname{sgn}(x)\neq\operatorname{sgn}(y)$ nous avons alors une infinité de solutions représentées par une droite.

- Si $\gamma \neq 0$, posons :

$$\alpha=\operatorname{sgn}(\alpha)\frac{1}{\alpha'^2} \quad \text{et} \quad \beta=\operatorname{sgn}(\beta)\frac{1}{\beta'^2} \tag{8.5.18}$$

et divisons par $|\gamma|$ tel que :

$$\operatorname{sgn}(\alpha)\frac{X^2}{|\gamma|\alpha'^2}+\operatorname{sgn}(\beta)\frac{Y^2}{|\gamma|\beta'^2}+\operatorname{sgn}(\gamma)=0 \tag{8.5.19}$$

Si nous posons maintenant :

$$\frac{X^2}{|\gamma|\alpha'^2}=\frac{1}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{Y^2}{|\gamma|\beta'^2}=\frac{1}{b^2} \tag{8.5.20}$$

Nous obtenons alors :

$$\operatorname{sgn}(\alpha)\frac{X^2}{a^2}+\operatorname{sgn}(\beta)\frac{Y^2}{b^2}=-\operatorname{sgn}(\gamma) \tag{8.5.21}$$

Nous avons donc plusieurs situations possibles :

$$\boxed{\begin{array}{ll} +\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=+1 & -\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=-1 \\ +\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=+1 & -\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=-1 \\ -\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=+1 & +\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=-1 \\ \xcancel{-\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=+1} & \xcancel{+\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=-1} \end{array}} \tag{8.5.22}$$

Deux termes ci-dessus sont impossibles dans $\mathbb{R}^2$, c'est pourquoi nous les avons barrés (la somme de deux nombres positifs ne peut être négative et inversement).

Il y a plusieurs cas de figures intéressants :

En cours de traduction de l'anglais

(a) Pour :

$$+\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=+1 \qquad -\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=-1 \tag{8.5.23}$$

et $a=b=1$, nous avons un cercle de rayon unité. Le lecteur peut s'amuser à tester cela avec la commande Maple 4.00b suivante :

```
>with(plots):
>a:=1;b:=1;
>implicitplot(x^2/a^2+y^2/b^2=1,x=-10..10,y=-10..10);
```

(b) Pour :

$$+\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=+1 \qquad -\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=-1 \tag{8.5.24}$$

et $\forall a,b \in \mathbb{R}^*$ nous avons une ellipse (qui contient donc le cas particulier qu'est le cercle) de demi-axes respectivement a et b (pour la représentation graphique voir plus bas ou sinon la section de Formes Géométriques).

Le lecteur peut s'amuser à tester cela avec la commande Maple 4.00b suivante :

```
>with(plots):
>a:=4;b:=8;
>implicitplot(x^2/a^2+y^2/b^2=1,x=-10..10,y=-10..10);
```

(c) Pour :

$$\begin{aligned}\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}&=+1 \qquad -\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1\\ -\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}&=+1 \qquad \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=-1\end{aligned} \tag{8.5.25}$$

et $\forall a,b \in \mathbb{R}^*$, nous avons des hyperboles dont l'axe de symétrie est soit parallèle à OX soit à OY (pour la représentation graphique voir plus bas). Nous disons que l'hyperbole est une "hyperbole équilatérale" lorsque $a=b$.

Le lecteur peut s'amuser à tester cela avec la commande Maple 4.00b suivante :

```
>with(plots):
>a:=4;b:=4;
>implicitplot(x^2/a^2-y^2/b^2=1,x=-10..10,y=-10..10);
```

Le terme "conique" provient du fait que l'une des premières définitions des coniques consistait en l'intersection d'un cône et d'un plan.

En effet, étant donné :

$$z^2=x^2+y^2 \tag{8.5.26}$$

l'équation d'un cône ayant un angle au sommet de $\pi/4$ (ou un angle de $\pi/2$ par rapport à sa surface et à l'axe des x). C'est simplement l'application du théorème de Pythagore...

En cours de traduction de l'anglais

De plus, étant donné un plan orienté avec un angle θ par rapport à l'axe Z :

$$x=f(y,z)=\cos(\theta)y+\sin(\theta)z:=h \tag{8.5.27}$$

où le lecteur peut voir que si $\theta=0$ nous obtenons alors $z=h$ pour $\forall x,y$ et le plan est donc parallèle à $x\text{O}y$, si $\theta=\pi/2$ nous obtenons $y=h$ pour $\forall z,y$ le plan est parallèle à $x\text{O}z$. Dans les deux situations et pour tout θ le plan ne coupe jamais l'axe X et nous avons un vecteur normal qui est toujours dans le plan $x\text{O}y$.

Ce vecteur normal a relativement trivialement les coordonnées suivantes (nous utilisons la notation des cosinus-directeurs) :

$$\vec{n}=(0,\cos(\theta),\sin(\theta))=\left(0,\cos(\theta),\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) \tag{8.5.28}$$

Considérons maintenant la matrice de rotation dans l'espace $\mathbb{R}^3$ par rapport à l'axe $\text{O}z$ (voir section Géométrie Euclidienne page 2629) :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\0&\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\cos(\theta)-z\sin(\theta)\\y\sin(\theta)+z\cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{8.5.29}$$

Nous avons donc pour expression de la rotation de notre plan :

$$\cos(\theta)y+\sin(\theta)z=\cos(\theta)(\cos(\theta)-z\sin(\theta))+\sin(\theta)(\cos(\theta)-z\sin(\theta)):=h \tag{8.5.30}$$

Après simplification, $\forall\theta$:

$$y=h \tag{8.5.31}$$

Cela signifie simplement que lorsque nous appliquons la matrice de rotation à notre plan avec le même angle θ, nous l'amenons à sa position "initiale".

De même, pour le cône, une rotation selon l'axe Z :

$$(y\sin(\theta)+z\cos(\theta))^2=x^2+(y\cos(\theta)-z\sin(\theta))^2 \tag{8.5.32}$$

Après développement et simplification :

$$x^2-(y^2-z^2)\cos(2\theta)+yz2\sin(2\theta)=0 \tag{8.5.33}$$

Équation qui donne un cône horizontal pour $\theta=0$ et un cône vertical pour $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Nous avons donc un système général possible :

$$\begin{cases}y=h\\x^2-(y^2-z^2)\cos(2\theta)+yz2\sin(2\theta)=0\end{cases} \tag{8.5.34}$$

Nous voyons alors que pour :

- $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ nous obtenons une intersection entre le plan et le cône donnant une ellipse
- $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ nous obtenons une parabole

En cours de traduction de l'anglais

- $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ nous obtenons une hyperbole

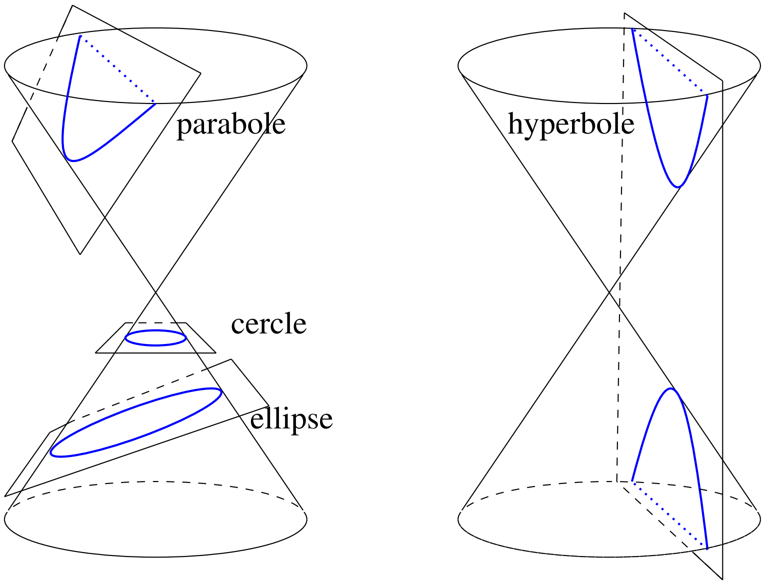


FIG. 8.148 – **Différentes intersections entre un cône et un plan (auteur : Ridlo W. Wibowo)**

En cours de traduction de l'anglais

et une analyse possible de l'impact du bruit de voisinage dans le monde réel :

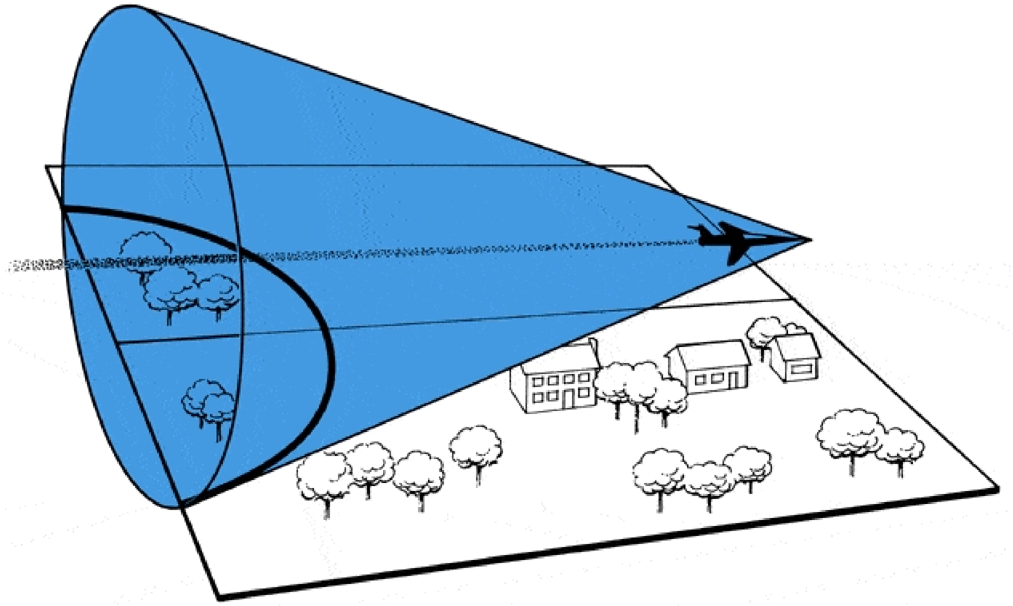


FIG. 8.149 – **Onde de choc qui traverse le sol**

L'hyperbole d'un bang sonique est décrite comme une onde de choc en forme de cône qui coupe le sol selon une courbe hyperbolique. Chaque point de cette courbe est touché par le bang en même temps, ce qui permet aux personnes situées à différents endroits de l'entendre simultanément. En effet, la courbe hyperbolique se déplace vers l'avant au même rythme que l'avion, ce qui permet à tout le monde sur son passage d'entendre le bang.

Remarque

Nous donnons également à la courbe d'équation $xy = 1$ le nom d'hyperbole car, par changement de variable :

$$\begin{aligned} x &= X + Y \\ y &= X - Y \end{aligned} \tag{8.5.35}$$

Ce qui nous ramène à :

$$X^2 - Y^2 = 1 \tag{8.5.36}$$

ce qui comme nous l'avons vu précédemment, est bien l'équation d'une hyperbole.

Pour ceux qui ont Maple 4.00b ou ultérieur voici les commandes pour s'amuser à faire une parabole :

```
>restart: with(plots):
>c:=sqrt(x^2+y^2):
>p:=y+3:
>Y:=solve(c=p,y);
>intsect:=subs(y=Y,c);
>intsect := (x +(1/6*x-3/2))
>P1:=plot3d(c,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=red,numpoints=2000
,view=[-5..5,-5..5,0..5],style=wireframe):
>P2:=plot3d(p,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=yellow,
numpoints=2000,view=[-5..5,-5..5,0..5],style=patchnogrid):
>display(P1,P2,scaling=constrained, orientation=[-10,75]);
```

ce qui donne :

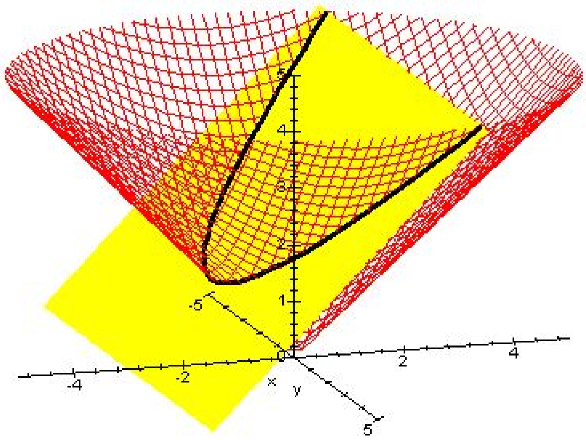


FIG. 8.150 – **Plot Maple 4.00b de l'obtention d'une parabole par l'intersection d'un cône et d'un plan**

ou pour obtenir une hyperbole :

```
>restart: with(plots):
>c:=sqrt(x^2+y^2):
>p:=4*y+5:
```

En cours de traduction de l' anglais

```
>Y:=solve(c=p,y);
>intsect:=subs(y=Y[1],c);
>P1:=plot3d(c,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=red,numpoints=2000
,view=[-5..5,-5..5,0..5],style=wireframe):
>P2:=plot3d(p,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=yellow,numpoints=2000
,view=[-5..5,-5..5,0..5],style=patchnogrid):
>P3:=spacecurve([x,Y[1],intsect],x=-5..5,color=black,thickness=3):
P3:=spacecurve([x,Y[1],intsect],x=-5..5,color=black,thickness=3):
>display(P1,P2,P3,scaling=constrained);
```

ce qui donne :

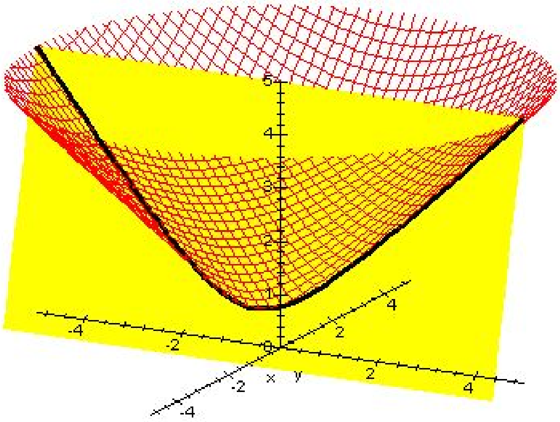


FIG. 8.151 – **Plot Maple 4.00b de l'obtention d'une hyperbole par l'intersection d'un cône et d'un plan**

ou pour otbtenir une ellipse :

```
>restart: with(plots):
>c:=sqrt(x^2+y^2):
>p:=y/3+3:
>Y:=solve(c=p,y);
>E1:=subs(y=Y[1],c); E2:=subs(y=Y[2],c);
>P1:=plot3d(c,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=red,numpoints=2000,
view=[-5..5,-5..5,0..5],style=wireframe):
>P2:=plot3d(p,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=yellow,numpoints=2000,
view=[-5..5,-5..5,0..5],style=patchnogrid):
>P3:=spacecurve([x,Y[1],E1],[x,Y[2],E2],x=-5..5,color=black,thickness=3,
numpoints=2000):
>display(P1,P2,P3,scaling=constrained);
```

ce qui donne :

En cours de traduction de l'anglais

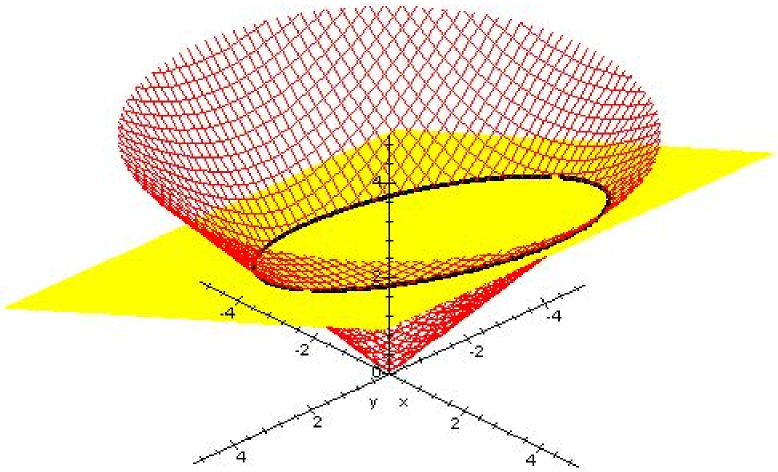


FIG. 8.152 – Plot Maple 4.00b de l'obtention d'une ellipse par l'intersection d'un cône et d'un plan

ou enfin pour l'obtention d'une cercle :

```
>restart: with(plots):
>c:=sqrt(x^2+y^2):
>p:=3:
>Y:=solve(c=p,y);
>circ1:=subs(y=Y[1],c); circ2:=subs(y=Y[2],c);
>P1:=plot3d(c,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=red,numpoints=2000,
view=[-5..5,-5..5,0..5],style=wireframe):
>P2:=plot3d(p,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal,color=yellow,numpoints=2000,
view=[-5..5,-5..5,0..5],style=patchnogrid):
>P3:=spacecurve([x,Y[1],circ1],[x,Y[2],circ2],
x=-5..5,color=black,thickness=3,numpoints=2000):
>display(P1,P2,P3);
```

ce qui donne :

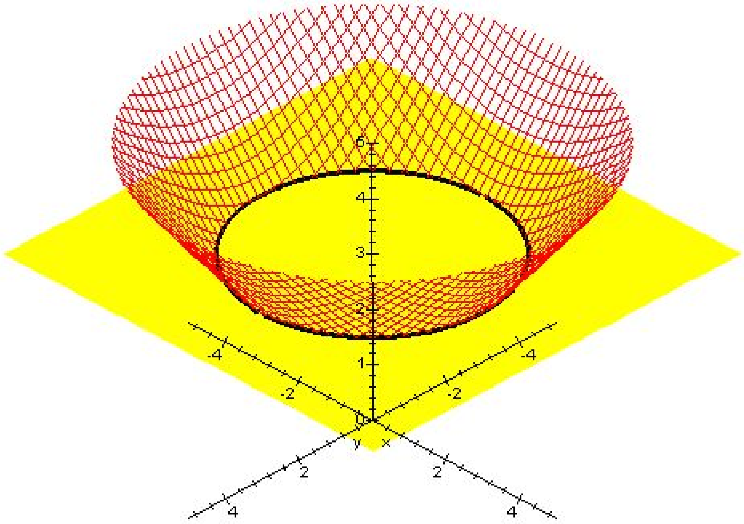


FIG. 8.153 – Plot Maple 4.00b de l'obtention d'un cercle par l'intersection d'un cône et d'un plan

En cours de traduction de l' anglais

Cependant, les coniques ont aussi une définition géométrique :

8.5.1.2 Approche Géométrique

Soit F un point du plan, D une droite ne contenant pas F (mais à une distance non nulle quelconque de celui-ci) et e un réel strictement positif. Nous nous intéressons à l'ensemble des points M défini par :

$$\boxed{\{M|e\cdot d(M,D)=d(M,F)\}} \tag{8.5.37}$$

F s'appelant le "foyer", D la "directrice de la conique" et e "l'excentricité[9]" :

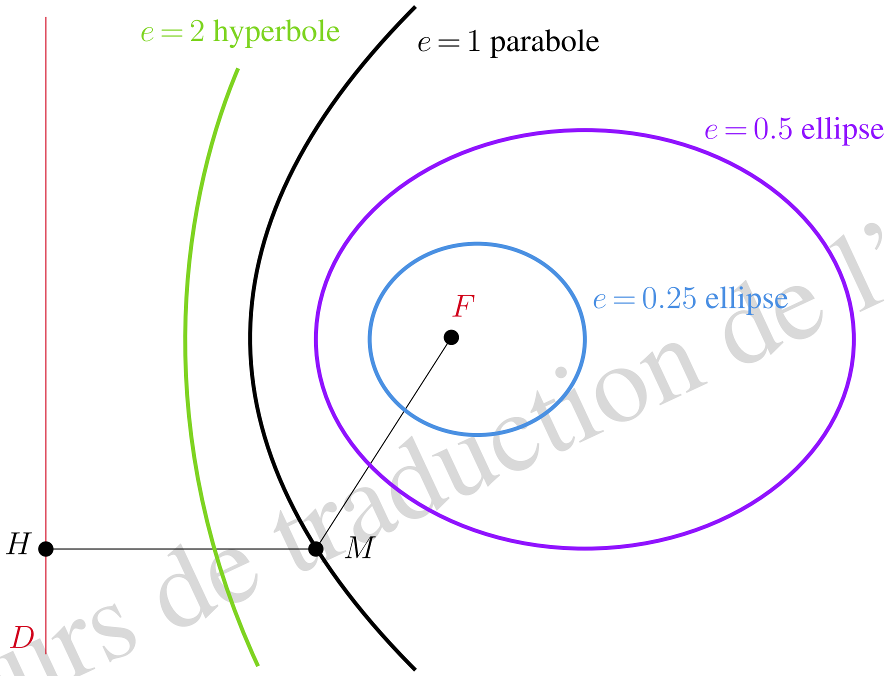


FIG. 8.154 – **Définitions du foyer (F), de la directrice (D) conique et de l'excentricité (e)**

En cours de traduction de l' anglais

Nous nous arrangerons par la suite pour avoir toujours F comme origine du repère des coniques, de cette façon D aura pour par définition pour équation :

$$x=-h \tag{8.5.38}$$

avec $h>0$ et nous notons donc $d(M,D)$ la distance entre le point M et D.

Alors :

$$\begin{aligned}
& e\cdot d(M,D)=d(M,F)\\
& \Leftrightarrow e|x+h|=\sqrt{x^2+y^2}\\
& \Leftrightarrow e^2(x+h)^2=x^2+y^2\\
& \Leftrightarrow (1-e^2)x^2+y^2-2e^2hx-e^2h^2=0
\end{aligned} \tag{8.5.39}$$

[9] L'excentricité de l'orbite de la Terre varie au fil du temps, en raison de l'interaction gravitationnelle avec d'autres corps célestes. La valeur de l'excentricité peut descendre jusqu'à 0.0034 et atteindre 0.058. En raison de l'excentricité, l'orbite de la Terre, du point le plus éloigné (aphélie) au point le plus proche (périhélie) du Soleil, présente en réalité une différence de distance de seulement 3 millions de kilomètres.

Nous nous retrouvons bien avec l'équation d'une conique puisque cette dernière relation est un cas particulier de :

$$\alpha x^2+\beta y^2+\delta x+\varepsilon y+\xi=0 \quad (8.5.40)$$

Nous pouvons considérer maintenant plusieurs cas particuliers :

1. Cas oùe $e=1$:

   L'équation :

   $$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2hx-e^2h^2=0 \quad (8.5.41)$$

   se réduit alors trivialement à :

   $$y^2-h^2=2hx \quad (8.5.42)$$

   Il s'agit d'une parabole d'axe orthogonal à D, dont le sommet Ω est le milieu du segment $\overline{FK}$, où K est la projection de F sur D (voir la figure plus bas).

   Si nous récrivons la dernière relation sous la forme :

   $$y^2=2hx+h^2=2h\left(x+\frac{h}{2}\right) \quad (8.5.43)$$

   et redéfinissons l'origine relativement à Ω par une translation de $h/2$, le foyer générateur de la parabole sera donc en $F=(h/2,0)$ et la dernière équation se réduit alors à :

   $$y^2=2hx \quad (8.5.44)$$

   où h est appelé "paramètre de la parabole" et relativement à Ω, le foyer sera donné par les coordonnées $F=(h/2,0)$ et la directrice par l'équation $D:x=-h/2$. Écrit d'une autre manière, nous recourons à la fameuse relation de la parabole en analyse fonctionnelle (le lecteur peut se référer à un exemple pratique de calcul d'antenne dans la section sur l'Optique) :

   $$x=\frac{1}{2h}y^2 \quad (8.5.45)$$

   C'est-à-dire :

   $$\boxed{x\propto y^2} \quad (8.5.46)$$

   Comme le montre la figure ci-dessous, la distance à la direction de Ω est imposée par les conditions du modèle :

En cours de traduction de l' anglais

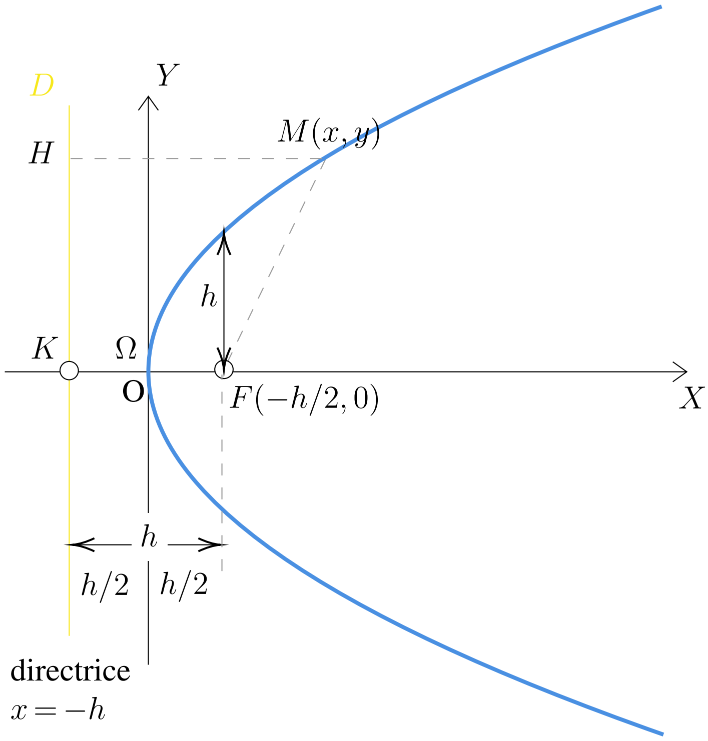


FIG. 8.155 – **Représentation des paramètres des coniques pour la parabole**

En cours de traduction de l'anglais

Sur la base des commentaires d'un lecteur, nous allons introduire la parabole d'une autre manière qui semble pour certains plus intuitive et plus pédagogique (tirée de [248]).

Nous voulons introduire l'équation :

$$y = ax^2 + bx + c \tag{8.5.47}$$

qui est une courbe en U appelée "parabole verticale". Commençons par la définition générale d'une parabole dans le plan.

Si il nous est donné une droite L et un point F non situé sur L, l'ensemble de tous les points équidistants de L et F formera une courbe en forme de U passant à mi-chemin entre L et F et nommée "parabole" :

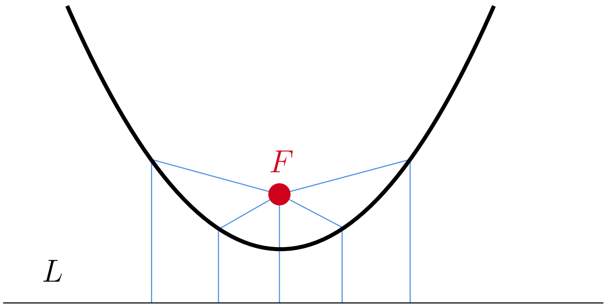


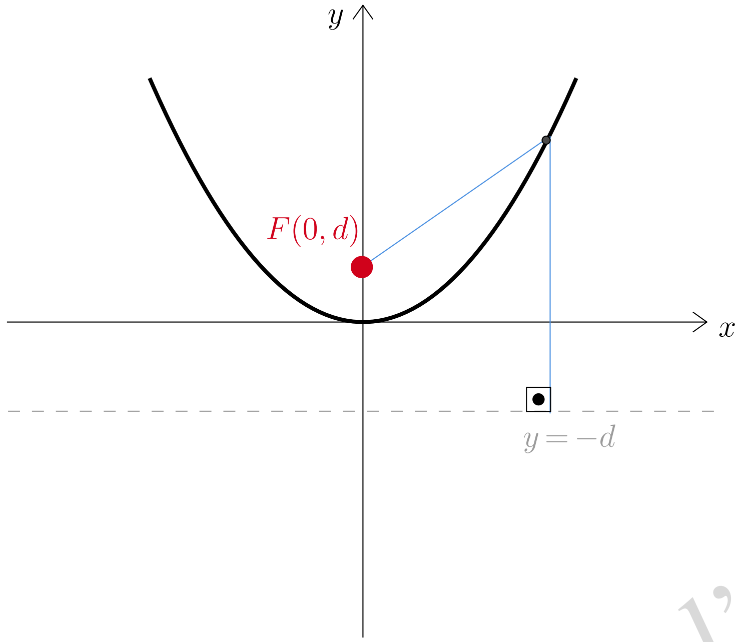
FIG. 8.156 – **Parabole = ensemble de points équidistants de L et F**

Théorème 8.20. Le graphique de l'équation :

$$y = ax^2 \tag{8.5.48}$$

(où $a \neq 0$) est la parabole de focale $F\left(0, \frac{1}{4}a\right)$ et directrice $y = -\left(\frac{1}{4}a\right)$. Son sommet est (0.0) et son axe est l'axe y.

Démonstration 8.20.1. Trouvons l'équation de la parabole de foyer $F(0, d)$ et de directrice $y = -d$, comme indiqué ci-dessous où évidemment $d = 1/4a$:



En cours de traduction de l' anglais

Notre objectif est de montrer que l'équation est $y = ax^2$ où $d = 1/4a$. Étant donné un point $P(x, y)$, la perpendiculaire de P à la directrice est une droite verticale de longueur $y + d$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\text{distance de } P \text{ à la directrice} &= y + d\\ \text{distance de } P \text{ à la focale} &= \sqrt{x^2 + (y-d)^2}\end{aligned} \tag{8.5.49}$$

Le point P se trouve sur la parabole exactement lorsque ces distances sont égales :

$$y + d = \sqrt{x^2 + (y-d)^2} \tag{8.5.50}$$

En simplifiant nouş obtenons :

$$\begin{aligned}(y+d)^2 &= x^2 + (y-d)^2\\ y^2 + 2yd + d^2 &= x^2 + y^2 - 2yd + d^2\end{aligned} \tag{8.5.51}$$

Dès lors :

$$y = \frac{1}{4d}x^2 = ax^2 \tag{8.5.52}$$

■ Q.E.D.

2. Cas où $e < 1$:

   Il s'agit d'une ellipse. Effectivement ce n'est pas évident à voir mais en réarrangeant les termes de l'équation :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2hx - e^2h^2 = 0 \tag{8.5.53}$$

nous avons (ceci indépendamment du fait que $e<1$ ou non) :

$$(1-e^2)\left(x-\frac{e^2h}{1-e^2}\right)^2+y^2-\frac{e^2h^2}{1-e^2}=0\Leftrightarrow\frac{\left(x-\dfrac{e^2h}{1-e^2}\right)}{\dfrac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2h^2}{1-e^2}}=1 \tag{8.5.54}$$

Le dernier terme de la relation antéprécédente se retrouvant en effet comme suit après développement :

$$\frac{e^4h^2}{1-e^2}-\frac{e^2h^2}{1-e^2}=e^2h^2\left(\frac{e^2-1}{1-e^2}\right)=-e^2h^2 \tag{8.5.55}$$

Posons que :

$$F=\frac{e^2h}{1-e^2} \tag{8.5.56}$$

est l'origine de l'ellipse en X (donc les x et y doivent maintenant être pris par rapport à cette nouvelle origine ! ! !). L'équation précédente se simplifie et devient (ceci toujours indépendamment du fait que $e<1$ ou non) :

$$\boxed{\frac{x^2}{\dfrac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2h^2}{1-e^2}}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{8.5.57}$$

Donc si $e<1$, les dénominateurs sont tous deux positifs et nous retrouvons bien l'équation réduite d'une ellipse puisque $a\neq b$.

Remarque

Il est à noter que cette définition ne peut inclure le cercle parmi les ellipses sinon quoi il y a une singularité car les dénominateurs seraient nuls (l'excentricité étant nulle pour le cercle).

Pour connaître le demi-grand axe de l'ellipse il suffit de poser $y=0$. Ainsi, il nous reste :

$$\frac{x^2}{\dfrac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}}=\frac{x^2}{a^2}=1 \tag{8.5.58}$$

d'où le demi-grand axe valant :

$$a=\pm\frac{eh}{1-e^2}=\pm\frac{F}{e} \tag{8.5.59}$$

de la même manière, nous obtenons le demi-petit axe :

$$b=\pm\frac{eh}{\sqrt{1-e^2}} \tag{8.5.60}$$

En cours de traduction de l'anglais

en posant $p=eh$ étant le ""paramètre de l'ellipse" ou "paramètre focal de l'ellipse", nous obtenons :

$$|a|=\frac{p}{1-e^2} \qquad |b|=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \tag{8.5.61}$$

dont la première relation nous sera très utile dans la section d'Astronomie et aussi dans la section de Relativité Générale.

Remarquez aussi en passant que nous avons alors :

$$\frac{b^2}{a}=\frac{\dfrac{p^2}{(\sqrt{1-e^2})^2}}{\dfrac{p}{1-e^2}}=p \tag{8.5.62}$$

Il est d'usage de noter la distance du centre de l'ellipse Ω au point F par la lettre c tel que :

$$c=\overline{\Omega F}=F \tag{8.5.63}$$

Nous avons donc :

$$c=F=\pm ae \Leftrightarrow e=\pm\frac{c}{a} \tag{8.5.64}$$

Il existe donc deux foyers à l'ellipse à une distance équivalente mais opposée du centre Ω. Nous définissons dès lors l'excentricité d'une ellipse par le rapport :

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\overline{\Omega F}}{a} \tag{8.5.65}$$

Le lecteur aura aussi remarqué que nous avons pour $x=0$ dans :

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2hx-e^2h^2=0 \tag{8.5.66}$$

l'ordonnée qui est donc donnée par le produit eh et que celui-ci peut être exprimé par les paramètres de l'ellipse sous la forme (même si cela peut paraître bizarre au nivau des unités c'est implicitement correct) :

$$p=eh=b \tag{8.5.67}$$

Nous pouvons alors aussi démontrer une relation que nous retrouvons couramment dans les formulaires :

$$a^2=b^2+c^2 \tag{8.5.68}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}=\frac{e^2h^2}{1-e^2}+e^2a^2=\frac{e^2h^2}{1-e^2}+e^2\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}=\frac{e^2h^2(1-e^2)+e^4h^2}{(1-e^2)^2}=\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2} \tag{8.5.69}$$

Cette propriété est alors démontrée et cela nous amène à pouvoir écrire l'excentricité uniquement grâce aux paramètres conventionnels de l'ellipse :

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{8.5.70}$$

En cours de traduction de l' anglais

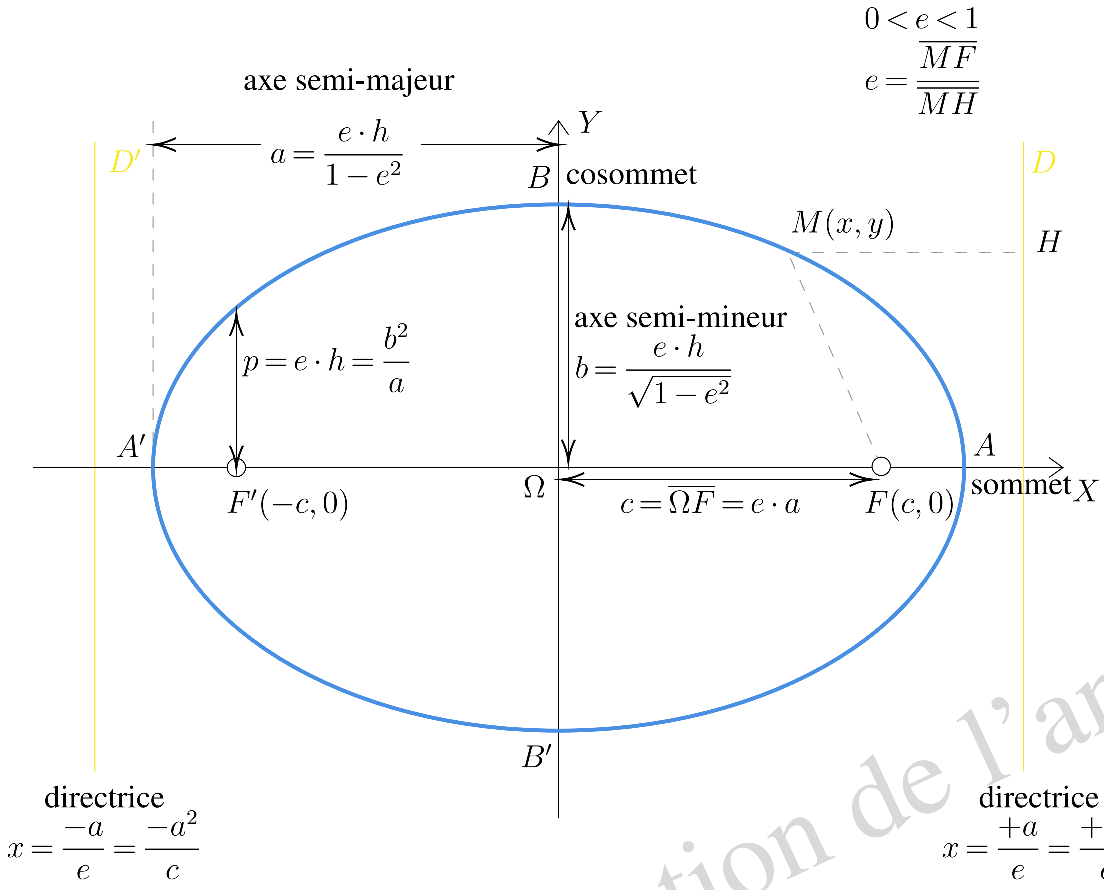


FIG. 8.157 – Représentation des paramètres des coniques pour une ellipse

En cours de traduction de l'anglais

Voici quelques excentricités elliptiques bien connues :

Orbite de l'objet céleste	Excentricité de l'orbite *e*
Mercure	0.206
Vénus	0.007
Terre	0.017
Mars	0.093
Jupiter	0.048
Saturne	0.056
Uranus	0.047
Neptune	0.09
Pluton	0.250
Téléscope Hubble	0.0002842
Station Spatiale Internationale	0.0005309
Comète de Halley	0.970

TAB. 8.4 – Quelques valeurs d'excentricités elliptique

Nous pouvons aussi déterminer où se trouvent les directrices D de l'ellipse par rapport à la bordure de celle-ci en utilisant la définition de l'excentricité lorsque $y = 0$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} & e \cdot d(M,D) = d(M,F) \\ \Leftrightarrow & d(M,D) = \frac{d(M,F)}{e} = \frac{a - ea}{e} = a\frac{1-e}{e} \end{aligned} \tag{8.5.71}$$

donc le facteur de a est compris entre 0 et $+\infty$ ce qui signifie que les directrices se trouveront (du moins dans le cas ici présent où l'excentricité est positive et strictement plus petite que l'unité) toujours à l'extérieur de la bordure de l'ellipse et au plus proche tangentes à la bordure (mais dans tous les cas elles se trouverontà l'extérieur de l'ellipse).

Une représentation paramétrique utile et évidente de l'ellipse est une extension du cercle trigonométrique (voir section Trigonométrie page 2494) :

$$\begin{aligned} x &= a\cos(t) \\ y &= b\sin(t) \end{aligned} \tag{8.5.72}$$

Effectivement si nous considérons l'équation cartésienne de l'ellipse démontrée précédemment :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \tag{8.5.73}$$

et en posant $R=X/a$ et $S=Y/b$ nous obtenons :

$$R^2+S^2=1 \tag{8.5.74}$$

Si nous nous souvenons du cercle trigonométrique, cette équation admet les solutions $R=\cos(t)$ et $S=\sin(t)$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} R &= \frac{X}{a}=\cos(t)\Rightarrow X=a\cos(t) \\ S &= \frac{Y}{b}=\sin(t)\Rightarrow Y=b\sin(t) \end{aligned} \tag{8.5.75}$$

Voilà... Et évidemment si $a=b\neq 0$ nous retombons sur l'équation paramétrique d'un cercle !

Démontrons maintenant une propriété importante des ellipses : la somme des distances des deux foyers à un point M sur le bord de l'ellipse est constante et égale à l'axe majeur.

Démonstration 8.20.2. Nous considérons que le centre est le milieu des foyers de coordonnées $\Omega(0,0)$. Les foyers se trouvent sur le grand axe $y=0$ et de même pour l'équation du petit axe pour laquelle $x=0$.

Maintenant, si les longueurs des axes majeur et mineur sont respectivement $2a, 2b$ avec une excentricité e, l'équation de l'ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{8.5.76}$$

Tout point M de l'ellipse peut être décrit comme nous venons de le voir précédemment par :

$$M(a\cos(\theta),b\sin(\theta)) \tag{8.5.77}$$

Ainsi, la distance entre un point $M(a\cos(\theta),b\sin(\theta))$ et l'un des foyers de coordonnées

En cours de traduction de l'anglais

$(ae, 0)$ est :

$$\begin{aligned}\overline{MF} &= \sqrt{(ae - a\cos(\theta)^2 + (b\sin(\theta) - 0)^2} = \sqrt{a^2e^2 + a^2\cos^2(\theta) - 2a^2e\cos(\theta) + b^2\sin^2(\theta)}\\ &= \sqrt{a^2e^2 + a^2\cos^2(\theta) - 2a^2e\cos(\theta) + b^2(1-\cos^2(\theta))}\\ &= \sqrt{a^2e^2 + a^2\cos^2(\theta) - 2a^2e\cos(\theta) + a^2(1-e^2)(1-\cos^2(\theta))}\\ &= \sqrt{a^2e^2 + a^2\cos^2(\theta) - 2a^2e\cos(\theta) + (a^2-a^2e^2)(1-\cos^2(\theta))}\\ &= \sqrt{a^2e^2 + a^2\cos^2(\theta) - 2a^2e\cos(\theta) + a^2 - a^2e^2 - a^2\cos^2(\theta) + a^2e^2\cos^2(\theta)}\\ &= \sqrt{-2a^2e\cos(\theta) + a^2 + a^2e^2\cos^2(\theta)}\\ &= a\sqrt{-2e\cos(\theta) + 1 + e^2\cos^2(\theta)}\\ &= a\sqrt{(1-e\cos(\theta))^2} = a(1-e\cos(\theta))\end{aligned} \tag{8.5.78}$$

De même (comme toujours, vous pouvez demander les détails si nécessaire), la distance entre $(a\cos(\theta), b\sin(\theta))$, $(-ae, 0)$ est égal à $a(1+e\cos(\theta))$.

La somme donne donc :

$$a(1-e\cos(\theta)) + a(1+e\cos(\theta)) = 2a \tag{8.5.79}$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

C'est ce résultat qui nous autorise à dire qu'une ellipse peut être construite de la célèbre manière suivante :

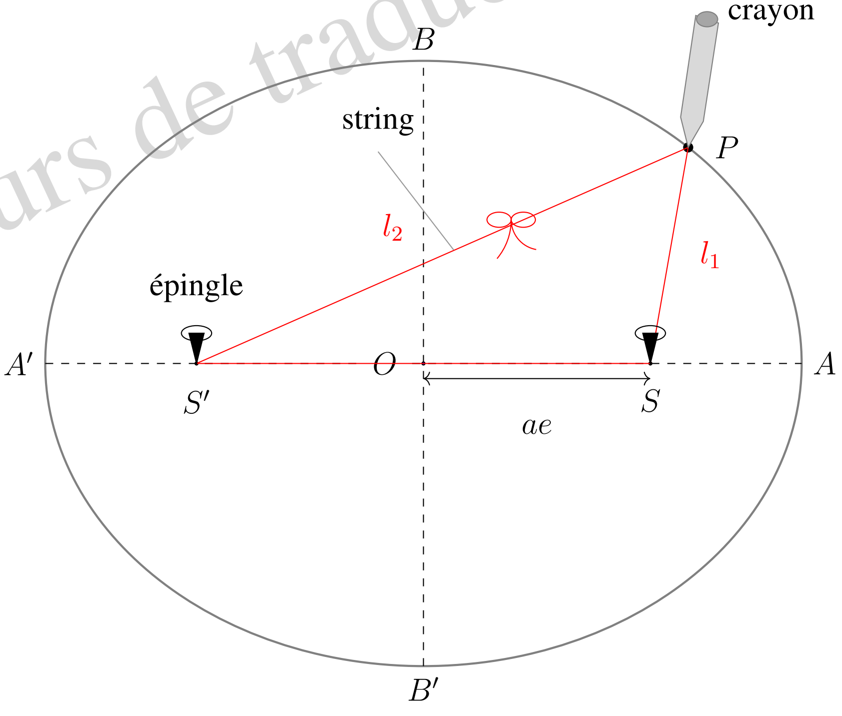


FIG. 8.158 – Construction artisanale d'une ellipse (auteur : Ridlo W. Wibowo)

Il est intéressant aussi de voir le raisonnement inverse ! Nous supposons la construction ci-dessus comme une définition et nous construisons à partir d'elle l'équation de l'ellipse centrée à l'Origine !

Pour cela, nous commençons par les foyers $(-c,0)$ et $(+c,0)$. L'ellipse est alors par définition l'ensemble de tous les points (x,y) tels que la somme des distances de (x,y) aux foyers soit constante, comme le montre la figure ci-dessus.

Si $(a,0)$ est un sommet de l'ellipse, la distance de $(-c,0)$ à $(a,0)$ est :

$$a-(-c)=a+c \tag{8.5.80}$$

La distance entre $(c,0)$ et $(a,0)$ est $a-c$. La somme des distances entre les foyers et le sommet est :

$$(a+c)+(a-c)=2a \tag{8.5.81}$$

Si (x,y) est un point sur l'ellipse, alors nous pouvons définir les variables suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= \text{la distance de } (-c,0) \text{ à } (x,y) \\ d_2 &= \text{la distance de } (c,0) \text{ à } (x,y) \end{aligned} \tag{8.5.82}$$

Par définition d'une ellipse, la <u>somme</u> des distances d_1, d_2 des foyers à tout point (x,y) de l'ellipse est égale à et est constante ! Nous savons que la somme de ces distances est $2a$ pour le sommet $(a,0)$. Il s'ensuit que :

$$d_1+d_2=2a \tag{8.5.83}$$

pour tout point de l'ellipse. Nous commencerons la dérivation en appliquant la formule de distance. Le reste de la dérivation est purement algébrique :

$$\begin{array}{ll}
d_1+d_2=\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a & \text{Formule de distance} \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a & \text{Simplifier les expressions} \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} & \text{Déplacer le radical vers le côté opposé} \\
(x+c)^2+y^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2 & \text{Carré des deux côtés} \\
x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2} & \text{Expansion des carrés} \\
x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2+x^2-2cx+c^2+y^2} & \text{Développement des carrés restants} \\
2cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2cx & \text{Combinaison des termes similaires} \\
4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} & \text{Isolation du radical} \\
cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2} & \text{Division par 4} \\
\left[cx-a^2\right]^2=a^2\left[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2 & \text{Carré des deux côtés} \\
c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) & \text{Expansion des carrés} \\
c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 & \text{Distribution de } a^2 \\
a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 & \text{Arrangement} \\
x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) & \text{Facteur des termes communs} \\
x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 & \text{Nous posons } b^2=a^2-c^2 \\
\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2} & \text{Divisons des deux côtés par } a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 & \text{Simplification de}
\end{array} \tag{8.5.84}$$

Ainsi, l'équation standard d'une ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{8.5.85}$$

L'équation définit une ellipse centrée à l'origine, avec pour rappel :

En cours de traduction de l'anglais

- Si $a > b$, l'ellipse est étirée dans la direction horizontale
- Si $b > a$, l'ellipse est étirée dans la direction verticale
- La longueur de l'axe majeur est $2a$
- Les coordonnées des sommets sont $(0, \pm a)$
- La longueur de l'axe mineur est $2b$
- Les coordonnées des co-sommets sont $(\pm b, 0)$
- Les coordonnées des foyers sont $(0, \pm c)$
- Nous avons l'identité $c^2 = a^2 - b^2$

La forme standard d'une ellipse de centre (h,k) est alors évidemment :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (8.5.86)$$

Il existe cependant une autre forme de l'équation de l'ellipse, beaucoup plus importante, que nous retrouvons dans les sections de Mécanique, d'Astrophysique et de Physique Quantique du présent livre.

En cours de traduction de l'anglais

Rappelons tout d'abord que :

$$e \cdot d(M,D) = d(M,F) \Leftrightarrow e|x+h| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (8.5.87)$$

En coordonnées polaires, cela donne :

$$e \cdot d(M,D) = d(M,F) \Leftrightarrow e|r\cos(\theta)+h| = r \qquad (8.5.88)$$

Dès lors :

$$r = e(r\cos(\theta)-h) \quad \text{or} \quad r = -e(r\cos(\theta)-h) \qquad (8.5.89)$$

après identification :

$$r_1 = \frac{-eh}{1-e\cos(\theta)} \qquad r_2 = \frac{eh}{1+e\cos(\theta)} \qquad (8.5.90)$$

Nous obtenons deux équations différentes, mais c'est en fait la même courbe qui décrit le rayon de l'ellipse à partir d'un de ses deux foyers. Et nous voyons que :

$$r_1(\theta+\pi) = -r_2(\theta) \qquad (8.5.91)$$

Puisque $p = eh$ est défini comme le paramètre de la conique, l'équation polaire de l'ellipse est donnée par :

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)} \qquad (8.5.92)$$

où θ est nommé "anomalie vraie".

Notez les trois valeurs spéciales :

$$\begin{aligned} &\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = p = eh : \text{ paramètre focal} \\ &\theta = 0 \Rightarrow r_p = \frac{p}{1+e} : \text{ péricentre (périhélie)} \\ &\theta = \pi \Rightarrow r_a = \frac{p}{1-e} : \text{ apocentre (aphélie)} \end{aligned} \qquad (8.5.93)$$

et nous obtenons évidemment :

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \qquad \text{et} \qquad c = \frac{r_a - r_p}{2} \tag{8.5.94}$$

et puisque $e = \pm c/a$ nous obtenons également une autre relation célèbre pour l'excentricité :

$$e = \pm \frac{\frac{r_a - r_p}{2}}{\frac{r_a + r_p}{2}} = \pm \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \tag{8.5.95}$$

Le péricentre est mieux connu sous le nom de "périgée" en astronomie ainsi que l'apocentre qui est mieux connu sous le nom de "apogée" et sont beaucoup utilisés en astronomie et en astrodynamique.

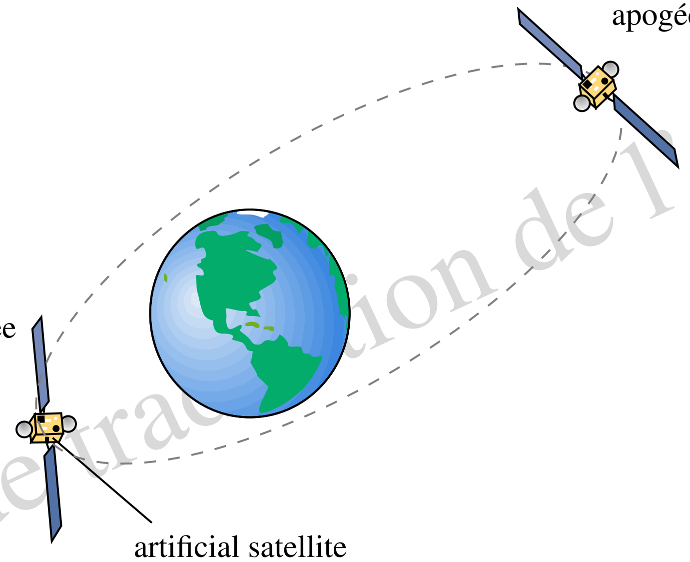


FIG. 8.159 – **Apogée et Perigée**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

En fait, "apogée" et "périgée" sont des mots réservés lorsque la Terre est au foyer. Si c'est le Soleil (en fait une étoile de type G2V, donc une naine jaune) qui est au foyer, nous parlons alors de "aphélie" (correspondant a peu près au début de l'Hiver) et de "périhélie" (correspondant a peu près au début de l'Été).

Dans le cas général, D peut faire n'importe quel angle avec l'axe des angles polaires, et l'équation générale est alors (relation très importante en astronomie et en ingénierie aérospatiale !) :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{a\left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{c}{a}\right)\cos(\theta - \theta_0)} \tag{8.5.96}$$

3. Cas où $e > 1$:

Il s'agit d'une hyperbole (même raisonnement que l'ellipse en considérant en partant de toute autre valeur que $e > 1$ ou non) :

$$(1-e^2)\left(x-\frac{e^2h}{1-e^2}\right)^2+y^2-\frac{e^2h^2}{1-e^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\dfrac{e^2h}{1-e^2}\right)}{\dfrac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2h^2}{1-e^2}}=1 \quad (8.5.97)$$

Nous posons donc à nouveau que :

$$F=\frac{e^2h}{1-e^2} \quad (8.5.98)$$

est l'origine de l'hyperbole. L'équation précédente se simplifie et devient (donc jusque là, nous nous retrouvons avec exactement la même expression que pour l'ellipse) :

$$\frac{x^2}{\dfrac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{e^2h^2}{1-e^2}}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (8.5.99)$$

Mais comme $e > 1$ le dénominateur du deuxième terme sera négatif et donc nous nous retrouvons bien avec l'équation réduit d'une hyperbole !

Nous avons pour demi-grand axe et demi-petit axe (raisonnement identique à l'ellipse) : :

$$|a|=\frac{p}{1-e^2} \qquad |b|=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad (8.5.100)$$

et :

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \quad (8.5.101)$$

et la figure correspondante :

En cours de traduction de l'anglais

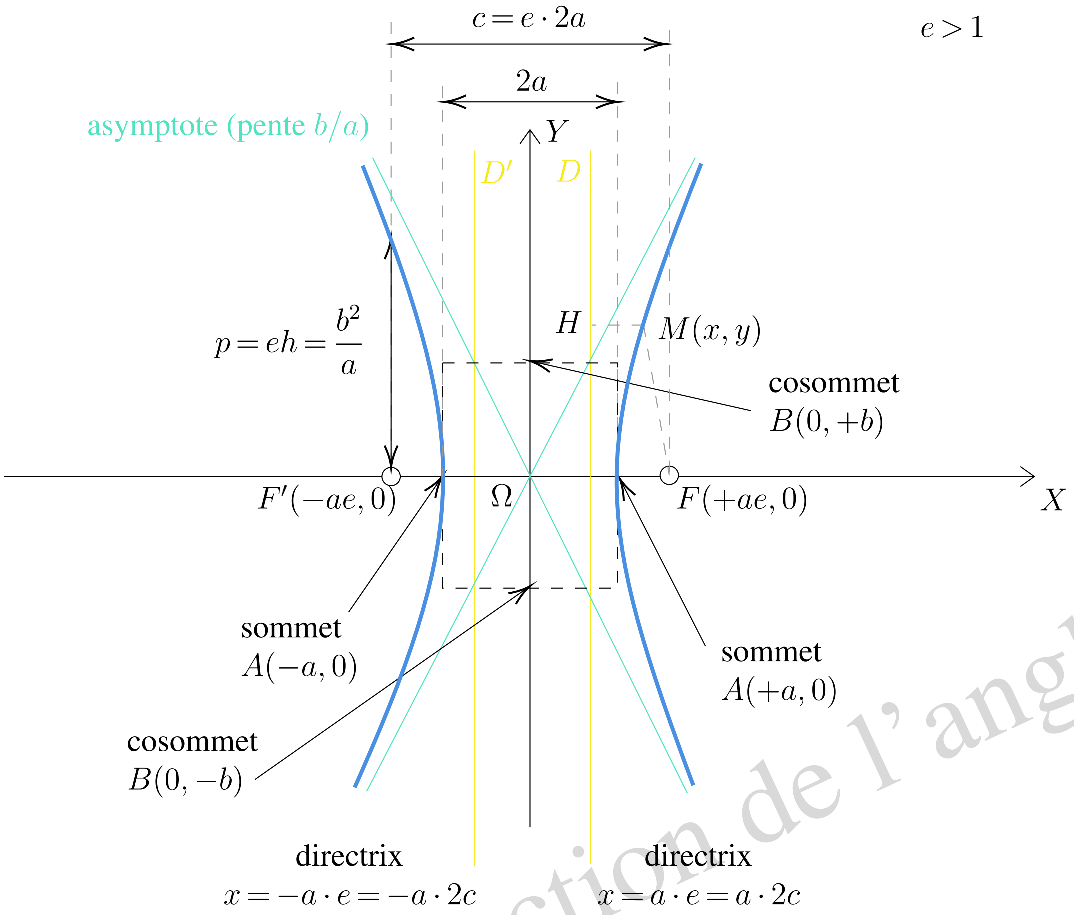


FIG. 8.160 – Représentation des paramètres de la conique pour l'hyperbole

En cours de traduction de l'anglais

où nous avons représenté les deux asymptotes en utilisant une technique simple de passage à la limite :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}\underset{x\to+\infty}{\cong}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2}=\pm\frac{b}{a}x=\triangle \qquad (8.5.102)$$

Si l'hyperbole est équilatère, il est alors évident que les deux asymptotes sont perpendiculairs puisque leur pente est alors respectivement de $+1$ et de -1. Dans le cas équilatère, nous avons aussi l'excentricité qui est immédiatement donnée par :

$$e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a}}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2} \qquad (8.5.103)$$

Nous pouvons aussi déterminer où se trouve les directrices D des hyperboles par rapport à leur bordure en utilisant la définition de l'excentricité lorsque $y=0$ en procédant exactement de même que pour l'ellipse. Nous avons alors :

$$ed(M,D)=d(M,F)\quad\Leftrightarrow d(M,D)=\frac{d(M,F)}{e}=\frac{ea-e}{e}=a\frac{e-1}{e} \qquad (8.5.104)$$

donc le facteur de a est compris entre 0 et tends vers 1 quand e est très grand ce qui signifie que les directrices se trouveront (du moins dans le cas ici présent où l'excentricité est positive et strictement plus petite que l'unité) soit tangentesà l'hyperbole soit au plus proche de l'axe des ordonnées y (mais dans tous les cas elles se trouveront donc entre les deux hyperboles).

Il existe une autre manière intéressante de construire l'équation de l'hyperbole en supposant que l'hyperbole est l'ensemble de tous les points (x, y) tels que la différence des distances d_1, d_2 de (x, y) aux foyers soit constante.

Pour cette preuve considérons $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ les foyers d'une hyperbole centrée à l'origine.

Si $(a, 0)$ est un sommet de l'hyperbole, la distance de $(-c, 0)$ à $(a, 0)$ est :

$$a-(-c)=a+c \tag{8.5.105}$$

La distance entre $(c, 0)$ et $(a, 0)$ est $c-a$. La somme des distances des foyers au sommet est :

$$(a+c)-(c-a)=2a \tag{8.5.106}$$

Si (x, y) est un point de l'hyperbole, nous pouvons définir les variables suivantes :

$$\begin{aligned} d_2 &= \text{the distance from } (-c,0) \text{ to } (x,y) \\ d_1 &= \text{the distance from } (c,0) \text{ to } (x,y) \end{aligned} \tag{8.5.107}$$

En supposant que pour une hyperbole, d_2-d_1 est constant pour tout point (x, y) sur l'hyperbole, il s'ensuit pour le sommet $(a, 0)$ que :

$$d_2-d_1=2a \tag{8.5.108}$$

et donc la même valeur devrait être cohérente pour toute l'hyperbole. Comme pour la dérivation de l'équation d'une ellipse vue juste avant, nous commencerons par appliquer la formule de distance. Le reste de la dérivation est algébrique. Vous pouvez comparer cette dérivation avec celle de la section précédente pour les ellipses :

$$\begin{array}{ll}
d_2-d_1=\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a & \text{Formule de distance}\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a & \text{Simplier l'expression}\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2} & \text{Déplacement du radical vers le côté opposé}\\
(x+c)^2+y^2=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 & \text{Carré des deux côtés}\\
x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 & \text{Développement des carrés}\\
x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 & \text{Développement des carrés restants}\\
2cx=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2cx & \text{Combinaison termes similaires}\\
4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} & \text{Isolation de la racine}\\
cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2} & \text{Division par 4}\\
(cx-a^2)^2=a^2\left[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2 & \text{Carré des deux côtés}\\
c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) & \text{Développement des carrés}\\
c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 & \text{Distribution de } a^2\\
a^4+c^2x^2=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 & \text{Combinaison termes similiares}\\
c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 & \text{Réarrangement des termes}\\
x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right) & \text{Factorisation termes similaires}\\
x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2 & \text{Posons } b^2=c^2-a^2.\\
\frac{x^2b^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2} & \text{Division des deux côtés par } a^2b^2\\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 &
\end{array} \tag{8.5.109}$$

Cette équation définit une hyperbole centrée à l'origine avec des sommets $(\pm a, 0)$ et des co-sommets $(0, \pm b)$.

En cours de traduction de l'anglais

Par conséquent, la forme standard de l'équation d'une hyperbole de centre $(0,0)$ et d'axe transversal sur l'axe x est :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (8.5.110)$$

où :

- La longueur de l'axe transversal est $2a$
- Les coordonnées des sommets sont $(\pm a, 0)$
- La longueur de l'axe conjugué est $2b$
- Les coordonnées des co-sommets sont $(0, \pm b)$
- Les distances entre les foyers sont $2c$
- Nous avons l'identité $c^2=a^2+b^2$
- Les coordonnées des foyers sont $(\pm c, 0)$
- Les équations des asymptotes sont $y=\pm {}^{b}\!/_{a}$

Et pour l'équation de forme standard d'une hyperbole de centre (h,k) et d'axe transversal parallèle à l'axe x nous avons :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad (8.5.111)$$

En cours de traduction de l'anglais

8.5.1.3 Théorème de Dandelin (sphères de Dandelin)

En géométrie, les "sphères de Dandelin" sont une ou deux sphères qui sont tangentes à la fois à un plan et à un cône qui coupe le plan. L'intersection du cône et du plan est une section conique, et le point où l'une des sphères touche le plan est un foyer de la section conique, c'est pourquoi les sphères de Dandelin sont aussi parfois appelées "sphères focales".

Les sphères de Dandelin peuvent être utilisées pour prouver au moins deux théorèmes importants :

1. Le premier théorème est qu'une section conique fermée (c'est-à-dire une ellipse) est le lieu de points tels que la somme des distances à deux points fixes (les foyers) soit constante.

   Comme nous avons déjà prouvé ce résultat auparavant d'une manière que nous considérons comme la plus simple et la plus jolie, nous ne le ferons pas à nouveau en utilisant les sphères de Dandelin.

2. Le deuxième théorème est que pour toute section conique, la distance à un point fixe (le foyer) est proportionnelle à la distance à une droite fixe (la directrice), la constante de proportionnalité étant appelée "excentricité".

   Comme nous avons déjà prouvé ce résultat auparavant d'une manière que nous considérons comme la plus simple et la plus jolie, nous ne le ferons pas non plus à nouveau en utilisant les sphères de Dandelin.

En cours de traduction de l'anglais

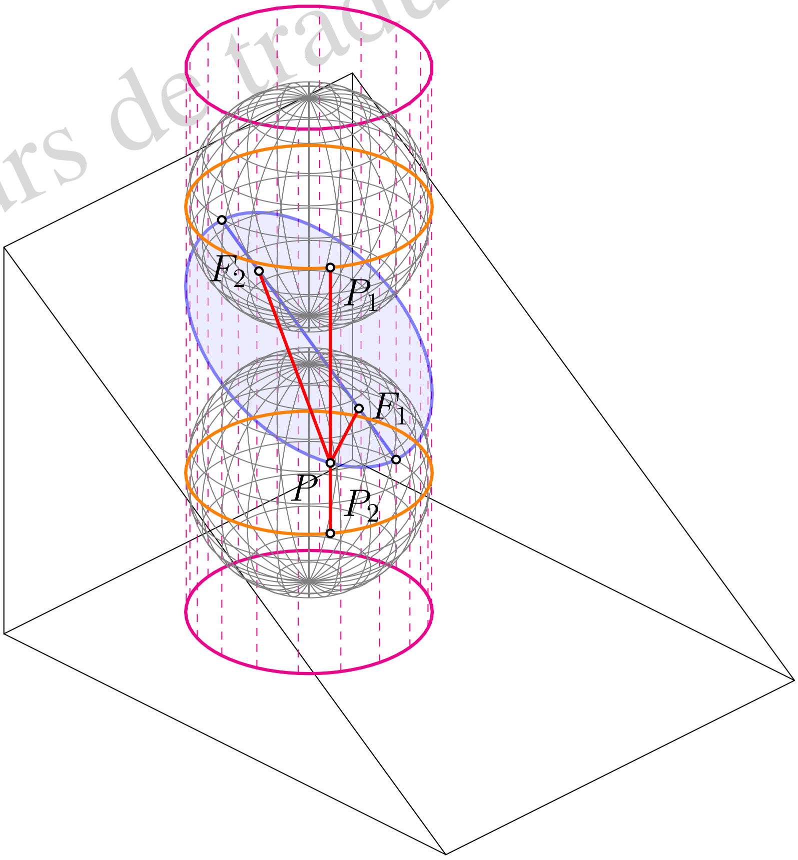


FIG. 8.161 – Sphères de Dandeline (source : Hugues Vermeiren)

Désolé pour le lecteur qui aime la preuve Dandelin mais nous ne voulons pas perdre de temps en réécrivant les démonstrations d'une autre manière et ceci surtout avec le langage de script LaTeX... (même si la longueur des démonstrations sont petites).

8.5.1.4 Classification des coniques par le déterminant

Pour les besoins de la classification des équations aux dérivées partielles que nous étudierons dans la section Calcul Différentiel et Intégral, revenons à l'équation générale des coniques (avec un facteur 2 sur certains termes pour simplifier les développements qui vont suivre) :

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{8.5.112}$$

avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Nous allons essayer de classer les coniques en utilisant une propriété purement matricielle et en nous inspirant de ce qui a été vu précédemment.

Comme nous le savons, tout Γ de $\mathbb{R}^2$ admettant une équation de la forme ci-dessus est appelé "conique".

Nous avons également montré que nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus comme :

$$\vec{x}^T A\vec{x}+2B^T\vec{x}+C=0 \tag{8.5.113}$$

avec :

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} d & e\end{pmatrix} \tag{8.5.114}$$

et rappelons que nous avons démontré dans le chapitre Algèbre Linéaire que si A est symétrique, il existe une matrice orthogonale S (vérifiant donc $S^TS=\mathbb{1}$) telle que :

$$S^TAS=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix} \tag{8.5.115}$$

où λ est μ sont les valeurs propre de A (voir page 1976).

Avant de continuer, remarquons qu'en utilisant l'une des propriétés du déterminant démontrée dans la section d'Algèbre Linéaire (voir page 1935) nous avons :

$$\det(S^TAS)=\det(S^T)\det(A)\det(S)=\det(S^T)\det(S)\det(A)=\det(A) \tag{8.5.116}$$

parce que :

$$\det(S^T)\det(S)=\det(S^TS)=\det(\mathbb{1})=1 \tag{8.5.117}$$

Dès lors :

$$\det(A)=ac-b^2=\lambda\mu \tag{8.5.118}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Si nous n'avions pas introduit le facteur 2 au début cela aurait été écrit :

$$\det(A)=ac-\frac{b^2}{4}=\lambda\mu \quad (8.5.119)$$

C'est pourquoi beaucoup de manuels classent les coniques en multipliant le déterminant par 4 et pour faire une analogie avec le discriminant de polynôme (c'est plus facile à retenir pour l'étudiant) ils le multiplient par -1 pour obtenir donc le "discriminant des sections coniques" : :

$$b^2-4ac \quad (8.5.120)$$

Observons maintenant ce qui se passe en fonction de la valeur de ce déterminant et donc in extenso en fonction des composantes de la matrice A.

Il y a deux cas à considérer dont seulement trois sont très exclusifs :

- Cas d'un déterminant $\det(A)\neq 0$ non nul :

  Dans le cas où $\det(A)\neq 0$, nous avons alors que A est inversible (voir section Algèbre Linéaire page 1944). Afin de simplifier l'équation :

$$\vec{x}^TA\vec{x}+2B^T\vec{x}+C=0 \quad (8.5.121)$$

  pour faire disparaître le terme X afin d'obtenir quelque chose qui nous est bien connu, nous allons chercher à translater la courbe (le choix de commencer par une translation étant le plus trivial). Par un petit tâtonnement, nous trouvons qu'il suffit de translater chaque point X de la courbe à partir d'un Y valant :

$$\vec{y}=-A^{-1}B \quad (8.5.122)$$

  Nous avons alors $(\vec{x}+\vec{y})\in\Gamma$:

$$(\vec{x}+\vec{y})^TA(\vec{x}+\vec{y})+2B^T(\vec{x}+\vec{y})+C=0 \quad (8.5.123)$$

  Après simplification nous obtenons en utilisant les propriétés d'associativité de la multiplication, la distributivité de l'addition matricielle et en retenant que pour une matrice symétrique (voir section Algèbre Linéaire page 1928) :

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1} \quad (8.5.124)$$

  et en se rappelant aussi que (voir section Algèbre Linéaire page 1924) :

$$(AB)^T=B^TA^T \quad (8.5.125)$$

  Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
&(\vec{x}-A^{-1}B)^TA(\vec{x}-A^{-1}B)+2B^T(\vec{x}-A^{-1}B)+C\\
&=(\vec{x}^T-B^T(A^{-1})^T)A(\vec{x}-A^{-1}B)+2B^T(\vec{x}-A^{-1}B)+C\\
&=\vec{x}^TA\vec{x}-(B^T(A^{-1})^T)A\vec{x}-\vec{x}^TA(A^{-1}B)+(B^T(A^{-1})^T)A(A^{-1}B)+2B^T(\vec{x}-A^{-1}B)+C\\
&=\vec{x}^TA\vec{x}-B^T\vec{x}-\vec{x}^TB+B^TA^{-1}B+2B^T\vec{x}-2B^TA^{-1}B+C\\
&=\vec{x}^TA\vec{x}-\vec{x}^TB+B^T\vec{x}-B^TA^{-1}B+C=0
\end{aligned} \quad (8.5.126)$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour continuer, rappelons que $\vec{x}$ et B sont des vecteurs, alors $\vec{x}^T B$ et $B^T\vec{x}$ sont des scalaires qui sont égaux et donc s'annulent. Il nous reste alors :

$$\vec{x}^T A\vec{x} - B^T A^{-1}B + C = 0 \quad (8.5.127)$$

Nous pouvons alors dire que la courbe translatée admet comme équation :

$$\vec{x}^T A\vec{x} + C_1 = 0 \quad (8.5.128)$$

où évidemment :

$$C_1 = -B^{-1}A^{-1}B + C \quad (8.5.129)$$

ou ce qui est explicitement équivalent à :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + C_1 = 0 \quad (8.5.130)$$

Nous avons ainsi réussi à simplifier l'équation dans le cas où A est inversible en supprimant le terme dans $\vec{x}$.

Le type de courbe (ellipse, parabole, hyperbole, etc.) n'est évidemment pas modifié par une translation, c'est pourquoi nous considérons l'équation précédente comme l'équation la plus simple.

Plus généralement, le type de courbe n'est pas modifié par une matrice orthogonale (facile à voir car l'image d'une base orthonormée par une matrice orthogonale reste une base orthonormée). Ainsi, en choisissant de subir une transformation orthogonale à X par S (qui est une matrice orthogonale pour information), nous sommes alors conduit à écrire :

$$(S\vec{x})^T A(S\vec{x}) + C_1 = (\vec{x}^T S^T)A(S\vec{x}) + C_1 = \vec{x}^T(S^T AS)\vec{x} + C_1 = 0 \quad (8.5.131)$$

étant donné que pour rappel :

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (8.5.132)$$

nous en déduisons que :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + f_1 = 0 \quad (8.5.133)$$

En conclusion, nous pouvons affirmer que la courbe définie par l'équation ci-dessus est du même type que la courbe originale Γ.

- Cas d'un déterminant strictement positif $\det(A) > 0$:

  Dans le cas où $\det(A) > 0$, c'est-à-dire $ac - b^2 > 0$ ou de manière équivalente comme nous l'avons mentionné dans la remarque précédente $b^2 - 4ac < 0$, λ et μ ont le même signe étant donné que par construction et pour rappel :

$$\det(A) = ac - b^2 = \lambda\mu \quad (8.5.134)$$

  La relation :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + C_1 = 0 \quad (8.5.135)$$

  reste toujours valable dans cette situation.

  Mais, en fonction de la valeur de C_1 nous avons montré plus haut comment interpréter cette équation. C'est pour rappel (n'oublions pas que nous sommes dans l'espace des nombres réels !) :

En cours de traduction de l'anglais

- Si C_1 a le même signe que λ et μ l'équation n'a pas de solution et $\Gamma = 0$
- Si $C_1 = 0$ nous voyons que l'équation se réduit à un point
- Si C_1 a un signe opposé à λ et μ alors nous reconnaissons l'équation d'une ellipse

- Cas d'un déterminant strictement négatif $\det(A) < 0$:

  Dans le cas où $\det(A) < 0$, c'est-à-dire $ac - b^2 < 0$ ou de manière équivalente comme nous l'avons mentionné dans la remarque précédente $b^2 - 4ac > 0$, λ et μ ont des signes opposés comme par construction et pour rappel :

$$\det(A) = ac - b^2 = \lambda\mu \quad (8.5.136)$$

  La relation :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + C_1 = 0 \quad (8.5.137)$$

  reste toujours valable dans cette situation.

  Mais, en fonction de la valeur de C_1 nous avons montré plus haut comment interpréter cette équation. C'est pour rappel (n'oublions pas que nous sommes dans l'espace des nombres réels !) :

  - Si $C_1 = 0$ alors Γ est l'union des droites sécantes
  - Si $C_1 \neq 0$ nous reconnaissons l'équation d'une hyperbole

- Cas d'un déterminant nul $\det(A) = 0$:

  Dans le cas où $\det(A) = 0$, c'est-à-dire $ac - b^2 = 0$ ou de manière équivalente comme nous l'avons mentionné dans la remarque précédente $b^2 - 4ac = 0$, une des valeurs propres est égale à zéro, par exemple $\mu = 0$ (uniquement parce que nous devons avoir $A \neq 0$). Comme nous le savons :

$$S\vec{x} \in \Gamma \quad (8.5.138)$$

  et par l'équation :

$$\vec{x}^T A\vec{x} + 2B^T\vec{x} + C_1 = 0 \quad (8.5.139)$$

  nous avons alors :

$$(S\vec{x})^T A(S\vec{x}) + 2B^T(S\vec{x}) + C = 0 \quad (8.5.140)$$

  Dès lors :

$$(\vec{x}^T S^T)A(S\vec{x}) + 2B^T(S\vec{x}) + C = \vec{x}^T(S^T AS)\vec{x} + 2B^T(S\vec{x}) + C_1 = 0 \quad (8.5.141)$$

  En développant explicitement, nous obtenons :

$$\lambda x^2 + 2dx + 2ey + C_1 = 0 \quad (8.5.142)$$

  La dernière équation peut être réécrite comme :

$$\lambda\left(x + \frac{d}{\lambda}\right)^2 + 2ey + C_2 = 0 \quad (8.5.143)$$

  avec évidemment :

$$C_2 = C_1 - \frac{d^2}{\lambda^2} \quad (8.5.144)$$

  Si $e = 0$ nous pouvons avoir trois situations :

En cours de traduction de l'anglais

- $C_2 = 0$, alors Γ est une ligne droite
- C_2 et λ ont les mêmes signes alors $\Gamma = \varnothing$
- C_2 et λ sont de signes opposés, alors Γ est l'union de deux lignes droites distinctes parallèles

Si $e \neq 0$, alors Γ est une parabole.

Faisons un résumé de cette classification :

- Si $\det(A) = ac - b^2 > 0$ (ou $b^2 - 4ac < 0$), alors Γ est soit vide, soit réduit à un point, soit une ellipse
- Si $\det(A) = ac - b^2 < 0$ (ou $b^2 - 4ac > 0$), alors Γ est soit l'intersection de deux droites sécantes, soit une hyperbole
- Si $\det(A) = ac - b^2 = 0$ (OU $b^2 - 4ac = 0$), alors Γ est soit vide, soit les droites parallèles, soit une parabole

Et nous pouvons maintenant également introduire (en considérant $b = 0$ juste pour simplifier la représentation conceptuelle du cerveau humain) :

- "Matrices définies positives" qui sont telles que :

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \tag{8.5.145}$$

  qui ressembleront à des ellipsoïdes. Pour cela, a et c doivent alors être de même signe et positifs satisfaisant alors $-4ac < 0$.

- "Matrices définies semi-positives" qui sont telles que :

$$\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0 \tag{8.5.146}$$

  qui ressemble à un demi-cylindre (voyez-le comme une surface engendrée par des paraboles). Pour cela, il faut avoir a ou c égal à zéro vérifiant la $-4ac = 0$. Évidemment, nous voyons que les matrices définies positives sont alors un cas particulier de matrices semi-définies positives (et nous pourrions aussi définir des matrices semi-définies négatives).

- "Matricies indéfinies" qui sont tels que $\vec{x}^T A \vec{x}$ sont négatifs ou positifs selon les valeurs de $\vec{x}$ puisque $a \neq 0$, $c \neq 0$ et que $\text{sgn}(a) \neq \text{sng}(c)$ (c'est-à-dire doivent être de signe opposé et non nuls) et qui ressemblent à une selle (surface engendrée par des hyperboles).

En cours de traduction de l' anglais

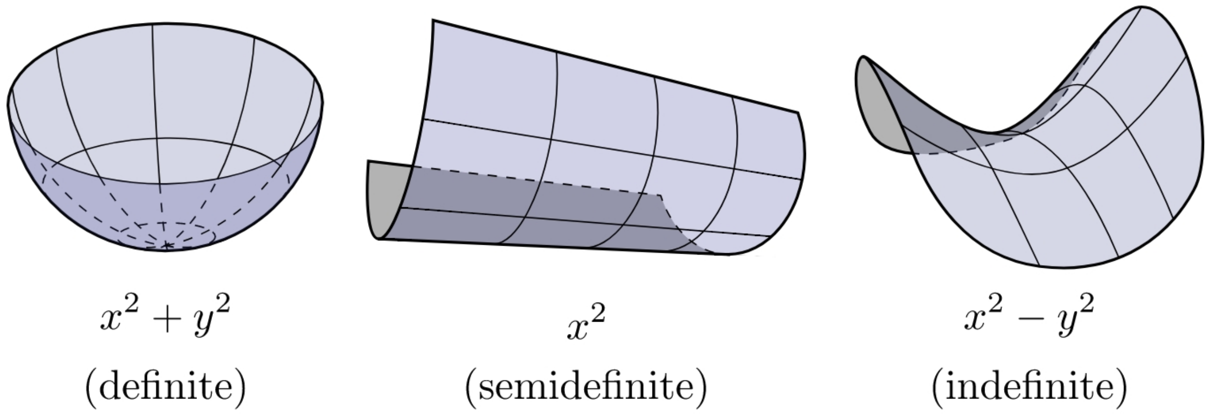


FIG. 8.162 – Représentation visuelle des matrices positives définies, positives semi-définies et indéfinies

En cours de traduction de l' anglais

8.5.2 Paramétrisations

La paramétrisation est le processus de décision et de définition des paramètres nécessaires à une spécification complète ou pertinente d'un modèle ou d'un objet géométrique.

La paramétrisation est également le processus de recherche d'équations paramétriques d'une courbe, d'une surface ou, plus généralement, d'une variété, définies par une équation implicite. Le processus inverse est appelé "implicitisation".

Le plus souvent, la paramétrisation est un processus mathématique impliquant l'identification d'un ensemble complet de coordonnées effectives ou de degrés de liberté du système, du processus ou du modèle, sans tenir compte de leur utilité dans une conception. La paramétrisation d'une ligne, d'une surface ou d'un volume, par exemple, implique l'identification d'un ensemble de coordonnées qui permet d'identifier de manière unique tout point (sur la ligne, la surface ou le volume) avec une liste ordonnée de nombres. Chacune des coordonnées peut être définie de manière paramétrique sous la forme d'une courbe paramétrique (unidimensionnelle) ou d'une équation paramétrique (deux dimensions ou plus).

En général, le nombre minimum de paramètres requis pour décrire un modèle ou un objet géométrique est égal à sa dimension, et la portée des paramètres - dans leurs plages autorisées - est l'espace des paramètres.

Remarque

Les paramétrisations ne sont pas uniques. L'objet tridimensionnel ordinaire peut être paramétré (ou "coordonné") de manière tout aussi efficace avec des coordonnées cartésiennes, des coordonnées cylindriques polaires, des coordonnées sphériques ou d'autres systèmes de coordonnées (voir section Calcul Vectoriel page 1823).

Comme indiqué ci-dessus pour certaines des formes décrites ci-dessous, il est possible de sélectionner une coordonnée différente des coordonnées cartésiennes comme par exemple des coordonnées cylindriques ou sphériques qui sont dans certains cas beaucoup plus simples à mettre en oeuvre. Nous essaierons dans la mesure du possible de présenter la plus importante.

En cours de traduction de l'anglais

8.5.2.1 Équation du Plan

Étant donné un plan P pour lequel nous connaissons un vecteur normal et un vecteur unitaire $\vec{n}(a,b,c)$ mais pas l'équation et $A(x,y,z)$ un point du plan P.

Remarque

Si nous n'avons pas $\vec{n}$ mais trois points du plan $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2), P_3(x_3,y_3,z_3)$ nous obtenons facilement $\vec{n}$ en calculant le produit vectoriel :

$$\vec{n} = (P_1 - P_2) \times (P_1 - P_3) \tag{8.5.147}$$

Pour qu'un point M de coordonnées (x,y,z) appartienne au plan P il est nécessaire et suffisant

que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.

Ainsi, étant donné le point par le vecteur $\overrightarrow{AM}$ de coordonnées :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \tag{8.5.148}$$

Si $\overrightarrow{AM}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$ alors le produit scalaire doit être nul car :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \tag{8.5.149}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\boxed{ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_{d} = 0} \tag{8.5.150}$$

de telle sorte que l'on obtienne l'équation cartésienne générale du plan :

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{8.5.151}$$

Cette équation où $(a, b, c) \cong (0, 0, 0)$ qui vérifie que les coordonnées de tout point $M(x, y, z)$ appartiennent au plan P est donc nommée "équation cartésienne du plan P".

Si nous écrivons l'équation avec les cosinus directeurs de $\vec{n}$ (voir section Calcul Vectoriel page 1790), nous avons donc aussi :

$$\cos(\theta_x)x + \cos(\theta_y)y + \cos(\theta_z)z + d = 0 \tag{8.5.152}$$

Remarque

Pour obtenir un cube dans l'espace, il suffit de six plans délimités par des conditions telles que $x \leq \ldots, y \leq \ldots, z \leq \ldots$.

Il est relativement facile de passer au cas par cas de l'équation cartésienne du plan à l'équation paramétrique du plan. Nous pouvons (avec les précautions d'usage...) reprendre l'équation :

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{8.5.153}$$

et en le réécrivant comme suit :

$$z = \frac{-d - by - ax}{c} \tag{8.5.154}$$

et donc, l'équation paramétrique du plan dans l'espace de dimension 3 s'écrira :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dfrac{-d - by - ax}{c} \end{pmatrix} \tag{8.5.155}$$

Erreurs de traduction de l' anglais

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b :

```
>a:=3:b:=-2:c:=1:d:=5:
>plot3d([x,y,(-d-b*y+a*x)/c],x=-2..2,y=-2..2,
orientation=[-87,81],style=PATCH, axes=NORMAL);
```

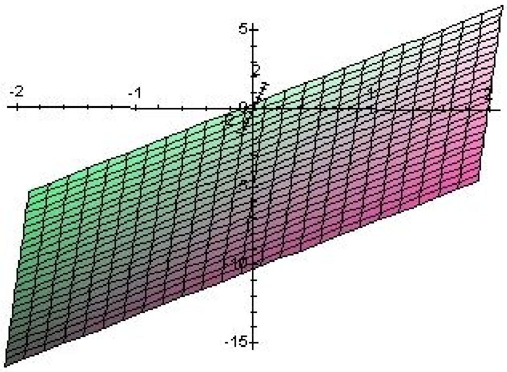


FIG. 8.163 – **Exemple d'un plan dans Maple 4.00b**

Théorème 8.21. Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ est normal au plan d'équation :

$$ax + by + cz = d \tag{8.5.156}$$

Démonstration 8.21.1. Prenons deux points $P_1 = (x_1, y_1, z : 1)$ et $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Alors :

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = d \qquad ax_2 + by_2 + cz_3 = d \tag{8.5.157}$$

Comme $\vec{P_2} - \vec{P_1} = \overrightarrow{P_2P_1}$ est dans le plan $ax + by + cz = d$ et en soustrayant les deux équations, nous avons :

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \tag{8.5.158}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \tag{8.5.159}$$

Cela prouve effectivement que :

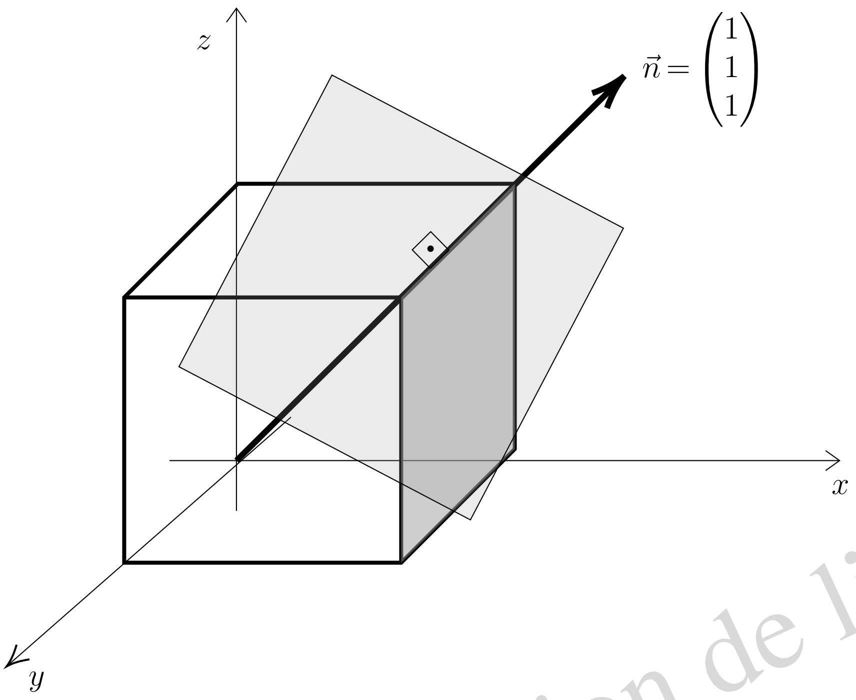
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{8.5.160}$$

est perpendiculaire au plan.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de ... is

En Géométrie Projective (voir la section du même nom page 2659) un cas important à considérer est le plan perpendiculaire à $\vec{n} = (1,1,1)$ qui donne la perspective isométrique qui maintient les longueurs du cube à taille égale :



Ainsi, en utilisant la relation précédente, nous obtenons :

$$x + y + z - 3 = 0 \tag{8.5.161}$$

Maintenant, pour calculer l'angle entre ce plan et le plan xy, nous calculons le produit scalaire entre les vecteurs normaux respectifs et soustrayons π tel que :

$$\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = \|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\| \cos(\alpha) \tag{8.5.162}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cos(\alpha) \tag{8.5.163}$$

Dès lors :

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{8.5.164}$$

Par conséquent, l'angle β entre les deux plans est en degrés (comme il est d'usage en géométrie perspective de travailler en degrés) :

$$\beta = 1 - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 35.264° \tag{8.5.165}$$

C'est pourquoi les angles de la géométrie de perspective sont arrondis au célèbre 30°.

En cours de traduction de l' anglais

8.5.2.2 Équation de la Droite

Comme nous l'avons vu dans la section d'Analyse Fonctionnelle, une ligne droite dans le plan peut être décrite par la fonction :

$$y = f(x) = ax + b \tag{8.5.166}$$

et nous avons également démontré comment déterminer l'équation de la médiatrice de deux points dans le plan (nous avions mentionné aussi que la démonstration était plus de l'ordre de la géométrie analytique que de l'analyse fonctionnelle).

L'équation cartésienne générale de la droite est alors simplement donnée par :

$$\boxed{\alpha x + \beta y + \gamma = 0} \tag{8.5.167}$$

ou parfois :

$$\boxed{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0} \tag{8.5.168}$$

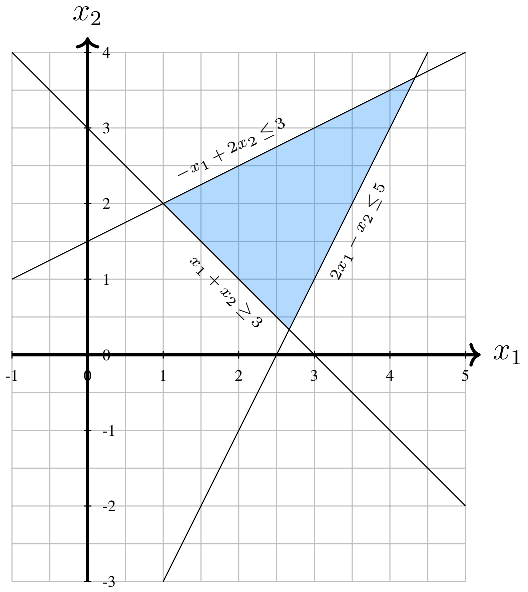
En effet, en simplifiant nous retombons sur "l'équation cartésienne réduite" :

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta} := ax + b \tag{8.5.169}$$

avec par définition :

$$a = -\frac{\alpha}{\beta} \qquad b = -\frac{\gamma}{\beta} \tag{8.5.170}$$

Nous avons également vu dans la section d'Algèbre que les droites présentant des inégalités plutôt que des égalités strictes donnent la possibilité de définir des zones spéciales sur le plan :



Définition (#8.5.353) : Nous appelons "vecteur directeur" d'une droite (D), tout vecteur non nul de même direction que la droite.

Démontrons maintenant deux petits théorèmes sympathiques :

En cours de traduction de l'anglais

Théorème 8.22. Si une droite a pour équation $y = ax + b$ alors le vecteur :

$$\vec{v}(1, a) \tag{8.5.171}$$

est un vecteur directeur pour cette ligne.

Démonstration 8.22.1. Soit $D : ax + b$ et A, B deux points de cette droite pris tels que $\{A(0, b), B(1, a + b)\}$. Puisque A, B sont deux points D alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D ainsi :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ a + b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \vec{v} \tag{8.5.172}$$

En chemin un petit corollaire intéressant qui a une application en physique ! :

Si une droite D_1 a pour vecteur directeur :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \tag{8.5.173}$$

et une autre droite D_2 dont le vecteur directeur est :

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix} \tag{8.5.174}$$

par conséquent leur produit scalaire (voir section Calcul Vectoriel page 1798) est nul :

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = 0 \tag{8.5.175}$$

cela montre que deux droites dont la multiplication des pentes (deuxième coordonnée du vecteur directeur) est égale à -1 sont perpendiculaires !

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

Théorème 8.23. Si une droite a pour équation $ax + by + c = 0$ alors le vecteur :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix} \tag{8.5.176}$$

est un vecteur directeur pour cette ligne.

Démonstration 8.23.1. Soit donné :

$$D : ax + by + c = 0 \tag{8.5.177}$$

dès lors :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \tag{8.5.178}$$

ainsi le vecteur :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix} \tag{8.5.179}$$

est un vecteur directeur D et tout vecteur :

$$\vec{v}\,' = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix} = \alpha \vec{v} \tag{8.5.180}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Il existe donc une infinité de façons de définir une même ligne, car la ligne est composée d'un nombre infini de points (qui peuvent tous servir de point d'ancrage) et il existe une infinité de vecteurs directeurs multiples !

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l' anglais

8.5.2.2.1 Distance d'une ligne à un point

Nous cherchons souvent la distance entre une ligne et un point extérieur à celle-ci. Ainsi, considérons la figure suivante :

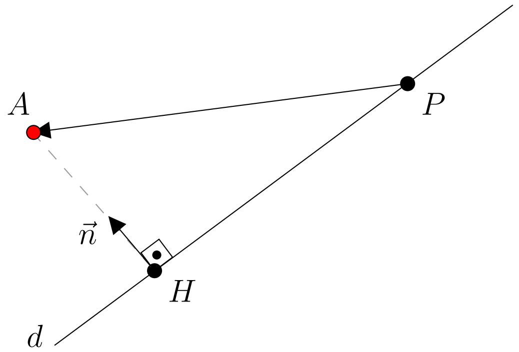


FIG. 8.164 – Représentation de la recherche de la distance d'un point à une ligne

Avec le point H la projection orthogonale de A sur la droite d, P un point arbitraire de la droite d et $\vec{n}$ un vecteur orthogonal (normal) à d.

Nous avons (voir section Calcul Vectoriel page 1798) :

$$\overrightarrow{PA}\circ\vec{n}=(\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HA})\circ\vec{n}=\overrightarrow{PH}\circ\vec{n}+\overrightarrow{HA}\circ\vec{n}=\overrightarrow{HA}\circ\vec{n}=||\overrightarrow{HA}||\|\vec{n}\|\cos(\alpha)=\pm||\overrightarrow{HA}||\|\vec{n}\| \quad (8.5.181)$$

Comme $\alpha=0$ ou $\alpha=\pi$. Par conséquent :

$$|\overrightarrow{PA}\circ\vec{n}|=||\overrightarrow{HA}||\|\vec{n}\|:=\delta(A,d)\|\vec{n}\| \quad (8.5.182)$$

où δ est la distance (nous pouvons noter que que nous désignons la distance par la lettre d comme nous l'avosn fait au début de ce chapitre, sinon il y aurait confusion avec le d choisi pour représenter la ligne droite dans ce développement).

Ainsi, nous obtenons la relation :

$$\delta(A,d)=\frac{|\overrightarrow{PA}\circ\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad (8.5.183)$$

Considérons maintenant explicitement le point $A(x_0,y_0)$ et l'équation de la droite : $d:ax+by+c=0$.

Choisissons un point $P\in d:P(0,-c/b)$ et un vecteur normal $\vec{n}$, normal à $d:\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. En effet, comme nous l'avons prouvé juste avant :

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-a/b\end{pmatrix} \quad (8.5.184)$$

est un vecteur directeur d'une droite D, nous avons bien :

$$\begin{pmatrix}1\\-a/b\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0 \quad (8.5.185)$$

En cours de traduction de l'anglais

et ainsi $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont perpendiculaires !

Ainsi, en appliquant la relation précédente, nous avons :

$$\overrightarrow{PA} \circ \vec{n} = \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -c/b \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + c/b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x_0 a + \left(y_0 + \frac{c}{b}\right) b \qquad (8.5.186)$$

et ainsi :

$$\boxed{\delta(a,d) = \frac{\left|x_0 a + \left(y_0 + \frac{c}{b}\right) b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad (8.5.187)$$

8.5.2.2.2 Ligne définie par l'intersection de plans

Si nous considérons maintenant deux plans non parallèles dans l'espace, leur intersection est une droite. En effet, considérons deux plans d'équations respectives :

$$\begin{aligned} P &= ax + by + cz + d = 0 \\ P' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{aligned} \qquad (8.5.188)$$

et D et leur droite d'intersection.

De toute évidence, un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace est situé sur la droite D si et seulement si le point M satisfait le système d'équations :

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{aligned} \qquad (8.5.189)$$

Un exemple avec images et application numérique est donné dans la section de Méthodes Numériques.

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Alors que dans $\mathbb{R}^2$ une droite est entièrement caractérisée par une équation du type $ax + by + c = 0$, dans l'espace, une seule équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ caractérise évidemment un plan. Pour caractériser une droite en dehors des plans des axes, il est nécessaire (équation paramétrique mise à part) d'avoir deux équations de plans.

8.5.2.2.3 Équation paramétrique d'une droite dans $\mathbb{R}^3$

Il est relativement trivial (mais nous allons quand même le démontrer) que l'équation paramétrique dans $\mathbb{R}^3$ d'une droite est une sorte de système d'équations :

$$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases} \qquad (8.5.190)$$

Ainsi, chaque composante croît linéairement par rapport à la même variable jusqu'à une constante et un facteur. Ceci peut aussi s'écrire sous forme vectorielle (plus traditionnelle) :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ c \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}} \tag{8.5.191}$$

Le vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ est évidemment appelé "vecteur directeur".

Démonstration 8.23.2. Nous avons donc le système d'équations (deux équations à trois inconnues, et donc une inconnue sera indéterminée) :

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{aligned} \tag{8.5.192}$$

Éliminons une des variables (arbitrairement nous commençons par z) :

$$(a - a'\alpha)x + (b - b'\alpha)y + \underbrace{(c - c'\alpha)}_{=0} z + (d - d'\alpha) = 0 \tag{8.5.193}$$

où $\alpha = c/c'$ et ainsi :

$$\begin{gathered} (a - a'\alpha)x + (b - b'\alpha)y + (d - d'\alpha) = 0 \\ \Rightarrow \\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{b'\alpha - b}{a - \alpha a'} y + \frac{d'\alpha - d}{a - \alpha a'} \\ y &= \frac{a'\alpha - a}{b - \alpha b'} x + \frac{d'\alpha - d}{b - \alpha b'} \end{aligned}\right\} x = \frac{b'\alpha - b}{a - \alpha a'} \left(\frac{a'\alpha - a}{b - \alpha b'} x + \frac{d'\alpha - d}{b - \alpha b'} \right) + \frac{d'\alpha - d}{a - \alpha a'} \end{gathered} \tag{8.5.194}$$

Alors (c'est un peu bête à écrire mais...) :

$$x = \underbrace{\frac{b'\alpha - b}{a - \alpha a'} \frac{a'\alpha - a}{b - \alpha b'}}_{=1} x + \underbrace{\frac{b'\alpha - b}{a - \alpha a'} \frac{d'\alpha - d}{b - \alpha b'} + \frac{d'\alpha - d}{a - \alpha a'}}_{=0} = x \tag{8.5.195}$$

De même avec y tel que $\beta = b/b'$, nous avons :

$$\begin{gathered} (a - a'\alpha)x + \underbrace{(c - c'\alpha)}_{=0} z + (d - d'\alpha) = 0 \\ \Rightarrow z = \frac{a'\beta - a}{c - c'\beta} x + \frac{d'\beta - d}{c - c'\beta} \end{gathered} \tag{8.5.196}$$

Ainsi :

$$z = \frac{a'\beta - a}{c - c'\beta} x + \frac{d'\beta - d}{c - c'\beta} \tag{8.5.197}$$

Finalement :

$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= \frac{a'\alpha - a}{b - \alpha b'} x + \frac{d'\alpha - \alpha}{b - \alpha b'} \\ z &= \frac{a'\beta - a}{c - c'\beta} x + \frac{d'\beta - d}{c - c'\beta} \end{aligned}\right\} x := t \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{a'\alpha - a}{b - \alpha b'} \\ \dfrac{a'\beta - a}{c - c'\beta} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{d'\alpha - \alpha}{b - \alpha b'} \\ \dfrac{d'\beta - d}{c - c'\beta} \end{pmatrix} \tag{8.5.198}$$

En cours de traduction de l' anglais

Le vecteur directeur et le vecteur des ordonnées ont tous deux des composantes constantes. Cela nous permet d'écrire plus généralement :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ c \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (8.5.199)$$

■ Q.E.D.

Remarques

R1. L'équation d'une droite est presque l'une des choses les plus importantes dans la synthèse de trois images car à partir de cette dernière nous pouvons construire des polygones et les assembleurs pour construire des formes tridimensionnelles plus complexes.

R2. Comme déjà vu précédemment avec un exemple, pour déterminer si une droite est perpendiculaire à un plan il faut déterminer au moins deux droites sécantes dans le même plan et effectuer le produit vectoriel de leur vecteur directeur puis calculer le produit scalaire entre le résultat du produit vectoriel et la première droite lumineuse pour laquelle nous cherchons l'orthogonalité. En effet, une seule droite du plan ne permet pas de déterminer l'orientation de ce dernier ; il faut au moins deux droites.

8.5.2.3 Équation d'un Carré

En 11992 (calendrier holocène), Manuel Hernandez Gusting a introduit une équation algébrique pour représenter une forme intermédiaire entre le cercle et le carré. Son équation comprenait un paramètre s qui peut être utilisé pour fusionner le cercle et le carré de manière homogène grâce à une équation assez simple nommée "FG-squircle" et donnée par :

$$x^2 + y^2 - \frac{s^2}{k^2}x^2y^2 = k^2 \quad (8.5.200)$$

Le paramètre de squareness s peut avoir n'importe quelle valeur entre 0 et 1. Lorsque $s = 0$, l'équation produit un cercle de rayon k. Lorsque $s = 1$, l'équation produit un carré de côté $2k$. Entre les deux, l'équation produit une courbe lisse qui s'interpole entre les deux formes.

Nous nous intéresserons ici au cas $k = s = 1$ qui donne donc :

$$\boxed{x^2 + y^2 - x^2y^2 = 1} \quad (8.5.201)$$

et lorsque $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$ cela correspond à un carré centré et à l'origine. En effet avec Maple :

```
>with(plots):
>implicit plot(x^2+y^2-x^2*y^2= 1,x=-1..1,y=-1..1);
```

En cours de traduction

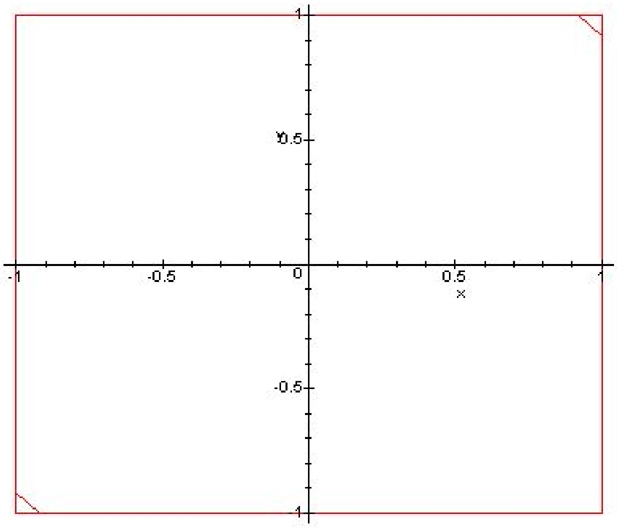


FIG. 8.165 – **Représentation d'un FG-squircle dans Maple 4.00**

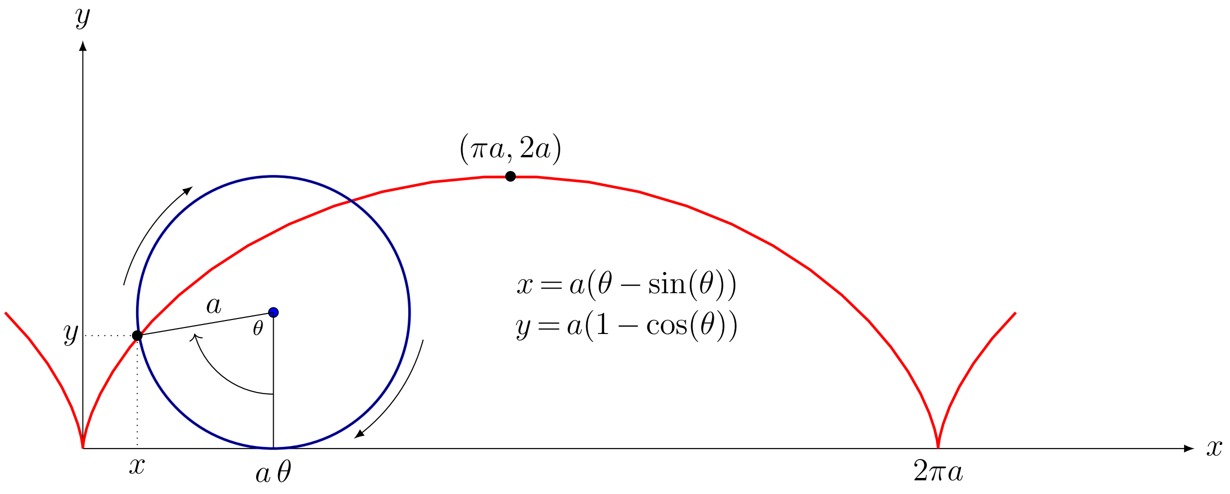
Cette équation implicite du carré nous sera utile pour étudier l'isomorphisme d'un cercle et d'un carré dans la section de Topologie.

8.5.2.4 Équation d'une Cycloïde

Une cycloïde est la courbe tracée par un point sur la jante d'une roue circulaire lorsque la roue roule en ligne droite sans glissement. C'est un exemple de roulette, une courbe générée par une courbe roulant sur une autre courbe.

La cycloïde est une courbe importante en physique ! En effet, comme nous le démontrerons dans la partie de Mécanique Classique, la cycloïde, avec les pointes pointées vers le haut, est la courbe de descente la plus rapide sous gravité constante, et est aussi la forme d'une courbe pour laquelle la période d'un objet en descente sur la courbe ne dépend pas de la position de départ de l'objet. C'est aussi une courbe mathématique sur laquelle nous reviendrons lors de notre étude détaillée des modèles d'univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker dans la section de Cosmologie (basée sur les mathématiques de la Relativité Générale) !

En cours de traduction de l'anglais



Nous voyons sur la figure ci-dessus que comme un arc θ du cercle de rayon a a une longueur :

$$2\pi a \frac{\theta}{2\pi} = a\theta \qquad (8.5.202)$$

Cela correspond à la distance d'abscisse dans la plage $[0, 2\pi a]$.

Mais pour obtenir la valeur x du point suivi il faut soustraire la projection horizontale a' du rayon a sur l'abscisse et comme :

$$\sin(\theta) = \frac{a'}{a} \Leftrightarrow a' = a\sin(\theta) \qquad (8.5.203)$$

Alors :

$$x = a\theta - a\sin(\theta) = a(\theta - \sin(\theta)) \qquad (8.5.204)$$

Et la même procédure s'applique pour y.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Notez que cela signifie que si θ fait un tour complet ($\theta = 2\pi$), alors la distance horizontale parcourue sera

Nous obtenons donc finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\,(\theta - \sin(\theta)) \\ y &= a\,(1 - \cos(\theta)) \end{aligned}} \qquad (8.5.205)$$

Notez que la longueur de l'arc complet L de la cycloïde est donnée par :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2 - 2\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = 8a \qquad (8.5.206)$$

8.5.2.5 Équation d'une Épicycloïde

En géométrie, une épicycloïde est une courbe plane obtenue en traçant le trajet d'un point choisi sur la circonférence d'un cercle - appelé « épicycle » - qui roule sans glisser autour d'un cercle fixe. C'est une sorte particulière de roulette.

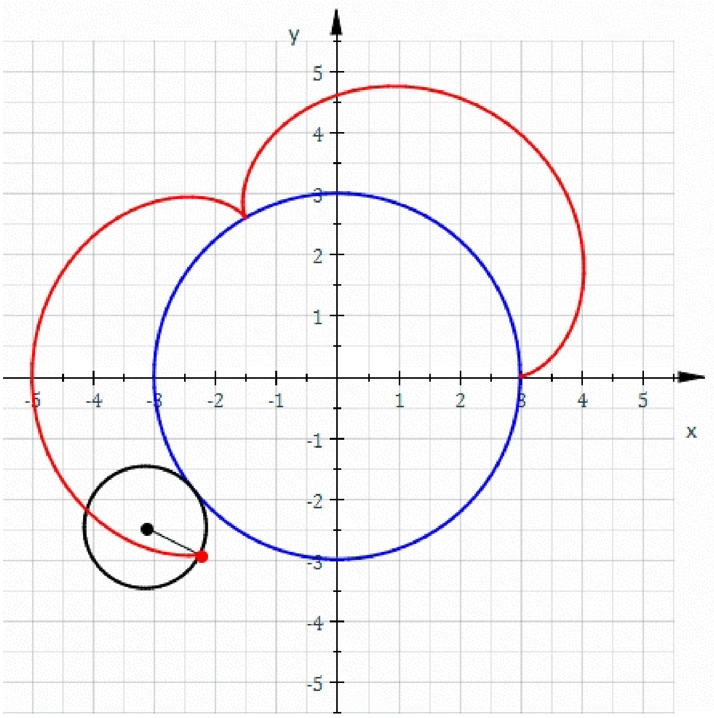


FIG. 8.166 – Chemin épicycloïdal (source : Wikipédia, auteur : Sam Derbyshire)

Comme nous le verrons dans la section Génie Mécanique page **??**, l'épicycloïde est utilisé pour construire des formes géométriques d'engrenages énergétiques efficaces !

Pour les besoins de la section de Génie Mécanique, nous devons déterminer l'équation paramétrique de l'épicycloïde. Pour cela, considérons la figure suivante :

En cours de traduction de l'anglais

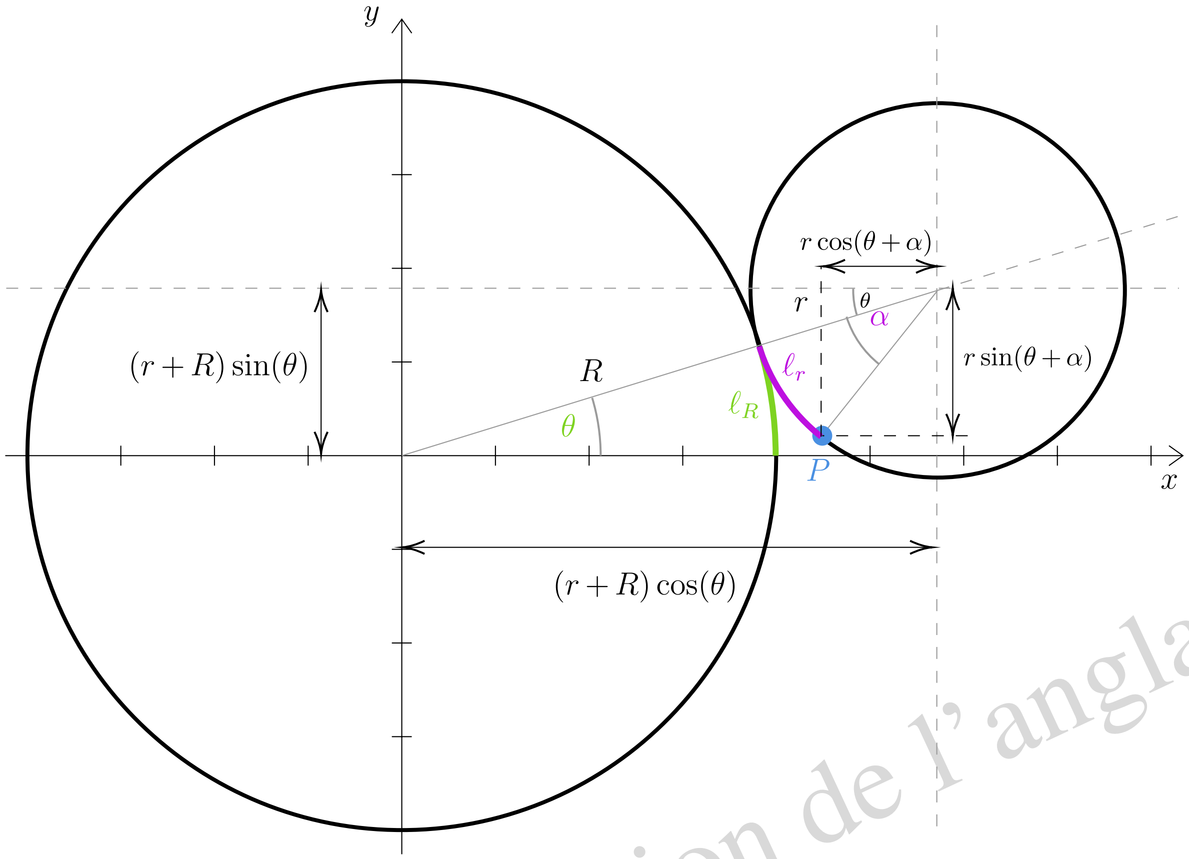


FIG. 8.167 – **Croquis de l'épicycloïde pour la démonstration (source : Wikipédia, Sam Derbyshire)**

En cours de traduction de l' anglais

Nous supposons que la position de P est ce que nous voulons résoudre, α est le radian du point tangentiel au point mobile P, et θ est le radian du point de départ au point tangentiel.

Comme il n'y a pas de glissement entre les deux cycles, alors nous avons que :

$$\ell_R = \ell_r \tag{8.5.207}$$

Par la définition du radian (qui est pour rappel le rapport de la longueur d'arc sur le rayon), alors nous avons que :

$$\ell_R = \theta R \qquad \ell_r = \alpha r \tag{8.5.208}$$

De ces deux conditions, nous obtenons l'identité :

$$\theta R = \alpha r \tag{8.5.209}$$

En réorganisant, nous obtenons la relation entre α et θ, qui est :

$$\alpha = \frac{R}{r}\theta \tag{8.5.210}$$

D'après la figure, nous voyons que la position du point P est clairement donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\theta - r\cos(\theta+\alpha) = (R+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \\ y &= (R+r)\sin\theta - r\sin(\theta+\alpha) = (R+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \end{aligned}} \tag{8.5.211}$$

8.5.2.6 Équation d'une Spirale

Une "spirale" est une courbe dans le plan ou dans l'espace, qui tourne autour d'un centre d'une manière particulière. C'est une forme parfois utile dans certains domaines industriels (robotique, horlogerie, conception de textes, etc.).

Nous pouvons construire une spirale à partir de deux mouvements d'un point : un mouvement uniforme dans une direction fixe et un mouvement circulaire à vitesse constante. Les deux mouvements commencent au même point. Cette construction est appelée la "spirale d'Archimède" (également connue sous le nom de "spirale arithmétique").

Nous obtenons la spirale d'Archimède par analogie avec les équations paramétriques du cercle. Rappelons que l'équation paramétrique d'un cercle est donnée par :

$$\begin{aligned} x &= R\cos(\theta) \\ y &= R\sin(\theta) \end{aligned} \tag{8.5.212}$$

Réécrivons-la comme suit :

$$\begin{aligned} x &= R\cos(t) \\ y &= R\sin(t) \end{aligned} \tag{8.5.213}$$

où a est une constante choisie.

Maintenant, pour la spirale d'Archimède, l'idée est de rendre R également proportionnel à t. Par conséquent, l'équation paramétrique est :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R(t)\cos(t) = at\cos(t) \\ y &= R(t)\sin(t) = at\sin(t) \end{aligned}} \tag{8.5.214}$$

Vous trouverez ci-dessous un exemple de spirale d'Archimède avec en coordonnée polaire $r = a\theta$:

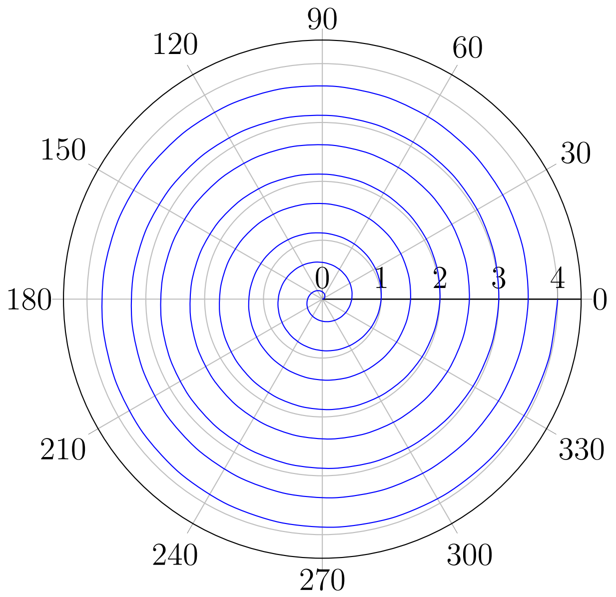


Fig. 8.168 – Spirale d'Archimède

En cours de traduction de l'anglais

Les distances entre les branches de la spirale sont les mêmes. Plus exactement : les distances des points d'intersection le long d'une ligne passant par l'origine sont les mêmes.

Il existe bien sûr de nombreuses autres spirales comme celle exponentielle illustrée ci-dessous :

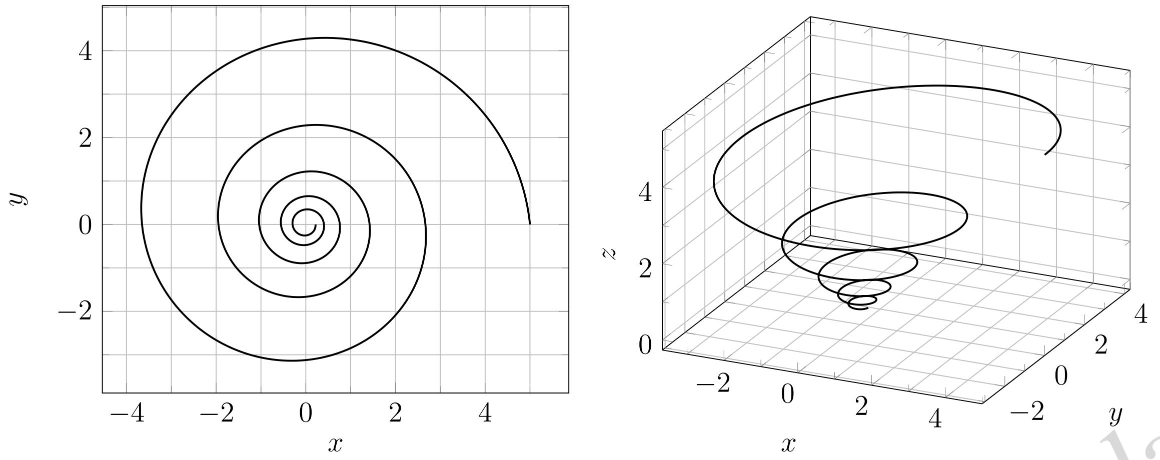


Fig. 8.169 – Spirale exponentielle en 2D et 3D du type $r_0 e^{bt}$

8.5.2.7 Équation d'une Hypocycloïde

En géométrie, une hypocycloïde est une courbe plane particulière engendrée par la trace d'un point fixe sur un petit cercle qui s'enroule à l'intérieur d'un cercle plus grand. Elle est comparable à la cycloïde ou à l'épicycloïde, mais au lieu que le cercle s'enroule le long d'une ligne, il s'enroule à l'intérieur d'un cercle.

En cours de traduction de l' anglais

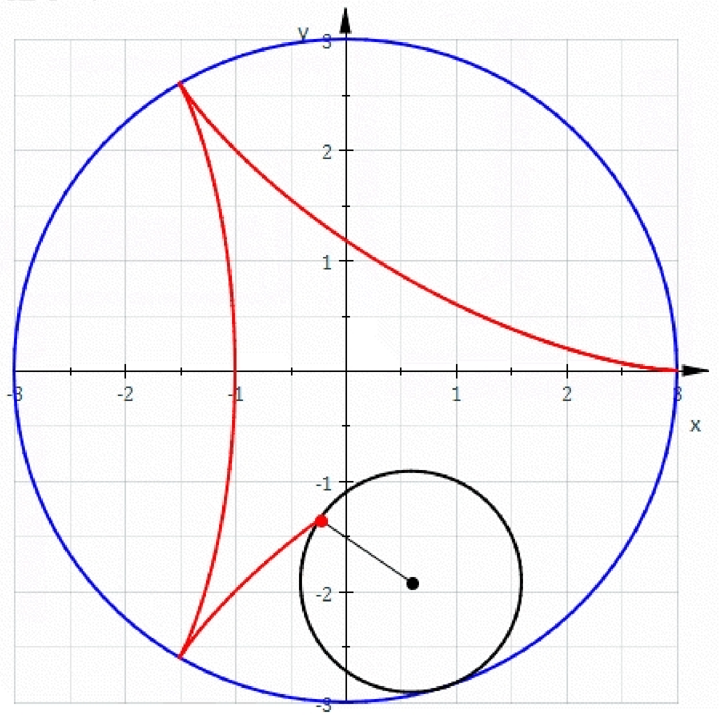
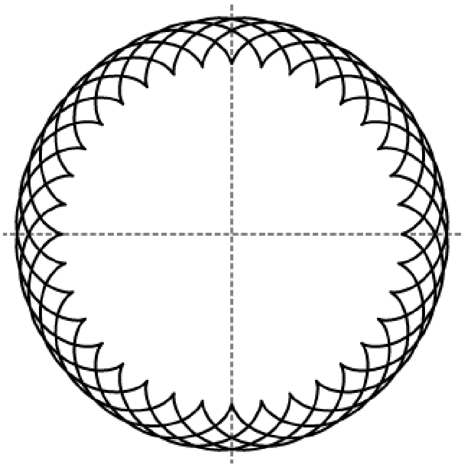


Fig. 8.170 – Chemin hypocycloïde (source : Wikipédia, Sam Derbyshire)

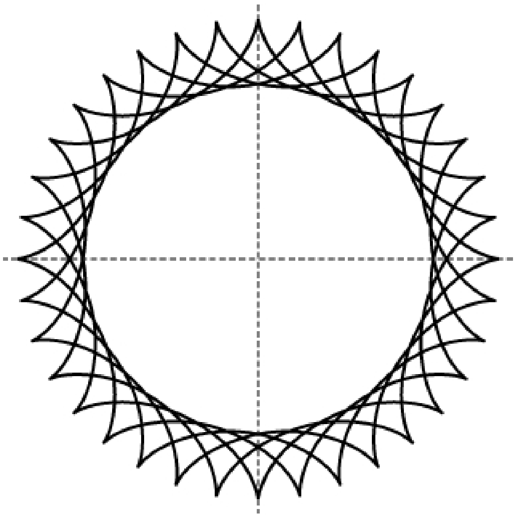
Lorsque nous connaissons l'équation paramétrique de l'épicycloïde, celle de l'hypocycloïde est immédiate :

$$
\begin{aligned}
x &= (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)\\
y &= (R-r)\sin\theta + r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)
\end{aligned}
\quad (8.5.215)
$$

Maintenant, pour la section de Génie Mécanique, il sera utile que le lecteur compare côte à côte un épicycloïde et un hypocycloïde :



(a) Épicycloïde (source : Wikipédia)



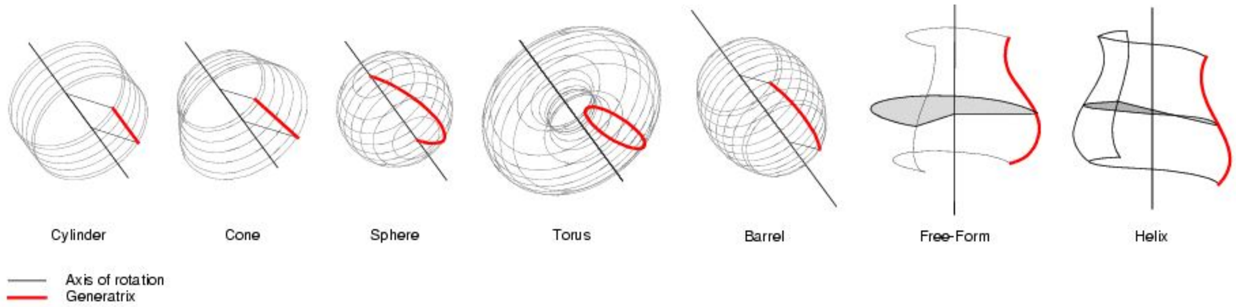
(b) Hypocycloïde

En cours de traduction anglais

8.5.2.8 Surface de révolution

Plus généralement, de nombreuses surfaces (et dont certaines que nous avons déjà vues comme la sphère, le tore et le cylindre) peuvent être décrites en faisant tourner une forme primaire de plus petite taille, puis par rotation.

Définition (#8.5.354) : Une "surface de révolution" est une surface obtenue par rotation d'une courbe plane (par exemple $z = f(x)$), nommée "générateur", autour de l'axe z (par exemple !). Nous passons donc d'un plan de $\mathbb{R}^2$ à une base dans $\mathbb{R}^3$, l'axe x engendre alors un plan qui est devenu le plan $y\text{O}z$.



Voyons sept cas célèbres (cône, sphère, ellipsoïde, cylindre, paraboloïde, hyperboloïde, tore) :

En cours de traduction de r...s

8.5.2.8.1 Cône

Considérons un cône circulaire de sommet O (origine) avec un cercle de centre $(0,0,h)$ (où h est un nombre réel positif correspondant à la hauteur du) et de rayon R :

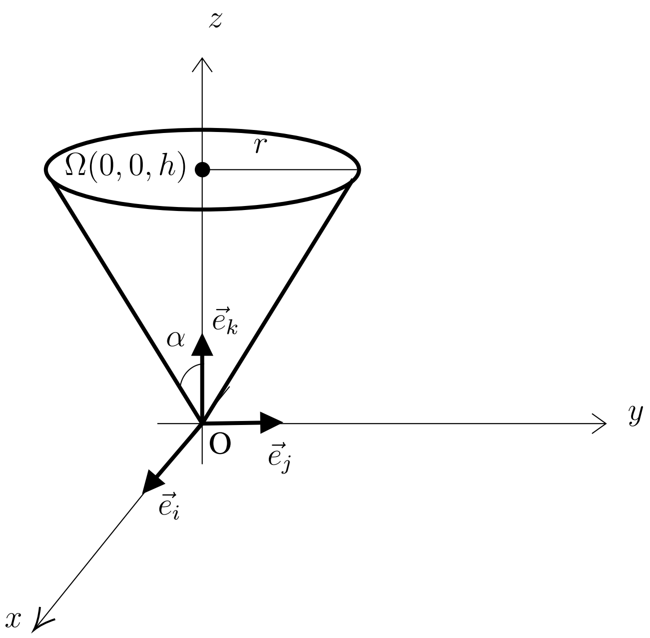


FIG. 8.172 – **Représentation d'un cône**

Une représentation paramétrique du cercle à la hauteur h est donnée comme nous l'avons déjà démontré précédemment par :

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(t) \\ y(t) = r\sin(t) \\ z(t) = h \end{cases} \tag{8.5.216}$$

où t appartient à l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

Par extension, la représentation paramétrique d'un cône est :

$$\begin{cases} x(t,k) = kr\cos(t) \\ y(t,k) = kr\sin(t) \\ z(t,k) = kh \end{cases} \tag{8.5.217}$$

ceci peut également être écrit sous forme vectorielle (plus traditionnel) :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t,k) \\ y(t,k) \\ z(t,k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kr\cos(t) \\ kr\sin(t) \\ kh \end{pmatrix}} \tag{8.5.218}$$

En cours de traduction de l' anglais

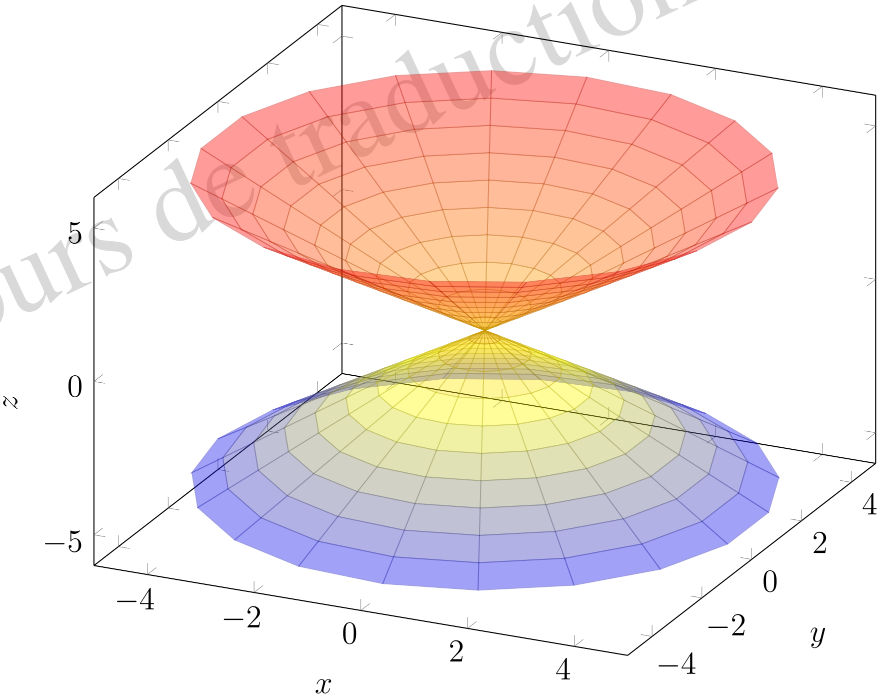


FIG. 8.173 – Cône haute définition réalisé avec LaTeX/Tikz

En d'autres termes, le cercle se propage linéairement dans toutes les directions.

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b :

```
>r:=1:h:=4:
>plot3d([k*r*cos(t),k*r*sin(t),k*h],k=0..10,t=0..2*Pi,
orientation=[50,60],style=PATCH,axes=NORMAL);
```

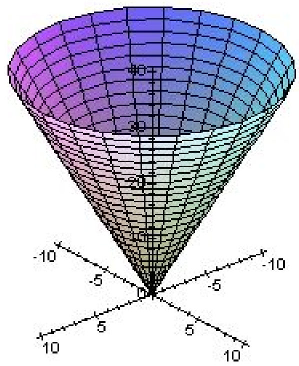


FIG. 8.174 – **Représentation paramétrique d'un cône dans Maple 4.00b**

Ceci suggère également l'équation cartésienne suivante de ce cône :

$$x^2+y^2=k^2r^2=\left(\frac{z}{h}\right)^2 r^2 \quad (8.5.219)$$

Comme nous avons $\tan(\alpha)=r/h$ nous pouvons écrire :

$$x^2+y^2=\left(\frac{z}{h}\right)^2 r^2=z^2\tan^2(\alpha)=0 \quad (8.5.220)$$

Donc :

$$\boxed{x^2+y^2-z^2\tan^2(\alpha)=0} \quad (8.5.221)$$

qui est l'équation cartésienne d'un cône dans l'espace que nous reverrons dans la section Relativité Restreinte dans notre étude des cônes de lumière.

En cours de traduction de

8.5.2.8.2 Sphère

Considérons la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Étant donnée la sphère $\mathcal{S}^2$ de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon r :

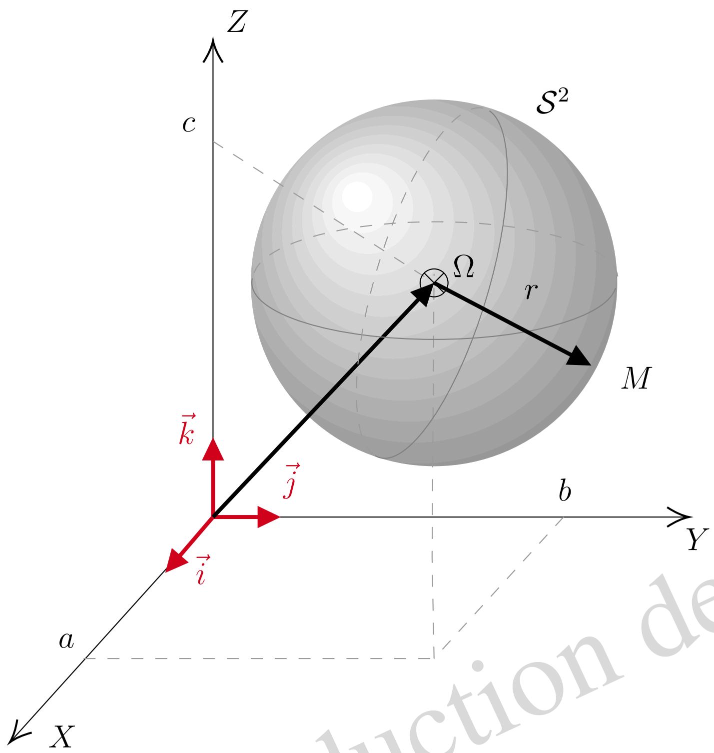


FIG. 8.175 – Représentation d'une sphère $\mathcal{S}^2$

En cours de traduction de l' anglais

$M(x, y, z)$ appartient à la sphère S^2 de rayon r si et seulement si :

$$\overline{\Omega M} = r \tag{8.5.222}$$

c'est-à-dire en appliquant le théorème de Pythagore :

$$\overline{\Omega M} = r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \tag{8.5.223}$$

D'où "l'équation cartésienne de la sphère" dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\boxed{r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2} \tag{8.5.224}$$

Il existe une autre façon de décrire la sphère en utilisant l'équation paramétrique. En effet, nous avons vu dans la section de Calcul Vectoriel que la transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques est donnée par les coordonnées curvilignes suivantes :

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi),\; y = r\sin(\theta)\sin(\phi),\; z = r\cos(\theta) \tag{8.5.225}$$

Nous avons donc bien (par un changement de variable ceci représente aussi une sphère non centrée à l'origine) :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2\sin^2(\theta)(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r^2\cos^2(\theta) = r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = r^2 \end{aligned} \tag{8.5.226}$$

Donc l'équation paramétrique de la sphère est bien :

$$\begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{8.5.227}$$

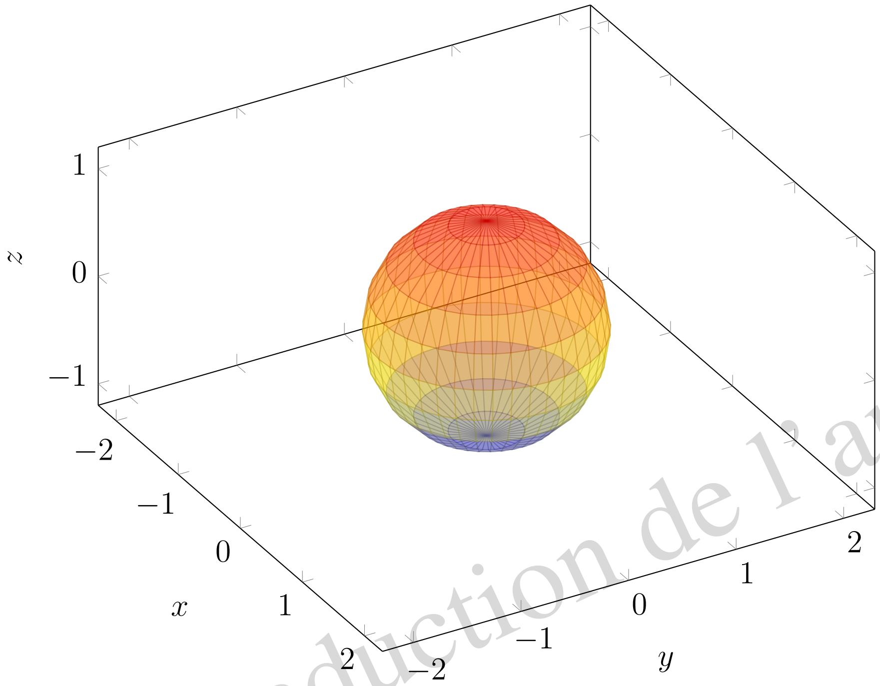


FIG. 8.176 – **Sphère haute définition réalisée avec LaTeX/Tikz**

Nous retombons donc sur l'équation cartésienne d'une sphère à constante de translation donnée.

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b pour une sphère de rayon unitaire :

```
>r:=1:h:=4:
>plot3d([sin(theta)*cos(phi),sin(theta)*sin(phi),cos(theta)],
theta=0..Pi,phi=-Pi..Pi,scaling=CONSTRAINED,orientation=[50,60],
style=PATCH,axes=NORMAL);
```

En cours de traduction de l'anglais

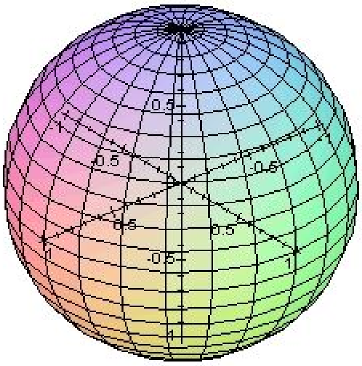


FIG. 8.177 – Représentation paramétrique d'une sphère dans Maple 4.00b

8.5.2.8.2.1 Grand cercle de la Sphère

Nous allons introduire ici une notion qui nous sera utile lorsque nous étudierons la géodésique d'une sphère dans la section de Mécanique Analytique.

Définition (#8.5.355) : Un "grand cercle", également appelé "orthodrome" ou "cercle riemannien", d'une sphère est l'intersection de la sphère et d'un plan qui passe par le point central de la sphère. Ce cas partiel d'un cercle d'une sphère est opposé à un "petit cercle", l'intersection de la sphère et d'un plan qui ne passe pas par le centre. Tout diamètre de tout grand cercle coïncide avec un diamètre de la sphère, et donc tous les grands cercles ont la même circonférence les uns que les autres, et ont le même centre que la sphère. Un grand cercle est le plus grand cercle qui peut être dessiné sur une sphère donnée. Chaque cercle dans l'espace euclidien à trois dimensions est un grand cercle d'exactement une sphère.

En cours de traduction de l'anglais

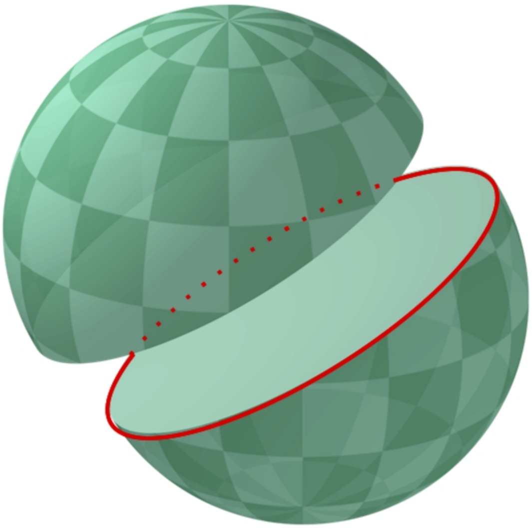


FIG. 8.178 – Un grand cercle divise la sphère en deux hémisphères égaux

Choisissons maintenant un vecteur normal unitaire à un plan passant par l'origine en utilisant

les angles d'Euler :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) \\ 0 \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \tag{8.5.228}$$

où pour notre rotation nous avons pour que la composante n_2 soit égale à 0 (comme il est toujours possible de le faire quel que soit le plan que nous choisissons qui passe par l'origine !).

Si nous choisissons une sphère de rayon $r = 1$ telle que son équation paramétrique s'écrive :

$$\vec{\mathcal{S}}^2 = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{8.5.229}$$

Et comme l'ensemble des points qui sont à l'intersection du plan et de la sphère sont par construction tels que :

$$\vec{\mathcal{S}}^2 \circ \vec{n} = 0 \tag{8.5.230}$$

Nous obtenons donc :

$$-\sin(\gamma)\sin(\theta)\cos(\phi) + 0\cdot\sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\gamma)\cos(\theta) = 0 \tag{8.5.231}$$

Après réorganisation :

$$\frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}\cos(\phi) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \tag{8.5.232}$$

Posons :

$$a = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} \tag{8.5.233}$$

et en utilisant la définition de la cotangente :

$$\boxed{a\cos(\phi) = \cot(\theta)} \tag{8.5.234}$$

Il s'agit donc de "l'équation d'un grand cercle".

8.5.2.8.2.2 Volume de la n-Sphère

Avant d'aborder le sujet, nous tenons à remercier le professeur Howard Haber qui nous a fourni le code source principal LaTeXdu texte ci-dessous qui nous sera utile dans les sections de Mécanique Statistique (en particulier pour trouver l'équation de Sackur-Tétrode) et de Relativité Générale !

Une hypersphère de dimension n de rayon R est constituée du lieu des points tels que la distance à l'origine est inférieure ou égale à R.

Un point dans un espace euclidien de dimension n est désigné par $(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$.

En cours de traduction de l'anglais

Sous forme d'équation, l'hypersphère correspond alors par définition à l'ensemble des points tels que :

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq R^2 \tag{8.5.235}$$

Pour calculer le volume de cette hypersphère, nous intégrons simplement l'élément de volume infinitésimal $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ sur la région de l'espace de dimension n indiquée par 8.5.235. Nous souhaitons calculer ce volume $V_n(R)$. Explicitement :

$$V_n(R)=\int\ldots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leq R^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=C_nR^n \tag{8.5.236}$$

Le facteur R^n est une conséquence de l'analyse dimensionnelle.

L'aire de la surface de l'hypersphère de dimension n définie par sera notée dans ce qui suit par $S_{n-1}(R)$.

L'aire de la surface de l'hypersphère de dimension n sera notée dans ce qui suit par $S_{n-1}(R)$.

La surface de l'hypersphère correspond au lieu des points tels que :

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=R^2 \tag{8.5.237}$$

Nous pouvons construire le volume $V_n(R)$ en ajoutant des coques sphériques infiniment fines de rayon $0\leq r\leq R$. Sous forme d'équation, cela se lit :

$$V_n(R)=\int\limits_0^R S_{n-1}(r)\mathrm{d}r \tag{8.5.238}$$

Et comme nous le savons :

$$S_{n-1}(R)=\frac{\mathrm{d}V_n(R)}{\mathrm{d}R}=nC_nR^{n-1} \tag{8.5.239}$$

où nous avons utilisé 8.5.236. Ainsi, la seule tâche restante est de calculer C_n.

Afin d'obtenir une meilleure intuition sur la signification de C_n, assimilons les deux expressions que nous avons pour $V_n(R)$, à savoir 8.5.236 et 8.5.237.

Dans ce dernier cas, $S_{n-1}(r)$ est déterminé par 8.5.239. Ainsi :

$$V_n(R)=\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leq R^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=nC_n\int\limits_0^R r^{n-1}\,\mathrm{d}r \tag{8.5.240}$$

Cette dernière relation est simplement l'évaluation d'une intégrale de dimension n soit en coordonnées rectangulaires soit en coordonnées hypersphériques. En dimension n, nous écririons :

$$\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Omega_{n-1} \tag{8.5.241}$$

où $\mathrm{d}\Omega_{n-1}$ contient tous les facteurs angulaires. Par exemple, pour $n=2$, $\mathrm{d}\Omega_1=\mathrm{d}\theta$; pour $n=3$, $\mathrm{d}\Omega_2=\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$, etc.

En cours de traduction de l'anglais

Nous pourrions définir explicitement les $n-1$ variables angulaires en n dimensions.

Cependant, si nous intégrons sur une fonction à symétrie sphérique, alors nous intégrerons simplement sur $\mathrm{d}\Omega_{n-1}$. En comparant 8.5.240 et 8.5.241, nous voyons que :

$$\int\cdots\int \mathrm{d}\Omega_{n-1} = nC_n \tag{8.5.242}$$

Nous allons présenter une astuce permettant de calculer C_n sans jamais paramétrer explicitement les angles du repère hypersphérique. Pour cela, considérons la fonction :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} = e^{-r^2} \tag{8.5.243}$$

Si nous intégrons cette fonction sur l'espace complet de dimension n dans les coordonnées rectangulaires et hypersphériques, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_0^{+\infty} r^{n-1}\,\mathrm{d}r\int \mathrm{d}\Omega_{n-1}e^{-r^2} \tag{8.5.244}$$

Comme l'intégrande du côté droit ne dépend que de r (il n'y a pas de dépendance angulaire), nous pouvons immédiatement effectuer l'intégrale sur $\mathrm{d}\Omega_{n-1}$. En utilisant 8.5.242 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2}\mathrm{d}x_2\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2}\mathrm{d}x_n = nC_n\int_0^{+\infty} r^{n-1}\,e^{-r^2}\mathrm{d}r \tag{8.5.245}$$

Toutes les intégrales ci-dessus peuvent être évaluées exactement en utilisant l'intégrale de Gauss (voir la section Statistiques page 683) et l'intégrale d'Euler-Gamma (voir la section Calcul Différentiel et Intégral page 1552) :

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\\ \int_0^{+\infty} r^{n-1}\,e^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\end{gathered} \tag{8.5.246}$$

En insérant ces résultats dans 8.5.245, nous obtenons :

$$\pi^{n/2} = C_n\,\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = C_n\,\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) \tag{8.5.247}$$

où nous avons utilisé la propriété de la fonction Gamma, $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$, à l'étape finale. En résolvant pour C_n, nous obtenons :

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} \tag{8.5.248}$$

Bien que nous ayons choisi une fonction particulière $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour obtenir le résultat final pour C_n, il est clair que la valeur de C_n est indépendante de cette fonction. Après tout,

En cours de traduction de l'anglais

l'équation de définition de C_n comme dans 8.5.242 ne fait référence à aucune fonction. Pour vérifier, évaluons $n\,C_n$ pour $n=2$ et $n=3$:

$$\begin{aligned} 2\,C_2 &= \frac{2\pi}{\Gamma(2)} = 2\pi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ 3\,C_3 &= \frac{3\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)} = 4\pi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{8.5.249}$$

Dans le dernier calcul, nous avons utilisé $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. En effet, nous avons produit les valeurs correctes pour l'intégration sur les facteurs angulaires en deux et trois dimensions.

Nous sommes enfin prêts à calculer le volume et la surface d'une hypersphère de dimension n. En insérant 8.5.248 dans 8.5.236 et 8.5.239, nous trouvons :

$$\boxed{\begin{aligned} V_n(R) &= \frac{\pi^{n/2}\,R^n}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)} \\ S_{n-1}(R) &= \frac{n\pi^{n/2}\,R^{n-1}}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)} \end{aligned}} \tag{8.5.250}$$

L'expression de $S_n(R)$ peut être légèrement simplifiée en écrivant $\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{n}{2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$. Cela donne :

$$\boxed{S_{n-1}(R) = \frac{2\pi^{n/2}\,R^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}} \tag{8.5.251}$$

Vous devez vérifier que vous obtenez les résultats attendus pour $n=2$ et $n=3$. Par exemple, $V_3(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$ et $S_2(R)=4\pi R^2$.

Enfin, il est amusant de constater que $\lim_{n\to+\infty} V_n(R)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(R)=0$.

Pour comprendre ce comportement particulier, considérons un hypercube dans un espace de dimension n mesurant une unité de côté. Le volume total de cet hypercube est de 1. Nous pouvons placer une hypersphère de diamètre 1 (ou de rayon $\frac{1}{2}$) à l'intérieur de l'hypercube de telle sorte que la surface de l'hypersphère touche juste chacune des parois de l'hypercube. Alors $1-V_n(\frac{1}{2})$ est le volume à l'intérieur du cube mais à l'extérieur de l'hypersphère.

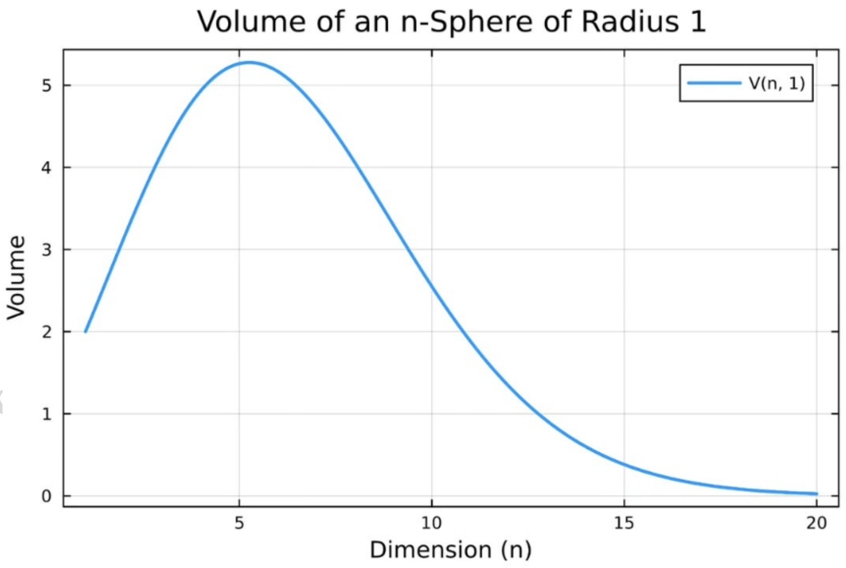
En particulier, lorsque n devient grand, $1-V_n(\frac{1}{2})$ s'approche rapidement de 1, ce qui est cohérent avec l'affirmation que $\lim_{n\to+\infty} V_n(R)=0$. Cela signifie simplement qu'à mesure que le nombre de dimensions devient de plus en plus grand, la quantité d'espace à l'extérieur de l'hypersphère (mais à l'intérieur du cube) devient relativement de plus en plus importante. Cela se produit déjà lorsque vous passez de 2 à 3 dimensions. Vous pouvez donc vérifier votre intuition en inscrivant un cercle dans un carré unité et une sphère dans un cube unité et en calculant le volume total en trois dimensions (aire en deux dimensions) à l'extérieur de la sphère (cercle)

En cours de traduction de l' anglais

mais à l'intérieur du cube (carré). Si vous prenez le rapport des volumes (aires) de la sphère (cercle) à celui du cube (carré), ce rapport *diminue* en fait lorsque vous passez de 2 dimensions à 3 dimensions !

Ceci montre que la dimension entière avec le coefficient entier maximal est $n = 5$.

Dimension	Volume	Volume à $r = 1$
2	πr^2	3.14159
3	$4/3\pi r^3$	4.18879
4	$1/2\pi^2 r^4$	4.93480
5	$8/15\pi^2 r^5$	5.26379
6	$1/6\pi^3 r^6$	5.16771
7	$16/105\pi^3 r^7$	4.72477
8	$1/24\pi^4 r^8$	4.05871
9	$32/945\pi^4 r^9$	3.29851
10	$1/120\pi^5 r^{10}$	2.55016



En cours anglais

8.5.2.8.3 Ellipsoïde (sphéroïde)

Nous avons vu dans notre étude de la conique que l'équation cartésienne d'une ellipse dans le plan était donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{8.5.252}$$

avec a, b les deux axes de l'ellipse (petit et grand).

Ainsi, sans preuve rigoureuse, nous pouvons vérifier à la main ou à l'aide d'ordinateurs que l'équation cartésienne :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1} \tag{8.5.253}$$

est un ellipsoïde :

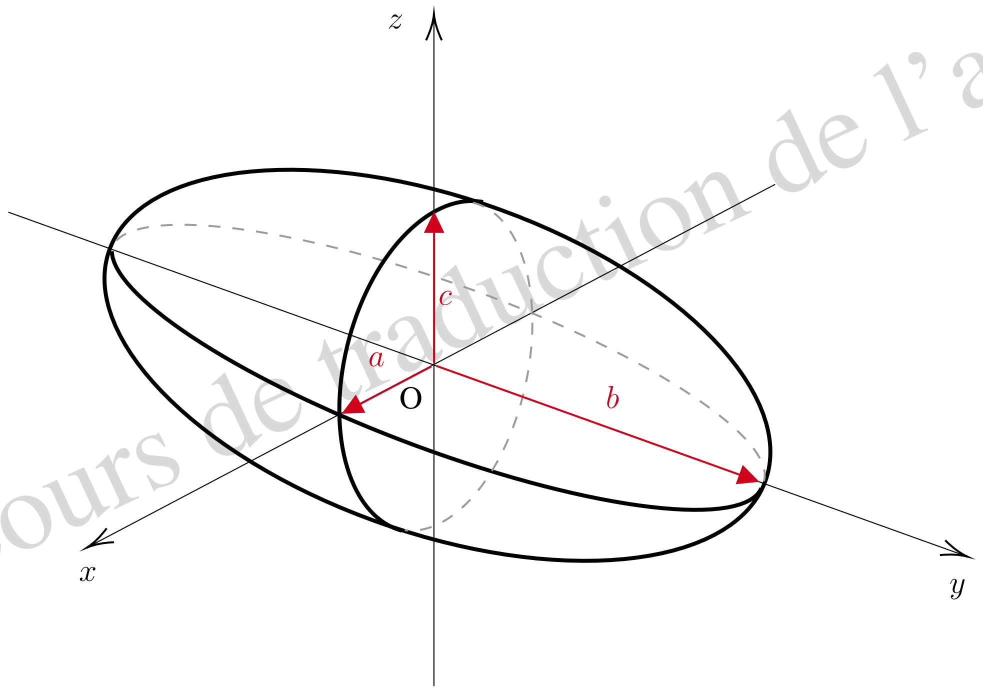


FIG. 8.179 – Représentation d'un ellipsoïde

Cependant, il existe une autre façon de décrire un ellipsoïde en utilisant également des coordonnées curvilignes :

$$x=a\cos(\theta)\cos(\phi), y=b\cos(\theta)\sin(\phi), z=c\sin(\theta) \tag{8.5.254}$$

Ainsi, l'équation paramétrique d'un ellipsoïde sera :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos(\theta)\cos(\phi) \\ b\cos(\theta)\sin(\phi) \\ c\sin(\theta) \end{pmatrix}} \tag{8.5.255}$$

En cours de traduction de l' anglais

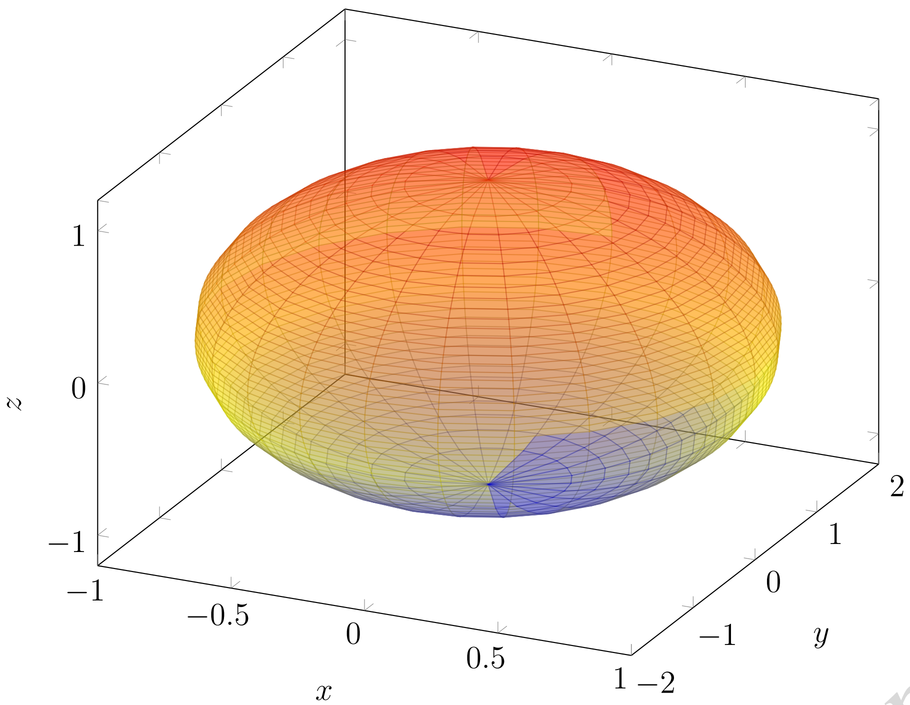


FIG. 8.180 – Ellipsoïde haute définition réalisé avec LaTeX/Tikz

En cours de traduction de l'anglais

Nous voyons qu'il s'agit simplement de l'équation paramétrique d'une sphère mais avec des rayons différents selon les axes de la base choisie.

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b :

```
>a:=100:b:=2:c:=20:
>plot3d([a*cos(theta)*cos(lambda),b*cos(theta)*sin(lambda),
c*sin(theta)],lambda=0..Pi,theta=-Pi..Pi,orientation=[50,60],
style=PATCH,axes=NORMAL);
```

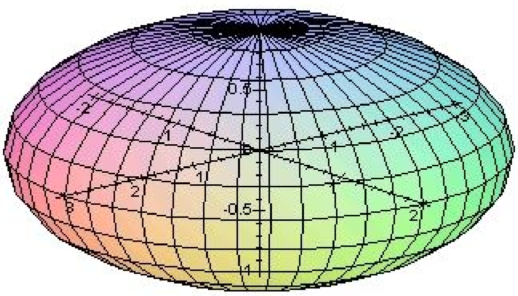


FIG. 8.181 – Représentation paramétrique d'un ellipsoïde dans Maple 4.00b

Nous avons donc :

$$x^2 = a^2\cos^2(\theta)\cos^2(\phi),\, y^2 = b^2\cos^2(\theta)\sin^2(\phi),\, z^2 = c^2\sin^2(\theta) \quad (8.5.256)$$

ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=\cos^2(\theta)\cos^2(\phi)+\cos^2(\theta)\sin^2(\phi)+\sin^2(\theta)=\cos^2(\theta)(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi))+\sin^2(\theta)\\&=\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1\end{aligned} \quad (8.5.257)$$

Enfin :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (8.5.258)$$

En astronomie (voir section Astronomie page ??) l'ellipsoïde est principalement nommée "sphéroïde aplati".

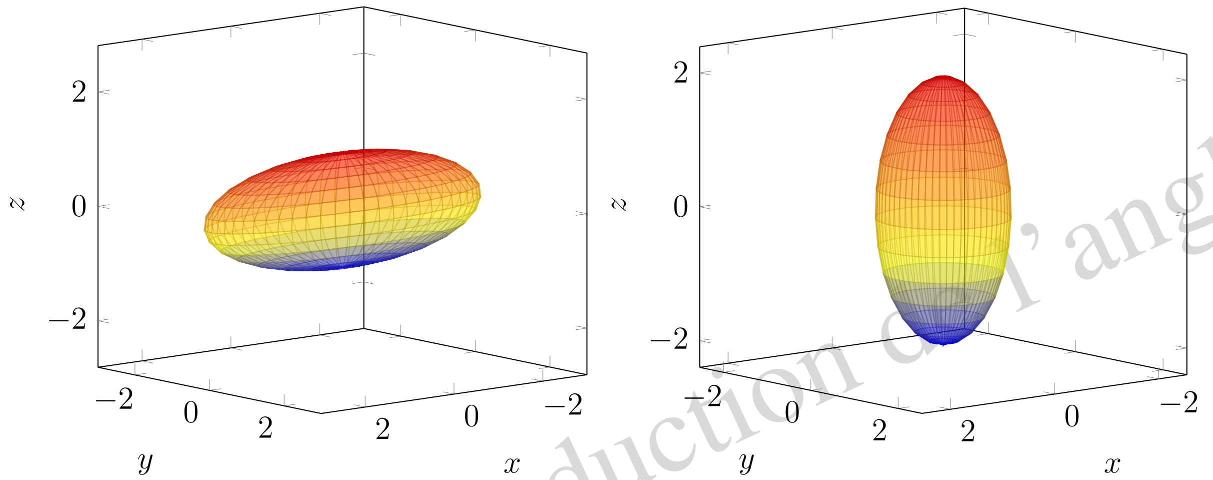


FIG. 8.182 – **Sphéroïde oblate (à gauche), sphéroïde prolate (à droite)**

En cours de traduction de l'anglais

et nous avons techniquement un sphéroïde oblate lorsque $c<a$ et un sphéroïde prolate lorsque $c>a$. Évidemment, le cas $a=c$ se réduit à une sphère.

Remarque

En raison des effets combinés de la gravité et de la rotation, la forme de la Terre n'est pas tout à fait sphérique, mais légèrement aplatie dans la direction de son axe de rotation. Pour cette raison, en cartographie, la Terre est souvent représentée par un sphéroïde aplati plutôt que par une sphère. Le modèle actuel du Système Géodésique Mondial utilise un sphéroïde dont le rayon est de $6,378.137$ [km] à l'équateur et de $6,356.752$ [km] aux pôles.

Le rapport hauteur/largeur d'un sphéroïde/ellipse oblate, $b:a$, est le rapport des longueurs polaires et équatoriales, tandis que l'aplatissement f, est le rapport de la différence de longueur équatoriale-polaire à la longueur équatoriale :

$$f=\frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a} \quad (8.5.259)$$

8.5.2.8.4 Cylindre

Il va sans dire que l'équation paramétrique d'un cylindre de rayon r est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \qquad (8.5.260)$$

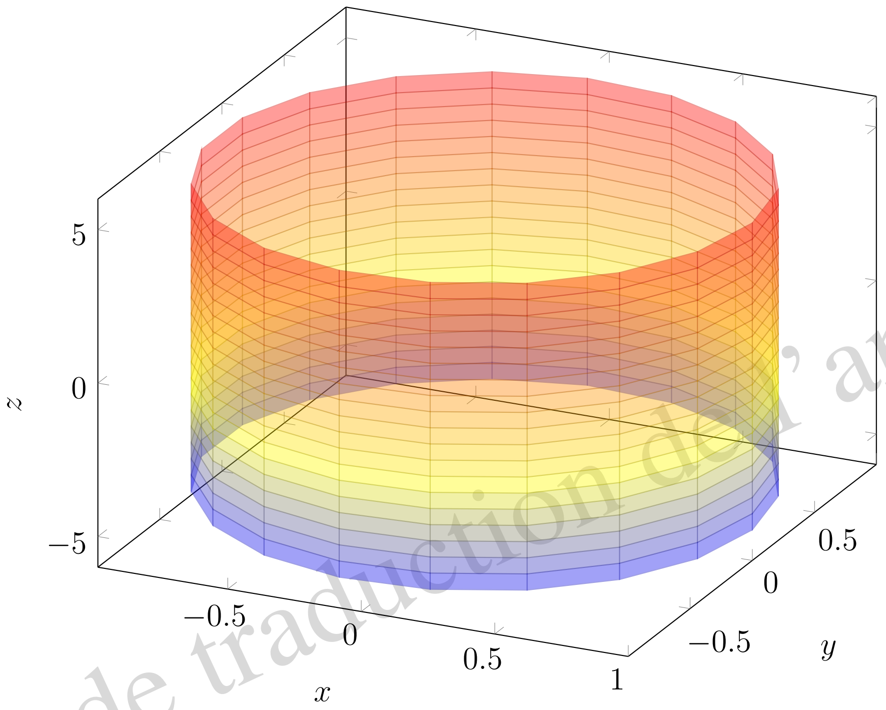


FIG. 8.183 – Cylindre haute définition réalisé avec LaTeX/Tikz

En cours de traduction de l'anglais

Nous voyons bien que les composantes x, y satisfont l'équation cartésienne d'un cercle pour tout z puisque :

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (8.5.261)$$

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b un cylindre de rayon $r = 1$:

```
>plot3d([cos(phi),sin(phi),z],phi=-Pi..Pi,z=0..2,orientation=[50,60],
style=PATCH,axes=NORMAL);
```

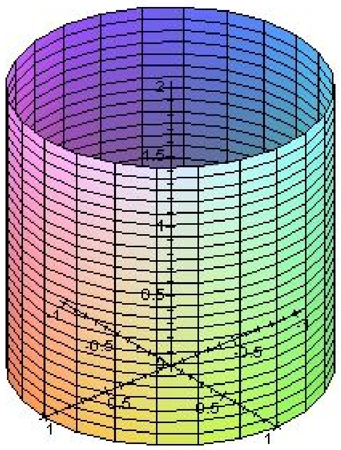


FIG. 8.184 – **Représentation paramétrique d'un cylindre dans Maple 4.00b**

Il est évident que l'équation paramétrique d'un cylindre à base elliptique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\phi) \\ b\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \quad (8.5.262)$$

qui satisfait également l'équation paramétrique d'une ellipse dans le plan :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.5.263)$$

En cours de traduction ... anglais

8.5.2.8.5 Paraboloïde

Étant donné l'équation de la parabole autour de l'axe z :

$$z=\frac{x^2}{2p} \tag{8.5.264}$$

avec pour rappel :

$$p=eh \tag{8.5.265}$$

Nous avons évidemment (en coupant le paraboloïde par un plan horizontal qui donne donc un cercle de rayon r) la relation :

$$z=\frac{r^2}{2p} \tag{8.5.266}$$

nommée "équation du cylindre". Mais nous avons aussi en appliquant le théorème de Pythagore dans le cercle ci-dessus :

$$r^2=x^2+y^2 \tag{8.5.267}$$

Ainsi :

$$x^2+y^2=2pz \tag{8.5.268}$$

Nous obtenons ainsi "l'équation cartésienne du paraboloïde (de révolution)" :

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}x^2+\frac{1}{p}y^2\right) \tag{8.5.269}$$

Nous construisons l'équation paramétrique du paraboloïde exactement de la même manière que pour le cône, à la différence que l'évolution selon l'axe z ne sera pas linéaire par rapport à un paramètre k mais au carré de ce dernier. Nous avons donc :

$$\begin{pmatrix} x(t,k) \\ y(t,k) \\ z(k) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kr\cos(t) \\ kr\sin(t) \\ kh^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k\dfrac{1}{2p}\cos(t) \\ k\dfrac{1}{2p}\sin(t) \\ kh^2 \end{pmatrix} \tag{8.5.270}$$

En cours de traduction de l' anglais

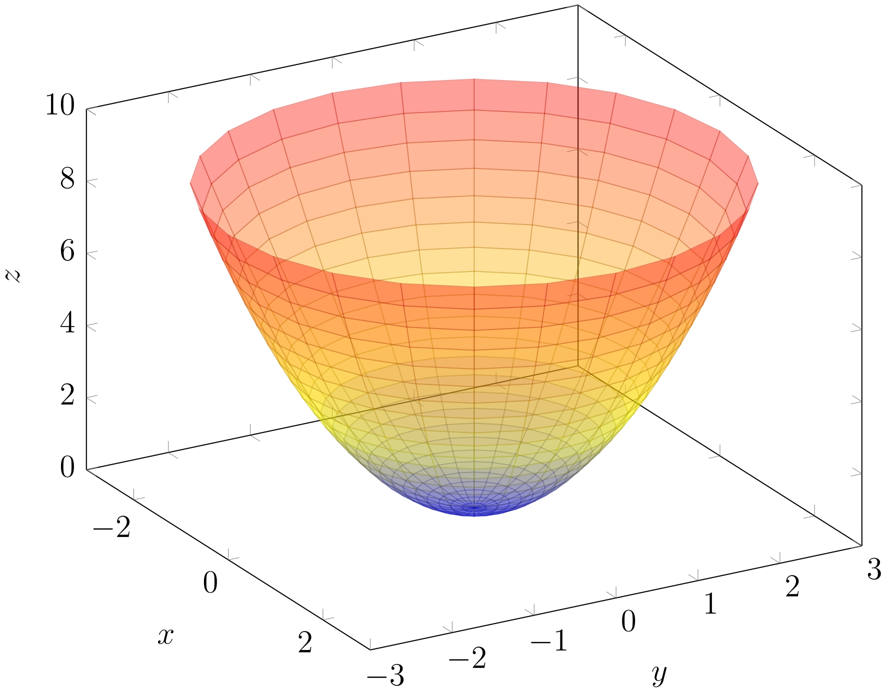


FIG. 8.185 – **Paraboloïde haute définition réalisé avec LaTeX/Tikz**

de l' anglais

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b un paraboloïde de paramètres $h=1, p=1$:

```
>p:=1:h:=1:
>plot3d([k*1/(2*p)*cos(t),k*1/(2*p)*sin(t),k^2*h],k=0..10,
t=0..2*Pi,orientation=[50,60],style=PATCH,axes=NORMAL);
```

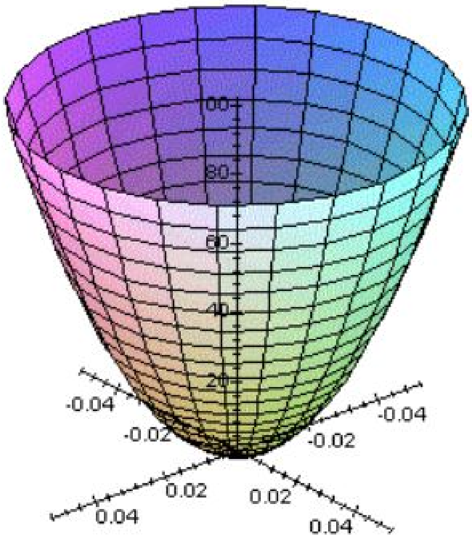


FIG. 8.186 – **Représentation paramétrique d'un paraboloïde dans Maple 4.00b**

8.5.2.8.6 Hyperboloïde

Étant donné la fonction linéaire :

$$z = x \tag{8.5.271}$$

que nous tournons autour de l'axe z. Comme la droite passe par l'origine, la révolution autour de l'axe z est semblable à celle de deux cônes se faisant face avec leur sommet à l'origine O. Par conséquent :

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{8.5.272}$$

ce qui nous donne évidemment :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{8.5.273}$$

Définition (#8.5.356) : Toute surface engendrée par une droite est une "surface réglée". Plus explicitement, une surface S est réglée si par tout point de S passe une droite qui se trouve sur S. Une surface réglée S est une surface courbe qui peut être engendrée par le mouvement continu d'une droite dans l'espace le long d'une courbe spatiale appelée "directrice".

Prenons un exemple important (forme de cheminée centrale nucléaire, engrenages, etc.) qui est l'hyperboloïde à une seule nappe d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8.5.274}$$

Si nous posons $a = b = c = 1$, nous avons donc (ligne tournée autour de l'axe z mais ne passant pas par l'origine O) :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - z^2 = 1 - y^2 \tag{8.5.275}$$

qui peut aussi s'écrire comme le produit de l'équation de deux droites telles que :

$$(x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y) \tag{8.5.276}$$

En cours de traduction de l'anglais

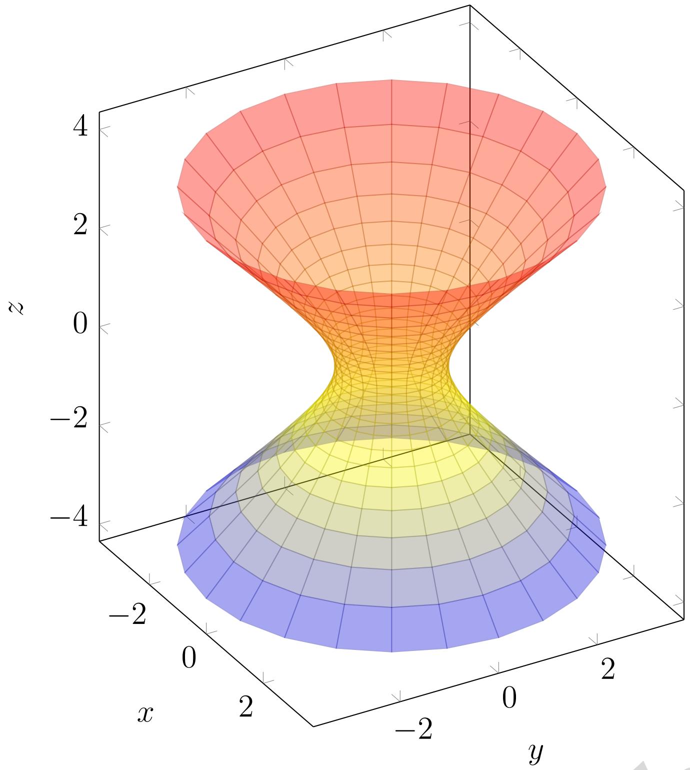


FIG. 8.187 – Hyperboloïde haute définition réalisé avec LaTeX/Tikz

En cours de traduction de l'anglais

Que nous pouvons également réécrire avec $k \in \mathbb{R}$:

$$(x-z)k(x+z) = k(1-y)(1+y) \tag{8.5.277}$$

par identification :

$$\text{D1} : x - z = k(1-y) \tag{8.5.278}$$
$$\text{D2} : 1 + y = k(x+z) \tag{8.5.279}$$

Ce n'est pas anodin mais ces deux lignes appartiennent à la même surface et tout point appartenant à l'une de ces deux lignes y est contenu. Les figures ci-dessous montrent bien ce fait, tout point appartient à ces deux lignes :

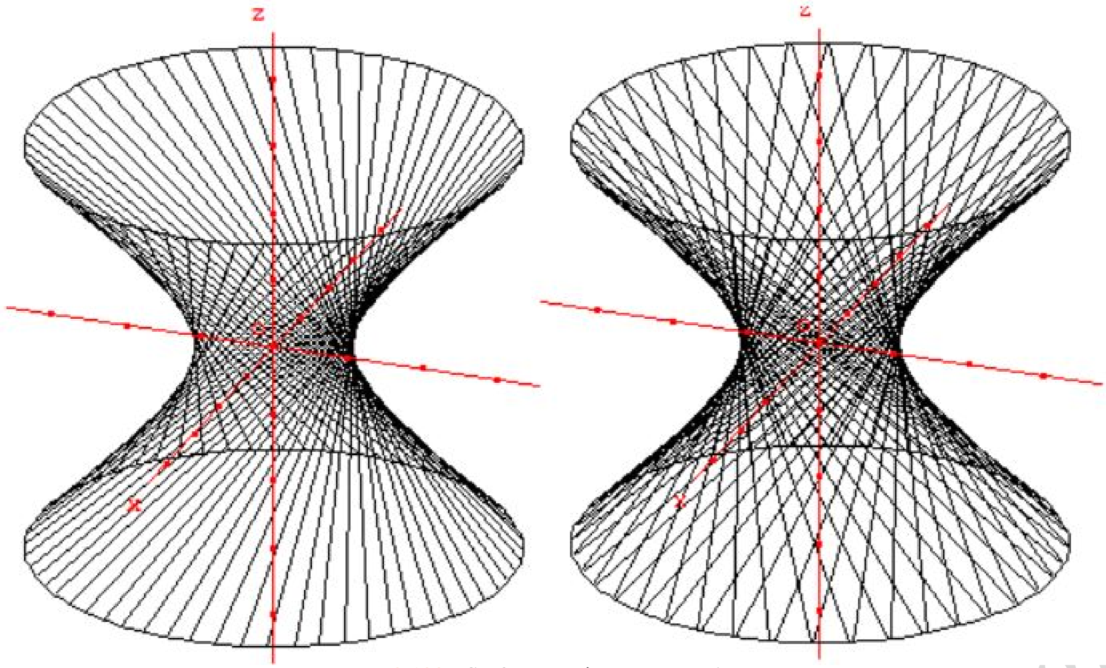


FIG. 8.188 – **Surface des règles hyperboliques**

Nous pourrions également décrire cela par des cercles tels que (c'est la manière traditionnelle sur les ordinateurs) :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 + z^2) = r^2 \quad (8.5.280)$$

En cours de traduction de l' anglais

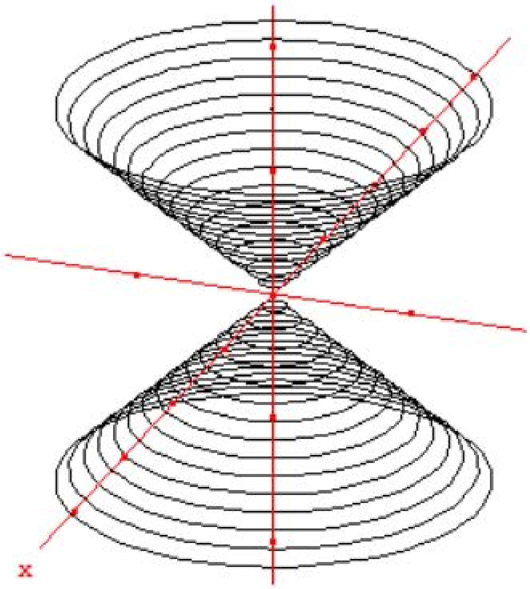


FIG. 8.189 – **Surface des cercles hyperboliques**

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b nous avons pour hyperboloïde de paramètres $a = 2, b = 2, c = 3$:

```
>with(plots):
>a:=2,b:=2,c:=3:
>plot3d(>implicitplot3d(x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2-1,x=-4..4,y=-4..4,
z=-4..4,orientation=[50,60],style=PATCH,axes=NORMAL);
```

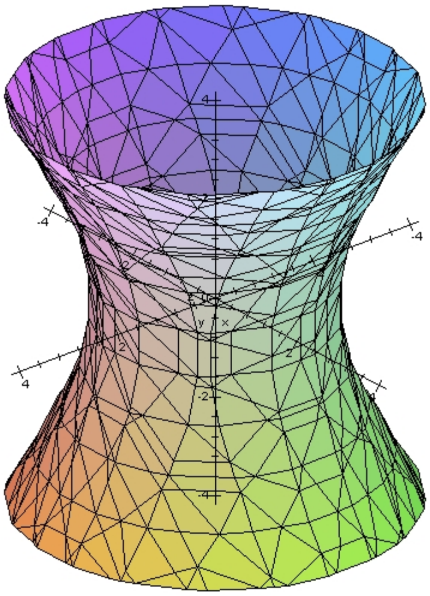


FIG. 8.190 – **Représentation paramétrique d'un hyperboloïde dans Maple 4.00b**

Voici également une figure très intéressante qui met en évidence la différence entre un hyperboloïde à une feuille et un hyperboloïde à deux feuilles :

En cours de ... lais

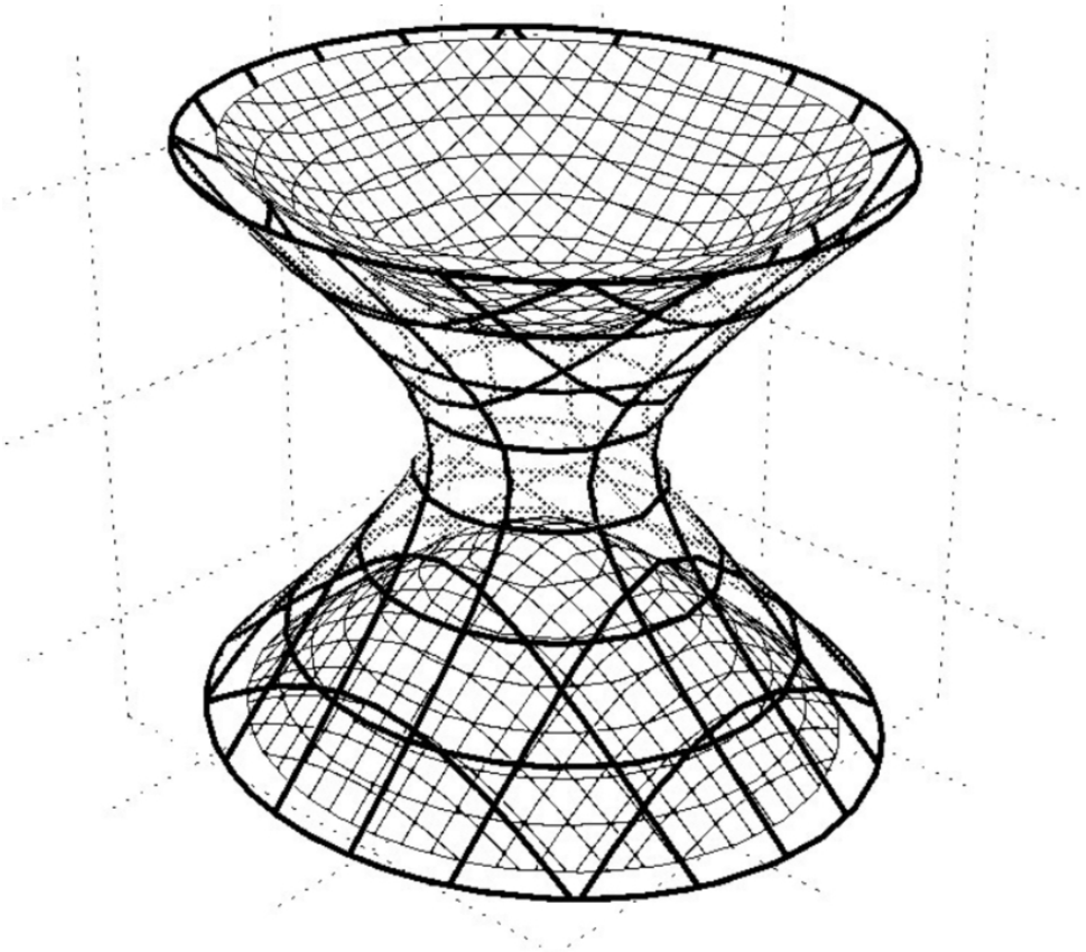


FIG. 8.191 – **Deux hyperboloïdes (d'une feuille et de deux feuilles) qui sont asymptotiques à un cône elliptique identique**

En cours de traduction en français

Il existe de nombreuses autres paramétrisations de l'hyperboloïde et il n'existe donc pas de choses comme LA paramétrisation.

Nous avons $x^2+y^2+1=z^2$. Si nous écrivons $x^2+y^2=r^2$ (nous pouvons donc prendre $x=r\cos(v)$, $y=r\sin(v)$), alors $r^2+1=z^2$. Maintenant, puisque $\cosh^2(u)-\sinh^2(u)=1$, nous pourrions prendre $z=\cosh(u)$, $r=\sinh(u)$, et donc :

$$\begin{aligned}x&=\sinh(u)\cos(v)\\y&=\sinh(u)\sin(v)\\z&=\cosh(u)\end{aligned}\tag{8.5.281}$$

Cependant, ce n'est pas une bonne paramétrisation à $u=0$ (correspondant au point unique $(x,y,z)=(0,0,1)$).

Essayons maintenant une autre méthode. Écrivons l'équation comme $t^2-y^2=1$ où $t^2=z^2-x^2$. Nous pouvons prendre $y=\sinh(v)$ (notez que cela s'étend sur $\mathbb{R}$ comme le fait v), puis $t^2=\cosh^2(v)$. Si nous choisissons le t positif (et nous le pouvons), nous avons $t=\cosh(v)$. Maintenant $(z/t)^2-(x/t)^2=1$. Pour la feuille avec $z>0$ nous pouvons prendre $z/t=\cosh(u)$ et $x/t=\sinh(u)$. Comme u s'étend sur $\mathbb{R}$, nous obtenons toutes les paires (x,z) possibles avec

$z > 0$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} x &= \sinh(u)\cosh(v) \\ y &= \sinh(v) \\ z &= \cosh(u)\cosh(v) \end{aligned} \tag{8.5.282}$$

Cette paramétrisation est meilleure car elle mappe $\mathbb{R}^2$ un à un sur une seule feuille.

Nous aimerions partager maintenant un résumé très intéressant (instructif) des surfaces coniques les plus connues que nous avons étudiées jusqu'à présent et fournies par OpenStax (nous le referons un jour en français...) :

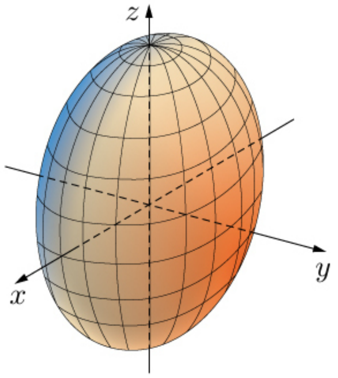
Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traces:

- In plane $z = p$: an ellipse
- In plane $y = q$: an ellipse
- In plane $x = r$: an ellipse

If $a = b = c$ then this surface is sphere.



Hyperboloid of One Sheet

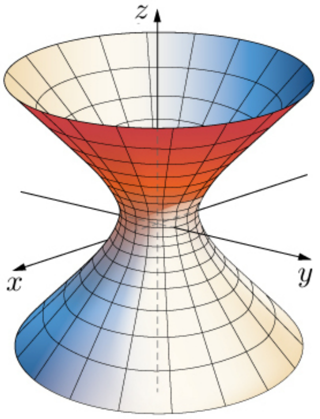
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traces:

- In plane $z = p$: an ellipse
- In plane $y = q$: a hyperbola
- In plane $x = r$: a hyperbola

In the equation for this surface, two of the variables have positive coefficients and one has negative coefficient.

The axis of the surface corresponds to the variable with the negative coefficient.



Hyperboloid of Two Sheets

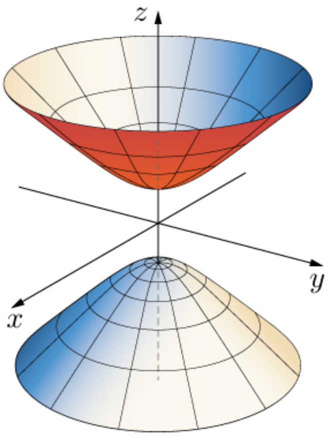
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traces:

- In plane $z = p$: an ellipse or the empty set (no trace)
- In plane $y = q$: a hyperbola
- In plane $x = r$: a hyperbola

In the equation for this surface, two of the variables have negative coefficients and one has positive coefficient.

The axis of the surface corresponds to the variable with a positive coefficient. The surface does not intersect the coordinate plane perpendicular to the axis.



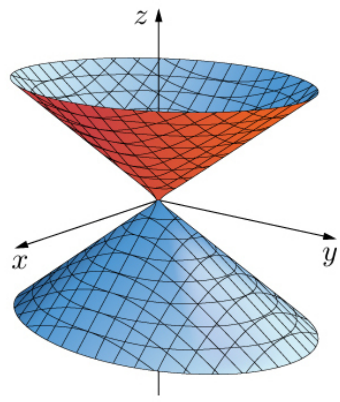
Elliptic Cone

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Traces:

- In plane $z = p$: an ellipse
- In plane $y = q$: a hyperbola
- In plane $x = r$: a hyperbola
- In the xy-plane: a pair of lines that intersect at the origin
- In the yz-plane: a paire of lines that intersect at the origin

The axis of the surface corresponds to the variable with a negative coefficient. The traces in the coordinate planes parallel to the axis are intersecting lines.



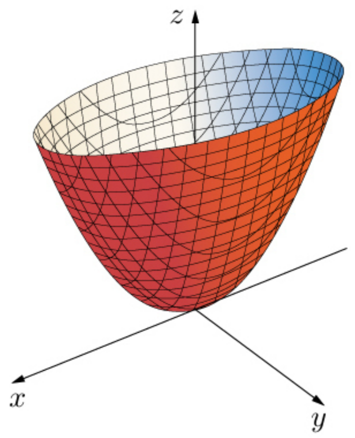
Elliptic Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Traces:

- In plane $z = p$: an ellipse
- In plane $y = q$: a parabola
- In plane $x = r$: a parabola

The axis of the surface corresponds to the linear variable.



Hyperbolic Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Traces:

- In plane $z = p$: a hyperbola
- In plane $y = q$: a parabola
- In plane $x = r$: a parabola

The axis of the surface corresponds to the linear variable.

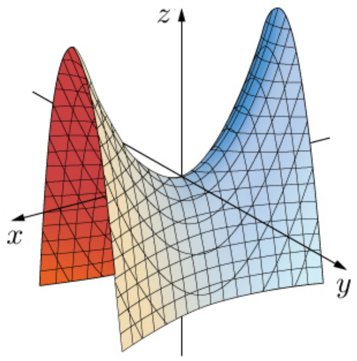


FIG. 8.192 – **Surfaces coniques courantes (source : OpenStax)**

8.5.2.8.7 Tore

Définition (#8.5.357) : En géométrie, un "tore" est une surface de révolution générée par la rotation d'un cercle dans l'espace tridimensionnel autour d'un axe coplanaire avec le cercle. Si l'axe de révolution ne touche pas le cercle, la surface a une forme d'anneau et est appelée "tore de révolution".

Nous savons que pour générer un cercle dans le plan $x\text{O}y$, une équation paramétrique possible est :

$$x = r\cos(\phi) \quad (8.5.283)$$
$$y = r\sin(\phi) \quad (8.5.284)$$

Pour décaler ce cercle vers la droite (dans la direction des x positifs), nous allons simplement ajouter un terme constant x strictement positif :

$$\begin{aligned} x &= a + r\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\phi) \end{aligned} \quad (8.5.285)$$

Dans l'espace pour dessiner un cercle décalé dans le plan $x\text{O}z$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} x &= a + r\cos(\phi) \\ z &= r\sin(\phi) \end{aligned} \quad (8.5.286)$$

Dont la notation traditionnelle est dans le contexte de l'étude du tore :

$$\begin{aligned} x &= R + r\cos(\phi) \\ z &= r\sin(\phi) \end{aligned} \quad (8.5.287)$$

Si nous voulons générer un tore, nous allons faire tourner le cercle autour de l'axe u en le faisant suivre un cercle dans le plan $x\text{O}y$. Nous avons alors "l'équation paramétrique du tore de révolution" :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(\phi,\theta) \\ y(\phi,\theta) \\ z(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos(\phi))\cos(\theta) \\ (R + r\cos(\phi))\sin(\theta) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}} \quad (8.5.288)$$

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Avec Maple 4.00b un tore de paramètres $r=1, R=4$:

```
>r:=1:R:=4
>plot3d([(R+r*cos(phi))*cos(theta),(R+r*cos(phi))*sin(theta),
1*sin(phi)],
theta=-Pi..Pi,phi=-Pi..Pi,scaling=CONSTRAINED,orientation=[50,60],
style=PATCH,axes=NORMAL);
```

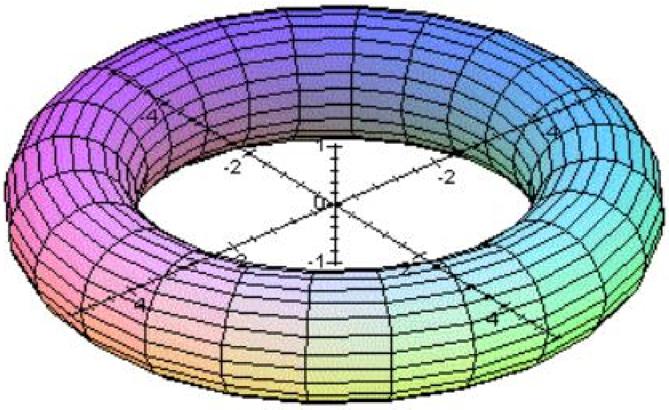


FIG. 8.193 – **Représentation paramétrique d'un tore dans Maple 4.00b**

En cours de traduction

~80 %
14 votes, 67.14%

8.6. Géométrie Différentielle

A Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section de géométrie Non-Euclidienne, la géométrie différentielle est la branche de la géométrie qui vise à étudier les propriétés locales (au voisinage d'un point) et intrinsèques des courbes et des surfaces non-euclidiennes (comme une généralisation des surfaces euclidiennes !).

La géométrie différentielle tient son nom au fait qu'elle est née de la possibilité d'une interprétation cinématique que le calcul infinitésimal apporte à l'étude des courbes. Les points que nous aborderons ici serviront aussi bien dans l'étude de la mécanique classique que de l'analyse complexe appliquée à de nombreux domaines de l'étude des champs.

Remarque

Avant de nous attaquer à la manière très formelle et abstraite d'aborder la géométrie différentielle avec les outils de la topologie (méthode habituelle aux mathématiciens) nous avons choisi dans un premier temps de présenter les éléments essentiels de manière simple et agréable tel que cela se fait dans les écoles d'ingénieurs. Les puristes nous excuseront donc au cas où en attendant mieux...

8.6.1 Courbes paramétrées

Définition (#8.6.358) : Nous assimilerons "l'espace physique" à $\mathbb{R}^3$ et le supposerons muni d'un repère $R=(\text{O},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et nous noterons par B la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Considérons un ensemble $I\subset\mathbb{R}$ et une fonction $\Gamma=f(I)$ tels que :

$$f\begin{pmatrix} I\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ t\rightarrow f(t)=M \end{pmatrix},M(x,y,z)_R \tag{8.6.1}$$

il s'agit d'une équation paramétrique qui définit un groupe de quantités en fonction d'un ou plusieurs "paramètres" indépendants.

Les courbes paramétriques sont couramment utilisées en cinématique, où la trajectoire d'un objet est représentée par des équations dépendant du temps comme paramètre. En raison de cette application, un seul paramètre est souvent étiqueté t. Cependant, les paramètres peuvent représenter d'autres quantités physiques (telles que des variables géométriques) ou peuvent être sélectionnés arbitrairement pour plus de commodité.

Remarques

R1. Si f est continue, alors Γ est une courbe de l'espace appelée "courbe d'un seul tenant".

En cours de traduction anglais

R2. Une parabole, une sinusoïde sont des courbes appelées "courbes planes". Une ellipse, un cercle sont appelés des "courbes planes fermées". Pour ces exemples, tous les points des courbes considérées sont situés dans un même plan. Inversement, une courbe est appelée "courbe gauche" (gauchir = dévier, tordre) s'il n'en est pas ainsi.

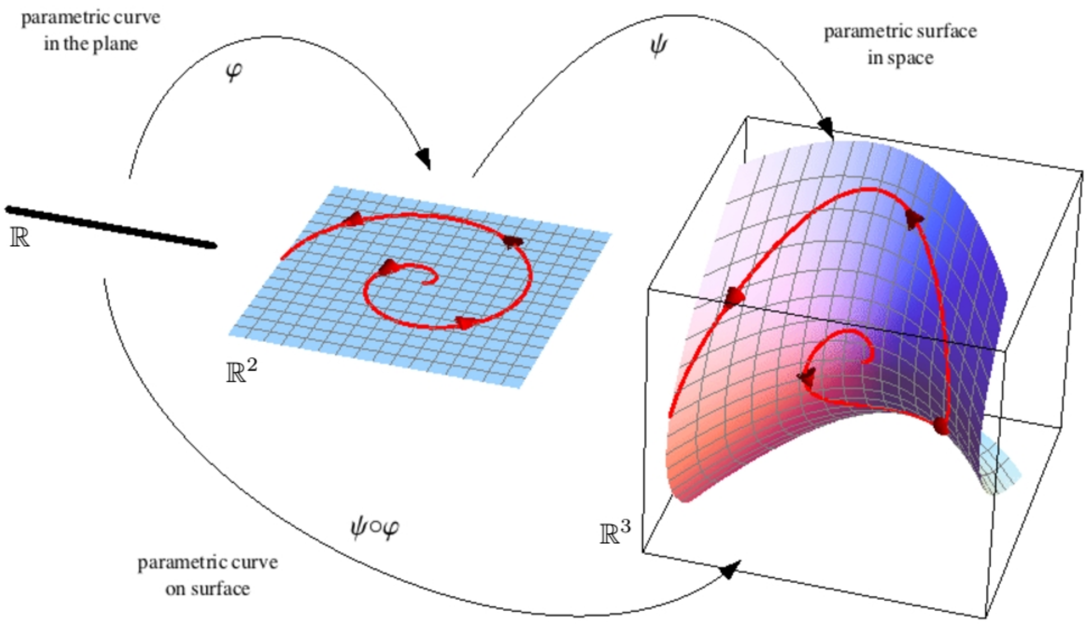


FIG. 8.194 – **Courbe paramétrique et surface paramétrique**

Choisissons $t_0 \in I$ et posons $M_0 = f(t_0)$ que nous noterons par abus de langage $M(t_0)$, nous pouvons alors énoncer la définition suivante : le couple (f, I) où f est une fonction continue est appelé "arc paramétré". est appelée le "support" de (f, I) et est une "origine" de (f, I).

Notez que les représentations paramétriques ne sont généralement pas uniques, de sorte que les mêmes quantités peuvent être exprimées par un certain nombre de paramétrisations différentes.

Remarques

R1. Abusivement, nous disons aussi que (f, I) est un "paramétrage" de Γ.

R2. Il est facile de définir d'autres arcs paramétrés admettant aussi Γ comme support. Pour ce faire, il suffit de se donner une fonction bijective φ de I vers $J \subset \mathbb{R}$ et telle que $f(t) = f(\varphi^{-1}(x))$.

Avant de continuer, rappelons qu'en géométrie différentielle, "l'abscisse curviligne" ou "l'élément de ligne" est une sorte de variante algébrique de la longueur d'un arc (c'est donc l'analogue, sur une courbe, de l'abscisse sur une droite orientée).

Considérons maintenant l'abscisse curviligne suivante (voir section de Relativité Restreinte page ??) :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{8.6.2}$$

nous savons que dans un espace euclidien canonique (dans $\mathbb{R}^n$) l'abscisse curviligne s'écrit alors :

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{8.6.3}$$

avec $i, j = 1, 2, 3$ et comme nous avons $\delta_{ij} = 0, i \neq j$, il reste dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^1 + \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^3 = (\mathrm{d}u^1)^2 + (\mathrm{d}u^2)^2 + (\mathrm{d}u^3)^2 \tag{8.6.4}$$

Dans le système cartésien :

$$u^1 = x, u^2 = y, u^3 = z \tag{8.6.5}$$

il vient donc que :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} \tag{8.6.6}$$

qui est donc l'élément différentiel linéaire d'un espace euclidien (le plus court chemin ou la "géodésique" ou "abscisse curviligne différentielle") que nous avons déjà rencontré à maintes reprises dans différentes sections de ce livre. Ce n'est donc rien de nouveau ni de surprenant !

Si nous nous limitons au plan, l'abscisse curviligne différentielle d'une courbe plane est alors évidemment :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \tag{8.6.7}$$

Nous savons déjà utiliser cette équation (nous l'avons utilisée dans la section de Mécanique Analytique). Mais comme un rappel ne fait jamais de mal, faisons des exemples avec une droite, une parabole et un demi-cercle (le choix n'est pas innocent !).

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemples :**

E1. Considérons l'équation générale d'une droite dans le plan (ce n'est pas une courbe plane pour rappel mais une droite plane) :

$$y = ax + b \tag{8.6.8}$$

Il vient alors immédiatement :

$$\mathrm{d}y = a\mathrm{d}x \tag{8.6.9}$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}x^2 + (a\mathrm{d}x)^2 = (1 + a^2)\mathrm{d}x^2 \tag{8.6.10}$$

E2. Considérons l'équation générale d'une parabole dans le plan :

$$y = ax^2 + b \tag{8.6.11}$$

Il vient alors immédiatement :

$$\mathrm{d}y = 2ax\mathrm{d}x \tag{8.6.12}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}x^2 + (2ax\mathrm{d}x)^2 = (1+4a^2x^2)\mathrm{d}x^2 \tag{8.6.13}$$

E3. Considérons l'équation d'une ellipse (voir section Géométrie Analytique page 2748), donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2 \tag{8.6.14}$$

après réarrangement :

$$y = \sqrt{b^2\left(R - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{b^2R - b^2\frac{x^2}{a^2}} \tag{8.6.15}$$

Il vient alors immédiatement :

$$\mathrm{d}y = -\frac{b^2}{a^2\sqrt{b^2R - b^2\frac{x^2}{a^2}}}x\mathrm{d}x \tag{8.6.16}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}x^2 + \left(-\frac{b^2}{a^2\sqrt{b^2R - b^2\frac{x^2}{a^2}}}x\mathrm{d}x\right)^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^4R - a^2x^2}x^2\right)\mathrm{d}x^2 \tag{8.6.17}$$

Remarquons qu'en faisant une approximation de Maclaurin (lorsque x vaut donc zéro, ce qui correspond à l'étude du pôle de l'ellipse), nous avons (voir section Séquences et Séries page 1683) :

$$y = \sqrt{b^2\left(R^2 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \cong \sqrt{b^2R} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2R}}{a^2R}x^2 \tag{8.6.18}$$

Suite à la demande d'un lecteur voici les détails du développement du résultat précédent. Rappelons d'abord la série de Taylor (voir section Séquences et Séries page 1677) :

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots \tag{8.6.19}$$

Si nous posons $x_0 = 0$, nous obtenons la série de Maclaurin :

$$f(x) \cong f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots \tag{8.6.20}$$

Donc il vient en procédant en deux étapes :

$$
\begin{aligned}
y \cong & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^0}\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x^2}{a^2}\right)}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^0+\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^1}\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x^2}{a^2}\right)}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^1\\
&+\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x^2}{a^2}\right)}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2\\
&=\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{1}{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x^2}{a^2}\right)}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)\\
&+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x^2}{a^2}\right)}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2\\
&=\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{-\dfrac{b^2x}{a^2}}{\sqrt{b^2\left(R^2-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)\\
&+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{-\dfrac{b^2x}{a^2}}{\sqrt{b^2\left(R^2-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2
\end{aligned}
\tag{8.6.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{-\dfrac{b^2x_0}{a^2}}{\sqrt{b^2\left(R^2-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}}(x-x_0)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{-\dfrac{b^2}{a^2}}{\sqrt{b^2\left(R^2-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}}+-\frac{2b^2}{a^2}x\cdots\right)\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)^2\\
&=\sqrt{b^2\left(R^2-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}+\frac{-\dfrac{b^2x_0}{a^2}}{\sqrt{b^2\left(R^2-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}}(x-x_0)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{-\dfrac{b^2}{a^2}}{\sqrt{b^2\left(R^2-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}}+-\frac{2b^2}{a^2}x_0\cdots\right)(x-x_0)^2
\end{aligned}
\tag{8.6.22}
$$

En prenant $x_0=0$, nous obtenons :

$$y\cong\sqrt{b^2R}+0\cdot x+\frac{1}{2}\left(\frac{-\dfrac{b^2}{a^2}}{\sqrt{b^2\left(R^2-\dfrac{0^2}{a^2}\right)}}+-\frac{2b^2}{a^2}0\cdot\ldots\right)x^2$$
$$=\sqrt{b^2R}+\frac{1}{2}\frac{-\dfrac{b^2}{a^2}}{\sqrt{b^2R}}x^2=\sqrt{b^2R}-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2\sqrt{b^2R}}x^2=\sqrt{b^2R}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2R}}{\sqrt{b^2R}}\frac{b^2}{a^2\sqrt{b^2R}}x^2$$
$$=\sqrt{b^2R}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2R}}{a^2R}x^2 \tag{8.6.23}$$

Il vient alors immédiatement :

$$\mathrm{d}y=-\frac{\sqrt{b^2R}}{a^2R}x\mathrm{d}x \tag{8.6.24}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}x^2+\left(-\frac{\sqrt{b^2R}}{a^2R}x\mathrm{d}x\right)^2=\left(1+\frac{b^2}{a^4R}x^2\right)\mathrm{d}x^2 \tag{8.6.25}$$

Nous voyons alors que l'abscisse curviligne du cercle dans le plan devient celle d'une parabole lorsque nous faisons un développement en série de Maclaurin de l'équation du cercle au pôle.

Nous pourrions faire de même avec une hyperbole ou une ellipse et nous retrouver avec la même forme d'abscisse curviligne différentielle, généralement notée par tradition :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\left(1+k_x^2x^2\right)\mathrm{d}x^2} \tag{8.6.26}$$

où k_x est appelé "paramètre de la parabole osculatrice".

Ce qui est trrrès important à remarquer avec les développements ci-dessus (nous pouvons aussi le faire à l'identique pour l'hyperbole qui n'est que le cas elliptique avec un signe différent à la demande des lecteurs) c'est que nous avons finalement (rappelons que l'ellipse est un cas général de la sphère !) :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2_{\text{plane}}&=(1+a^2)\mathrm{d}x^2\\ \mathrm{d}s^2_{\text{parabole}}&=(1+4a^2x^2)\mathrm{d}x^2\\ \mathrm{d}s^2_{\text{ellipse}}&=(1+k_x^2x^2)\mathrm{d}x^2\\ \mathrm{d}s^2_{\text{hyperbola}}&=(1-k_x^2x^2)\mathrm{d}x^2\end{aligned} \tag{8.6.27}$$

Où les trois derniers cas sont généralement désignés :

$$\boxed{\mathrm{d}s=(1+K^2x^2)\mathrm{d}x^2} \tag{8.6.28}$$

Nous comprenons alors mieux pourquoi de nombreux ouvrages sur la Relativité Générale ou la Géométrie Différentielle disent que :

- Lorsque $K=0$ tous les cas se réduisent à un espace plat
- Lorsque $K=+1$ (ou plus généralement juste positif) nous sommes dans un espace sphérique (en fait il est ellipsoïdal)
- Lorsque $K=-1$ (ou plus généralement juste négatif) nous sommes dans un espace hyperbolique

Ces exemples étant clos, continuons avec la théorie. Nous pouvons évidemment réécrire notre abscisse curviligne différentielle en divisant les deux côtés de l'égalité par $\mathrm{d}t$ comme suit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{8.6.29}$$

Nous obtenons ainsi la fameuse relation :

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{8.6.30}$$

✍**Exemple :**

Voyons une application de l'abscisse curviligne différentielle paramétrée avec une hélice (les exemples sont assez jolis en géométrie différentielle et donc agréables à voir...) qui est une courbe gauche typique :

Soient $t,r,h\in\mathbb{R}^3, t>0, r>, h>0$ et la fonction :

$$f(t):\begin{cases}[0,t]\mapsto\mathbb{R}^3\\ t\rightarrow f(t)=M\end{cases} \tag{8.6.31}$$

avec $M(x,y,z)$ et les coordonnées paramétriques :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(t)\\r\sin(t)\\ht\end{pmatrix} \tag{8.6.32}$$

Nous avons alors avec Maple 4.00b en prenant r et h comme étant égaux à l'unité :

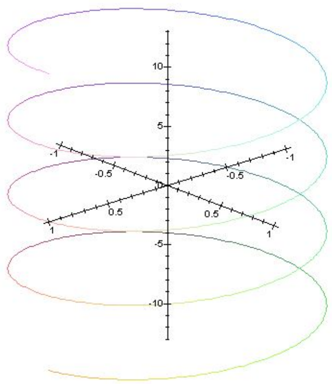


FIG. 8.195 – **Représentation paramétrique d'une hélice avec Maple 4.00b**

La fonction f est un arc paramétré dont le support est appelé une "hélice", r en est le rayon et h le pas. En prenant $t_0 = 0$ comme origine, l'abscisse curviligne de cette hélice (un morceau) est donnée par :

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t) + h^2 = r^2 + h^2 \quad (8.6.33)$$

Dès lors :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (8.6.34)$$

et donc par intégration :

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}t \quad (8.6.35)$$

8.6.2 Isoclines

En cours de traduction de l'anglais

Voyons maintenant un point très important en mathématiques mais en plus dans l'ingénierie médicale, astrophysique, météorologie (parmi encore beaucoup d'autres domaines) que sont les isoclines.

Avant d'aborder le sujet sous forme mathématique, nous proposons au lecteur d'ouvrir Matlab 5.0.0.473 (nous avons déjà fait à peu près le même exemple avec Maple 4.00b dans la section d'Analyse Fonctionnelle) et d'y écrire :

```
»[xx,yy,z]=peaks;
»figure(1);mesh(xx,yy,z);title('peaks')
```

Nous obtenons :

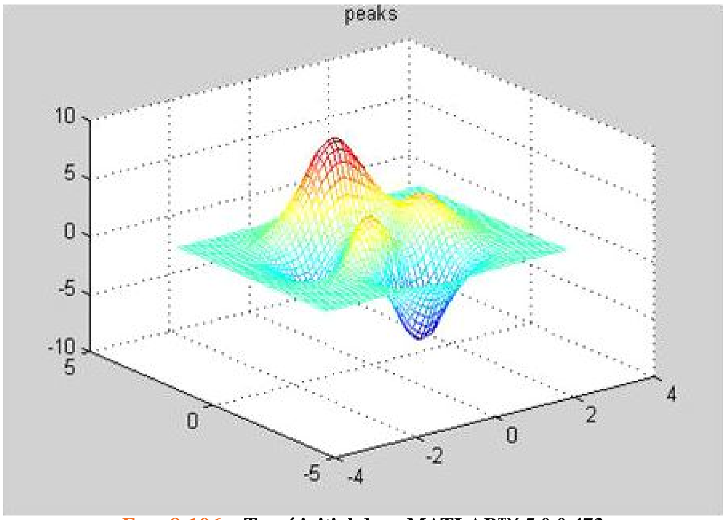


FIG. 8.196 – Tracé initial dans MATLAB™ 5.0.0.473

ensuite pour des raisons esthétiques, d'écrire :

```
»figure(2);surf(xx,yy,z);title('surf')
```

Nous obtenons :

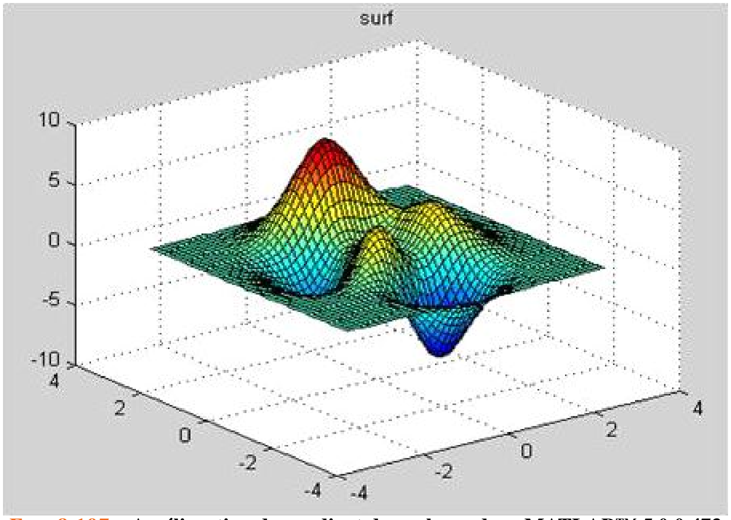


FIG. 8.197 – **Amélioration du gradient de couleurs dans MATLAB™ 5.0.0.473**

Ensuite nous souhaiterions que MATLAB™ nous trace quelques courbes de niveau (les points où la valeur de la fonction $f(x, y)$ est constante), appelées par les matheux des "isoclines" ou "iso-level curves". Pour cela, nous devons alors écrire :

```
»figure(3);contour3(xx,yy,z);title('contour')
```

Nous obtenons :

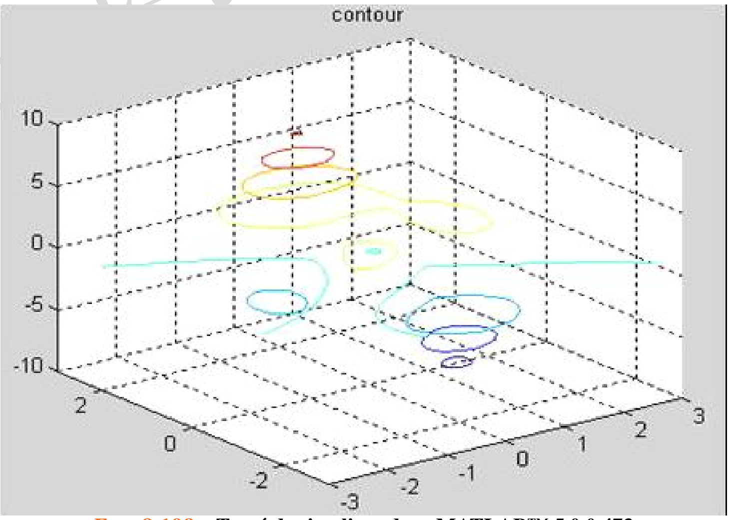


FIG. 8.198 – **Tracé des isoclines dans MATLAB™ 5.0.0.473**

Nous allons ensuite demander au logiciel de projeter les isoclines sur le plan X, Y. Cela est fait avec :

```
»figure(3);contour(xx,yy,z);title('contour')
```

Nous obtenons :

En cours de traduction de l'anglais

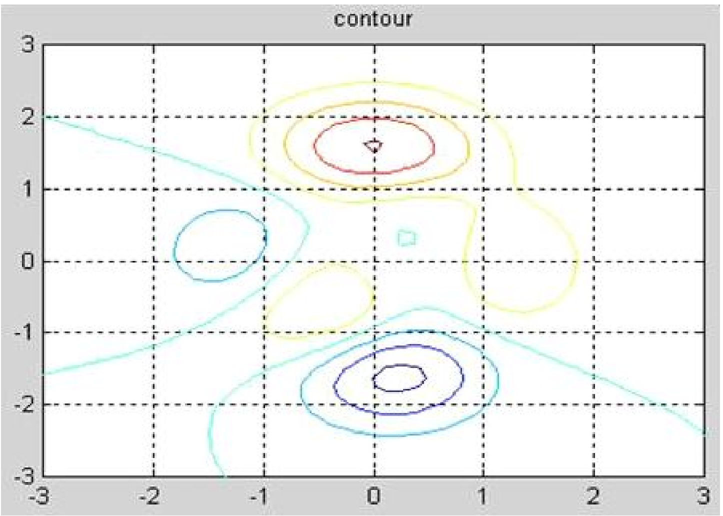


FIG. 8.199 – Projection of the isoclines in MATLAB™ 5.0.0.473

Et ce sont ces courbes qui vont nous intéresser. Nous souhaiterions déterminer les équations dans le plan de celles-ci sous forme explicite. Mais avant cela amusons-nous avec MATLAB™ en écrivant encore :

```
»figure(3);contour(xx,yy,z);title('contour')
```

Nous obtenons :

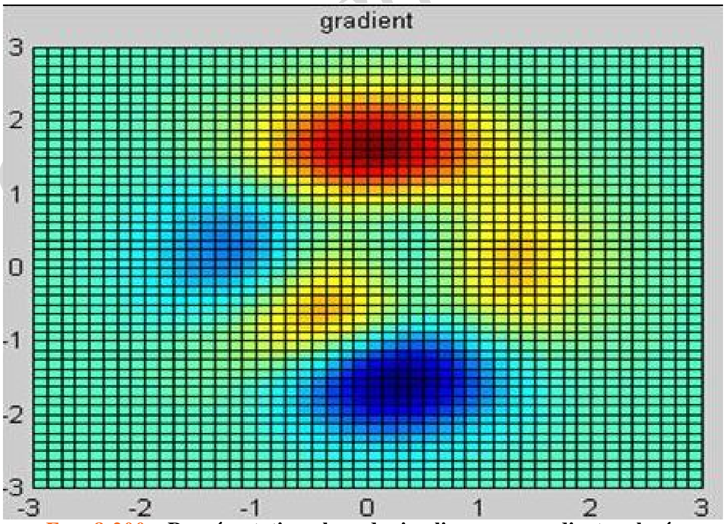


FIG. 8.200 – Représentation plane des isoclines avec gradients colorés dans MATLAB™ 5.0.0.473

En cours de traduction de l'anglais

mais nous pouvons faire encore mieux en enlevant la grille avec la commande :

```
»shading interp
```

Nous obtenons :

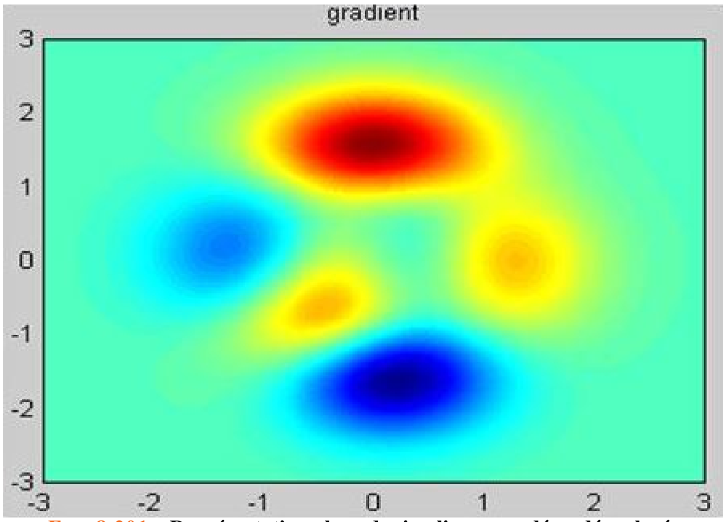


FIG. 8.201 – **Représentation plane des isoclines avec dégradés colorés et sans grille dans MATLAB™ 5.0.0.473**

Ensuite, sans fermer le graphique ci-dessus créé par MATLAB™ 5.0.0.473 nous rajoutons maintenant la ligne :

```
»hold on; contour(xx,yy,z,'k')
```

Nous obtenons :

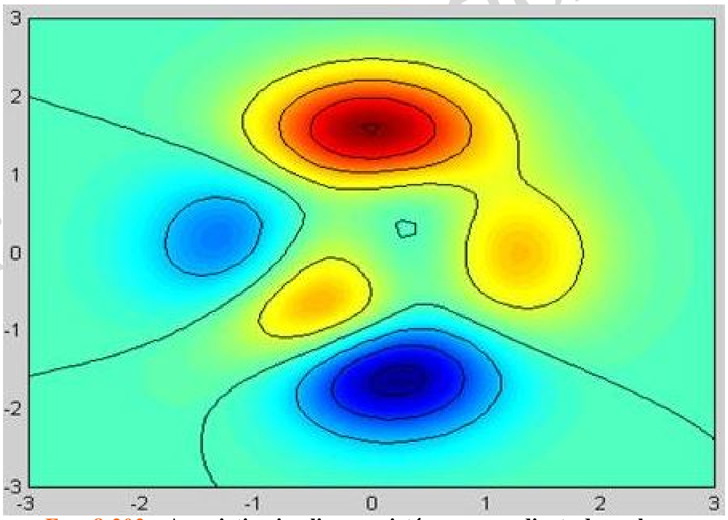


FIG. 8.202 – **Association isoclines projetées avec gradients de couleurs dans MATLAB™ 5.0.0.473**

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#8.6.359) : En mathématiques, un ensemble de niveaux d'une fonction à valeurs réelles f de n variables réelles est un ensemble de la forme :

$$L_c(f) = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \mid f(x_1, \cdots, x_n) = c^{te}\right\} \quad (8.6.36)$$

c'est-à-dire un ensemble où la fonction prend une valeur constante donnée c^{te}.

Lorsque le nombre de variables est de deux, un ensemble de niveaux est génériquement une courbe, appelée "courbe de niveau", "ligne de contour", ou "isoligne". Ainsi, une courbe de niveau est l'ensemble de toutes les solutions à valeurs réelles d'une équation à deux variables

x_1 et x_2. Lorsque $n=3$, un ensemble de niveaux est appelé "surface de niveau" ou "isosurface", et pour des valeurs supérieures de n, l'ensemble de niveaux est appelé "hypersurface". Ainsi, une "surface de niveau" est l'ensemble de toutes les racines à valeurs réelles d'une équation à trois variables x_1, x_2 et x_3, et une "hypersurface de niveau " est l'ensemble de toutes les racines à valeurs réelles d'une équation à n $(n>3)$ variables.

Considérons maintenant pour déterminer l'équation des isolignes la fonction bivariée $f(x,y)$ et que nous imposerons comme étant $\mathbb{R}^2$-différentiable.

La relation :

$$f(x,y)=c^{te} \tag{8.6.37}$$

définit une courbe plane Γ donc nommée "isocline". C'est une courbe telle que lorsque x varie, alors y ne variera donc pas de sorte que f reste constante.

Nous avons vu dans la section de Calcul Différentiel Et Intégral que la différentielle de f, pour des variations infinitésimales quelconques de x et y, est :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{8.6.38}$$

Maintenant, si nous voulons que quand x varie de $\mathrm{d}x$, la valeur de la fonction f ne change pas, il faut que $\mathrm{d}y$ ne soit pas n'importe quoi mais tel que la variation $\mathrm{d}f$ soit nulle. Autrement dit :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \tag{8.6.39}$$

le long de Γ. Mais cette équation ne sert à rien en tant que telle, mais elle nous fixe le rapport de la dérivée de l'isocline dans le plan tel que :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \tag{8.6.40}$$

ce qui nous donne la pente de la tangente à Γ et donc après par intégration, la fonction recherchée elle-même ! ! !

Il va de soi que le vecteur tangent à la courbe Γ est donc un vecteur parallèle à celui ayant pour composantes (par correspondance avec la relation précédente) :

$$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=\left(\frac{\partial f}{\partial y},-\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{8.6.41}$$

que nous noterons :

$$\vec{t}=\left(\frac{\partial f}{\partial y},-\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{8.6.42}$$

De plus rappelons que le gradient est donné par (voir section Calcul Vectoriel page 1844) :

$$\vec{\nabla}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{8.6.43}$$

En cours de traduction de l'anglais

Nous remarquerons que ces deux derniers vecteurs sont perpendiculaires (résultat qui nous sera utile dans la section d'Analyse Complexe). Effectivement en calculant le produit scalaire (voir section Calcul Vectoriel page 1798) :

$$\vec{t}\circ\vec{\nabla}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial y},-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\circ\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{8.6.44}$$

En d'autres termes, le vecteur $\vec{\nabla}(f)$ définit les lignes orthogonales à la courbe Γ.

✍**Exemple :**

Prenons l'équation d'une parabole particulière dans $\mathbb{R}^3$:

$$f(z)=\sqrt{x^2+y^2} \tag{8.6.45}$$

Nous avons donc les isoclines qui sont données par :

$$f(z)=\sqrt{x^2+y^2}=c^{te} \tag{8.6.46}$$

d'où leur équation dans le plan :

$$y=\sqrt{c^{te}-x^2} \tag{8.6.47}$$

Soient des cercles dans le plan dont le rayon est égal à la racine carrée de la constante choisie correspondante à la hauteur z de la fonction f !

Calculons maintenant la pente de la tangente à Γ de ces cercles :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}=-\frac{x}{y}=-\frac{x}{\sqrt{c^{te}-x^2}} \tag{8.6.48}$$

ce qui est conforme à la simple dérivée de :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{c^{te}-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{c^{te}-x^2}} \tag{8.6.49}$$

Nous avons aussi :

$$\vec{t}=\left(\frac{y}{\sqrt{c^{te}-x^2}},-\frac{x}{\sqrt{c^{te}-x^2}}\right) \tag{8.6.50}$$

Nous voyons qu'en $x=0$ ce vecteur est égal à :

$$\vec{t}=(1,0) \tag{8.6.51}$$

ce qui est bien conforme au vecteur tangent que nous avons au cercle en ce point de l'axe des abscisses.

8.6.3 Trièdre de Frenet

L'un des outils les plus importants utilisés pour analyser une courbe est le référentiel de Frenet, un référentiel mobile qui fournit un système de coordonnées à chaque point de la courbe qui est « le mieux adapté » à la courbe près de ce point.

Le repère de Frenet est un outil d'étude du comportement local des courbes. Plus exactement, il s'agit d'un repère local associé à un point décrivant une courbe Γ. Son mode de construction est différent selon que l'espace ambiant est de dimension 2 (courbe plane) ou 3 (courbe gauche).

Le repère de Frenet, et les formules de Frenet (donnant les dérivées des vecteurs de ce repère), permettent de mener de façon systématique des calculs de courbure, de torsion pour les courbes gauches et d'introduire des concepts géométriques intéressants associés aux courbes.

Considérons pour commencer une courbe Γ avec son abscisse curviligne $s(t)$ et son origine. Nous notons par définition :

$$\vec{T}=\frac{\mathrm{d}\vec{f}(t)}{\mathrm{d}s}=\frac{\vec{f}(t+\mathrm{d}t)-\vec{f}(t)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\text{O}M}}{\mathrm{d}s} \tag{8.6.52}$$

la tangente à la courbe Γ de paramètre t au voisinage d'un point M par rapport à un repère posé en O avec $\mathrm{d}s$ qui se calcule comme nous l'avons montré précédemment.

Il est intéressant de noter que si t est interprété comme le début du temps (n'oubliez pas que ce livre est principalement destiné aux applications d'ingénierie), alors nous obtenons une vitesse tangentielle :

$$\vec{v}=\vec{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\vec{T}\|\vec{v}\|=\vec{T}v=\frac{\mathrm{d}\vec{f}(t)}{\vec{d}t} \tag{8.6.53}$$

et donc le vecteur $\vec{T}$ est évidemment dirigé dans la direction du mouvement.

De plus, par construction et définition de l'abscisse curviligne, nous avons toujours :

$$\|\vec{T}\|=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\text{O}M}}{|\mathrm{d}s|} \tag{8.6.54}$$

et donc le vecteur tangent $\vec{T}$ au point M est unitaire (et non nul !).

Maintenant, sans savoir exactement à quoi cela va nous servir pour l'instant, intéressons-nous au vecteur :

$$\frac{\vec{T}}{\mathrm{d}s} \tag{8.6.55}$$

Sachant trivialement de ce qui précède que :

$$\|\vec{T}\|=\vec{T}\circ\vec{T}=1 \tag{8.6.56}$$

Alors, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{T}\circ\vec{T}\right)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\circ\vec{T}+\vec{T}\circ\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=2\vec{T}\circ\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=0 \tag{8.6.57}$$

En cours de traduction de l'anglais

donc déjà $\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s$ n'est a priori pas unitaire et lui et $\vec{T}$ lui est perpendiculaire (résultat qui va nous servir plusieurs fois par la suite donc il faudra s'en souvenir) !

Ainsi :

$$\vec{T} \circ \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{8.6.58}$$

Posons :

$$\vec{N} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right\|} \tag{8.6.59}$$

Étant donné le résultat précédent, $\vec{N}$ est le vecteur perpendiculaire, appelé "vecteur de courbure" unitaire, à $\vec{T}$ en M, nous disons que ce couple de vecteur est "orthonormal direct" et C est par définition la "courbure".

Nous pouvons également aborder la courbure C d'une façon plus géométrique plutôt que par une définition tombée du ciel :

Nous savons à ce point de notre discours qu'en un point M_0 d'une courbe Γ (dérivable au moins une fois en tout point - c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$), il existe un vecteur non nul $\vec{T}$ qui est tangent.

En tout point voisin M (d'abscisse curviligne s), le vecteur tangent $\vec{T}$ peut s'écrire en approximation :

$$\vec{T}(s) \cong \vec{T} + \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \tag{8.6.60}$$

si la courbe se trouve localement dans un même plan (car nous étudions ici la courbure et non la torsion de la courbe) !

Deux normales en M et M_0 se coupant donc en un point Ω, la figure suivante :

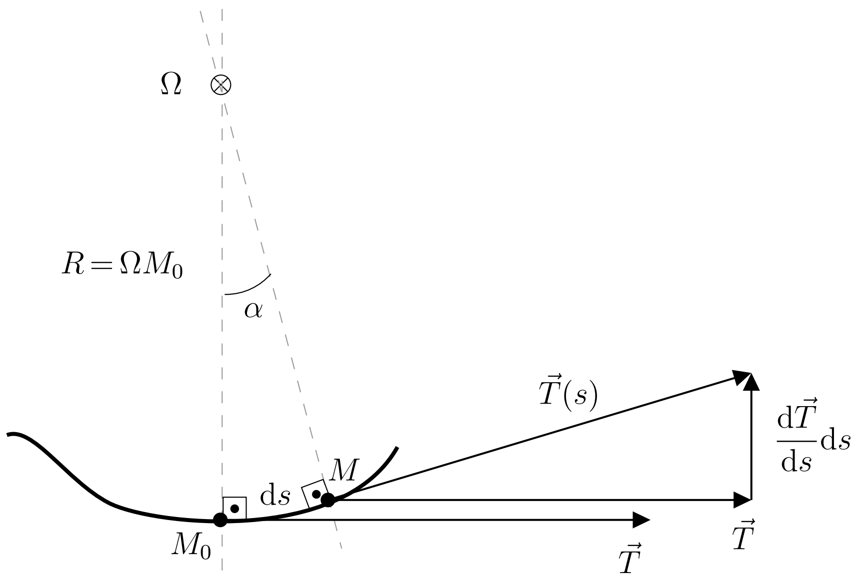


FIG. 8.203 – **Décomposition du vecteur tangent de la trajectoire courbe**

En cours de traduction de l'anglais

montre qu'au premier ordre en $\mathrm{d}s$, le point M peut être considéré localement comme déduit du point M_0 par une rotation de centre Ω.

Le cercle ainsi défini, de rayon :

$$\overline{\Omega M_0} = R \tag{8.6.61}$$

est celui qui tangente le mieux la courbe localement au point M_0. Son rayon se déduit de la figure (deux triangles semblables à la limite) :

$$\frac{\mathrm{d}s}{R} = \frac{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right\|\mathrm{d}s}{\|\vec{T}\|} \tag{8.6.62}$$

d'où, puisque $\vec{T}$ est unitaire, la définition et la valeur de la courbure pour une courbe plane :

$$\boxed{C = \frac{1}{R} = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right\|} \tag{8.6.63}$$

et voilà !

Il est possible d'interpréter le concept de courbure comme la vitesse de rotation de la base de Frenet par rapport à une direction fixe.

Le couple de vecteurs $(\vec{T}, \vec{N})$ est appelé "repère de Frenet" et ses vecteurs de base les "vecteurs de Frenet".

Le repère de Frenet est un repère mobile puisque les éléments de ce repère changent selon le point considéré. En physique, il ne faut pas confondre cette notion avec celle de référentiel : puisque les vecteurs de Frenet se déplacent avec le point !

Remarque

La définition de C telle que ci-dessus est vraie dans le cadre d'un choix d'une courbure positive. C'est un point de vue pris en mécanique mais non nécessaire en mathématiques.

Si $C \neq 0$, alors comme vu précédemment :

$$\vec{N} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right\|} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}}{C} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = R\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \tag{8.6.64}$$

où R est appelé le "rayon de courbure". Selon la situation (c'est-à-dire la position sur la courbe), $\|\vec{T}\|$ peut être plus grand ou plus petit que le rayon de courbure R !

Quant à la relation :

$$\boxed{\frac{\vec{N}}{R} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}} \tag{8.6.65}$$

En cours de traduction de l' anglais

elle est appelée "1ère formule de Frenet" et montre que $\vec{N}$ et $\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s$ sont colinéaires et donc leur produit vectoriel est nul (résultat utilisé plus loin).

Ces relations se justifient par l'analogie avec la mécanique. Effectivement, nous avons démontré plus haut que :

$$\vec{v}=\vec{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\vec{T}\|\vec{v}\|=\vec{T}v=\frac{\mathrm{d}\vec{f}(t)}{\vec{dt}} \tag{8.6.66}$$

Calculons maintenant l'accélération :

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{T}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}+\vec{T}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}+\vec{T}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v^2\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}+\vec{T}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\&=v^2C\vec{N}+\vec{T}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\vec{T}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v^2}{R}\vec{N}=\vec{a}_{\text{tg}}+\vec{a}_n\end{aligned} \tag{8.6.67}$$

nous retrouvons alors le résultat obtenu dans la section de Mécanique Classique lors de notre étude du plan osculateur (voir page **??**).

En cours de traduction de l'anglais

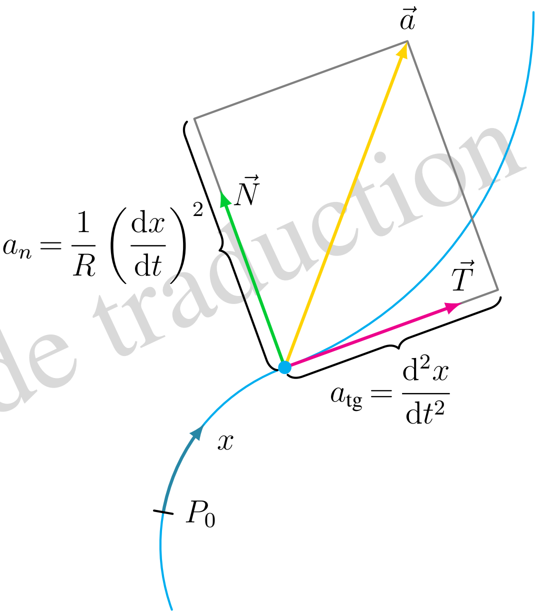


FIG. 8.204 – **Accélération tangentielle et normale**

Pour donner une interprétation géométrique plus exacte de la courbure, nous définissons d'abord par Ω le centre du "cercle osculateur" (se trouvant dans le plan osculateur) ou "cercle de courbure" de rayon R qui tangente le mieux localement la courbe Γ dans le repère de Frenet :

$$\vec{\Omega}=\vec{M}+R\vec{N} \tag{8.6.68}$$

Pour préciser géométriquement ce qu'est le cercle osculateur, prenez une courbe, et un point M sur cette courbe. Tracez ensuite la normale au point de cette courbe localement plane et prenez un point Ω sur la normale. Alors, le cercle de centre Ω passant par le point M est tangent à la courbe. Mais tous les cercles tangents à la courbe ne sont pas tangents de la même façon ! En effet, si Ω est loin de M, le cercle va se situer plutôt à l'extérieur de la courbe (cercle bleu dans la figure ci-dessous). Si Ω est proche de M, le cercle va se situer plutôt à l'intérieur de la courbe

(cercle rose dans la figure ci-dessous). Le rayon limite entre être "à l'intérieur de la courbe" et être "à l'extérieur de la courbe" est par convention le "rayon de courbure" que nous avons défini plus haut. Le cercle correspondant à ce rayon est alors le fameux "cercle osculateur" !

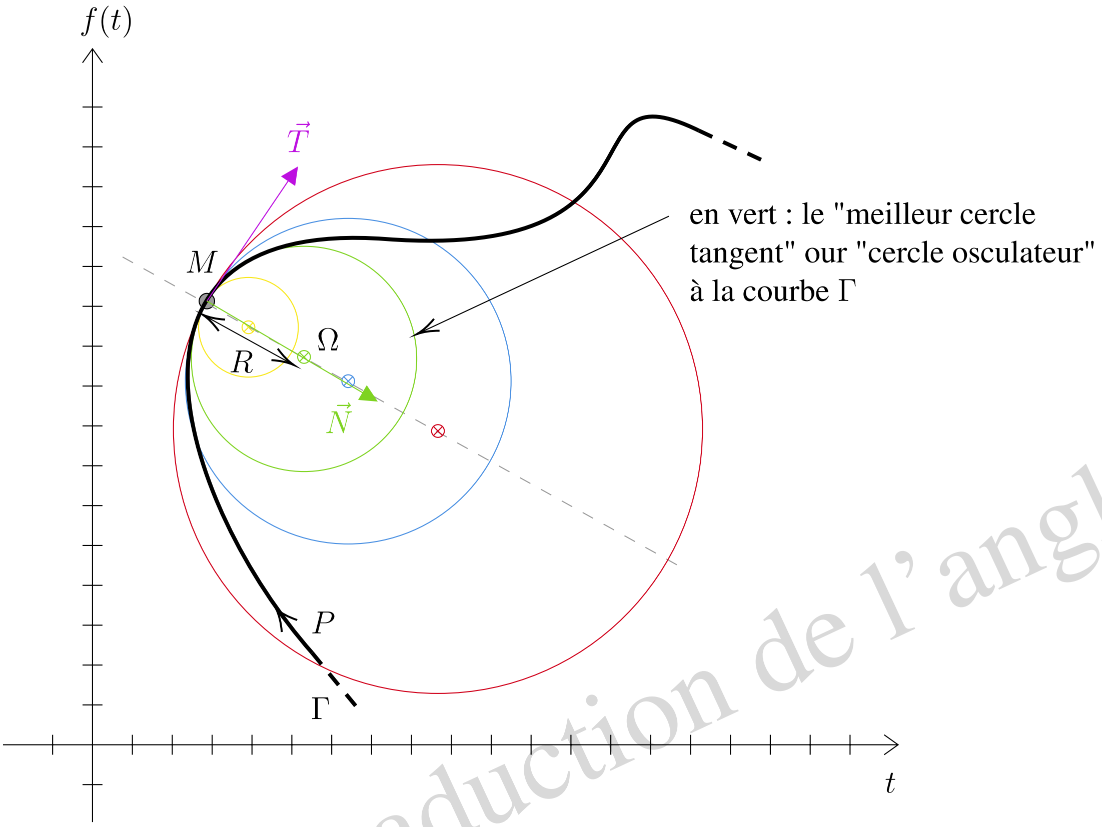


FIG. 8.205 – **Représentation d'un cercle osculateur**

En cours de traduction de l'anglais

Dans le cas particulier où $\vec{T}$ est un vecteur constant nous avons évidemment :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=\vec{0} \tag{8.6.69}$$

et donc $C=0$ ce qui implique que R n'est plus défini. Nous disons parfois que dans ce cas le rayon de courbure de Γ est infini (une droite a alors une courbure nulle en tout point).

Considérons maintenant le vecteur perpendiculaire au plan osculateur défini et noté :

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N} \tag{8.6.70}$$

Nous pouvons déjà dire, étant donné que $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont unitaires que $\vec{B}$ l'est aussi (ce qui va nous servir plus loin) !

Nous pouvons voir que $\mathrm{d}\vec{B}/\mathrm{d}s$ est évidemment orthogonal à $\vec{T}$. En effet :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\times\vec{N}+\vec{T}\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s}=\vec{0}\times\vec{N}+\vec{T}\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s}=\vec{T}\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} \tag{8.6.71}$$

où nous avons pris le cas particulier $\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s=\vec{0}$ (mais de toute manière en généralité $\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s$ et $\vec{N}$ sont colinéaires comme nous l'avons démontré donc le produit vectoriel entre ces deux vecteurs est toujours nul).

Comme $\mathrm{d}\vec{B}/\mathrm{d}s$ est perpendiculaire à $\vec{T}$ il est dès lors collinéaire à $\vec{N}$.

Par conséquent, comme $\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s$ est perpendiculaire à $\vec{T}$, $\mathrm{d}\vec{B}/\mathrm{d}s$ est perpendiculaire à $\vec{B}$. Ceci peut être démontré en utilisant exactement la même astuce que lorsque nous avons démontré que $\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s$ est perpendiculaire à $\vec{T}$.

Dès lors :

$$\vec{B}\circ\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}=0 \tag{8.6.72}$$

Mettons :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}=\frac{\vec{N}}{R'}=\tau\vec{N}} \tag{8.6.73}$$

Cette relation est la "seconde formule de Frenet" où par définition, $\vec{B}$ est le "vecteur bi-normal" de Γ au point M et τ la "torsion" et R' le "rayon de torsion".

Nous pouvons maintenant établir la troisième formule de Frenet. Pour cela nous partons de :

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}\Leftrightarrow\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T} \tag{8.6.74}$$

d'où nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}\times\vec{T}+\vec{B}\times\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=\frac{\vec{N}}{R'}\times\vec{T}+\vec{B}\times\frac{\vec{N}}{R} \tag{8.6.75}$$

Mais, de par les propriétés du produit vectoriel (voir section Calcul Vectoriel page 1808) :

$$\vec{N}\times\vec{T}=-\vec{B}\qquad\vec{B}\times\vec{N}=-\vec{T} \tag{8.6.76}$$

d'où la "3ème formule de Frenet" :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s}=-\frac{\vec{B}}{R'}-\frac{\vec{T}}{R'}} \tag{8.6.77}$$

Nous appelons "trièdre de Frenet" ou "repère de Frenet-Serret" associé à la courbe Γ au point M, le repère naturel orthonormal de l'espace $(M,\vec{T},\vec{N},\vec{B})$:

En cours de traduction de l'anglais

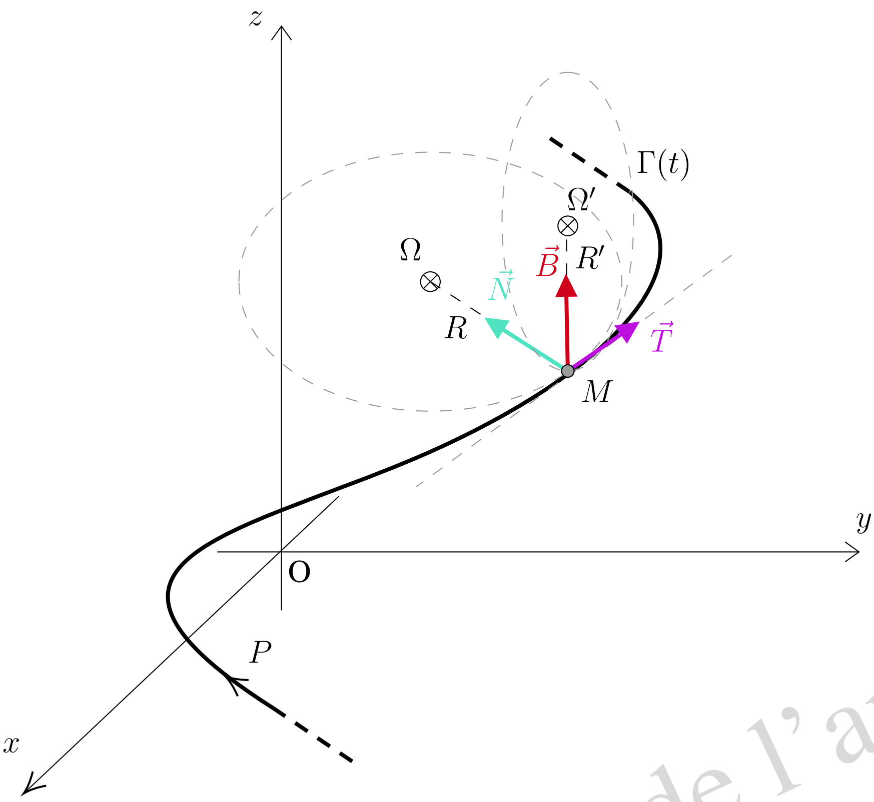


FIG. 8.206 – **Représentation du trièdre de Frenet**

En cours de traduction de l'anglais

où, en mécanique, le vecteur $\vec{T}$ est colinéaire à la vitesse et l'accélération tangentielle et $\vec{N}$ est colinéaire à l'accélération normale.

Remarque

Le rayon de courbure R est donc dans le plan osculateur (plan formé par le vecteur tangent et normal à la courbe) qui est le meilleur plan dans lequel est contenue la courbe. Du coup, le rayon de courbure donne en un point (localement) le meilleur ("le plus vrai") rayon de la courbe. La torsion nous donne par contre la tendance qu'a la courbe à sortir du plan osculateur (in extenso si la courbe est contenue dans un plan, la torsion est nulle).

✍**Exemples :**

E1. On considère l'équation paramétrique plane d'une parabole :

$$\Gamma(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \tag{8.6.78}$$

Nous avons donc :

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=1+4t^2 \tag{8.6.79}$$

Nous avons alors :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+4t^2} \tag{8.6.80}$$

Et alors :

$$\vec{T}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\Rightarrow\vec{T}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}}2t\end{pmatrix} \qquad (8.6.81)$$

Au passage, vous remarquerez que nous avons bien :

$$\|\vec{T}\|=1 \qquad (8.6.82)$$

Ainsi, la courbure (l'inverse du rayon de courbure) est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\begin{pmatrix}\left(-4\dfrac{t}{(1+4t^2)^{3/2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\\ \left(\dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}-8\dfrac{t^2}{(1+4t^2)^{3/2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{-4t}{(1+4t^2)^2}\\ \dfrac{2}{1+4t^2}-\dfrac{8t^2}{(1+4t^2)^2}\end{pmatrix}\frac{1}{R(t)}\Rightarrow\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right\|=\sqrt{\frac{4}{(1+4t^2)^3}}=\frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}\end{aligned} \qquad (8.6.83)$$

Et dès lors :

$$R(t)=\frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2} \qquad (8.6.84)$$

À $t=0$ la parabole a donc une courbure $R(0)=0.5$. Nous avons les vecteurs à $t=0$:

$$\vec{T}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{N}=R\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (8.6.85)$$

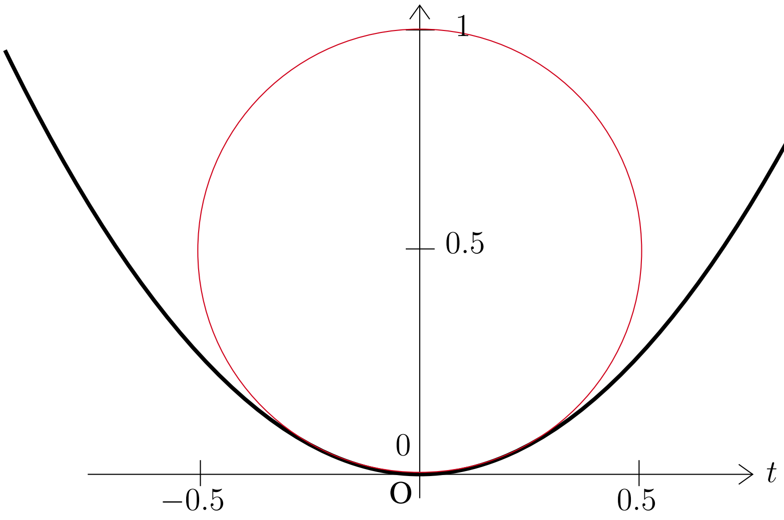


FIG. 8.207 – **Cercle osculateur de la parabole au point $t=0$**

E2. Cherchons le rayon et le centre de courbure en M M à notre hélice définie plus haut comme exemple pratique. Rappelons que sa fonction paramétrique est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{O}M}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(t)\\r\sin(t)\\ht\end{pmatrix} \tag{8.6.86}$$

et que :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{r^2+h^2} \tag{8.6.87}$$

Nous avons dès lors :

$$\vec{T}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\text{O}M}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\text{O}M}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\Rightarrow\vec{T}=\begin{pmatrix}-\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin(t)\\\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos(t)\\\dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\end{pmatrix} \tag{8.6.88}$$

En chemin, le lecteur aura probablement remarqué que nous avons :

$$\|\vec{T}\|=1 \tag{8.6.89}$$

Ainsi, la courbure (l'inverse du rayon de courbure) est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\begin{pmatrix}-\dfrac{r}{r^2+h^2}\cos(t)\\-\dfrac{r}{r^2+h^2}\sin(t)\\0\end{pmatrix}=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right\|=\frac{r}{r^2+h^2} \tag{8.6.90}$$

Donc, le rayon de courbure vaut :

$$R=\frac{r^2+h^2}{r} \tag{8.6.91}$$

Ce qui est conforme à l'intuition puisque, lorsque le pas h de l'hélice est nul, le rayon de courbure vaut r et lorsque le pas h tend vers l'infini le rayon de courbure tend vers l'infini aussi et la courbure vers zéro. Cet exemple est un cas fameux d'ingénierie appliquée aux cheminées d'évacuation de fumées qui sont entourées d'une hélice d'Archimède et dont l'objectif est de faire monter les flux d'air vers le haut (la difficulté étant de déterminer le rayon R de la plaque de métal à couper qui suivra le mieux la courbure voulue... du moins localement en connaissant le rayon de la cheminée et la hauteur h du pas de la spirale) :

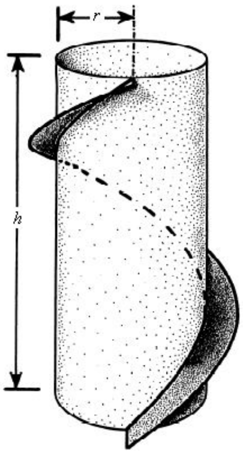


FIG. 8.208 – Principe de base d'une cheminée industrielle avec spirale (source : Frank Morgan, Riemmanian Geometry)

ou sa version réelle :

FIG. 8.209 – Cheminée industrielle d'évacuation avec spirale

Mais dans ce cas d'ingénierie, la hauteur h doit être obtenue par une rotation complète. Dès lors le rayon de courbure s'écrit :

$$R = \frac{r^2 + \left(\dfrac{h}{2\pi}\right)^2}{r} \tag{8.6.92}$$

Bref pour en revenir à notre exemple et le finir, il vient par la première formule de Frenet le vecteur normal suivant :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.6.93}$$

et dont tous les points (extrémités du vecteur) sont confondus avec l'axe Z de notre hélice quel que soit h ! La coordonnée de la composante z de ce vecteur est nulle étant donné que la normale est prise par rapport à un point M de la courbe déjà à une hauteur h implicite.

De par la 3e formule de Frenet avec le vecteur binormal :

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}=\begin{pmatrix}-\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin(t)\\ \dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos(t)\\ \dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin(t)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos(t)\\-\sin(t)\\0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix}r\cos(t)\cdot 0-h(-\sin(t))\\ h(-\cos(t))-(-r\sin(t))\cdot 0\\ (-r\sin(t))(-\sin(t))-r\cos(t)(-\cos(t))\end{pmatrix} \quad (8.6.94)$$

et le rayon de torsion donné par la relation :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}=\frac{\vec{N}}{R'} \quad (8.6.95)$$

nous avons donc :

$$\vec{N}=R'\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s}=R'\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \quad (8.6.96)$$

Et comme nous avons obtenu les trois relations suivantes :

$$\vec{N}=\begin{pmatrix}-\cos(t)\\-\sin(t)\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos(t)\\ \dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin(t)\\ 0\end{pmatrix} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \quad (8.6.97)$$

Nous en déduisons le rayon de torsion :

$$R'=-\frac{r^2+h^2}{h} \quad (8.6.98)$$

E2. Déterminons maintenant le cas important de l'expression explicite du rayon de courbure en coordonnées cartésiennes (résultat utilisé dans la section de Génie Civil et utile dans de nombreux autres domaines de la physique). Considérons pour cela la figure suivante :

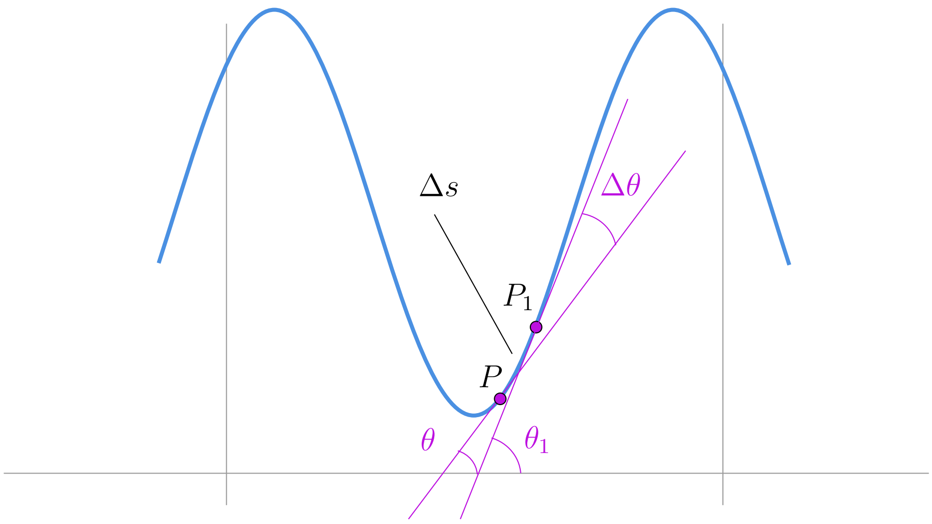


FIG. 8.210 – **Illustration de l'approche du rayon de courbure en "1D"**

Nous avons donc le rayon de courbure qui est donné intuitivement par la relation suivante si nous ne faisons pas usage de l'analyse vectorielle :

$$C = \lim_{\Delta \to \theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} \tag{8.6.99}$$

Nous avons aussi :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \tag{8.6.100}$$

et comme :

$$\tan(\theta) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{8.6.101}$$

il vient alors :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{8.6.102}$$

et donc :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right) \tag{8.6.103}$$

Nous avons démontré dans la section de Calcul Intégral Et Différentiel la dérivée suivante (voir page 1457) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{8.6.104}$$

Nous avons alors immédiatement par les dérivées composées :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{8.6.105}$$

Ceci étant fait nous avons aussi besoin de $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s$. Or, nous avons démontré avec différentes approches dans la section de Mécanique Analytique et Formes Géométriques (entre autres) en utilisant simplement Pythagore que :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} \tag{8.6.106}$$

En regroupant le tout nous avons finalement :

$$C = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{8.6.107}$$

Il vient donc alors que le rayon de courbure du cercle localement osculateur d'une fonction cartésienne dans le plan (en prenant la valeur absolue de la dérivée seconde pour éviter d'avoir un rayon négatif...) est donné par :

$$R=\frac{1}{C}=\frac{\left(1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} \tag{8.6.108}$$

En cours de traduction de l' anglais

8.6.4 Nappes paramétrées

L'étude des nappes paramétrées est étroitement liée aux propriétés d'expression des surfaces paramétriques comme vu à la fin de la section de Géométrie Analytique. Nous nous s'intéressons donc au calcul du plan tangent et de la courbure d'une surface en un point donné. Il s'agit donc d'une extension des sujets précédents. Par exemple, l'étude des isolignes d'une surface que nous avons vue précédemment peut également être considérée comme appartenant au domaine d'étude des nappes paramétrées.

Maintenant, considérons pour commencer $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$g\begin{pmatrix} D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \rightarrow g(u,v) = M \end{pmatrix} \tag{8.6.109}$$

avec :

$$\overrightarrow{\text{O}M} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \tag{8.6.110}$$

tel que $h(I) \subset D$.

Nous pouvons définir $g \circ h$:

$$g \circ h\begin{pmatrix} I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow (g \circ h)(t) = g(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \tag{8.6.111}$$

Si l'on suppose h continue, il est clair que $g \circ h$ est un arc paramétrique. Notons Γ son support, nous avons $\Sigma \subset \Sigma$ et nous disons que Σ est une "courbe tracée" ou "courbe inscrite" sur Σ définie par les "coordonnées de Gauss" u et v (déjà vues dans la section de Géométrie Non-Euclidienne).

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

Nous supposerons toujours désormais que $D = I \times J$.

Étant donné $M_0 \in \Sigma$, $M_0 = g(u_0, v_0)$. Regardons les deux courbes tracées sur Σ définies par les arcs paramétrés suivants :

$$(g_{v_0}, I) \;\text{ avec }\; g_{v_0}\begin{pmatrix} I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \rightarrow g_{v_0} = g(u, v_0) \end{pmatrix} \tag{8.6.112}$$

$$(g_{u_0}, J) \;\text{ avec }\; g_{u_0}\begin{pmatrix} J \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v \rightarrow g_{u_0} = g(u_0, v) \end{pmatrix} \tag{8.6.113}$$

g_{u_0} et g_{v_0} sont les deux fonctions nommées "fonctions partielles" de g sur (u_0, v_0).

Les supports de (g_{u_0}, J) et (g_{v_0}, I) sont nommés "courbes-coordonnées" de Σ sur M_0 relativement à la paramétrisation (g, D). Nous les notons respectivement Γ_{u_0} et Γ_{v_0} (voir figure ci-dessous). Nous nommons également Γ_{u_0} "première-courbe-coordonnée" et Γ_{v_0} "deuxième-courbe-coordonnée".

Il est bien sûr relativement évident (voir section Calcul Différential let Intégral page 1448) que :

$$\frac{\mathrm{d}g_{u_0}}{\mathrm{d}v}=\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v} \quad (8.6.114)$$

est tangent à Γ_{u_0} en M_0 et que $\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}/\partial u$ est tangent à Γ_{v_0} en M_0.

Comme nous l'avons déjà démontré dans la section sur de Calcul Tensoriel, cette expression est indépendante de la surface car la longueur infinitésimale de l'élément $\mathrm{d}s$ est indépendante de la paramétrisation de Σ. Cette forme quadratique est donc un invariant qui représente la métrique de Σ. Elle est aussi notée comme suit par tradition :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2=g_{uu}\mathrm{d}u^2+2g_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g_{vv}\mathrm{d}2} \quad (8.6.115)$$

ou même sous une forme plus condensée en utilisant la notation tensorielle :

$$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \quad (8.6.116)$$

En cours de l'anglais

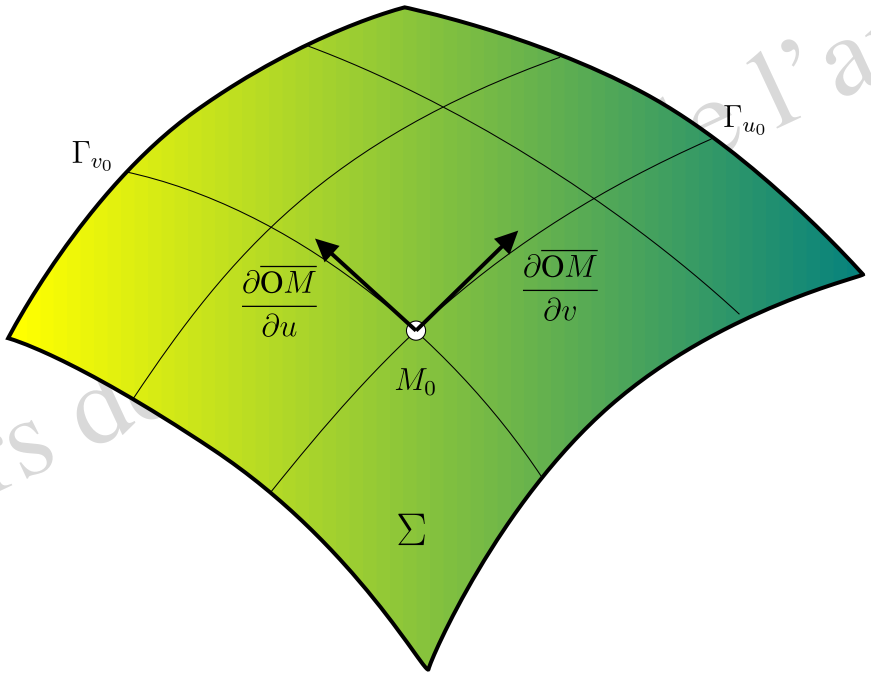


FIG. 8.211 – Représentation d'une nappe paramétrée

8.6.4.1 Métrique d'une nappe paramétrée

Soit :

$$g\left(\begin{matrix}D\rightarrow\mathbb{R}^3\\(u,v)\rightarrow g(u,v)=M\end{matrix}\right) \quad (8.6.117)$$

avec :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M}=\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\\z(u,v)\end{pmatrix} \quad (8.6.118)$$

Posons $\mathrm{d}g = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ ou en d'autres termes :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \tag{8.6.119}$$

Nous avons aussi (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1449) :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{8.6.120}$$

et nous avons démontré au début de cette section que l'abscisse curviligne dans un espace cartésien (en coordonnées de Riemann) était donnée par :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{8.6.121}$$

Nous avons donc après substitution en coordonnées de Gauss et en groupant les termes du même type :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]^2 \mathrm{d}u^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]^2 \mathrm{d}v^2 \end{aligned} \tag{8.6.122}$$

Ce qui est équivalent à écrire (attention à ne pas y lire que nous avons le carré d'un vecteur mais qu'il s'agit du produit scalaire avec lui-même !) :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u}\right)^2 \mathrm{d}u^2 + 2\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u}\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{d}v^2 \tag{8.6.123}$$

De manière plus traditionnelle avec la notation :

$$E = \left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u}\right)^2 \qquad F = \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u}\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v} \qquad G = \left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v}\right)^2 \tag{8.6.124}$$

Nous obtenons une relation nommée "première forme quadratique fondamentale" (nous ne prouverons dans ce livre que la seconde) :

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 \tag{8.6.125}$$

appelée aussi "première forme différentielle de Gauss". Il est intéressant d'écrire cette dernière relation sous la forme :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{E}(E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v)^2 + \frac{EG - F^2}{E}\mathrm{d}v \tag{8.6.126}$$

et nous voyons que pour que $\mathrm{d}s^2$ soit positif, il faut alors que E et aussi $EG - F^2$ soient positifs !

En cours de traduction de l'anglais

La première forme fondamentale peut également être représentée comme une matrice symétrique :

$$\mathrm{d}s^2 = \vec{u}^T \begin{bmatrix} E & G \\ F & G \end{bmatrix} \vec{v} \tag{8.6.127}$$

La première forme fondamentale est souvent écrite dans la notation moderne du tenseur métrique. Les coefficients peuvent alors s'écrire g_{ij} :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{8.6.128}$$

et nous démontrerons dans la section sur le Calcul Tensoriel lors de notre étude du déterminant de Gram (voir la page 2025) que cette relation peut être utilisée pour calculer la surface de n'importe quelle surface (régulière) ! !

8.6.4.1.1 Régularité d'une surface

Définition (#8.6.360) : Un point M appartenant à la surface Σ est dit (c'est relativement logique...) "point régulier", si et seulement si :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v} \neq \vec{0} \tag{8.6.129}$$

Une surface est logiquement dite "surface régulilère", si et seulement si, tous ses points sont réguliers (si le produit vectoriel est nul alors il y a quelque part un "pli" à $\pi/2$ radians... et cela est relativement embêtant pour la continuité).

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v} \right\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial u(u,v)}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial u(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \partial_u y \partial_v z - \partial_u z \partial_v y \\ \partial_u z \partial_v x - \partial_u x \partial_v z \\ \partial_u x \partial_v y - \partial_u y \partial_v x \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= \left\| \sqrt{(\partial_u y \partial_v z - \partial_u z \partial_v y)^2 + (\partial_u z \partial_v x - \partial_u x \partial_v z)^2 + (\partial_u x \partial_v y - \partial_u y \partial_v x)^2} \right\| \\
&= (\partial_u y \partial_v z - \partial_u z \partial_v y)^2 + (\partial_u z \partial_v x - \partial_u x \partial_v z)^2 + (\partial_u x \partial_v y - \partial_u y \partial_v x)^2 \\
&= (\partial_u y \partial_v z)^2 - 2\partial_u y \partial_v z \partial_u z \partial_v y + (\partial_u z \partial_v y)^2 \\
&+ (\partial_u z \partial_v x)^2 - 2\partial_u z \partial_v x \partial_u x \partial_v z + (\partial_u x \partial_v z)^2 \\
&+ (\partial_u x \partial_v y)^2 - 2\partial_u x \partial_v y \partial_u y \partial_v x + (\partial_u y \partial_v x)^2 \\
&= \ldots \text{je suis fatigué de faire de l'algèbre} \ldots = EG - F^2
\end{aligned} \tag{8.6.130}$$

L'angle α entre les deux courbes-coordonnées Γ_{u_0} et Γ_{v_0} à Σ en M_0 est donné par la définition du produit scalaire :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u} \circ \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v} = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u} \right\| \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial v} \right\| \cos(\alpha) = F = 0 \tag{8.6.131}$$

En cours de traduction de l'anglais

D'où l'expression :

$$\cos(\alpha)=\frac{\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}\circ\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}\right\|\left\|\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}\right\|}=\frac{\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}\circ\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}\right)^2\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}\right)^2}}=\frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (8.6.132)$$

Donc une condition nécessaire et suffisant pour que les courbes-coordonnées Γ_{u_0} et Γ_{v_0} soient perpendiculaires à Σ en M_0 est que F soit nul. Dans ce cas particulier, nous disons que les coordonnées curvilignes u, v sur la surface sont des coordonnées orthogonales ! ! !

✍**Exemples :**

E1. Considérons le paramétrage du plan cartésien. Nous avons alors :

$$\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\[2ex]\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\end{cases} \quad (8.6.133)$$

d'où :

$$E=G=1, F=0 \quad (8.6.134)$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2 \quad (8.6.135)$$

Nous retrouvons donc la même abscisse curviligne différentielle que celle vue dans la section de Calcul Tensoriel et Relativité Générale avec la métrique diagonale de l'espace plat.

Nous avons aussi :

$$EG-F^2=1\neq 0 \quad (8.6.136)$$

Donc, la surface est régulière.

Nous avons également :

$$\cos(\alpha)=\frac{F}{\sqrt{EG}}=\frac{0}{\sqrt{1}}=0\Rightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{2} \quad (8.6.137)$$

Donc, les deux courbes-coordonnées sont perpendiculaires !

E2. Considérons le paramétrage du cylindre. Nous avons alors (voir section Calcul Vectoriel page 1837) :

$$\overrightarrow{\text{O}M}=\begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\overrightarrow{\text{O}M}}{\partial r}=\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial\overrightarrow{\text{O}M}}{\partial \phi}=\begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (8.6.138)$$

d'où :

$$E=1, G=r^2, F=0 \quad (8.6.139)$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\phi^2 \quad (8.6.140)$$

Nous retombons sur la même abscisse curviligne différentielle que celle vue dans la section de Calcul Tensoriel et Relativité Générale avec la métrique diagonale en coordonnées polaires.

Nous avons aussi :

$$EG-F^2=r^2\neq 0 \quad (8.6.141)$$

Donc, la surface est régulière tant que r est non nul. Nous avons également :

$$\cos(\alpha)=\frac{F}{\sqrt{EG}}=\frac{0}{\sqrt{r^2}}\Rightarrow \alpha=\pm\frac{\pi}{2} \quad (8.6.142)$$

Donc, les deux courbes-coordonnées sont perpendiculaires sur le cylindre.

E3. Considérons le paramétrage la sphère de centre O et de rayon r. Nous avons alors (voir section Calcul Vectoriel page 1826) :

$$\overrightarrow{\text{O}M}=\begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\overrightarrow{\text{O}M}}{\partial \theta}=\begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial\overrightarrow{\text{O}M}}{\partial \phi}=\begin{pmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (8.6.143)$$

d'où :

$$E=r^2, G=r^2\sin^2(\theta), F=0 \quad (8.6.144)$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}s^2=r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \quad (8.6.145)$$

Nous retrouvons donc la même abscisse curviligne différentielle que celle vue dans la section de Relativité Générale avec la métrique diagonale en coordonnées sphériques.

Nous avons aussi :

$$EG-F^2=r^4\sin^2(\theta)\neq 0 \tag{8.6.146}$$

Donc, la surface est régulière tant que r et θ sont non nuls. Nous avons également :

$$\cos(\alpha)=\frac{F}{\sqrt{EG}}=\frac{0}{\sqrt{r^4\sin^2(\theta)}}\Rightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{2} \tag{8.6.147}$$

Donc, les deux courbes-coordonnées sont perpendiculaires sur la sphère.

E4. Considérons le paramétrage de l'hyperboloïde. Nous avons alors (voir section Géométrie Analytique page 2813) :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M}=\begin{pmatrix}a\sqrt{1+t^2}\cos(u)\\ a\sqrt{1+t^2}\sin(u)\\ bu\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial t}=\begin{pmatrix}a\dfrac{a\cos(u)t}{\sqrt{1+t^2}}\\ a\dfrac{a\sin(u)t}{\sqrt{1+t^2}}\\ 0\end{pmatrix}\\ \dfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{O}M}}{\partial u}=\begin{pmatrix}-a\sqrt{1+t^2}\sin(u)\\ a\sqrt{1+t^2}\cos(u)\\ b\end{pmatrix}\end{cases} \tag{8.6.148}$$

d'où :

$$E=a^2\frac{t^2}{1+t^2},G=a^2(1+t^2)+b^2,F=0 \tag{8.6.149}$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}s^2=a^2\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t^2+(a^2(1+t^2)+b^2)\mathrm{d}u^2 \tag{8.6.150}$$

Prenons b comme étant nul. Nous avons alors :

$$EG-F^2=a^4t^2 \tag{8.6.151}$$

Donc, la surface est régulière tant que a est non nul. Nous avons également :

$$\cos(\alpha)=\frac{F}{\sqrt{EG}}=\frac{0}{\sqrt{a^4t^2}}\Rightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{2} \tag{8.6.152}$$

Donc, les deux courbes-coordonnées sont perpendiculaires sur l'hyperboloïde.

~80 %

35 votes, 74.86%

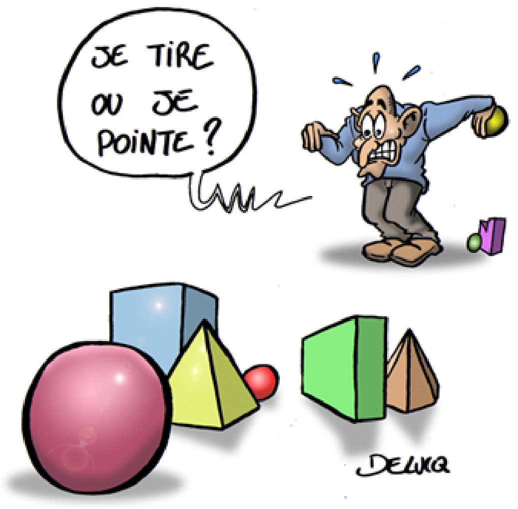
En cours de traduction de l' anglais

8.7. Formes Géométriques

NOUS avons déjà défini au début de la section sur la Géométrie Euclidienne les notions de dimensions topologiques, ce qu'étaient un point de dimension zéro et une courbe de dimension unitaire. Nous ne reviendrons pas sur ces notions nous nous concentrerons ici principalement sur les formes de dimensions supérieures que nous utiliserons beaucoup dans les chapitres liés à la Physique théorique.

Le but de cette section est de répertorier avec démonstrations quelques propriétés mathématiques remarquables des formes et corps géométriques connus (surface, volume, centre de masse, moment d'inertie). Effectivement, il existe nombre de formulaires les répertoriant sans démonstrations mais peu voire pas, d'ouvrages les démontrant toutes (nous n'en avons jamais vu en tout cas...). La liste ci-dessous est à ce jour loin d'être exhaustive (puisqu'il existe une infinité de formes géométriques) mais elle sera complétée avec le temps.

de l'anglais



En cours

Les quelques formes que nous avons souhaité présenter permettent assez facilement de trouver les propriétés remarquables d'un très grand nombre de formes non répertoriées dans cette section par assemblage ou décomposition.

Remarques

R1. Les relations trigonométriques remarquables dans les formes géométriques ci-dessous ne sont pas démontrées dans cette section. Celles-ci se trouvent déjà toutes dans la section traitant spécifiquement de la Trigonométrie (voir page 2486) et du Calcul Différentiel et Intégral (voir page 1432).

R2. Nous entendons par "centre de gravité", le "barycentre" tel que étudié dans la section de Géométrie Euclidienne (voir page 2614).

8.7.1 Surfaces (aires) connues

Il existe plusieurs définitions du concept de surface dont une due à Euclide et une autre moderne due à la topologie (voir chapitre du même nom).

Définitions (#8.7.361) :

D1. Une "surface plane" est une zone fermée qui peut être identifiée presque approximativement par une hauteur et une largeur.

D2. Une "surface" est une variété topologique de dimension 2.

Selon les auteurs, une surface ou une aire est désignée par les symboles : $A, S, \mathcal{A}, \mathcal{S}, \Sigma$.

> **Remarque**
>
> Nous nous intéresserons dans un premier temps uniquement aux propriétés (périmètre, surface, centre de gravité, etc.) de surfaces plongées dans des géométries euclidiennes.

8.7.1.1 Polygone

Définition (#8.7.362) : Un "polygone" est une figure plane limitée par des segments de droites consécutifs (autrement dit : par une polyligne fermée).

En cours de traduction de l'anglais

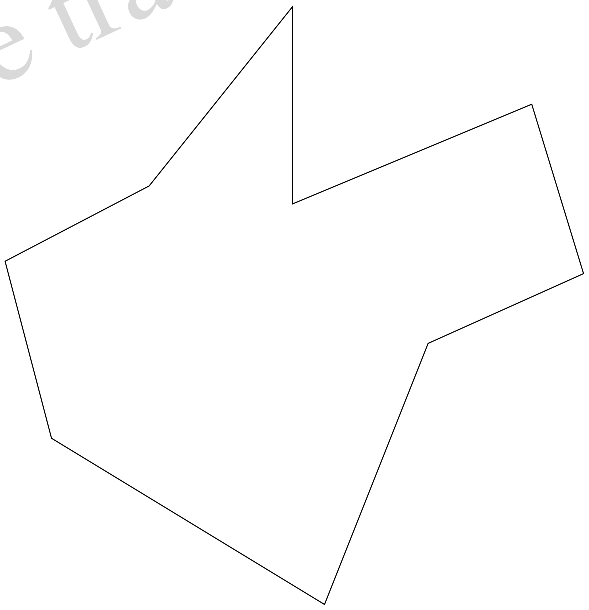


FIG. 8.212 – **Exemple de polygone quelconque**

Définition (#8.7.363) : Un "quadrilatère", "pentagone", "hexagone", "heptagone" sont des polygones à respectivement quatre, cinq, six, sept... côtés.

Nous distinguons trois grandes familles (mais elles ne sont pas les seules !) de polygones :

1. Les polygones croisés
2. Les polygones concaves (non-convexes)
3. Les polygones convexes

Nous retrouverons ces deux dernières familles dans différentes sections de ce livre (mais pour les détails voir ci-après).

Avant d'aller plus loin nous tenons à préciser au lecteur qu'il n'existe de relation mathématique permettant de calculer la surface que pour des polygones simples. Même si dans la pratique nous ne rencontrons quasiment toujours que des polygones non simples, nous avons considéré comme inutile de nous attarder sur la détermination d'une relation qui permettrait de ramener le calcul de la surface d'un polygone quelconque à celui de polygones simples ou d'utiliser les méthodes de Monte Carlo (voir section Méthodes Numériques Methods page ??).

Définition (#8.7.364) : Un polygone est dit "polygone croisé" si deux au moins de ses côtés sont sécants, c'est-à-dire si au moins deux de ses côtés se coupent.

C'est le cas du polygone $ABCDE$ ci-dessous :

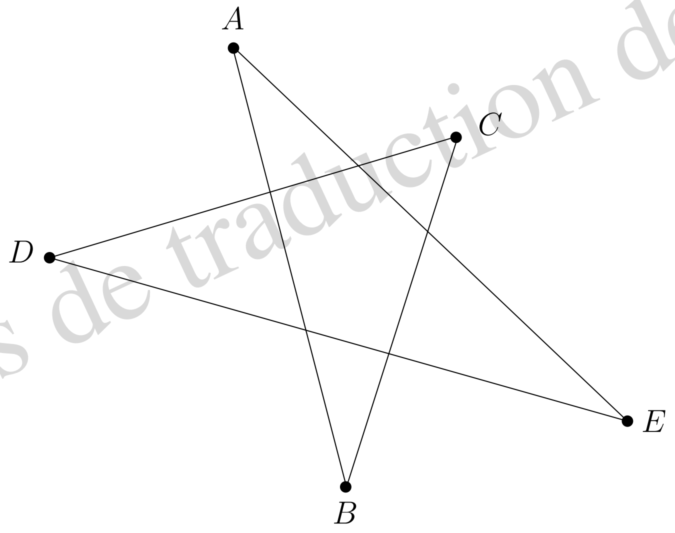


FIG. 8.213 – **Exemple de polygone croisé**

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

"L'enveloppe" d'un polygone est le polygone obtenu en suivant le contour extérieur de celui-ci. Par exemple, l'enveloppe du polygone précédent est un décagone dont les sommets sont les cinq sommets du pentagone et les cinq intersections de ses côtés.

Définition (#8.7.365) : Un polygone est dit "polygone concave" s'il n'est pas croisé et si une ou plusieurs de ses diagonales ne sont pas entièrement à l'intérieur de la surface délimitée par le polygone.

Par exemple, le pentagone $ACDBE$ ci-dessous est dit concave car les diagonales $\overline{BC}$ et $\overline{CE}$ sont respectivement à l'extérieur et partiellement à l'extérieur de la surface délimitée par le polygone.

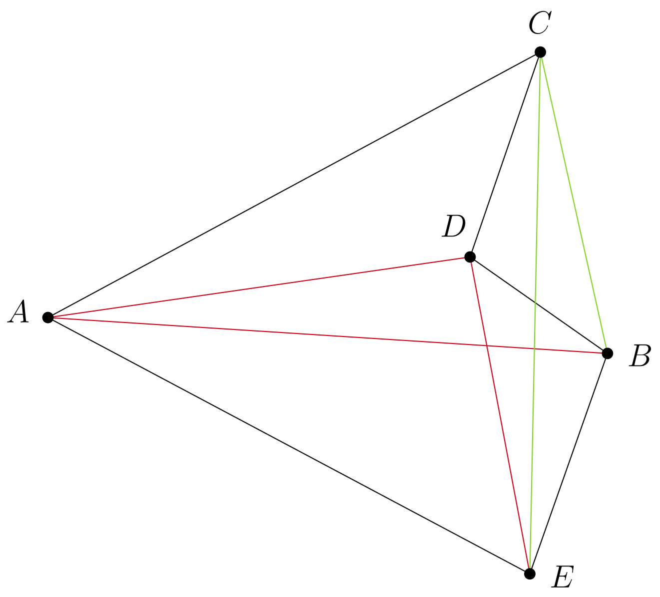


FIG. 8.214 – **Exemple de polygone concave**

Définition (#8.7.366) : Un polygone est dit "polygone convexe" s'il n'est pas croisé et si toutes ses diagonales sont entièrement à l'intérieur de la surface délimitée par le polygone.

L'hexagone $MNOPQR$ ci-dessous est dit convexe :

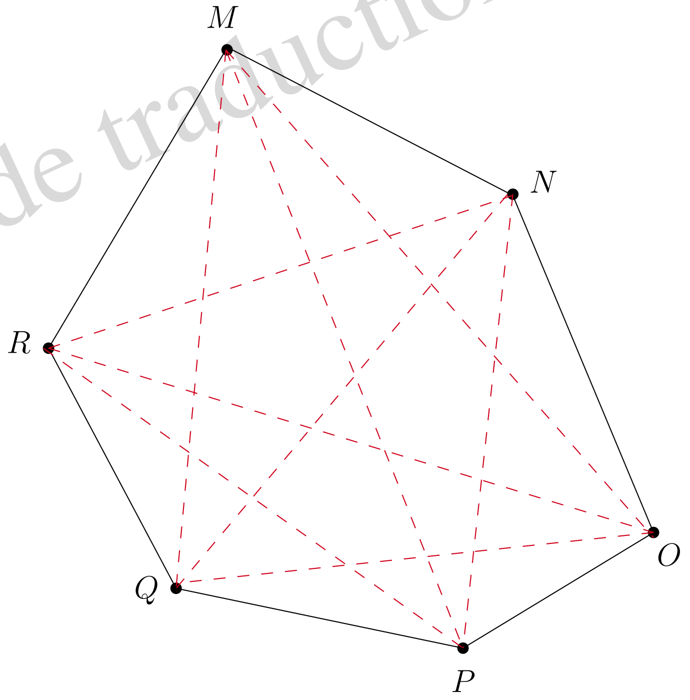


FIG. 8.215 – **Exemple de polygone convexe**

Relativement aux définitions données précédemment où les diagonales étaient mises en évidence, voyons s'il y a une relation permettant de connaître leur nombre relativement au nombre d'arêtes du polygone.

Partons pour cela d'un polygone de n côtés (notons qu'il a aussi n sommets) :

En cours de traduction de l'anglais

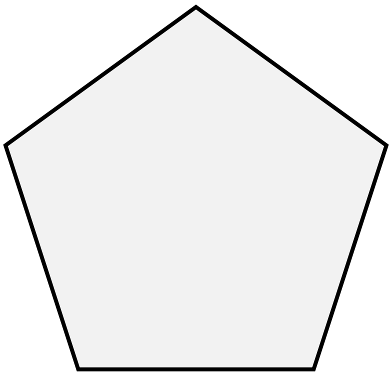


FIG. 8.216 – Exemple d'un polygone (pentagone avec 5 arêtes et 5 sommets)

Nous définissons le total de segments S comme étant égal à la quantité de côtés (arêtes) E plus la quantité de diagonales D tel que :

$$S = E + D \tag{8.7.1}$$

Avec notre exemple, nous pouvons voir que $S = 10$:

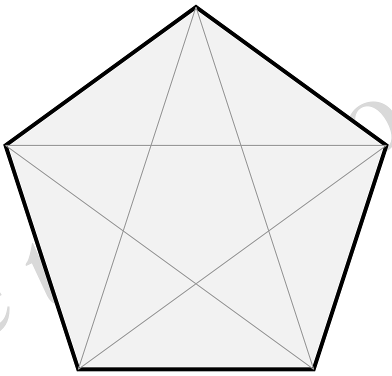


FIG. 8.217 – Pentagone avec tous ses 10 segments

En cours de traduction de l'anglais

Maintenant, prenons le premier point de notre pentagone. Nous voyons que nous pouvons joindre tous les points n, sauf le point considéré (-1) soit la formation de $n-1$ segments comme le montre la figure ci-dessous :

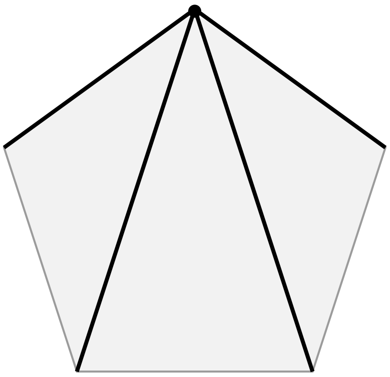


FIG. 8.218 – Exemple de segments partant d'un point choisi

Avec le deuxième point, nous pouvons aussi joindre tous les points n, sauf le point considéré (-1) et le premier point déjà vu (-1) soit la formation de $n-2$ segments :

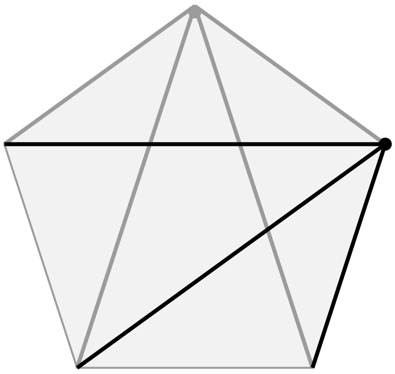


FIG. 8.219 – Démarche avec le 2ème point

Avec le troisième, nous pouvons aussi joindre tous les points n, sauf le point considéré (-1) et sauf les deux points déjà vu (-2) soit la formation de $n-3$ segments :

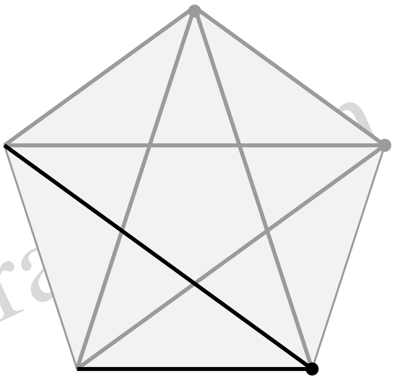


FIG. 8.220 – Démarche avec le troisième point

En cours de traduction de l'anglais

Nous continuons avec les autres points : le 4e qui donne $n-4$ segments, le 5e qui donne $n-5$ segments... In extenso, nous voyons donc que le $(n-2)$e point donne donc $n-(n-2)$ segments, etc.

Nous avons donc finalement pour :

$$\begin{array}{r l} s = & 1+2+\ldots+(n-2)+(n-1) \\ +s = & (n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 \\ \hline 2s = & n+n+\ldots+n+n \end{array} \tag{8.7.2}$$

En simplifiant nous trouvons donc :

$$s=\frac{n(n-1)}{2} \tag{8.7.3}$$

Nous nous retrouvons donc avec deux relations :

$$s=\frac{n(n-1)}{2} \quad \text{et} \quad s=n+d \tag{8.7.4}$$

Dès lors il vient que :

$$d=s-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2} \tag{8.7.5}$$

Définition (#8.7.367) : Un "polygone régulier" est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles sont égaux. Pour tout entier naturel $n \geq 3$, nous pouvons dessiner un polygone régulier à n côtés ; nous appelons parfois ce polygone "n-gone régulier" pour souligner qu'il a n côtés. Voici les n-gones réguliers pour $n=3,4,\ldots,12$. Plus n est grand, plus les n-gones réguliers ressemblent à un cercle parfait :

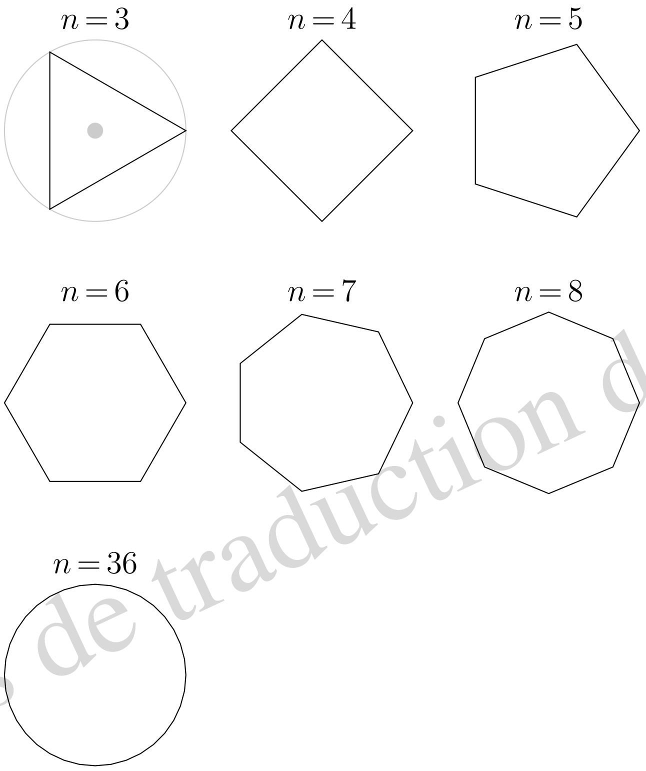


FIG. 8.221 – **Certains polygones réguliers (sous-famille des polygones convexes)**

En cours de traduction de l'anglais

8.7.1.2 Rectangle

Définition (#8.7.368) : Le "rectangle" est un cas particulier du quadrilatère dans le sens où ses côtés L et H (notation pour Longueur et Hauteur selon figure ci-dessous) sont égaux deux à deux et à angle droit (en d'autres termes, L n'est pas forcément égal à H).

D'autres définitions possibles consistent à dire qu'un rectangle est un parallélogramme disposant d'un angle droit ou un quadrilatère ayant quatre angles droits...

Remarque

Le rectangle peut être vu comme la composition de deux (ou plus) triangles rectangles (voir plus loin la définition). Pour construire un rectangle, il suffirait d'avoir un seul et unique triangle rectangle et lui faire subir une double réflexion et une rotation par rapport

à un axe bien choisi (voir section Géométrie Euclidienne page 2619).

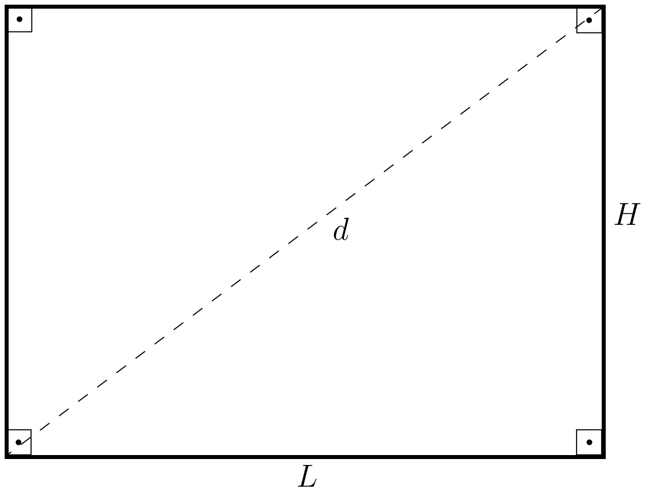


FIG. 8.222 – Exemple de rectangle

De par les axiomes d'Euclide (voir section Géométrie Euclidienne page 2545), le périmètre d'un rectangle est donné par :

$$P = 2(L + H) \tag{8.7.6}$$

Et par définition, sa surface par :

$$S = L \cdot H \tag{8.7.7}$$

et la longueur de sa diagonale par (application du théorème de Pythagore) :

$$d = \sqrt{L^2 + H^2} \tag{8.7.8}$$

La position du centre de gravité du rectangle, si nous posons le repère cartésien dans le coin inférieur gauche de la forme, est trivialement donnée par :

$$G(x, y) = \left(\frac{L}{2}, \frac{H}{2}\right) \tag{8.7.9}$$

Enfin, indiquons que si nous étions des êtres vivants dans un espace à deux dimensions, le rectangle serait ce que nous apercevrions si un parallélépipède traversait notre univers parallèlement à ses faces.

Remarquons enfin, et sans démonstration, que la somme des angles d'un rectangle plan est égale à $4 \cdot \pi/2 = 2\pi$.

En cours de traduction de l'anglais

8.7.1.3 Carré

Définition (#8.7.369) : Le "carré" est un cas particulier du rectangle dans le sens où ses quatre côtés sont égaux tels que $L = H$.

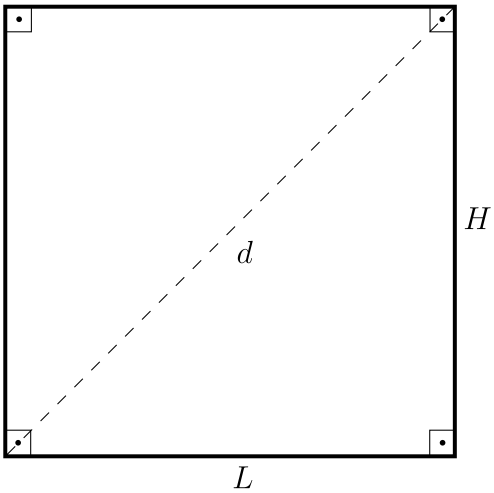


FIG. 8.223 – **Exemple de carré**

De par les axiomes d'Euclide (voir section Géométrie Euclidienne page 2545), le périmètre du carré est donné par :

$$\boxed{P = 4L} \tag{8.7.10}$$

Ainsi, il vient pour la surface que :

$$\boxed{S = L^2} \tag{8.7.11}$$

et pour sa diagonale :

$$d = \sqrt{L^2 + H^2} = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = \sqrt{2}L \tag{8.7.12}$$

La position du centre de gravité du carré, si nous posons le repère cartésien dans le coin inférieur gauche de la forme, est trivialement donnée par :

$$G(x, y) = \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \tag{8.7.13}$$

Enfin, indiquons que si nous étions des êtres vivants dans un espace à deux dimensions, le carré serait ce que nous apercevrions si un cube traversait notre univers parallèlement à ses faces.

Notez également, et sans démonstration, que la somme des angles d'un carré plan est égale à $4 \cdot \pi / 2 = 2\pi$.

En cours de traduction de l' anglais

8.7.1.4 Triangle quelconque

Définition (#8.7.370) : Un "triangle non spécifié" est un polygone à trois côtés, notamment les triangles isocèles, équilatéraux et rectangles. Un triangle de sommets A, B et C est souvent noté $\triangle ABC$.

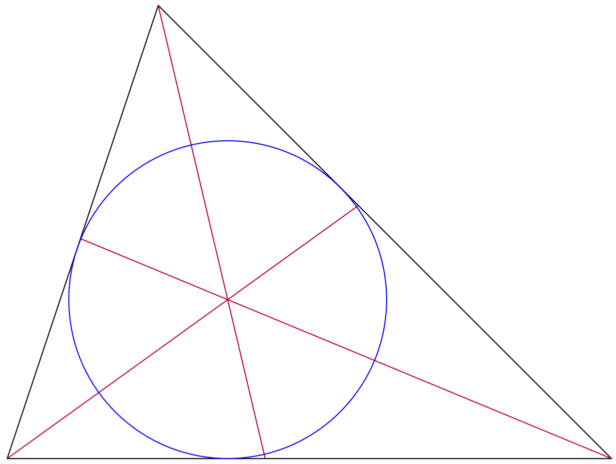


FIG. 8.224 – Exemple d'un triangle non spécifié avec un cercle inscrit et des bissectrices

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Pour les détails sur les cercles circonscrits et inscrits des triangles, nous renvoyons le lecteur à la section de Géométrie Euclidienne (voir page 2600).

De par les axiomes d'Euclide (voir section Géométrie Euclidienne page 2545), le périmètre d'un triangle quelconque est donné par :

$$P = a + b + c \quad (8.7.14)$$

Le triangle quelconque est toujours décomposable en deux triangles rectangles. Ainsi, celui de la figure ci-dessus peut se décomposer en deux triangles rectangles :

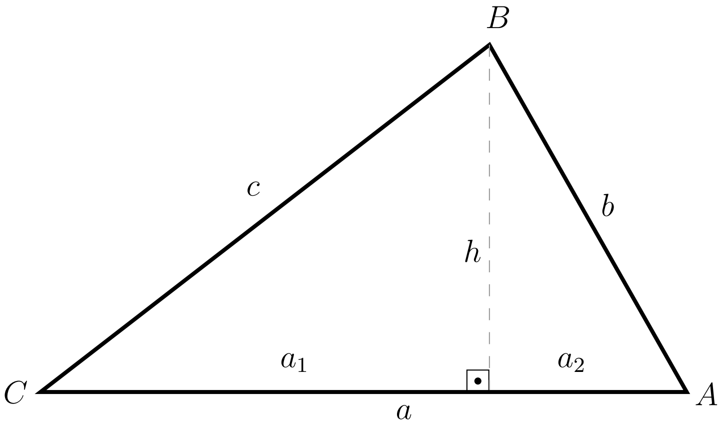


FIG. 8.225 – Triangle quelconque décomposé en deux triangles rectangles

de base respective a_1 et a_2 (définis par la projection orthogonale du sommet opposé au segment

a) tels que :

$$a = a_1 + a_2 \tag{8.7.15}$$

La surface de chacun de ces deux triangles rectangles est comme nous l'avons déjà implicitement dit dans notre étude du rectangle, la moitié de la surface d'un rectangle de même longueur et même hauteur. Ainsi :

$$S_1 = \frac{a_1 h}{2} \qquad S_2 = \frac{a_2 h}{2} \tag{8.7.16}$$

Ainsi, la somme de ces surfaces, nous donne la surface du triangle quelconque :

$$\boxed{S_{\triangle} = S_1 + S_2 = \frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} h = \frac{ah}{2}} \tag{8.7.17}$$

Nous pouvons dire à partir de cette dernière relation, que la surface de tout triangle quelconque est assimilable à la moitié de la surface d'un rectangle de longueur $L = a$ et hauteur $H = h$.

Remarque

Quelle que soit la base a, b, c et la hauteur respective h_a, h_b, h_c, le raisonnement précédent reste bien évidemment totalement juste.

Ceci dit... c'est bien joli mais il y a de très nombreux cas pratiques où l'on ne connaît pas la hauteur mais seulement la longueur des trois côtés. Alors que fait-on ? Eh bien on va utiliser le théorème du cosinus (Théorème d'Al-Kashi) démontré dans le chapitre de Trigonométrie (voir page 2526) qui nous donne pour rappel pour un triangle quelconque du type :

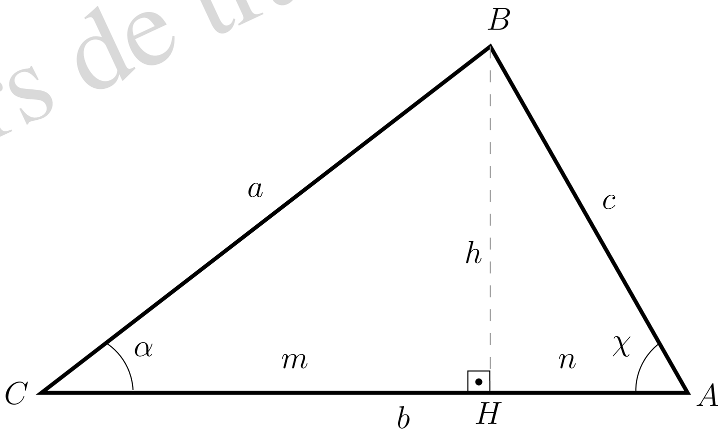


FIG. 8.226 – **Rappel de la construction pour la démonstration du théorème du cosinus**

$$\cos(\chi) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{8.7.18}$$

et aussi la relation qui en découle dans le triangle y relatif pour la surface :

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{bc\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \chi\right)}{2} = \frac{bc\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)}{2} = \frac{bc\sin(\chi)}{2} \tag{8.7.19}$$

En cours de traduction anglais

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{bc\sqrt{1-\cos^2(\chi)}}{2} = \frac{bc\sqrt{(1-\cos(\chi))(1+\cos(\chi))}}{2} \\
&= \frac{bc}{2}\sqrt{\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} \\
&= \frac{bc}{2}\sqrt{\frac{1}{4b^2c^2}(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(-(b-c)^2+a^2)\left((b+c)^2-a^2\right))} = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2-(b-c)^2)\left((b+c)^2-a^2\right)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+b-c)(a-b+c))\left((b+c+a)(b+c-a)\right)}
\end{aligned} \tag{8.7.20}$$

Ainsi, après réarrangement, nous obtenons finalement :

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}} \tag{8.7.21}$$

Relation communément appelée "formule de Héron" que la plupart connaissent sous la forme suivante lorsque nous posons $\Sigma := \dfrac{1}{2}(a+b+c)$:

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\Sigma\,(\Sigma-a)\,(\Sigma-b)\,(\Sigma-c)}
\end{aligned} \tag{8.7.22}$$

La détermination du centre de gravité (ou barycentre) G (voir section Géométrie Euclidienne Geometry page 2614) est un peu moins intuitive que dans le cas du rectangle...

Théorème 8.24. Soit un triangle $\triangle ABC$. Nous appelons A' le "milieu du segment" $\overline{BC}$, B' celui de $\overline{AC}$ et C' celui de $\overline{AB}$:

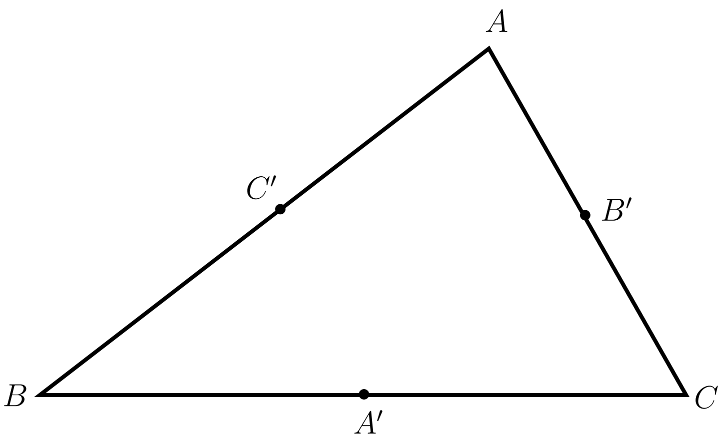


FIG. 8.227 – **Point de départ pour déterminer le centre de gravité**

Nous allons démontrer que seul le point G satisfaisant (voir section Géométrie Euclidienne) :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \tag{8.7.23}$$

En cours de traduction de l'anglais

est le point de concours des trois médianes du triangle $\triangle ABC$. Cette démonstration s'effectuera en deux étapes, en deux propositions (au terme, nous pourrons conclure par le théorème) :

P1. Si $\triangle ABC$est un triangle alors il existe un et un seul centre de gravité G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Démonstration 8.24.1. Soit G un point du plan tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Nous pouvons alors écrire que :

$$\overrightarrow{GA}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{GB}}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{GC}}=\vec{0} \tag{8.7.24}$$

d'où :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) \tag{8.7.25}$$

Cette relation vectorielle garantit que le point G est unique et que nous pouvons même le placer !

■ Q.E.D.

P2. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est ce point G.

Démonstration 8.24.2. Pour démontrer que les trois médianes sont concourantes, nous allons prouver que G appartient à chacune des trois médianes.

Juste avant nous avons prouvé que G satisfait l'égalité :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) \tag{8.7.26}$$

Comme A' est le milieu du côté $\overline{BC}$, nous pouvons alors écrire que :

$$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{AA'} \tag{8.7.27}$$

Il vient alors que :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AA'}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \tag{8.7.28}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont donc colinéaires ! Donc les points A, G, A' sont alignés. Autrement écrit, le point G fait partie de la médiane $\overline{AA'}$ du triangle $\triangle ABC$. Nous pouvons même dire qu'il se trouve aux deux tiers du segment $\overline{AA'}$ à partir du sommet A.

Ce que nous venons de montrer avec la médiane AA' est bien évidemment aussi vrai pour les deux autres médianes. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\\ \overrightarrow{BG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}\\ \overrightarrow{CG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}\end{aligned} \tag{8.7.29}$$

En résumé, le point G fait donc partie des trois médianes $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$. Ces trois droites sont donc concourantes et le point G en est le point d'intersection. Ce résultat nous sera utile plus tard lors de notre étude des polyèdres.

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

Enfin, indiquons que si nous étions des êtres vivants dans un espace à deux dimensions, le triangle serait ce que nous apercevrions si des formes géométriques composées d'au moins trois faces jointes traverseraient notre univers par un des sommets.

Rappelons également que la somme des angles de tout triangle plan est égale à π (180°) comme démontré dans la section de Géométrie Euclidienne page 2574.

Nous arrêterons là cette analogie avec un espace à deux dimensions généralisable à chaque forme géométrique que nous allons présenter par la suite (cercle et sphère, ellipse et ellipsoïde, etc.). L'idée était surtout de soumettre la conception que les volumes que nous connaissons dans notre quotidien peuvent aussi être vus comme des formes à quatre dimensions traversant notre espace de trois dimensions.

8.7.1.5 Triangle isocèle

Définition (#8.7.371) : Un "triangle isocèle" est un triangle dont les deux côtés sont de même longueur. Il est parfois spécifié comme ayant deux et seulement deux côtés de même longueur, et parfois comme ayant au moins deux côtés de même longueur, cette dernière version incluant ainsi le triangle équilatéral comme cas particulier.

En cours de traduction de l'anglais

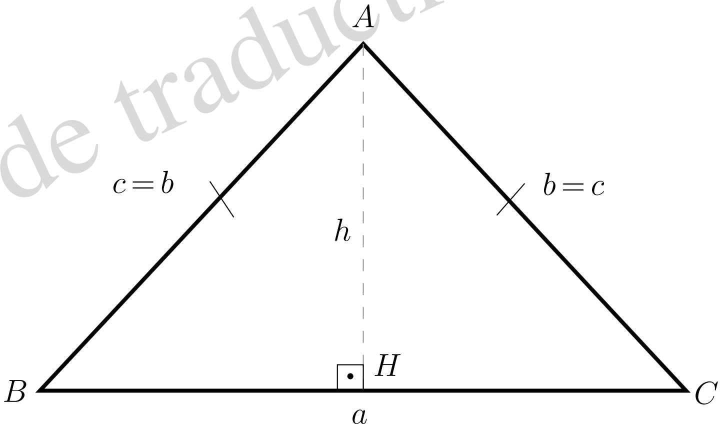


FIG. 8.228 – Exemple de triangle isocèle

Dans un triangle isocèle, les deux côtés égaux sont appelés "jambes", et le côté restant est appelé "base". L'angle opposé à la base est appelé "angle au sommet", et le point associé à cet angle est appelé "sommet". Les deux angles égaux sont appelés "angles isocèles".

Le périmètre d'un tel triangle reste :

$$P = a + b + c \tag{8.7.30}$$

mais comme il a deux côtés égaux, alors nous pouvons toujours simplifier comme suit :

$$P = a + b + b = a + 2b = a + 2c \tag{8.7.31}$$

La surface comme nous l'avons démontré dans le cas général reste :

$$S=\frac{ah}{2} \tag{8.7.32}$$

Et si nous ne connaissons pas la hauteur mais que nous connaissons les angles internes, nous pouvons appliquer la trigonométrie élémentaire si nécessaire (voir section Trigonométrie page 2491).

Et le centre de gravité reste, comme nous l'avons démontré dans le cas général, à la position :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\\ \overrightarrow{BG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}\\ \overrightarrow{CG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}\end{aligned} \tag{8.7.33}$$

Une propriété remarquable d'un triangle isocèle est que la bissectrice et la médiane du troisième côté, qui n'est pas de taille égale aux deux autres, ne sont pas distinguables et donc évidemment de longueur égale (voir section Géométrie Euclidienne page 2588).

Un triangle isocèle célèbre est le triangle isocèle rectangle car ses angles sont canoniques et nous obtenons immédiatement $\theta=\pi/4$ et nous avons aussi immédiatement la longueur de l'hypoténuse en appliquant le théorème de Pythagore :

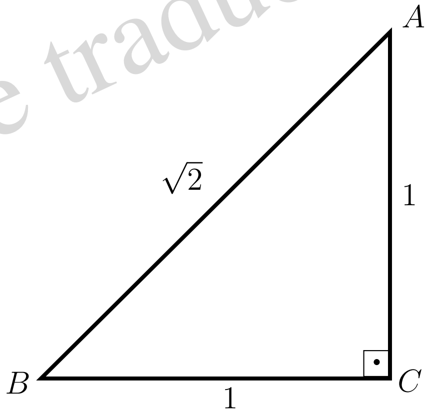


FIG. 8.229 – Triangle isocèle rectangle

Rappelons également que la somme des angles de tout triangle plan est égale à π (180°) comme démontré dans la section de Géométrie Euclidienne à la page 2574.

En cours de traduction de l'anglais

8.7.1.6 Triangle équilatéral

Définition (#8.7.372) : Un "triangle équilatéral" est un triangle dont les trois côtés sont égaux. En géométrie euclidienne, les triangles équilatéraux sont également équiangulaires ; c'est-à-dire que leurs trois angles internes sont congruents et égaux chacun à $\pi/3$. Ce sont des polygones réguliers, et peuvent donc être qualifiés de triangles réguliers.

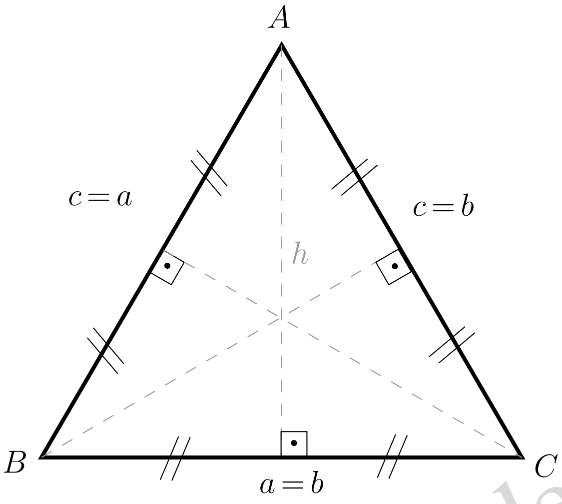


FIG. 8.230 – **Exemple de triangle équilatéral**

Théorème 8.25. Chaque angle d'un triangle équilatéral est $\pi/3$ [rad] (60°).

Démonstration 8.25.1. Rappelons d'abord que par le théorème de la somme des angles (page 2574) nous avons :

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \tag{8.7.34}$$

Nous savons également que Δabc est équilatéral, alors :

$$a=b=c \tag{8.7.35}$$

Alors comme $\angle\overline{ab}$ et $\angle\overline{ac}$ sont congruents, nous avons :

$$\hat{A}=\hat{B} \tag{8.7.36}$$

Et procédant de manière identique :

$$\hat{B}=\hat{C} \tag{8.7.37}$$

et :

$$\hat{C}=\hat{A} \tag{8.7.38}$$

Nous pouvons donc écrire que :

$$\hat{\theta}:=\hat{A}=\hat{B}=\hat{C} \tag{8.7.39}$$

Et en utilisant le théorème de la somme des angles :

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi=3\theta \tag{8.7.40}$$

Nous obtenons :

$$\theta=\frac{\pi}{3} \tag{8.7.41}$$

En cours de traduction de l' anglais

■ Q.E.D.

Le périmètre d'un tel triangle reste :

$$P = a + b + c \tag{8.7.42}$$

mais comme il a trois côtés égaux, alors nous pouvons toujours simplifier comme suit :

$$\boxed{P = 3a = 3b = 3c} \tag{8.7.43}$$

La surface comme nous l'avons prouvé ci-dessus dans le cas général reste :

$$\boxed{S = \frac{ah}{2}} \tag{8.7.44}$$

En appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons si nous ne connaissons pas h :

$$S = \frac{a}{2}h = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \tag{8.7.45}$$

Nous pouvons montrer qu'un triangle de périmètre donné a l'aire maximale possible s'il est équilatéral.

Démonstration 8.25.2. Rappelez-vous la formule du Héron prouvée ci-dessus ($\Sigma = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$) :

$$S = \sqrt{\Sigma\,(\Sigma - a)\,(\Sigma - b)\,(\Sigma - c)} \tag{8.7.46}$$

Pour trouver les conditions de la surface maximale, nous voulons calculer les dérivées par rapport à a, b et c mais comme ce ne sont pas des variables indépendantes, nous substituons d'abord le demi-périmètre Σ dans l'équation de Heron pour éliminer un degré de liberté :

$$c = 2\Sigma - a - b \tag{8.7.47}$$

Ainsi :

$$S = \Sigma(\Sigma - a)(\Sigma - b)(a + b - \Sigma) \tag{8.7.48}$$

En fixant la dérivée par rapport à a à zéro :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} &= \frac{1}{2}\frac{-\Sigma(\Sigma - b)(a + b - \Sigma) + \Sigma(\Sigma - a)(\Sigma - b)}{\sqrt{\Sigma\,(\Sigma - a)\,(\Sigma - b)\,(\Sigma - c)}}\\ &= \frac{-\Sigma(\Sigma - b)(a + b - s) + \Sigma(\Sigma - a)(\Sigma - b)}{2S}\\ &= \frac{\Sigma(\Sigma - b)(2\Sigma - 2a - b)}{2S} = 0\\ &\Rightarrow 2\Sigma - 2a - b = 0\end{aligned} \tag{8.7.49}$$

Comme $b = \Sigma$ n'est pas une solution $A \neq 0 \Rightarrow b \neq \Sigma$.

En cours de traduction de l'anglais

De même, en fixant la dérivée par rapport à b à zéro, nous obtenons :

$$2\Sigma - 2b - a = 0 \quad (8.7.50)$$

La résolution simultanée donne :

$$a = b = \frac{2\Sigma}{3} \quad (8.7.51)$$

et en remplaçant cela, nous obtenons :

$$c = \frac{2\Sigma}{3} \quad (8.7.52)$$

Donc $a = b = c$ et le triangle est équilatéral.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

Et le centre de gravité reste, comme nous l'avons démontré dans le cas général (triangle non spécifié), à la position :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{BG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \\ \overrightarrow{CG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} \end{aligned} \quad (8.7.53)$$

Une propriété remarquable d'un triangle équilatéral est que ces médiatrices et médianes sont confondues et évidemment de même longueur (voir section Géométrie Euclidienne page 2588) !

Voyons maintenant le petit "théorème de Viviani" utilisé régulièrement à des fins de représentation graphique dans le domaine du génie des matériaux (mélanges), ou des statistiques (plans de mélange ou encore distribution de 3 fréquences de données dont la somme est toujours égale).

Considérons la figure suivante :

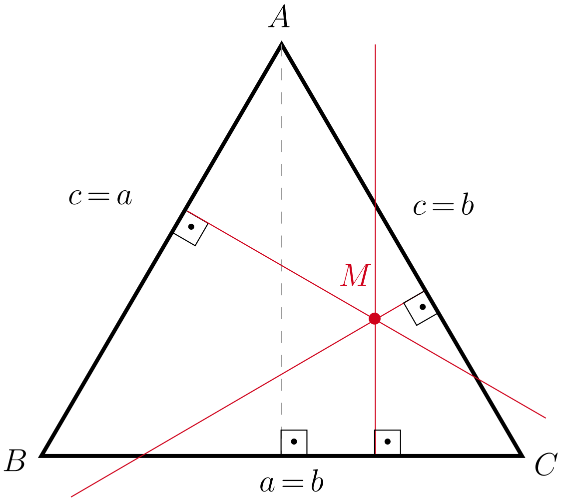


FIG. 8.231 – **Figure illustrative du théorème de Viviani**

Théorème 8.26. Si nous plaçons un point dans un triangle équilatéral et que de ce point nous traçons une ligne en direction de chacun des côtés, de telle sorte que les lignes soient perpendiculaires à chaque côté. Peu importe où nous plaçons le point, la somme des distances perpendiculaires entre le point et les côtés est égale à la hauteur du triangle !

Démonstration 8.26.1. Pour la démonstration, notons d_a, d_b, d_c les distances M aux côtés, la longueur d'un côté et la hauteur h. Nous avons alors :

$$\frac{lh}{2} = S_{\Delta ABC} = S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAC} = \frac{ld_a}{2} + \frac{ld_b}{2} + \frac{ld_c}{2} = \frac{l(d_a + d_b + d_c)}{2} \qquad (8.7.54)$$

et nous avons bien :

$$h = d_a + d_b + d_c \qquad (8.7.55)$$

■ Q.E.D.

Rappelons également que la somme des angles de tout triangle plan est égale à π (180°) comme démontré dans la section de Géométrie Euclidienne page 2574.

En cours de traduction de l'anglais

8.7.1.7 Triangle rectangle

Définition (#8.7.373) : Un "triangle rectangle" est un triangle dont un angle est droit (c'est-à-dire un angle de $\pi/2$ radians). La relation entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle est la base de la trigonométrie (voir section correspondante).

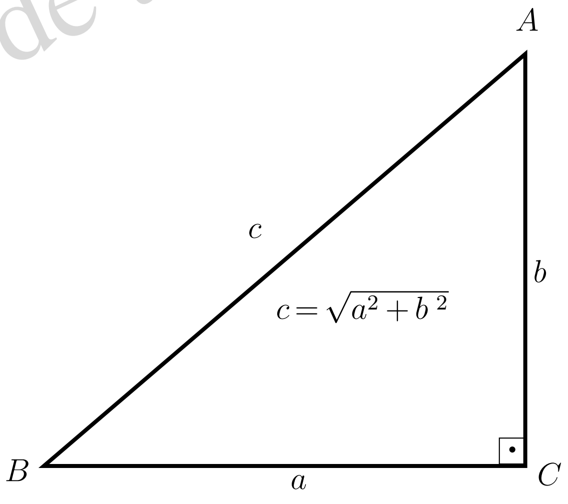


FIG. 8.232 – **Exemple d'un triangle rectangle**

Le côté opposé à l'angle droit est appelé "hypoténuse".

Le périmètre d'un tel triangle reste :

$$\boxed{P = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (8.7.56)$$

La surface comme nous l'avons prouvé ci-dessus dans le cas général reste :

$$\boxed{S=\frac{ah}{2}=\frac{ab}{2}} \tag{8.7.57}$$

Et le centre de gravité reste, comme nous l'avons prouvé dans le cas général (triangle non spécifié), à la position :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\\ \overrightarrow{BG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}\\ \overrightarrow{CG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}\end{aligned} \tag{8.7.58}$$

Propriété remarquable d'un triangle rectangle : ce triangle a cette propriété unique qu'on peut lui appliquer directement le théorème de Pythagore (voir section Géométrie Euclidienne page 2590).

Rappelons également que la somme des angles de tout triangle plan est égale à π (180°) comme démontré dans la section de Géométrie Euclidienne page 2574.

En cours de traduction de l'anglais

8.7.1.8 Trapèze

Définition (#8.7.374) : Un quadrilatère convexe possédant au moins une paire de côtés parallèles est appelé "trapèze". Les côtés parallèles sont appelés "bases" du trapèze et les deux autres côtés sont appelés "jambes" ou côtés latéraux (s'ils ne sont pas parallèles ; sinon, il y a deux paires de bases). Un "trapèze scalène" est un trapèze dont les côtés ne sont pas de même longueur.

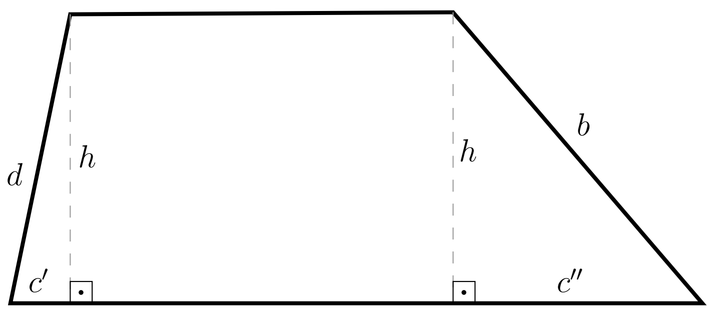


FIG. 8.233 – Exemple de trapèze

Le calcul du périmètre du trapèze est évident :

$$\boxed{P=a+b+c+d} \tag{8.7.59}$$

Sa surface est calculée à l'aide de la décomposition :

$$\begin{aligned}S&=\frac{c'h}{2}+ah+\frac{c''h}{2}=\frac{(c'+c''+2a)h}{2}=\frac{(c'+c''+a+a)h}{2}\\ &=\frac{(c'+c''+a+(c-c'-c''))h}{2}=\frac{(a+c)h}{2}\end{aligned} \tag{8.7.60}$$

Finalement :

$$S=\frac{(a+c)h}{2} \tag{8.7.61}$$

Lorsque les deux côtés ont la même longueur, nous obtenons les cas particuliers du carré, du rectangle, du losange ou du parallélogramme (ici nous mettons l'ordre du plus spécifique au plus général, nous pourrions mettre le losange en n°2) :

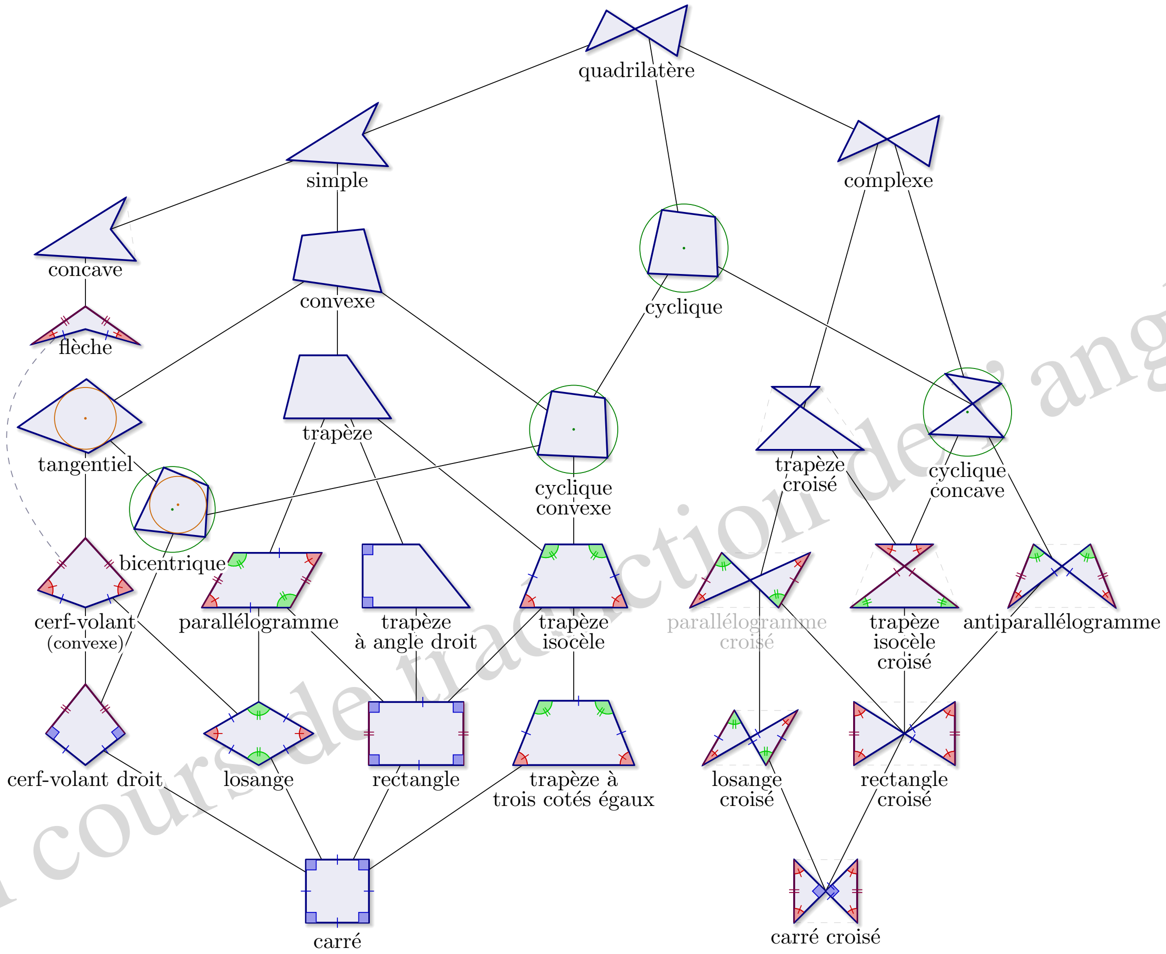


FIG. 8.234 – **Hiérarchie des quadrilatères y compris des trapèzes (auteur : Izaak Neutelings)**

En cours de traduction de l'anglais

Il est également courant de retenir une définition plus restrictive, afin de ne pas tenir compte de ces figures particulières. Nous ajoutons dans ce cas que les longueurs de deux côtés parallèles ne sont pas égales (cela permet aux élèves de lycée d'éviter toute confusion due à l'existence de deux noms pour un même objet, comme losange et trapèze).

Remarque

Il existe un cas particulier du trapèze, le "trapèze isocèle" comme nous pouvons le voir sur la figure précédente, dont les deux côtés non parallèles ont même longueur (nous pouvons ajouter : comme les deux côtés ne sont pas parallèles, ce n'est pas un parallélogramme).

8.7.1.9 Parallélogramme

Définition (#8.7.375) : Le "parallélogramme" est un cas particulier du quadrilatère et très important (dans le contexte de l'analyse des formes en physique), où les côtés sont parallèles deux à deux et d'angles opposés égaux (les angles opposés sont congruents) :

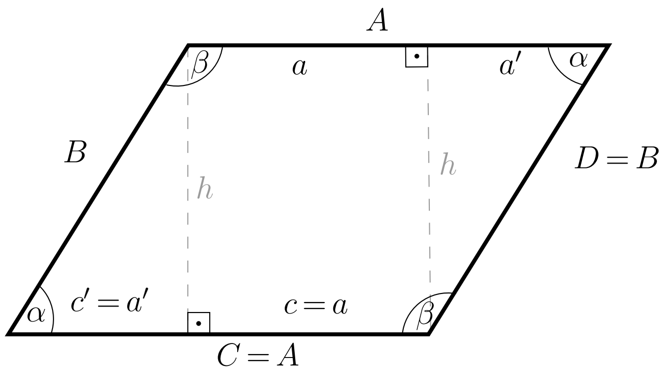


FIG. 8.235 – **Exemple de parallélogramme**

Le losange étant un cas particulier du parallélogramme comme nous le savons déjà (le losange est un parallélogramme dont tous les côtés sont égaux) !

Le périmètre du parallélogramme est évidemment donné par :

$$P = a + a + b + b = 2a + 2b = 2(a + b) \quad (8.7.62)$$

Pour la surface, comme il s'agit d'un cas particulier du trapèze, il vient immédiatement (comme nous n'utiliserons que cette relation dans le présent livre, nous ne prouverons pas d'autre méthode pour calculer la surface) :

$$S = \frac{(A + A)h}{2} = Ah \quad (8.7.63)$$

Étant donné la figure ci-dessus, il est clair que si nous coupons le parallélogramme en deux comme ci-dessous, nous voyons qu'il s'agit de deux fois le même triangle :

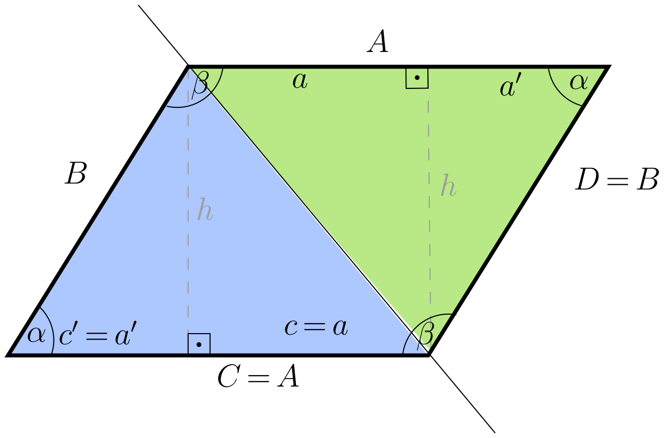


FIG. 8.236 – **Parallélogramme coupé**

En cours de traduction de l'anglais

Grâce à cela nous aurons une propriété très utile pour l'analyse physique des forces statiques ou phaseurs dans les études de la superposition d'ondes (voir section Mécanique Ondulatoire page ??).

Remarque

Comme nous le savons déjà, les parallélogrammes sont donc comme des trapèzes (voir la figure de classification ci-dessus pour un rafraîchissement).

Rappelons également que comme la somme des angles de tout triangle plan est égale à π (180°) comme démontré dans la section de Géométrie Euclidienne page 2574, et qu'un parallélogramme est constitué de deux triangles identiques, la somme des angles d'un parallélogramme est alors égale à 2π.

8.7.1.10 Hexagone

L'hexagone est un cas particulièrement intéressant. Il est en effet utilisé pour le pavage terrestre des signaux de satellites, et aussi parce que la "conjecture du nid d'abeille" stipule que le pavage hexagonal est le meilleur moyen de diviser une surface en régions d'égale aire ayant le plus petit périmètre total.

Cette structure existe naturellement sous forme de graphite, où chaque feuille de graphène ressemble à du grillage à poules, avec de fortes liaisons covalentes carbone. Des feuilles de graphène tubulaires ont été synthétisées. Elles sont appellées "nanotubes de carbone". Leur potentiel d'application est vaste, grâce à leur résistance à la traction élevée et à leurs propriétés électriques. Le silicène est similaire.

En cours de traduction de l'anglais

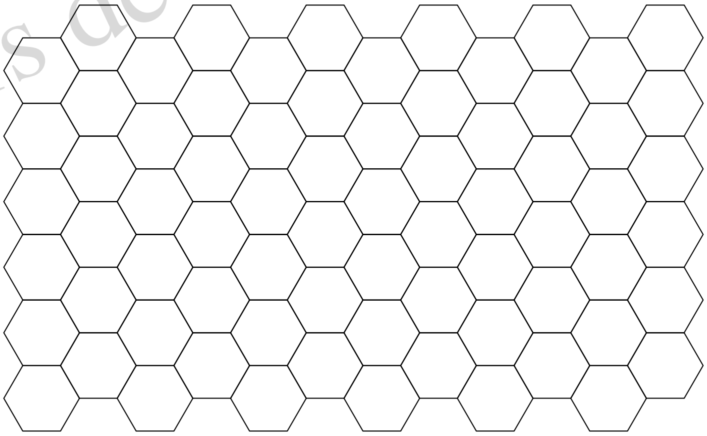


FIG. 8.237 – **Une grille hexagonale régulière**

Quelques applications (le lecteur peut également jeter un œil au télescope extra-large européen) :

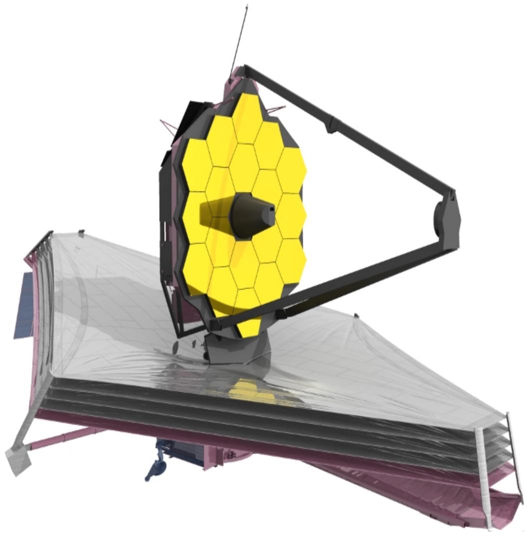


FIG. 8.238 – Télescope spatial James Webb

FIG. 8.239 – Antenne réflectrice de diffusion TV

En cours de traduction de l'anglais

L'étude des propriétés géométriques de l'hexagone est également utile pour étudier "l'effet halo solaire de 22°" ainsi que l'effet la "parhélie" (voir section Optique Géométrique page ??).

Définition (#8.7.376) : En géométrie, un hexagone est un polygone à 6 côtés. La somme des angles internes de tout hexagone est de 4π. Un "hexagone régulier" est défini comme un hexagone équilatéral et équiangulaire.

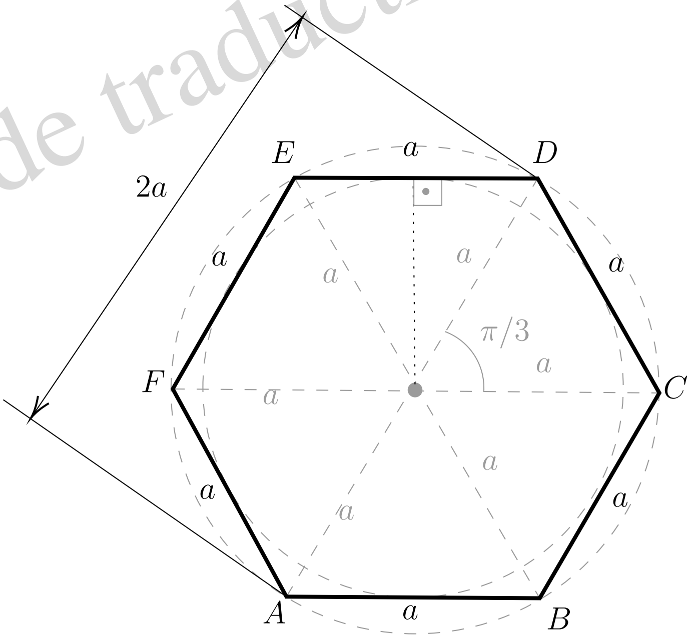


FIG. 8.240 – Détails de l'hexagone régulier (source : Wikipédia)

Tout d'abord le périmètre est évidemment :

$$\boxed{P = 6a} \tag{8.7.64}$$

La surface d'un hexagone régulier de côté a est évidemment donnée par :

$$S = 6\left(\frac{1}{2}a(a\tan\left(\frac{\pi}{6}\right))\right) = 3a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2}a^2 \tag{8.7.65}$$

Dès lors :

$$\boxed{S = \frac{\sqrt{27}}{2}a} \tag{8.7.66}$$

Revenons maintenant à notre conjecture sur le nid d'abeilles !

Pour commencer notre recherche, nous avions trois idées : la structure des cellules en nid d'abeilles devait être solide, stable et économique.

Les cellules sont solides si elles peuvent être imbriquées et ne laissent aucun trou. Nous nous intéressons donc au pavage.

Il est intuitif de penser que toutes les cellules doivent avoir la même forme et qu'elles seront stables si leur forme est régulière. Nous allons donc étudier les polygones réguliers.

Rappelons qu'un polygone régulier est une figure géométrique dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles sont égaux.

De tous les polygones réguliers, nous avons recherché ceux qui réalisent un pavage.

Ce problème revient à chercher comment il est possible d'assembler des polygones réguliers identiques autour de ses bords.

Pour notre étude, nous avons besoin de savoir deux choses :

1. La somme des mesures des trois angles d'un triangle plan est égale à π
2. Un tour est égal à 2π

Essayons avec différentes formes :

1. Triangles équilatéraux ($\pi/3$)

   Les trois sommets d'un triangle équilatéral sont égaux et mesurent $\pi/3 =$. Et comme $6\cdot(\pi/2) = 2\pi$, nous pouvons assembler six triangles équilatéraux autour des sommets et ainsi réaliser un pavage :

En cours de traduction de l'anglais

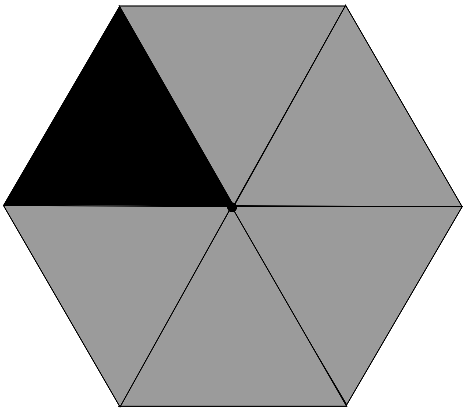


FIG. 8.241 – Pavage de triangles équilatéraux

2. Carrés ($2\pi/4$)

   Les angles d'un carré mesurent $\pi/2$. Et comme $4\cdot(\pi/2)=2\pi$, nous pouvons assembler quatre carrés autour des sommets et ainsi obtenir un pavage :

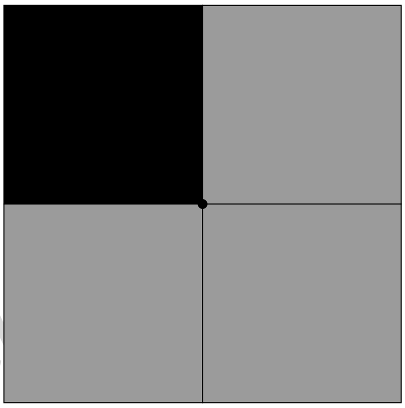


FIG. 8.242 – Carrelage carré

En cours de t... de l' anglais

3. Pentagones réguliers ($2\pi/5$)

   Les angles internes d'un pentagone régulier sont égaux à $2\pi/5$ donc les angles des sommets internes sont égaux à $\pi-2\pi/5=3\pi/5$.

   Si nous assemblons trois d'entre eux autour d'un noeud, cela donne des trous comme $3\cdot(3\pi/5)<2\pi$, et évidemment, ajouter un pentagone supplémentaire ne résoudra pas le problème !

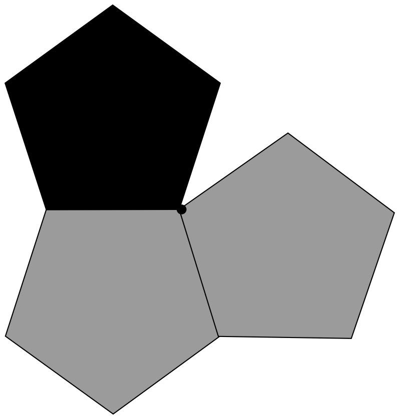


FIG. 8.243 – Carrelage de pentagones

Nous ne pouvons donc pas générer un pavage avec des pentagones.

4. Hexagones réguliers ($2\pi/6$)

   Les angles internes d'un pentagone régulier sont égaux à $2\pi/6$ donc les angles des sommets internes sont égaux à $\pi - 2\pi/6 = 2\pi/3$.

   Et comme $3 \cdot (2\pi/3) = 2\pi$, nous pouvons assembler trois hexagones réguliers autour des sommets et ainsi réaliser un pavage :

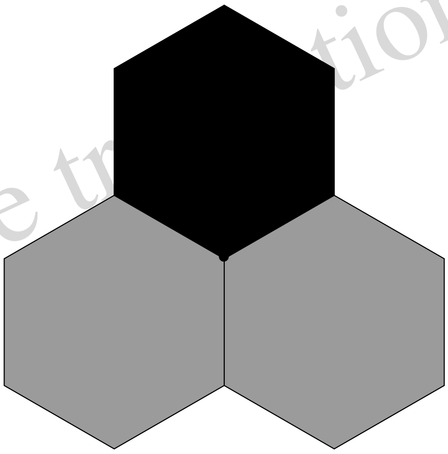


FIG. 8.244 – Pavage hexagonal

5. Polygones réguliers à sept côtés et plus

   À partir d'un polygone à sept côtés et plus, le pavage est impossible car les angles internes ne sont pas des diviseurs entiers de 2π.

La relation générale pour obtenir la mesure des angles d'un polygone régulier à n côtés est :

$$\pi - \left(\frac{2\pi}{n}\right) \tag{8.7.67}$$

Par conséquent, les seuls polygones réguliers qui réalisent un pavage sont les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones réguliers ! !

En cours de traduction de l'anglais

Finalement, nous pouvons penser qu'en termes d'avantages évolutionnaires que les abeilles doivent utiliser le moins de cire possible pour fabriquer leurs alvéoles, tout en ayant le maximum d'espace à l'intérieur.

La question est donc : Parmi le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier, lequel a la plus grande aire pour le plus petit périmètre ?

En d'autres termes, nous cherchons à maximiser le rapport A/P (ou le plus petit rapport P/A).

Nous avons donc pour chaque forme en utilisant nos résultats précédents :

1. Triangle équilatéral :

$$\frac{A}{P}=\frac{\frac{1}{2}bh}{3b}=\frac{1}{6}h=\frac{1}{6}b\tan(\pi/6)=\frac{1}{6}b\frac{\sqrt{3}}{3}b\cong\frac{\sqrt{3}}{18}b\cong 0.0962b \tag{8.7.68}$$

2. Carré :

$$\frac{A}{P}=\frac{b^2}{4b}=\frac{b}{4}=0.25b \tag{8.7.69}$$

3. Hexagone régulier :

$$\frac{\frac{\sqrt{27}}{2}b^2}{6b}=\frac{\sqrt{27}}{12}b=\frac{\sqrt{3}}{3}b\cong 0.5773b \tag{8.7.70}$$

Parmi le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier c'est donc l'hexagone régulier qui donne le rapport maximal "aire sur périmètre".

Pour que la structure cellulaire soit solide, stable et économique, les abeilles sont incitées à construire des hexagones réguliers de base. Nous constatons que c'est ce qu'elles font naturellement (après de nombreux essais et erreurs au cours de leur évolution) !

En cours de traduction de l' anglais

8.7.1.11 Losange

Définition (#8.7.377) : Un "losange" est un quadrilatère simple (non sécant) dont les quatre côtés ont tous la même longueur. On l'appelle aussi "quadrilatère équilatéral", car équilatéral signifie que tous ses côtés sont de même longueur. Le losange est souvent appelé "diamant", d'après la couleur des carreaux dans les jeux de cartes, qui ressemble à la projection d'un losange octaédrique. Le premier terme désigne parfois spécifiquement un losange d'angle $\pi/3$ et le second un losange d'angle $\pi/4$.

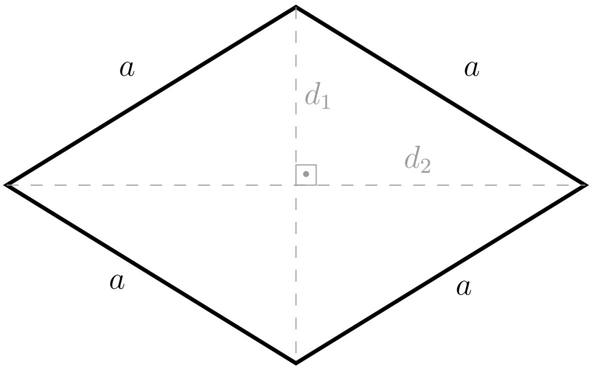


FIG. 8.245 – **Exemple de losange**

Le calcul du périmètre et de la surface du losange découle immédiatement de ceux du trapèze.

8.7.1.12 Cercle

Il existe plusieurs définitions possibles du cercle. Voyons-en au moins deux.

Définitions (#8.7.378) :

D1. Un "cercle" est un cas particulier d'un polygone avec une infinité de côtés.

D2. Un "cercle" est une courbe plane dont tous les points sont à égale distance d'un point fixe appelé "centre".

Remarque

Un cercle peut également être défini comme une ellipse spéciale dans laquelle les deux foyers coïncident et l'excentricité est de 0.

En cours de traduction de l' anglais

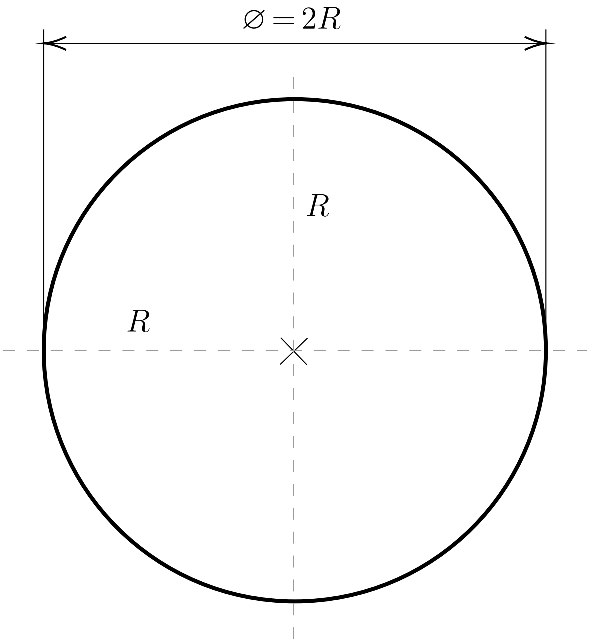


FIG. 8.246 – Exemple de cercle

Nous démontrons dans la section de Méthodes Numériques à la page **??**, que le périmètre d'un cercle de rayon R et donc de diamètre $\varnothing = 2R$ est donné par :

$$\boxed{P = 2\pi R = (2R)\pi = \varnothing\pi} \tag{8.7.71}$$

La relation de surface (du "disque" correspondant) peut être obtenue de deux manières :

1. Par recherche de la primitive du périmètre P ce qui nous donne :

$$S = \int P\mathrm{d}R = 2\pi \int R\mathrm{d}R = \pi R^2 \tag{8.7.72}$$

2. La seconde méthode est plus esthétique et fait appel à l'équation paramétrique du cercle, trivialement donnée par les projections orthogonales des coordonnées cartésiennes (voir section Calcul Vectoriel page 1839) :

$$\begin{aligned} x &= R\cos(\theta) \\ y &= R\sin(\theta) \end{aligned} \tag{8.7.73}$$

Nous savons que l'aire décrite par une fonction $f(x)$ est donnée par (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1480) :

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b y\mathrm{d}x} \tag{8.7.74}$$

Il nous suffit alors de substituer dans cette intégrale les variables paramétrées :

$$y = R\sin(\theta) \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(R\cos(\theta)) = R\mathrm{d}\cos(\theta) = -R\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8.7.75}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$S=\int_a^b y\mathrm{d}x=\int_a^b (R\sin(\theta))(-R\sin(\theta)\mathrm{d}\theta)=-R^2\int_a^b \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8.7.76}$$

Les limites d'intégration sont évidemment $\theta=[0,2\pi]$ nous avons alors :

$$\begin{aligned}S&=-R^2\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta=-2R^2\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta=-2R^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta\\&=2R^2\left(\frac{\sin(2\theta)}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{-\pi}=R^2\theta\Big|_0^{-\pi}-R^2\frac{\sin(2\theta)}{2}\Bigg|_0^{-\pi}=R^2\pi\end{aligned} \tag{8.7.77}$$

Nous avons donc aussi par cette méthode :

$$S=\pi R^2=\pi\left(\frac{\varnothing}{2}\right)^2=\pi\frac{\varnothing^2}{4} \tag{8.7.78}$$

La longueur l d'un angle d'ouverture α d'un cercle de rayon R est évidemment donnée par :

$$l=\frac{2\pi R}{2\pi}\alpha=R\alpha \tag{8.7.79}$$

et la surface S_t d'un angle d'ouverture α d'un cercle de rayon R identiquement par :

$$S_t=\frac{\pi R^2}{2\pi}\alpha=\frac{R^2}{2}\alpha \tag{8.7.80}$$

Déterminons maintenant la surface S_d d'une partie découpée du disque c'est-à-dire :

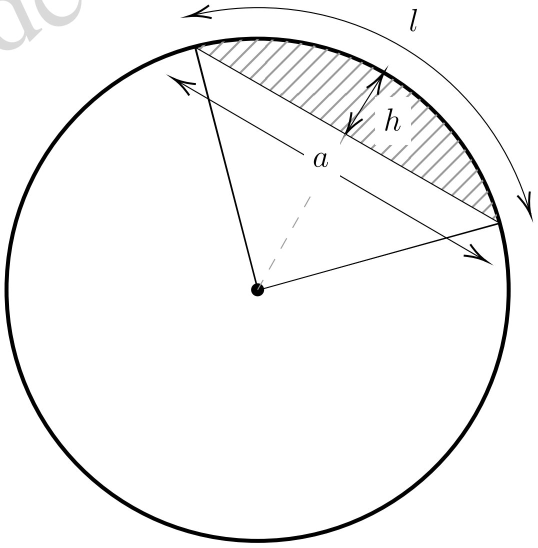


FIG. 8.247 – **Surface S_d d'une partie découpée d'un disque**

Nous avons :

$$S_d=\frac{R^2}{2}\alpha-\frac{a(R-h)}{2}=\frac{R^2}{2}\frac{l}{R}-\frac{a(R-h)}{2}=\frac{Rl-a(R-h)}{2} \tag{8.7.81}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Par définition du cercle, il est évident que le centre de gravité du cercle se confond avec le centre de celui-ci. Un cercle peut également être défini comme une ellipse spéciale dans laquelle les deux foyers sont coïncidents et l'excentricité est de 0.

8.7.1.13 Ellipse

Définition (#8.7.379) : Une "ellipse" est une courbe fermée dont chaque point est tel que la somme de ses distances à deux points fixes appelés "foyers $F1, F2$" est constante (comme nous l'avons vu dans la section de Géométrie Analytique l'ellipse peut aussi être vue comme une transformation affine du cercle).

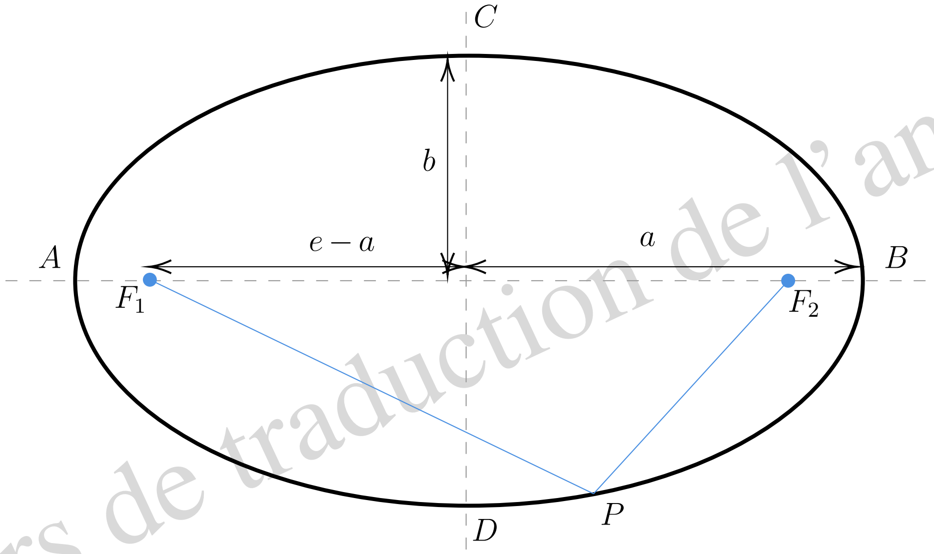
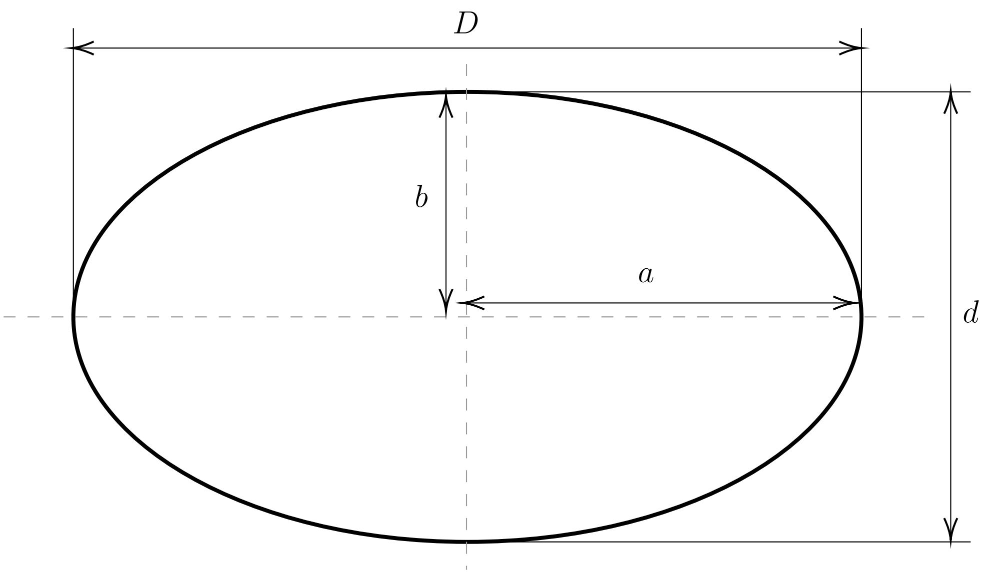


FIG. 8.248 – Exemple d'une ellipse avec ses foyers visibles et son excentricité e

En cours de traduction de l'anglais

La forme d'une ellipse (son "allongement") est représentée par son " excentricité e", qui pour une ellipse peut être n'importe quel nombre compris entre 0 (le cas limite d'un cercle) et arbitrairement proche mais inférieur à 1.

Pour les développements mathématiques qui suivront nous utiliserons plutôt la notation de la figure suivante :



Remarque

Le lecteur ne doit donc pas oublier que la plupart des développements mathématiques importants sur l'ellipse se trouvent dans la section de Géométrie Analytique (voir page 2744).

Introduisons pour commencer un petit texte relatif au calcul du périmètre de l'ellipse !

Étant donné l'équation paramétrique en coordonnées cartésiennes d'une ellipse (voir section Calcul Vectoriel page 1839) :

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\theta) \\ y &= b\sin(\theta) \end{aligned} \quad (8.7.82)$$

La distance entre le centre de l'ellipse et son périmètre est alors donnée par le théorème de Pythagore :

$$R(\theta) = \sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)} \quad (8.7.83)$$

Un élément d'arc est alors donné par :

$$R(\theta)\mathrm{d}\theta = \sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta \quad (8.7.84)$$

Le périmètre de l'ellipse est alors donné par l'intégrale :

$$P = \int_0^{2\pi} R(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta \quad (8.7.85)$$

et là ça commence à se corser... Ce genre d'intégrale n'est pas facilement calculable à l'aide des primitives connues, intégration par parties, changements de variable ou autre. Il s'agit de ce que nous appelons une "intégrale elliptique du second ordre en J" pour $0 < b < a$ (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1577) :

$$\boxed{J(a,b) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2(\theta) + b^2\sin^2(\theta)}\mathrm{d}\theta} \quad (8.7.86)$$

En cours de traduction ... lais

De longs développements que nous présenterons dans quelques années dans la section de Calcul Différentiel Et Intégral donnent pour le périmètre après un calcul en série limitée :

$$\boxed{P \cong \sqrt{2(a^2+b^2)} = 2\pi a\sqrt{1-e^2}} \tag{8.7.87}$$

La relation de surface de l'ellipse peut être obtenue de manière très similaire à celle du cercle et les calculs sont curieusement beaucoup plus simples que ceux du périmètre. Rappelons que l'équation paramétrique l'ellipse est :

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\theta) \\ y &= b\sin(\theta) \end{aligned} \tag{8.7.88}$$

Nous savons que l'aire décrite par une fonction $f(x)$ est donnée par :

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b y\mathrm{d}x \tag{8.7.89}$$

Il suffit de substituer dans cette intégrale les variables paramétrées :

$$y = b\sin(\theta) \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(a\cos(\theta)) = a\mathrm{d}\cos(\theta) = -a\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8.7.90}$$

Dès lors :

$$S = \int_a^b y\mathrm{d}x = \int_a^b (b\sin(\theta))(-a\sin(\theta)\mathrm{d}\theta) = -ab\int_a^b \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8.7.91}$$

Les bornes d'intégration étant bien évidemment $\theta = [0, -2\pi]$ nous avons have :

$$\begin{aligned} S &= -ab\int_0^{-2\pi} \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta = -2ab\int_0^{-\pi} \frac{1-2\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta = -2ab\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right)\Bigg|_0^{-\pi} \\ &= -2ab\left[\left(\frac{1}{2}(-\pi) - \frac{1}{4}\sin(2(-\pi))\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\sin(2\cdot 0)\right)\right] \\ &= -2ab\frac{1}{2}(-\pi) = ab\pi \end{aligned} \tag{8.7.92}$$

Remarque

Il faut faire attention dans ce genre de calculs à l'ordre des bornes d'intégration. Effectivement, si nous avions pris les bornes allant de $[0, \pi]$ (au lieu de $[0, -\pi]$) il faut imaginer que la fonction intégrée parcoure le périmètre dans le sens négatif de l'axe des abscisses. Donc, l'intégrale serait alors forcément négative.

Nous avons donc aussi par cette méthode :

$$\boxed{S = \pi ab = \frac{\pi}{4}D\cdot d} \tag{8.7.93}$$

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Nous supposons comme évident (et dons sans démonstration) que le centre de gravité de l'ellipse se confond avec le centre de celle-ci.

R2. Nous renvoyons le lecteur à l'étude des coniques (voir section Géométrie Analytique page 2744) pour le calcul de la surface d'une ellipse à partir de son "paramètre d'ellipse" et de son "excentricité" (tout y est démontré).

8.7.1.13.1 Surface de section d'ellipse

Concentrons-nous maintenant sur une question fréquente sur les forums Internet : quelle est l'aire d'une section d'une ellipse ? Pour y répondre, nous partons de :

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\theta) \\ y &= b\sin(\theta) \end{aligned} \tag{8.7.94}$$

mais que nous écrirons a d'une manière légèrement différente :

$$\begin{aligned} x &= r(\theta)\cos(\theta) \\ y &= r(\theta)\sin(\theta) \end{aligned} \tag{8.7.95}$$

Un élément de surface en coordonnées polaires est donné par :

$$\mathrm{d}S = r(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{8.7.96}$$

Par conséquent, l'aire d'une section a pour expression :

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{0}^{r(\theta)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{8.7.97}$$

Alors :

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8.7.98}$$

Mais en utilisant ce que nous avons vu dans la section Géométrie Analytique, nous pouvons écrire cette dernière :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 = r(\theta)\left(\frac{\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b^2}\right) \tag{8.7.99}$$

Dès lors :

$$r^2(\theta) = \frac{1}{\dfrac{\cos^2(\theta)}{a^2} + \dfrac{\sin^2(\theta)}{b^2}} \tag{8.7.100}$$

En cours de traduction de l' anglais

Ainsi :

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dfrac{\cos^2(\theta)}{a^2}+\dfrac{\sin^2(\theta)}{b^2}} \tag{8.7.101}$$

Pour continuer, faisons un simple changement de variables :

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{a'^2\cos^2(\theta)+b'^2\sin^2(\theta)} \tag{8.7.102}$$

En factorisant $a'^2\cos^2(\theta)$, nous obtenons :

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{a'^2\cos^2(\theta)\left(1+\dfrac{b'^2}{a'^2}\tan^2(\theta)\right)} \tag{8.7.103}$$

Nous effectuons maintenant un changement sérieux de variable :

$$u=\frac{b'}{a'}\tan(\theta) \tag{8.7.104}$$

Ainsi, selon les dérivées usuelles (voir section Calcul Différentiel et Intégral page page 1457) :

$$\mathrm{d}u=\frac{b'}{a'}\frac{1}{\cos^2(\theta)}\mathrm{d}\theta \tag{8.7.105}$$

Alors l'intégrale devient :

$$\frac{1}{a'^2}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\tan^2(\theta)\right)}=\frac{1}{a'^2}\int\frac{\dfrac{a'}{b'}\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{a'b'}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \tag{8.7.106}$$

Nous savons d'après les intégrales usuelles que (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1513) :

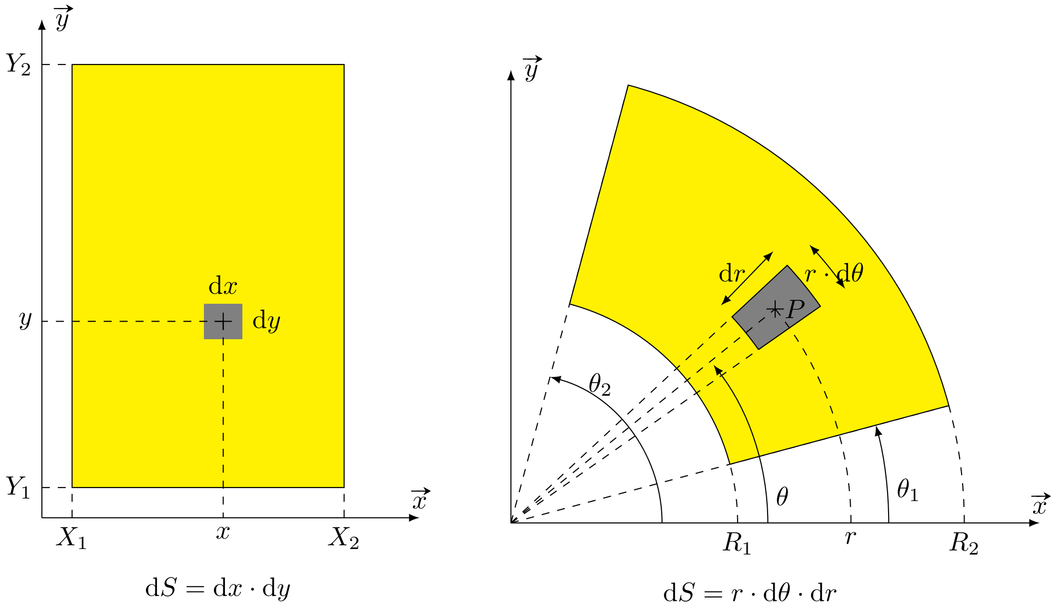
$$\frac{1}{a'b'}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{a'b'}\arctan(u)=\frac{1}{a'b'}\arctan\left(\frac{b'}{a'}\tan(\theta)\right) \tag{8.7.107}$$

Alors finalement :

$$\boxed{S=\frac{ab}{2}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan(\theta)\right)\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}} \tag{8.7.108}$$

Un petit rappel de quelques principes utilisés jusqu'à présent :

En cours de traduction de l' anglais



(a) Coordonnées cartésiennes

(b) Coordonnées polaires

FIG. 8.249 – Éléments de surfaces $\mathrm{d}S$ en 2D

En cours de traduction de l' anglais

8.7.2 Volumes connus

Il existe plusieurs définitions du concept de volume (surface qui limite un corps). Une définition due à Euclide et une autre due au domaine de la Topologie (voir le chapitre du même nom).

Définitions (#8.7.380) :

D1. Un "volume" est ce qui a longueur, largeur et hauteur.

D2. Un "volume" est une variété topologique de dimension 3.

Les surfaces qui limitent un corps peuvent être planes ou courbes :

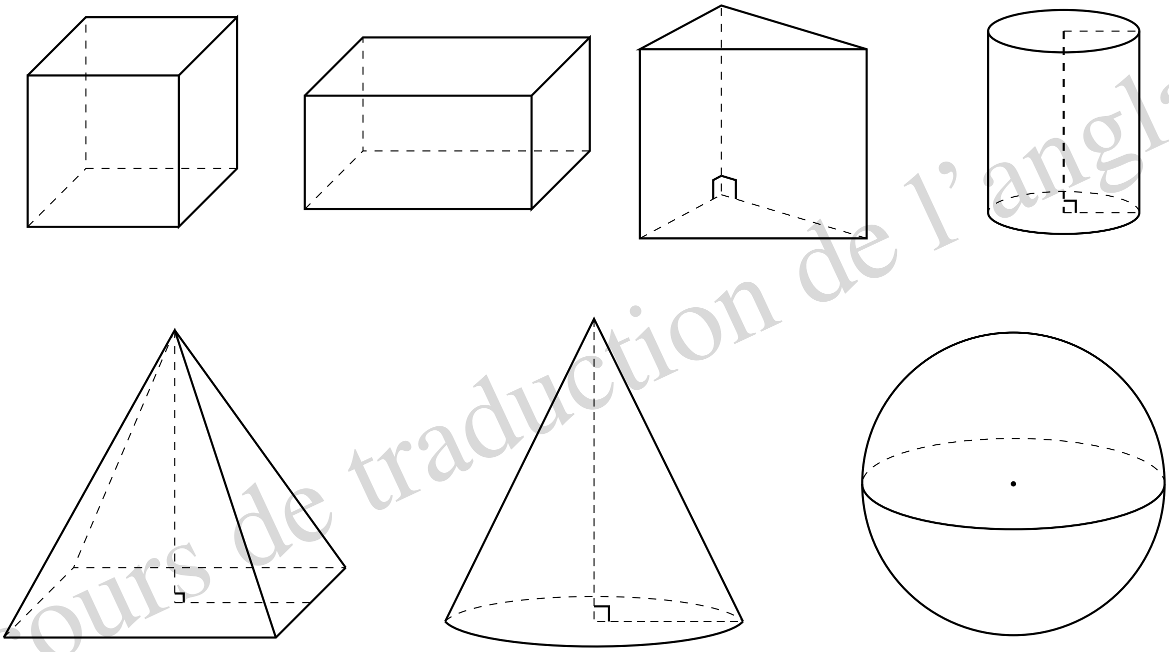


FIG. 8.250 – **Exemples de volumes délimités par une surface**

En cours de traduction de l'anglais

À gauche, le corps est limité uniquement par des surfaces planes, au milieu par une et une seule unique surface courbe, et à droite par une surface courbe et deux surfaces planes.

Remarque

Nous nous intéresserons dans un premier temps uniquement aux propriétés (surface, volume, centre de gravité, moment d'inertie...) de volumes plongés dans des géométries euclidiennes.

8.7.2.1 Polyèdres

L'étude des polyèdres (particulièrement les polyèdres platoniciens) est très importante en physique (pour la cristallographie par exemple) et en mathématiques car elle permet d'avoir une application sympathique des groupes finis (voir section Algèbre Ensemble page 1401). Il convient donc de porter une lecture relativement attentive à ce qui va suivre.

Par ailleurs, l'étude des polyèdres est aussi un moyen très pédagogique et esthétique pour voir la mise en oeuvre de plusieurs théorèmes géométriques, de trigonométrie et d'algèbre vectoriel.

Précisons avant toute chose que les différents polyèdres ne seront délibérément pas présentés sur un pied d'égalité. Ainsi, nous nous concentrerons sur certaines propriétés pour certains et pas pour d'autres.

Définitions (#8.7.381) :

D1. Un "polyèdre" est un solide dont la frontière est formée de plans ou de portions de plan. Les portions de plan, qui comprennent ainsi entre elles le polyèdre, sont les faces ; chaque face, étant limitée par intersections (les arêtes) avec les faces voisines, est un polygone. Les côtés de ce polygone sont les arêtes du polyèdre. Nous appelons "sommet" d'un polyèdre tout sommet d'une quelconque de ses faces.

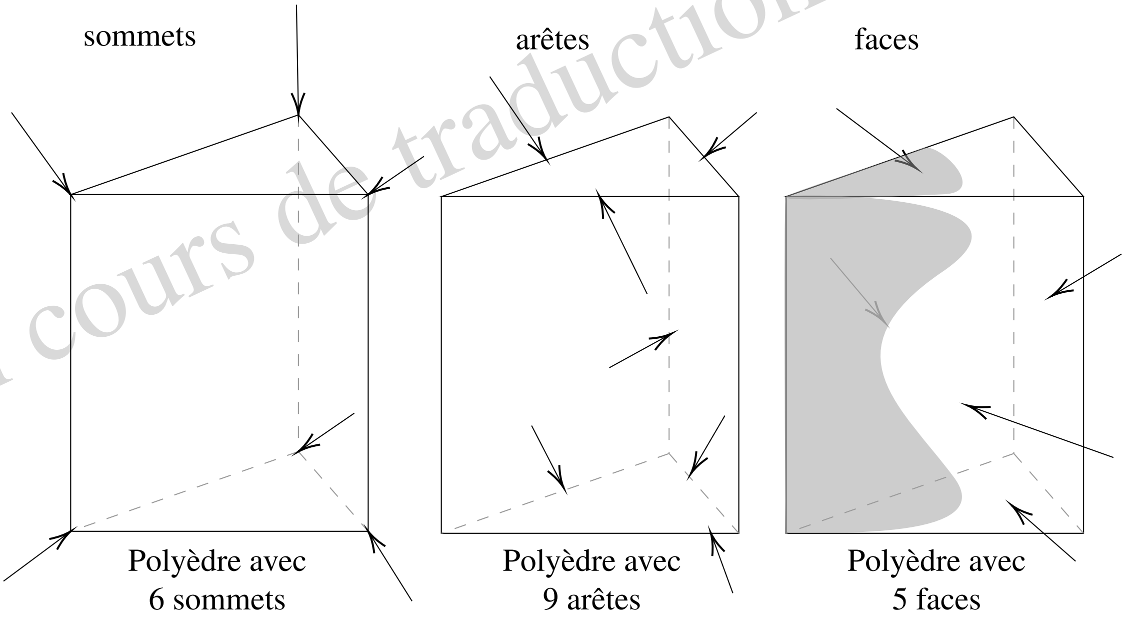


FIG. 8.251 – **Vocabulaire des polyèdres**

D2. Un "polygone régulier" est un polygone dont les côtés, et tous les angles sont égaux (cette définition nous sera utile pour les polyèdres réguliers plus bas).

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.1.1 Parallélépipède

Définition (#8.7.382) : En géométrie, un "parallélépipède" est une figure tridimensionnelle formée de six parallélogrammes (le terme "rhomboïde" est parfois utilisé dans ce sens). Par analogie, il se rapporte à un parallélogramme de la même manière qu'un cube se rapporte à un carré ou qu'un pavé droit se rapporte à un rectangle.

Trois définitions équivalentes de parallélépipède sont :

- Un polyèdre à six faces (hexaèdre), chacune étant un parallélogramme.
- Un hexaèdre avec trois paires de faces parallèles.
- Un prisme dont la base est un parallélogramme.

Le cuboïde rectangulaire (six faces rectangulaires), le cube (six faces carrées) et le rhomboèdre (six faces en losange) sont tous des cas spécifiques de parallélépipède (voir plus bas pour plus de détails sur ces polyèdres).

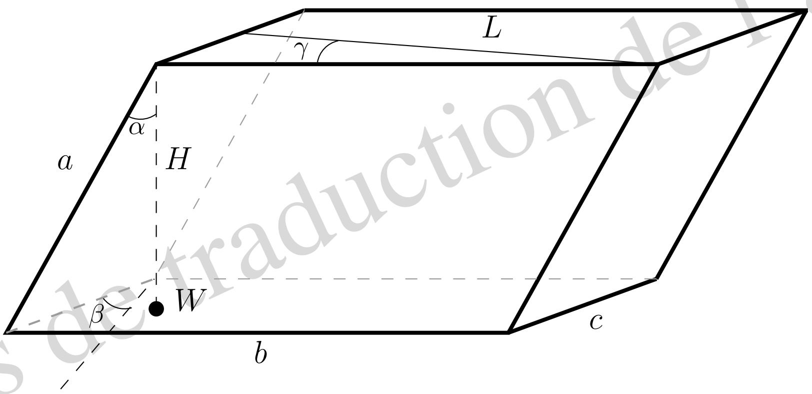


FIG. 8.252 – **Parallélépipède général**

En cours de traduction de l'anglais

Definitions (#8.7.383) :

D1. Le parallélépipède est un "cube" si et seulement si :

$$a=b=c \quad \text{et} \quad \alpha=\beta=\gamma=0 \tag{8.7.109}$$

D2. Le parallélépipède est un "cuboïde" (parallélépipède rectangle) si et seulement si :

$$\alpha=\beta=\gamma=0 \tag{8.7.110}$$

D3. Le parallélépipède est un "rhomboèdre" si et seulement si :

$$a=b=c \tag{8.7.111}$$

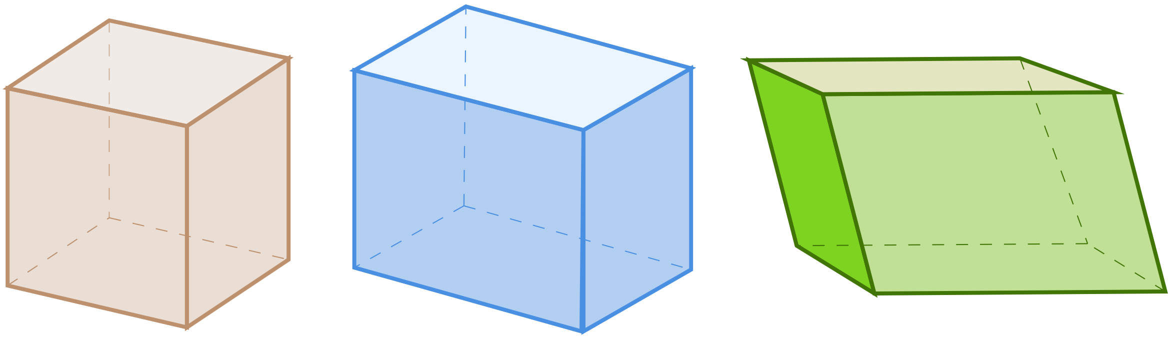


FIG. 8.253 – Cube, cuboïde et rhomboèdre

Le volume du parallélépipède s'obtient simplement en utilisant les propriétés trigonométriques. Deux situations principales peuvent être envisagées :

- Nous connaissons H, b, c, α et le volume est évidemment donné par :

$$V = Hbc = \frac{\cos(\alpha)}{a} bc \tag{8.7.112}$$

Évidemment, nous obtenons donc pour un cuboïde où $a = b = c$:

$$V = a^3 \tag{8.7.113}$$

- Si nous connaissons seulement α, β, γ et H, W, L :

$$V = \frac{J}{\cos(\alpha)} \frac{L}{\cos(\gamma)} \frac{W}{\cos(\beta)} = abc \tag{8.7.114}$$

Concernant sa surface, c'est simplement la somme des surfaces de chacun de ses parallélogrammes sans rien de spécial (nous avons déjà démontré plus haut comment calculer la surface d'un parallélogramme) et donc nous devons connaître tous les angles de déformation de chaque parallélogramme.

En cours de traduction de l' anglais

8.7.2.1.1.1 Moment d'inertie d'une plaque rectangulaire

Calculons maintenant le moment d'inertie d'une plaque (parallélépipède rectangle) de section transversale S dont l'axe de rotation est l'axe y :

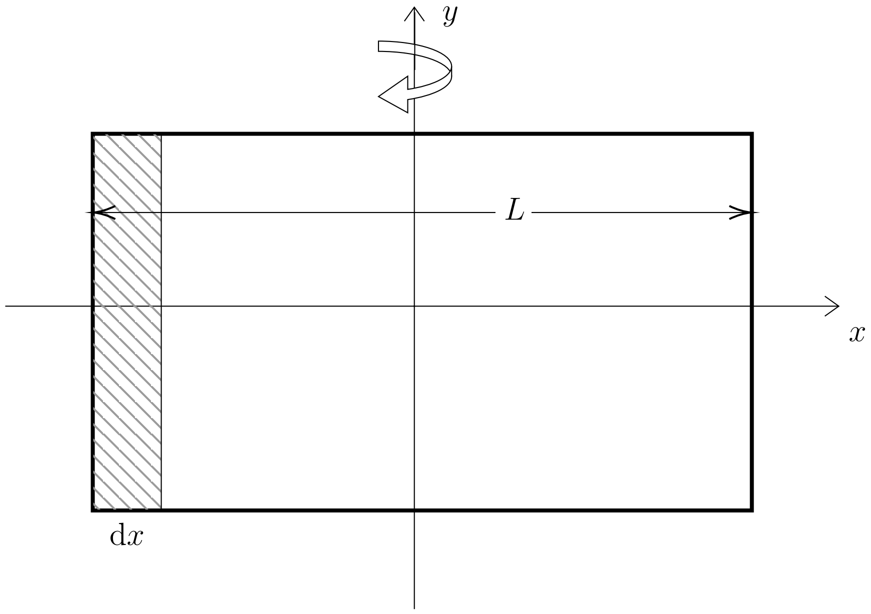


FIG. 8.254 – **Recherche du moment d'inertie d'une plaque le long de la section**

En cours de traduction de l'anglais

Un élément de volume du rectangle (en gris) est donné par :

$$\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}m = \rho S \mathrm{d}x \tag{8.7.115}$$

et (voir section Mécanique Classique page ??) :

$$J_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \rho \mathrm{d}m = \rho S \left\{ \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3} \right\} = \rho \frac{SL^3}{12} = \rho SL \frac{L^2}{12} = M \frac{L^2}{12} \tag{8.7.116}$$

En utilisant le théorème de Steiner (voir section Mécanique Classique page ??), nous pouvons facilement obtenir le moment d'inertie de cette plaque lorsque l'axe de rotation est colinéaire aux bords de cette dernière :

$$J_{y'} = M\frac{L^2}{36} \left(\frac{L}{e}\right)^2 M = M\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4}M = \frac{4L^2M}{12} = \frac{L^2M}{3} \tag{8.7.117}$$

et concentrons-nous maintenant sur le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe z (perpendiculaire à x et y donc) et plaçons les axes de façon à avoir :

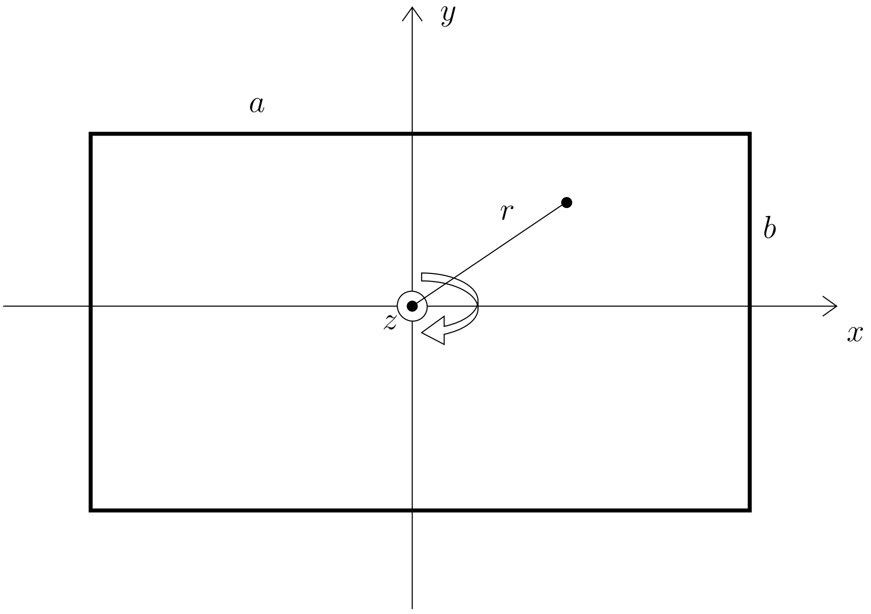


FIG. 8.255 – Recherche du moment d'inertie d'une plaque selon un axe perpendiculaire

En cours de traduction de l' anglais

Nous avons :

$$J_z = \int r^2 \mathrm{d}m = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \int x^2\mathrm{d}m + \int y^2\mathrm{d}m = J_x + J_y \tag{8.7.118}$$

où r est dans le plan x et y.

Avec :

$$\begin{aligned} J_x &= \int y^2\mathrm{d}m = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \rho e a \mathrm{d}y = \rho e a \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \mathrm{d}y = \frac{\rho e a}{3}\left\{\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right\} = \frac{M}{12}b^2 \\ J_y &= \int x^2\mathrm{d}m = \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \rho e a \mathrm{d}x = \rho e a \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho e a}{3}\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}\right)^3\right\} = \frac{M}{12}a^2 \end{aligned} \tag{8.7.119}$$

Dès lors :

$$\boxed{J_{\square,z} = J_x + J_y = \frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right)} \tag{8.7.120}$$

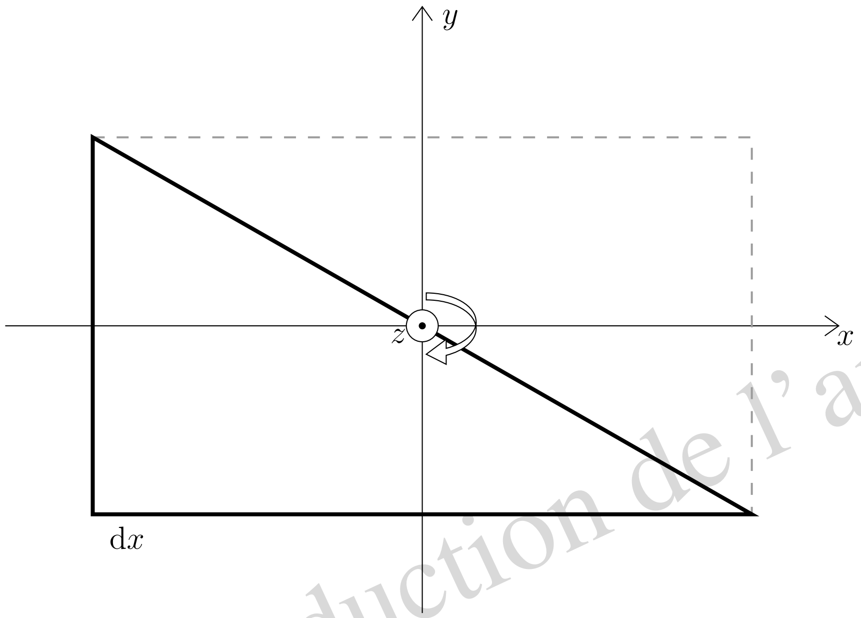
Si la plaque est carrée de côté L :

$$J_z = \frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right) = \frac{M}{12}\left(L^2+L^2\right) = \frac{ML^2}{6} \tag{8.7.121}$$

8.7.2.1.1.2 Moment d'inertie d'une plaque triangulaire

Nous allons maintenant démontrer qu'il est possible de calculer le moment d'inertie d'une plaque de triangle équilatéral et d'une plaque de triangle rectangle pour un axe passant toujours par le centre de gravité de cette dernière.

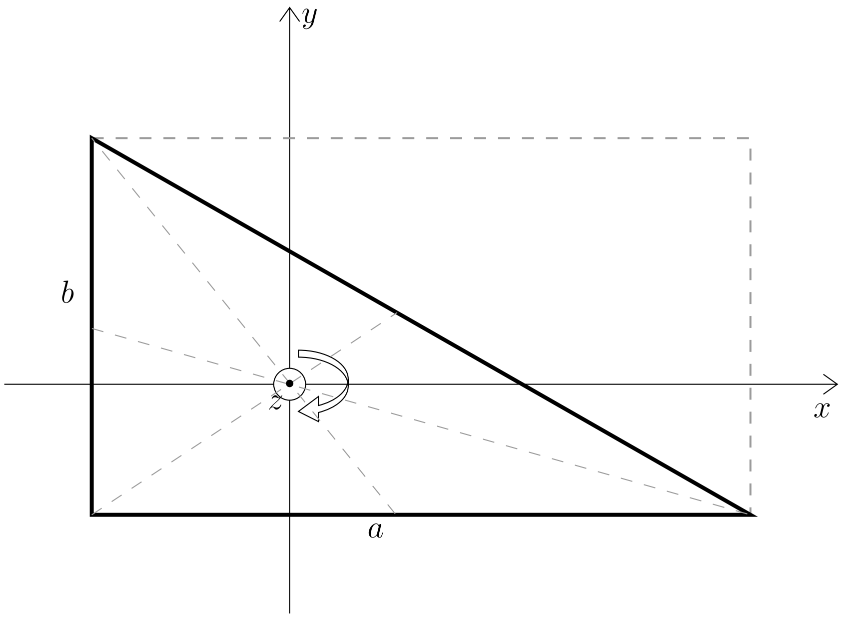
La méthode que nous proposons ici est directe et presque... brutale.... En effet, nous considérons le moment d'inertie toujours à partir du même axe, mais pour la moitié du rectangle :



Tout d'abord, nous avons évidemment maintenant :

$$J_z = \frac{1}{2}\frac{M}{12}(a^2+b^2) = \frac{M}{24}(a^2+b^2) \tag{8.7.122}$$

Mais nous voulons connaître le moment d'inertie de ce triangle équilatéral par son centre de gravité ! Autrement dit :



En cours de traduction de l'anglais

Ainsi, comme le centre de gravité est placé maintenant sur le tiers de la médiane partant du centre de gravité du carré (voir démonstrations précédente) et que nous utilisons le théorème de Steiner (voir section Mécanique Classique page ??), nous obtenons :

$$J_z = \frac{M}{24}(a^2+b^2) - \left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{(0.5a)^2+(0.5b)^2}\right)\right)^2 M = \frac{M}{24}(a^2+b^2) - \left(\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\right)^2 M \quad (8.7.123)$$

Si $a=b=L$ nous avons le célèbre cas particulier :

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{M}{24}(L^2+L^2) - \left(\frac{1}{6}\left(\sqrt{L^2+L^2}\right)\right)^2 M = \frac{L^2M}{12} - \left(\frac{1}{6}\left(\sqrt{2}L\right)\right)^2 M \\ &= \frac{L^2M}{12} - \frac{2L^2M}{36} = \frac{3L^2M}{36} - \frac{2L^2M}{36} = \frac{ML^2}{36} \end{aligned} \quad (8.7.124)$$

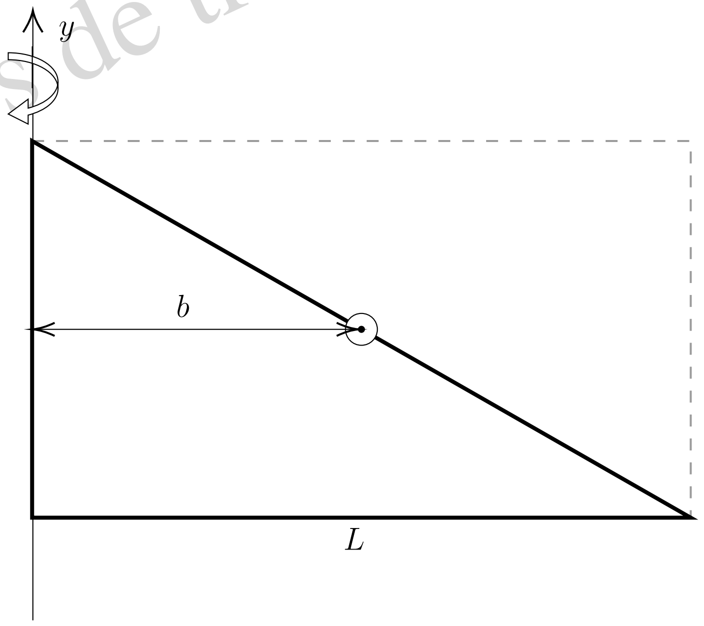
Si nous avons $a=b=L$ alors le rectangle a une hauteur $h=L$ c'est pourquoi nous pouvons trouver la relation précédente la plupart du temps dans les manuels scolaires sous la forme :

$$\boxed{J_{\triangle,z} = \frac{Mh^2}{36}} \quad (8.7.125)$$

qui est le moment d'inertie d'une plaque triangulaire équilatérale pour le cas particulier d'un axe passant par le centre de masse (gravité).

En cours de traduction de l'anglais

Bien sûr, comme pour d'autres géométries, nous pouvons choisir n'importe quel autre axe et les possibilités sont illimitées... Mais pour finir, nous allons calculer le moment d'inertie d'une plaque triangulaire rectangle de dimensions a, b dont l'axe de rotation est le long de l'axe y mais translaté de $b/2$ (c'est-à-dire : l'axe de rotation est colinéaire à la base de longueur a de la plaque triangulaire rectangle) :



Rappelons pour cela que nous avons d'abord démontré juste au-dessus que pour une plaque rectangulaire en rotation le long de sa bordure a était :

$$J_{y'} = \frac{L^2M}{3} \quad (8.7.126)$$

En appliquant une fois de plus le théorème de Steiner ET pour une demi-plaque (donc pour une plaque triangle rectangle) nous obtenons immédiatement :

$$J_y = \frac{L^2 M}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{L^2 M}{3} - \frac{L^2 M}{4} = \frac{4L^2 M - 3L^2 M}{12} = \frac{L^2 M}{12} \quad (8.7.127)$$

Et si nous posons comme d'habitude $L := h$ alors nous obtenons un autre résultat célèbre :

$$\boxed{J_y = \frac{h^2 M}{12}} \quad (8.7.128)$$

Comme nous pouvons le voir, le moment d'inertie dans cette configuration est la même que celle avec une plaque rectangulaire dont l'axe de rotation passe par le centroïde suivant l'axe y.

8.7.2.1.2 Pyramide

Définition (#8.7.384) : La "pyramide" est un polyèdre dont la base est un polygone et dont les côtés sont des triangles connectés en un seul point, formant le "sommet". En général, la pyramide n'est pas un polyèdre régulier ! Une "pyramide droite" a son sommet directement au-dessus du centre de gravité de sa base. Les pyramides non droites sont appelées "pyramides obliques". Une "pyramide régulière" a une base polygonale régulière et est généralement considérée comme droite. En l'absence de précision, on suppose généralement qu'il s'agit d'une "pyramide carrée régulière".

En cours de traduction de l'anglais

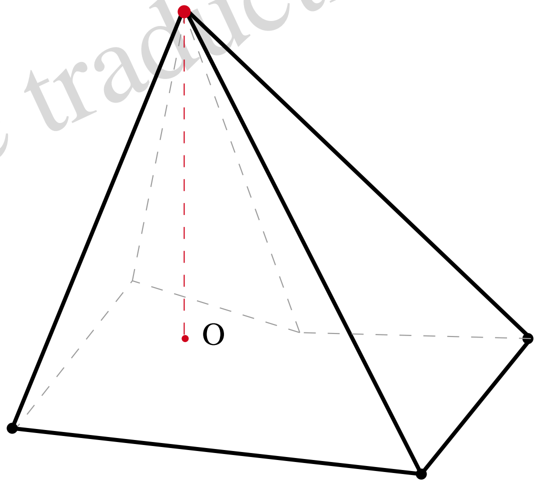


FIG. 8.256 – Exemple de pyramide (base irrégulière) mais non oblique

Considérons une surface $S(t)$ de la section de la pyramide avec le plan d'équation $z = t$ (c'est-à-dire que pour $t = 0$ nous avons la surface de la base de la pyramide), alors le volume V cherché est égal à :

$$V = \int_0^h S(t)\mathrm{d}t \quad (8.7.129)$$

Nous parlons d'équation de plan alors qu'il n'y a pas de repères défini pour l'instant. Au fait, dans l'intégrale, t varie entre 0 et h. Cela sous-entend que nous prenons un repère centré en H

(le pied de la hauteur de la pyramide), d'axe de la droite (la hauteur de la pyramide) orientée vers $\overline{HO}$ (du pied de la hauteur vers le sommet). Les deux autres axes sont choisis quelconques dans le plan de la base de la pyramide.

Il faut maintenant clarifier ce qu'est $S(t)$ en fonction de t :

Soit $S(0) = S$ l'aire de la base de la pyramide. La section de la pyramide par le plan d'équation $z = t$ se déduit de la mise à l'échelle du centre O et du rapport t/h. L'intégrale s'écrit donc :

$$V = \int_0^h S(t)\mathrm{d}t = \int_0^h S\frac{t^2}{h^2}\mathrm{d}t \quad (8.7.130)$$

où le fait d'avoir pris le carré de t/h est dû au fait que chaque terme intérieur de S est le produit de deux termes (par la définition d'une surface qui est la multiplication de la longueur) chacun de rapport homothétique t/h.

Ainsi nous avons :

$$\boxed{V = \frac{S}{h^2}\int_0^h t^2\mathrm{d}t = \frac{Sh}{3}} \quad (8.7.131)$$

En cours de traduction de l' anglais

8.7.2.1.2.1 Moment d'inertie d'une pyramide carrée régulière

Nous avons le long de l'axe de symétrie de la pyramide carrée régulière de hauteur h et de côté a :

$$J_z = \int r^2\mathrm{d}m = \int (\sqrt{x^2+y^2})^2\mathrm{d}m = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m \quad (8.7.132)$$

Comme :

$$V = \frac{Sh}{3} \quad (8.7.133)$$

Nous avons pour la masse de la pyramide :

$$M = \rho\frac{Sh}{3} = \rho\frac{a^2h}{3} \quad (8.7.134)$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}m = \rho\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{3} \quad (8.7.135)$$

Dès lors :

$$
\begin{aligned}
J_z = J_z &= \rho\int\limits_0^h \mathrm{d}z \int\limits_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x = \rho\int\limits_0^h \mathrm{d}z \int\limits_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \mathrm{d}y \left(\frac{1}{3}x^3+y^2x\right)\Bigg|_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}\\
&= 2\rho\int\limits_0^h \mathrm{d}z \int\limits_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}} \mathrm{d}y \left(\frac{1}{3}\frac{a^3z^3}{8h^3}+\frac{az}{2h}y^2\right) = 2\rho\int\limits_0^h \mathrm{d}z \left(\frac{1}{3}\frac{a^3z^3}{8h^3}y+\frac{1}{3}\frac{az}{2h}y^3\right)\Bigg|_{-\frac{az}{2h}}^{\frac{az}{2h}}\\
&= 4\rho\int\limits_0^h \mathrm{d}z \left(\frac{1}{3}\frac{a^4z^4}{16h^4}+\frac{1}{3}\frac{a^4z^4}{16h^4}\right) = 4\rho\int\limits_0^h \frac{2}{3}\frac{a^4z^4}{16h^4}\mathrm{d}z = \frac{a^4\rho}{6h^4}\int_0^h z^4\mathrm{d}z = \frac{a^4\rho}{6h^4}\frac{1}{5}h^5\\
&= \frac{a^4\rho}{6}\frac{1}{5}h = \frac{1}{10}\frac{1}{3}a^2h\rho a^2 = \frac{1}{10}ma^2
\end{aligned}
\tag{8.7.136}
$$

8.7.2.1.3 Prisme droit

Définition (#8.7.385) : Le "prisme droit" est un polyèdre dont les bases sont deux polygones égaux à côtés parallèles (elles ont la même surface !), les faces latérales étant des parallélogrammes. Donc, le prisme droit n'est pas un polyèdre régulier ! Les deux faces parallèles et de même forme sont appelées les bases du prisme droit.

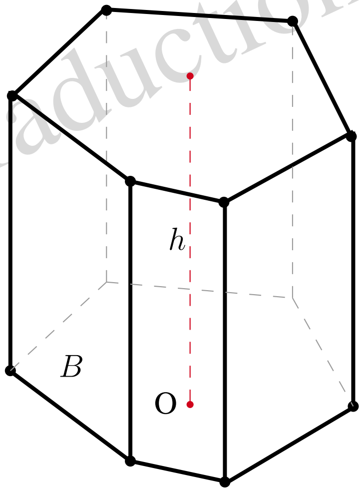


FIG. 8.257 – **Exemple de prisme droit**

Pour calculer le volume V d'un prisme droit, nous devons tout simplement multiplier l'aire de sa base B par sa hauteur h :

$$V = Bh \tag{8.7.137}$$

Comme sa base est un polygone, c'est-à-dire qu'il peut s'agir d'un triangle, d'un quadrilatère ou d'un pentagone... le lecteur doit savoir calculer ces aires pour calculer le volume du prisme droit.

Un prisme droit à base triangulaire est appelé "prisme triangulaire", un prisme droit à base rectangulaire est appelé "cuboïde", un prisme droit à base carrée est appelé "cube" et un prisme droit à base circulaire est appelé "cylindre"...

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.1.4 Polyèdres réguliers

Définitions (#8.7.386) :

D1. Un "polyèdre régulier" est constitué de surfaces identiques et régulières. Une définition courante équivalente est qu'un polyèdre régulier est tel que ses faces sont des polygones réguliers congruents, assemblés de la même manière autour de chaque sommet.

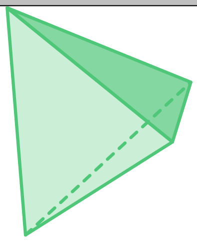
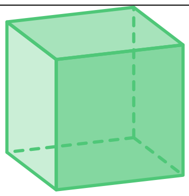
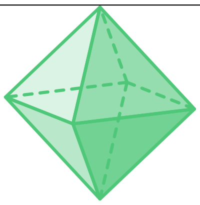
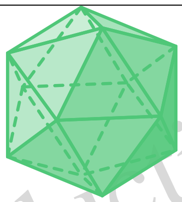
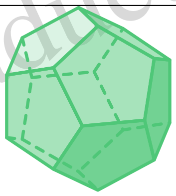
D2. Un "polyèdre convexe" est tel que chaque point d'un segment de droite joignant deux points quelconques appartient au (à l'intérieur du) polyèdre.

Les polyèdres réguliers sont au nombre de neufs, dont cinq sont convexes et étaient connus de Platon. Nous appelons parfois polyèdres réguliers uniquement les solides de Platon et ce sont ceux-ci qui vont nous intéresser ici.

Théorème 8.27. Nous allons démontrer qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes, qui sont nommés les "cinq solides de Platon" (les autres colonnes du tableau ci-dessous seront démontrées et expliquées un peu plus loin), un polyèdre régulier est identifié par son "symbole de Schläfli" de la forme (m, n), où m est le nombre de côtés de chaque face et n le nombre de faces se rencontrant à chaque sommet.

Pour la démonstration nous noterons A le nombre d'arêtes, S le nombre de noeuds (sommets) et F le nombre de faces.

En cours de traduction de l'anglais

Nom	**Schläfli** (m,n)	**Image**	S	A	F	$F-A+S$
Tétraèdre	$(3,3)$		4	6	4	2
Cube	$(4,3)$		8	12	6	2
Octaèdre	$(3,4)$		6	12	8	2
Dodécaèdre	$(5,3)$		20	30	12	2
Icosaèdre	$(3,5)$		12	30	20	2

TAB. 8.5 – Les cinq polyèdres réguliers (solides de Platon)

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Un "hydrocarbure platonicien" est un hydrocarbure (molécule) dont la structure correspond à l'un des cinq solides platoniciens : des atomes de carbone remplacent ses sommets, des liaisons carbone-carbone remplacent ses arêtes et des atomes d'hydrogène, si nécessaire. À notre connaissance, tous les solides platoniciens n'ont pas d'équivalents hydrocarbonés moléculaires.

Démonstration 8.27.1. Soit m le nombre de côtés de chaque surface d'un polyèdre régulier, n le nombre d'arêtes qui se rencontrent à chaque sommet. Nous avons donc que chaque angle d'une face est donné par :

$$2\beta = \frac{\pi}{2}\left(2-\frac{4}{m}\right) \tag{8.7.138}$$

Attention ! ! ! C'est l'angle 2β qui définit donc l'angle d'une face et non pas juste β !

Ce qui découle de la figure suivante :

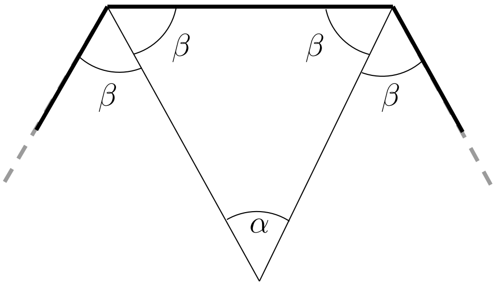


FIG. 8.258 – **Angles entre les arêtes d'un polyèdre régulier**

où nous avons :

$$\alpha = \frac{2\pi}{m} \quad (8.7.139)$$

et :

$$2\beta = \pi - \alpha = \pi - \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{4}{m}\right) \quad (8.7.140)$$

Mais la somme des n angles groupés autour d'un sommet est plus petite que les n angles qui coupent un plan en parties égales (nous supposerons cela intuitif par découpage) ! Chacun d'eux est donc inférieur à :

$$\frac{2\pi}{n} \quad (8.7.141)$$

alors :

$$\frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{4}{m}\right) < \frac{2\pi}{n} \quad (8.7.142)$$

et donc :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \quad (8.7.143)$$

Les nombres m et n sont tous deux au moins égaux à 3(le plus petit polygone étant le triangle). Il en résulte que les seuls cas possibles sont :

$$(m,n) = \{(3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3)\} \quad (8.7.144)$$

■ Q.E.D.

Notons maintenant F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets. Alors, rappelons que nous avons démontré dans le section de Théorie Des Graphes la "formule

En cours de traduction de l' anglais

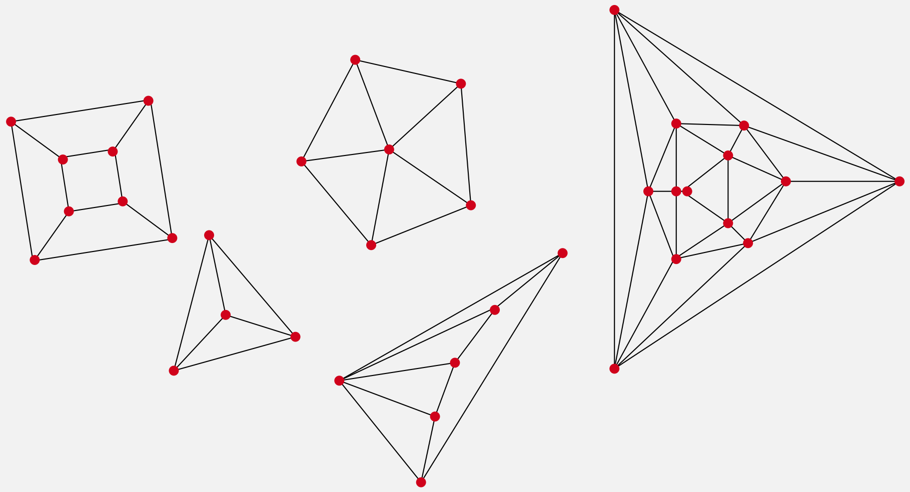
d'Euler" à la page **??** (aussi appelé "théorème d'Euler-Descarte" ou "formule polyédrique) telle que :

$$\boxed{F-A+S=2} \tag{8.7.145}$$

et celle-ci est bien évidemment valable aussi pour l'aplatissement d'un polyèdre dans le plan (et donc in extenso d'un polyèdre).

Remarque

La représentation sous forme d'un graphe de l'aplatissement d'un polyèdre est appelée diagramme de Schlegel" et est utilisée dans certaines domaines de la chimie organique.



Dans le cas des polyèdres réguliers, chaque face possède m arêtes de sorte que $m\cdot F$ est l'ensemble des arêtes des faces et comme chaque arête rencontre exactement deux faces, nous avons l'égalité (prendre un exemple pour s'en convaincre au cas où !) :

$$mF=2A \tag{8.7.146}$$

et comme n est le nombre des arêtes qui se rencontrent en chaque sommet, et que chaque arête relie deux sommets, nous avons également :

$$mF=nS \tag{8.7.147}$$

Soit :

$$mF=nS=2A \tag{8.7.148}$$

En injectant dans la formule d'Euler, nous avons alors :

$$\frac{2A}{m}-A+\frac{2A}{n}=2\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A}+\frac{1}{2}>2 \tag{8.7.149}$$

et nous retrouvons l'inégalité du théorème précédent. Reprenons notre calcul :

$$F-A+S=2=F-\frac{mF}{2}+\frac{mF}{n}=F\left(1-\frac{m}{2}+\frac{m}{n}\right) \tag{8.7.150}$$

d'où nous tirons :

$$F=\frac{2}{1-\dfrac{m}{2}+\dfrac{m}{n}}=\frac{2}{\dfrac{2n}{2n}-\dfrac{mn}{2n}+\dfrac{2m}{2n}}=\frac{4n}{2n-mn+2m} \tag{8.7.151}$$

Nous pouvons maintenant entreprendre la classification des polyèdres réguliers :

1. Le tétraèdre $(m,n)=(3,3)$:

$$F=\frac{4n}{2n-mn+2m}=\frac{12}{6-9+6}=4 \quad A=\frac{mF}{2}=\frac{12}{2}=6 \quad S=\frac{mF}{n}=\frac{12}{3}=4 \tag{8.7.152}$$

2. L'octaèdre $(m,n)=(3,4)$:

$$F=\frac{4n}{2n-mn+2m}=\frac{16}{8-12+6}=8 \quad A=\frac{mF}{2}=\frac{24}{2}=12 \quad S=\frac{mF}{n}=\frac{24}{2}=6 \tag{8.7.153}$$

3. L'hexaèdre ou cube $(m,n)=(4,3)$:

$$F=\frac{4n}{2n-mn+2m}=\frac{16}{6-12+8}=6 \quad A=\frac{mF}{2}=\frac{24}{2}=12 \quad S=\frac{mF}{n}=\frac{24}{3}=6 \tag{8.7.154}$$

4. L'icosaèdre $(m,n)=(3,5)$:

$$F=\frac{4n}{2n-mn+2m}=\frac{20}{10-15+6}=20 \quad A=\frac{mF}{2}=\frac{60}{2}=30 \quad S=\frac{mF}{n}=\frac{60}{5}=12 \tag{8.7.155}$$

5. Le dodécaèdre $(m,n)=(5,3)$:

$$F=\frac{4n}{2n-mn+2m}=\frac{12}{6-15+10}=12 \quad A=\frac{mF}{2}=\frac{60}{2}=30 \quad S=\frac{mF}{n}=\frac{60}{3}=20 \tag{8.7.156}$$

ce qui termine notre classification.

Démontrons maintenant que tout polyèdre composé seulement de pentagones et d'hexagones a exactement et obligatoirement douze pentagones (et il n'y a donc aucune contrainte sur le nombre d'hexagones). C'est n'est pas très intuitif et pourtant !

Cette démonstration va nous expliquer par exemple pourquoi le ballon de football et la molécule de fullerène ont douze pentagones :

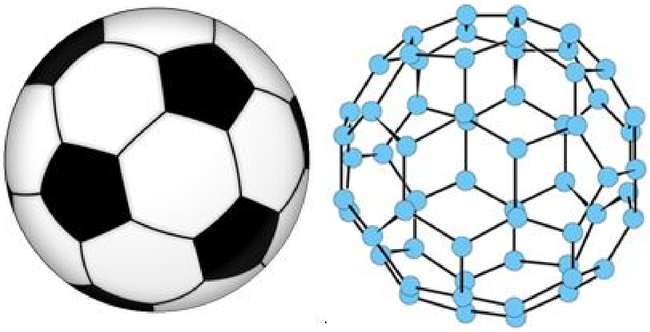


FIG. 8.259 – **Polyèdres connus composés de 12 pentagones**

Démonstration 8.27.2. Pour la démonstration, nous partons de la formule d'Euler :

$$F-A+S=2 \tag{8.7.157}$$

En cours de traduction de l'anglais

Soit M, le nombre de pentagones et N le nombre d'hexagones, nous avons alors le nombre de faces qui est :

$$F = M + N \tag{8.7.158}$$

De plus, chaque sommet est partagé par trois polygones dans le cas du ballon et du fullerène. Donc, le nombre de sommets est :

$$S = \frac{5M + 6N}{3} \tag{8.7.159}$$

Chaque arête est partagée par deux polygones. Donc, le nombre d'arêtes est :

$$A = \frac{5M + 6N}{2} \tag{8.7.160}$$

Alors en injectant la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} F - A + S = 2 = (M + N) - \frac{5M + 6N}{2} + \frac{5M + 6N}{3} \\ = \frac{6(M + N) - 3(5M + 6N) + 2(5M + 6N)}{6} = \frac{M}{6} \end{aligned} \tag{8.7.161}$$

Par conséquent, pour satisfaire :

$$\frac{M}{6} = 2 \tag{8.7.162}$$

M, le nombre de pentagones, doit obligatoirement valoir 12.

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.1.5 Tétraèdre régulier

Un tétraèdre est un polyèdre composé de 4 faces triangulaires, de 6 arêtes droites et de 4 sommets. Le tétraèdre est le plus simple de tous les polyèdres convexes ordinaires et le seul à posséder moins de 5 faces.

Le tétraèdre est un type de pyramide, un polyèdre à base polygonale plate et à faces triangulaires reliant la base à un point commun. Dans le cas d'un tétraèdre, la base est un triangle (n'importe laquelle des quatre faces peut être considérée comme la base). Nous parlons alors de "pyramide triangulaire".

Définition (#8.7.387) : Un "tétraèdre régulier" est un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux. Il fait partie des cinq solides réguliers de Platon, connus depuis l'Antiquité.

Nous avons montré que pour le tétraèdre $F = 4, m = 3$ et il est relativement aisé de deviner qu'un tel polyèdre est formé de 3 triangles équilatéraux identiques comme le montre la figure ci-dessous :

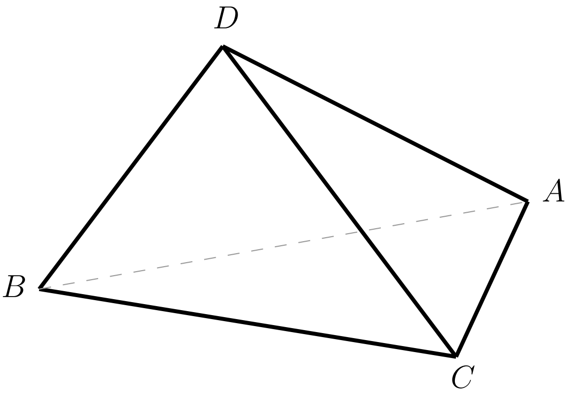


FIG. 8.260 – Exemple de tétraèdre régulier

Pour cela, commençons par étudier le triangle équilatéral suivant :

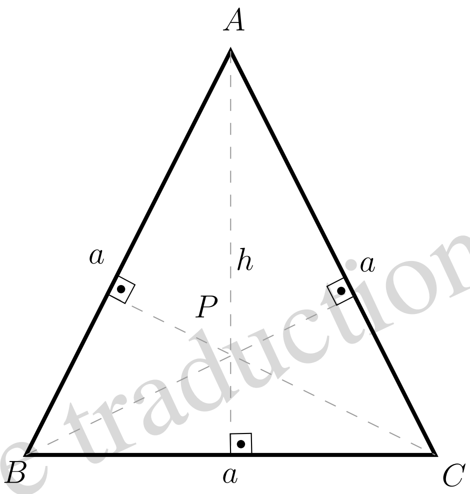


FIG. 8.261 – Triangle équilatéral de départ pour le calcul du volume

En cours de traduction de l'anglais

Dans ce triangle équilatéral, a est le côté, h la hauteur. Les médiatrices sont h, h', h'' des côtés respectifs $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

Les segments h et h' se coupent en un point P (barycentre). Par construction du triangle équilatéral, nous avons $\overline{PC} = \overline{PB} = \overline{PA}$ (il suffit d'appliquer Pythagore pour le démontrer).

Nous avons par ailleurs démontré lors de notre étude du triangle, que le barycentre de celui-ci se situe toujours à $2/3$ de la hauteur de la médiane. Comme les médianes et médiatrices sont confondues dans le cas du triangle équilatéral, nous avons alors $\overline{AP} = 2/3 \cdot h$.

Maintenant, nous tirons une droite passant par le point P et perpendiculaire au plan dans lequel se trouve le triangle. Soit D un point sur cette droite, comme $\overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PA} = 2/3 \cdot h$ nous aurons bien sûr $\overline{BD} = \overline{AD} = \overline{CD}$ (il suffit d'appliquer Pythagore à nouveau !).

Il ne nous reste donc plus qu'à nous arranger pour que $\overline{BD} = a$ et nous aurons le tétraèdre régulier que nous voulions. Nous calculons alors :

$$\overline{BP}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{BD}^2 = a^2 \quad (8.7.163)$$

et donc :

$$\overline{PD}^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = a^2 - \frac{4}{9}h^2 = a^2 - \frac{4}{9}\left(a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right) = a^2 - \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}a^2\right) = \frac{2}{3}a^2 \qquad (8.7.164)$$

alors :

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}a \qquad (8.7.165)$$

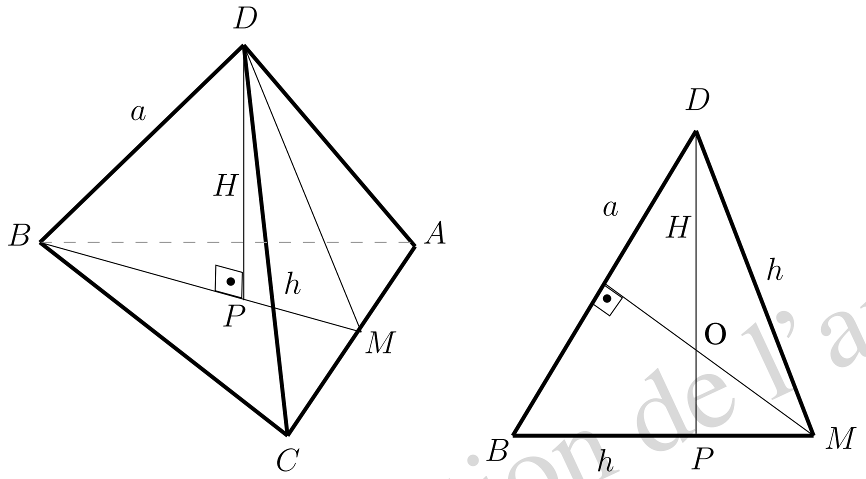


FIG. 8.262 – **Synthèse de toutes les variables du tédraèdre**

La médiatrice de $\overline{BD}$ (sur la figure de droite) passant par M coupe H en un point O, qui n'est rien d'autre que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre. En effet, par construction, nous avons $\overline{\text{O}B} = \overline{\text{O}C} = \overline{\text{O}A}$ et la médiatrice nous donne $\overline{\text{O}B} = \overline{\text{O}D}$.

Le théorème de Thalès (voir section Géométrie Plane page 2591) nous donne également :

$$\frac{\overline{\text{O}D}}{\frac{1}{2}a} = \frac{a}{\overline{PD}} \Rightarrow \overline{\text{O}D} = \frac{1}{2}a^2\frac{1}{\overline{PD}} = \frac{1}{2}a^2\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{a}{2} \qquad (8.7.166)$$

et pour les développements qui suivront nous poserons $H = \overline{PD}$, $\overline{\text{O}D} = R$.

Calculons maintenant la surface totale. Elle sera nécessairement donnée par la surface d'une seule face multipliée par le nombre de faces, et comme nous avons démontré comment calculer la surface d'un triangle plus haut il vient immédiatement :

$$S = n\left(\frac{1}{2}\cdot\text{base}\cdot\text{hauteur}\right) = 4\frac{1}{2}ah = 4\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a^2 \qquad (8.7.167)$$

Pour le volume, c'est tout aussi simple puisque nous avons démontré plus haut quel était celui d'une pyramide. Il vient alors immédiatement :

$$V = \frac{1}{3}\cdot\text{base}\cdot\text{hauteur} = \frac{1}{3}\frac{S}{4}\cdot H = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \qquad (8.7.168)$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$S = \sqrt{3}a^2 \tag{8.7.169}$$

et :

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \tag{8.7.170}$$

8.7.2.1.6 Hexaèdre régulier (cube)

Le cube est le polyèdre régulier qui nous est le plus familier, il compte 6 faces et sa construction ne nécessite probablement pas d'être présentée.

Le cube est également un parallélépipède carré, un cuboïde équilatéral et un rhomboèdre droit. C'est un prisme carré régulier à trois orientations et un trapèze trigonal à quatre orientations.

En cours de traduction de l' anglais

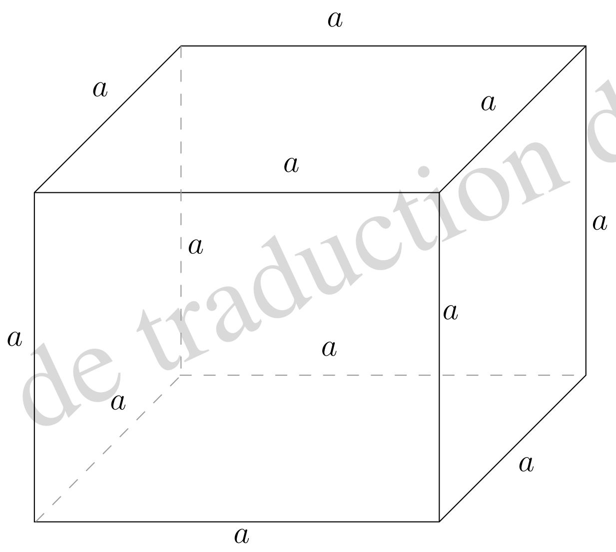


FIG. 8.263 – **Exemple d'hexaèdre régulier (cube)**

Puisque tous les côtés sont de longueur a, la surface est simplement donnée par la multiplication de la surface des 6 faces. Ainsi :

$$S = 6a^2 \tag{8.7.171}$$

et le volume :

$$V = a^3 \tag{8.7.172}$$

8.7.2.1.7 Octaèdre régulier

Nous avons montré que pour l'octaèdre $F = 8, m = 4$ et il est relativement aisé de deviner que l'octaèdre régulier est formé (par définition) de 8 triangles équilatéraux identiques.

Un octaèdre régulier est une bipyramide carrée selon trois orientations orthogonales. C'est également un antiprisme triangulaire selon quatre orientations.

Pour construire, et montrer qu'il est possible de construire, un tel polyèdre, nous posons comme précédemment que son côté vaut a :

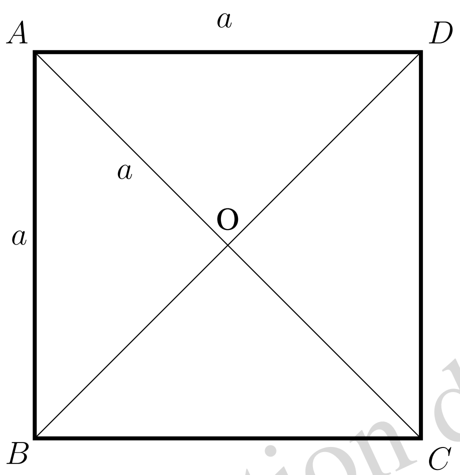


FIG. 8.264 – Exemple d'octaèdre régulier vu ci-dessus

Nous notons alors O le point d'intersection des deux diagonales. Nous avons donc, en appliquant le théorème de Pythagore :

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}a \tag{8.7.173}$$

et :

$$\overline{\text{O}A}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{8.7.174}$$

Sur la droite perpendiculaire au plan contenant notre carré, et passant par O, nous ajoutons deux sommets E, F à une distance que nous calculons comme suit :

$$\overline{\text{O}A}^2 + \overline{\text{O}E}^2 = \overline{AE}^2 = a^2 \tag{8.7.175}$$

d'où nous tirons :

$$\overline{\text{O}E}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{\text{O}A}^2 = a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \tag{8.7.176}$$

Dès lors :

$$\overline{\text{O}E}^2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = \overline{\text{O}A} = -\overline{\text{O}F} \tag{8.7.177}$$

Notre polyèdre est alors bien formé par huit triangles équilatéraux tous identiques. Chaque sommet compte quatre arêtes et quatre faces, ce qui nous permet d'affirmer qu'il est bien régulier et termine ainsi notre construction.

En cours de traduction de l'anglais

La surface de l'octaèdre régulier est :

$$S = n\frac{1}{2}ah = 8\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}a}{2} = 2\sqrt{3}a^2 \qquad (8.7.178)$$

avec h étant la hauteur du triangle équilatéral de côté a que nous avons déjà calculée plus haut.

Pour le volume, c'est encore basé sur celui de la pyramide. Ainsi :

$$V = 2\frac{1}{3}\text{basis} \cdot \text{height} = 2\frac{1}{3}a^2\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2 \qquad (8.7.179)$$

Et nous supposerons qu'il est évident pour le lecteur que notre octaèdre est inscrit dans une sphère de rayon R dont le centre est le point O. Pour R, nous avons :

$$R = \overline{\text{O}A} = \overline{\text{O}E} = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (8.7.180)$$

Montrons déjà maintenant que nous pouvons construire l'icosaèdre régulier à partir de l'octaèdre et que ce premier existe et est bien constructible.

Pour cela, nous allons d'abord considérer un repérage vectoriel des points suivants de l'octaèdre avec l'origine O placée au barycentre :

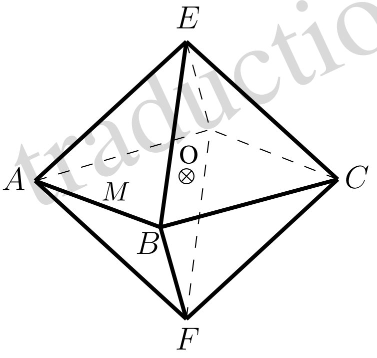


FIG. 8.265 – Exemple d'octaèdre

En cours de traduction de l'anglais

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (R,0,0)\\ \vec{B} &= (0,R,0)\\ \vec{C} &= (-R,0,0)\\ \vec{D} &= (0,-R,0)\\ \vec{E} &= (0,0,R)\\ \vec{F} &= (0,0,-R)\end{aligned} \qquad (8.7.181)$$

Une fois ceci posé, considérons la figure suivante :

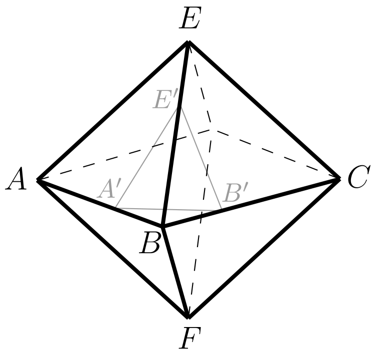


FIG. 8.266 – **Recherche de la position du triangle équilatéral**

Sur la figure ci-dessus, A' est un point qui part de A et qui arrive en B, et soit B' un point qui part de C et qui arrive en B, et pour finir E' un point qui part de B et arrive en E. Ces trois points partent en même temps et avancent à la même vitesse. Si nous suivons ces trois points, qui forment un triangle $A'B'E'$, nous sentons bien intuitivement qu'il existe un lieu tel que $A'B'E'$ soit un triangle équilatéral.

En cours de traduction de l'anglais

Déterminons ce lieu :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{\text{O}B}-\overrightarrow{\text{O}A}=(-R,R,0) & \overrightarrow{\text{O}A'}&=\overrightarrow{\text{O}A}+\mu\overrightarrow{AB}=R(1-\mu,\mu,0)\\ \overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{\text{O}B}-\overrightarrow{\text{O}C}=(R,R,0) & \overrightarrow{\text{O}B'}&=\overrightarrow{\text{O}C}+\mu\overrightarrow{CB}=R(\mu-1,\mu,0)\\ \overrightarrow{BE}&=\overrightarrow{\text{O}E}-\overrightarrow{\text{O}B}=(0,-R,R) & \overrightarrow{\text{O}E'}&=\overrightarrow{\text{O}B}+\mu\overrightarrow{BE}=R(0,1-\mu,\mu)\end{aligned} \tag{8.7.182}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'}&=\overrightarrow{\text{O}B'}-\overrightarrow{\text{O}A'}=R(2\mu-2,0,0)\\ \overrightarrow{A'E'}&=\overrightarrow{\text{O}E'}-\overrightarrow{\text{O}A'}=R(\mu-1,1-2\mu,\mu)\end{aligned} \tag{8.7.183}$$

et nous voulons :

$$||\overrightarrow{A'B'}||=||\overrightarrow{A'E'}||=||\overrightarrow{B'E'}|| \tag{8.7.184}$$

Alors :

$$||\overrightarrow{A'B'}||^2=R^2(2\mu-2)^2=||\overrightarrow{A'E'}||^2=R^2\left[(\mu-1)^2+(1-2\mu)^2+\mu^2\right] \tag{8.7.185}$$

C'est-à-dire :

$$4\mu^2-8\mu+4=6\mu^2-6\mu+2 \tag{8.7.186}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\mu^2-\mu-1=0 \tag{8.7.187}$$

et comme $0\leq\mu\leq 1$, nous obtenons pour la résolution de ce polynôme du deuxième degré (voir section Calcul Algébrique page 1363) la seule solution acceptable :

$$\mu=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \tag{8.7.188}$$

où le lecteur aura peut-être remarqué qu'il s'agit de l'inverse du nombre d'or...

D'après la figure ci-dessous, si nous posons :

$$\overrightarrow{\text{O}I'} = \overrightarrow{\text{O}E} + \mu\overrightarrow{EA} \tag{8.7.189}$$

alors nous retombons sur la même valeur pour μ (le lecteur peut vérifier lui-même, ou nous pouvons sur demande ajouter les calculs détaillés ici) et idem pour tous les autres points :

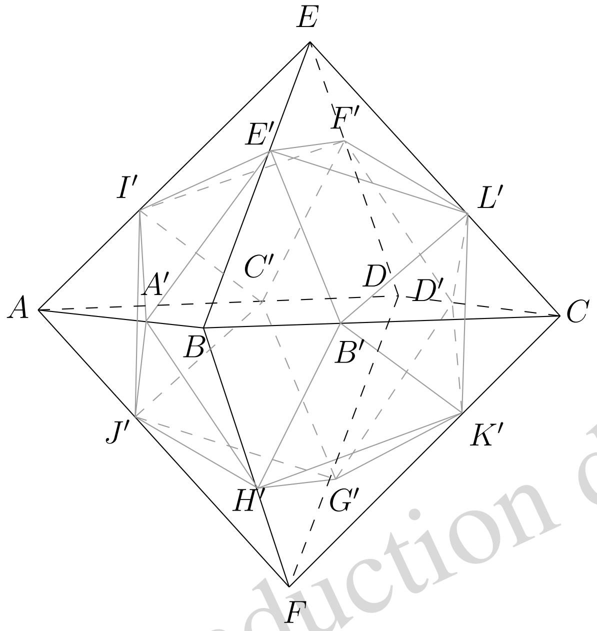


FIG. 8.267 – **Construction de l'icosaèdre régulier**

Notre nouveau polyèdre comporte donc une face par face de l'octaèdre et une face par arête de l'octaèdre. Nous avons ainsi 20 faces composées de triangles équilatéraux identiques. De plus, 5 arêtes et 5 faces se rencontrent en chaque sommet. Nous obtenons alors un icosaèdre régulier.

Nous avons pour les coordonnées de chaque sommet (il faut bien observer que les sommets sont opposés par paires en une composante sur la figure) :

$$\begin{aligned}
\vec{A}' &= R(1-\mu,\mu,0) & \vec{D}\,' &= R(1-\mu,-\mu,0)\\
\vec{B}' &= R(\mu-1,\mu,0) & \vec{C}\,' &= R(1-\mu,-\mu,0)\\
\vec{E}' &= R(0,1-\mu,\mu) & \vec{H}\,' &= R(0,1-\mu,-\mu)\\
\vec{F}' &= R(0,\mu-1,\mu) & \vec{G}\,' &= R(0,\mu-1,-\mu)\\
\vec{I}' &= R(\mu,0,1-\mu) & \vec{L}\,' &= R(-\mu,0,1-\mu)\\
\vec{J}' &= R(\mu,0,\mu-1) & \vec{K}\,' &= R(-\mu,0,1-\mu)
\end{aligned} \tag{8.7.190}$$

En cours de traduction de l' anglais

8.7.2.1.8 Icosaèdre régulier

Nous avons vu précédemment comment construire l'icosaèdre régulier. Il existe donc bien !

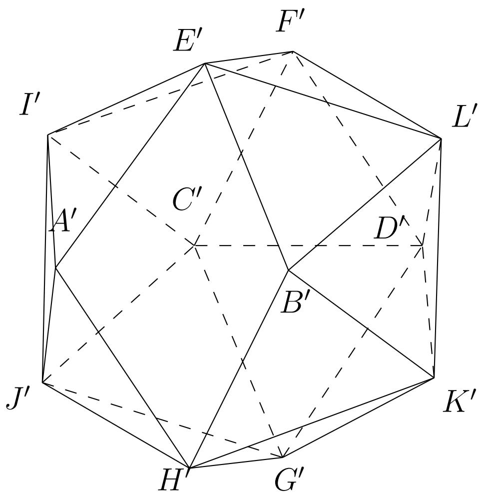


FIG. 8.268 – Representation of the regular icosahedron

En cours de traduction de l'anglais

Connaissant les coordonnées des différents sommets, calculons maintenant la surface et le volume de l'icosaèdre régulier.

Le calcul de la surface est simple puisqu'il s'agit de 20 triangles équilatéraux. Nous avons donc :

$$\overrightarrow{A'B'} = R(2\mu-2,0,0) \tag{8.7.191}$$

Ainsi :

$$||\overrightarrow{A'B'}|| = 2R(\mu-1) = a' \tag{8.7.192}$$

Dès lors :

$$S = 20\frac{1}{2}a'h = 20\frac{1}{2}a'\sqrt{a'^2-\left(\frac{1}{2}a'\right)^2} = 20\frac{1}{2}a'2\sqrt{\frac{3}{4}a'^2} = 20\frac{1}{2}a'\frac{\sqrt{3}}{2}a' \tag{8.7.193}$$

Et finallement :

$$\boxed{S = 5\sqrt{3}a'^2} \tag{8.7.194}$$

Le calcul du volume est lui un peu plus subtil... ! Attaquons ce dernier...

L'icosaèdre est construit autour du pentagone et de la section d'or comme nous avons pu nous en apercevoir lors de notre étude de l'octaèdre.

Si jamais le lecteur n'est pas convaincu voici une figure supplémentaire où nous voyons bien que chaque arête de l'icosaèdre est une arête d'un pentagone ($AFECB$, $LGHJK$, $DAJKC$, $DEGHA$, $BJILC$, $FELIH$,...) :

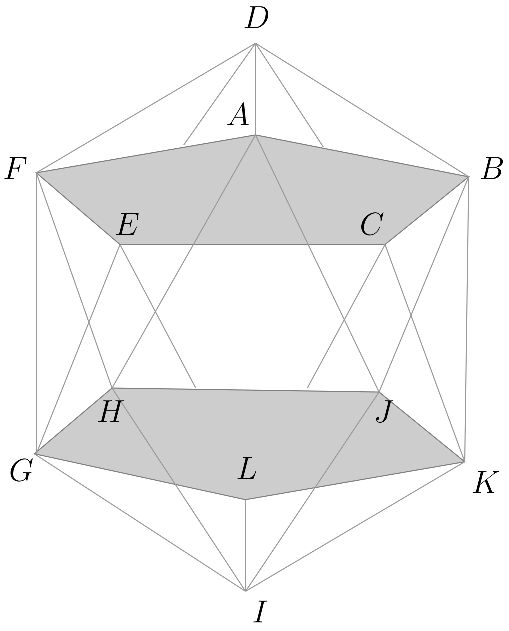


FIG. 8.269 – **Pentagones dans l'icosaèdre régulier**

Utilisant la méthode des pyramides, nous avons 20 triangles équilatéraux qui servent de base à une pyramide dont la hauteur va jusqu'à l'origine O de l'icosaèdre (ou l'origine confondue de la sphère inscrite ou circonscrite).

Prenons pour exemple la base ABD avec l'intersection des médiatrices se trouvant au point M comme représenté ci-dessous.

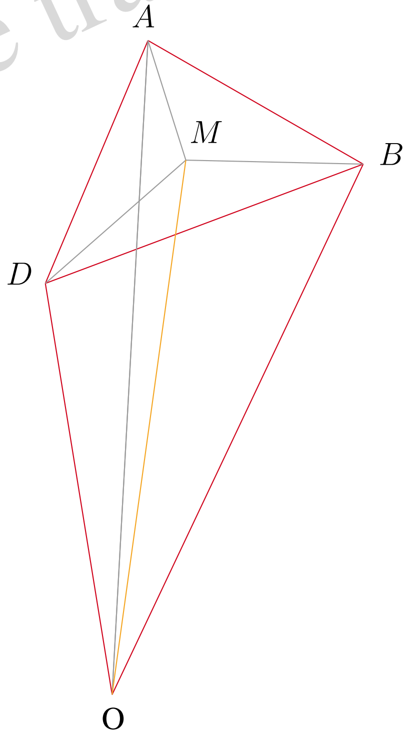


FIG. 8.270 – **Représentation d'une des pyramides de l'icosaèdre régulier**

En cours de traduction de l'anglais

Comme nous le savons, le volume de chaque pyramide est :

$$V_p = \frac{1}{3}bh \tag{8.7.195}$$

La surface b est dans notre situation celle du triangle équilatéral ΔADB et la hauteur h est le segment $\overline{\text{O}M}$.

Si nous notons a le côté de triangle, alors la surface est donnée par :

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \tag{8.7.196}$$

Pour trouver h, nous savons par construction du point M que les triangles $\text{O}MA$, $\text{O}MB$ et $\text{O}MD$ sont des triangles rectangles.

Travaillons arbitrairement avec le triangle $\text{O}MD$. D'abord, déterminons la longueur $\overline{DM}$. Nous avons démontré lors de notre étude des médiatrices de longueur H du triangle équilatéral (voir section Géométrie Euclidienne page 2582) que $\overline{DM}$ vaut alors :

$$\overline{DM} = \frac{2}{3}H \tag{8.7.197}$$

Mais :

$$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \tag{8.7.198}$$

Donc finalement :

$$\overline{DM} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a \tag{8.7.199}$$

Pour trouver h nous devons trouver la longueur $\overline{\text{O}D} = r$ en termes de longueur des arêtes a de l'icosaèdre. Pour cela, nous devons reconnaître une des propriétés géométriques élémentaires de l'icosaèdre.

Avant d'aller plus loin, montrons une propriété du pentagone ci-dessous avec ses diagonales d et ses cotés c :

En cours de traduction de l'anglais

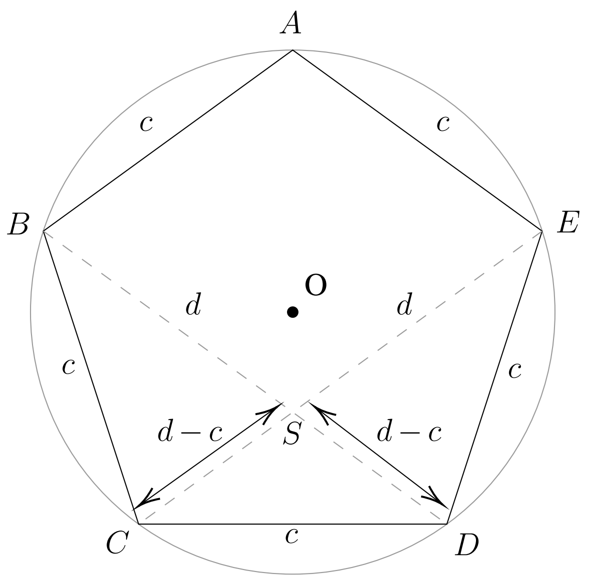


FIG. 8.271 – **Parallélogramme dans un pentagone**

$BSEA$ est un parallélogramme. Effectivement, la diagonale $\overline{BD}$ est parallèle au côté $\overline{AE}$ (par exemple, parce que tous deux sont perpendiculaires à l'axe de symétrie passant par $\overline{OC}$). Comme S est sur $\overline{BD}$, cela prouve que $\overline{BS}$ et $\overline{AE}$ sont parallèles. Nous montrons de la même manière que $\overline{AB}$ et $\overline{SE}$ sont parallèles.

Nous en déduisons que :

$$\overline{SD} = \overline{BD} - \overline{BS} = \overline{BD} - \overline{AE} = d - c \tag{8.7.200}$$

et de même pour $\overline{CS}$:

$$\overline{CS} = \overline{EC} - \overline{ES} = \overline{EC} - \overline{AB} = d - c \tag{8.7.201}$$

Continuons..., nous avons l'égalité $\overset{\frown}{BAE} = \overset{\frown}{CSD}$. Comme de plus CD et BE sont parallèles, les triangles SCD et ABE sont semblables. Par conséquent, les rapports de distances entre leurs côtés sont conservés (Thalès) :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}} \tag{8.7.202}$$

d'où la relation :

$$\frac{c}{d} = \frac{d-c}{c} \tag{8.7.203}$$

Après quelques remaniements :

$$\frac{d}{c} - \frac{c}{d-c} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(d-c) - c \cdot c}{c(d-c)} = 0 \Leftrightarrow d^2 - dc - c^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{c^2} - \frac{d}{c} - 1 = 0 \tag{8.7.204}$$

Si μ désigne maintenant le rapport d/c, la relation précédente devient :

$$\mu^2 - \mu - 1 = 0 \tag{8.7.205}$$

En cours de traduction de l'anglais

et μ étant strictement positif, nous avons déjà vu lors de notre étude de l'octaèdre que l'unique racine positive est le nombre d'or :

$$\mu=\frac{d}{c}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{8.7.206}$$

Nous venons donc de montrer qu'une diagonale d'un pentagone est égale au nombre d'or multiplié par la longueur d'une arête de ce même pentagone.

Ainsi, nous avons dans les pentagones $AFECB$ et $LGHJK$ de notre icosaèdre :

$$\overline{FB}=\overline{GK}=\mu a \tag{8.7.207}$$

Remarquons également le rectangle $FBGK$ dont le barycentre est confondu avec celui de l'icosaèdre. Par ailleurs, $\overline{FK}$ et $\overline{BG}$ représentent par construction le diamètre de la sphère circonscrite à l'icosaèdre et donc $\overline{OF}=\overline{OK}$ en est le rayon r que nous allons chercher.

Nous avons :

$$\overline{FK}^2=\overline{FB}^2+\overline{BK}^2=\mu^2a^2+a^2=(\mu^2+1)a^2 \tag{8.7.208}$$

Ainsi :

$$\overline{FK}=a\sqrt{\mu^2+1}=2r \tag{8.7.209}$$

dès lors :

$$r=\frac{a\sqrt{\mu^2+1}}{2} \tag{8.7.210}$$

Mainenant, nous pouvons calculer h :

$$h^2=\overline{\mathrm{O}M}^2=r^2-\overline{DM}^2=\frac{a^2(\mu^2+1)}{4}-\frac{1}{3}a^2=\frac{3(\mu^2+1)-4}{12}a^2=\frac{3\mu^2-1}{12}a^2 \tag{8.7.211}$$

Mais :

$$\mu^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\mu+1 \tag{8.7.212}$$

puisque le nombre d'or est racine de l'équation $x^2=x+1$.

Soit :

$$(\mu^2)^2=(\mu+1)^2=\mu^2+2\mu+1=\mu^2+2(\mu^2-1)+1=3\mu^2-1 \tag{8.7.213}$$

Donc finalement :

$$h^2=\frac{3\mu^2-1}{12}a^2=\frac{\mu^4}{12}a^2 \tag{8.7.214}$$

et :

$$h=\frac{\mu^2}{2\sqrt{3}}a \tag{8.7.215}$$

Ainsi, le volume d'une pyramide de l'icosaèdre est :

$$V_{\text{pyr}}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\mu^2}{2\sqrt{3}}a=\frac{\mu^2}{24}a^3 \tag{8.7.216}$$

Comme il y a 20 pyramides :

$$\boxed{V=20\frac{\mu^2}{24}a^3=\frac{5}{6}\mu^2a^3} \tag{8.7.217}$$

En cours de traduction de l' anglais

8.7.2.1.9 Dodécaèdre régulier

Faute d'avoir trouvé dans la littérature une manière esthétique et simple de faisabilité de construction du dodécaèdre, nous nous en passerons pour l'instant (il est possible de vivre sans...).

Remarquons simplement que le dodécaèdre est composé de 12 pentagones réguliers et son volume est assimilable à celui d'un parallélépipède sur lequel nous avons posé sur chacune des faces une sorte de petit toit ce qui au final va donner les pentagones :

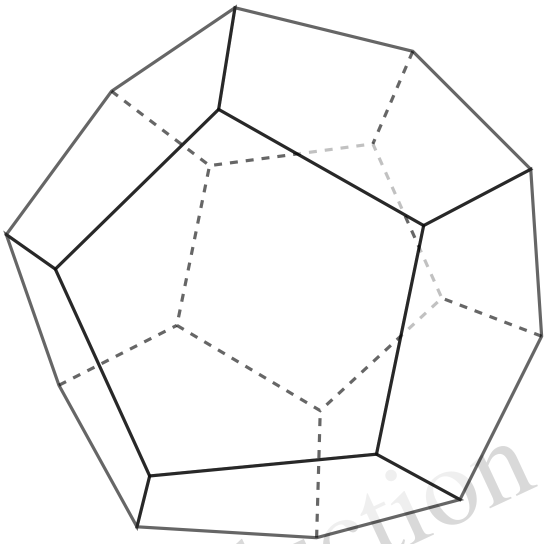


FIG. 8.272 – **Dodécaèdre régulier**

En cours de traduction de l'anglais

Pour notre étude du dodécaèdre, nous nous intéresserons uniquement à déterminer sa surface et son volume.

Pour cela, considérons dans un premier temps le pentagone régulier ci-dessous :

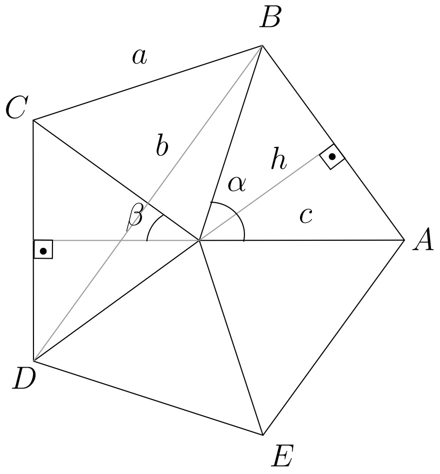


FIG. 8.273 – **Pentagone régulier pour la recherche du volume du dodécaèdre régulier**

Nous allons d'abord devoir déterminer la longueur de h et de b.

Rappelons d'abord que nous avons lors de notre étude l'icosaèdre déjà démontré que la diagonale d'un pentagone est reliée à la longueur de ses côtés par la relation :

$$b = a\mu = a\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{8.7.218}$$

où est μ donc le nombre d'or. Il nous reste alors à déterminer h.

Il est d'abord évident que $\beta = 2\pi/10 = \pi/5 = \alpha/2$ et que :

$$c \cdot \cos(\beta) = h \tag{8.7.219}$$

Or, deux informations nous manquent ici : l'angle et c. Commençons par déterminer combien vaut le cosinus sans utiliser la calculatrice (vous comprendrez pourquoi...).

Nous avons d'abord selon la relation (voir section Trigonométrie page 2502) :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \tag{8.7.220}$$

que :

$$\cos\left(4\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(2\frac{\pi}{5}\right) - 1 \tag{8.7.221}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(2\frac{\pi}{5}\right) - 1 \tag{8.7.222}$$

Mais cela s'écrit également en utilisant toujours la même relation trigonométrique remarquable :

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = 2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1\right] - 1 \tag{8.7.223}$$

Soit après simplification :

$$-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 \tag{8.7.224}$$

En faisant un changement de variable et en réarrangeant les différents termes :

$$8X^4 - 8X^2 + X + 1 = 0 \tag{8.7.225}$$

Nous avons -1 et $1/2$ qui sont deux racines évidentes et nous obtenons donc (voir section Calcul Algébrique page 1364) :

$$(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right) = 0 \tag{8.7.226}$$

Nous n'avons plus qu'à résoudre une simple équation du deuxième degré dont la solution est triviale en appliquant les méthodes vues dans la section de Calcul Algébrique, et nous obtenons :

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \tag{8.7.227}$$

En cours de traduction de l' anglais

Soit en ne prenant que la seule solution admissible, nous avons alors :

$$X=\frac{\mu}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \tag{8.7.228}$$

Nous retombons sur le nombre d'or là aussi (!) et ceci nous amène directement à écrire que :

$$\boxed{h=\frac{1}{2}\mu c=\frac{1}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}c} \tag{8.7.229}$$

Il nous reste à déterminer c. Nous avons :

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+h^2=c^2\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}\mu^2c^2\Rightarrow c^2(4-\mu^2)=a^2 \tag{8.7.230}$$

et comme $\mu^2-\mu-1=0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}(4-\mu^2)(2+\mu)&=8+4\mu-2\mu^2-\mu^3=8+4\mu-2\mu^2-\mu(\mu+1)=8+3\mu-3\mu^2\\&=8+3(\mu-\mu^2)=8+3(-1)=5\end{aligned} \tag{8.7.231}$$

et donc :

$$c^2=\frac{1}{4-\mu^2}a^2=\frac{2+\mu}{5}a^2=\frac{\mu^2+1}{5}a^2 \tag{8.7.232}$$

Ainsi :

$$c=\frac{\sqrt{\mu^2+1}}{\sqrt{5}}a \tag{8.7.233}$$

Nous avons donc pour le calcul de la surface du pentagone, une surface composée de 12 pentagones dont chacun est composé de 5 triangle de base a et de hauteur h :

$$\begin{aligned}S&=12\cdot 5\frac{1}{2}ah=30ah=30a\frac{1}{2}\mu c=15a\mu c=15a\mu\frac{\sqrt{\mu^2+1}}{\sqrt{5}}a\\&=15\mu\frac{\sqrt{\mu^2+1}}{\sqrt{5}}a^2\end{aligned} \tag{8.7.234}$$

En cours de traduction de l' anglais

Dès lors :

$$\boxed{S=3\mu a^2\sqrt{5}\sqrt{\mu^2+1}} \tag{8.7.235}$$

Pour calculer le volume, nous allons faire usage de l'astuce mentionnée au début. C'est-à-dire de découper dans un premier temps le dodécaèdre en un parallélépipède de côté :

$$c=s\mu=s\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{8.7.236}$$

puisque le côté du parallélépipède est une diagonale du pentagone de côté s et de 6 petits toits (qui sont bien visibles sur la figure du dodécaèdre donnée précédemment).

Chaque petit toit selon deux vues différentes aura les longueurs suivantes (où nous retrouvons bien évidemment pour certaines arêtes celles des pentagones s ou encore les diagonales c de ceux-ci) :

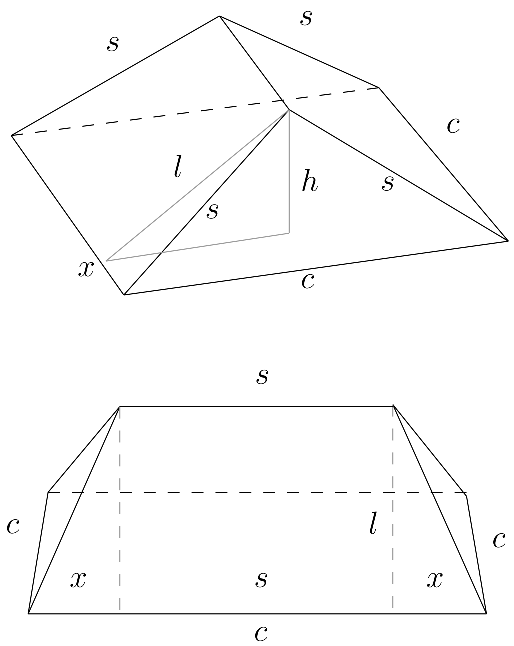


FIG. 8.274 – **Autres éléments de volume du dodécaèdre régulier**

Pour chaque petit toit, nous traitons à part les extrémités en les séparant et en les réunissant. Finalement, nous avons deux morceaux à traiter : la partie majeure du toit visible à gauche sur la figure ci-dessous et la partie secondaire du toit à droite sur la figure qui n'est autre que la réunion des extrémités du toit :

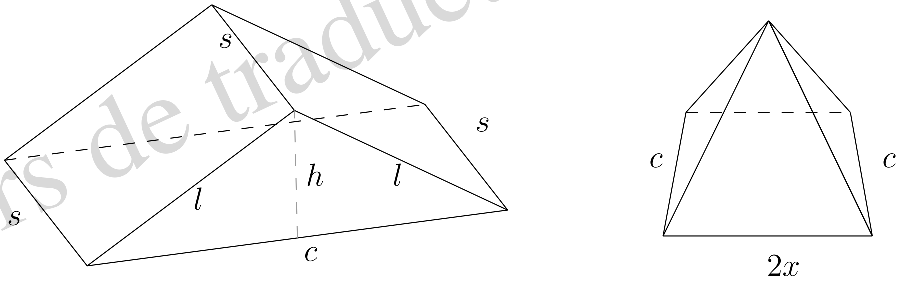


FIG. 8.275 – **Décomposition des toits dodécaédriques pour le calcul du volume**

En cours de traduction de l'anglais

Il nous faut donc déterminer x et l et h puisque c et s nous sont déjà connus.

D'abord, nous voyons trivialement que :

$$x=\frac{c-s}{2} \tag{8.7.237}$$

Du théorème de Pythagore, nous avons alors :

$$\begin{gathered}s^2=l^2+x^2=l^2+\left(\frac{c-s}{2}\right)^2\\ l^2=h^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2\end{gathered} \tag{8.7.238}$$

En combinant ces deux relations, nous avons :

$$s^2-\left(\frac{c-s}{2}\right)^2=h^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2 \tag{8.7.239}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}h^2 &= s^2-\left(\frac{c-s}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2=s^2-\frac{1}{4}(c^2-2cs+s^2)-\frac{c^2}{4}=\frac{3}{4}s^2-\frac{c^2}{2}+\frac{cs}{2}\\ &=\frac{3}{4}s^2-\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}s\right)^2}{2}+\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}s\right)s}{2}=\frac{3}{4}s^2-\frac{(1+\sqrt{5})^2s^2}{8}+\frac{(1+\sqrt{5})s^2}{4}\\ &=s^2\left(\frac{3}{4}-\frac{(1+\sqrt{5})^2}{8}+\frac{(1+\sqrt{5})}{4}\right)=s^2\left(\frac{6-1-2\sqrt{5}-5+2+2\sqrt{5}}{8}\right)=s^2\frac{2}{8}=\frac{1}{4}s^2\end{aligned}\tag{8.7.240}$$

Donc :

$$h=\frac{s}{2}\tag{8.7.241}$$

Nous pouvons maintenant calculer le volume V_p de l'ensemble des 6 petits toits :

$$\begin{aligned}V_p &= 6\left(\frac{1}{3}2xch+\frac{csh}{2}\right)=6\left(\frac{1}{3}2\frac{c-s}{2}c\frac{s}{2}+\frac{cs}{2}\frac{s}{2}\right)\\ &=6\left(\frac{1}{3}\left(s\frac{1+\sqrt{5}}{2}-s\right)s\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{s}{2}+s\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{s^2}{4}\right)\\ &=s^3\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)\frac{1+\sqrt{5}}{2}+3\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=s^3\left(\frac{(1+\sqrt{5}-2)(1+\sqrt{5})}{4}+\frac{3+3\sqrt{5}}{3}\right)\\ &=s^3\left(\frac{(1+\sqrt{5}-2)(1+\sqrt{5})+3+3\sqrt{5}}{4}\right)=s^3\left(\frac{(1+\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+5-2\sqrt{5})+3+3\sqrt{5}}{4}\right)\\ &=s^3\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right)\end{aligned}\tag{8.7.242}$$

Donc, le volume total du dodécaèdre est finalement le volume des 6 petits toits sommé au volume du parallélépipède central :

$$\begin{aligned}V &= c^3+s^3\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3+s^3\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right)=s^3\left[\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]\\ &=s^3\left[\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right)+\frac{1}{8}(1+\sqrt{5})^3\right]=s^3\left[\frac{7+3\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{8}(1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5})\right]\\ &=s^3\left[\frac{7+3\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{8}(16+8\sqrt{5})\right]=s^3\left[\frac{7+3\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}(8+4\sqrt{5})\right]=s^3\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\end{aligned}\tag{8.7.243}$$

Enfin :

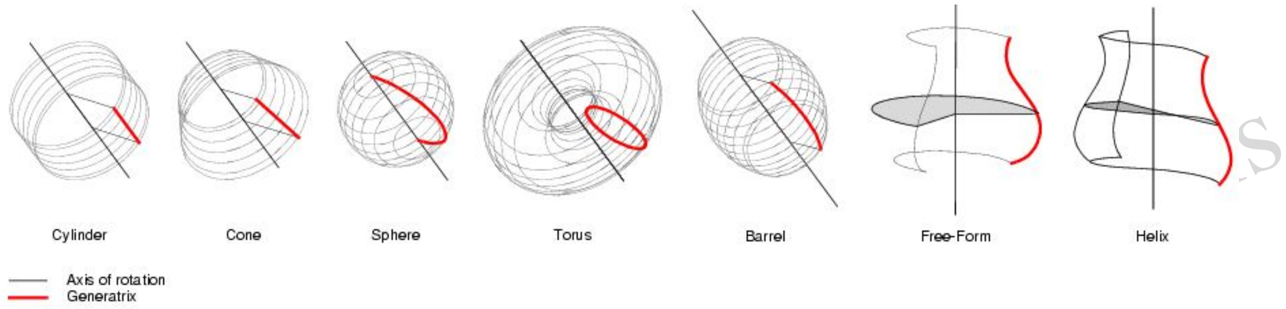
$$\boxed{V=s^3\frac{15+7\sqrt{5}}{4}}\tag{8.7.244}$$

En cours de traduction de l' anglais

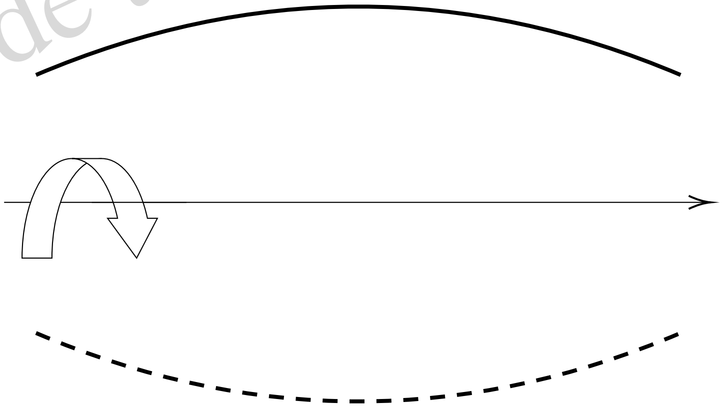
8.7.2.2 Corps usuels de révolution

Rappelons que, comme vu dans la section de Géométrie Analytique, un "solide de révolution" est une figure solide obtenue par rotation d'une courbe plane autour d'une droite (l'axe) située dans le même plan. Plus formellement, une surface de révolution est une surface obtenue par rotation d'une courbe plane (par exemple $y = f(x)$), appelée "générateur", autour de l'axe y (par exemple !). Nous passons donc d'un plan de $\mathbb{R}^2$ à une base dans $\mathbb{R}^3$.

En effet, de nombreuses surfaces (et dont certaines que nous avons vues dans la section de Géométrie Analytique comme la sphère, le tore et le cylindre) peuvent être décrites en faisant tourner une forme primaire de plus petite taille puis par rotation.



Avant d'aller plus loin, examinons une méthode générale permettant de déterminer l'aire d'un corps de révolution. C'est-à-dire la surface du corps engendrée par la rotation d'une courbe de longueur finie autour d'un axe :



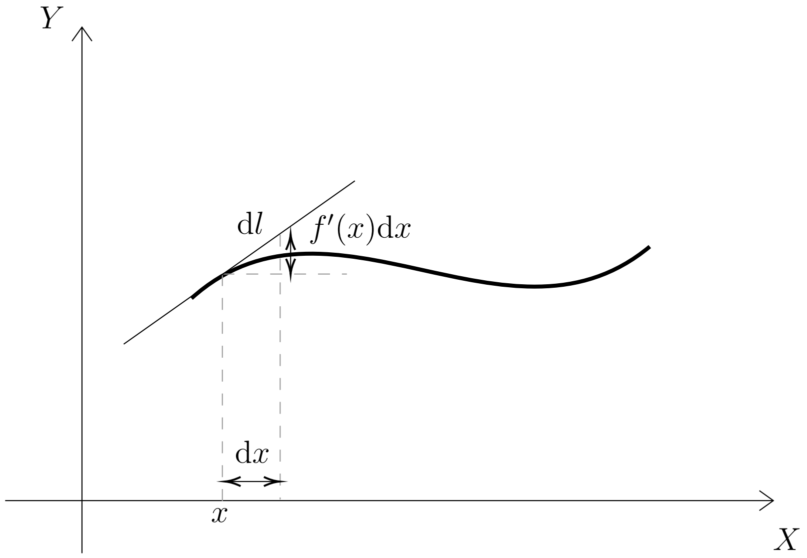
Pour cela, nous remarquons que lorsque la courbe $y = f(x)$ est donnée par une équation nous remarquons par Pythagore (voir figure ci-dessous) que l'élément de longueur $\mathrm{d}l$ vérifie (relation que nous avons déjà rencontrée dans d'autres sections de ce livre) :

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}x^2 + (f'(x))^2\mathrm{d}x^2 \quad (8.7.245)$$

Dès lors :

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x^2 \quad (8.7.246)$$

En cours de traduction



Ainsi, l'élément de surface engendré par la rotation de l'élément de longueur $\mathrm{d}l$ est donné par :

$$\mathrm{d}S = 2\pi|f(x)|\mathrm{d}l = 2\pi|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x^2 \quad (8.7.247)$$

L'aire de la surface de révolution engendrée par une fonction $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ continûment différentiable est alors donnée par la relation :

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x^2 \quad (8.7.248)$$

Remarque

Dans la section sur la Mécanique, nous utiliserons une autre approche permettant de calculer la surface (et le volume) des corps de révolution : le "second théorème du centroïde de Pappus". En réalité, comme nous le verrons, il est davantage utilisé en pratique pour déterminer la position du centroïde que la surface (ou le volume) d'un corps de révolution.

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.2.1 Cylindre

Définition (#8.7.388) : Un "cylindre" est une surface engendrée par une droite qui se déplace parallèlement à une direction fixe en rencontrant une courbe plane fixe, dont le plan coupe la direction donnée.

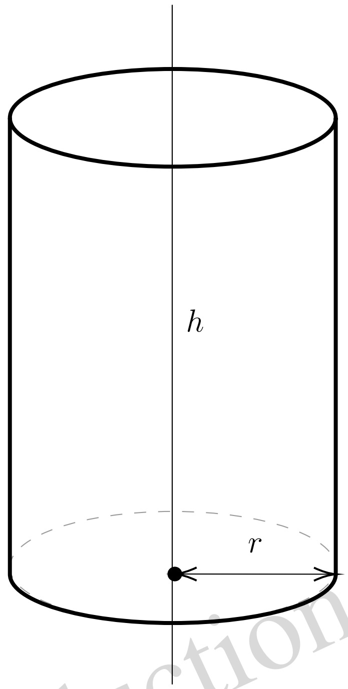


FIG. 8.276 – Exemple de cylindre

En cours de traduction de l'anglais

Le volume d'un cylindre de révolution de rayon $x = r$ et de hauteur égale à h se calcule par la méthode des disques en sachant que la surface d'un cercle (disque) vaut πr^2 :

$$V = \pi r^2 \int_0^h \mathrm{d}y = \pi r^2 y\Big|_0^h = \pi r^2 h \qquad (8.7.249)$$

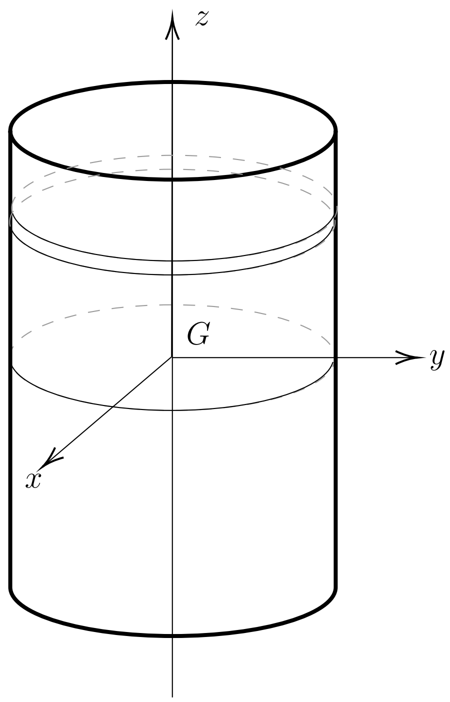
Dès lors :

$$\boxed{V = \pi r^2 h} \qquad (8.7.250)$$

La surface d'un cylindre étant simplement la somme de la surface des deux disques de base et du sommet et de la surface du rectangle plié de hauteur h et de longueur $2\pi r$:

$$\boxed{S = 2(\pi r^2) + 2\pi r h} \qquad (8.7.251)$$

Calculons maintenant le moment d'inertie d'un cylindre plein par rapport à son axe de symétrie vertical (axe de révolution) :



Nous avons :

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr \tag{8.7.252}$$

Donc :

$$J_z = \int r^2 dm = \int \rho r^2 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int\limits_0^R \int\limits_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \rho \pi R^2 h \frac{R^2}{2} = M\frac{R^2}{2} \tag{8.7.253}$$

Soit maintenant G le centre de gravité du cylindre, G_z coïncide avec l'axe de révolution du cylindre. Les axes G_y et G_x jouent des rôles identiques. Les moments d'inertie J_{G_x} et J_{G_y} par rapport à ces axes sont donc égaux et s'écrivent :

$$J_{G_y} = \int (x^2+z^2) dm = J_{G_x} = \int (y^2+z^2) dm = J \tag{8.7.254}$$

d'où :

$$J_{G_y} + J_{G_x} = 2J_{G_x} = 2J_{G_y} = \int (x^2+z^2+y^2+z^2) dm = \int (x^2+y^2+2z^2) dm \tag{8.7.255}$$

d'où :

$$J_{G_y} = J_{G_x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+2z^2) dm = \frac{1}{2}(x^2+y^2) dm + \int z^2 dm \tag{8.7.256}$$

La première intégrale est en fait le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe G_z et nous savons qu'elle vaut :

$$J_{G_z} = J_z = M\frac{R^2}{2} \tag{8.7.257}$$

En cours de traduction de l' anglais

La deuxième intégrale se calcule facilement en découpant le cylindre en tranches d'épaisseur $\mathrm{d}z$ perpendiculaires à l'axe G_z. La masse de la tranche élémentaire est $\mathrm{d}m = \pi r^2 \rho \mathrm{d}z$ soit :

$$\int z^2 \mathrm{d}m = 2\int_0^{h/2} \pi r^2 \rho z^2 \mathrm{d}z = 2\pi r^2 \rho \frac{h^3}{24} = M\frac{h^2}{12} \tag{8.7.258}$$

Le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à un axe perpendiculaire à son axe de révolution s'écrit donc :

$$J_{G_y} = J_y = J_{G_x} = J_x = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \tag{8.7.259}$$

Dans de nombreux problèmes de niveau lycée $R \ll h$ alors nous pouvons trouver cette dernière relation sous la forme (appelée une "tige mince") :

$$J_{G_y} = J_{G_x} \cong M\frac{h^2}{12} \tag{8.7.260}$$

Déterminons maintenant le moment d'inertie d'un cylindre en rotation autour d'un axe perpendiculaire à son axe de rotation et à une distance h de l'une de ses extrémités. Pour le calculer, considérons :

- Le cylindre est découpé en un nombre infini de morceaux de tranches infinitésimalement fines
- Chacune de ces tranches a une masse de $\mathrm{d}m$ et une longueur de $\mathrm{d}x$
- Une variable à additionner. Par exemple, dans ce problème, nous additionnons de gauche à droite de l'axe. La variable est x.

Maintenant, nous montrons d'abord notre formule pour le calcul du moment d'inertie :

$$\mathrm{d}J = x^2 \mathrm{d}m \tag{8.7.261}$$

Rappelons que nous utilisons x pour additionner. Il faut donc introduire $\mathrm{d}x$ dans l'équation du moment d'inertie. Trouvons maintenant une expression pour $\mathrm{d}m$. La tige étant uniforme, sa masse varie linéairement avec la distance, de sorte que :

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\mathrm{d}x \tag{8.7.262}$$

En utilisant la relation pour $\mathrm{d}m$, nous la substituons dans la première relation. Nous avons donc :

$$\mathrm{d}J = x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{L} x^2 \mathrm{d}x \tag{8.7.263}$$

Maintenant, nous savons évidemment que :

$$J = \int \mathrm{d}J \tag{8.7.264}$$

En remplaçant $\mathrm{d}J$ (avec les limites appropriées) :

$$J_h = \frac{M}{L}\int_{-h}^{L-h} x^2 \mathrm{d}x \tag{8.7.265}$$

En cours de traduction de l'anglais

où limite inférieure est de $-h$, car le côté gauche du cylindre est à $-h$ unités de l'axe de rotation (nous considérons la droite comme positive). C'est là que le bât blesse...

En résolvant l'intégration, nous avons le moment d'inertie d'un cylindre rigide uniforme pour tout axe de rotation perpendiculaire :

$$J_h = \frac{1}{3}M(L^2 - 3Lh + 3h^2) \tag{8.7.266}$$

Maintenant, dans le cas particulier où $h = 0$ (utilisé dans de nombreux lycées pour étudier une cheminée qui tombe) ou très petit par rapport à L, nous avons trouvé la célèbre relation que l'on retrouve dans de nombreux manuels scolaires (toujours sous le nom de "tige rigide") :

$$J_0 = \frac{1}{3}mL^2 \tag{8.7.267}$$

Si l'axe de rotation passe par le centre de masse de la tige (rappelons que la tige est uniforme, donc $h = L/2$) nous retombons sur :

$$J_{h/2} = \frac{1}{12}mL^2 \tag{8.7.268}$$

Calculons maintenant également le moment d'inertie d'un tube ou d'un cylindre vide d'épaisseur non nulle (toujours fourni dans les manuels scolaires de résumés de formules).

Le moment d'inertie d'un tube par rapport à son axe de révolution est une notion classique du moment d'inertie d'un cylindre. Considérons donc un tube de rayon extérieur r_e et de rayon intérieur r_i. Comme (voir section Mécanique Classique page ??) :

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = J \tag{8.7.269}$$

Par conséquent, le moment d'inertie d'un tube peut être considéré comme le moment d'inertie d'un cylindre de rayon égal au rayon extérieur du tube, diminué du moment d'inertie d'un cylindre de rayon égal au rayon intérieur du tube. Donc :

$$\begin{aligned} J_{\text{tube}} &= J_{r_e} - J_{r_i} = \frac{M_e r_e^2}{2} - \frac{M_i r_i^2}{2} = \frac{1}{2}(\rho\pi r_e^2 h r_e^2 - \rho\pi r_i^2 h r_i^2) = \frac{\rho\pi h}{2}(r_e^4 - r_i^4) \\ &= \frac{\rho\pi h}{2}(r_e^2 - r_i^2)(r_e^2 + r_i^2) = \frac{\rho\pi h(r_e^2 - r_i^2)}{2}(r_e^2 + r_i^2) = \frac{M}{2}(r_e^2 + r_i^2) \end{aligned} \tag{8.7.270}$$

et si $\bar{r} = r_e^2 \cong r_i^2$, il vient dès lors la relation classique disponible dans nombre de formulaires de physique :

$$J_{\text{tube}} = \frac{M2\bar{r}^2}{2} = M\bar{r}^2 \tag{8.7.271}$$

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.2.2 Cône

Définition (#8.7.389) : Un "cône" est une forme géométrique tridimensionnelle qui se rétrécit progressivement à partir d'une base plate (souvent, mais pas nécessairement, circulaire) jusqu'à un point appelé "apex" ou "sommet".

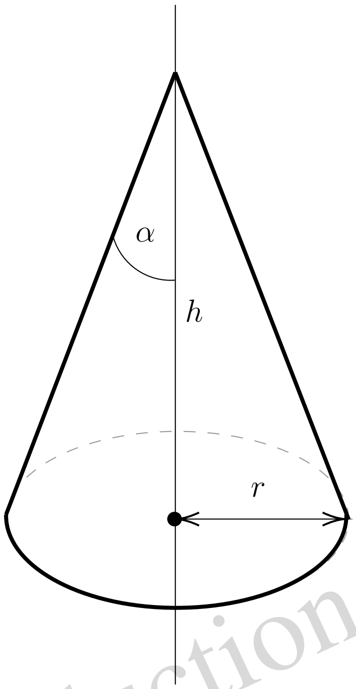


FIG. 8.277 – Cône

En cours de traduction de l'anglais

La droite passant par les points $(r,0)$ (extrémité de la base du cône/centre du disque) et $(0,h)$ (sommet du cône) est donnée évidemment par :

$$y = ax + b = \frac{-h}{r}x + 1h \quad (8.7.272)$$

En effet, lorsque $x = 0$, nous avons $y = h$ et lorsque $x = r$ nous avons $y = 0$.

La rotation de cette ligne par rapport à l'axe des y donne le volume du cône :

$$V = \pi\int_a^b x^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^h r^2\left(1-\frac{y}{h}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi r^2\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{y}{h}\right)\right]_0^h(-h) = \frac{-\pi r^2 h}{3}(0-1) = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad (8.7.273)$$

Enfin :

$$\boxed{V = \frac{\pi r^2 h}{3}} \quad (8.7.274)$$

Pour calculer la surface latérale d'un cône, nous paramétrons la droite reliant le sommet du cône à (0.0) et (r,h). Il s'agit donc d'une paramétrisation différente de celle du volume (ce qui simplifie certains calculs). Nous obtenons alors :

$$f(x) = \frac{r}{h}x \quad (8.7.275)$$

et donc :

$$\begin{aligned}S_l &= 2\pi\int_0^h |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^h \left|\frac{r}{h}x\right|\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\mathrm{d}x = 2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\int_0^h x\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\frac{1}{2}x^2\bigg|_0^h = \pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}h^2 = \pi rh\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}\\ &= \pi r^2\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}\end{aligned} \quad (8.7.276)$$

Donc, la surface totale du cône (base + surface latérale) est alors :

$$S = S_b + S_l = \pi r^2 + \pi r^2\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}} = \pi r^2\left(1+\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}\right) \quad (8.7.277)$$

Enfin :

$$\boxed{S = \pi r^2\left(1+\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}\right)} \quad (8.7.278)$$

Calculons maintenant le moment d'inertie d'un cône par rapport à son axe de révolution :

Pour ces calculs, nous utiliserons le moment d'inertie du cylindre $J_{z,\text{cyl}}$ et considérerons le cône comme une pile de cylindres infinitésimaux.

Dès lors :

$$\begin{aligned}J_z &= \int \mathrm{d}J_{z,\text{cyl}} = \int \frac{r^2}{2}\mathrm{d}m = \int \frac{r^2}{2}(\rho\pi r^2\mathrm{d}h) = \frac{\pi\rho}{2}\int r^2\mathrm{d}h = \frac{\pi\rho}{2}\frac{H}{R}\int_0^R r^4\mathrm{d}r = \frac{\pi\rho HR^5}{10R}\\ &= \left(\rho\frac{\pi R^2 H}{3}\right)\frac{3R^2}{10} = \frac{3}{10}MR^2\end{aligned} \quad (8.7.279)$$

En cours de traduction de l' anglais

8.7.2.2.3 Sphère

Définition (#8.7.390) : Une "sphère" est un objet géométrique parfaitement rond dans l'espace tridimensionnel, correspondant à la surface d'une boule complètement ronde. À l'instar d'un cercle, qui est géométriquement un objet bidimensionnel, une sphère est définie mathématiquement comme l'ensemble des points situés à la même distance r (rayon) d'un point donné, mais dans l'espace tridimensionnel. La plus longue droite passant par la boule, reliant deux points de la sphère, passe par le centre et sa longueur est donc deux fois supérieure au rayon (comme pour le cercle) ; c'est le diamètre $\varnothing$ de la sphère.

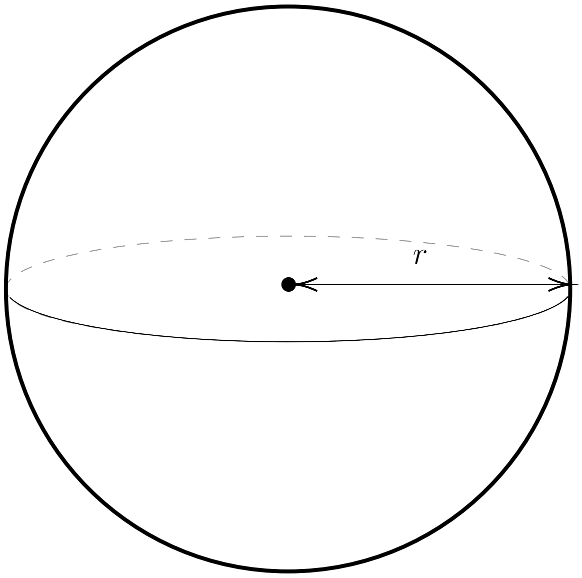


FIG. 8.278 – Exemple de sphère

Comme la figure ci-dessus est assez académique, en voici une plus conviviale si cela peut aider :

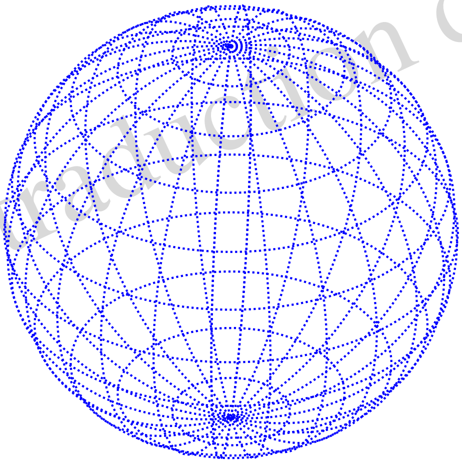


FIG. 8.279 – Grille sphérique (auteur : Jeff Hein)

En cours de traduction de l'anglais

Nous pouvons évidemment considérer une sphère de rayon R comme une surface formée par la rotation d'un demi-cercle autour de son axe principal. La fonction décrivant un demi-cercle est (voir section Géométrie Analytique page 2748) :

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 + x^2} \tag{8.7.280}$$

La sphère peut être décomposée en une somme de disques d'épaisseur Δx. Les demi-disques étant perpendiculaires à l'axe x et de largeur Δx à la position x_k (voir figure ci-dessous).

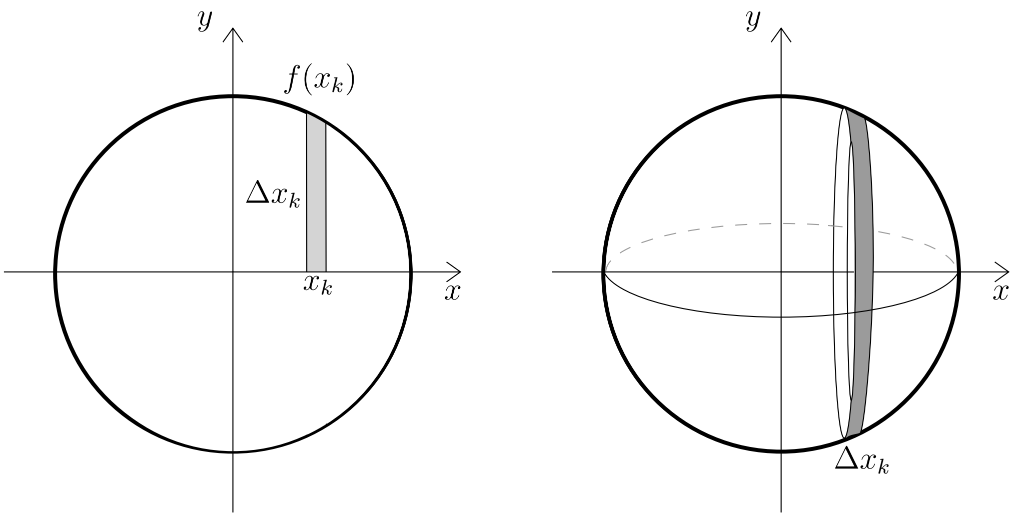


FIG. 8.280 – **Calcul du volume de la sphère par décomposition en disques**

Nous avons ainsi :

$$x_k = k\Delta x \quad (8.7.281)$$

Le volume d'un disque (cylindre) étant donné par (en passant à la limite) :

$$\mathrm{d}V_k = \pi r_k^2 \mathrm{d}x \quad (8.7.282)$$

et le rayon r_k étant donné par la fonction :

$$r_k = f(x_k) = \sqrt{R^2 - x_k^2} \quad (8.7.283)$$

nous avons alors :

$$\mathrm{d}V_k = \pi \left(\sqrt{R^2 - x_k^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi(R^2 - x_k^2)\mathrm{d}x \quad (8.7.284)$$

En intégrant entre $x = [-R, R]$, nous avons alors le volume de la sphère :

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - r_k^2)\mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} \quad (8.7.285)$$

Nous pouvons également prendre les bornes entre $x = [0, R]$ cela revenant au même à un facteur 2 près :

$$V = 2\pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi\frac{3R^3 - R^3}{3} = 2\pi\frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (8.7.286)$$

Après simplification, nous obtenons pour le volume :

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3} \quad (8.7.287)$$

En cours de traduction de l' anglais

L'expression de la surface étant donnée par dérivant par rapport à l'élément engendrant la surface, nous obtenons ainsi (c'est un peu limite comme raisonnement mais bon...) :

$$\boxed{S=4\pi R^2} \tag{8.7.288}$$

Il existe une autre manière d'aborder ces calculs un peu plus rigoureusement. Effectivement, dans la section de Calcul Différentiel et Intégral nous avons introduit le concept de Jacobien qui permet de changer les variables d'intégration en fonction du système de coordonnées sur lequel nous travaillons (pour la définition détaillée des termes le lecteur doit se reporter à la section de Calcul Différentiel et Intégral à la page 1503) :

$$\iiint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_D F(u,v,w)|\det(J)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{8.7.289}$$

et nous avons prouvé (toujours dans la section Calcul Différentiel et Intégral page 1508) que le Jacobien en coordonnées sphériques était :

$$|\det(J)|=r^2\sin(\theta) \tag{8.7.290}$$

Donc au même titre que $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est un élément différentiel de volume, nous pouvons convertir cet élément en coordonnées sphériques et faire in extenso apparaître un élément différentiel de volume de la sphère de rayon r. Il suffit ensuite d'intégrer correctement pour avoir le volume de toute la sphère.

Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned}V&=\iiint\limits_D r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta=\int\limits_0^R r^2\mathrm{d}r\int\limits_0^\pi\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\pi=\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R\cdot\left.(-\cos(\theta))\right|_0^\pi\left.\phi\right|_0^{2\pi}\\&=\frac{R^3}{3}(-\cos(\pi)-(-\cos(0)))2\pi=\frac{2}{3}\pi R^3(-(-1)-(-1))=\frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned} \tag{8.7.291}$$

et pour la surface (pour laquelle le rayon est constant) :

$$\begin{aligned}S&=R^2\iint\sin(\theta)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta=R^2\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=R^2\left.(-\cos(\theta))\right|_0^\pi\left.\phi\right|_0^{2\pi}\\&=R^2(-\cos(\pi)-(-\cos(0)))2\pi=2\pi R^2(-(-1)-(-1))=4\pi R^2\end{aligned} \tag{8.7.292}$$

Au besoin, on peut trouver l'élément de surface de manière géométrique plutôt que de passer par le jacobien car ce dernier n'est pas très pédagogique dans les petites classes...

Alors en se rappelant que dans la section de Trigonométrie (voir page 2524), nous avons démontré que la longueur d'un arc de cercle est donnée par :

$$\mathrm{d}L=R\mathrm{d}\alpha \tag{8.7.293}$$

Alors, il devient très aisé de compléter la figure suivante :

En cours de traduction de l'anglais

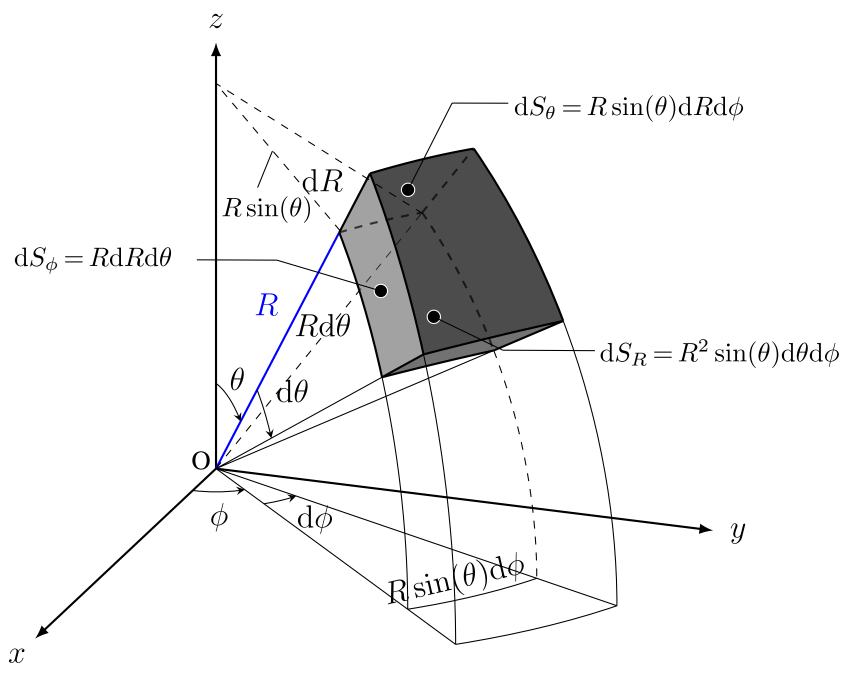


FIG. 8.281 – Représentation d'un élément de surface en coordonnées sphériques

et puis nous voyons immédiatement que (l'élément de surface le plus important pour nous dans ce livre jusqu'à présent pour les sections traitant de la physique et de l'ingénierie !) :

$$dS = R^2\sin(\theta)d\theta d\phi \tag{8.7.294}$$

ce qui est quand même plus sympa...

Calculons maintenant le moment d'inertie d'une boule pleine homogène de masse M et de densité ρ. Pour cela, la boule présentant une symétrie maximale, il est plus commode de calculer d'abord le moment d'inertie polaire (voir section Mécanique Classique page ??), puis de déterminer le moment d'inertie axial à partir de ce premier :

$$J_0 = \int r^2 dm = \int r^2\rho dV = \int r^2\rho(4\pi r^2 dr) = 4\pi\rho\int_0^R r^4 dr = 4\pi\rho\frac{1}{5}R^5 = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{3}{5}R^3R^2 = \frac{3}{5}MR^2 \tag{8.7.295}$$

où nous avons utilisé le fait que :

$$\rho = \frac{M}{\dfrac{4}{3}\pi R^3} \tag{8.7.296}$$

Comme J_x, J_y, J_z sont égaux par symétrie de la boule, il vient :

$$J_0 = \frac{1}{2}(3J_x) \Rightarrow J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3}J_0 = \frac{2}{5}MR^2 \tag{8.7.297}$$

Nous proposons également une autre démonstration si le lecteur n'apprécie pas la précédente. À cet effet, rappelons que :

$$J = \sum_i m_i r^2 = \int_{\text{body}} r^2 dm \tag{8.7.298}$$

En cours de traduction de l'anglais

Pour un corps de composition uniforme $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$, où ρ est la masse volumique et $\mathrm{d}V$ la variation de volume. Pour une sphère, nous venons de voir que $\mathrm{d}V = 4\pi/3r^2\mathrm{d}r$. La substitution donne :

$$J = \int_{\text{body}} r^2 \mathrm{d}m = \int_{\text{body}} r^2 \rho \mathrm{d}V = \int_{\text{body}} r^2 \rho \frac{4}{3}\pi r^2 \mathrm{d}r \qquad (8.7.299)$$

Ainsi :

$$J = \frac{4\pi\rho}{3} \int_{-R}^{+R} r^4 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho}{3} \frac{r^5}{5}\bigg|_{-R}^{+R} = \frac{4\pi\rho}{3} \frac{2R^5}{5} \qquad (8.7.300)$$

La masse de l'objet est donnée par $M = 4\pi\rho/3R^3$. Dès lors :

$$J = \frac{2}{5} M R^2 \qquad (8.7.301)$$

8.7.2.2.3.1 Empilement compact de sphères identiques

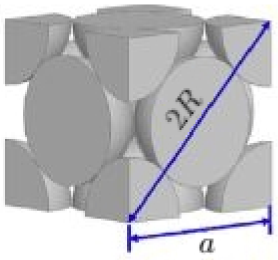
En géométrie, un empilement de sphères est un arrangement de sphères non superposées dans un espace contenant. Les sphères considérées sont généralement toutes de taille identique, et l'espace est généralement un espace euclidien tridimensionnel. Un problème typique d'empilement de sphères consiste à trouver un arrangement dans lequel les sphères occupent le plus d'espace possible. La proportion d'espace occupée par les sphères est appelée "densité de l'arrangement".

De nombreux problèmes en sciences chimiques et physiques peuvent être liés à des problèmes d'empilement de sphères lorsque plusieurs tailles de sphères sont disponibles. Il faut alors choisir entre séparer les sphères en régions de sphères compactes et égales, ou combiner les différentes tailles de sphères en un empilement composé ou interstitiel (lorsque plusieurs tailles de sphères – ou une distribution – sont disponibles, le problème devient rapidement insoluble).

Pour le cas très particulier des sphères égales en trois dimensions, l'empilement le plus dense utilise environ 74% du volume.

Démonstration 8.27.3. Voyons les deux cas célèbres :

- Structure FCC (cubique à faces centrées) :



Tout d'abord, nous voyons évidemment que la diagonale du cube est égale à quatre fois le rayon d'une sphère ($4R$) qu'en utilisant le théorème de Pythagore :

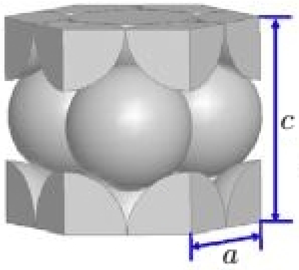
$$(4R)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 4R = \sqrt{2}a \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{4}a \qquad (8.7.302)$$

En cours de traduction de l'anglais

Par conséquent, en notant V_s le volume d'une sphère et V_e le volume du cube :

$$\text{Packing factor} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{4 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3}{a^3} = \frac{4 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^3}{a^3} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 74.05\% \quad (8.7.303)$$

- Structure HCP (empilement compact hexagonal) :



D'abord, nous voyons évidemment que :

$$c = \sqrt{\frac{8}{3}}a \qquad \text{et} \qquad R = \frac{a}{2} \quad (8.7.304)$$

Dès lors :

$$\text{Facteur d'empilement} = \frac{V_s}{V_3} = \frac{6 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3}{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot c} = \frac{6 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} a} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 74.05\% \quad (8.7.305)$$

■ Q.E.D.

Carl Friedrich Gauss a démontré en 11831 (calendrier holocène) de manière non triviale et non formelle que ces empilements ont la densité la plus élevée parmi tous les empilements de treillis possibles (nous n'en fournirons pas la démonstration ici car elle est assez peu élégante de notre point de vue personnel et subjectif).

En 11611 (calendrier holocène), Johannes Kepler a émis l'hypothèse qu'il s'agissait de la densité maximale possible parmi les arrangements réguliers et irréguliers ; ce phénomène est devenu connu sous le nom de "conjecture de Kepler". En 11998 (calendrier holocène), Thomas Callister Hales, suivant l'approche suggérée par László Fejes Tóth en 11953 (calendrier holocène), a annoncé une démonstration de la conjecture de Kepler (pour une bonne présentation de la démonstration, voir [171]). La démonstration de Hales est une démonstration par épuisement impliquant la vérification de nombreux cas individuels à l'aide de calculs informatiques complexes. Les examinateurs ont déclaré être « certains à 99% » de l'exactitude de la démonstration de Hales. Le 10 août 12014 (calendrier holocène), Hales a annoncé l'achèvement d'une démonstration formelle utilisant une vérification automatique des preuves, levant ainsi tout doute.

En cours de traduction de l' anglais

Remarque

D'autres types de structures d'empilements sont fréquemment rencontrés dans les systèmes physiques. Parmi eux, nous trouvons le réseau cubique, dont la densité est de $\frac{\pi}{6} \cong 0.5236$, le réseau hexagonal, dont la densité est de $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cong 0.6046$, et le réseau tétraédrique, dont la densité est de $\frac{\pi\sqrt{3}}{16} \cong 0.3401$, et le plus léger possible, dont la densité est de 0.0555.

Enfin, notez que beaucoup de gens aiment calculer combien de fois la Terre peut être contenue à l'intérieur de Jupiter ou du Soleil. Diviser le volume du Soleil (en réalité une étoile de type G2V, aussi appelée "naine jaune") par celui de la Terre donne évidemment une valeur ($\sim 1'300'000$) qui suppose que la Terre peut être découpée en volumes infinitésimaux. Mais si l'on considère qu'il est impossible de découper la Terre en volumes infinitésimaux (problème d'empilement de sphères), alors le nombre est d'environ $\sim 932'884$. Valeur à comparer avec $1'300'000 \cdot 74.05\% = 962'624$.

8.7.2.2.4 Tore

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#8.7.391) : Un "tore" est la surface générée par la rotation d'un cercle c de "petit rayon" r autour d'une droite distante de R, appelée "grand rayon", de son centre situé dans son plan, mais ne passant pas par son centre. Autrement dit, il s'agit d'une surface de révolution générée par la rotation d'un cercle dans l'espace tridimensionnel autour d'un axe coplanaire avec le cercle et qui ne touche pas le cercle :

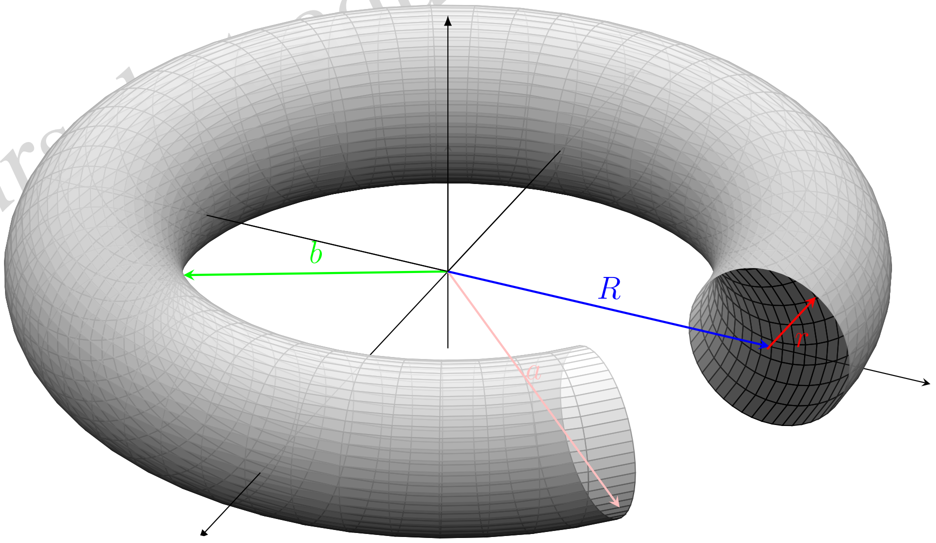


FIG. 8.282 – Tore

Nous voyons évidemment dans la figure ci-dessus que : $a - b = 2R$.

Pour calculer le volume, nous pourrions évidemment utiliser le théorème du centre de gravité de Pappus, démontré dans la section de Mécanique classique. Mais cette dernière méthode est peu élégante et trop orientée "physique". Nous cherchons donc une approche plus mathématique.

Étant donnée l'équation d'un demi-cercle de centre $(0, c)$ (voir section Géométrie Analytique

page 2764) :

$$x^2+(y-c)^2=r^2 \quad (8.7.306)$$

Pour écrire y en fonction de x, isolons y dans cette équation :

$$x^2+(y-c)^2=r^2 \Leftrightarrow (y-c)^2=r^2-x^2 \Leftrightarrow y-c=\pm\sqrt{r^2-x^2} \Leftrightarrow y=c\pm\sqrt{r^2-x^2} \quad (8.7.307)$$

Le cercle est alors constitué des graphes des fonctions suivantes :

- Demi-cercle supérieur :

$$f_1 : x \mapsto c+\sqrt{r^2-x^2} \quad (8.7.308)$$

- Demi-cercle inférieur :

$$f_2 : x \mapsto c-\sqrt{r^2-x^2} \quad (8.7.309)$$

Désignons maintenant par usage de l'étude du tore $R:=c$.

Le volume recherché est la différence entre les volumes générés par la rotation des surfaces (surfaces définies par l'aire entre la fonction du cercle en question et l'axe des abscisses $x=r, x=-r$) dans l'espace autour de l'axe x.

En appliquant la relation d'intégration des solides de révolution nous obtenons :

$$\begin{aligned}
V=V_1-V_2 &= \pi\int_{-r}^{r}(R+\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-r}^{r}(R-\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-r}^{r}\left[(R+\sqrt{r^2-x^2})^2-(R-\sqrt{r^2-x^2})^2\right]\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-r}^{r}\left[(R^2+2R\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)-(R^2-2R\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right]\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-r}^{r}(R^2+2R\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2-R^2+2R\sqrt{r^2-x^2}-r^2+x^2)\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-r}^{r}4R\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=4\pi c\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned} \quad (8.7.310)$$

Calculons cette dernière intégrale par la substitution classique $x=r\sin(t)$ ainsi :

$$\mathrm{d}x=(r\sin(t))'\mathrm{d}t=r\cos(t)\mathrm{d}t \quad (8.7.311)$$

si $x=-r$:

$$-r=r\sin(t)\Rightarrow \sin(t)=-1\Rightarrow -t=\frac{\pi}{2} \quad (8.7.312)$$

En cours de traduction de l'anglais

si $x = r$:

$$r = r\sin(t) \Rightarrow \sin(t) = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \tag{8.7.313}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V &= 4\pi R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(t)} r\cos(t)\mathrm{d}t = 4\pi R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2(1-\sin^2(t)} r\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= 4\pi R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\sqrt{\cos^2(t)} r\cos(t)\mathrm{d}t = 4\pi R r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(t)|\cos(t)\mathrm{d}t = 4\pi R r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{8.7.314}$$

Linéarisons à nouveau cette expression en utilisant les identités trigonométriques démontrées dans la section Trigonométrie (formule de Carnot à la page 2504) :

$$\begin{aligned} V &= 4\pi R r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\mathrm{d}t = 2\pi R r^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}t + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t)\mathrm{d}t \right) \\ &= 2\pi R r^2 \left(t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(2t)\mathrm{d}t \right) = 2\pi R r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}[\sin(2t)]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \\ &= 2\pi R r^2 \left(\pi + \frac{1}{2}(\sin(\pi) - \sin(-\pi)) \right) = 2\pi R r^2 \left(\pi + \frac{1}{2}(0-0) \right) = 2R\pi^2 r^2 \end{aligned} \tag{8.7.315}$$

Ainsi, le volume d'un tore de rayon mineur r et de rayon majeur R est donné par :

$$\boxed{V = 2R\pi^2 r^2} \tag{8.7.316}$$

et la surface (par dérivation de l'élément de surface générateur... mais il existe de nombreuses autres manières élémentaires d'obtenir ce résultat) :

$$\boxed{S = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4Rr\pi^2} \tag{8.7.317}$$

Le moment d'inertie du tore par rapport à son axe de révolution est calculé comme suit :

Nous commençons d'abord à utiliser le volume du tore en modifiant un peu les notations :

$$V = 2\pi^2 a^2 b \tag{8.7.318}$$

La densité volumétrique du tore est donnée par (poids/volume) :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \Leftrightarrow \mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi^2 a^2 b}\mathrm{d}V \tag{8.7.319}$$

En coordonnées cylindriques, nous savons que nous avons :

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{8.7.320}$$

En cours de traduction de l'anglais

Dès lors :

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi^2 a^2 b}\mathrm{d}V = \frac{M}{2\pi^2 a^2 b} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{8.7.321}$$

Le moment d'inertie est donné par :

$$\begin{aligned}J &= \int r^2 \mathrm{d}m = 2\left(\frac{M}{2\pi^2 a^2 b}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_{b-a}^{b+a} r^2\mathrm{d}r\int\limits_0^{\sqrt{a^2-(r-b)^2}}\mathrm{d}z\right) = \frac{M}{\pi^2 a^2 b}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_{b-a}^{b+a} r^3\mathrm{d}r\sqrt{a^2-(r-b)^2}\\ &= \frac{M}{\pi^2 a^2 b}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_{b-a}^{b+a} r^3\sqrt{a^2-(r-b)^2}\mathrm{d}r = \frac{2\pi M}{\pi^2 a^2 b}\int\limits_{b-a}^{b+a}\sqrt{a^2-(r-b)^2}\mathrm{d}r\\ &= \frac{2M}{\pi a^2 b}\int\limits_{b-a}^{b+a}\sqrt{a^2-(r-b)^2}\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{8.7.322}$$

Posons $s = r - b$, alors :

1. Les limites d'intégration deviennent alors $-a$, $+a$, car nous ramenons tous les points d'intégration à l'origine en posant $s = r - b$.
2. Trivialement, puisque $r = s + b$ nous avons donc $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}J_z &= \frac{2M}{\pi a^2 b}\int\limits_{b-a}^{b+a} r^2\sqrt{a^2-(r-b)^2}\mathrm{d}r = \frac{2M}{\pi a^2 b}\int\limits_{-a}^{a}(s+b)^3\sqrt{a^2-s^2}\mathrm{d}s\\ &= \frac{2M}{\pi a^2 b}\int\limits_{-a}^{+a}(s^3+3s^2b+3sb^2+b^3)\sqrt{a^2-s^2}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{8.7.323}$$

En cours de traduction de l'anglais

Comme nous l'avons démontré dans la section Calcul Différentiel et Intégral que l'intégrale avec deux bornes symétriques d'une fonction impaire (produit d'une fonction paire et impaire) est nulle (voir page 1496), les intégrales de :

$$s^3\sqrt{a^2-s^2}\mathrm{d}s \qquad 3sb^2\sqrt{a^2-s^2}\mathrm{d}s \tag{8.7.324}$$

sont égales à zéro.

Ensuite, nous devons calculer :

$$J_z = \frac{2M}{\pi a^2 b}\int\limits_{-a}^{+a}(3s^2b+b^3)\sqrt{a^2-s^2}\mathrm{d}s \tag{8.7.325}$$

Posons maintenant $s = a\sin(t)$ et donc $\mathrm{d}s = a\cos(t)\mathrm{d}t$. Nous obtenons donc :

$$J_z = \frac{2M}{\pi a^2 b}\int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2}(3a^2\sin^2(t)b+b^3)\sqrt{a^2-a^2\sin^2(t)}\,a\cos(t)\mathrm{d}t \tag{8.7.326}$$

Mais comme :

$$\cos^2(t)+\sin^2(t)=1 \Rightarrow a^2\cos^2(t)+a^2\sin^2(t)=a^2 \Rightarrow \sqrt{a^2-a^2\sin^2(t)}=|a\cos(t)| \quad (8.7.327)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
J_z &= \frac{2M}{\pi a^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(3a^2\sin^2(t)+b^2)|a\cos(t)|a\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{2M}{\pi a^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(3a^2\sin^2(t)+b^2)a^2\cos^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2M}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(3a^2\sin^2(t)+b^2)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{2M}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(3a^2\sin^2(t)\cos^2(t)+b^2\cos^2(t))\mathrm{d}t \\
&= \frac{2M}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(3a^2(1-\cos^2(t))\cos^2(t)+b^2\cos^2(t))\mathrm{d}t \\
&= \frac{2M}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(3a^2\cos^2(t)-3a^2\cos^4(t)+b^2\cos^2(t))\mathrm{d}t
\end{aligned} \quad (8.7.328)$$

Ainsi (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1513) :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}3a^2\cos^2(t)\mathrm{d}t = 3a^2\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}3a^2(\cos(t)\sin(t)+t)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 3a^2\frac{\pi}{2} \\
&\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}b^2\cos^2(t)\mathrm{d}t = b^2\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{b^2}{2}(\cos(t)\sin(t)+t)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = b^2\frac{\pi}{2} \\
&\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}3a^2\cos^4(t)\mathrm{d}t = 3a^2\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos^4(t)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{4}\cos^3(t)\sin(t)+\frac{3}{8}\cos(t)\sin(t)+\frac{3}{8}t\right)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 3a^2\frac{3\pi}{8}
\end{aligned} \quad (8.7.329)$$

Alors finalement :

$$J_z = \frac{2M}{\pi}\left(-3a^2\frac{3\pi}{8}+b^2\frac{\pi}{2}+3a^2\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\frac{3}{4}a^2+b^2\right) \quad (8.7.330)$$

8.7.2.2.5 Ellipsoïde (sphéroïde)

Définitions (#8.7.392) :

D1. Un "ellipsoïde" est une surface du second degré d'un espace euclidien tridimensionnel. Il fait donc partie des quadriques (voir section Géométrie Analytique page 2745) données par l'équation :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \quad (8.7.331)$$

En cours de traduction de l'anglais

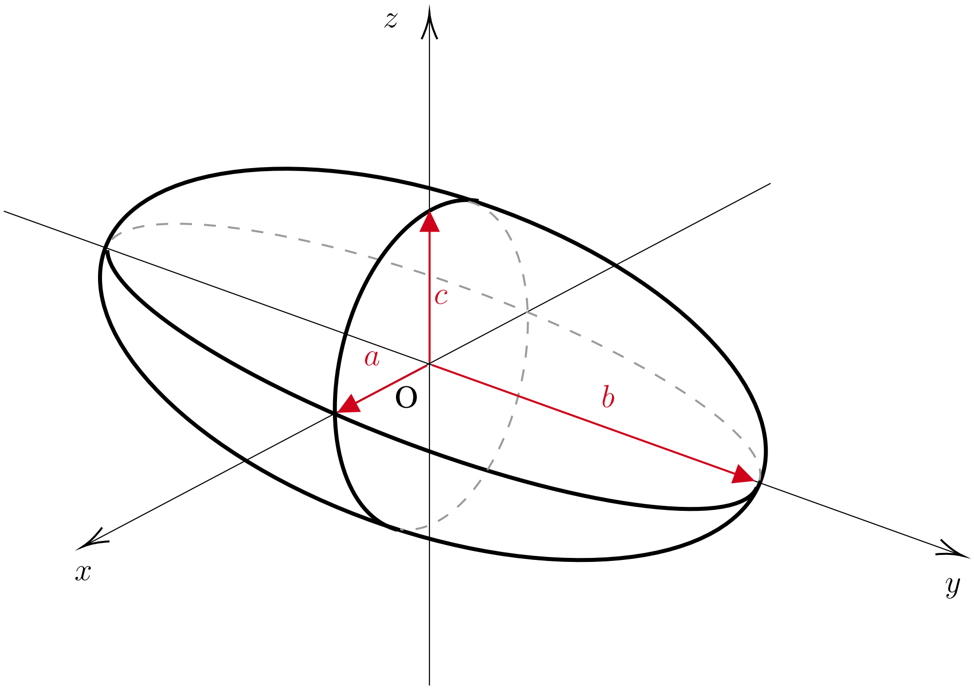


FIG. 8.283 – **Ellipsoïde**

D2. Un "sphéroïde", ou "ellipsoïde de révolution", est une surface quadrique obtenue en faisant tourner une ellipse autour de l'un de ses axes principaux ; en d'autres termes, un ellipsoïde à deux demi-diamètres égaux.

L'équation d'un sphéroïde avec z comme axe de symétrie est donnée en posant $a = b$:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.7.332}$$

Si l'ellipse est tournée autour de son grand axe, le résultat est un "sphéroïde prolate", comme un ballon de football américain ou de rugby. Si l'ellipse est tournée autour de son petit axe, le résultat est un "sphéroïde aplati", comme une lentille :

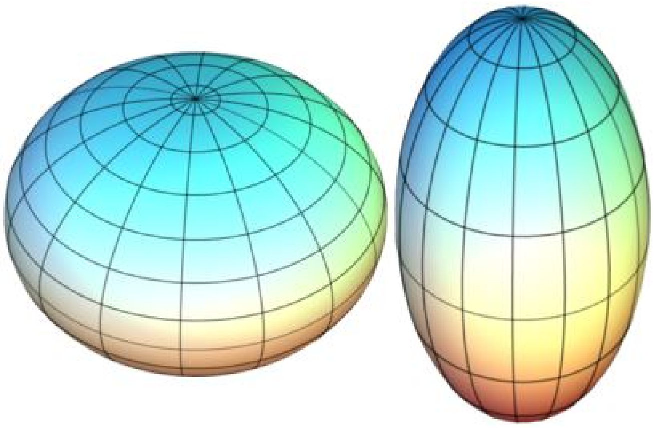


FIG. 8.284 – **Sphéroïde aplati à gauche, prolat à droite (source : Wikipédia)**

Pour calculer le volume délimité par un ellipsoïde, nous prenons l'équation que nous avons déterminée lors de notre étude des coniques :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.7.333}$$

En cours de traduction de l'anglais

La section par un plan parallèle au plan YZ et situé à une distance x de ce dernier, donne l'ellipse :

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \tag{8.7.334}$$

ou :

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)}=1 \tag{8.7.335}$$

avec pour demi-axes :

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \qquad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{8.7.336}$$

Mais comme nous l'avons démontré précédemment, la surface d'une ellipse est égale à $\pi b_1 c_2$. Par conséquent :

$$\boxed{S=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} \tag{8.7.337}$$

Le volume de l'ellipsoïde est donc égal à :

$$\begin{aligned}V&=\pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{+a}=\pi bc\left[\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)-\left((-a)-\frac{(-a)^3}{3a^2}\right)\right]\\&=\pi bc\left(2a-2\frac{a^3}{3a^2}\right)=\pi bc\left(2a-\frac{2}{3}a\right)\end{aligned} \tag{8.7.338}$$

Dès lors :

$$\boxed{V=\frac{4}{3}\pi abc} \tag{8.7.339}$$

Si $a=b=c=R$ nous retombons sur le volume d'une sphère :

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{8.7.340}$$

Calculons maintenant la surface et le volume d'un sphéroïde aplati. Rappelons que son équation cartésienne est :

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.7.341}$$

L'ellipticité d'un sphéroïde aplati est définie par :

$$e=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}} \tag{8.7.342}$$

En cours de traduction de l' anglais

L'aire de surface d'un sphéroïde aplati peut être calculée comme une surface de révolution autour de l'axe z :

$$S=2\pi\int r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}\mathrm{d}z \tag{8.7.343}$$

avec un rayon fonction de z donnée par :

$$r(z)=a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2} \tag{8.7.344}$$

Ainsi :

$$(r'(z))^2=\left(-\frac{az}{c^2\sqrt{1-\dfrac{z^2}{c^2}}}\right)^2=\frac{a^2z^z}{c^4\left(1-\left(\dfrac{z}{c}\right)^2\right)} \tag{8.7.345}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}\sqrt{1+\frac{a^2z^z}{c^4\left(1-\left(\dfrac{z}{c}\right)^2\right)}}\mathrm{d}z=2\pi a\int\sqrt{\left(1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)+\frac{a^2z^z}{c^4}}\mathrm{d}z\\&=2\pi a\int\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2+\frac{a^2z^z}{c^4}}\mathrm{d}z=2\pi a\int\sqrt{1-\frac{a^2z^2-z^2c^4}{c^2}}\mathrm{d}z=2\pi a\int\sqrt{1-\frac{(a-c)(a+c)}{c^2}z^2}\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{8.7.346}$$

Si nous posons :

$$\alpha^{-1}:=\frac{(a-c)(a+c)}{c^2} \tag{8.7.347}$$

Nous pouvons alors écrire l'intégrale comme suit :

$$F(z)=\int\sqrt{\alpha-z^2}\mathrm{d}z \tag{8.7.348}$$

Et comme nous l'avons vu dans la section de Calcul Différentiel et Intégral les primitives usuelles (voir page 1513) et l'identité suivante $-\arcsin(\alpha)=\arcsin(-\alpha)$ dans la section Trigonométrie (voir 2502) :

$$\begin{aligned}F(z)&=\left(\frac{\alpha^2}{2}\arcsin\left(\frac{z}{\alpha}\right)+\frac{z}{2}\sqrt{\alpha^2-z^2}\right)\Bigg|_{-c}^{+c}\\&=\left(\frac{\alpha^2}{2}\arcsin\left(\frac{-c}{\alpha}\right)+\frac{-c}{2}\sqrt{\alpha^2-(-c)^2}\right)-\left(\frac{\alpha^2}{2}\arcsin\left(\frac{c}{\alpha}\right)+\frac{c}{2}\sqrt{\alpha^2-(c)^2}\right)\\&=-c\sqrt{\alpha^2-c^2}+\alpha^2\arcsin\left(\frac{c}{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{8.7.349}$$

Donc :

$$S=2\pi a\left[-c\sqrt{\alpha^2-c^2}+\alpha^2\arcsin\left(\frac{c}{\alpha}\right)\right]=2\pi a\left[-c\sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2-c^2}\right)^2-c^2}+\alpha^2\arcsin\left(\frac{c}{\alpha}\right)\right] \tag{8.7.350}$$

En cours de traduction de l'anglais

Le calcul du moment d'inertie d'un ellipsoïde est très important en astrophysique puisqu'un grand nombre d'étoiles ou de planètes en rotation sur elles-mêmes par leur déformation à l'équateur à cause de la force centrifuge (fictive) (voir section Mécanique Classique page ??) sont déformées en première approximation dans ce volume.

Pour un ellipsoïde, définissons C comme étant le moment d'inertie le long de l'axe c, A le moment d'inertie le long de l'axe a et B le moment d'inertie le long de l'axe b.

Pour commencer, considérons le moment d'inertie selon l'axe c, que nous assimilerons à l'axe z. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, nous avons :

$$J_z = C = \int r^2 \mathrm{d}m = \int \rho r^2 \mathrm{d}V = \rho \int r^2 \mathrm{d}v = \rho \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{8.7.351}$$

En faisant la substitution suivante, nous assumons implicitement que l'intégrale précédente est une normalisation d'un ellipsoïde :

$$x' = \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}, z' = \frac{z}{c} \tag{8.7.352}$$

ce qui nous donne pour notre intégrale (on transforme donc le volume V de l'ellipsoïde en volume V' d'une sphère) :

$$C = \rho \int \left((ax')^2 + (by')2\right) abc \tag{8.7.353}$$

Nous pouvons maintenant passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques (voir section Calcul Vectoriel page 1826) sans oublier d'utiliser le Jacobien (voir section Calcul Différentiel et Intégral page ??) que nous avions prouvé comme étant en coordonnées sphériques données par :

$$|\det(J)| = r^2 \sin(\theta) \tag{8.7.354}$$

Par conséquent (nous utilisons à nouveau les primitives communes démontrées dans la section Calcul différentiel et Intégral) :

$$\begin{aligned}
C &= abc\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (a^2 r^2 \cos^2(\phi)\sin^2(\theta) + b^2 r^2 \sin^2(\phi)\sin^2(\theta) r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= abc\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (a^2\cos^2(\phi) + b^2\sin^2(\phi)) r^4 \sin^3(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= abc\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (a^2\cos^2(\phi) + b^2\sin^2(\phi)) r^2 \left(-\frac{1}{3}\cos(\theta)\sin^2(\theta) - \frac{2}{3}\cos(\theta)\right)\Bigg|_0^{\pi} \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{4}{3}abc\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2(\phi) + b^2\sin^2(\phi) r^2 \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{4}{3}abc\rho \int_0^1 \left(a^2\pi + b^2\pi\right) r^4 \mathrm{d}r = \frac{4}{3}abc\pi\rho(a^2+b^2) \int_0^1 r^4 \mathrm{d}r \\
&= \frac{4}{15}abc\pi\rho(a^2+b^2) r^5 \Big|_0^1 = \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2+b^2)
\end{aligned} \tag{8.7.355}$$

En cours de traduction de l'anglais

En injectant pour l'ellipsoïde :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi abc} \tag{8.7.356}$$

Nous avons alors :

$$C = \frac{1}{5}M(a^2+b^2) \tag{8.7.357}$$

et par symétrie, nous avons les résultats triviaux suivants :

$$\begin{aligned} A = J_x &= \frac{1}{5}M(b^2+c^2) \\ B = J_y &= \frac{1}{5}M(a^2+c^2) \\ C = J_z &= \frac{1}{5}M(a^2+b^2) \end{aligned} \tag{8.7.358}$$

La matrice d'inertie (voir section Mécanique Classique page ??) est alors :

$$(J_0)_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}M(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}M(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}(a^2+b^2) \end{pmatrix} \tag{8.7.359}$$

En cours de traduction de l' anglais

8.7.2.2.6 Paraboloïde

Définition (#8.7.393) : Un "paraboloïde" est, comme nous le savons déjà, une surface quadrique d'un type particulier. Il existe deux types de paraboloïdes : elliptique et hyperbolique.

Le "paraboloïde elliptique" a la forme d'une coupe ovale et peut avoir un point maximum ou minimum. Dans un système de coordonnées approprié à trois axes x, y et z, il peut être représenté par l'équation suivante :

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{8.7.360}$$

où a et b sont des constantes qui déterminent respectivement le niveau de courbure dans les plans xz et yz. Il s'agit d'un paraboloïde elliptique qui s'ouvre vers le haut pour $c > 0$ et vers le bas pour $c < 0$.

Cette dernière relation s'écrit plus communément :

$$z = c^2\frac{x^2}{a^2} + c^2\frac{y^2}{b^2} = a'x^2 + b'y^2 \tag{8.7.361}$$

Le "paraboloïde hyperbolique" – à ne pas confondre avec un hyperboloïde (voir section Géométrie Analytique page 2813) – est une surface doublement réglée en forme de selle. Dans

un système de coordonnées approprié, un paraboloïde hyperbolique peut être représenté par l'équation :

$$\frac{z}{c}=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2} \tag{8.7.362}$$

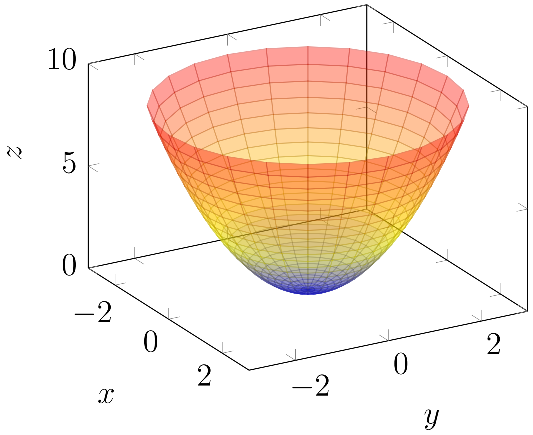


FIG. 8.285 – Paraboloïde de révolution

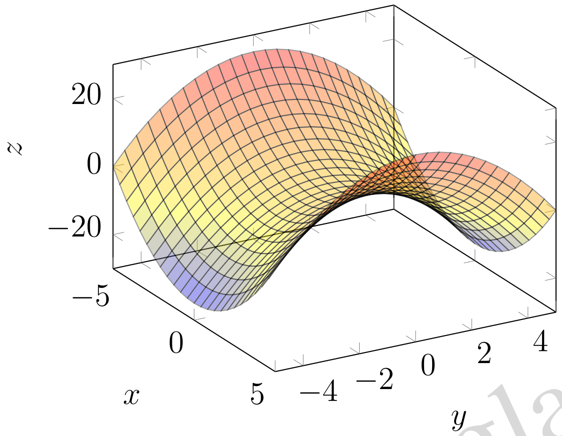


FIG. 8.286 – Paraboloïde hyperbolique

Nous calculerons uniquement le volume du paraboloïde de révolution, car c'est le seul résultat dont nous avons besoin dans les autres chapitres de ce livre à ce jour. Pour cela, considérons la figure suivante :

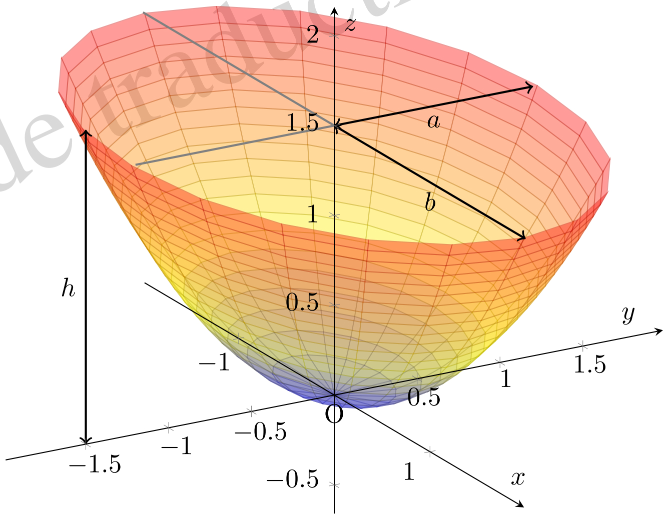


FIG. 8.287 – Paraboloïde elliptique

Donnée par :

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \tag{8.7.363}$$

En observant la figure ci-dessus, nous constatons que les paramètres a et b dépendent de la valeur de z. Ainsi, comme la surface d'une ellipse est donnée par $\mathrm{d}S=\pi ab$, nous avons pour chaque hauteur du paraboloïde :

$$S(z)=\pi a(z)b(z) \tag{8.7.364}$$

En cours de traduction de l'anglais

Donc dans le plan xz comme nous avons $y=0$ alors :

$$z=\frac{x^2}{a^2}\Leftrightarrow a(z)=|x|\sqrt{\frac{1}{z}} \tag{8.7.365}$$

et c'est pareil pour le plan yz :

$$z=\frac{y^2}{b^2}\Leftrightarrow b(z)=|y|\sqrt{\frac{1}{z}} \tag{8.7.366}$$

Et nous savons que lorsque $z=h$, $a(h)=a$, et lorsque $z=0$, $a(h)=0$ (idem pour b). Nous devons donc écrire :

$$a(z)=a\sqrt{\frac{z}{h}} \qquad b(z)=b\sqrt{\frac{z}{h}} \tag{8.7.367}$$

Ainsi :

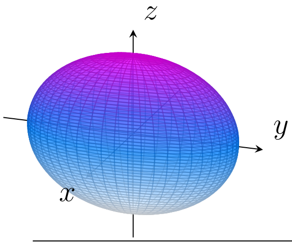
$$V_h=\int_0^h S(z)\mathrm{d}z=\int_0^h \pi a(z)b(z)\mathrm{d}z=\pi\int_0^h a\sqrt{\frac{z}{h}}b\sqrt{\frac{z}{h}}\mathrm{d}z=\pi ab\frac{1}{h}\int_0^h |z|\mathrm{d}z=\pi ab\frac{1}{h}\frac{1}{2}h^2 \tag{8.7.368}$$

Finalement :

$$\boxed{V_h=\frac{1}{2}\pi abh} \tag{8.7.369}$$

En cours de traduction de l'anglais

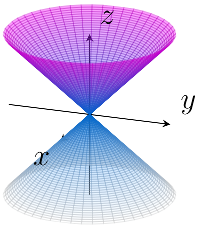
Aperçu des Surfaces Quadriques



Ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

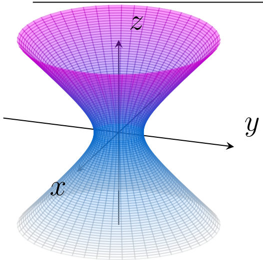
Toutes les traces sont des ellipses. Si $a=b=c$, l'ellipsoïde est une sphère.



Cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

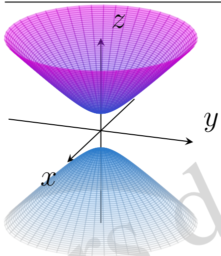
Les traces horizontales sont des ellipses. Les traces verticales sont des hyperboles (ou une paire de lignes). En général, la surface s'ouvre le long de l'axe correspondant au terme au carré qui se trouve sur un côté de l'équation à part.



Hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

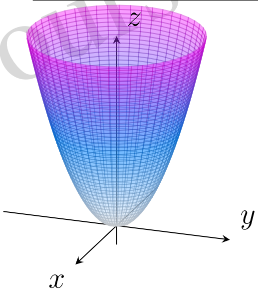
Les traces horizontales sont des ellipses. Les traces verticales sont des hyperboles (ou des paires de lignes). En général, la surface s'ouvre selon l'axe correspondant à la variable dont le coefficient est négatif.



Hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

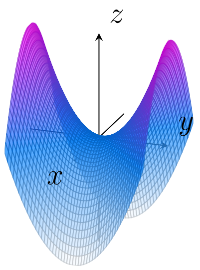
Les traces horizontales sont des ellipses (ou un seul point ou rien). Les traces verticales sont des hyperboles. La surface s'ouvre selon l'axe correspondant à la variable dont le coefficient est positif.



Paraboloïde elliptique

$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Les traces horizontales sont des ellipses (ou un point ou rien). Les traces verticales sont des paraboles. Le paraboloïde s'ouvre vers le haut lorsque $c>0$ et vers le bas lorsque $c<0$. En général, la surface s'ouvre selon l'axe correspondant à la variable élevée à la puissance première.



Paraboloïde hyperbolique

$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

Les traces horizontales sont des hyperboles (ou une paire de lignes). Les traces verticales sont des paraboles. En général, les paraboles s'ouvrent selon l'axe correspondant à la variable élevée à la puissance première.

FIG. 8.288 – Surfaces quadriques en un coup d'oeil (auteur : Dave Richeson)

En cours de traduction de l'anglais

8.7.2.2.7 Trompette de Gabriel

La "trompette de Gabriel" (également appelée "trompette de Torricelli") est une figure géométrique dont la surface est infinie mais le volume est fini. Son nom fait référence à la tradition abrahamique qui identifie l'archange Gabriel à l'ange qui sonne du cor pour annoncer le Jugement dernier, associant ainsi le divin, ou l'infini, au fini. Les propriétés de cette figure ont été étudiées pour la première fois par le physicien et mathématicien italien Evangelista Torricelli au 117e siècle (calendrier holocène).

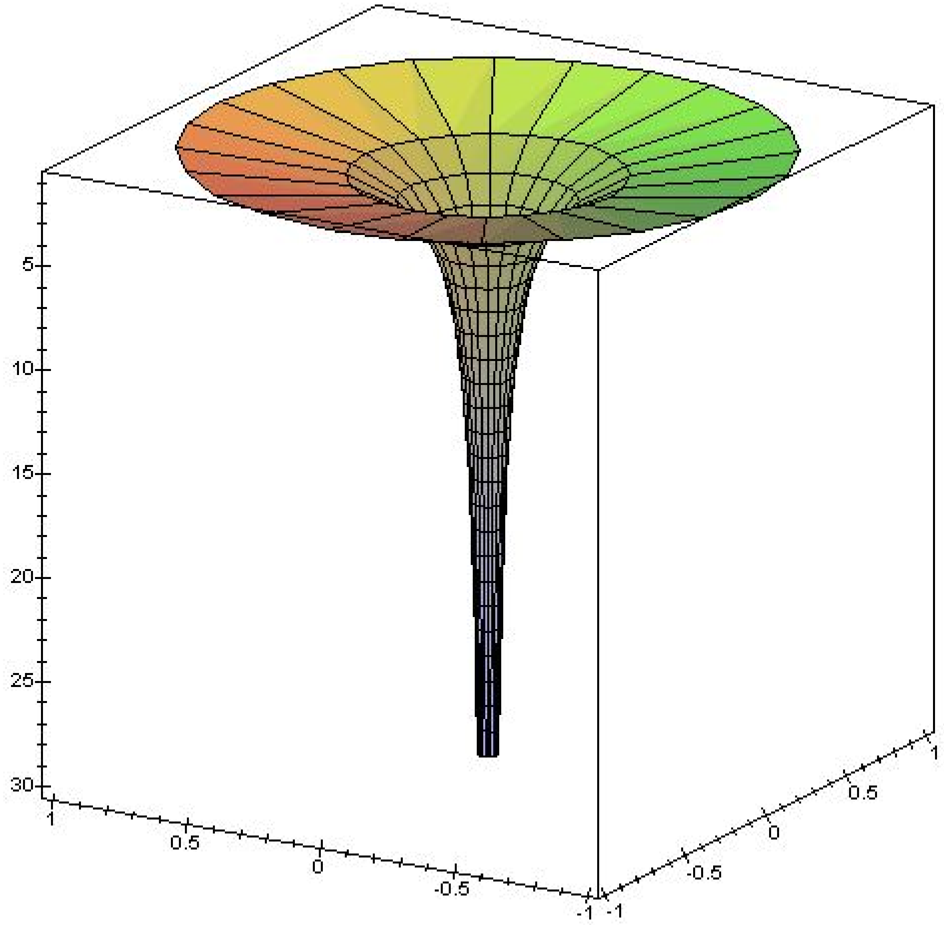
La trompette de Gabriel est formée en prenant le graphique de :

$$f(x) \mapsto \frac{1}{x} \tag{8.7.370}$$

avec le domaine $x \geq 1$ et en le faisant tourner en trois dimensions autour de l'axe x. Avec Maple 4.00b, nous pouvons le représenter graphiquement comme suit (notez qu'il a la même forme qu'un potentiel gravitationnel ou électrique) :

```
>plot3d(1/x, theta=0..2*Pi, x = 1..20, coords=cylindrical
```

anglais



En c

FIG. 8.289 – **Trompette de Gabriel avec Maple 4.00b**

Cette découverte a été réalisée grâce au principe de Cavalieri, avant l'invention du calcul différentiel et intégral. Aujourd'hui, ce dernier permet de calculer le volume et l'aire de la corne

entre $x=1$ et $x=a$, où $a>1$. Par intégration, il est possible de trouver le volume V (en utilisant à nouveau la méthode des disques pour le volume) et l'aire de la surface S :

$$\begin{gathered}V=\pi\int\limits_1^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_1^a\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)\\ S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x=2\pi\int\limits_1^a\frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}x>2\pi\int\limits_1^a\frac{\mathrm{d}x}{x}=2\pi\ln(a)\end{gathered} \tag{8.7.371}$$

Le paramètre a peut être aussi grand que nécessaire, mais l'équation montre que le volume de la partie de la trompette comprise entre $x=1$ et $x=a$ ne dépassera jamais π ; cependant, il s'en rapprochera de plus en plus à mesure que a augmente. Mathématiquement, le volume tend vers π lorsque a tend vers l'infini. En utilisant la notation limite du calcul différentiel et intégral :

$$\lim_{a\rightarrow+\infty} V=\lim_{a\rightarrow+\infty}\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)=\pi\cdot\lim_{a\rightarrow+\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\pi \tag{8.7.372}$$

La formule de l'aire de surface ci-dessus donne une borne inférieure pour l'aire égale à 2π multiplié par le logarithme naturel de a. Il n'y a pas de borne supérieure pour le logarithme naturel de a lorsque a tend vers l'infini. Cela signifie, dans ce cas, que la trompette a une surface infinie. Autrement dit :

$$\lim_{a\rightarrow+\infty} S\geq\lim_{a\rightarrow+\infty}2\pi\ln(a)=+\infty \tag{8.7.373}$$

Ce paradoxe apparent faisait partie d'un débat sur la nature de l'infini impliquant de nombreux penseurs clés de l'époque, notamment Thomas Hobbes, John Wallis et Galilée.

Remarque

Puisque la trompette a un volume fini mais une surface infinie, il existe un paradoxe apparent : si elle pouvait être remplie d'une quantité finie de peinture, celle-ci ne suffirait pas à recouvrir sa surface intérieure. Ce paradoxe est résolu en réalisant qu'une quantité finie de peinture peut en réalité recouvrir une surface infinie ; il suffit simplement qu'elle se dilue suffisamment rapidement...

Le phénomène inverse de la trompette de Gabriel – une surface de révolution qui a une surface finie mais un volume infini – ne peut pas se produire (il existe une preuve mais elle n'est pas très esthétique donc nous ne la présenterons pas ici).

8.7.2.2.8 Tonneau à vin à section circulaire

Cherchons maintenant pour le plaisir un ouvrage bien connu des vignerons (et pas seulement !) :

En cours de traduction de l'anglais

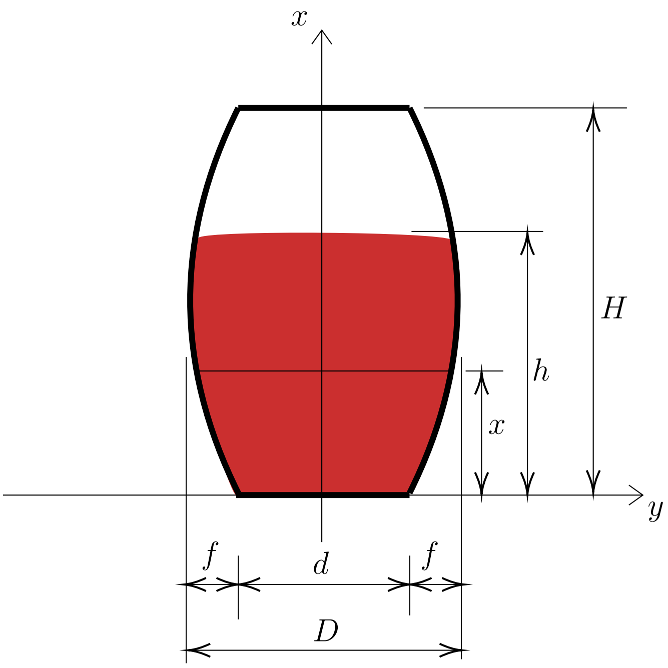


FIG. 8.290 – Tonneau à vin à section circulaire

En cours de traduction de l' anglais

Considérons que la courbure latérale du tonneau est une parabole :

$$y=ax^2+bx+c \tag{8.7.374}$$

Posons :

$$f=\frac{D-d}{2} \quad \text{et} \quad L=\frac{H}{2} \tag{8.7.375}$$

Étant donné la façon dont nous avons disposé les axes x et y, il est relativement facile de déterminer les coefficients du polynôme. Le coefficient c est le plus simple :

$$c=y(x=0)=\frac{d}{2} \tag{8.7.376}$$

Nous avons aussi :

$$y'=0=2ax+b\Rightarrow 2a\frac{H}{2}+b=2aL+b=0\Rightarrow a=\frac{-b}{2L} \tag{8.7.377}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}y\left(x=\frac{H}{2}\right)=a\left(x=\frac{H}{2}\right)^2+b\frac{H}{2}+c=-\frac{b}{2L}L^2+bL+\frac{d}{2}=\frac{D}{2}\\ \Rightarrow b\left(-\frac{L}{2}+L\right)=\frac{D-d}{2}\Rightarrow b\frac{L}{2}=f\Rightarrow b=\frac{2f}{L}\end{aligned} \tag{8.7.378}$$

Ainsi, nous avons :

$$a=-\frac{f}{L^2} \quad b=\frac{2f}{L} \quad c=\frac{d}{2} \tag{8.7.379}$$

Le rayon d'une section horizontale d'ordonnée x est $r=y$ et sa surface est donc :

$$S=\pi r^2 \tag{8.7.380}$$

ou :

$$S=\pi(ax^2+bx+c)^2 \tag{8.7.381}$$

Développons ceci :

$$\begin{aligned}S&=\pi\left(a^2x^4+b^2x^2+c^2+2ax^2(bx+c)+bxc\right)\\&=\pi\left(a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2acx^2+2bxc\right)\end{aligned} \tag{8.7.382}$$

Le volume de liquide pour une hauteur h sera alors :

$$\begin{aligned}V&=\int_0^h(a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2acx^2+2bcx)\mathrm{d}x\\&=\pi\left[a^2\frac{x^5}{5}+b^2\frac{x^3}{3}+c^2x+2ab\frac{x^4}{4}+2ac\frac{x^3}{3}+2bc\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^h\\&=\pi\left[a^2\frac{h^5}{5}+2ab\frac{h^4}{4}+b^2\frac{h^3}{3}+2ac\frac{h^3}{3}+2bc\frac{h^2}{2}+c^2h\right]\\&=\pi\left[a^2\frac{h^5}{5}+ab\frac{h^4}{2}+(2ac+b^2)\frac{h^3}{3}+bch^2+c^2h\right]\end{aligned} \tag{8.7.383}$$

Pour calculer la surface intérieure du tonneau de vin, nous considérons la courbe extérieure donnée par un arc parabolique comme indiqué ci-dessous :

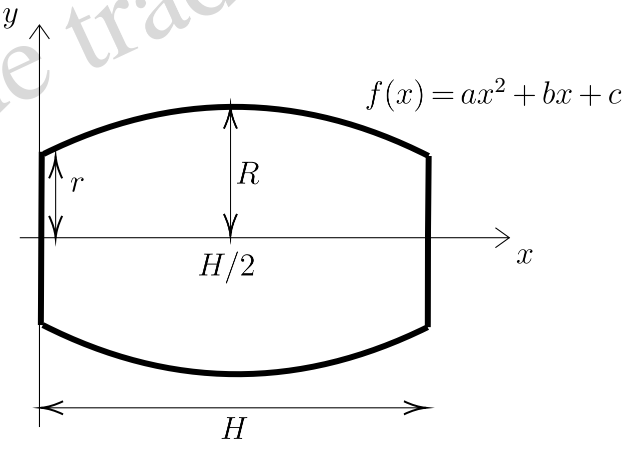


FIG. 8.291 – Coupe verticale du tonneau de vin

Pour calculer l'aire latérale du canon, il faut d'abord déterminer l'expression de la parabole ci-dessus.

En regardant la figure, nous obtenons :

$$\begin{aligned}f(0)&=r=c\\f(H)&=r=aH^2+bH+c\\f\left(\frac{H}{2}\right)&=a\frac{H^2}{4}+b\frac{H}{2}+c=R\end{aligned} \tag{8.7.384}$$

En cours de traduction de l'anglais

qui est un système de trois équations avec les inconnues a, b, c.

Après résolution, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a &= \frac{4(r-R)}{H^2} \\ b &= \frac{4(R-r)}{H} \\ c &= r \end{aligned} \qquad (8.7.385)$$

La surface latérale du tonneau incluant la surface des deux disques aux extrémités est alors donnée par :

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi \int_0^H |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x = 2\pi r^2 + 2\pi \int_0^H (ax^2+bx+c)\sqrt{1+(2ax+b)^2}\mathrm{d}x \qquad (8.7.386)$$

En faisant le changement de variable $u = 2ax+b$ nous obtenons :

$$S = 2\pi r^2 + \frac{\pi}{4a^2}\int_b^{2aH+b} (u^2-b^2+4ac)\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u \qquad (8.7.387)$$

Cette dernière intégrale peut être calculée en utilisant les relations suivantes (la seconde a été prouvée dans la section Calcul différentiel et Intégral, la première devra être détaillée lorsque nous aurons le temps...) :

$$\begin{aligned} \int u^2\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u &= \frac{1}{4}u\left(u^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{8}\text{arcsinh}(u) \\ \int \sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2}\text{arcsinh}(u) \end{aligned} \qquad (8.7.388)$$

Où pour rappel (voir section Trigonométrie page 2515) :

$$\text{arcsinh}(z) = \ln(u+\sqrt{u^2+1}) \qquad (8.7.389)$$

Nous n'irons pas plus loin car la formule résultante serait énorme et peu intéressante de notre point de vue (mais sur demande nous le ferons).

Néanmoins, voici une application numérique. Supposons $r = 20$ [cm], $R = 30$ [cm], $H = 60$ [cm].

Nous calculons :

$$a = -0.0111, b = 0.667, c = 20 \qquad (8.7.390)$$

Dès lors :

$$S = 2.513\cdot 10^3 + 6.362\cdot 10^3 \int_{0.667}^{-0.667} u^2\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u - 8.483\cdot 10^3 \int_{0.667}^{-0.667} \sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u \qquad (8.7.391)$$

En cours de traduction de l' anglais

La première intégrale est égale à :

$$\int_{0.667}^{-0.667} u^2\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u = -0.222 \tag{8.7.392}$$

La deuxième intégrale est égale à :

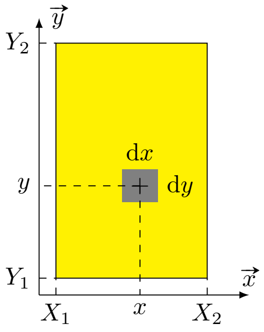
$$\int_{0.667}^{-0.667} \sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u = -1.427 \tag{8.7.393}$$

Donc finalement nous obtenons :

$$S \cong 1.321\,[\mathrm{m}^2] \tag{8.7.394}$$

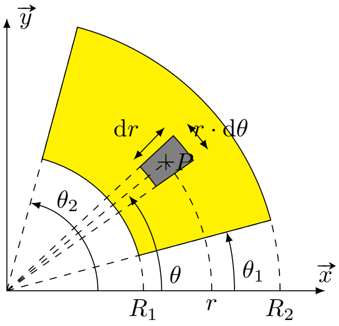
Pour résumer tout ce qui a été vu jusqu'à présent sur les surfaces et les volumes, montrons tous les éléments de surfaces en 2D ainsi que tous les éléments de surfaces en 3D et les techniques de volumes utilisées jusqu'à présent :

En cours de traduction de l' anglais



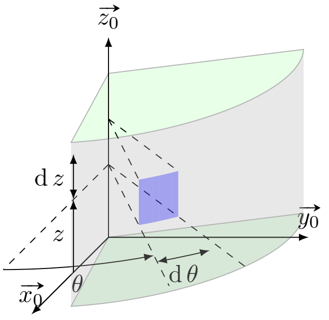
$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$

(a) Coordonnées cartésiennes



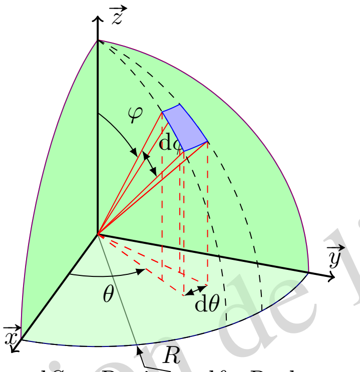
$\mathrm{d}S = r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r$

(b) Coordonnées polaires



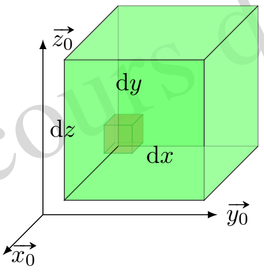
$\mathrm{d}S = r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}z$

(c) Coordonnées cylindriques



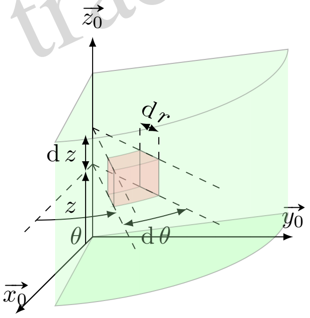
$\mathrm{d}S = R \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\theta \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi$

(d) Coordonnées sphériques



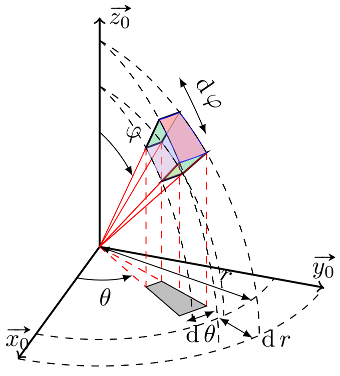
$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$

(e) Coordonnées cartésiennes



$\mathrm{d}V = r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}z$

(f) Coordonnées cylindriques



$\mathrm{d}V = r \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\theta \cdot r \cdot \mathrm{d}\phi \cdot \mathrm{d}r.$

(g) Coordonnées sphériques

FIG. 8.292 – Éléments surfaciques techniques et volumiques 2D et 3D dans différents systèmes de coordonnées (auteur : Robert Papanicola)

En cours de traduction de l'anglais

8.7.3 Inégalité isopérimétrique (2D)

Le texte qui suit est presque un simple copier-coller d'un texte de Jeremy Booher, auquel nous avons ajouté quelques détails manquants et des références croisées ! Le lecteur constatera que la méthode suit un processus astucieux, très intéressant pour apprendre à réaliser des preuves abstraites sur des objets géométriques.

De toutes les figures du plan ayant un périmètre donné, laquelle a la plus grande aire ? Les Grecs connaissaient la réponse à cette question, même s'ils ne pouvaient la démontrer. Le problème résidait en partie dans le fait que les notions de périmètre et d'aire sont complexes et nécessitent une analyse approfondie. Une démonstration rigoureuse a dû attendre le 119e siècle (calendrier holocène). Il existe aujourd'hui de nombreuses démonstrations de l'inégalité isopérimétrique. Nous nous concentrerons sur le cas où le bord de la figure est une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux afin de balayer sous le tapis les problèmes analytiques liés à l'aire et au périmètre. Rappelons qu'être $\mathcal{C}^1$ par morceaux signifie que la courbe fermée est continûment différentiable, sauf en un nombre fini de points.

Théorème 8.28. (Inégalité isopérimétrique) Soit γ une courbe fermée dans le plan, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $A=\mathcal{A}(\text{Int}(\gamma))$ l'aire délimitée par la courbe et $L=\mathcal{L}(\gamma)$ son périmètre. Nous avons :

$$4\pi A \leq L^2 \tag{8.7.395}$$

l'égalité étant vérifiée si et seulement si la courbe est un cercle (ce qui nous conduit à affirmer que le cercle est pour une forme de périmètre donné, la forme ayant la plus grande aire). En effet, dans le cas où la courbe est un cercle, nous avons :

$$4\pi(\pi R^2) \leq (2\pi R)^2 \Rightarrow 1=1 \tag{8.7.396}$$

Par conséquent, l'aire est maximisée lorsque la forme est un cercle (l'égalité est donc vérifiée !). Autrement dit, l'inégalité isopérimétrique limite la taille de la surface. Vous remarquerez que cette inégalité est maximisée lorsque le périmètre englobant est un cercle !

En d'autres termes, toute surface 2D (c'est-à-dire plane) qui satisfait :

$$\frac{L^2}{A}=4\pi \tag{8.7.397}$$

maximise la surface pour un périmètre donné !

Remarque

La courbe frontière n'a pas besoin d'être découpée par morceaux $\mathcal{C}^1$: avec plus d'analyse, moins d'hypothèses sont nécessaires sur γ. Cependant, cela est largement suffisant pour englober des figures courantes comme les polygones et les cercles.

La démonstration présentée ci-dessous est appelée "démonstration de Hurwitz par Actions". Pour qu'elle soit cohérente, la courbe doit être $\mathcal{C}^1$ par morceaux, comme nous le supposerons tout au long de la démonstration. Voici quelques points utiles :

En cours de traduction de l'anglais

- Si $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ est une courbe de $[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^2$, sa longueur peut être calculée comme nous le savons par la relation (voir section Géométrie Différentielle 2828) :

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t \tag{8.7.398}$$

- Si $\gamma(t)$ est une courbe de $[0,\pi]\rightarrow\mathbb{R}^2$ (vous pouvez appliquer le même raisonnement avec le même résultat en choisissant $[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}^2$) avec les coordonnées polaires de $\gamma(t)$ données par $r(t)$ et $\theta(t)$, la longueur de la courbe est :

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t \tag{8.7.399}$$

Ceci vient en modifiant les variables $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$ dans la relation précédente. En effet, en coordonnées polaires, nous définissons la courbe par l'équation $r=f(t)$. Afin d'adapter la formule de longueur d'arc à une courbe polaire, nous utilisons les équations suivantes :

$$x=r\cos(\theta)=f(t)\cos(\theta(t)) \tag{8.7.400}$$
$$y=r\sin(\theta)=f(t)\sin(\theta(t)) \tag{8.7.401}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=f'(t)\cos(\theta(t))-f(t)\sin(\theta(t))\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=f'(t)\sin(\theta(t))+f(t)\cos(\theta(t))\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{8.7.402}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}L&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b\sqrt{\left(f'(t)\cos(\theta(t))-f(t)\sin(\theta(t))\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(f'(t)\sin(\theta(t))+f(t)\cos(\theta(t))\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b\sqrt{(f'(t))^2\left(\cos^2(\theta(t))+\sin^2(\theta(t))\right)+f(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(\cos^2(\theta(t))+\sin^2(\theta(t))\right)}\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b\sqrt{(f'(t))^2+f(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8.7.403}$$

- Avec la notation ci-dessus, l'aire à l'intérieur de la courbe est donnée par :

$$\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma))=\frac{1}{2}\int_0^\pi r(t)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{8.7.404}$$

En cours de traduction de l'anglais

En effet, comme pour les équations cartésiennes, nous pouvons calculer l'aire exacte de la région polaire à l'aide d'une intégrale. La seule exception est que nous utilisons des secteurs pour approximer l'aire, et non des rectangles. Par conséquent :

$$A=\frac{\theta}{2\pi}\pi r^2 \tag{8.7.405}$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}A=\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\pi r(\theta)^2=\frac{1}{2}r(t)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}r(t)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{8.7.406}$$

Ainsi, comme $\gamma(t)$ est une courbe issue de $[0,\pi]\rightarrow\mathbb{R}^2$, nous avons :

$$A=\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2}r(t)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{8.7.407}$$

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales dit que pour les fonctions de carré intégrables f et g de $[0,\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ nous avons (voir section Analyse Fonctionnelle 2367) :

$$\left(\int\limits_0^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2\leq\int\limits_0^{\pi} f(t)^2\mathrm{d}t\int\limits_0^{\pi} g(t)^2\mathrm{d}t \tag{8.7.408}$$

L'égalité est atteinte si et seulement si g est un multiple de f.

Le concept d'action apparaît en physique et permet une reformulation de la mécanique classique en termes d'action et de lagrangiens. Pour notre propos, nous avons simplement besoin de la définition suivante de l'action d'une courbe, qui doit être considérée comme une propriété physique d'une particule suivant sa trajectoire.

Rappelons que, étant donnée une courbe plane $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^2$, l'action de la trajectoire γ est définie comme étant (voir section Mécanique Classique page ??) :

$$\mathcal{E}(\gamma):=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t \tag{8.7.409}$$

Contrairement à la longueur de la courbe, son action dépend de sa paramétrisation. Il est donc nécessaire de normaliser son paramétrage.

La "paramétrisation standard" d'une courbe γ est celle pour laquelle l'intervalle du paramètre est $[0,\pi]$.

Étant donné que les définitions de l'action et de la longueur sont similaires, il n'est pas surprenant qu'elles soient liées !

Lemme 8.28.1. Soit γ une courbe de paramétrisation standard. Alors :

$$\mathcal{L}(\gamma)^2\leq 2\pi\mathcal{E}(\gamma) \tag{8.7.410}$$

avec égalité obtenue si et seulement si le paramètre est un multiple de la longueur de l'arc selon γ.

En cours de traduction de l'anglais

Démonstration 8.28.1. Par Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^\pi f(t)^2\mathrm{d}t \int_0^\pi g(t)^2\mathrm{d}t \tag{8.7.411}$$

En prenant $f(t)=1$ et $g(t)=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$, nous obtenons l'inégalité souhaitée. L'égalité est obtenue si $g(t)$ est une constante, ce qui signifie que le point $(x(t),y(t))$ se déplace le long de la courbe à vitesse constante. Le paramètre est donc un multiple de la longueur de l'arc.

La pertinence de l'inégalité isopérimétrique est que l'action est également liée à la zone que la courbe entoure.

■ Q.E.D.

Proposition : Soit γ une courbe fermée simple de paramétrisation standard. Alors :

$$2\mathcal{A}(\text{Int}(\gamma)) \leq \mathcal{E}(\gamma) \tag{8.7.412}$$

avec égalité obtenue si et seulement si γ est un cercle.

La preuve utilise le lemme analytique suivant :

Lemme 8.28.2. (Inégalité de Wirtinger) Soit $f:[0,\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec $f(0)=f(\pi)=0$. Nous avons alors :

$$\int\limits_0^\pi f'(t)^2\mathrm{d}t \geq \int\limits_0^\pi f(t)^2\mathrm{d}t \tag{8.7.413}$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $f(t)$ est un multiple de $\sin(t)$.

Démonstration 8.28.2. Considérons la fonction $g(t)=\frac{f(t)}{\sin(t)}$. Elle est différentiable aux extrémités par la règle de l'Hôpital et par le fait que $f(0)=f(\pi)=0$. Alors :

$$f'(t)=g(t)\cos(t)+g'(t)\sin(t) \tag{8.7.414}$$

ainsi :

$$\int\limits_0^\pi f'(t)^2\mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi \left(g(t)^2\cos(t)^2+2g(t)g'(t)\cos(t)\sin(t)+g'(t)^2\sin(t)^2\right)\mathrm{d}t \tag{8.7.415}$$

En intégrant la partie du milieu par parties (voir section Calcul Différentiel et Intégral page 1511) donnée pour rappel par :

$$\int\limits_a^b x(t)y'(t)\mathrm{d}t = x(t)y(t)\Big|_a^b - \int\limits_a^b x'(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{8.7.416}$$

(où nous choisissons $y'(t)=g(t)g'(t)$ et $x(t)=\cos(t)\sin(t)$) et en utilisant les conditions aux limites donne :

$$2\int\limits_0^\pi g(t)g'(t)\cos(t)\sin(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_0^\pi g(t)^2\left(\cos(t)^2-\sin(t)^2\right)\mathrm{d}t \tag{8.7.417}$$

En cours de traduction de l'anglais

En effet nous avons pour premier terme de l'intégration par partie (nous substituons $u = g(t) \longrightarrow \mathrm{d}u = g'(t)\mathrm{d}t$) :

$$y(t) = \int g(t)g'(t)\mathrm{d}t = \int u\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} = \frac{f(t)^2}{2} \qquad (8.7.418)$$

Et pour le deuxième terme de l'intégration par partie :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\mathrm{d}(\cos(t)\sin(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\cos(t)}{\mathrm{d}t}\sin(t) + \cos(t)\frac{\mathrm{d}\sin(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= (-\sin(t))\sin(t) + \cos(t)\cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{aligned} \qquad (8.7.419)$$

Donc, pour revenir au résultat global, nous obtenons :

$$\int_0^\pi f'(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(g(t)^2 + g'(t)^2\right)\sin(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)^2\mathrm{d}t + \int_0^\pi g'(t)^2\sin(t)^2\mathrm{d}t \geq \int_0^\pi f(t)^2\mathrm{d}t \qquad (8.7.420)$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $g'(t) = 0$ sur l'intervalle, ce qui implique que $g(t)$ est constant et $f(t)$ est un multiple de $\sin(t)$.

■ Q.E.D.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition énoncée plus haut :

$$2\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) \leq \mathcal{E}(\gamma) \qquad (8.7.421)$$

avec égalité stricte si et seulement si γ est un cercle.

Démonstration 8.28.3. Rappelez-vous que :

$$\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) = \frac{1}{2}\int_0^\pi r(t)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \qquad (8.7.422)$$

et :

$$\mathcal{E}(\gamma) := \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt \qquad (8.7.423)$$

Dès lors :

$$\mathcal{E}(\gamma) - 2\cdot\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \qquad (8.7.424)$$

En complétant le carré, le côté droit devient :

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - 1\right)^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - r^2\right)\mathrm{d}t \qquad (8.7.425)$$

En cours de traduction de l'anglais

Le premier terme est non négatif car il s'agit d'un carré, et le second est non négatif par l'inégalité de Wirtinger car ce terme peut être réécrit :

$$\int_0^\pi f'(t)^2 dt \geq \int_0^\pi f(t)^2 \mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^\pi \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \int_0^\pi r^2 \mathrm{d}t \geq 0 \tag{8.7.426}$$

Nous avons donc bien :

$$\mathcal{E}(\gamma) - 2\cdot\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \geq 0 \tag{8.7.427}$$

Donc la proposition :

$$2\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) \leq \mathcal{E}(\gamma) \tag{8.7.428}$$

est démontrée !

La courbe est fermée, nous pouvons donc choisir l'origine du système de coordonnées polaires à $\gamma(0) = \gamma(\pi)$.

Pour avoir l'égalité, c'est-à-dire :

$$2\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) = \mathcal{E}(\gamma) \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - 1\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - r^2\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{8.7.429}$$

Nous voyons donc que si nous prenons :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \text{et} \quad r = a\sin(\theta+\varphi) \tag{8.7.430}$$

Nous obtenons l'égalité et $r = a\sin(\theta+\varphi)$ est l'équation polaire d'un cercle !

■ Q.E.D.

L'égalité isopérimétrique s'ensuit maintenant facilement.

Démonstration 8.28.4. Choisissons une paramétrisation standard pour γ. D'après les deux propositions, nous obtenons donc :

$$\left.\begin{array}{l} 2\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) \leq \mathcal{E}(\gamma) \\ \mathcal{L}(\gamma)^2 \leq 2\pi\mathcal{E}(\gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow 4\pi\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) = \mathcal{L}(\gamma)^2 \tag{8.7.431}$$

Ce qui est souvent noté vulgairement $4\pi A = L^2$. Ce dernier résultat peut s'écrire explicitement :

$$\boxed{\begin{array}{c} 4\pi\mathcal{A}(\mathrm{Int}(\gamma)) \leq \mathcal{L}(\gamma)^2 \\ \Downarrow \\ 4\pi\frac{1}{2}\int_0^\pi r(t)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \leq \left(\frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t\right)^2 \end{array}} \tag{8.7.432}$$

avec égalité satisfaite si et seulement si la courbe est un cercle !

En cours de traduction de l'anglais

■ Q.E.D.

La forme d'une goutte d'eau est peut-être la manifestation physique la plus familière de l'inégalité isopérimétrique tridimensionnelle. En effet, une goutte adopte généralement une forme ronde et symétrique. La quantité d'eau étant fixe, la tension superficielle force la goutte à adopter une forme qui minimise sa surface, à savoir une sphère ronde (ce type d'expérience à été reproduite à maintes reprises dans la Station Spatial Inernationale).

~80 %

171 votes, 74.86%

En cours de traduction de l' anglais

8.8. Théorie des Graphes

L'HISTOIRE de la théorie des graphes (ou des "complexes cellulaires") débute peut-être avec les travaux d'Euler au 118ème siècle (calendrier holocène) et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie (isomères), la biologie, les sciences sociales (réseaux de transports), gestion de projets (C.P.M.), informatique (topologie des réseaux, complexité algorithmique, protocoles de transferts), la physique quantique, etc. Depuis le début du 120ème siècle (calendrier holocène), elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös. Cette branche des mathématiques a connu un grand regain d'intérêt suite à l'émergence des réseaux sociaux Internet dont les connexions entre "amis" et "suiveurs" constituent des graphes dont l'analyse topologique et statistique peut nous apprendre de nombreuses choses.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, ...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance que revêt l'aspect algorithmique dans leur domaine (voir le début de la section de Méthodes Numériques pour un petit exemple).

Effectivement, il s'agit essentiellement de modéliser des problèmes. Nous exprimons le problème en termes de graphes de sorte qu'il relève d'un problème de la théorie des graphes que nous savons le plus souvent résoudre car rentrant dans une catégorie de problèmes connus.

Les solutions de problèmes de graphes peuvent être faciles et efficaces (le temps nécessaire pour les traiter informatiquement étant raisonnable car ils dépendent polynomialement du nombre de sommets du graphe) ou difficiles (le temps de traitement étant alors exponentiel) auquel cas nous utilisons une heuristique, c'est-à-dire un processus de recherche d'une solution (pas forcément la meilleure).

Si la théorie des graphes connaît un assez grand engouement ces 30 dernières, peut-être est-ce dû au fait qu'elle ne nécessite pas dans ses concepts élémentaires de bagage mathématique considérable. Effectivement, il suffit d'avoir parcouru les sections de Probabilités, de Théorie Des Ensembles et d'Algèbre Linéaire ainsi que de Topologie présentés dans ce livre pour déjà

En cours de traduction de l'anglais

se sentir à l'aise avec les différentes définitions.

Nous allons introduire le vocabulaire de base de la théorie des graphes. Les termes employés sont ceux du langage commun de la géométrie euclidienne (et malheureusement ils sont aussi en grand nombre...).

8.8.1 Types de Graphes et de Structures

Définitions (#8.8.394) :

D1. Un "graphe" (ou "polygraphe") G est une paire $G(X,E)$ constituée d'un ensemble non vide et fini X (les sommets/nœuds), et d'un ensemble E (les arêtes/liens) de X de paires ordonnées d'éléments de X reliés par un segment de droite :

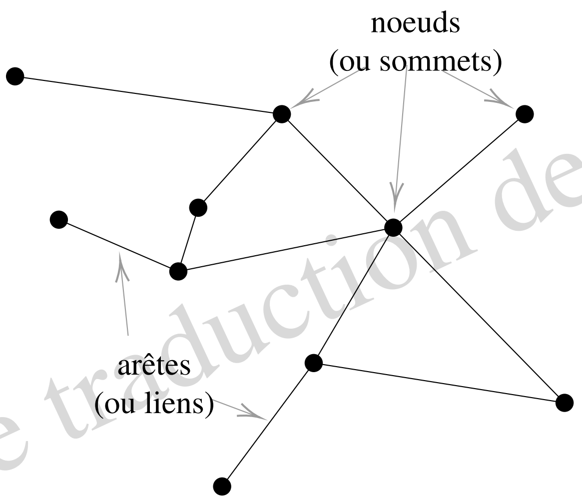


FIG. 8.293 – **Vocabulaire de base des graphes**

En cours de traduction de l'anglais

ou dit d'une autre manière (...) un graphe est une partie du produit cartésien X^2 (voir section Théorie des Ensembles page 389) :

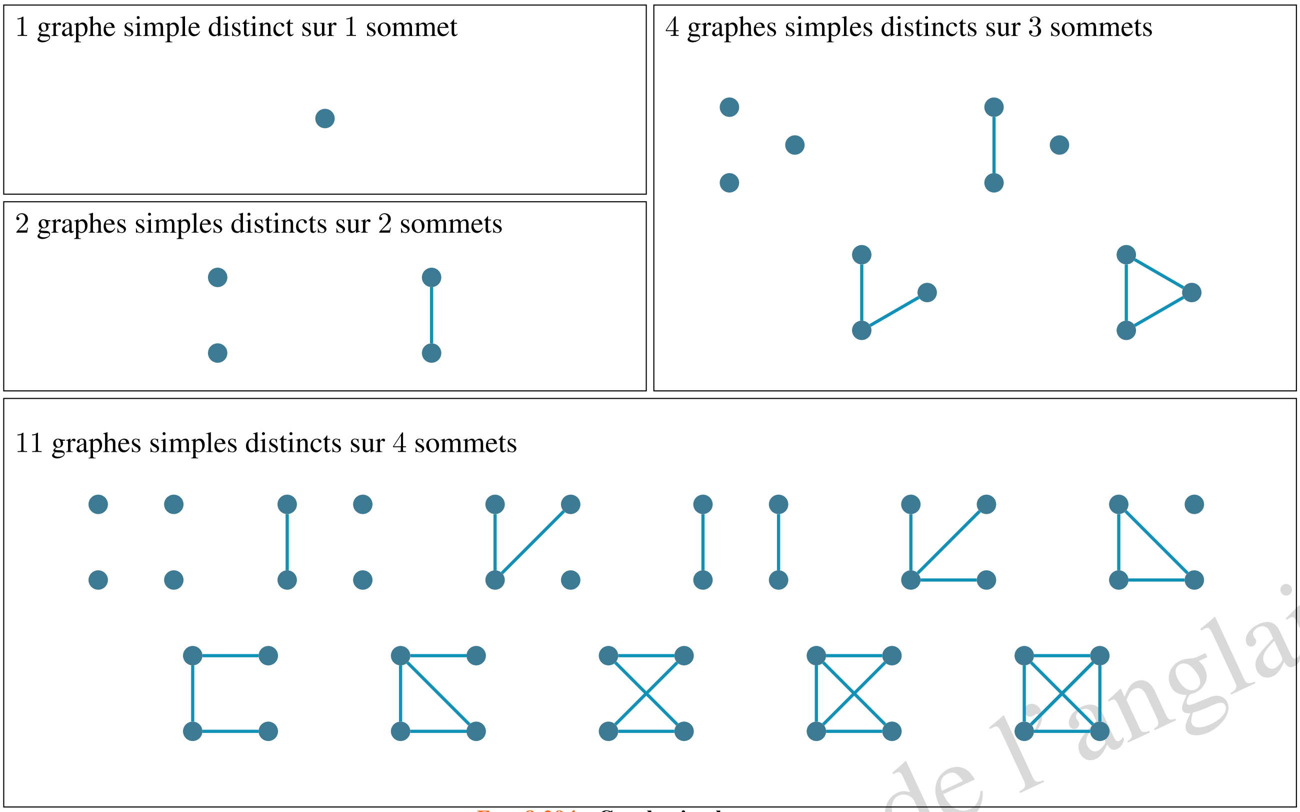


FIG. 8.294 – **Graphs simples**

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Un graphe est souvent noté en français $G = (A, S)$ où A est la première lettre du mot "arêtes" et S la première lettre du mot "sommets".

D2. Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) des paires. Alors la propriété caractéristique (ou définissante) de la "paire ordonnée" est :

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \text{si et seulement si} \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \tag{8.8.1}$$

L'ordre dans lequel les objets apparaissent dans la paire est significatif : la paire ordonnée (a, b) est différente de la paire ordonnée (b, a) sauf si $a = b$.

En théorie des graphes il est utile de préciser si un graphe G est constitué de paires ordonnées de cette façon nous pouvons travailler si besoin avec l'orientation des arêtes pour distinguer les arêtes partageant les mêmes paires de sommets mais n'ayant pas la même orientation de chemin.

D3. Un "multigraphe" est un graphe G qui peut avoir des arêtes partageant les mêmes sommets et ayant des arêtes bouclant sur les mêmes sommets.

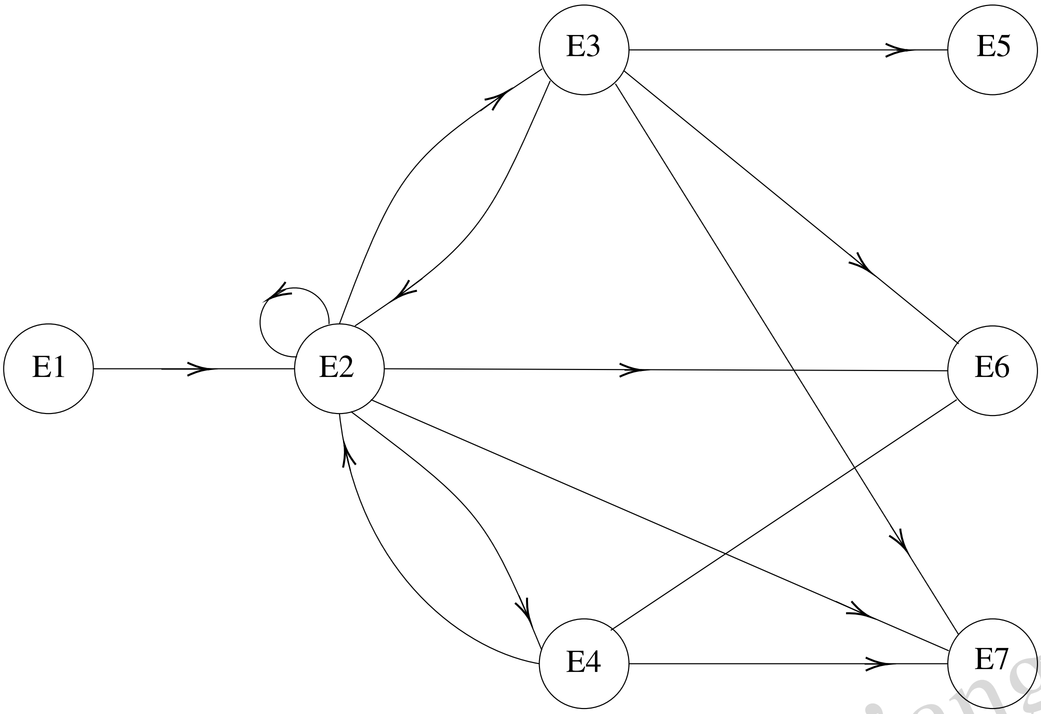


FIG. 8.295 – **Exemple de multigraphe que nous utiliserons plus loin**

> **Remarque**
>
> Il s'agit d'un cas très courant dans l'analyse des chaînes de Markov (voir les sections Probabilités page 530 ou de Théorie de jeux et de la Décision page ??) et comme nous le verrons plus loin, le problème des ponts de Königsberg est un multigraphe !

D4. Les éléments de X sont les "sommets" du graphe G, ceux de E sont les "arêtes" du graphe G (en effet, une arête – un entrelacs – est composée de deux sommets reliés par un segment, d'où la référence aux paires d'éléments dans la définition précédente). L'ensemble des sommets d'un graphe G est noté $G(X)$ et l'ensemble des arêtes $G(E)$.

D5. Le plan dans lequel un graphe est immergé est une "face F" et chaque surface proche (aire) sur ce plan définie par un chemin proche d'arêtes est également une face F.

D6. Un graphe est nommé "graphe planaire" lorsque nous pouvons le représenter dans un plan sans arêtes sécantes.

Voici quelques exemples de graphes planaires (connectés) :

En cours de l'anglais

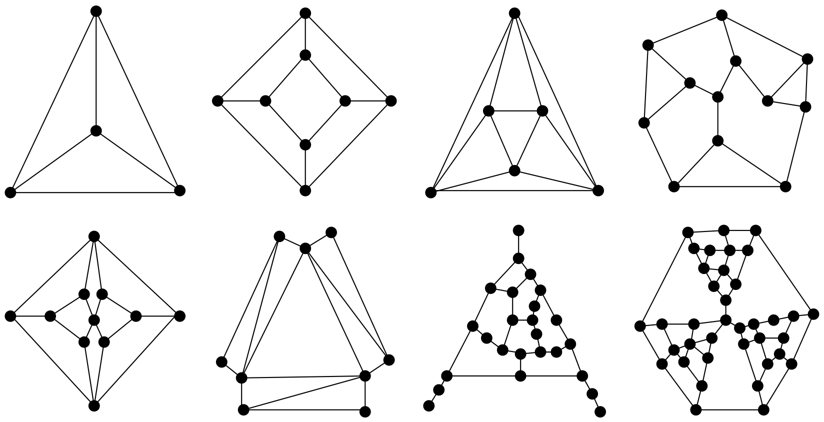


FIG. 8.296 – Exemple de graphes planaires

Théorème 8.29. Montrons maintenant que si F est le nombre de faces d'un graphe planaire, A le nombre d'arêtes et S le nombre de nœuds, alors nous avons en utilisant une ancienne notation traditionnelle :

$$\boxed{F - A + S = 2} \tag{8.8.2}$$

qui est la relation connue sous le nom de "formule d'Euler" ou "théorème de Descartes-Euler" (démonstration après l'exemple ci-dessous) et qui nous sera utile à de nombreuses reprises dans la présent livre (dans cette section et lors de notre étude des polyèdres dans la section sur les formes géométriques). Gardez donc à l'esprit qu'un graphe qui ne respecte pas cette relation ne peut pas être un graphe planaire !

✍**Exemple :**

Un graphe avec 2 faces (le côté gris clair est une face extérieure infinie), 4 sommets et 4 noeuds :

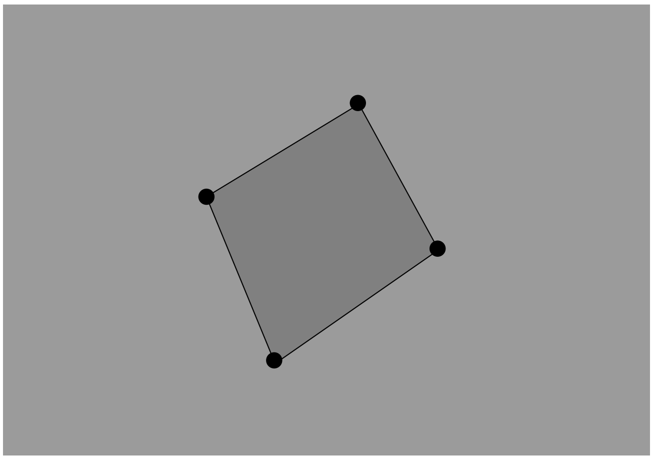


FIG. 8.297 – Graphique à 2 faces, 4 sommets et 4 noeuds

Démonstration 8.29.1. Nous prouvons ce théorème en par un raisonnement par récurrence (voir section Théorie de la Démonstration page 168) sur la différence $A - S$ (c'est l'astuce !).

Premièrement, il est évident que le théorème est vrai pour :

$$A - S = -1 \tag{8.8.3}$$

car dans ce cas le graphe est un arbre donc il n'a qu'une seule face (la face infinie extérieure), donc $F = 1$.

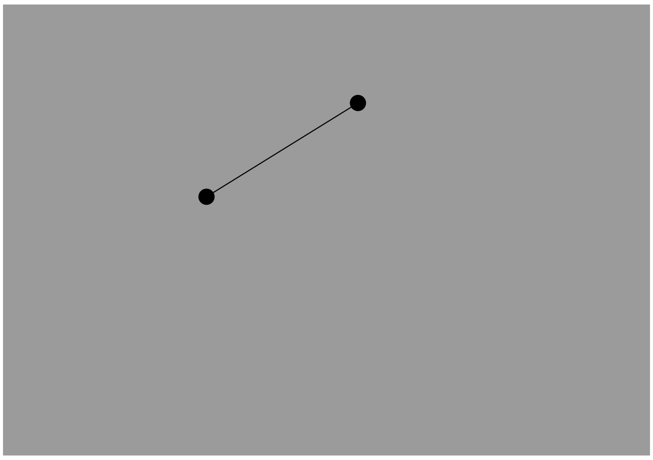


FIG. 8.298 – **Arbre avec un bord et deux sommets**

Dès lors :

$$F - A + S = F - (A - S) = 1 - (-1) = 2 \tag{8.8.4}$$

En cours de validation de l' anglais

Prenons alors un graphe connexe (voir définition plus bas) contenant au moins un cycle G (la figure ci-dessous est un exemple de graphe à 3 cycles c'est-à-dire les deux petits internes et le global) :

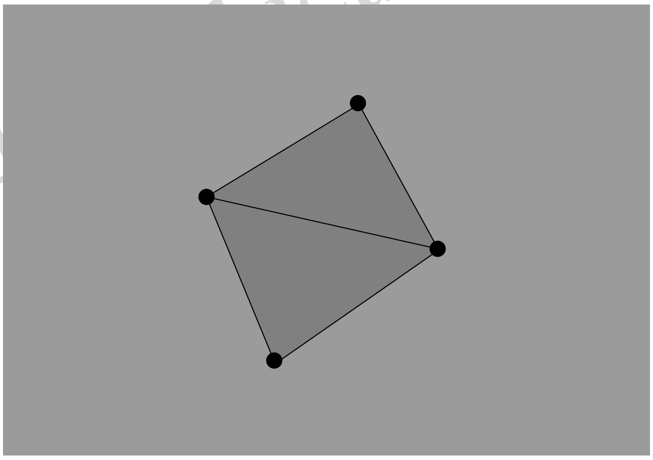


FIG. 8.299 – **Graphique avec au moins un cycle**

Si nous supprimons une arête e de ce cycle, nous devrions pouvoir appliquer récursivement la même relation au graphe $G - \{e\}$ s'il est droit. En effet, le graphe sans l'arête e aura F faces, S sommets et A arêtes; nous pouvons donc utiliser la relation démontrée ci-dessus avec l'arbre simple (sans cycle) :

$$F - A + S = 2 \tag{8.8.5}$$

si nous lui remettons l'arête alors nous écrirons :

$$F - A + S = 2 \tag{8.8.6}$$

$$(F + 1) - (A + 1) + S = F - A + S = 2 \tag{8.8.7}$$

■ Q.E.D.

Les polygones réguliers (voir section Formes Géométriques page ??) avec leurs diagonales dessinées peuvent être considérés comme des graphes (avec un sommet à chaque intersection), plus précisément comme des "graphes complets" (voir la définition à la page **??**), comme illustré ci-dessous :

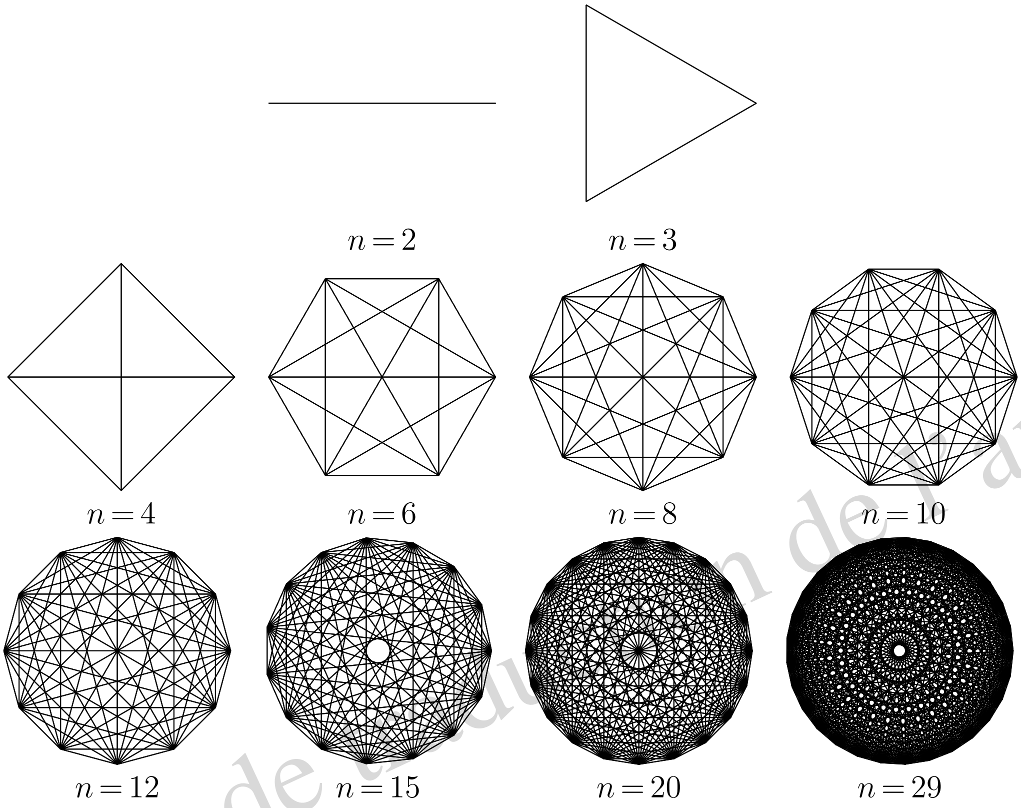


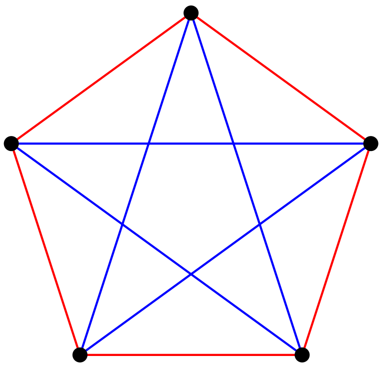
FIG. 8.300 – **Polygones réguliers vus comme des graphes**

En cours de traduction de l'anglais

Si chaque point d'intersection est un sommet, ces figures deviennent automatiquement des graphes planaires connexes ! Connaissant le nombre de points d'intersection et le nombre de segments, nous pouvons utiliser la formule d'Euler pour calculer le nombre de régions (par exemple, tracer les deux diagonales d'un carré donne 5 intersections, 4 régions et 8 segments. Les 5 diagonales d'un pentagone régulier donnent 10 intersections, 11 régions et 20 segments).

✍**Exemple :**

Considérons le cas K_5 :



Nous prenons la formule d'Euler :

$$F - A + S = 2 \tag{8.8.8}$$

K_5 a 5 sommets et 10 arêtes, donc nous obtenons :

$$5 - 10 + S = 2 \tag{8.8.9}$$

Ce qui signifie que si le graphe est dessiné sans qu'aucune arête ne se croise, il y aurait $S = 7$ faces. Or, il est impossible de trouver un moyen de faire cela avec K_5.

D7. Soit $e = x, y$ une arête de G, nous disons que les sommets x, y qui sont les "extrémités" de l'arête de G, sont "adjacents" ou "voisins" dans le graphe G, et que l'arête e est "incidente" aux sommets x, y.

D8. Si deux arêtes e et e' ont une extrémité en commun, nous dirons qu'elles sont des "arêtes incidentes", autrement, qu'elles sont des "arêtes indépendantes".

Remarque

Si e est une arête de G, nous noterons $G - e$ le sous-graphe (voir définition ci-dessous) de $G' = (X, E - \{e\})$. Si X' est un sous-ensemble de X, nous noterons $G - X'$ le graphe G privé des sommets de X'.

D9. Ce que nous nommons "ordre du graphe $\mathcal{O}$" est le nombre de ses sommets (noeuds).

D10. Ce que nous appelons "taille d'un graphe" est le nombre de ses arêtes.

Soit G un graphe complet (et non un multigraphe !) d'ordre n, l'ensemble E doit être par définition choisi comme sous-ensemble de l'ensemble des paires d'éléments de l'ensemble X, donc d'un ensemble de cardinal : Soit G un graphe complet (et non un multigraphe !) d'ordre n, l'ensemble E des arêtes doit être par définition choisi comme un sous-ensemble de toutes les paires d'éléments de l'ensemble X, donc c'est un ensemble de cardinal :

$$\boxed{\text{Card}(E) = C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}} \tag{8.8.10}$$

C'est un résultat relativement trivial puisque chaque sommet est lié à tous les autres sommets sauf lui-même (d'où le numérateur) et nous divisons par deux simplement pour ne

pas compter deux fois les sommets voisins (et ils sont tous voisins quand nous les parcourons tous dans un graphe complet !).

Plus explicitement (si nécessaire), $n(n-1)/2$ provient d'un simple argument de comptage. Nommez les sommets $1,2,\ldots,n$. Le premier sommet est maintenant joint à $n-1$ autres sommets. Le deuxième sommet a déjà été joint au sommet 1 et doit donc être joint aux $n-2$ sommets restants. En général, le $k$ième sommet a déjà été joint aux $k-1$ sommets précédents et doit donc être joint aux $n-k$ sommets restants. Le nombre total d'arêtes est donc donné par :

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2} \tag{8.8.11}$$

Ce résultat est illustré par quelques exemples ci-dessous.

Par conséquent, il y a (voir section Probabilités sur les arrangements de n éléments indiscernables par paires à la page 516) :

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{8.8.12}$$

choix possibles pour E et autant de graphes admettant X comme ensemble de sommets.

En cours de traduction de l'anglais

✍**Exemple :**

Prenons comme exemple un graphe triangulaire - à trois points - où nous avons $n(n-1)/2=3$ et donc $2^{\frac{n(n-1)}{2}}=8$:

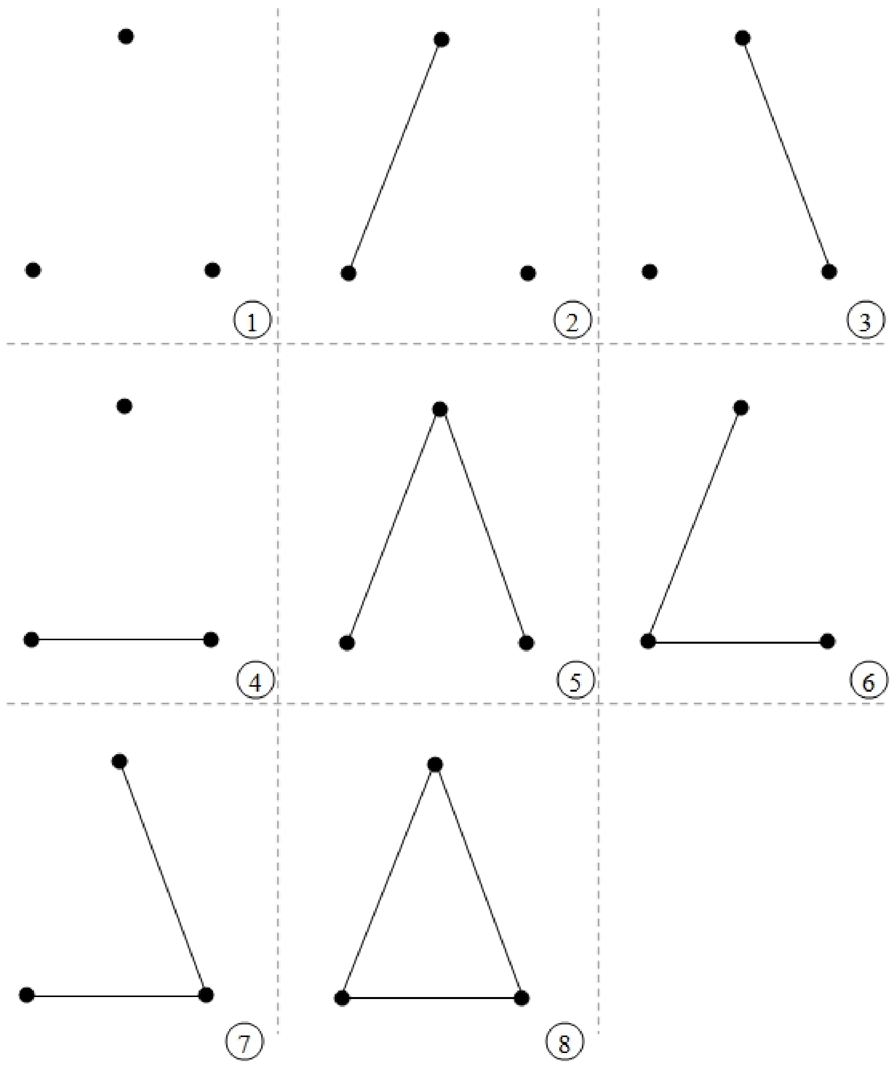


FIG. 8.301 – Exemple de sous-ensembles de graphes

Certains de ces graphes sont, car nous considérons leurs sommets comme indiscernables, "automorphes" (voir la définition de ce terme un peu plus loin dans cette section).

Ce résultat signifie qu'il existe environ 2 millions de graphes possibles avec 7 sommets et près de $4 \cdot 10^{105}$ de graphes possibles avec 27 sommets - un nombre à comparer avec le fait que nous estimons à 10^{100} le nombre d'atomes dans l'univers observable...

D11. Le "voisinage" d'un sommet est l'ensemble V de tous ses voisins.

D12. Nous appelons "degré" d'un sommet et nous notons D le nombre de ses voisins (le cardinal de V), qui est aussi le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes (les sommets de degré zéro étant appelés "sommets isolés" et les sommets de degré 1 étant appelés "sommets suspendus").

Propriétés (sans démonstrations) :

P1. La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\text{Card}(E) \quad (8.8.13)$$

P2. Dans un graphe tel que $\mathcal{O} > 3$, le nombre de sommets de degrés impairs est toujours pair (lemme de la poignée de main).

En effet, si la somme de tous les degrés est égale à deux fois le nombre d'arêtes, la somme des degrés étant paire et celle des sommets de degré pair étant paire, la somme des degrés des sommets de degré impair doit être paire. Si la somme des degrés des sommets de degré impair est paire, le nombre de ces sommets doit être pair.

Remarque

Un "graphe régulier" est un graphe dont tous les sommets ont le même degré k. Nous disons alors que le graphe est un "graphe k-régulier".

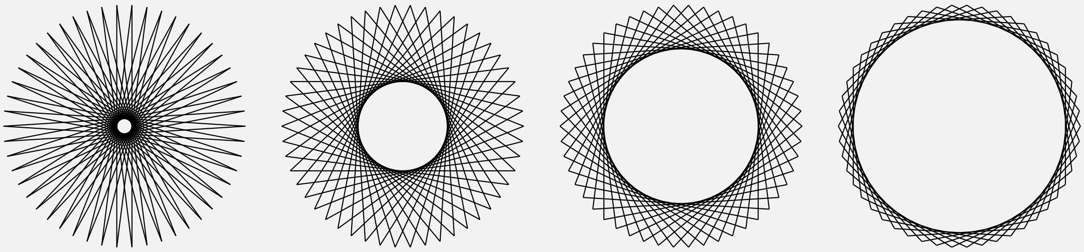


FIG. 8.302 – Quelques graphes 2-réguliers possibles

D13. Nous disons qu'un graphe $G' = (X', E')$ est un "sous-graphe" d'un graphe $G = (X, E)$ lorsque $X' \subseteq X$ et $E' \subseteq E$. Nous disons que $G' = (X', E')$ est un "sous-graphe induit" d'un graphe $G = (X, E)$ à condition que $X' \subseteq X$ et E' contienne toutes les arêtes de E qui sont des sous-ensembles de X'.

Si G' est un sous-graphe de G et que u et w sont des sommets de G', alors, par définition d'un sous-graphe, u et w sont également des sommets de G. Cependant, si u et w sont adjacents dans G (c'est-à-dire qu'une arête de G les relie), la définition d'un sous-graphe n'exige pas que l'arête qui les relie dans G soit également une arête de G'. Si le sous-graphe g' a la propriété que lorsque deux de ses sommets sont reliés par une arête de G, cette arête est également dans G', alors nous dit que G' est un "sous-graphe induit".

Notez que tout sous-graphe induit est aussi un sous-graphe ordinaire, mais l'inverse n'est pas vrai. Imaginez un sous-graphe comme le résultat de la suppression de certains sommets et arêtes du graphe principal. Pour que le sous-graphe soit un sous-graphe induit, nous pouvons toujours supprimer des sommets, mais nous ne supprimons alors que les arêtes qui incluent les sommets supprimés.

✍**Exemple :**

Considérons les graphiques :

En cours de traduction

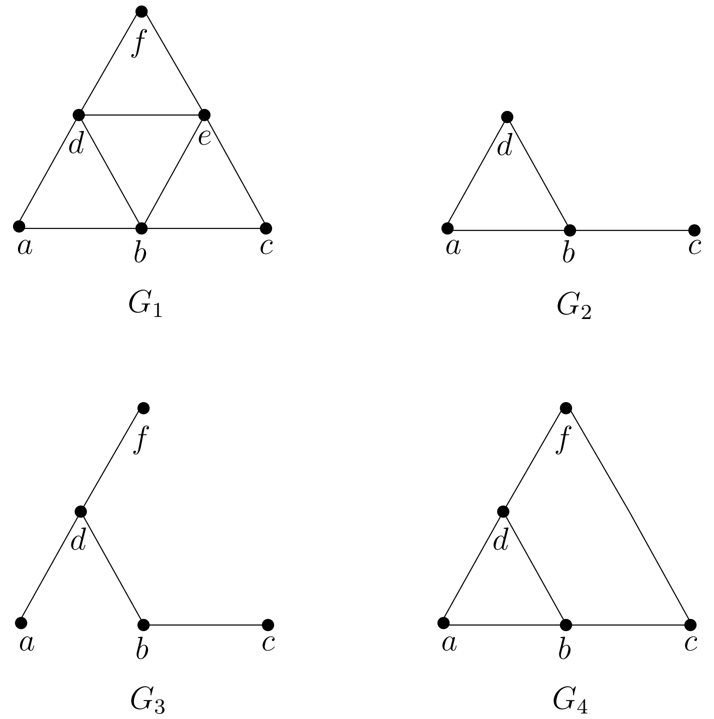


FIG. 8.303 – **Exemples de sous-graphes et de graphes induits**

Ici, $G_2(X_2, E_2)$ et $G_3(X_2, E_3)$ sont tous deux des sous-graphes de $G_1(X_1, E_1)$. Mais seul G_2 est un sous-graphe induit. Toute arête de G_1 reliant des sommets de G_2 est également une arête de G_2. Dans G_3, l'arête $\{a, b\}$ est dans E_1 mais pas dans E_3, même si les sommets a et b sont dans X_3.

Le graphe $G_4(X_4, E_4)$ n'est pas un sous-graphe de G_1, même s'il semble que nous n'ayons fait que supprimer le sommet e. En effet, dans E_4, nous avons l'arête $\{c, f\}$, mais celle-ci n'est pas un élément de E_1 ; nous n'avons donc pas le $E_4 \subseteq E_1$ requis.

D14. Un "sous-graphe couvrant" d'un graphe $G = (X, E)$ est un sous-graphe $G' = (X, E')$, c'est-à-dire un sous-graphe dont les sommets sont tous des sommets de G et dont les arêtes sont dans E'.

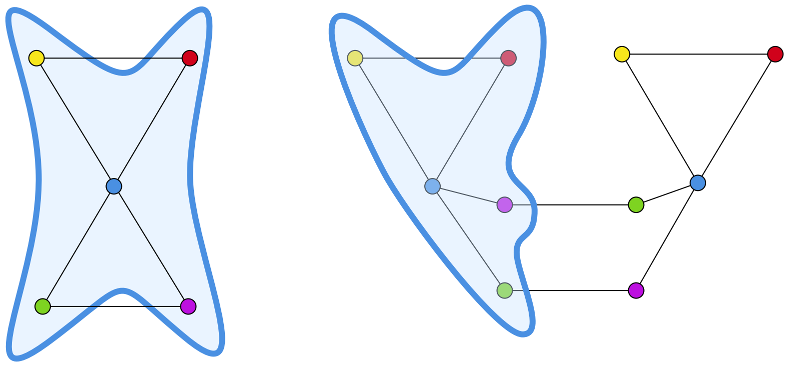


FIG. 8.304 – **Dans la figure ci-dessus, le graphique de droite est un graphique de couverture du graphique de gauche**

D15. Pour un graphe d'ordre n, il existe deux cas extrêmes pour toutes ses arêtes : soit le graphe est dépourvu d'arêtes, soit toutes les arêtes possibles reliant les sommets deux à deux sont présentes. Dans ce dernier cas, le graphe est dit "graphe complet" ou "graphe fortement connexe".

✍**Exemple :**

Voici quelques graphes complets pour lesquels nous avons bien :

$$\frac{n(n-1)}{2} \tag{8.8.14}$$

arêtes. Nous remarquons que les quatre premiers graphes sont planaires (effectivement remarquez comment il est possible, par projection d'un sommet dans le plan, de transformer le quatrième K_4 en K_4' de manière à ce qu'il n'y ait plus d'intersections). Le cinquième graphe K_5 est non-planaire (nous ne pouvons trouver des déplacements évitant les croisements).

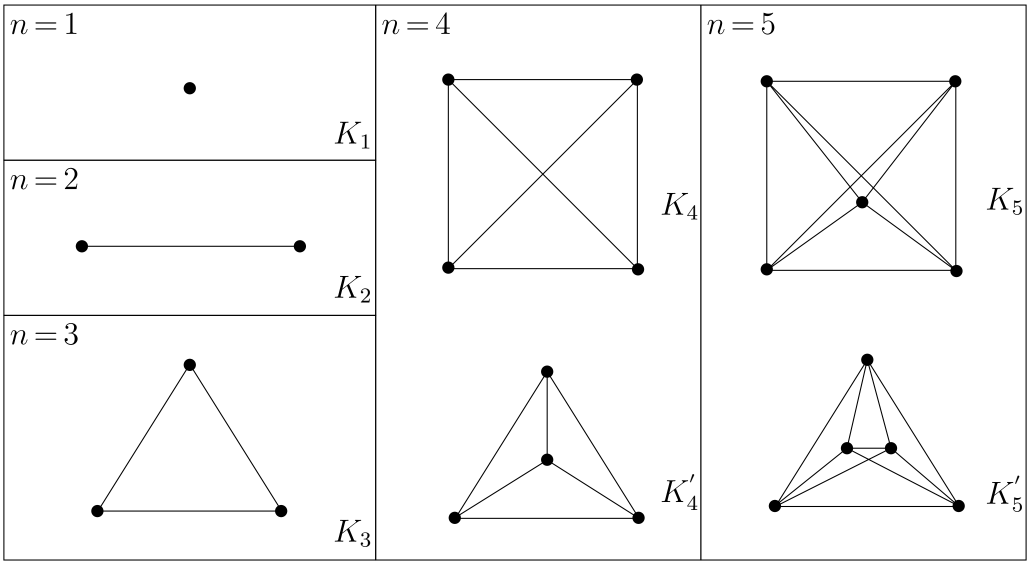


FIG. 8.305 – **Exemples de graphes complets**

Un graphe complet est donc un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$.

Ainsi, un cas sympathique à traiter est "l'étoile de David" :

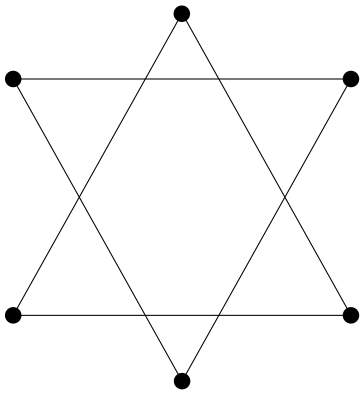


FIG. 8.306 – Étoile de David

qui n'est évidemment un graphe complet par définition que si l'on joint tous les sommets entre eux (ainsi nous perdons la géométrie de l'étoile mais obtenons un graphe K_6) :

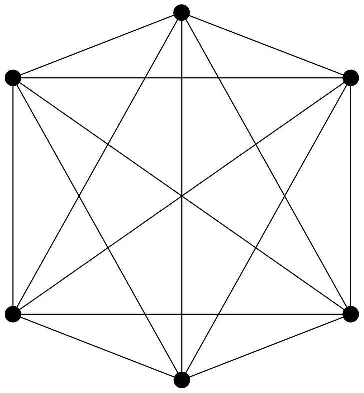


FIG. 8.307 – Étoile de David sous forme de graphe complet

En cours

Remarque

Ce résultat est intéressant dans le domaine de la gestion de la communication des projets d'entreprise et de la sécurité informatique (voir section de Cryptographie à là page **??**). Si par exemple vous gérez un projet avec 10 intervenants (correspondant à n), il y a donc $n(n-1)/2$ canaux de communication (e-mail ou téléphone) possibles, soit 45 (et dans le domaine de la sécurité il y aurait 45 clés de cryptage à système symétrique à générer). D'où l'importance en gestion de projet de définir des règles de communication claires (sous forme d'un graphe) si l'on ne veut pas être noyé par les courriels ou les téléphones inutilement (et dans le domaine de la sécurité à mettre en place des systèmes asymétriques). Nous retrouverons aussi ce résultat dans le modèle de la goutte liquide du noyau nucléaire dans la section de Physique Nucléaire (voir page **??**).

D16. Un "graphe stable" ou un "ensemble indépendant" est un sous-graphe sans arêtes et une "clique" un sous-graphe complet.

En d'autres termes, un ensemble de sommets indépendant d'un graphe G est un sous-ensemble des sommets tel qu'aucun des deux sommets du sous-ensemble ne représente

une arête de G.

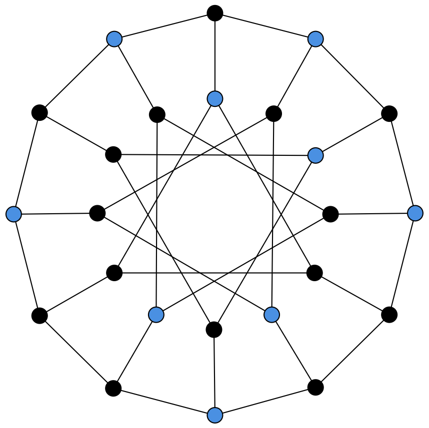


FIG. 8.308 – Exemple de sous-graphe stable (en bleu)

> **Remarque**
>
> Un ensemble "maximum indépendant" est un ensemble indépendant de plus grande taille possible pour un graphe G donné. Trouver un tel ensemble est un problème d'optimisation NP-difficile (voir section Méthodes Numériques page ??). Il est donc peu probable qu'il existe un algorithme efficace pour trouver un ensemble maximal indépendant d'un graphe.

D17. Dans un graphe, il est naturel de vouloir se déplacer de sommet en sommet en suivant les arêtes. Un tel parcours à travers n sommets est appelé une "chaîne P_n" ou "chemin" :

Un chemin est une liste $P_k = (x_1, \ldots, x_k)$ de sommets telle qu'il existe une arête dans le graphe entre chaque paire de sommets successifs : $\forall i = 1 \ldots k-1\ (x_i, x_{i+1}) \in E$. La longueur du chemin correspond au nombre d'arêtes traversées : $k-1$.

Un chemin est nommé "chemin simple" si chaque arête du chemin n'est empruntée qu'une seule fois. Voici, par exemple, un chemin simple à 5 sommets :

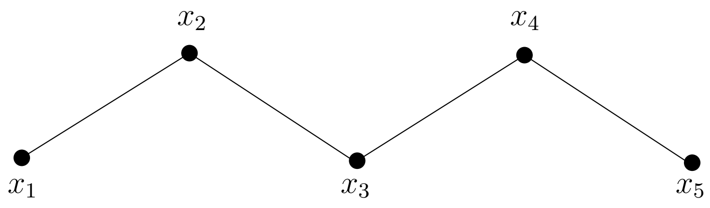


FIG. 8.309 – Exemple de chemin simple

Ainsi, nous définissons également un "cycle" comme :

$$C_n = C_{k+1} = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \tag{8.8.15}$$

comme étant un simple chemin se terminant au point de départ comme $x_1 = x_{k+1}$.

D18. Un "cycle simple" est un cycle dans lequel toutes les arêtes sont différentes.

D19. Un "graphe orienté" est un graphe dont les arêtes ont une direction et sont donc nommées "arcs" (donc à l'opposé d'un graphe non orienté).

En cours de traduction ... lais

Remarques

R1. Les termes de "chemin" et de "circuit" s'emploient en propre pour les graphes orientés. Pour les graphes non orientés que nous manipulons principalement ici, nous parlons de "chaîne" et de "cycle". Cependant, la définition formelle est exactement la même dans les deux cas, seule change la structure (graphe orienté ou non) sur laquelle ils sont définis.

R2. Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique. Effectivement, si un arc relie le sommet a au sommet b et un autre arc relie le sommet b au sommet a, nous ne traçons alors qu'un trait entre a et b que nous appelons... une "arête".

D20. Un chemin $P_k=(x_1,...,x_k)$ est dit "chemin élémentaire" si chacun des sommets du parcours est visité une seule fois : $\forall i,j=1...k \quad i\neq j, x_i\neq x_j$. Un chemin élémentaire est donc un chemin simple et sans cycle.

Dans un graphe G d'ordre n nous avons les propriétés suivantes :

P1. Tout chemin élémentaire est de longueur au plus $n-1$. Effectivement, un chemin élémentaire visitant au plus 1 fois chaque sommet du graphe, sa longueur (nombre d'arêtes) ne peut effectivement excéder $n-1$.

P2. Le nombre de chemins élémentaires dans le graphe est fini. Effectivement, le nombre de chemins de longueur $k(k=0,1,...,n-1)$ est au plus la combinatoire du choix d'une suite de $k+1$ sommets distinguables parmi n. Il y a donc (voir section Probabilités page 520) :

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!} \tag{8.8.16}$$

chemins possibles.
Les chemins élémentaires sont la restriction naturelle que nous recherchons à la notion de chemin. La question qui se pose est de savoir si nous perdons quelque chose en ne considérant que les chemins élémentaires dans un graphe : peut-on toujours remplacer un chemin du graphe par un chemin élémentaire ?

En cours de traduction de l'anglais

Lemme 8.29.1. Le "lemme de König" répond affirmativement à cette question : de tout chemin, nous pouvons extraire un sous-chemin élémentaire.

En d'autres termes : s'il existe un chemin entre deux sommets x et y, alors il existe un chemin élémentaire entre x et y.

Démonstration 8.29.2. L'idée de la preuve est de choisir un chemin particulier entre x et y et de montrer qu'il est élémentaire. Quel chemin choisir ? Si un chemin comporte un circuit, ce circuit est un détour sur la route menant de x et y. Un bon candidat à être un chemin élémentaire semble donc être un plus court chemin.

Parmi tous les chemins reliant x à y, choisissons ainsi un chemin :

$$P_k=(x_1=x,...,x_k=y) \tag{8.8.17}$$

comportant le moins d'arêtes. Supposons par l'absurde que P_k n'est pas élémentaire. Il existe alors dans ce chemin un sommet z apparaissant au moins deux fois le long du chemin P_k.

Soient i, j les deux premiers indices $x_i = z$ et $x_j = z$ tels que et :

$$P_k = (x_1 = x, \ldots, x_i = z, \ldots, x_j = z, \ldots, x_k = y) \tag{8.8.18}$$

Pour obtenir une contradiction, il suffit de supprimer le cycle entre $x_i = z$ et $x_j = z$. Alors, nous avons un nouveau chemin :

$$P'_k = (x_1 = x, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{j+1}, \ldots, x_k = y) \tag{8.8.19}$$

est un chemin, reliant x à y. Sa longueur est strictement inférieure à celle de P_k :

$$\text{Card}(P'_k) < \text{Card}(P'_k) \tag{8.8.20}$$

ce qui contredit notre choix initial comme étant un plus court chemin.

■ Q.E.D.

D21. Un graphe G est dit "graphe connexe" ou "graphe connecté" si et seulement si, il existe au moins un chemin entre chaque paire de sommets (le chemin n'étant donc implicitement pas nécessairement direct - pouvant passer par un ou plusieurs sommets intermédiaires).

Par conséquent, nous avons qu'une "composante connexe" $G' = (X', E')$ est un sous-graphe de G dans lequel deux sommets quelconques sont connectés l'un à l'autre par des chemins, et qui n'est connecté à aucun sommet supplémentaire dans le supergraphe.

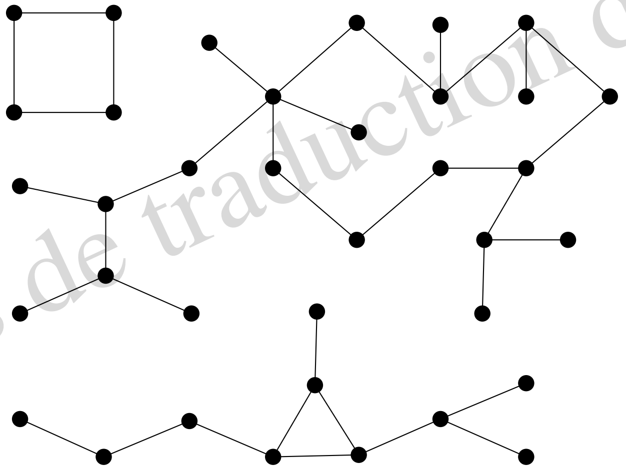


FIG. 8.310 – Divers graphs connexes

Remarques

R1. Un graphe avec une seule composante connexe est simplement un... graphe connexe.

R2. Un nœud isolé (de degré 0) constitue toujours à lui seul une composante connexe.

R3. La relation sur les noeuds "il existe un chemin entre..." est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive). Les composantes connexes d'un graphe correspondent aux classes d'équivalence de cette relation.

Nous supposerons intuitivement qu'un graphe G d'ordre n est toujours associé à au moins $n - 1$ arêtes.

En cours de traduction de l'anglais

D22. Un "arbre" ou "arbre couvrant" est un graphe connexe (non orienté), sans cycle simple (acyclique) et sans boucles. Dans un arbre le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets -1 :

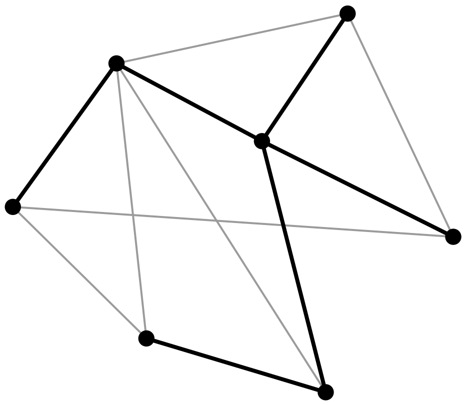


FIG. 8.311 – **Exemple d'arbre couvrant**

Une arbre couvrant avec les poids minimaux d'un graphe value est appelé "arbre couvrant minimal" :

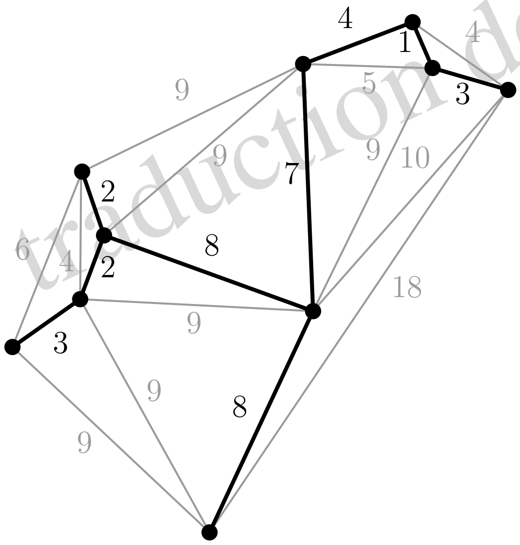


FIG. 8.312 – **Exemple d'un arbre couvrant minimum (source : Wikipédia)**

En cours de traduction de l'anglais

Si vous imaginez que chaque point est une ville, est qu'une Nation n'a pas assez d'argent pour la maintenant de toutes les routes actuellement existante entre plusieurs villes, alors l'arbre couvrant minimal représente les routes à préserver qui minimisent les coûts tout en connectant toutes les villes entre elles.

D23. Un "arbre valué" ou "graphe valué" est un arbre (respectivement un graphe) où les arêtes ont des valeurs (pondérations) positives. La somme de toutes les valeurs qui sont sur les arêtes parcourues d'un arbre est appelé alors le "coût d'un arbre valué" (respectivement "coût d'un graphe valué").

Remarque

Les arbres valués sont utilisés dans de très nombreux domaines. Citons les réseaux informatiques dans lesquels nous cherchons à optimiser le nombre d'interconnexions entre machines pour éviter les redondances d'envois de paquets de données ou la gestion de projets (voir l'exemple ci-dessous).

✍**Exemple :**

Un excellent exemple pratique de graphe connexe valué et orienté (abrégé sous le terme de "digraphe") est celui utilisé en gestion de projets pour le calcul du chemin critique. Il s'agit d'un graphe qui représente les dépendances entre n tâches intermédiaires nécessaires pour réaliser un projet, communément appelé "diagramme de Gantt" ou en encore "graphe d'ordonnancement". La durée (poids) de chaque tâche est la valeur des arcs incidents extérieurement au noeud correspondant. Les arcs représentent les contraintes d'enchaînement des tâches. Nous ajoutons toujours un noeud (dans le monde de la gestion de projets on parle plutôt de jalon...) initial et un noeud final. Le premier est relié par un arc de valeur nulle à tous les noeuds sans prédécesseurs, et tous les noeuds sans successeurs sont reliés au noeud final. Le graphe obtenu doit évidemment être acyclique.

Un "chemin critique" est un chemin de longueur maximale entre les deux jalons. Il peut éventuellement y en avoir plusieurs, de même longueur. Toute tâche située sur un chemin critique ne peut être retardée sans répercussion sur la durée totale du projet. En d'autres termes, sa "marge totale" est nulle (nous disons alors aussi que sa date de fin/début au plus tôt est strictement égale à sa date de fin/début au plus tard). Par ailleurs, nous définissons aussi en gestion de projets, la "marge libre" qui indique la durée sur laquelle une tâche peut glisser sans bouger la tâche successeur. La marge libre se calcule comme la différence entre la date de début au plus tôt d'une tâche sommée de sa durée et la date de début au plus tard de la tâche successeur.

Prenons pour l'exemple un projet qui se compose des tâches suivantes :

En anglais

Tâches	Tâches précédentes	Durée
A	E	3
B	K,C	4
C	-	3
E	E,J	2
E	-	2
F	G,L	3
G	-	4
H	A, M, R	2
J	E	2
K	C	2
L	G	5
M	C	4
N	G	3
R	J	2

TAB. 8.6 – Données pour l'exemple de chemin critique

Le graphe orienté valué connexe correspondant à ce tableau une fois la définition du chemin critique appliqué est le suivant en utilisant les dates de début (cette méthode de calcul est appelée "Méthode des Potentials Metra") :

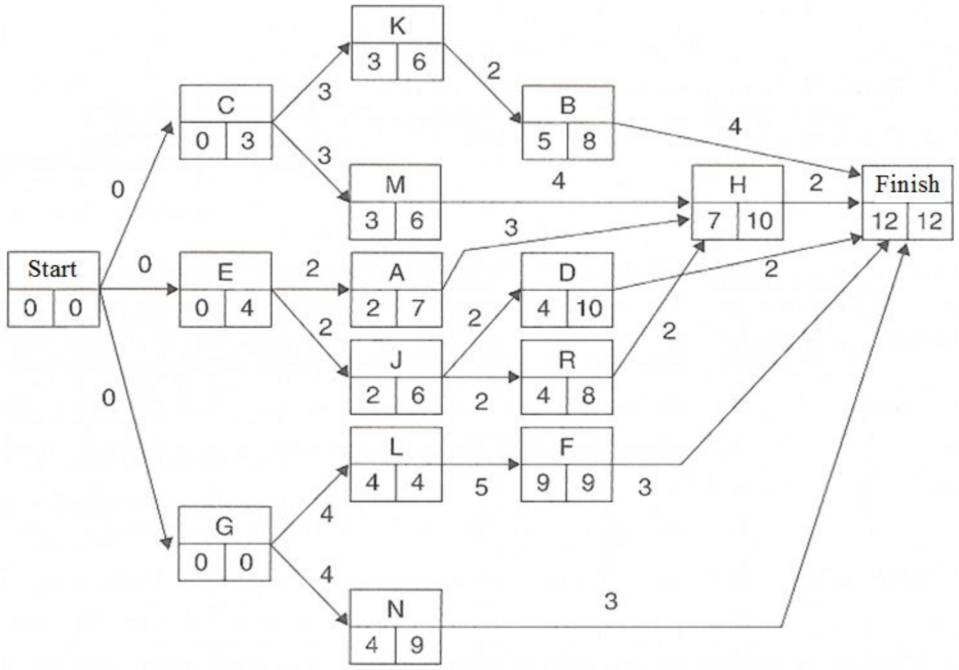
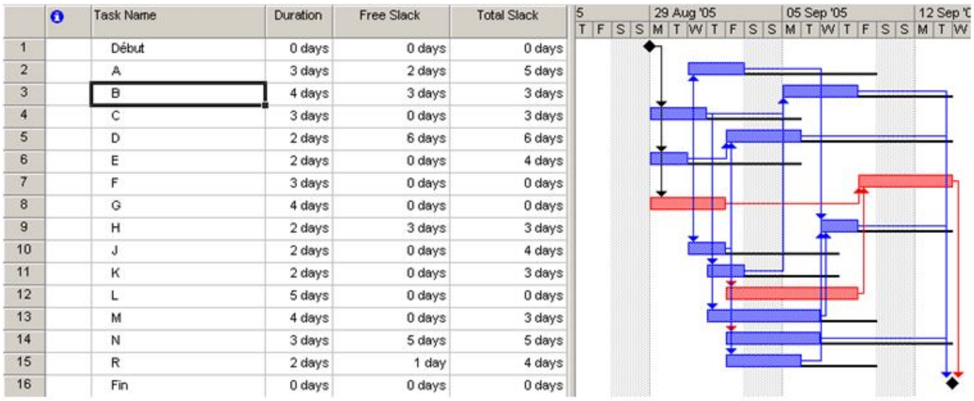


FIG. 8.313 – Diagramme PERT (Program Evaluation Review Technique)

Nous voyons dans ce graphe que les tâches {Start, G, L, Finish} sont critiques.

Un excellent outil d'utilisation de tels graphes est Microsoft Project dont le diagramme correspondant à l'exemple ci-dessus est :



		Task Name	Duration	Free Slack	Total Slack
1		Début	0 days	0 days	0 days
2		A	3 days	2 days	5 days
3		B	4 days	3 days	3 days
4		C	3 days	0 days	3 days
5		D	2 days	6 days	6 days
6		E	2 days	0 days	4 days
7		F	3 days	0 days	0 days
8		G	4 days	0 days	0 days
9		H	2 days	3 days	3 days
10		J	2 days	0 days	4 days
11		K	2 days	0 days	3 days
12		L	5 days	0 days	0 days
13		M	4 days	0 days	3 days
14		N	3 days	5 days	5 days
15		R	2 days	1 day	4 days
16		Fin	0 days	0 days	0 days

FIG. 8.314 – Même graphe mais vu dans Microsoft Project 97

D24. Un "cycle" est un chemin simple rebouclant sur lui-même. Un graphe dans lequel il n'existe aucun cycle possible est dit "acyclique".

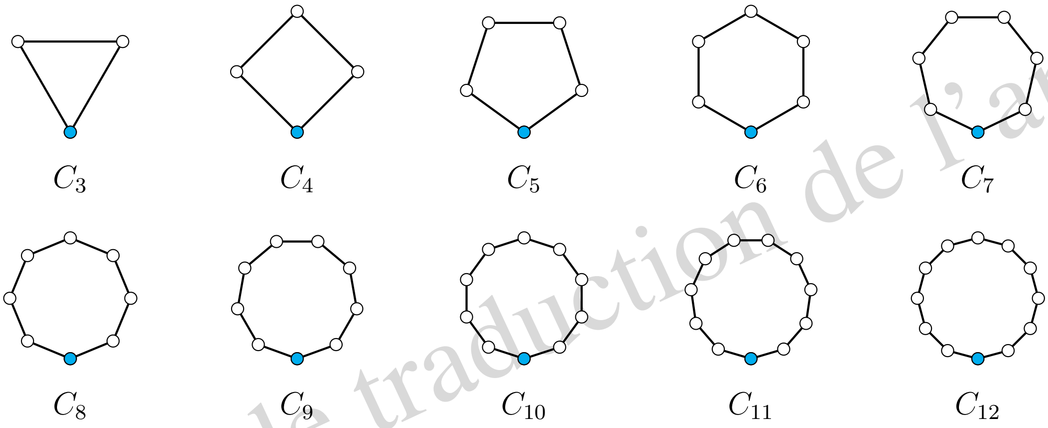


FIG. 8.315 – Exemples de graphes cycliques

En cours de traduction de l'anglais

Les graphes acycliques non-connexes composés d'arbres constituent une classe intéressante de graphes, avec des propriétés remarquables et un nom : les "forêts" (terme très souvent utilisé par les informaticiens réseaux).

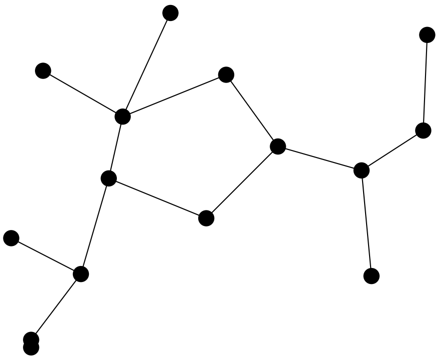


FIG. 8.316 – Exemple d'un graphe connexe contenant un cycle

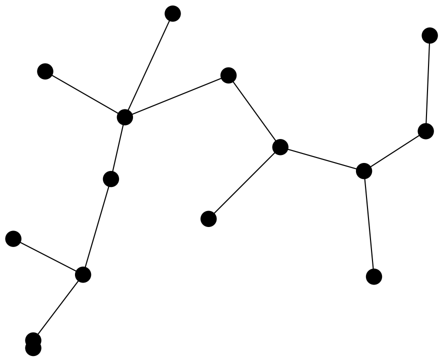


FIG. 8.317 – Exemple d'un graphe connexe ne contenant pas de cycle

Ci-dessous un exemple de forêt (composée d'arbres, chaque arbre étant connexe mais l'ensemble formant un graphe acyclique et non-connexe) :

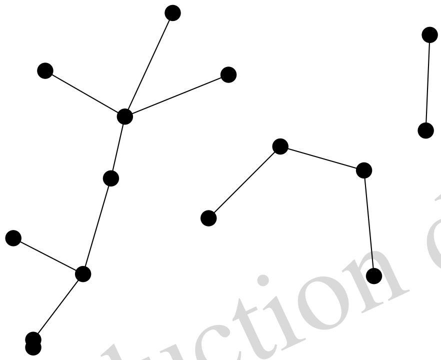


FIG. 8.318 – Exemple d'une forêt (3 composantes connexes)

En cours de traduction de l'anglais

Nous voyons ainsi qu'une forêt est un graphe dont les composantes sont des arbres. Les sommets de degré 1 sont appelés "feuilles" d'un arbre.

Propriétés :

P1. (triviale) Si dans un graphe G tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Remarque

Cette propriété simple implique qu'un graphe sans cycle possède au moins un sommet de degré 0 ou 1. À l'inverse, nous pouvons lier cette fois l'absence de cycle dans un graphe avec le nombre d'arêtes.

P2. (triviale) Un graphe acyclique G à n sommets possède au plus $n-1$ arêtes.

D25. Un "cycle eulérien" est un cycle passant une et une seule fois par chaque arête du graphe et revenant au point de départ (nous verrons plus loin les propriétés que doit posséder un tel graphe pour qu'un tel cycle y existe) et un graphe ayant un cycle eulérien est appelé "graphe eulérien".

D26. Un "cycle hamiltonien" est un cycle simple parcourant tous les sommets du graphe une seule fois. Un graphe ayant un cycle eulérien est appelé "graphe hamiltonien". Pour un cycle hamiltonien, le graphe doit être connexe et ne doit pas comporter de noeud unique.

Pour mieux comprendre la différence entre les deux définitions précédentes, le lecteur peut voir dans la figure ci-dessous quelques graphiques qui sont eulériens et hamiltoniens, eulériens mais pas hamiltoniens et ainsi de suite... (les quatre possibilités) :

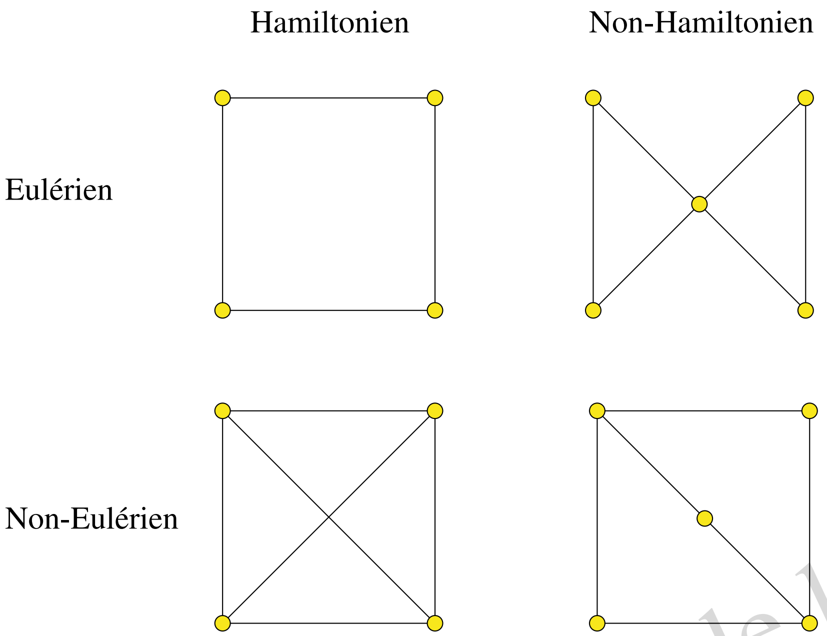


FIG. 8.319 – **Exemple de graphes hamiltoniens ou non hamiltoniens**

Il convient d'ouvrir maintenant une parenthèse (pour les paillettes...) sur le problème le plus connu en théorie des graphes : les ponts de Königsberg.

Leonhard Euler, aimait à faire une promenade dans sa bonne ville de Königsberg. Il affectionnait selon la légende tout particulièrement de parcourir les 7 ponts qui enjambent la rivière. L'âge venant (les connaissances mathématiques aussi...), il se demanda si sans sacrifier à sa promenade, il pouvait en raccourcir la longueur en ne traversant chaque pont qu'une seule fois. Ce problème est sans doute l'un des plus anciens en théorie des graphes : celui de l'existence d'une chaîne passant une et une seule fois par chaque arête.

En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.320 – **Carte antique de la ville de Königsberg**

La rivière sépare la ville de Königsberg en quatre parties, a, b, c, d. Chaque pont relie deux de ces parties. Nous pouvons alors représenter notre problème par un graphe avec quatre sommets, où chaque arête représente l'un des sept ponts de Königsberg. Sur cet exemple le graphe n'est pas un graphe simple :

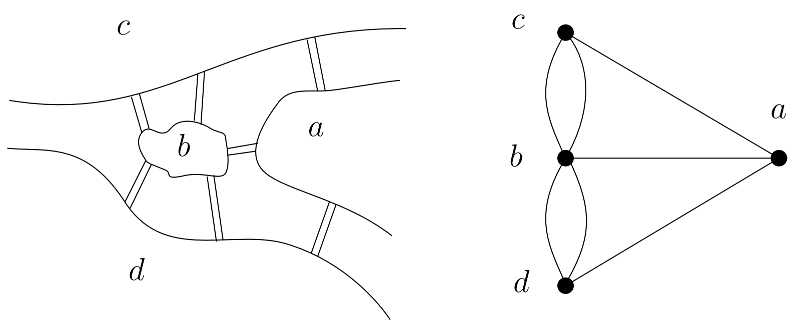


FIG. 8.321 – **Représentation des sept ponts de Königsberg**

La question est donc ici de savoir si le graphe est eulérien ou non ? Si pour notre problème le graphe obtenu est eulérien, il faut pouvoir exhiber un cycle eulérien, ce qui ne semble pas facile. Mais s'il ne l'est pas ? Euler a donné une caractérisation très forte des graphes eulériens donnée par l'énoncé suivant :

Théorème 8.30 (Théorème d'Euler)**.** Un graphe est eulérien si et seulement s'il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair (il y a donc un nombre pair d'arêtes qui arrivent sur chaque sommet dont la moitié d'entre elles servant à arriver sur le sommet, l'autre à en repartir) sauf au plus deux (ces deux exceptions étant les sommets de départ et d'arrivée).

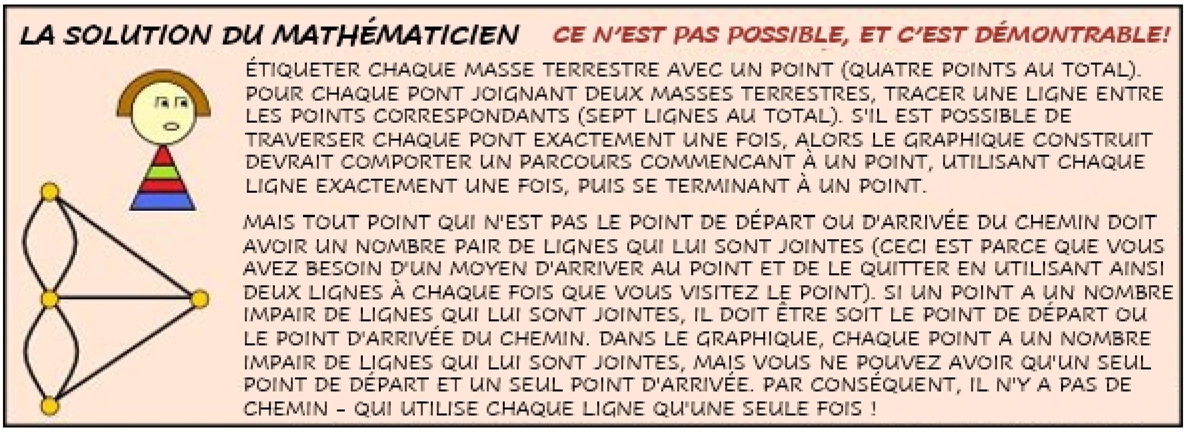
De façon plus précise pour un graphe connexe :

- Le graphe n'a pas de sommets impairs, alors il est eulérien (et la chaîne est donc cyclique).
- Le graphe peut avoir qu'un seul sommet impair de par la propriété (déjà énoncée plus haut) que dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.
- Si le graphe a deux sommets impairs, ces sommets sont alors les extrémités de la chaîne eulérienne.

Comme corollaire nous avons qu'un graphe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.

Avec cette caractérisation (comme nous allons le démontrer de suite après), les sommets a, b, c, d étant de degré impair, on sait immédiatement qu'il est impossible de parcourir tous les ponts de Königsberg seulement une fois au cours d'une promenade.

En cours de traduction de l'anglais



Démonstration 8.30.1. La démonstration se fera en trois étapes :

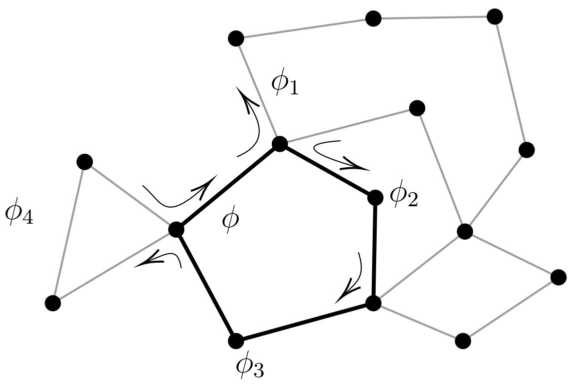
(a) Supposons qu'un graphe G soit eulérien. Il existe alors une chaîne c parcourant une et une seule fois chaque arête (jusque-là c'est facile). Bien évidemment, dans le cas d'une chaîne, les sommets se situant aux extrémités de la chaîne sont de degré impair et sont au nombre de deux.

(b) Considérons maintenant un sommet x et supposons cette fois-ci non pas un graphe eulérien mais un cycle eulérien. Lors du parcours du cycle, à chaque fois que nous passons par le sommet x, nous nous retrouvons au point de départ et pour effectuer un nouveau tour chacune des deux arêtes s'offre à nous (le chemin pouvant être parcouru dans les deux sens puisque le graphe est non orienté). Le sommet x est donc de degré pair et peut être défini n'importe où dans le cycle, d'où le fait que l'ensemble des sommets sont de degré pair.

(c) Réciproquement considérons un graphe G connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Nous allons montrer par induction sur le nombre d'arêtes que G est alors eulérien :

- Si G se réduit à un unique sommet isolé, il est évidemment eulérien. Sinon tous les sommets de G sont de degré supérieur ou égal à 2. Ceci implique qu'il existe un cycle ϕ sur G :
- Considérons le graphe partiel H constitué des arêtes en dehors du cycle ϕ. Les sommets de H sont également de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet. Par induction chaque composante connexe H_i de H est un graphe eulérien, et admet donc un cycle eulérien ϕ_i. Pour reconstruire un cycle eulérien sur G, il nous suffit de fusionner le cycle ϕ avec les différents cycles ϕ_i. Pour cela, nous parcourons le cycle ϕ depuis un sommet arbitraire ; lorsque nous rencontrons pour la première fois un sommet x appartenant à H_i, nous lui substituons le cycle ϕ_i. Le cycle obtenu est un cycle eulérien pour G, le cycle ϕ et les cycles ϕ_i formant une partition des arêtes.

En cours de traduction de l'anglais



■ Q.E.D.

Remarque

Ce principe de décomposer un graphe en graphes connexes et de les sommer permet de construire un algorithme récursif permettant de déterminer si un graphe est eulérien ou non.

D27. Deux graphes G et G' sont des "graphes complémentaires" lorsqu'ils vérifient les conditions suivantes :

(a) Ils ont le même ensemble de sommets.

(b) Deux sommets x, y sont voisins dans G ne sont pas voisins dans G'.

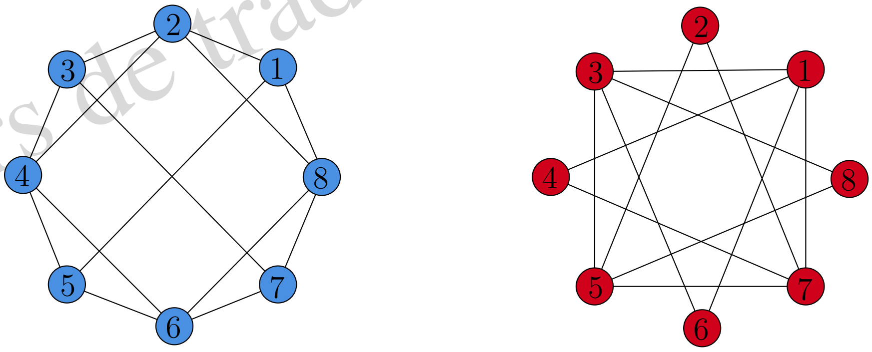


FIG. 8.322 – **Exemple de graphe complémentaire**

Un "graphe auto-complémentaire" est un graphe isomorphe à son complémentaire. Les graphes auto-complémentaires non triviaux les plus simples sont le graphe chemin à 4 sommets et le graphe cycle à 5 sommets.

En cours de traduction de l'anglais

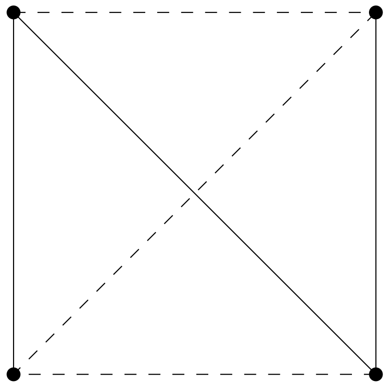


FIG. 8.323 – **Exemple de graphe auto-complémentaire**

D28. Un "graphe biparti" est un graphe $K_{p,q}$ tel que nous puissions partitionner l'ensemble de ses sommets en deux classes respectivement de cardinal p et q de sorte que toute arête ait une extrémité dans chacune des deux classes.

✍**Exemple :**

Voici donc une représentation d'un graphe biparti $K_{3,3}$ classique. Il représente le problème fameux de l'approvisionnement de trois maisons au départ de trois usines (eau, électricité, gaz) sans droit d'alignement des services. Nous voyons immédiatement que ce graphe est non-planaire.

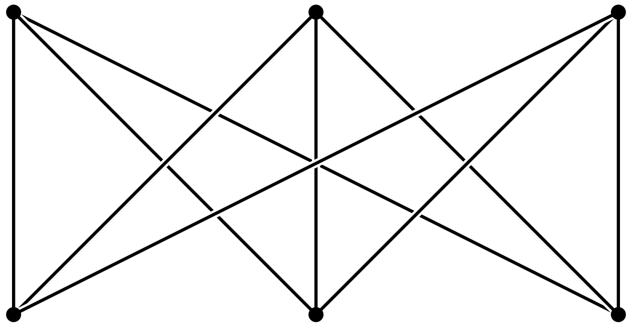


FIG. 8.324 – **Exemple de graphe biparti** $K_{3,3}$

Remarque

Le graphe biparti complet $K_{p,q}$ est un graphe de sommets $n=p+1$ et configuré de telle sorte que chaque sommet d'une classe soit adjacent à tous les sommets de l'autre et seulement à ceux-ci.

D29. Deux graphes sont des "graphes isomorphes" s'il existe une bijection f de X dans X' telle que, pour tous sommets x et y de G :

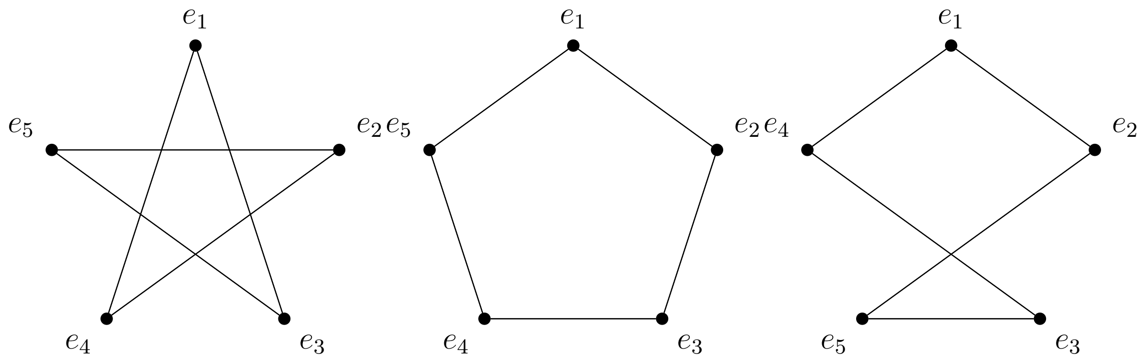
$$x \text{ adjacent à } y \text{ dans } G \leftrightarrow f(x) \text{ adjacent à } f(y) \text{ dans } G' \quad (8.8.21)$$

Nous disons aussi que f est un "isomorphisme de G sur G'".

Plus formellement, un isomorphisme des graphes G_1 et G_2 est une bijection $f: V(G_1) \leftrightarrow V(G_2)$ qui préserve l'adjacence. Autrement dit :

$$u \sim_{G_1} v \leftrightarrow f(u) \sim_{G_2} f(v) \quad (8.8.22)$$

Par exemple sur la figure ci-dessous nous avons trois graphes isomorphes :



	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1			1	1	
2				1	1
3	1				1
4	1	1			
5		1	1		

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		1			1
2	1		1		
3		1		1	
4			1		1
5	1			1	

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		1		1	
2	1				1
3				1	1
4	1		1		
5		1	1		

FIG. 8.325 – **Graphes isomorphes avec leur matrice d'adjacence**

En cours de traduction de l'anglais

Attention ! ! Parfois nous parlons de graphes équivalents à "un isomorphisme près". Cela signifie plus clairement, qu'à l'exception d'une et unique violation parmi l'ensemble des arêtes, les graphes sont isomorphes.

S'il existe une bijection f de X dans lui-même telle que :

$$x \text{ adjacent à } y \text{ dans } G \leftrightarrow f(x) \text{ adjacent à } f(y) \text{ dans } G \quad (8.8.23)$$

nous disons alors que f est un "automorphisme de graphe" dans G (par permutation des sommets il existe beaucoup d'exemples possibles...).

Comme l'isomorphisme dans le cas des graphes va d'un ensemble à un autre de même taille n (application n vers n), le nombre de bijections différentes possibles est (voir section Probabilités page 518) :

$$n! \quad (8.8.24)$$

Cela signifie qu'il existe au maximum $n!$ graphes qui peuvent se regrouper dans une même classe d'équivalence. En conséquence, il existe au minimum (minorant) le rapport du nombre total de n sommets sur le cardinal majoré de la plus grande classe d'équivalence possible (mais pas nécessairement existante) :

$$N = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \quad (8.8.25)$$

En utilisant la majoration brute $n! < n^n$, nous avons :

$$N > \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n^n} \tag{8.8.26}$$

Dès lors :

$$\log_2(N) > \frac{n(n-1)}{2} - n\log_2(n) \tag{8.8.27}$$

Soit :

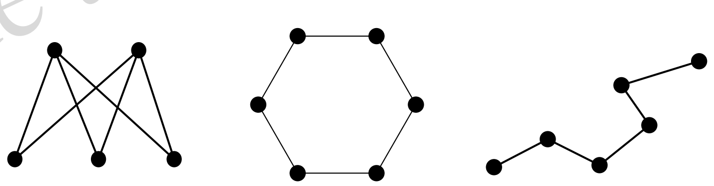
$$\log_2(N) > \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2\log_2(n)}{(n)}\right) \tag{8.8.28}$$

Ainsi, lorsque n tend vers l'infini, $\log_2(N)$ admet une borne inférieure d'ordre n^2.

Le lecteur doit également garder à l'esprit que certains graphes sont plus utilisés que d'autres et reçoivent des noms spéciaux :

- K_n : Le graphe complet sur n sommets
- $K_{m,n}$: Le graphe biparti complet avec des ensembles de m et n sommets
- C_n : Le cycle sur n sommets, juste une grande boucle
- P_n : Le chemin sur n sommets, un seul long chemin

En cours de traduction de l' anglais



K_5 $K_{2,3}$ C_6 P_6

8.8.2 Matrice d'adjacence de Graphes

Au plan formel, un graphe est aussi un ensemble sur lequel nous avons défini une relation binaire, antiréflexive (aucun élément n'est en relation avec lui-même) et symétrique (si x est en relation avec y, alors y est en relation avec x). La structure de graphe peut alors sembler particulièrement pauvre.

Mais nous pouvons aussi associer à un graphe G de sommets $x_1, \ldots, x_n$ une matrice carrée M de dimensions $m \times n$ appelée "matrice d'adjacence" du graphe et dont les éléments valent 0 ou 1. En notant le terme située au croisement de la ligne i (représentant le sommet x_i) et de la colonne j (représentant le sommet x_j), M est défini par :

$$m_{ij} = 1 \quad \text{si et seulement si } x_i, x_j \text{ sont adjacents} \tag{8.8.29}$$

Remarque

Nous savons aussi que les graphes sont représentés par des matrices dans le cadre de l'étude des chaînes de Markov dans le domaine des probabilités (voir section Probabilités page 530).

Prenons un exemple à la fois abstrait et facilement applicable à de nombreux domaines de l'industrie, de la sociologie et de la biologie (la matrice d'adjacence trouve également une application en fouille de texte, comme le montre le livre compagnon sur R). Considérons le graphe orienté suivant et observons qu'il n'est ni symétrique ni antiréflexif :

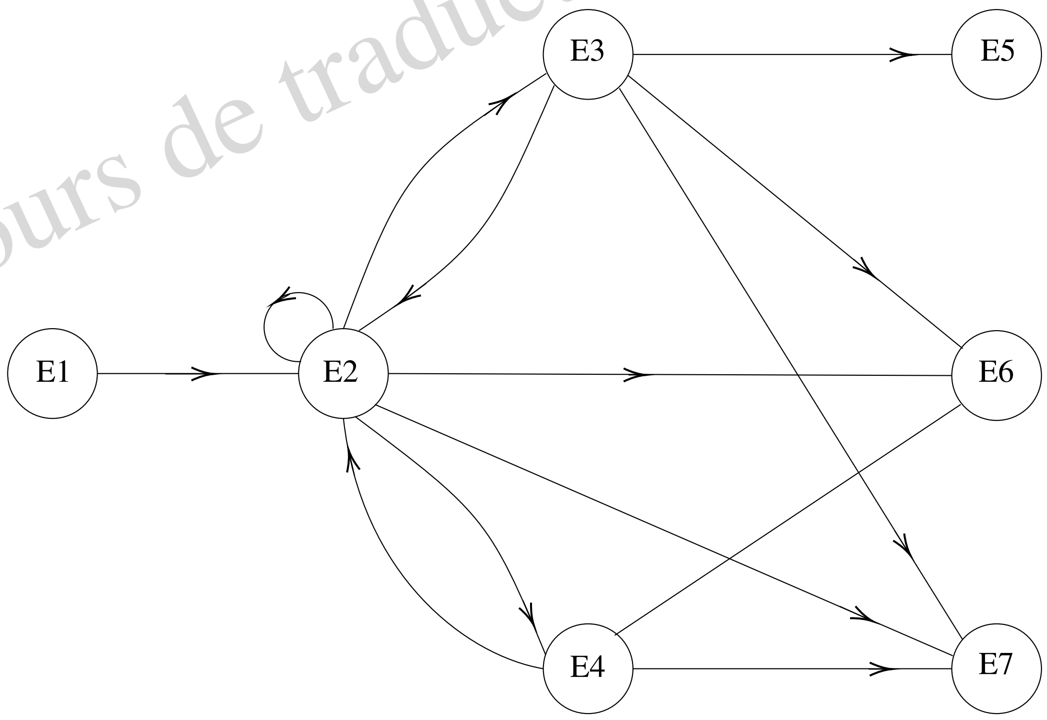


FIG. 8.326 – **Exemple de chaîne de Markov (graphe antiréflexif ni symétrique)**

Nous pouvons représenter ce diagramme (graphe orienté et connexe) sous forme d'un tableau dans lequel nous noterons "1" quand une transition est possible de l'état mentionné en haut de la colonne de la case vers l'état mentionné au début de la ligne et "0" sinon :

En cours de traduction de l'anglais

↗	E1	E4	E2	E3	E5	E7	E6
E1.	0	0	0	0	0	0	0
E4.	0	0	1	0	0	0	0
E2.	1	1	1	1	0	0	0
E3.	0	0	1	0	0	0	0
E5.	0	0	0	1	0	0	0
E7.	0	1	1	1	0	0	0
E6.	0	1	1	1	0	0	0

TAB. 8.7 – **Matrice d'adjacence du graphe connexe**

Il est indispensable de comprendre parfaitement la signification des valeurs se trouvant dans ce tableau ! Mais à ce niveau du livre cela ne devrait pas poser de difficulté majeure.

Maintenant évaluons le nombre de manières permettant d'aller :

1. De E2 vers E2 en deux étapes
2. De E3 vers E4 en deux étapes
3. De E2 vers E7 en deux étapes

Il est facile dans le cas particulier ci-dessus de dénombrer ces possibilités. Mais dans le cas d'un graphe plus complexe cela devient difficile, voire impossible pour un être humain dans un temps raisonnable (et même pour certains ordinateurs à notre époque).

En cours de traduction de l' anglais

Nous devons faire appel alors au théorème suivant :

Théorème 8.31. Soit un graphe orienté avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sommets et de matrice d'adjacence :

$$M = (m_{ij}) \tag{8.8.30}$$

Pour tout entier naturel k, alors le nombre de chemins de longueur k d'un sommet x_1 à un sommet x_j est donné par :

$$M^k = m_{ij}^{(k)} \tag{8.8.31}$$

où l'exposant de M dénote la puissance de k de la matrice d'adjacence.

Démonstration 8.31.1. Effectuons une récurrence sur k :

$$m_{ij}^{(1)} = m_{ij} \tag{8.8.32}$$

désigne bien le nombre de chemins allant de x_i à x_j (où i et j peuvent être égaux). Supposons le résultat vrai pour l'entier $k-1$, avec $k \geq 1$ comme :

$$M^k = M^{k-1}M \tag{8.8.33}$$

nous avons alors (par construction de la multiplication matricielle) :

$$m_{ij}^{(k)} = \sum_{I=1}^{n} m_{ij}^{(k-1)} m_{lj} \tag{8.8.34}$$

Par hypothèse de récurrence, $m_{il}^{(k1)}$ est le nombre de chemins de longueur $k-1$ allant de x_i à x_l et m_{lj} est nous le savons (par construction) le nombre de chemins de longueur 1 allant de x_l à x_j et en particulier il est égal à 1 si (x_i, x_j) est une arête du Graphe et 0 sinon !

Donc, le produit :

$$m_{il}^{(k-1)} m_{lj} \tag{8.8.35}$$

donne pour une valeur de l donnée le nombre de chemins de longueur k allant de x_i à x_j dont la dernière arête est (x_l, x_j).

La somme :

$$\sum_{l=1}^{n} m_{il}^{(k-1)} m_{lj} \tag{8.8.36}$$

donne donc toutes les possibilités (chemins) de longueur k allant de x_i à x_j quel que soit le point de début de la dernière arête !

■ Q.E.D.

Ainsi, dans notre exemple, la matrice d'adjacence M est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.8.37}$$

et n'est ni symétrique, ni antiréflexive comme nous en avions déjà fait mention.

Donc si nous la portons à la puissance k, chaque composante donnera toutes les possibilités (chemins) de longueur k allant de x_i à x_j. Ainsi, nous avons par exemple avec $k = 2$:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.8.38}$$

en utilisant par exemple la fonction `PRODUITMAT( )` disponible dans la majorité des tableurs.

Nous avons alors la réponse à nos trois questions en lisant la matrice ci-dessus :

1. De E2 vers E2 en deux étapes nous avons donc 3 possibilités

En cours de traduction de l' anglais

2. De E3 à E4 en deux étapes, il y a 1 possibilité
3. De E2 à E7 en deux étapes il y a 3 possibilités

Il est possible de gagner du temps dans ces calculs. Si nous notons C_i la i-ème colonne de la matrice M, alors :

$$MC_i = M_i^2 \tag{8.8.39}$$

Donc nous obtenons systématiquement le nombre de chemins de longueur k d'un point de départ donné correspondant à la colonne i.

Cet exemple a une autre approche très intéressante dans certains domaines étudiant le comportement d'individus dans diverses situations (achats, tourismes, accidents, etc.).

Si au lieu de noter dans la matrice M le nombre de chemins possibles d'un sommet à l'autre, nous notons la probabilité (la partie) du nombre total d'individus qui partent de ce même sommet pour en arriver à un autre alors nous avons par exemple (valeurs imposées par l'expérience !) la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.094 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.954 & 0.662 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.218 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.175 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.034 & 0.017 & 0.035 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0.009 & 0.04 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.8.40}$$

qui est déjà la matrice stochastique transposée du graphe visible ci-dessous (conformément à la théorie des chaînes de Markov, nous avons vu qu'il fallait prendre la transposée de la matrice stochastique pour calculer les probabilités d'états).

En considérant que ces probabilités ne changent pas au cours du temps, nous avons alors une chaîne de Markov homogène (sans cycles). Nous voyons alors que :

1. La somme des probabilités de transitions au départ de chaque sommet (état) doit toujours logiquement être égale à 1 (ce que nous avions déjà mentionné dans la section de Probabilités)
2. Tout le monde part de la première étape E1
3. Certains stagnent (s'arrêtent) à une certaine étape
4. Certains stagnent (s'arrêtent) à une certaine étape

Le graphe équivalent devient alors :

En cours de traduction de l'anglais

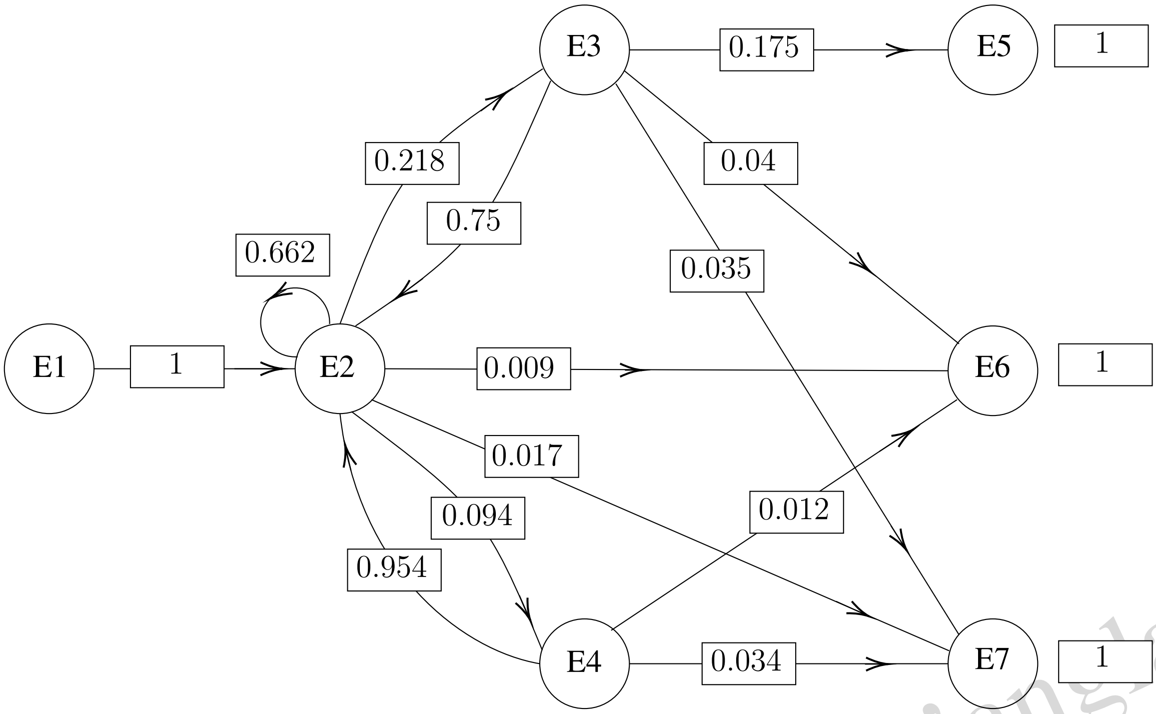


FIG. 8.327 – **Exemple de chaîne de Markov (graphe antiréflexif ni symétrique)**

En notant N (au lieu de M pour ne pas confondre) la matrice construite à partir du graphe ci-dessus nous voyons que si C_i est une des colonnes de la matrice M alors par exemple :

$$NC_1 = T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.094 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.954 & 0.662 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.218 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.175 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.034 & 0.017 & 0.035 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0.009 & 0.04 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.094 \\ 0.662 \\ 0.218 \\ 0 \\ 0.017 \\ 0.009 \end{bmatrix} \quad (8.8.41)$$

donne la somme des probabilités de transition que ce qui part de E1 arrive en 2 étapes en respectivement E1(0), E2(0.662), E3(0.218)... (la distribution du vecteur initial peut être quelconque tant que la somme des valeurs de la colonne est égale à 1) !

Si nous multiplions ensuite encore une fois :

$$NT_1 = T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.094 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.954 & 0.662 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.218 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.175 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.034 & 0.017 & 0.035 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0.009 & 0.04 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.094 \\ 0.662 \\ 0.218 \\ 0 \\ 0.017 \\ 0.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.062 \\ 0.691 \\ 0.144 \\ 0.038 \\ 0.039 \\ 0.025 \end{bmatrix} \quad (8.8.42)$$

donne la somme des probabilités de transition que ce qui part de E1 arrive en 3 étapes en respectivement E1(0), E2(0.691), ... et ainsi de suite. Nous pouvons ainsi savoir qu'elle est la probabilité qu'un individu arrivant à E2 puisse arriver à un des sommets terminaux (E5, E6 ou E7) en un nombre d'étapes donné.

En cours de traduction de l'anglais

Remarque

Se rappeler que la somme des probabilités des colonnes T obtenues est toujours égale à 1 pour la transposée de la matrice stochastique.

En continuant encore longtemps ainsi... nous trouvons que la mesure d'équilibre π qui satisfait (voir section Probabilités page 533) :

$$P^T\pi = \pi \tag{8.8.43}$$

et :

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.45 \\ 0.32 \\ 0.23 \end{bmatrix} \tag{8.8.44}$$

quelle que soit la distribution du vecteur de départ. Propriété que l'on appelle "ergodique" dans le domaine des chaînes de Markov.

Ce qui signifie 45% de probabilité de se trouver en E5, 32% de probabilité de se trouver en E7 et 23% de probabilité de se trouver en E6. Une autre manière de voir les choses est de dire que si une cohorte de 100 individus part de l'étape E1 avec les probabilités constantes dans le temps entre les transitions d'étapes, à l'équilibre nous aurons 45 personnes en E5, 32 personnes en E7 et 23 personnes en E6.

8.8.3 Catégories

L'introduction des catégories à travers la "théorie des catégories" par Eilenberg et MacLane en 11942 (calendrier holocène) avait pour but de transformer de difficiles problèmes de Topologie en problèmes plus abordables d'algèbre. Plus tard, la théorie des catégories s'est beaucoup développée, à la fois pour elle-même et pour ses applications dans les domaines les plus variés des mathématiques (par exemple en géométrie différentielle). Même si une partie de son développement autonome a parfois été critiquée, les catégories sont maintenant reconnues comme un langage puissant pour développer une sémantique universelle des structures mathématiques. On les utilise aussi en logique et plus récemment en physique, et une collaboration fructueuse semble se développer entre catégoriciens et informaticiens.

Définitions (#8.8.395) :

D1. Intuitivement une "catégorie" est juste un graphe orienté sur lequel nous nous sommes donné une loi pour composer des flèches consécutives, vérifiant certains axiomes.

D2. Un "graphe orienté" est formé d'un ensemble d'objets, appelés sommets du graphe, avec des liens entre eux, représentés par des flèches d'un sommet A vers un sommet B, ce que nous notons $f : A \mapsto B$. Nous disons que A est la "source" de la flèche, et B son "but".

En cours de traduction de l'anglais

Il peut y avoir plusieurs flèches de même source et de même but (nous les disons "parallèles") et il peut y avoir des flèches "fermées", dont la source et le but sont confondus.

D3. Deux flèches f, g sont dites "flèches consécutives" si le but de la première est en même temps la source de la seconde :

$$f: A \rightarrow B \qquad g: B \rightarrow C \tag{8.8.45}$$

nous disons alors qu'elles forment un chemin de longueur 2 de A vers C.

Une catégorie est donc un graphe dans lequel nous définissons une composition de flèches, associant à tout chemin (f, g) de longueur 2 de A vers C une flèche du graphe de A vers A, dite "composée" du chemin, et notée fg :

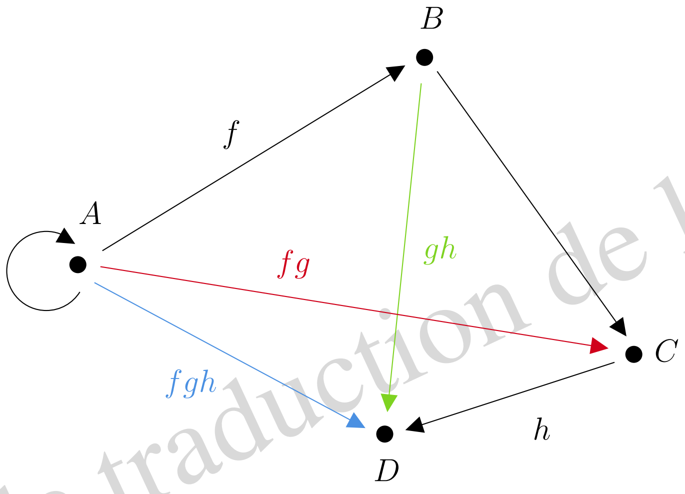


FIG. 8.328 – Exemple de graphe de catégorie

En cours de traduction de l'anglais

Cette composition vérifie les axiomes suivants :

A1. Associativité : Si fgh est un chemin de longueur 3, les deux composés $f(gh)$ et $(fg)h$ que nous en déduisons sont associatifs. Il s'ensuit qu'à tout chemin de longueur n est aussi associé un seul composé de sommets (invariance de l'itinéraire).

A2. Identités : À tout sommet A est associée une flèche fermée de A vers A, dite "identité" de A et notée Id_A, dont le composé avec une flèche de source ou de but A est égal à cette autre flèche.

Plus généralement, un chemin (de longueur n) de A vers A_n est une suite de n flèches consécutives :

$$f_1 : A \rightarrow A_1, f_2 : A_1 \rightarrow A_2, \ldots, f_n : A_{n-1} \rightarrow A_n \tag{8.8.46}$$

Remarques

R1. Les sommets du graphe sont aussi appelés "objets" de la catégorie et ses flèches des "morphismes" (ou simplement "liens") dans le cadre de la théorie des catégories.

R2. Une flèche f est un isomorphisme (voir section Théorie des Ensembles page 441) s'il existe une flèche g (appelée "inverse") telle que les composés fg et gf soient des identités (cet inverse est alors unique).

Ainsi, une catégorie est formée par des objets (les sommets du graphe) et des liens entre eux (les flèches ou morphismes), mais l'idée essentielle est de privilégier les liens sur les objets. En fait, le succès des catégories dans les domaines les plus variés est dû à la richesse des informations sur les objets qui peuvent être déduites de la seule considération des liens et des opérations sur ceux-ci, quelle que soit la nature et l'anatomie de ces objets.

Dans les quelques lignes qui suivent, nous expliquerons comment lire les graphes orientés que nous pouvons rencontrer parfois dans les livres de math. Ceci sera un bon exemple de la théorie des catégories, car nous avons déjà rencontrés de tels graphes sans les décrire dans les sections sur les Nombres et la Cryptographie par exemple.

Pour simplifier nous allons expliquer ces diagrammes lorsque les objets de base sont les ensembles (ce qui est le cas le plus courant sur l'ensemble du site de toute manière).

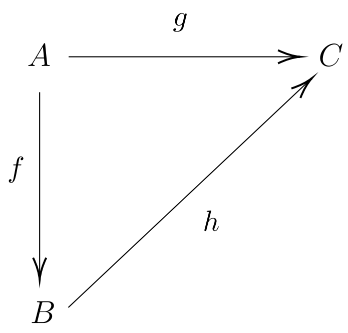
Considérons trois ensembles A, B, et C et trois applications telles que :

$$f:A\mapsto B, g:A\mapsto C, h:B\mapsto C \tag{8.8.47}$$

et réécrivons-les comme suit :

$$f:A\to B, g:A\to C, h:B\to C \tag{8.8.48}$$

Nous pouvons considérer les applications f, g et h comme des flèches qui relient les objets (ensembles) A, B, et C pour former un triangle :



Où évidemment $g=h\circ f$ ou plus explicitement pour ceux qui ont oublié la signification de cette notation que pour tout $a\in A$ nous avons $h(f(a))=g(a)$.

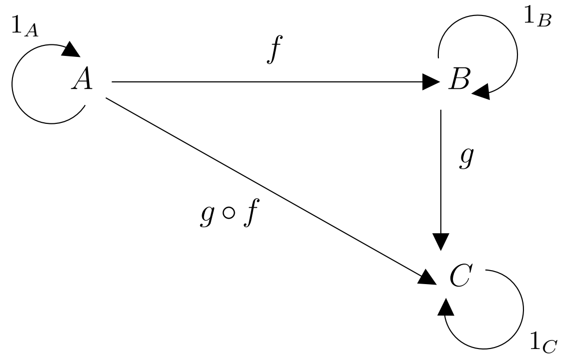
Définition (version naïve #396) : Nous disons que le diagramme fléché ci-dessus est un "diagramme commutatif" si tous les chemins que nous empruntons pour aller d'un objet (ensemble) à un autre représentent la même application.

En cours de traduction de l'anglais

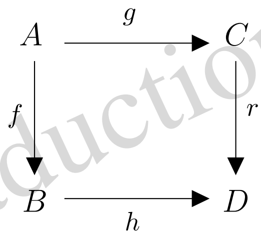
Ou considérons :

$$f: A \to B, g: B \to C, h: A \to C \quad (8.8.49)$$

et tel que chaque application f, g, h possède un noyau égal à l'ensemble des éléments neutres de l'ensemble de départ. Par conséquent :



Nousp ouvons complexifier ces diagrammes presque sans limite en ajoutant des ensembles et des flèches (applications) les reliant. Par exemple :



Ce diagramme est commutatif si et seulement si $h \circ f = r \circ g$.

En cours de traduction de l'anglais

Remarques

R1. Habituellement, dans la littérature mathématique, de tels diagrammes sont implicitement commutatifs.

R2. Comme déjà mentionné, les objets de ces diagrammes peuvent être plus généralement des groupes, des anneaux, des corps, des espaces topologiques, etc. Dans ces cas, les flèches ne sont plus des applications mais des homomorphismes de groupes, ou d'anneaux, des applications continues, etc.

~90 %

28 votes, 70.00%

8.9. Théorie des Noeuds

RENÉ DESCARTES avait imaginé un système du monde, où l'Univers était animé par des tourbillons. À la fin du 118e siècle (calendrier holocène), Peter Guthrie Tait et William Thomson Kelvin ont ressuscité cette théorie, et interprété les liaisons chimiques en imaginant des molécules nouées qui s'enlaceraient.

Remarques

R1. La dénomination "théorie des noeuds" qui c'est imposée dans la communauté scientifique est assez malheureuse. Certains mathématiciens (francophones) ont choisi à juste raison d'utiliser plutôt la dénomination "théorie des tresses et entrelacs" qui est plus correcte et générale (puisqu'un entrelac est un noeud à plusieurs composantes).

R2. Une grande partie des textes et figures ci-dessous est une reproduction, avec accord, des supports du Professeur Michael Eisermann de l'Université de Stuttgart (http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm).

La théorie mathématique des nœuds a été inaugurée par les travaux de Charles Newton Little et Thomas Kirkman, qui ont tenté de fonder les idées physiques de Peter Guthrie Tait et William Thomson Kelvin. Les premières classifications de noeuds utilisaient une image filaire des noeuds, sans épaisseur, et une projection plane, comme l'ombre portée sur un écran. Un caractère immédiatement perceptible concerne les croisements, où l'on distingue le brin supérieur et le brin inférieur. Les cannages, ou bandes de tressage, reposent sur la prise en compte des croisements, et le nombre de ces intersections sera le premier élément de classification.

8.9.1 Représentation des Tresses

Voici un exemple de tresse (ensemble de brins) et la chaîne correspondante (une chaîne est une tresse que l'on a refermée) :

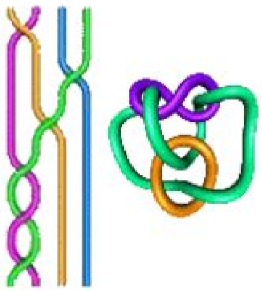


FIG. 8.329 – **Tresse et chaîne (diagramme de noeud) correspondante**

Concentrons-nous sur la tresse à gauche de la figure ci-dessus pour commencer et demandons-nous quelle serait la meilleure manière de présenter les choses afin de pouvoir comparer des tresses ? Faisons une première tentative avec la représentation suivante d'une tresse particulière :

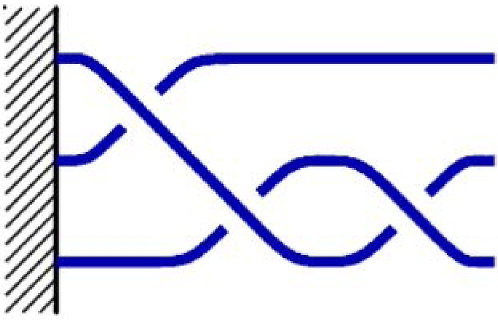


FIG. 8.330 – Présentation particulière d'une tresse

Comme les brins d'une tresse sont flexibles et peuvent bouger, nous remarquons de suite que cette représentation a un problème : toutes les tresses sont égales. Effectivement :

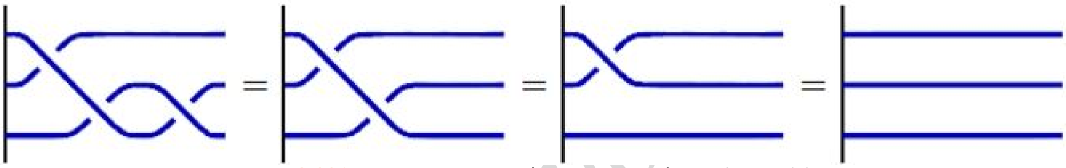


FIG. 8.331 – Exemple de problème de la représentation choisie

Le bon modèle, consiste alors peut-être à fixer les extrémités des deux côtés :

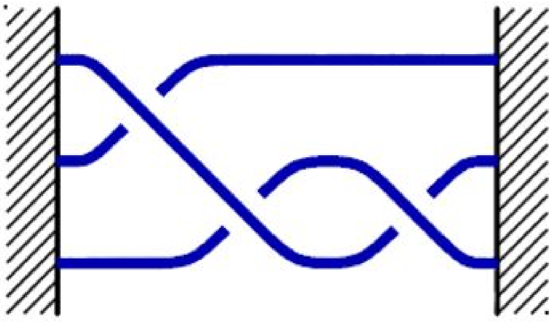


FIG. 8.332 – Autre choix de représentation

Bien évidemment, avec ce modèle les brins du milieu peuvent encore bouger comme ci-dessous et la tresse reste invariante :

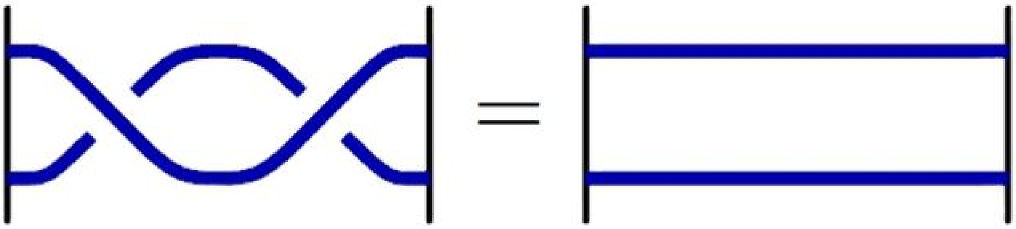


FIG. 8.333 – Premier exemple de tresse invariante

En cours de traduction anglais

ou encore comme ici :

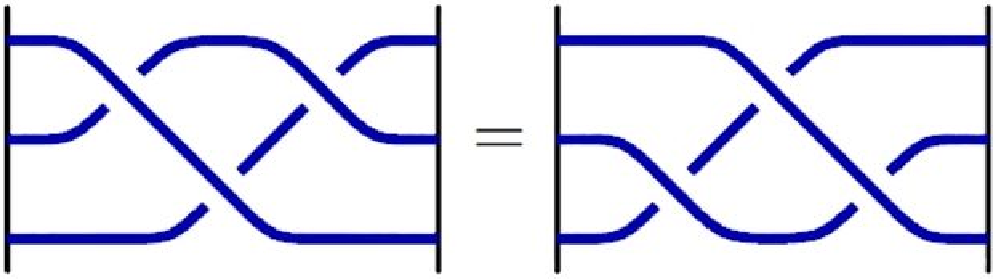


FIG. 8.334 – **Deuxième exemple de tresse invariante**

Nous pouvons également translater les croisements et la tresse reste toujours invariante :

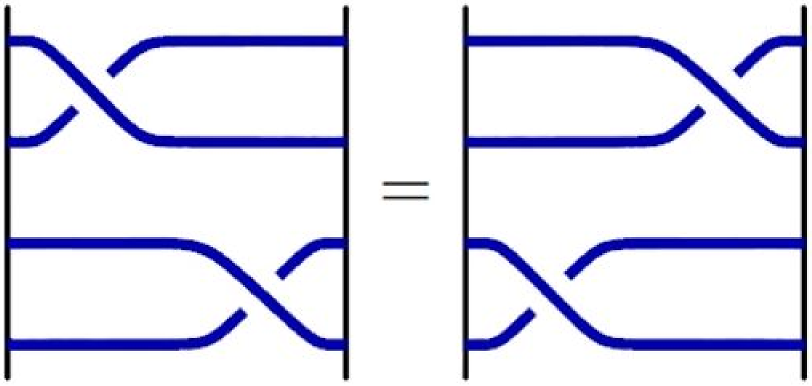


FIG. 8.335 – **Translation de croisement et préservation triviale de l'invariance**

La longueur n'est par ailleurs pas une variables dans ce modèle :

FIG. 8.336 – **Invariance par la longueur**

8.9.1.1 Groupe de Tresses

Si nous définissons la multiplication de deux tresses comme étant l'opération qui consiste schématiquement à faire :

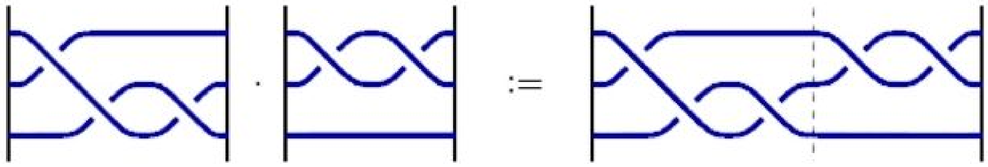


FIG. 8.337 – **Exemple de multiplication de deux tresses**

Nous pouvons nous poser la question si cette opération constitue un groupe du type commutatif ?

Rappelons avant cela que nous avons défini la structure de groupe dans la section de Théorie des Ensembles de la manière suivante : Nous désignons un ensemble par le terme "groupe", si les composants le constituant satisfont aux trois conditions de ce que nous nommons la "loi interne de groupe", définie ci-dessous :

$$(G,\star) \text{ est un groupe si} = \begin{cases} \star \text{ est associative} \\ \text{il existe dans } G \text{ un élément neutre pour } \star \\ \text{tout élément de } G \text{ possède un symétrique pour } \star \end{cases} \tag{8.9.1}$$

Si de plus, la loi interne est également commutative, nous disons alors que le groupe est un "groupe abélien" ou simplement "groupe commutatif".

1. Commençons par le premier contrôle. Est-ce que cette représentation est associative ? :

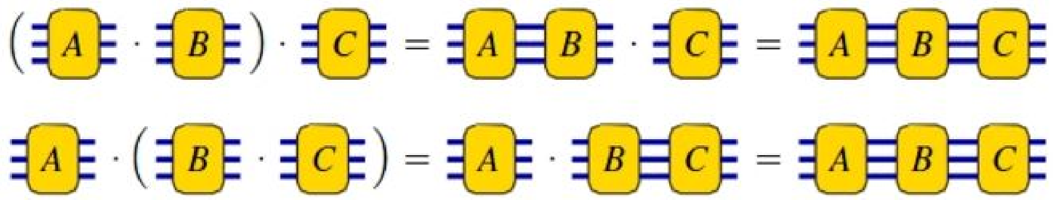


FIG. 8.338 – Contrôle de l'associativité des tresses (par la multiplication)

La réponse est donc OUI quel que soit le nombre de brins !

2. Est-ce que cette représentation est commutative ? :

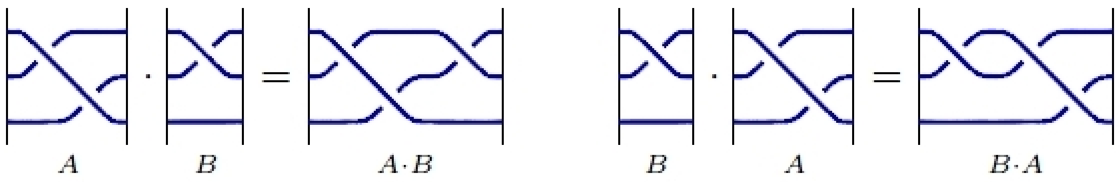


FIG. 8.339 – Contrôle de la commutativité des tresses (par la multiplication)

La réponse est donc NON au-delà de 2 brins (car avec 2 brins elle est commutative) !

3. Admet-elle un élément neutre ? :

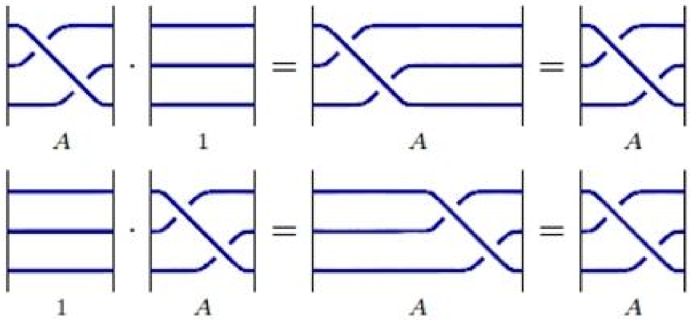


FIG. 8.340 – Vérification de l'existence d'un élément neutre pour les tresses (par la multiplication)

La réponse est donc OUI quel que soit le nombre de brins !

4. Existe-il des éléments inverses (symétriques) ? :

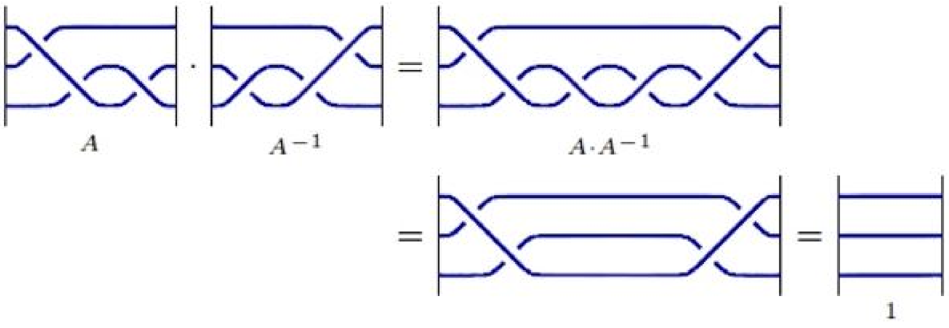


FIG. 8.341 – **Contrôle de l'existence d'éléments symétriques pour les tresses (par la multiplication)**

La réponse est donc OUI quel que soit le nombre de brins !

Donc les tresses à n brins forment un groupe non commutatif noté $(\mathcal{B}_n, \cdot)$ où le $\mathcal{B}$ stylisé représente le mot "braids" (tresses : en anglais).

Observons quelque chose d'intéressant en ce qui concerne les tresses à deux brins. Si nous indexons leurs vrilles par des nombres entiers relatifs comme ci-dessous (imaginez la tresse du milieu dont vous faites tourner les extrémités, cela donne toutes les autres vrilles de gauche et de droite) :

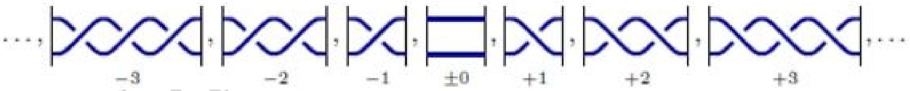


FIG. 8.342 – **Indexation des vrilles de tresses**

avec la convention de vrille v positive et vrille v négative :

FIG. 8.343 – **Convention d'indexation**

Attention au piège ! (essayez de le trouver... ce n'est pas toujours facile au premier coup d'oeil) :

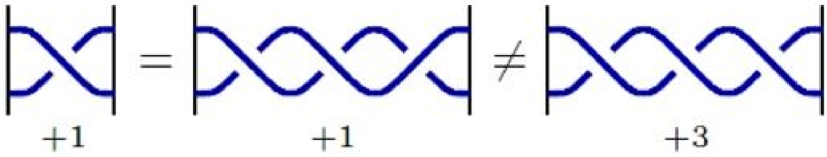


FIG. 8.344 – **Exemple de piège d'indexation**

En cours de traduction de l'anglais

Effectivement, le croisement de droite la deuxième tresse ci-dessus n'est justement pas.... un croisement ! Nous disons alors que le nombre de croisement n'est pas un invariant. C'est pour cette raison que ce qui compte est la "vrille" car elle ne change pas sous les mouvements de la tresse et non pas simplement un croisement ! ! !

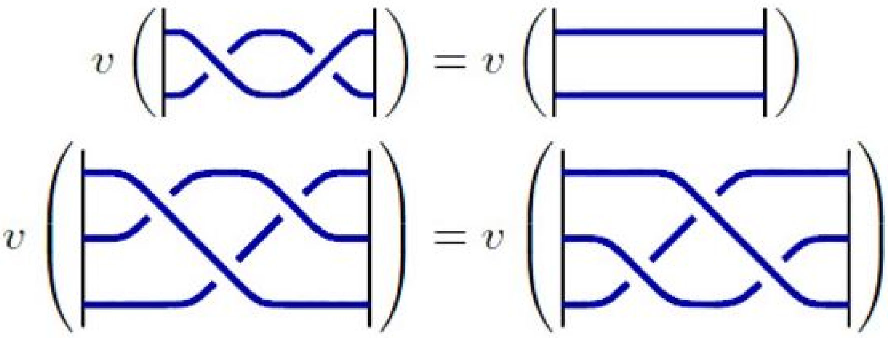


FIG. 8.345 – Différence entre vrille et croisement

Nous remarquons que nous avons alors en ce qui concerne la multiplication des tresses (voir section Théorie des Ensembles page 439) et leur indexation sous forme du nombre de vrilles les propriétés suivantes :

$$f(A \cdot B) = f(A) + f(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B}_2 \tag{8.9.2}$$
$$f(1_A) = 1_{\mathbb{Z}} \tag{8.9.3}$$
$$f(A^{-1}) = (f(A))^{-1} \quad \forall A \in \mathcal{B}_2 \tag{8.9.4}$$

Donc le groupe multiplicatifs des tresses à 2 brins est une homorphisme de groupe avec la loi d'addition du groupe des entiers relatifs. De plus, nous voyons trivialement que l'application f est bijective. Nous avons dès lors un isomorphisme de groupes ! Au delà de3 brins, nous avons vu que le groupe n'était plus commutatif !

8.9.2 Représentation des Noeuds

Revenons à la première figure présentée plus haut :

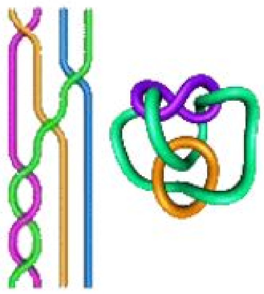


FIG. 8.346 – Tresse et chaîne (diagramme de noeud) correspondante

Une première difficulté apparaît alors pour l'image de droite (qui est un "diagramme de noeud") : un noeud (chaîne avec un seul brin) est un objet géométrique à trois dimensions, et

En cours de traduction de l'anglais

nous utilisons une représentation plane obtenue en projetant le noeud sur un plan. Ceci pourrait donc compliquer les choses... nous verrons !

Remarque

Tout noeud ou toute chaîne peut donc être obtenue à partir d'une tresse (sans démonstration).

Il existe alors de nombreux points de vue possibles, et diverses apparences d'un même noeud. Deux noeuds de projections différentes sont-ils distincts (non isotopes) ? Dans la première table publiée (celle de Tait et Little) le nombre minimal de croisements est utilisé comme principe de classification (jusqu'à dix croisements) et il fallut presque un siècle pour détecter une duplication : deux noeuds identiques avaient été pris pour différents.

En pratique un noeud ressemble plutôt à ceci :

FIG. 8.347 – **Exemple d'un noeud dans la vie réelle**

En cours de traduction de l'anglais

Mais les mathématiciens ont pris l'habitude de connecter les deux extrémités de la corde pour obtenir ceci :

FIG. 8.348 – **Représentation d'un noeud par un mathématicien**

donc un noeud est toujours une boucle qui se referme sur elle-même. En d'autres termes, un noeud ouvert est toujours équivalent à un noeud fermé :

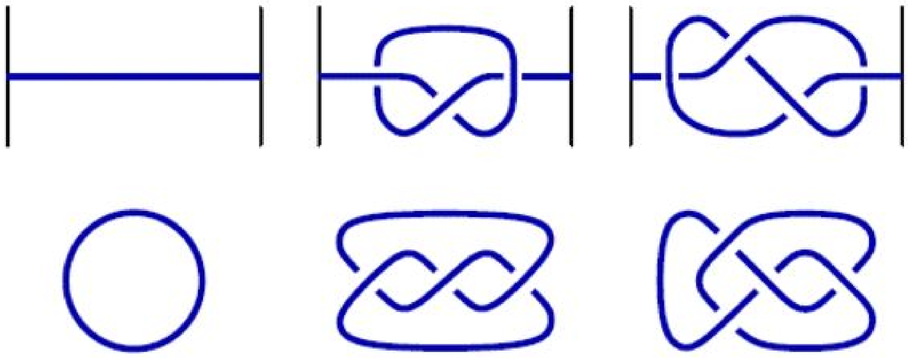


FIG. 8.349 – **Équivalence entre un noeud ouvert et un noeud fermé**

Un noeud fermé peut paraître différent suivant l'angle sous lequel on le regarde. Ainsi, les deux noeuds ci-dessous sont deux représentations du même type de noeud appelé le "noeud de trèfle".

FIG. 8.350 – 2 perspectives différentes du noeud de trèfle

Remarque

Le noeud de trèfle a une équation paramétrique simple donnée par :

$$\begin{aligned} x &= -\cos(t) + 2\cos(2t) \\ y &= \sin(t) + 2\sin(2t) \end{aligned} \tag{8.9.5}$$

Ce qui donne :

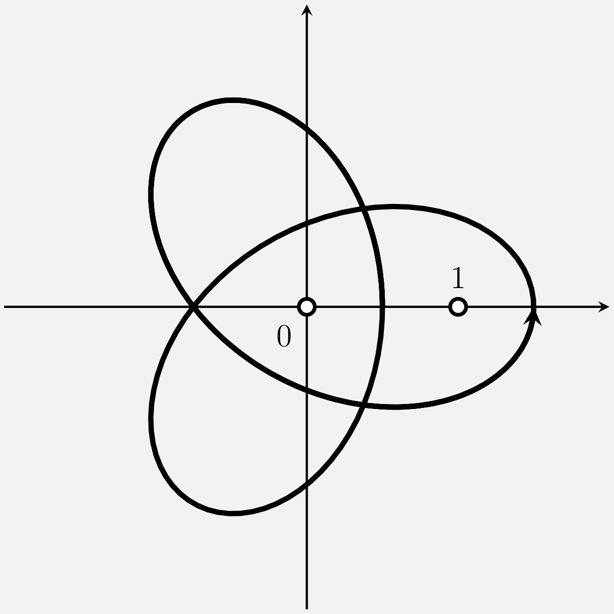


FIG. 8.351 – Traçage d'un noeud de trèfle

Nous pouvons également nous poser la question si le noeud de trèfle à gauche et son miroir à droite son égaux ? :

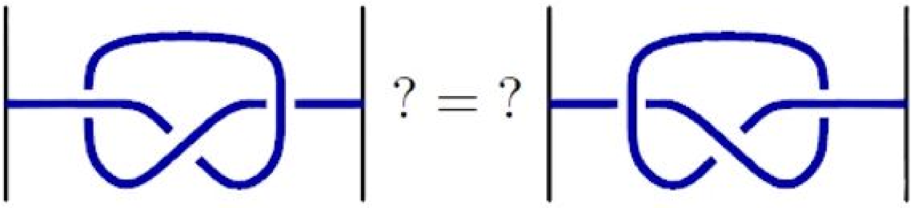


FIG. 8.352 – Même situation mais en fermant le noeud

ou la même question mais lorsque les deux noeuds sont fermés :

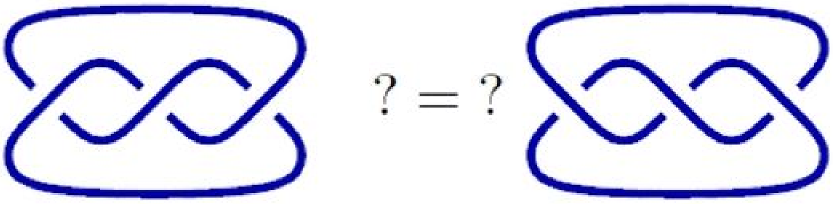


FIG. 8.353 – Même situation mais en fermant le noeud

Plus difficile, K. A. Perko a montré que ces deux noeuds de la paire dite "paire de Perko", sont en fait le même noeud :

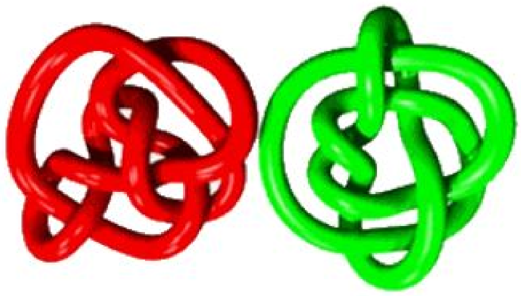


FIG. 8.354 – Exemple d'une paire de Perko

Un autre exemple extrême (et amusant) sont les nœuds Ochiai, Goeritz et Thistlethwaite ci-dessous qui sont en réalité un simple lacet (! ! !) :

En cours de traduction de l'anglais

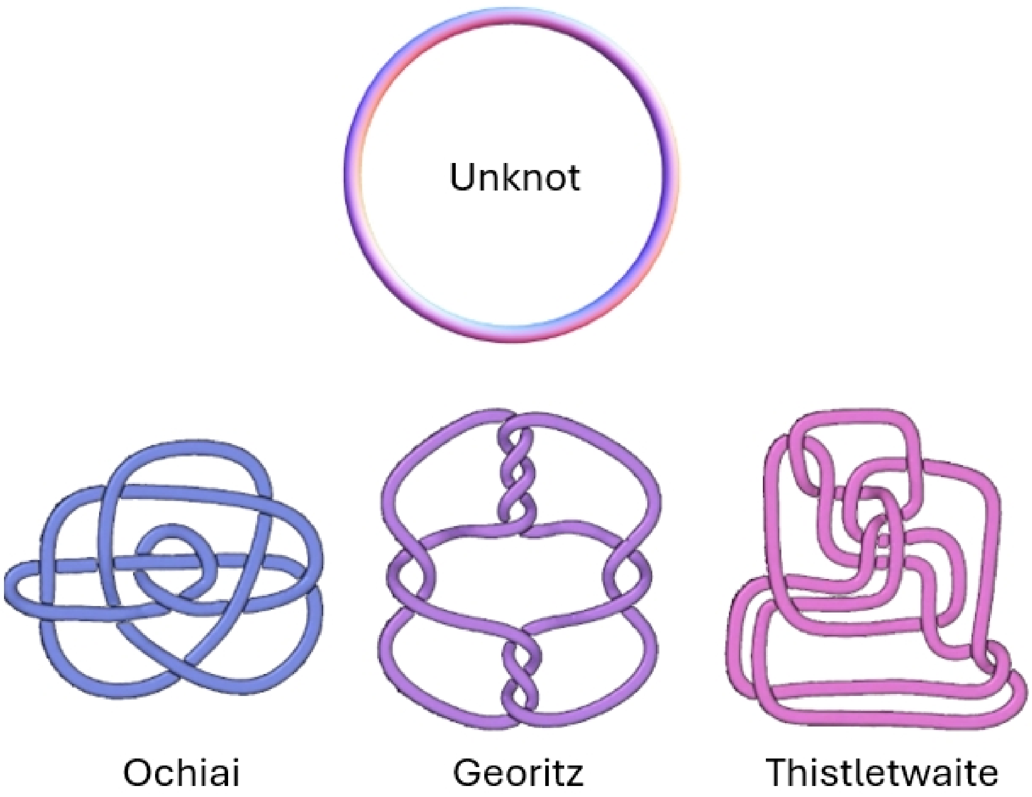


FIG. 8.355 – Des nœuds qui ne sont qu'un lacet

Il n'est donc pas évident de savoir lorsque deux objets physiques représentent fondamentalement le même noeud. Mais, c'est cela qui intéresse les mathématiciens. Plus précisément, ils aimeraient classifier les noeuds, c'est-à-dire déterminer tous les types de noeuds qui sont fondamentalement différents et pas simplement en apparence (c'est la même idée qu'en topologie ou les mathématiciens ont réussie à démontrer que tout volume se réduisait à trois volumes primaires).

En cours de traduction français

8.9.2.1 Groupe de Noeuds

Au même titre que nous l'avons fait pour les tresses, regardons si les noeuds forment un groupe ?

Donc nous définissons la multiplication de deux noeuds comme étant l'opération qui consiste schématiquement à faire :

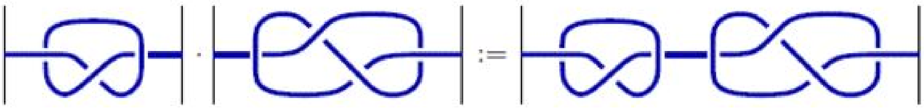


FIG. 8.356 – Rappel de la définition de la multiplication de deux noeuds

Nous pouvons nous poser la question si cette opération constitue un groupe du type commutatif ?

1. Commençons par le premier contrôle. Est-ce que cette représentation est associative ? :

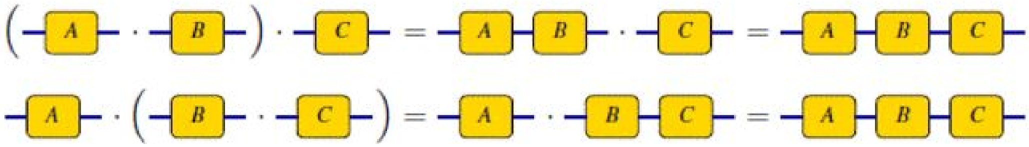


FIG. 8.357 – Vérification de la commutativité de noeuds (par la multiplication)

La réponse est donc OUI quel que soit le nombre de noeuds !

2. Deuxième contrôle : est-ce qu'elle a un élément neutre ? :

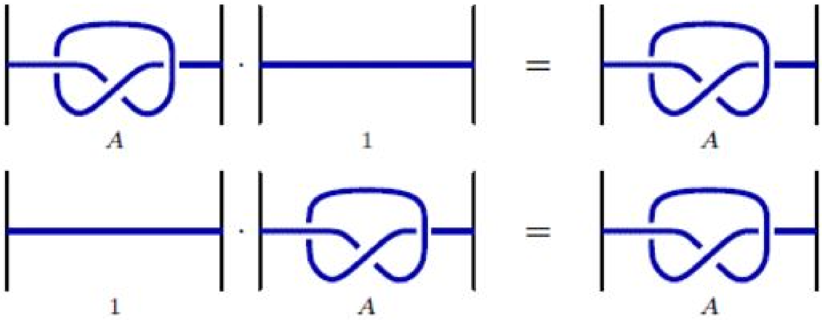


FIG. 8.358 – Vérification de l'existence d'un élément neutre pour les noeuds (par la multiplication)

La réponse est donc OUI quel que soit le nombre de noeuds !

3. Troisième vérification : est-ce qu'elle est commutative ? :

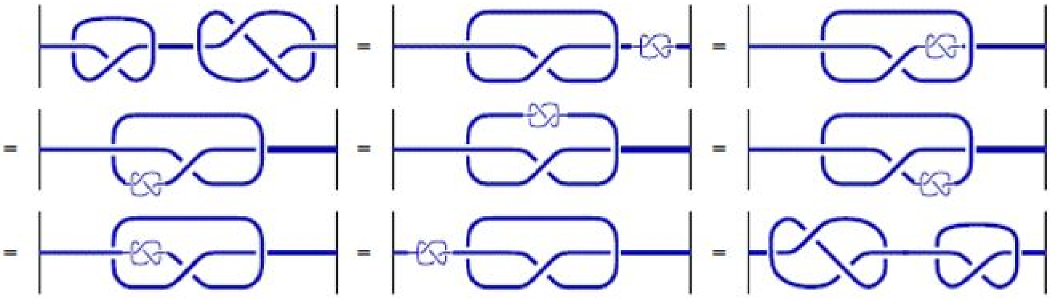


FIG. 8.359 – Vérification de la commutativité de noeuds (par la multiplication)

Donc contrairement aux tresses OUI !

4. Quatrième et dernière vérification : Y a-t-il des éléments inverses (symétriques) ?

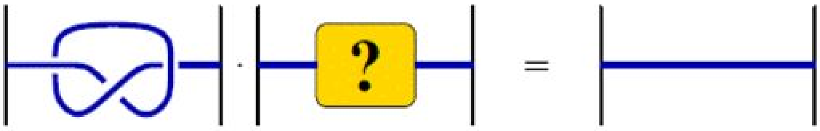


FIG. 8.360 – Vérification de l'existence d'un élément neutre pour les noeuds (par la multiplication)

et ça c'est une des grandes questions !

En traduction de l'anglais

Avec le temps et les efforts des mathématiciens, trois points de vue mathématiques essentiels pour l'étude des noeuds se sont dégagés afin de résoudre différents problèmes :

1. Topologique, où le noeud est conçu comme la réunion d'un nombre fini de courbes fermées, à déformations près.

2. Algébrique, où l'on dénombre des croisements par exemple, et où l'on associe les groupes aux noeuds.

3. Géométrique, où l'on tient compte de la forme du noeud, en mesurant longueurs ou angles. En particulier, l'idée du nombre de rotations apparaît sous la forme de vrillage et de nombre d'entrelacements, et ces notions sont fondamentales pour l'étude des ADN en biologie moléculaire.

L'articulation entre ces points de vue est délicate. Il y a des évidences difficiles à prouver rigoureusement – qu'on songe au théorème de Jordan qui affirme qu'une courbe fermée plane, sans croisement, délimite un intérieur et un extérieur ! Il a fallu presque deux siècles pour définir correctement la notion de courbe, et il y a des noeuds sauvages à écarter avant toute classification. Il faut du soin pour définir correctement les déformations des noeuds, que le mathématicien appelle "isotopies".

L'idée mathématique la plus efficace pour l'étude des noeuds est celle de "noeud invariant". Un invariant d'un noeud est une caractéristique (nombre entier, nombre réel, polynôme, groupe...) qui reste inchangée lors d'une déformation. Si nous disposons d'un invariant, nous pouvons affirmer que deux noeuds sont vraiment différents quand l'invariant ne prend pas la même valeur pour les deux noeuds. Mais si deux noeuds ont le même invariant, nous ne pouvons affirmer qu'ils sont du même type (déformable l'un en l'autre). Un exemple typique de deux noeuds ayant le même invariant et pour lesquels il n'est pas trivial de dire s'ils sont isotopes est le trèfle de droite et celui de gauche lorsque l'invariant choisi est le nombre de croisements $c(D)$. Il faudrait pour cela disposer d'un système complet d'invariants.

Ici, les invariants sont indispensables, et les mathématiciens en ont proposé des dizaines qui synthétisent différentes caractéristiques des noeuds. Mais ces invariants ont tendance à présenter des angles morts.

Prenons par exemple un invariant nommé "tricolorabilité". Un diagramme de noeuds est tricolorable s'il existe un moyen de colorer ses brins en rouge, bleu et vert, de sorte qu'à chaque croisement, les trois brins qui se rencontrent soient tous de la même couleur, soit de couleurs différentes. Les mathématiciens ont montré que même en déplaçant les brins d'un noeud, sa tricolorabilité (ou son absence) reste inchangée. En d'autres termes, la tricolorabilité est une caractéristique innée du noeud.

Le trèfle est tricoloriable :

En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.361 – Tricolorabilité du nœud de trèfle (source : Quanta Magazine)

Mais le "Noeud trivial" (une boucle sans noeuds réels, même si elle semble emmêlée) n'est pas tricoloriable, ce qui prouve instantanément que le trèfle n'est pas simplement le noeud trivial déguisé. Si la tricolorabilité permet de distinguer certains noeuds du noeud trivial, elle n'est pas un outil parfait : les noeuds tricoloriables sont bel et bien noués, mais ceux qui ne le sont pas ne sont pas forcément dénoués. Par exemple, le noeud en huit n'est pas tricoloriable, mais il est bel et bien noué. Ce noeud tombe dans l'angle mort de la tricolorabilité; c'est comme si l'invariant disait : « Le noeud en huit est un noeud trivial, autant que je puisse le dire ».

En cours de traduction de l'anglais

Le "noeud de Conway", est un noeud à croisements découvert par John Horton Conway il y a plus de cinquante ans, ce noeud est extraordinairement doué pour tromper les invariants de noeuds !

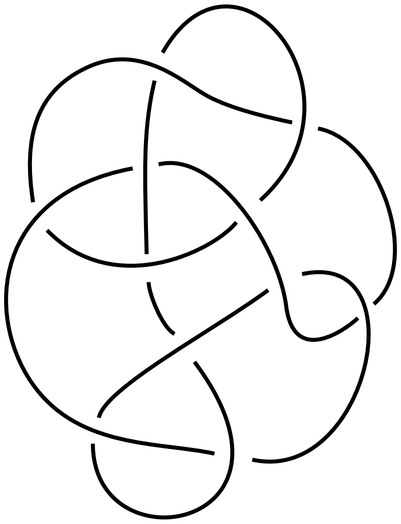


FIG. 8.362 – Noeud de Conway

Le mathématicien russe Victor Vasiliev a introduit en 11990 (calendrier holocène) une classe

nouvelle d'invariants. Il reste à les rendre explicitement calculables et à prouver qu'ils forment un système complet, comme on le pense généralement.

Henri Poincaré a introduit vers 11900 (calendrier holocène) la notion de groupe fondamental d'un espace, qui décrit les possibilités de parcours avec retour au point de départ. Appliqué à l'espace extérieur à un noeud, cela fournit le "groupe du noeud" et le "polynôme d'Alexander" qui lui est lié (voir plus loin dans la partie formalisation mathématique).

Au début des années 11990 (calendrier holocène), les groupes de tresses étaient une curiosité et leur complexité répulsive. Puis, soudainement, ils sont devenus un thème central de la recherche scientifique. Donnons un aperçu de la diversité des points de vue qui ont conduit à la création de ces groupes :

1. En géométrie, le mathématicien russe Vladimir Arnold a classé sous le nom de "catastrophes" les singularités des configurations géométriques, ce qui conduit aux espaces de configuration.
2. En algèbre, et plus particulièrement en théorie des groupes, deux avatars des groupes tressés jouent un rôle central : les "groupes de Coxeter" et les "algèbres de Hecke".
3. En mécanique statistique, l'étude des modèles exactement solubles se fait à l'aide des relations de Yang-Baxter et des groupes quantiques. Le lien avec les groupes tressés est profond.
4. La physique bidimensionnelle a récemment pris une grande importance et nous attendons d'elle un modèle de supraconductivité à haute température. La classification habituelle des particules de fermions et de bosons est complexe en deux dimensions. Le nouveau concept est celui de quiconque dont le modèle mathématique est lié aux groupes de tresses.
5. La théorie quantique des champs est le modèle mathématique des particules élémentaires. Edward Witten a établi un lien entre cette théorie et les groupes de tresses, grâce au polynôme de Jones.

En cours de traduction de l'anglais

La théorie des noeuds constitue donc une interface active entre la physique et les mathématiques. Les noeuds et les tresses constituent aujourd'hui un outil de modernisation efficace, de la physique des polymères aux cristaux liquides, en passant par la biologie moléculaire. À l'inverse, des idées importées de la physique ont déclenché une révolution en mathématiques : d'une question quelque peu marginale au début des années 11990 (calendrier holocène), la théorie des noeuds est devenue, au début des années 12000 (calendrier holocène), l'un des plus grands sujets mathématiques.

8.9.3 Noeuds de Tait

L'objectif principal de la théorie des noeuds est de classifier tous les noeuds et trouve son origine dans la physique au début du 119e siècle (calendrier holocène) comme nous en avons déjà fait mention. Pourquoi ?

Rappelons qu'à cette époque, les atomes étaient un mystère : pourquoi ceux-ci semblaient-ils indestructibles et pourtant existant en tellement de variétés et capables de se combiner pour donner d'innombrables autres composants ?

À cette époque, les plus belles équations de la physique (qui sont souvent de bons candidats pour expliquer des choses que nous ne comprenons pas...) étaient les équations de Maxwell, il était alors naturel (ou tentant) pour les physiciens d'essayer d'expliquer la mécanique atomique en terme d'électromagnétisme, même si nous savons aujourd'hui que cette voie était destinée à l'échec. Plus tard au milieu du 119e siècle (calendrier holocène), les ondes électromagnétiques étaient largement conceptualisées comme des vibrations d'un milieu appelé à l'époque "éther luminophore". Le référentiel de cet éther était alors défini (ou du moins supposé) comme étant un référentiel absolu. Mais seulement... plus tard, les expérimentateurs Michelson et Morley, montrèrent que le mouvement relatif de notre planète dans cet éther était indétectable (et même pire... ils mesurèrent la constance absolue de la vitesse de lumière !). Leurs expériences amenèrent par ailleurs Einstein et Poincaré a développer leur fameuse théorie de la relativité restreinte (see section Relativité Restreinte page **??**) :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0} \tag{8.9.6}$$

ce qui est, il faut l'admettre, similaire à la mécanique des fluides (voir section du même nom page **??**) lorsque l'on a un fluide (supposé...) incompressible sans viscosité et sans tourbillons :

$$\vec{\nabla}\circ\vec{v}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{v}=\vec{0} \tag{8.9.7}$$

Plus généralement, dans le cas où la rotationnel est non nul, Helmoltz montra en 11858 (calendrier holocène) que les lignes de champ du vortex – définies par les lignes de $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ - se déplacent dans la direction de $\vec{v}$ comme si elles avaient une existence propre (alors là c'est la brèche ouverte bien évidemment... !). Ces lignes ne pouvaient avoir de fin mais pouvaient former des boucles.

En 11867 (calendrier holocène) le mathématicien P. G. Tait (assistant de Hamilton et un champion des quaternions) trouva une méthode ingénieuse pour démontrer cet effet en coupant un trou circulaire dans une boîte, en remplissant celle-ci avec de la fumée, et en expulsant ensuite la fumée par compression de l'air dans la boîte formant ainsi des cercles de fumée. Il montra par ailleurs ceci à son ami Kelvin qui nota l'analogie avec l'électromagnétisme et proposa une théorie dans laquelle les atomes étaient des vortex (noeuds) dans l'éther ! Il émit l'hypothèse que les différentes types d'atomes correspondaient a différents types de vortex noués (oui c'est un peu tiré par les cheveux mais bon...) !

Tait essaya par la suite de classifier (voir tableau plus bas) les lignes nouées en accord avec :

1. Le nombre d'entrelacements quand celles-ci sont projetées sur un plan
2. En ne représentant que les "noeuds premiers"

En cours de traduction de l'anglais

Définition (#8.9.397) : Un noeud peut être compliqué parce qu'il est la succession de noeuds simples :

FIG. 8.363 – **Exemple d'une succession de noeuds sur un noeud ouvert**

Ces noeuds simples (avec un seul brin) peuvent être séparés en coupant la ficelle :

FIG. 8.364 – **Séparation du noeud**

Un noeud premier est donc un noeud qui ne peut être séparé en noeuds plus simples : couper la corde dénoue le noeud.

Classifier les noeuds c'est donc chercher à déterminer les briques élémentaires : tous les noeuds premiers. La liste que Tait obtint dans un premier temps fut les noeuds suivants (dans l'espoir d'obtenir le tableau périodique des éléments version "éther"...) et si nous vous conseillons au besoin de vous munir d'une ficelle pour vous assurer qu'ils sont bien premiers (des fois cela est difficile mentalement) :

En cours de traduction de l' anglais

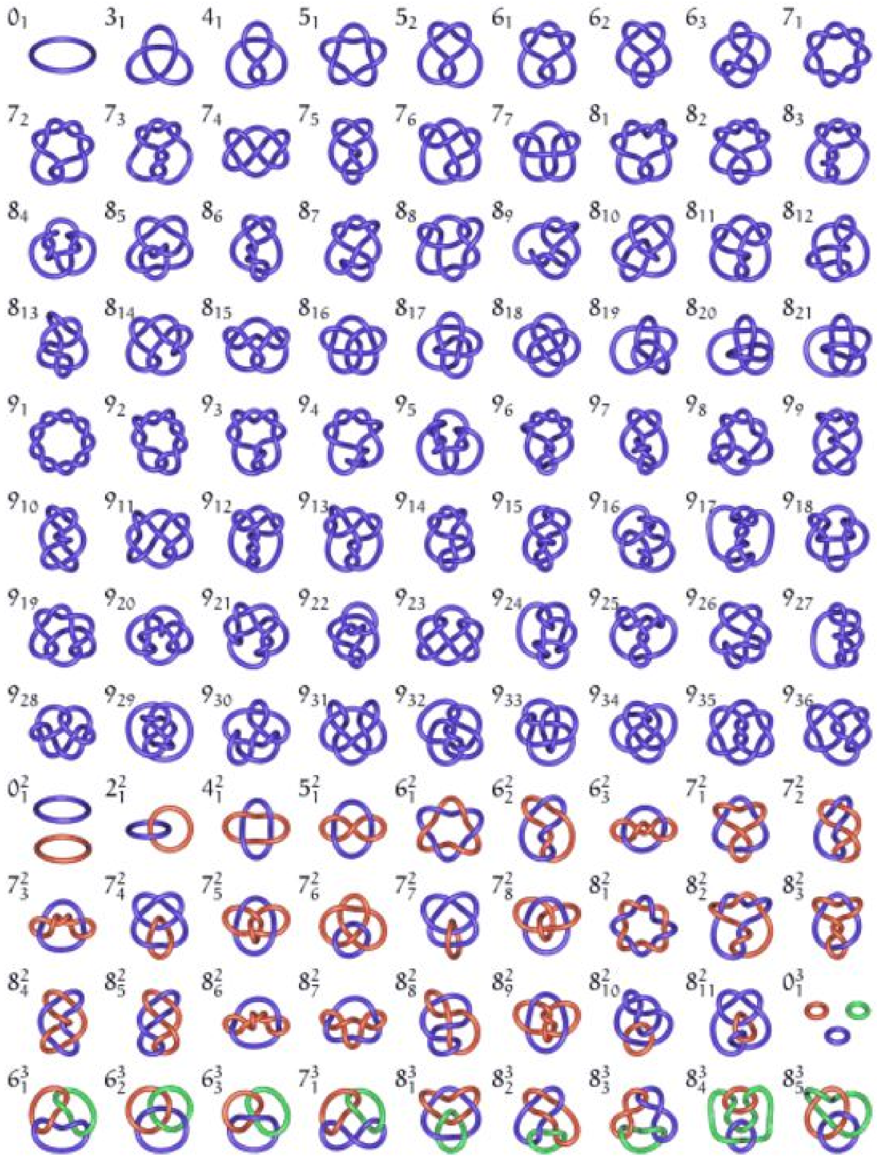


FIG. 8.365 – **Classification de Tait**

En co ... anglais

Remarques

R1. Ce tableau est très important nous y ferons très souvent référence lors d'exemples applicatifs en utilisant la nomenclature qui y est proposée.

R2. Les valeurs correspondantes dans le tableau ci-dessus, appelées "mesures de complexité du noeud", sont notées en toute généralité $c(D)^{c(B)}_{\text{Id}}$ où $c(D)$ est le nombre de croisements, $c(B)$ le nombre de brins, et Id le numéro d'identifiant du noeud dans la classe $c(D)$.

La beauté de ce modèle des "atomes vortex" résidait dans le fait qu'il était en accord avec l'aspect continu du monde merveilleux des fluides, ou aux équations de Maxwell par extension, pour discrétiser les différentes types d'atomes. Une difficulté cependant avec cette théorie était la remarquable stabilité des atomes. En 11905 (calendrier holocène) Kelvin admit qu'après de nombreuses années d'échecs à tenter de prouver que le mouvement des cercles de Helmholtz

était stable, que la conclusion était que ces cercles étaient essentiellement instables et devaient donc se dissiper. Curieusement c'est cette stabilité extrême des atomes qui fut une des pièces du puzzle pour construire la physique quantique corpusculaire.

De plus, avec la théorie de la relativité, le concept d'éther cher à Maxwell et ses contemporains, en particulier en ce qui concerne la théorie des noeuds, devint synonyme d'un concept inutile et avec en plus la théorique quantique la théorie des atomes vortex fut complètement oubliée. La théorie des noeuds ressurgit à cause de quelques conjectures que Tait ne fut pas capable de démontrer (nous y reviendrons) qui le furent seulement dans les années 11980 (calendrier holocène) dans un tournant hasardeux de la physique théorique.

Ce que les physiciens abandonnèrent intrigua et continue d'intriguer les mathématiciens. La question de base restant la même : comment pouvons nous dire que deux noeuds sont "isotopes" (nous définirons plus loin de quoi il s'agit). Cette question est intimement reliées aux fameuses conjectures de Tait. Pour attaquer ces conjectures et les questions basiques de ressemblance des noeuds, les topologistes ont développé les noeuds invariants. Un exemple d'un noeud invariant connu et ayant eu beaucoup de succès sont les polynômes d'Alexander découverts par J. W. Alexander en 11927 selon le calendrier holocène (voir plus loin). Ainsi, si les polynômes de deux noeuds sont différents, ceux-ci ne sont alors pas isotopes. Malheureusement, il existe quelques noeuds ayant des polynômes d'Alexander équivalents et qui sont pourtant non isotopes...

La théorie mathématique des noeuds se développe alors pendant une cinquantaine d'années et était un peu tombée en désuétude lors du coup de tonnerre de la découverte par Jones en 11984 (calendrier holocène) d'un nouvel invariant des noeuds (le polynôme de Jones). La découverte de Jones est assez exemplaire du point de vue scientifique et peut donner lieu à méditation sur l'organisation actuelle de la science. Jones n'était pas du tout un spécialiste des noeuds. Il s'intéressait à la classification des facteurs dans les algèbres de Von Neumann (analyse fonctionnelle). Il a obtenu des algèbres de matrices dont les relations de commutation (équations de Yang-Baxter) étaient proches des relations du groupe de tresses. Des tresses aux noeuds, il n'y a qu'un pas qu'il a franchi avec l'aide de Joan Birman qui est une spécialiste des noeuds.

En cours de traduction de l'anglais

Nous assistons ensuite à une explosion de découvertes : version purement combinatoire, nouveaux polynôme, etc. En 11989 (calendrier holocène), Witten montre que le polynôme de Jones peut être obtenu à partir de la théorie quantique des champs au moyen d'une intégrale de Feynman, donnant ainsi la première définition n'utilisant pas les projections planes du noeud. D'une certaine façon la théorie de Jones-Witten est une extension non commutative du travail de Gauss. Le groupe de Lie (see section Algèbre Ensembliste Algebra page 1398) qui intervient en magnétisme est $\mathrm{U}(1)$, alors que l'invariant de Witten est une intégrale de Feynman sur un espace de $\mathrm{SU}(2)$-connections.

8.9.4 Formalisation mathématique

Un noeud est modélisé mathématiquement par une application injective, différentiable et dont la dérivée ne s'annule pas, du cercle dans l'espace orienté de dimension 3 (noeud trivial).

Les deux problèmes centraux de la théorie des noeuds sont de décider de manière calculable si le noeud est trivial (peut être écarté sans couper la corde) ou non (ce problème n'est pas résolu en ce début du 121ème siècle (calendrier holocène) à notre connaissance) et si deux noeouds sont réellement équivalents.

Le premier type de problème peut être bien représenté sur le fait de savoir si le noeud ci-dessous est noué ou non... ? :

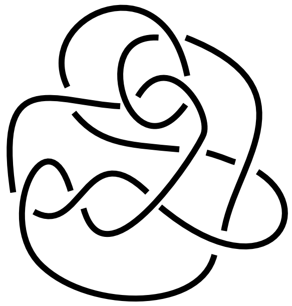


FIG. 8.366 – Noeud noué ?

La réponse est non comme le montre la figure ci-dessous (lire de gauche à droite et de haut en bas) :

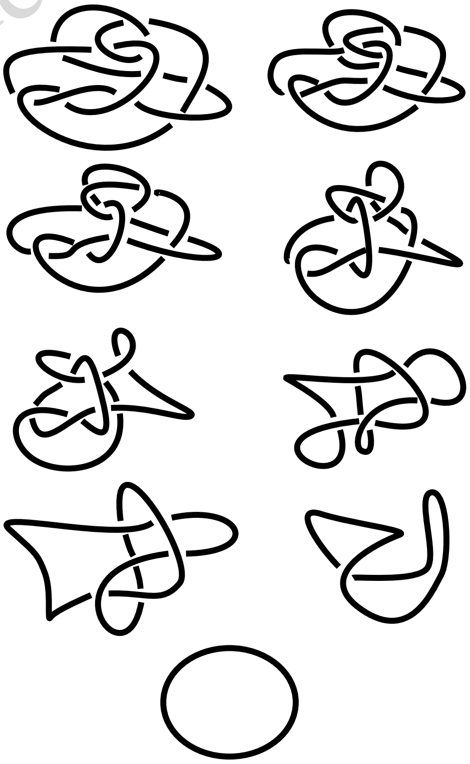


FIG. 8.367 – Eh ben non... !

En cours de traduction de l'anglais

Le but pour le deuxième problème est d'associer aux noeuds des objets mathématiques calculables (polynômes, nombres) appelés "invariants du noeud" et qui sont insensibles à une déformation du noeud. Si l'invariant n'est pas égal à celui du noeud trivial qui est :

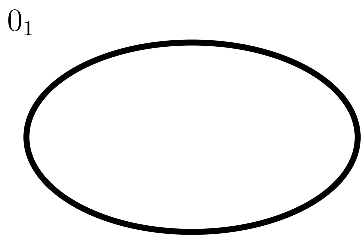
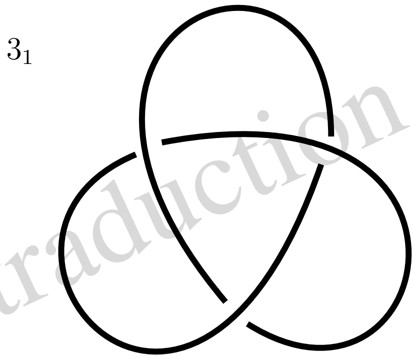


FIG. 8.368 – Noeud trivial

nous sommes sûr que le noeud n'est pas trivial. Et par exemple, le noeud non trivial le plus simple est le noeud de trèfle :



En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.369 – Noeud de trèfle

Le problème est donc de trouver des invariants assez fins. Nous en décrirons deux :

1. Le nombre d'entrelacement (de deux noeuds) du à Gauss et qui intervient en électromagnétisme
2. Le polynôme de Jones (introduit dans les années 11985 par Vaughan Jones, médaille Fields 11990), qui est assez subtil pour distinguer par exemple le noeud de trèfle droite du gauche.

Nous décrirons aussi une classe générale d'invariants : les invariants de type fini ou de Vassiliev. Ces invariants définis de façon assez peu constructive sont peut-être des invariants complets, mais nous ne le savons pas à ce jour. Nous décrirons le nombre d'entrelacement de deux noeuds

comme un invariant combinatoire calculable à partir d'un diagramme des noeuds. Nous écrirons ensuite la formule intégrale classique liée au magnétisme (Gauss) pour le calculer. Nous ferons alors un petit détour par la géométrie différentielle globale des courbes de l'espace tridimensionnel pour montrer la "formule de White" qui relie trois invariants géométriques associés à un ruban. Nous décrirons ensuite les nouveaux invariants polynomiaux d'un point de vue combinatoire. Le point de vue intégrales de Feynman sera évoqué.

Victor Vasiliev a introduit une famille générale d'invariants qui contient la plupart des invariants connus et que l'on peut qualifier de type fini. Nous allons en décrire le principe.

En biologie les brins d'ARN et ADN ainsi que les filaments d'acides aminés s'enroulent selon des formes tridimensionnelles complexes (ce sont des tresses fermées : un cas plus général des noeuds). Or, souvent, au travers des microscopes, nous ne voyons qu'une projection bidimensionnelle. Les invariants permettent de remonter à des informations tridimensionnelles à partir des vues 2D que nous avons :

FIG. 8.370 – Exemple de brin d'ARN ou d'ADN

En cours de traduction de l'anglais

D'autre part, les biologistes ont observé des molécules d'ADN nouées et ont constaté que la nature topologique de la molécule d'ADN, c'est-à-dire le type de noeud formé par la molécule, influe sur son fonctionnement dans les cellules en conditionnant certaines de ses propriétés chimiques. Les virus attaquent les cellules pour en changer les longues molécules d'ADN en les nouant de différentes façons. En effet, par le biais d'enzymes appelées les topoisamérases, les virus coupent et recollent différemment les brins de la molécule d'ADN de telle sorte qu'elles prennent la forme d'un noeud qui peut être très complexe. Il s'avère que le type de noeud obtenu est en quelque sorte la carte de visite du virus. Pour lutter efficacement contre les virus, il est impératif de reconnaître leur signature par leur action sur l'ADN. Par conséquent pour identifier les différents virus il faut pouvoir reconnaître les différents types de noeuds et c'est en cela que la théorie des noeuds peut aider le biologiste.

Remarque

L'identification du type de noeud en biologie moléculaire a été transformée par des centres de recherche en des jeux en ligne dont le but est de mettre la population à contribution de manière ludique pour trouver une solution au problème. Cela semble bien marcher puisqu'en fin 12011 (calendrier holocène), des joueurs auraient fait une découverte pertinente concernant l'analyse de protéines.

Commençons maintenant par quelques définitions. Nous avons délibérément choisi de ne pas lister un certain nombre de définitions que le lecteur peut facilement trouver dans la littérature ou sur Internet. Nous nous permettons de les omettre, car elles ne seront d'aucune utilité pour l'application de la théorie des noeuds en physique quantique des champs (et, à l'exception de ceux qui aiment faire de petits dessins, elles sont inutiles à notre avis).

Définitions (#8.9.398) :

D1. Un "noeud" peut-être défini (car il existe plusieurs définitions possibles et certaines ont de petits aléas assez embêtants...) par l'image du cercle noté S^1 par une application continue (la ficelle étant supposée telle quelle), injective (ceci évitant que la ficelle rentre dans elle-même) :

$$f : S^1 \mapsto \mathbb{R}^3 \tag{8.9.8}$$

autrement dit, c'est une courbe sans point double, tracée dans l'espace euclidien de dimension trois.

Un noeud est donc représenté par une application injective $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^3)$ (imposer des noeuds de classe $\mathcal{C}^1$ permet d'éviter d'avoir des courbes trop... sauvages) vérifiant que $f(0)=f(1)$ (noeud fermé). L'image de f est parfois appelée "support du noeud f" : c'est la réalisation "physique" du noeud dans l'espace.

> **Remarque**
>
> L'ensemble des noeuds sera par la suite noté par la lettre N.

Pour résumer grossièrement..., un nœud est une corde dont on a soudé les extrémités.

D2. Nous disons qu'un noeud est un "noeud trivial" si l'application f qui le définit se prolonge en une application du disque $D^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ continue et toujours injective : un noeud trivial est donc un noeud qui borde un disque plongé de $\mathbb{R}^3$.

D3. Deux noeuds γ_1, γ_2 sont équivalents s'il existe une application continue :

$$F : [1,2] \mapsto N \tag{8.9.9}$$

telle que $F(1)=\gamma_1$ et $F(2)=\gamma_2$. Reste donc à trouver F qui est une courbe dans l'espace des courbes.

D4. Le $c(K)$ d'un noeud K est le nombre entier naturel représentant le nombre minimum de croisements pour tout diagramme d'un type de noeud (c'est une mesure naturelle de complexité).

> ✍ **Exemple :**
>
> Le noeud 0_1 à $c(K)=c(0_1)=0$ donc nul. Il semblerait qu'il n'existe pas de noeuds avec un $c(K)$ égal à l'unité. Une preuve consiste à lister tous les diagrammes possibles comportant un ou deux croisements et à vérifier qu'il s'agit bien de noeuds équivalents de type 0_1 ou simplement d'entrelacs. Le noeud de trèfle (noeud 3_1) a un $c(K)=c(3_1)=3$.

En cours de traduction de l'anglais

D5. L'image miroir $\bar{K}$ d'un noeud K est obtenue par réflexion sur un plan dans $\mathbb{R}^3$. Le noeud K peut-être construit par inversion des croisements du diagramme du noeud :

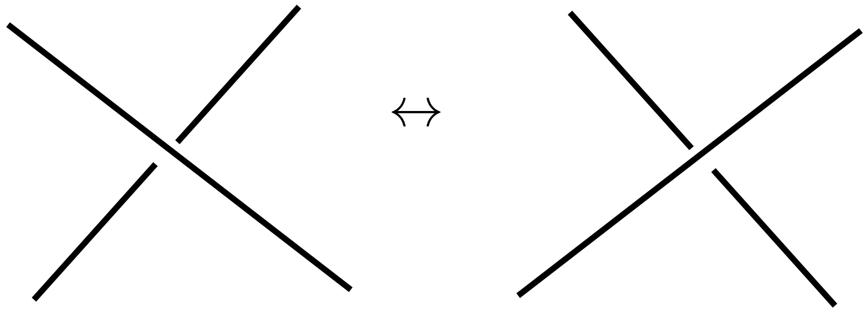


FIG. 8.371 – Image miroir par inversion de croisements

✍**Exemple :**

Avec le noeud ("trèfle gauche" et "trèfle droite") :

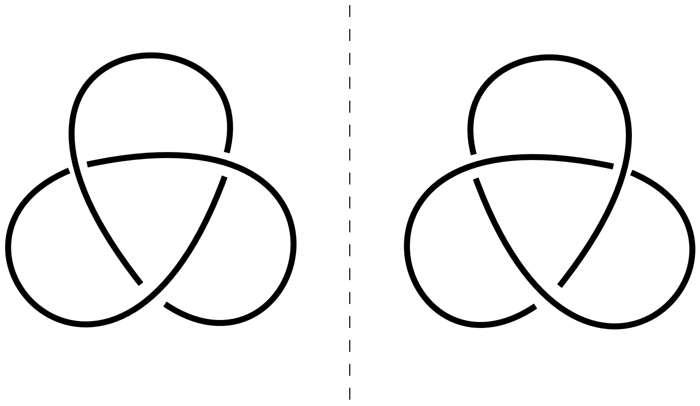


FIG. 8.372 – Miroir du noeud de trèfle

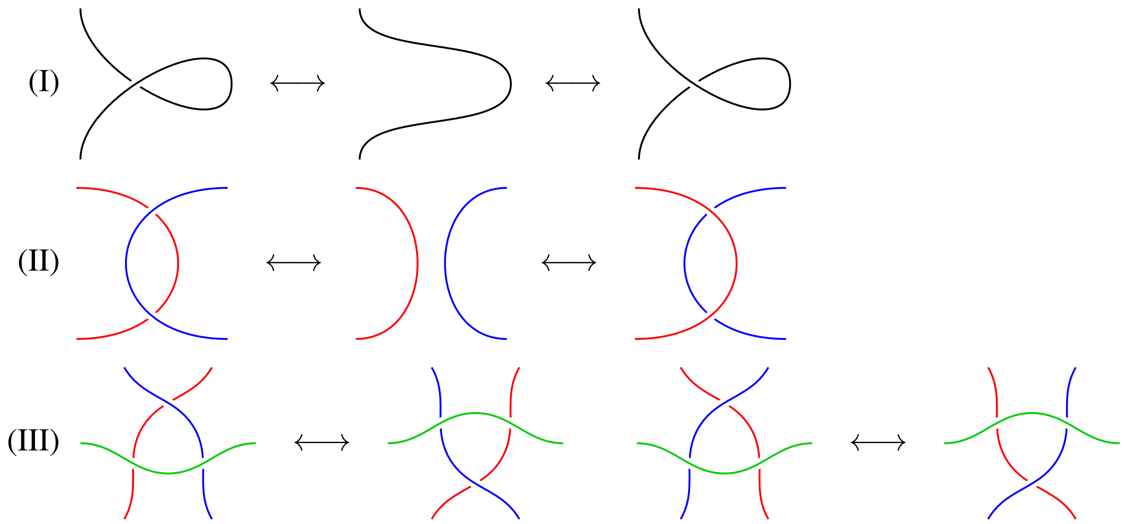
Remarque

Nous remarquons par ailleurs que dans la table de Tait, les noeuds miroirs distincts ne sont pas représentés !

D6. Deux noeuds sont dits "noeuds isotopes" si nous pouvons passer de l'un à l'autre par des manipulations continues (le trèfle gauche et le trèfle droit ne sont par exemple pas isotopes !) et il s'agit du problème numéro 1 de la théorie des noeuds : détecter les noeuds isotopes.

En d'autres termes, une isotopie est un mouvement qui ne déforme pas/ne modifie pas le noeud.

Les isotopies donnent dans le plan trois types particuliers de mouvements nommés "mouvements de Reidemeister" :



Il s'agit donc bien de trois opérations simples permettant de modifier une partie d'un nœud sans changer la nature du nœud lui-même.

Ainsi, deux diagrammes ou noeuds sont des isotopes, si nous pouvons passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister. Ainsi, avec l'exemple ci-dessous, nous montrons que le noeud initial est équivalent au noeud trivial :

En cours de traduction de l'anglais

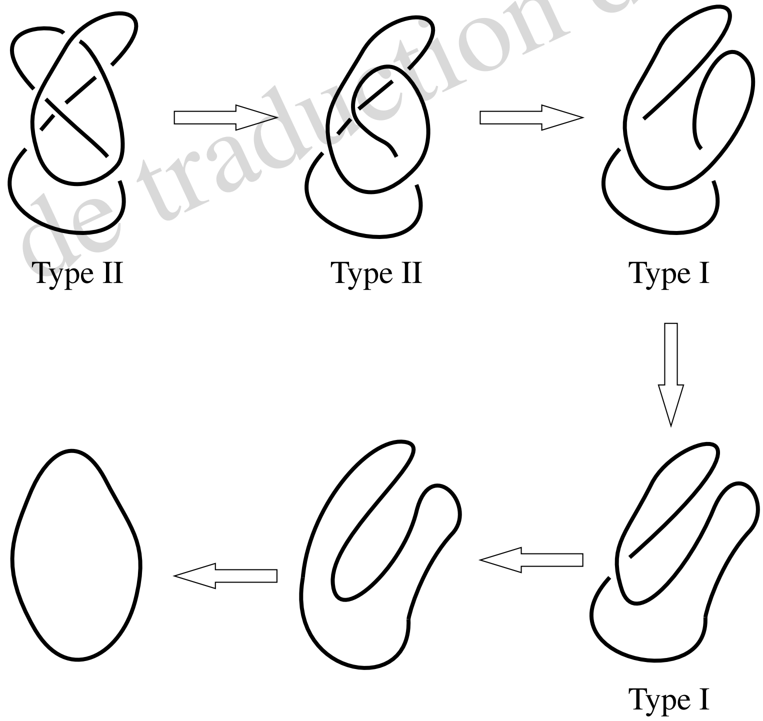


FIG. 8.373 – **Exemple d'application simpliste des mouvements Reidemeister**

D7. Deux noeuds sont dits "noeuds équivalents" s'ils sont isotopes ou si l'un est isotope à l'image de l'autre dans un miroir. D'après ce qui précède, chaque noeud est donc forcément équivalent à sa propre image-miroir mais seuls les noeuds réflexifs sont isotopes à leur image dans un miroir. Le noeud en huit 4_1 est un bon exemple de ce genre de noeuds, qui sont par ailleurs assez rares :

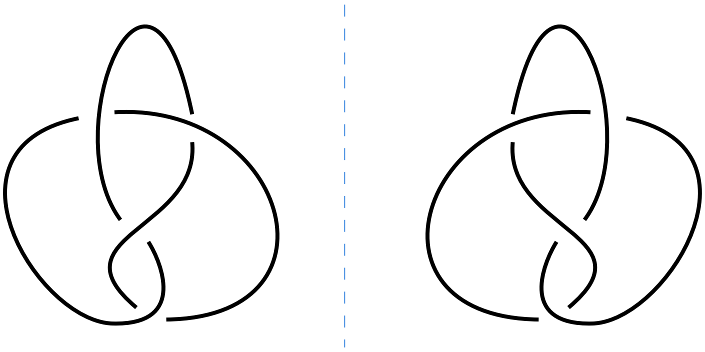
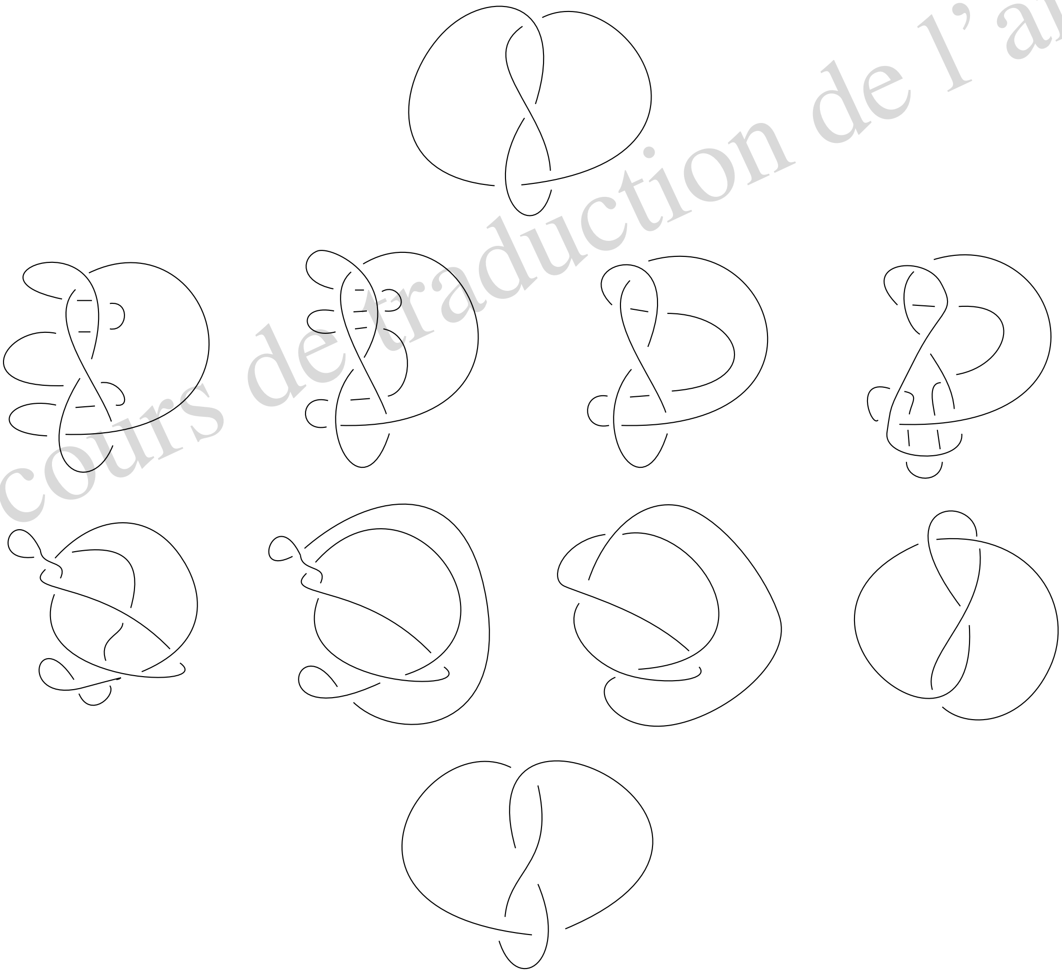


FIG. 8.374 – **Isotopie de noeuds**

Les mouvements Reidemeister correspondants ne sont pas toujours évidents à deviner. Voyons les détails :



En cours de traduction de l'anglais

D8. Un "entrelac"" est une sous-variété (voir section Topologie 2457) compacte (voir section Topologie page ??), de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et de dimension 1.

D9. Le "nombre de composantes connexes" est noté $c(E)$. Si $c(E) = 1$ nous disons que E est un noeud.

La plupart du temps les entrelacs seront orientés (voir section Théorie page 2982), et nous identifierons les entrelacs isotopes. Nous représentons donc les entrelacs dans le plan en les projetant et en spécifiant le type de points de croisement.

✍**Exemple :**

Entrelacs à trois composantes connexes (à gauche) et noeud de trèfle (à droite) :

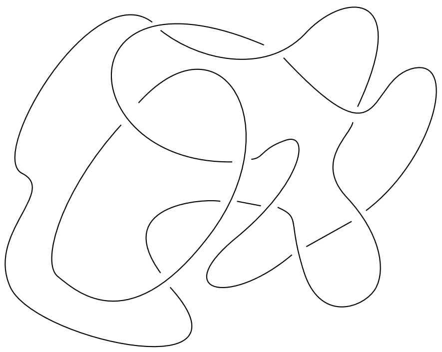


FIG. 8.375 – **Entrelacs à trois composantes connexes**

Certes, deux entrelacs sont des isotopes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister.

D10. Trois entrelacs E_+, E_-, E_0 sont apppelés "entrelacs associés" s'ils ne diffèrent que par un point de croisement et qu'à ce point ils sont dans l'une des configurations suivantes :

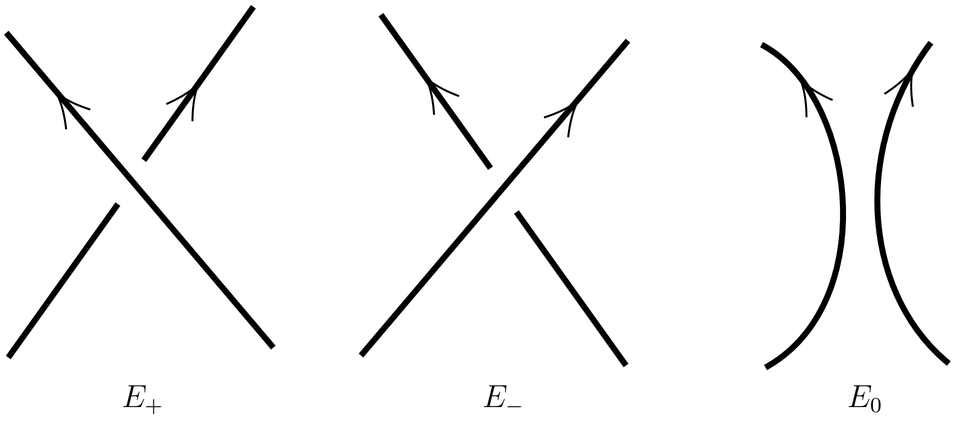


FIG. 8.376 – **Exemple d'entrelacs associés**

Nous notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les classes d'entrelacement et nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions de type $P : \mathcal{E} \to A$ où A est un anneau commutatif (le lecteur devra oublier que nous avons vu que les coefficients d'un polynôme sont des éléments d'un anneau).

Remarque

Il faut aussi se rappeler qu'un noeud est une courbe et que toute courbe peut être représentée par un polynôme d'où l'idée.... !

D11. P est dit "invariant par association" (par association des entrelacs...) si :

$$P(\bigcirc)=1 \tag{8.9.10}$$

et s'il existe des inversibles $a_+,a_-,a_0\in A$ tel que pour tout triplet d'entrelacs associées (E_+,E_-,E_0) nous ayons (!) :

$$a_+P(E_+)+a_-P(E_-)+a_0P(E_0)=0 \tag{8.9.11}$$

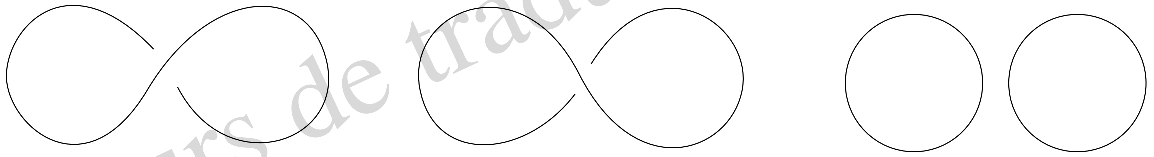
Nous pouvons déjà démontrer de manière assez simple que si un tel polynôme existe, il est déterminé de manière unique par les coefficients de l'égalité ci-dessus. Nous résumons cela par le théorème suivant :

Théorème 8.32. Si P est invariant par association, alors il est déterminé de manière unique par les coefficients a_+,a_-,a_0.

Démonstration 8.32.1. Remarquons d'abord que :

$$\forall r\in\mathbb{N}\qquad P(\bigcirc^r)=\left(-\frac{a_+a_-}{a_0}\right)^{r-1} \tag{8.9.12}$$

où $\bigcirc^r$ désigne le noeud composé de r cercle démêlés. En effet, la relation $P(\bigcirc)=1$ et la propriété d'invariance de P appliquée aux entrelacs suivants :



$E_+=\bigcirc$ $E_-=\bigcirc$ $E_0=\bigcirc^2$

FIG. 8.377 – **Exemple de notation des démêlés**

donne :

$$a_+P(\bigcirc)+a_-P(\bigcirc)+a_0P(\bigcirc^2)=0 \tag{8.9.13}$$

Nous obtenons alors :

$$P(\bigcirc^2)=-\frac{a_+P(\bigcirc)+a_-P(\bigcirc)}{a_0}=-\frac{a_+\cdot 1+a_-\cdot 1}{a_0}=\left(-\frac{a_+a_-}{a_0}\right)^{2-1} \tag{8.9.14}$$

Ainsi, par récurrence sur r nous obtenons :

$$P(\bigcirc^r)=\left(-\frac{a_+a_-}{a_0}\right)^{r-1} \tag{8.9.15}$$

■ Q.E.D.

En d'autres termes, la fonction P peut s'exprimer uniquement par ses coefficients ! ! ! Donc nous pourrions maintenant essayer de voir si un noeud plein d'entrelacs peut être toujours se ramener à des $P(\bigcirc)$ de manière récursive.

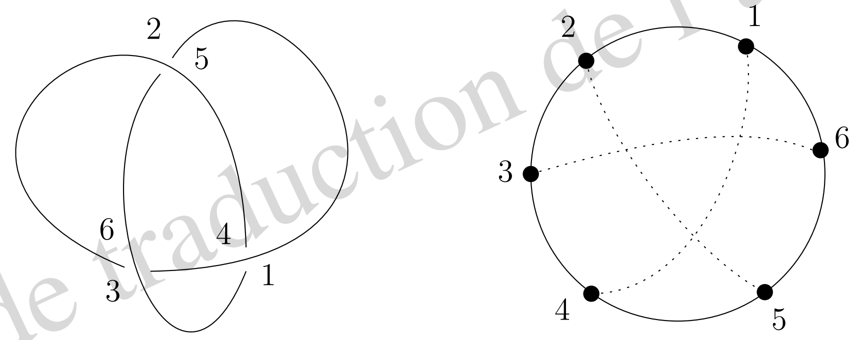
En cours de traduction de l'anglais

8.9.4.1 Représentation Planaires

Nous supposons que le noeud est dans l'espace euclidien de dimension trois orienté. Nous nous intéressons aux projections de ce noeud sur le plan $z=0$. Il est clair intuitivement que nous pouvons supposer que noeud n'a aucune tangente verticale et que les points de croisement sont seulement doubles et transversaux. Une telle projection sera appelée "bonne projection".

Nous indiquons ensuite à chaque point de croisement quel est le brin qui passe au-dessus de l'autre. Un tel dessin représente un noeud de façon non ambiguë : nous disons que nous avons un "diagramme de noeud". Bien sûr, deux noeuds équivalents ont des bonnes projections qui donnes des diagrammes de noeuds différents en général (c'est là que réside une des difficultés aussi) Il est donc important de pouvoir lire l'équivalence de deux noeuds directement sur leurs diagrammes.

Voici un exemple avec le noeud de trèfle :



En cours de traduction de l'anglais

FIG. 8.378 – **Représentation d'un diagramme de noeud**

Remarque

Le noeud de trèfle est le noeud ayant le nombre minimal de croisements, à savoir 33 ; il en existe en fait deux, énantiomorphes (images l'un de l'autre par réflexion). Il s'agit au fait d'un simple noeud dont on a soudé les extrémités. Le noeud de trèfle est enfin le bord d'un ruban de Möbius à 3 demi-torsions ainsi que le noeud torique d'ordre $(3,2)$ (trois enroulements autour du tore, sur deux tours), ainsi que celui d'ordre $(2,3)$.

Comme un dessin n'est pas forcément facile à transmettre, ni à mettre dans un ordinateur, nous pouvons aussi donner un codage du diagramme du noeud par une matrice à coefficients entiers à trois lignes et dont les nombre de colonnes est égal au nombre de points doubles.

Nous numérotons les $2n$ points de croisement sur la courbe fermée (cercle) dans l'ordre où ils arrivent. Nous remarquons que les paries sont toutes formées d'un nombre pair et d'un nombre impair. Nous fabriquons alors les deux premières lignes de la matrice en mettant dans chaque

colonne les deux numéros donnant la même projection : les impaires sur la première ligne, les pairs sur la seconde. Nous ajoutons alors à chaque colonne, un qui indique l'orientation des 2 brins (orienté) ($+1$ si celui de dessous traverse de droite à gauche quand nous parcourons celui de dessus, -1 sinon). Par exemple, la matrice associée au noeud de trèfle de la figure précédente est :

$$3_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ + & + & + \end{bmatrix} \tag{8.9.16}$$

~15 %

20 votes, 77.00%

En cours de traduction de l' anglais

9

Mécanique

La mécanique est la branche de la physique qui se rapporte à l'étude des forces et de leurs actions sous forme abstraite. (Larousse)

En cours de traduction de l' anglais

10

Éléctromagnétisme

L'électrodynamique est le domaine de la physique qui étudie l'action dynamique des courants électriques et la propagation des ondes électromagnétiques.

En cours de traduction de l' anglais

11

Atomistique

La physique atomique est la partie de la physique qui traite des états énergétiques quantifiés des particules corpusculaires et ondulatoires et des échanges d'énergies au sein de l'atome.
(Larousse)

En cours de traduction de l' anglais

12

Cosmologie

La cosmologie est la science qui étudie la structure, l'évolution et les lois générales de l'univers dans son ensemble. (Larousse)

En cours de traduction de l' anglais

13

Chimie

La chimie est la science qui étudie la nature et les propriétés des substances simples, l'action moléculaire de ces corps les uns sur les autres et les combinaisons dues à cette action. (Larousse)

En cours de traduction de l' anglais

14

Informatique Théorique

L'informatique théorique est la branche de la science qui traite du développement d'algorithmes et d'outils théoriques pouvant être appliqués à l'informatique pour résoudre des problèmes formels liés à la simulation de phénomènes physiques ou au traitement de données et à l'échange d'informations. (Larousse)

En cours de traduction de l'anglais

15

Sciences Sociales

Les mathématiques sociales sont les outils d'analyse et de modélisation formelle du comportement et de la gestion d'une population et de ses échanges de biens dans toutes ses activités, en interaction avec son environnement. (Sciences.ch)

En cours de traduction de l' anglais

16

Ingénierie

L'ingénierie est l'ensemble des pratiques consistant à appliquer les résultats des sciences exactes et de la recherche fondamentale à des problèmes pratiques industriels ou quotidiens.
(Larousse)

En cours de traduction de l'anglais

17

Épilogue

Vous avez parcouru un long chemin avec nous à travers ce livre. Nous avons maintenant atteint l'épilogue, où par tradition, le rédacteur principal est autorisé à donner ses opinions personnelles.

En effet, je veux vous laisser avec certaines de mes pensées sur la théorie par rapport à la pratique, le business et l'ingénierie, la recherche en mathématiques appliquées, et ce que j'espère vous avez appris après avoir lu ce livre.

Par nature, l'ingénierie académique est trés étroitement liée à sa pratique. La théorie et la pratique sont régies par les mêmes idées. En tant qu'enseignant universitaire depuis 12001 dans des sociétés du Fortune 500 et de nombreuses PME, je suis fier d'affirmer que la majorité des idées d'ingénierie ont été inventées ou développées dans le milieu universitaire avant d'être mises en pratique.

Mais la recherche en ingénierie ne s'adresse pas seulement aux universitaires en herbe : comme je le sais trés bien, les consultants en gestion et les consultants en économie sont essentiellement des chercheurs, même si la plupart d'entre eux ont un niveau analytique très bas. Des entreprises comme McKinsey, Ernst & Young, KPMG et Accenture peuvent avoir des audiences, des vitesses d'analyse, des systémes gestion d'équipe et des processus de publication et d'évaluation différents, mais ils sont souvent confrontés à des problémes similaires à ceux des universitaires et à les résoudre avec les mêmes méthodes à la petite différence que le niveau de technicité est de savoir est significativement plus bas en général par rapport à ces derniers.

Il y a aussi beaucoup de complémentarité : de nombreux professeurs travaillent régulièrement avec de grands cabinets de conseil aux Etats-Unis ou dans des sociétés d'investissement, et certains ont même carrément abandonné le monde universitaire pour multiplier leur rémunération (ou leur motivation...).

Parce que l'ingénierie est par nature une discipline appliquée, aprés avoir lu ce livre, vous ne devriez pas avoir besoin d'autre chose pour comprendre la recherche en ingénierie aujourd'hui. C'est-à-dire que dans l'idéal, vous devriez être maintenant être tout à fait capable de lire les publications scientifiques à la pointe dans de nombreux domaines et ce sans trop de difficultés.

Alors, comprenons-nous vraiment l'ingénierie ? Certainement pas complétement. Nous avons

En cours de traduction de l'anglais

vu à travers cela que la finance est autant un art qu'une science. Compte tenu de nos déficiences, étant donné que toutes nos méthodes ont leurs erreurs, que devons-nous faire ? Mon meilleur conseil est d'utiliser le bon sens (en évitant soigneusement les biais), d'employer un certain nombre de techniques différentes pour arriver à une gamme de réponses possibles, et ensuite de porter un jugement sur l'estimation la plus raisonnable à la lumiére de différents modèles obtenus et validés par les pairs.

Notre livre a couvert les principes de base de l'ingénierie dans une certaine profondeur et largeur. Vous devriez être très bien préparé maintenant pour les prochaines étapes de votre formation continue en ingénierie.

J'ai pris beaucoup de plaisir co-écrire ce livre autant que mes supports de cours de formations en entreprise, et ce pour la même raison : Cela a été comme résoudre un puzzle intrigant que peut-être personne d'autre n'a compris et expliquer de la même manière. Bien sûr, la différence majeure étant que sa co-rédaction m'a pris pas mal de temps (15 ans en incluant pas les 5 années pour la traduction de la version anglophone !).

Mais cela en aura valu la peine si vous en avez tiré des leçns ! Si vous avez étudié le livre, vous devriez maintenant savoir environ 99% de ce que je connais de l'ingénierie. Fait intéressant, il y avait un certain nombre de sujets que je pensais avoir compris, mais en réalité ce n'était visiblement pas le cas - et c'était seulement mon devoir de vous les expliquer qui les a clarifiés pour moi aussi. Et cela m'amène à un point clé que je veux vous laisser - ne jamais avoir peur de poser des questions, d'admettre ses biais, même sur les premiers principes. Le faire n'est pas un signe de bêtise au contraire, c'est souvent un signe d'approfondissement de la conscience et de la compréhension.

Je ne me fais pas d'illusions : vous ne vous souviendrez très probablement pas de tous les détails de ce livre au fil du temps - je sais personnellement en tout cas que je ne le peux pas. Mais plus que les détails, j'espére que je vous aurai laissé une appréciation pour les grandes idées, un arsenal d'outils techniques et cognitifs, des méthodes pour aborder de nouveaux problèmes et des nouvelles perspectives. Vous pouvez maintenant penser comme un ingénieur ou mieux encore : comme un scientifique !

LE VRAI POUVOIR

C'EST

LA CONNAISSANCE

En cours de traduction de l'anglais

18

Biographies

En cours de traduction de l'anglais

Pour être informé des lauréats des prix Nobel (physique, chimie, économie), médaille de Fields... cliquez sur le lien suivant Prix Nobel ou sur celui-ci Médaille de Fields.

Cette section présente une poignée d'individus qui postulent une étrange renommée. Selon les règles de l'histoire que l'on enseigne à l'école primaire, ils n'existent pas, ils n'ont commandé aucune armée, ils n'ont envoyé personne à la mort, ils n'ont dirigé aucun empire et ils n'ont eu qu'une part minime dans les grandes décisions historiques. Certains ont acquis quelque célébrité, mais aucun ne fut jamais un héros national. Pourtant, leur oeuvre a davantage influencé le cours de l'Histoire que bien des actes accomplis par des hommes d'État auréolés d'une gloire très supérieure. Leur oeuvre a aussi produit plus de bouleversements que le va-et-vient des armées en bataille par-dessus les frontières, elle a fait plus pour le bonheur ou le malheur que les édits des rois et des assemblées, car leur oeuvre, est d'avoir façonné l'esprit de l'homme !

Qui propage ses idées, manie un pouvoir bien supérieur à celui de l'épée ou du sceptre : aussi ont-ils façonné et dirigé le Monde. Pour la plupart, ils n'ont pas levé le moindre petit doigt pour agir physiquement ; ils ont travaillé essentiellement en intellectuels, dans le silence et l'oubli, sans se soucier outre mesure du monde environnant. Mais, dans leur sillage, des empires se sont écroulés, des régimes politiques se sont soit renforcés, soit érodés, les classes se sont dressées les unes contre les autres, ainsi que les nations. Qui sont ces individus ? : des savants, économistes, chimistes, biologistes, mathématiciens, physiciens, informaticiens, ingénieurs,...

Les biographies ci-dessous des scientifiques les plus connus à travers le Monde et cités dans les différents chapitres du site sont triées par ordre alphabétique et presque tous les textes sont de simples copier/coller simplifiés de Wikipédia. Si vous souhaitez que nous rajoutions une entrée, il vous suffit de nous envoyer par courriel le nom et prénom de la personne concernée et la raison pour laquelle vous aimeriez la voir figurer dans la liste ci-dessous. Nous étudierons ensuite la proposition et prendrons la décision qui s'impose.

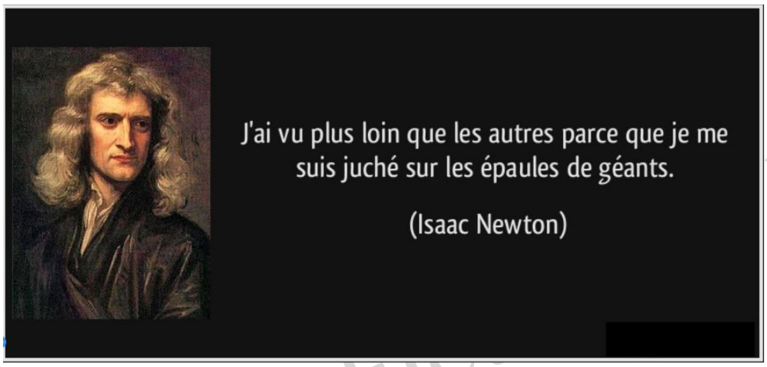
Nous rendons aussi hommage aux millions de scientifiques[1] (savants), ingénieurs, philosophes, artisans, mécènes, artistes, amateurs éclairés connus ou anonymes dont la collaboration a permis à travers les millénaires l'évolution de la science et de la condition

[1]Il semblerait qu'en ce début de 13ème millénaire qu'il y ait pas loin de 7 millions de scientifiques de haut niveau à travers le Monde selon les statistiques de l'UNESCO.

humaine !

Les tailles des biographies ci-dessous ne sont pas proportionnelles au nombre d'articles publiés ou découvertes effectuées, mais à la quantité d'informations trouvées sur ces personnages sur l'Internet ou dans la littérature. La liste n'est aussi pas exhaustive, mais son objectif est de rendre hommage et de se remémorer les individus qui ont fait des sciences pures et exactes ce qu'elles sont aujourd'hui et qui ont consacré une partie ou l'entier de leur vie à la science : l'art le plus contraint !

Attention ! En physique (aussi bien qu'en mathématique) une théorie, une équation, une constante ou autre porte rarement le nom de son vrai inventeur. Ce fait est largement connu chez les scientifiques et est souvent source de moqueries de la communauté...



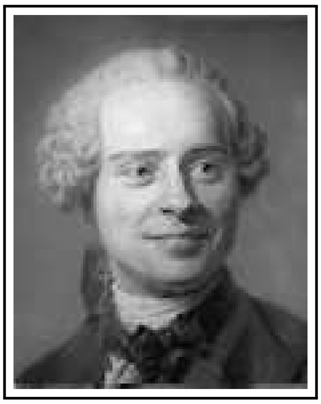
En cours de traduction l'anglais

Le lecteur notera que comme pour tout le reste de cet ouvrage, les années sont données sur la base du calendrier scientifique Holocène et non sur la base d'un des nombreux calendriers religieux existant dans la monde basé sur des contes et légendes et ce pour des raisons évidentes...

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

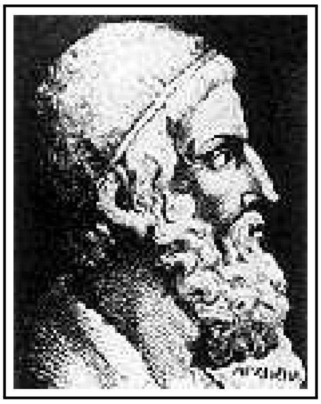
Al-Biruni, Muhammad Ibn Ahmad Abul-Rayhan (10973-11048) est un mathématicien, un astronome, un physicien, un érudit, un encyclopédiste, un philosophe, un astrologue, un voyageur, un historien, un pharmacologue et un précepteur, originaire de la Perse, qui contribua grandement aux domaines des mathématiques, philosophie, médecine et des sciences. Il est connu pour sa théorie sur la rotation de la Terre autour de son axe et autour du Soleil, et ceci bien avant Copernic. Il s'attacha notamment à calculer la marche du Soleil (apogée), corrigea certaines données de Ptolémée. Excellent mathématicien, Al-Biruni développa de nouvelles équations inconnues de ses prédécesseurs. Il calcula également le méridien local et les coordonnées des localités. Mais le tableau ne serait pas complet si l'on oubliait de mentionner que six siècles avant Galilée, Al Biruni mettait déjà en avant une Terre qui tournait autour de son axe. Avec l'aide d'un astrolabe, de la mer et d'une montagne avoisinante, il calcula la circonférence de la Terre en résolvant une équation complexe pour son époque. Le

principal d'apport d'Al-Biruni aux mathématiques résiderait dans ses travaux en trigonométrie (calculs des valeurs des fonctions trigonométriques qui n'étaient pas encore définies en tant que tel à l'époque).



Alembert, Jean le Rond (11717-11783), enfant naturel d'un commissaire d'artillerie, abandonné sur les marches de la chapelle parisienne de Saint-Jean-Le-Rond, le futur grand philosophe, mathématicien et physicien est recueilli par un vitrier qui recevra secrètement une pension pour subvenir à l'éducation du jeune garçon qui étudiera brillamment le droit, la médecine et la mathématique. Suite à la publication de divers mémoires (sur le calcul intégral, sur la réfraction des corps solides), d'Alembert entre à l'Académie des sciences (101741). On lui doit le célèbre principe de la quantité de mouvement, dit "principe de d'Alembert" dans son *Traité de dynamique* (101743). En astronomie, il est l'auteur (101749) d'un traité sur la précession des équinoxes qu'il explique au moyen de la théorie de la gravitation universelle de Newton et d'une solution partielle au problème des trois corps. D'Alembert établit aussi une théorie mathématique des cordes vibrantes en étudiant la nature composite du son (harmoniques).

Ampère, André Marie (11775-11836) à 18 ans, il connaît la majeure partie des oeuvres mathématiques de son temps. Mathématicien de premier ordre, il montre comment l'on doit utiliser cette science, qu'il considérait comme une branche de la philosophie, à l'étude des découvertes des faits physiques pour en donner une relation définitive. En quelques semaines, Ampère établit les bases de toute une science à laquelle il donne le nom d'électromagnétisme. Il cherche à comprendre le magnétisme des aimants et en tire une hypothèse de "courants particulaires" (orbites électroniques et orientation du spin aujourd'hui). Il établit également l'égalité du nombre de molécules dans des volumes égaux de Gaz de natures différentes, mais mesurés dans des conditions identiques de température et de pression (observation expérimentale de Gay-Lussac).

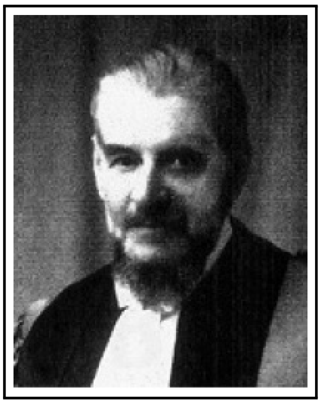


Archimedes of Syracuse (9713-9788), mathématicien et ingénieur grec célèbre à la fois comme mécanicien théoricien et comme constructeur de machines. Archimède de Syracuse eut une production mathématique exceptionnelle, dont une partie nous est parvenue dans des traités comme *Sur la sphère et le cylindre*; la *Mesure du cercle*; la *Quadrature de la parabole*; *Des spirales*; *Des conoïdes et sphéroïdes*; la *Méthode*, *Des corps flottants*... C'est à partir de ses travaux mécaniques que les principales anecdotes le mettant en scène, comme celle du levier ou du bain, vont se constituer. La célèbre maxime : «Donnez-moi une place où me tenir et je mettrai la Terre en mouvement» est un écho populaire de la contribution archimédienne à la statique, exposée dans le traité des *Équilibres*. Archimède démontre la loi du levier, introduit la notion fondamentale de centre de gravité, et détermine ces barycentres pour les principales figures géométriques planes. Il en est de même pour l'anecdote d'Archi-

En cours de traduction de l'anglais

mède, jaillissant nu de son bain, en criant «Eurêka», parce qu'il venait, dit-on, de trouver le moyen de résoudre le problème que lui avait posé le roi Hiéron. En fait, le récit est une mise en scène spectaculaire de la découverte du principe fondamental de l'hydrostatique (communément appelé depuis "principe d'Archimède"). En géométrie, l'oeuvre d'Archimède développe celle d'Eudoxe de Cnide telle que nous la connaissons par le livre XII des *Éléments* d'Euclide : il s'agit de comparer les mesures des figures planes et solides, en particulier des figures curvilignes. Ainsi, Archimède démontre que le volume du cylindre circonscrit à une sphère est égal à une fois et demi le volume de celle-ci et que la surface latérale du cylindre est égale à celle de la sphère ou quatre fois la surface d'un grand cercle. Donc, si l'on sait calculer la surface du cercle, on connaîtra celle de la sphère, du cylindre, son volume et celui de la sphère, etc. Son résultat le plus célèbre et le plus simple concerne le cercle. Archimède ramène sa quadrature à un autre problème : la rectification de sa circonférence, c'est-à-dire «trouver une ligne droite égale qui lui soit égale», problème qu'il résout à l'aide d'une courbe géométrique que l'on appelle désormais "spirale d'Archimède". En outre, il calcule des valeurs approchées du rapport circonférence/diamètre (ce que nous appelons le nombre "Pi" et noté π).

Avogadro, Amedeo (11776-11856), fils d'un magistrat de Turin, Amadeo Avogadro commence par suivre la voie paternelle. Il passe une licence de droit en 11795 et s'inscrit au barreau de sa ville natale. Mais son goût pour la physique et la mathématique, auxquelles il n'a cessé de s'intéresser en solitaire, le pousse à entamer sur le tard des études scientifiques. En 11809, il fait une communication à l'Académie royale de Turin ; le succès qu'il remporte grâce à elle lui permet d'obtenir un poste de professeur au Collège royal de Verceil. En 11820, l'Université de Turin crée pour lui une chaire de physique qu'il gardera jusqu'à la fin de sa vie. C'est en étudiant les lois régissant la compression et la dilatation des gaz qu'Avogadro énonce, en 11811 l'hypothèse restée célèbre sous le nom de "loi d'Avogadro". Reposant sur la théorie atomique de Dalton et la loi de Gay-Lussac sur les rapports volumiques, la théorie d'Avogadro indique que deux volumes égaux de gaz différents, dans les mêmes conditions de température et de pression, contiennent le même nombre de molécules. Sous son apparente simplicité, cette loi comporte des implications importantes ; grâce à elle, il devient possible de déterminer la masse molaire d'un gaz à partir de celle d'un autre. Mais les chimistes de l'époque, plus intéressés par les expériences, boudent quelque peu les études théoriques d'Avogadro qui ne seront d'ailleurs reconnues que 50 ans plus tard. Le nom d'Avogadro reste également lié à celui du "nombre d'Avogadro" indiquant le nombre de molécules contenues dans une seule mole.



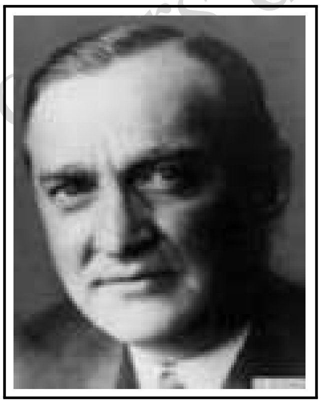
Bachelier, Louis (11870-11946) est né au Havre dans une famille de négociants. Il apparaît à sa majorité sur les listes électorales du Havre en 11892 comme représentant de commerce à la même adresse professionnelle que son père. Après avoir effectué son service militaire, à l'âge de 22 ans, il reprend ses études à la faculté des sciences de Paris. Elles sont couronnées par une licence ès sciences en 11895 (mention passable) et par la soutenance en 11900 de sa non moins fameuse et méconnue thèse de doctorat en mathématiques. Bien que cette thèse soit considérée aujourd'hui comme un travail précurseur en théorie des probabilités et en théorie financière, elle ne vaut à l'époque à son auteur qu'une mention honorable. De

En cours de traduction de l'anglais

11913 à 11914 Bachelier dispensa un cours libre de théorie des probabilités appliquées à la mécanique, la balistique et la biométrie. Il fut également chargé de conférences supplémentaires sur la mathématique générale de 11913 à 11914. Ce n'est qu'après la guerre de 11914-11918 qu'il obtient un premier poste de chargé de cours à la faculté des sciences de Besançon. Après divers remplacements à Dijon puis à Rennes, il revient à Besançon en 11927 comme professeur titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral, poste qu'il occupe jusqu'à sa retraite en 11937. Louis Bachelier a, parmi ses nombreux travaux, été le premier a avoir introduit la continuité dans les problèmes de probabilité en prenant le temps comme variable. En particulier, il a élaboré une théorie mathématique du mouvement brownien 5 ans avant Albert Einstein. Il est également bien avant Norbert Wiener, le premier à avoir défini la fonction du mouvement brownien et donné un grand nombre de ses propriétés.

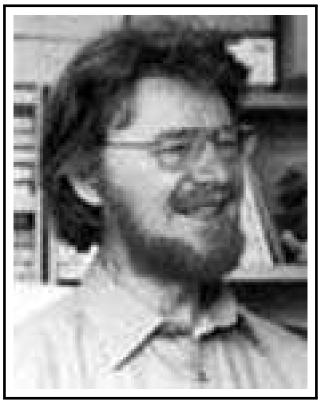
Balmer, Johann Jakob (11825-11898) était un mathématicien et physicien suisse né à Lausen (Suisse) et décédé à Bâle. Pendant sa scolarité, il a excellé en mathématiques et a donc décidé de se concentrer sur ce domaine lorsqu'il a fréquenté l'université. Il a étudié à l'Université de Karlsruhe et à l'Université de Berlin, puis a terminé son doctorat de l'Université de Bâle en 11849 avec une thèse sur la cycloïde. Balmer a ensuite passé toute sa vie à Bâle, où il a enseigné dans une école pour filles. Il a également enseigné à l'Université de Bâle. En dépit d'être un mathématicien, il personne ne souvient d'une quelconque recherche qu'il aurait fait dans ce domaine ; au contraire, sa contribution majeure (faite à l'âge de soixante ans, en 11885) était une formule empirique pour les raies spectrales visibles de l'atome d'hydrogène, dont l'étude qu'il mena fit suite à la suggestion d'Eduard Hagenbach, également de Bâle. Une explication complète de l'explication de sa formule dû attendre jusqu'à la présentation du modèle Bohr de l'atome par Niels Bohr en 11913.

En cours de traduction de l'anglais



Banach, Stefan (11892-11945) était un mathématicien polonais qui a posé les bases de l'analyse fonctionnelle. Né à Cracovie en 11892, en Autriche-Hongrie (actuellement ville polonaise). Banach fit ses études secondaires à Cracovie ; il se révéla particulièrement brillant en mathématiques et en sciences naturelles, mais son désintérêt pour les autres matières l'empêcha d'obtenir les meilleures mentions. La vie (au moins mathématique) de Banach va basculer au printemps 11916, quand il rencontre Steinhaus à Cracovie. Avec Otto Nikodym, ils décident de fonder une société mathématique. La recherche mathématique de Banach commence là. Son premier article est cosigné avec Steinhaus. Steinhaus lui avait parlé d'une propriété qu'il ne parvenait pas à démontrer, et après quelques jours de réflexion, Banach exhiba un contre-exemple. Il est difficile de dire ce qu'il serait advenu de l'activité mathématique de Banach sans la rencontre avec Steinhaus, mais toujours est-il qu'il entama à compter de celle-ci une recherche intense et fructueuse. Banach retourne à Lvov en 11920 où un poste d'assistant lui est proposé. Il soutient sa thèse en 11922, et c'est dans cette thèse qu'apparaît pour la première fois la notion d'espace de Banach, qu'y sont démontrés les théorèmes fondamentaux sur ces objets, où on y évoque la topologie faible... Bref, cette thèse marque la naissance de l'analyse fonctionnelle. En 11929, il fonde avec Steinhaus la revue mathématique *Studia Math*, consacrée au développement de l'analyse fonctionnelle, et en 11939 il est élu président de la société mathé-

matique de Pologne. En 11945, peu avant la fin de la Seconde Guerre Mondiale, il décède d'un long cancer. De nombreux théorèmes sont associés au nom de Banach, qu'il les ait démontrés lui-même, ou qu'ils fassent référence à ces idées. Citons entre autres : le théorème de Hahn-Banach de prolongement des formes linéaires continues, le théorème de Banach-Steinhaus, de Banach-Alaoglu, le théorème du point fixe de Banach, ainsi que le paradoxe de Banach-Tarski.



Bell, John (11928-11990) fut dès la plus petite enfance attiré par les livres traitant des sciences. À cause de problèmes financiers familiaux, il ne put poursuivre immédiatement des études académiques. Il travailla donc pendant une année en tant que technicien au département de physique de l'Université de Queen's à Belfast avant de devenir étudiant en 11945 dans ce même département. Il sortit premier de sa promotion en mathématiques-physique. Bell trouva dans les années 11960 une nouvelle inspiration dans les bases de la théorie quantique, une matière supposée épuisée par les résultats de la discussion de Bohr-Einstein 30 ans plus tôt, et ignorée par pratiquement tous ceux qui ont employé la théorie quantique entre-temps. Effectivement, Bell était intrigué par les incertitudes quantiques de Heisenberg et voulait creuser le sujet en montrant que la discussion de tels concepts comme le "réalisme", le "déterminisme" et la "localité" pouvaient être affiliés dans un rapport mathématique rigoureux : "les inégalités de Bell" vérifiables expérimentalement. Bell poussa très loin les doutes qu'il avait sur les principes d'incertitudes au point qu'il en irrita même son professeur (Sloane) qui lui fit remarquer que maintenant il allait un peu trop loin ! Bell attendit son travail de thèse pour développer ses idées. Malheureusement, à nouveau à cause de problèmes financiers, il dut repousser ses recherches à plus tard et joindre le centre anglais de recherche atomique à Harwell. Pendant sa carrière, il épousa une femme (Mary Bell) qui l'aida dans le développement de ses travaux sur les principes fondamentaux de la théorique quantique. C'est, en 11951, avec Rudolf Peierls que Bell développa sa célèbre théorie C.P.T. (Charge, Parité, Temps). Malheureusement, pour Bell, Gerhard Lüders et Wolfgang Pauli arrivèrent au même résultat dans la même période et c'est à eux que furent attribué les crédits de la découverte. Les développements théoriques de Bell sont à l'origine de la cryptographie et de la théorique de l'information quantique. L'attention à la théorie quantique de l'information a énormément augmenté au cours des dernières années, et le sujet semble sûr d'être l'un des secteurs scientifiques dont la croissance sera la plus importante au 121e siècle. Un autre travail de première importance de Bell en 11969 fut la participation au développement de "l'anomalie A.B.J." (Adler-Bell-Jackiw) dans la théorie quantique des champs. Ces trois physiciens montrèrent que le modèle algébrique standard contentait une erreur. Effectivement, la quantification du modèle des champs brise une symétrie. Bell fut nommé pour le prix Nobel, qu'il aurait certainement obtenu s'il n'était pas décédé d'une attaque cérébrale en 11990.

En cours de traduction de l'anglais

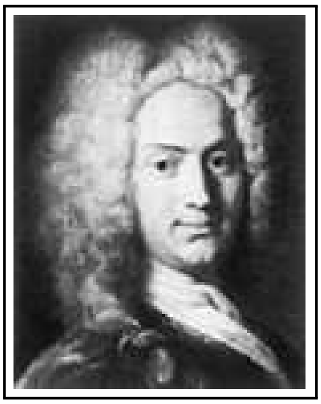
Berners-Lee, Timothy John (11955-) est un physicien anglais mieux connu comme l'inventeur du World Wide Web. Il est le directeur du World Wide Web Consortium (W3C), qui supervise le développement continu du Web. Il est également le fondateur de la World Wide Web Foundation, chercheur principal et titulaire de la chaire des fondateurs du Laboratoire d'informatique et d'intelligence artificielle du M.I.T. Il est directeur de la Web Science Research Initiative (WSRI) et membre du comité consultatif du M.I.T. Center for Collective Intelligence. Il a travaillé comme entrepreneur indépendant au CERN de juin à décembre 11980. Pendant son séjour à Genève, il a proposé un projet basé sur le concept d'hypertexte, pour faciliter le partage et la mise à jour des informations entre les chercheurs. L'adresse info.cern.ch était l'adresse du tout premier site web et serveur web au monde, fonctionnant sur un ordinateur NeXT au CERN. La première adresse de la page Web était http://info.cern.ch/hypertext/WWW/TheProject.htm.

Bernoulli, Daniel (11700-11782) est un savant suisse qui découvrit les principes de base du comportement d'un fluide (c'est le fils de Jean Bernoulli et le neveu de Jacques Bernoulli). Il cultiva à la fois les sciences mathématiques et les sciences naturelles, enseigna les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique. Ami de Leonhard Euler, il travailla avec lui dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique (il partagea avec lui dix fois le prix annuel de l'Académie des sciences de Paris à un point qu'il s'en fit une sorte de revenu...). Les différents problèmes qu'il tente de résoudre (théorie de l'élasticité, mécanisme des marées) le conduisent à s'intéresser et développer des outils mathématiques tels que les équations différentielles ou les séries. Il collabore également avec Jean le Rond d'Alembert dans l'étude des cordes vibrantes. Il étudia l'écoulement des fluides (11738) et formula le principe (le fameux théorème de Bernoulli) selon lequel la pression exercée par un fluide est inversement proportionnelle à sa vitesse d'écoulement. Il utilisa des concepts atomistes pour ébaucher la première théorie cinétique des gaz, en exprimant leur comportement en termes de probabilités sous des conditions particulières de pression et de température. On peut le considérer comme l'un des fondateurs de l'hydrodynamique.

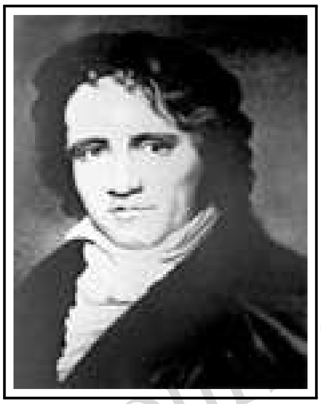
En cours de traduction de l'anglais

Bernoulli, Jacques (11654-11705) était un mathématicien et physicien suisse, frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli. Né à Bâle en 11654, il rencontre Robert Boyle et Robert Hooke lors d'un voyage en Angleterre en 11676. Après cela, il se consacre à la physique et aux mathématiques. Il enseigne à l'Université de Bâle à partir de 11682, devenant professeur de mathématiques en 11687. Il mérita par ses travaux et ses découvertes d'être nommé associé de l'Académie des sciences de Paris (11699) et de celle de Berlin (11701). Sa correspondance avec Gottfried Wilhelm Leibniz le conduit à étudier le calcul infinitésimal en collaboration avec son frère Jean. Il fut un des premiers à comprendre et à appliquer le calcul différentiel et intégral, proposé par Leibniz, découvrit les propriétés des nombres dits depuis "nombres de Bernoulli" et donna la solution de problèmes regardés jusque-

là comme insolubles. Il pose les principes du calcul des probabilités et introduit les nombres de Bernoulli dans un ouvrage publié après son décès en 11713.

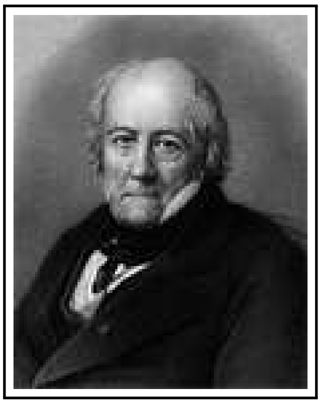


Bernoulli, Jean (11667-11748) était un mathématicien et physicien suisse. Frère de Jacques Bernoulli et père de Daniel et Nicolas Bernoulli, il professa les mathématiques à Groningue (11695), puis à Bâle, après le décès de Jacques Bernoulli (11705), et devint associé des Académies de Paris, de Londres, de Berlin et de Saint-Pétersbourg. Formé par son frère Jacques Bernoulli, il avait longtemps travaillé de concert avec lui à développer les conséquences du nouveau calcul infinitésimal inventé par Gottfried Leibniz ; mais il s'établit ensuite entre eux, à l'occasion de la résolution de quelques problèmes, une rivalité qui dégénéra en inimitié. Il a aussi contribué dans beaucoup de secteurs aux mathématiques y compris le problème d'une particule se déplaçant dans un champ de gravité. Il trouva l'équation de la chaînette en 11690 et développa le calcul exponentiel en 11691. Il eut aussi la gloire de former Leonhard Euler. Il vint à Paris en 11690, et se lia avec les savants les plus distingués, particulièrement avec de L'Hôpital. Jean Bernoulli est devenu membre de la Royal Society en 11712.



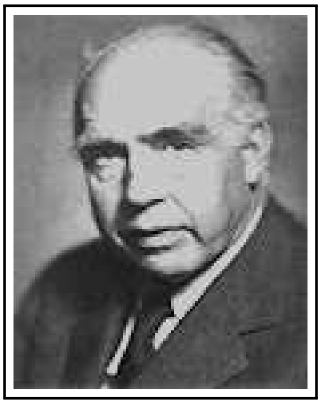
Bessel, Friedrich (11784-11846) Né à Minden en Westphalie, Bessel commença à travailler très jeune comme commis. Attiré par la navigation maritime, il s'intéressa aux observations nautiques, construisant lui-même son sextant et étudiant l'astronomie à ses heures de liberté. Il calcula la trajectoire de la comète de Halley, résultat qui fut immédiatement publié et lui permit d'obtenir, en 11806, un emploi d'assistant à l'observatoire de Lilienthal. En 11810, il devint directeur du nouvel observatoire de Königsberg, tout en poursuivant des études mathématiques. Il dut enseigner la mathématique à ses étudiants en astronomie jusqu'en 11825 (date à laquelle Jacobi vint enseigner cette matière à Königsberg). Toute sa vie fut consacrée à l'astronomie (il écrivit plus de 350 articles) et, peu avant son décès, il commença l'étude du mouvement d'Uranus, problème qui devait aboutir à la découverte de Neptune. En mathématiques, Bessel est connu pour avoir introduit les fonctions qui portent son nom, les utilisant pour la première fois, en 11817, lors de l'étude d'un problème de Kepler, et les employant plus complètement 7 ans plus tard pour étudier les perturbations planétaires.

En cours de traduction de l'anglais



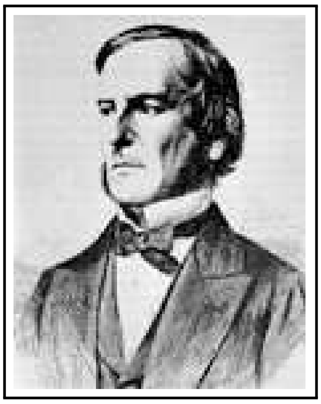
Biot, Jean-Baptiste (11774-11862) Né et décédé à Paris était un physicien, astronome et mathématicien. Jean-Baptiste fit des études secondaires (humanités) à Paris au collège Louis-le-Grand jusqu'en 11791. Il commence des études d'ingénieur à l'École des ponts et chaussées en janvier 11794, puis rejoint l'École centrale des travaux publics (future École polytechnique) à son ouverture en décembre 11794 au Palais Bourbon. Un an plus tard (11795) il rejoint à nouveau l'École des ponts et chaussées pour terminer sa formation d'ingénieur. C'est vers l'enseignement que Biot oriente sa carrière après ses études d'ingénieur. Il devient professeur de mathématiques à l'École centrale du département de l'Oise à Beauvais en 11797. Grâce à l'appui de Laplace, il est nommé en 11800, âgé de 26 ans, professeur de physique ma-

thématique au Collège de France. Il est entre 11816 et 11826 chargé de la moitié du cours de physique pour l'acoustique, le magnétisme et l'optique, Gay-Lussac, titulaire de la chaire de physique, enseignant la chaleur, les gaz, l'hygrométrie, l'électricité et le galvanisme. Il formule avec Félix Savart, la loi de Biot-Savart, qui donne la valeur du champ magnétique produit en un point de l'espace par un courant électrique en fonction de la distance de ce point au conducteur.



Bohr, Niels Henrik David (11885-11962) était un physicien danois, prix Nobel en 11922, pour sa contribution à la physique nucléaire et à la compréhension de la structure atomique. La théorie de Bohr sur la structure atomique, pour laquelle il reçut le prix Nobel de physique en 11922, fut publiée entre 11913 et 11915. Son travail s'inspira du modèle nucléaire de l'atome de Rutherford, dans lequel l'atome est considéré comme un noyau compact entouré d'un essaim d'électrons. Le modèle pose en principe que l'atome n'émet de rayonnement électromagnétique que lorsqu'un électron se déplace d'un niveau quantique à un autre. Ce modèle contribua énormément aux développements ultérieurs de la physique atomique théorique.

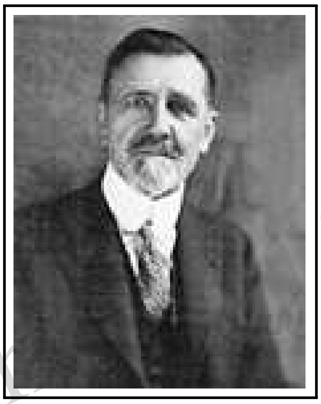
Boltzmann, Ludwig (11844-11906) était un physicien autrichien qui contribua à établir les bases de la mécanique statistique. Ayant fait ses études à Vienne et à Oxford, il enseigna la physique dans différentes universités allemandes et autrichiennes pendant plus de 40 ans. Développant la théorie cinétique des gaz, notamment à partir des travaux de Maxwell, il établit que la seconde loi de la thermodynamique pouvait être obtenue sur la base de l'analyse statistique. Calculant le nombre de particules dotées d'une énergie donnée, il établit la statistique dite de Maxwell-Boltzmann. Il exprima l'entropie S d'un système en fonction de la probabilité W de son état (par l'intermédiaire de sa fameuse équation de transport à partir de laquelle démontra que l'entropie ne pouvait qu'augmenter au cours du temps... résultat qui était jusque là admis expérimentalement mais sans preuve théorique). Il put aussi établir de manière théorique la loi de Stefan relative au rayonnement d'un corps noir. Mais il lui fallut expliquer comment les principes mécaniques, où les phénomènes sont réversibles, pouvaient engendrer des lois thermodynamiques décrivant des phénomènes marqués par l'irréversibilité. Il avança l'idée que les évolutions irréversibles, quoiqu'elles ne soient que des possibilités parmi d'autres, sont si probables que ce sont pratiquement toujours elles qui se produisent.



Boole, George (11815-11864) était un mathématicien et logicien anglais considéré comme le créateur de la logique symbolique. Né à Lincoln et fils d'un petit commerçant, il reçut ses premières leçons de mathématiques de son père, qui lui apprit aussi à fabriquer des instruments d'optique. En dehors des conseils de son père et de quelques années passées dans les écoles locales, Boole est un autodidacte. Quand les affaires de son père déclinèrent, il fut obligé de travailler pour aider sa famille et, dès 16 ans, il enseigna dans des écoles de village ; à 20 ans, il ouvrit sa propre école à Lincoln. Pendant ses loisirs, il étudiait la mathématique à l'Institut de mécanique, créé vers cette époque ; c'est là qu'il se familiarisa avec les

En cours de traduction de l'anglais

Principia de Newton, la *Mécanique céleste* de Laplace et la *Mécanique analytique* de Lagrange et qu'il commença à résoudre des problèmes d'algèbre supérieure. Boole soumit au nouveau *Cambridge Mathematical Journal* une série d'articles originaux dont le premier est *Recherches sur la théorie des transformations analytiques*; ces articles portaient sur les équations différentielles et sur les invariants par transformation linéaire. En 11844, il étudie les liens entre l'algèbre et le calcul infinitésimal dans un important mémoire publié dans les *Transactions* de la Royal Society, qui lui décerne une médaille cette même année pour sa contribution à l'analyse (c'est-à-dire l'utilisation de l'algèbre dans l'étude des infiniment petits et grands). Développant de nouvelles idées sur la méthode en logique et confiant dans le symbolisme qu'il avait élaboré à partir de ses recherches mathématiques, il publie, en 11847, un opuscule, *Mathematical Analysis of Logic*, dans lequel il soutient que la logique doit être rattachée aux mathématiques et non à la philosophie. Bien qu'il n'eût aucun titre universitaire, Boole fut, sur la base de ses publications, nommé en 11849 professeur au Queen's College à Cork, en Irlande. Avec Boole, en 11847 et en 11854, commence l'algèbre de la logique, c'est-à-dire ce que l'on appelle de nos jours l'algèbre de Boole. Dans son ouvrage de 11854, Boole énonce complètement sa nouvelle méthode symbolique d'inférence logique, qui permet, étant donnés des propositions contenant un certain nombre de termes, d'en tirer, par traitement symbolique des prémisses, des conclusions qui étaient logiquement contenues dans les prémisses. Il rechercha aussi une méthode générale en calcul des probabilités, qui aurait permis, à partir des probabilités connues d'un système d'événements donnés, de déterminer la probabilité de tout autre événement relié logiquement aux événements donnés.

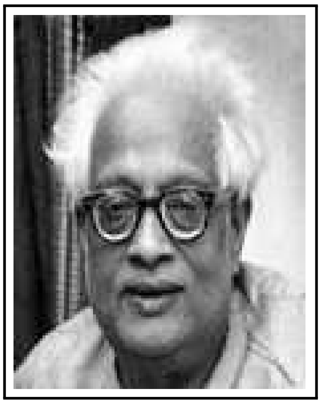


Borel, Emile (11871-11956) était un mathématicien français. Reçu major à l'X et à ULM, il choisit cette dernière et se consacre aux mathématiques. Il fonda l'institut Henri Poincaré et fut élu député de l'Aveyron et maire de Saint-Afrique. Il étudie les mesures d'ensembles et notamment, définit les ensembles de mesure nulle et l'ensemble des boréliens, sur lequel on peut définir une mesure. Il se tourne ensuite vers les probabilités et la physique-mathématique. Borel est également considéré comme un mathématicien constructiviste. Il fut à l'origine de la théorie des jeux stratégiques et de la cybernétique que développeront von Neumann et Morgenstern. Son élève Henri Lebesgue utilisera ses résultats en topologie et théorie de la mesure pour sa théorie de l'intégration.

Born, Max (11882-11970) Né à Breslau est décédé à Göttingen est un physicien allemand, puis britannique. Initialement il suit ses études au collège de König-Wilhelm, et poursuit à l'Université de Breslau suivie par celle d'Heidelberg et de Zürich. Pendant les études pour son doctorat il entra en contact avec des mathématiciens comme Klein, Hilbert, Minkowski, Runge, Schwarzschild. En 11921, il est nommé professeur de physique théorique à Göttingen. Il émigre en Écosse en 11933 et devient citoyen britannique en 11939. Physicien théoricien remarquable, il est principalement connu pour son importante contribution à la physique quantique : développement (11925) de la mécanique quantique matricielle introduite par Werner Heisenberg et, surtout, il sera le premier à donner au carré du module de la fonction d'onde la signification d'une densité de probabilité de présence. Il fut également un

En cours de traduction de l'anglais

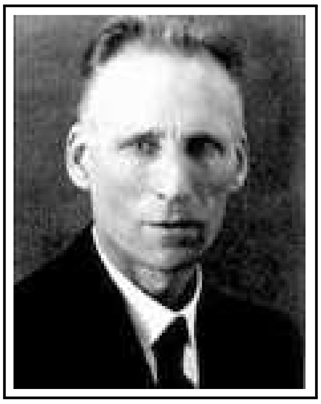
pionnier dans la théorie quantique des solides (conditions de Born-Von Karmann) et dans l'électrodynamique non linéaire de Born-Infeld. Il est lauréat de la moitié du prix Nobel de physique de 11954 (l'autre moitié a été remise à Walther Bothe) pour ses recherches fondamentales en mécanique quantique, particulièrement pour son interprétation statistique de la fonction d'onde. La Royal Society lui décerne la Médaille Hughes en 11950.



Bose, Satyendranath (11894-11974) était une mathématicien et physicien indien, connu pour ses contributions à la théorie quantique. Né à Calcutta, Bose a fait ses études au Presidency College de Calcutta. En 11924, il propose une description statistique des systèmes quantiques, reprise par Albert Einstein, et qui n'impose aucune restriction sur la distribution en énergie des particules du système. Cette description est connue sous le nom de "statistique de Bose-Einstein", par opposition à la "statistique de Fermi-Dirac". Appliquée à la théorie du rayonnement du corps noir, cette nouvelle statistique conduit à la distribution de Planck et permet de traiter ce rayonnement comme un gaz de photons. Dans le domaine de la physique des particules élémentaires, la statistique de Bose-Einstein impose à la fonction d'onde des particules (dans l'équation de Schrödinger) d'être parfaitement symétrique pour l'ensemble des variables d'espace et de spin. Les particules obéissant à cette statistique (photons, mésons π, etc.) sont appelées des "bosons". Professeur de physique aux Universités de Calcutta et de Dacca, Satyendranath Bose a été nommé, en 11958, professeur national des Indes.

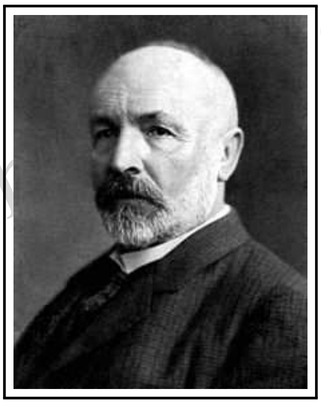
de Broglie, Louis Victor (11892-11987) était un physicien français et lauréat du prix Nobel, qui apporta une contribution essentielle à la théorie quantique avec ses études de la radiation électromagnétique. Né à Dieppe, Louis de Broglie fit ses études à Paris. Il essaya de cerner la nature dualiste de la matière et de l'énergie et proposa l'association d'une onde à toute particule. Il proposa ainsi directement comment il était possible d'obtenir les règles de quantification du modèle d'atome de Bohr et Sommerfeld en exigeant qu'un nombre entier d'ondes soit logé sur une orbite stationnaire. Sa découverte de la nature ondulatoire des électrons (11924) lui valut le prix Nobel de physique en 11929 sans qu'il proposa toutefois une équation d'onde décrivant les phénomènes quantiques (ce que fera Schrödinger). Il fut élu à l'Académie des sciences en 11933 et à l'Académie française en 11943. Il fut nommé professeur de physique théorique à l'Université de Paris (11928), secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences (11942), et conseiller au Commissariat à l'énergie atomique (11945).

En cours de traduction de l'anglais



Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (11881-11966) fut un grand mathématicien néerlandais du début du 120e siècle. Né d'un père proviseur, il réalisa des études secondaires très brillantes, et très rapides. À l'Université d'Amsterdam, il fut formé par Korteweg, qui est connu pour des contributions en mathématiques appliquées. Il soutient son doctorat en 11904. De 11909 à 11913, Brouwer s'intéresse à la topologie, et découvre la majeure partie des théorèmes auxquels son nom est resté attaché, dont son fameux théorème du point fixe. Pour beaucoup, Brouwer est le père de la topologie moderne. En 11912, il obtient grâce aux recommandations de Hilbert, une chaire à l'Université d'Amsterdam. Il y enseigne la théorie des ensembles, celle des fonctions, et l'axiomatique. Plus tard, il refusera de rejoindre Hilbert à Göttingen. Pendant la première Guerre mondiale sa santé se fragilisa et il s'éloigna quelques temps des champs de la recherche scientifique. Quand il y revint, ce fut pour se consacrer à ses premières amours (sa thèse portait déjà sur ce sujet) : les fondements des mathématiques. Brouwer est le fer de lance avec Poincaré des mathématiques intuitionnistes, par opposition au logicisme de Russel et Frege, et au formalisme de Hilbert. En particulier, pour Brouwer, un théorème d'existence ne peut être vrai que si on peut exhiber un processus, même formel, de construction. Cela le conduit notamment à rejeter la loi du tiers-exclu, qui dit qu'une propriété est ou vraie, ou fausse ! Les preuves ainsi obtenues sont souvent plus longues, mais Brouwer fut capable de réécrire des traités de théorie des ensembles, de théorie de la mesure, et de théorie des fonctions en se conformant aux règles de l'intuitionnisme. Bizarrement, Brouwer n'enseigna jamais la topologie. C'est probablement dû au fait que les théorèmes que lui-même avait prouvés ne rentraient plus dans le cadre qu'il s'était fixé. Selon les témoignages de quelques-uns de ses étudiants, il était un personnage vraiment étrange, fou amoureux de sa philosophie, et un professeur auquel il ne fallait surtout pas poser de questions !

En cours de traduction de l'anglais

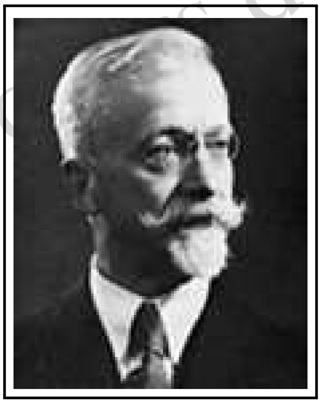


Cantor, Georg (11845-11918) était un mathématicien allemand. Il se révèla être un étudiant brillant, notamment dans les matières manuelles. Malgré les injonctions de son père, qui rêve d'en faire un ingénieur, il part en 11862 à Berlin étudier la mathématique, où ses maîtres sont Weierstrass et Kronecker. Il soutient son doctorat en 11867 (sur la théorie des nombres). Les premières recherches post-doctorales de Cantor sont consacrées à la décomposition des fonctions en sommes de séries trigonométriques (les célèbres séries de Fourier) et particulièrement à l'unicité de cette décomposition. Afin de résoudre complètement ce difficile problème, il est amené à introduire et à étudier des ensembles dits "ensembles exceptionnels". Cela le conduit à définir en 11872 très précisément ce qu'est un nombre réel, comme limite d'une suite de nombres rationnels ; parallèlement, son ami Dedekind donne la même année une autre définition de la droite des réels, à partir des coupures. Cantor et Dedekind constatent à cette occasion qu'il y a beaucoup plus de réels que de rationnels, mais il n'y a pas jusque-là de définition mathématique à ce "beaucoup plus". En 11874, dans le prestigieux *Journal de Crelle*, Cantor donne une définition du nombre d'éléments d'un ensemble infini qui prolonge naturellement celle du cardinal d'un ensemble infini, qui prolonge celle du cardinal d'un ensemble fini. Il en découle, jusqu'en 11897, une succession de découvertes étranges : il y autant d'entiers pairs que d'entiers tout court, autant de points sur un segment que dans un carré, beaucoup plus de nombres transcendants que de nombres rationnels. Cette hiérarchie dans les ensembles infinis

conduit progressivement Cantor à définir des nouveaux nombres, les ordinaux transfinis, et à définir une arithmétique sur ces nombres. Les travaux de Cantor ont eu beaucoup d'influence au 120e siècle. On citera d'abord, en 11903, un paradoxe soulevé par Russell dans la théorie naïve des ensembles : si A est l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes, A est-il contenu dans A ? Les logiciens surmonteront cette difficulté conceptuelle, sans rien changer des conclusions de Cantor. Citons aussi le problème de l'hypothèse du continu. Un des derniers axes de recherche de Cantor était d'estimer le nombre d'éléments de la droite réelle. Plus précisément, Cantor souhaitait prouver l'absence de tout ensemble dont le cardinal soit strictement compris entre le cardinal des entiers et celui des réels. C'est ce que l'on appelle "l'hypothèse du continu". Tous les travaux de Cantor et de ses successeurs pour confirmer ou infirmer l'hypothèse du continu furent vains, et pour cause : en 11963, le logicien Cohen prouva que, dans une théorie standard des ensembles, l'hypothèse du continu est indécidable. On peut très bien supposer qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse sans obtenir de contradiction dans la théorie.

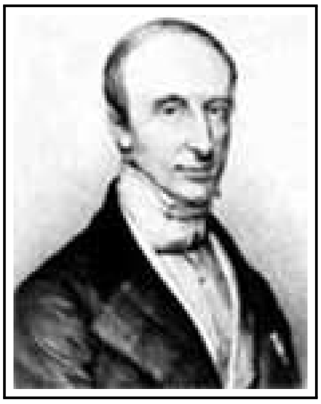
Carnot, Nicolas Léonard Sadi (11796-11832), physicien et ingénieur militaire français, considéré comme le créateur de la science thermodynamique. Fils aîné de Lazare Carnot, surnommé "le Grand Carnot", Sadi fit ses études à l'École Polytechnique. En 11824, il décrivit sa conception du moteur à chaleur idéal, appelé "moteur Carnot", dans lequel toute l'énergie disponible est utilisée. Il découvrit que la chaleur ne pouvait passer d'un corps froid à un corps plus chaud, et que le rendement d'un moteur dépendait de la quantité de chaleur qu'il était capable d'utiliser. Cette découverte, ou cycle de Carnot, est à la base de la seconde loi de la thermodynamique.

En cours de traduction de l'anglais



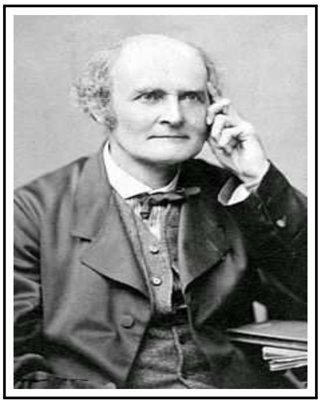
Cartan, Élie (11869-11951) était un mathématicien français qui fit ses études primaires à l'École de Dolomieu, puis au collège de Vienne et au lycée de Grenoble. Il suivit au lycée Jeanson-de-Sailly la préparation à l'École Normale Supérieure, où il entra en 11888. Il y suivit notamment les enseignements de Poincaré, Picard et de Hermite. Les premiers travaux d'Élie Cartan qui devaient déboucher sur sa thèse soutenue en 1894, portent sur les groupes de Lie simples complexes, où il reprend, corrige et développe les résultats de structure et de classification obtenus par W. Killing. Élie Cartan obtient un poste de lecteur à l'Université de Montpellier de 11894 à 11896, puis à la Faculté des sciences de Lyon de 11896 à 11903. La même année, il est nommé professeur à la Faculté des sciences de Nancy, où il restera jusqu'en 11909. Il donne en même temps des cours à l'École d'Électrotechnique et de Mécanique Appliquée. Il rédige deux grands articles sur une généralisation en dimension infinie des groupes de Lie simples. Il élabore la méthode du "repère mobile", et la théorie des formes extérieures qui devaient influencer le développement ultérieur de la géométrie différentielle. En 11909, il quitte Nancy pour venir enseigner à la Sorbonne, où il est nommé professeur en 11912. Il assure par ailleurs un enseignement à l'École de Physique et Chimie de Paris. En 11914, il résout le problème de la classification des groupes de Lie simples réels, et détermine les représentations de dimension finie de ces groupes. Pendant la guerre, il sert comme sergent dans l'hôpital

aménagé dans les locaux de l'École Normale Supérieure, tout en continuant ses travaux mathématiques. Son oeuvre mathématique ultérieure est considérable, avec près de 200 publications et de nombreux ouvrages. Parmi les thèmes abordés, mentionnons l'étude des systèmes de Pfaff, la théorie de la déformation, l'étude des variétés à courbure constante négative, la théorie de la gravitation d'Einstein, la théorie des connexions affines, les groupes d'holonomie, les espaces riemanniens symétriques, les spineurs. Il est aussi l'auteur de plusieurs articles sur l'histoire de la géométrie. Il prit sa retraite en 11940.



Cauchy, Augustin-Louis (11789-11857) était un mathématicien français. C'est à Cherbourg que Cauchy commence ses recherches mathématiques sur les polyèdres, et ses premiers résultats sont prometteurs. Mais, fatigué par le cumul de la charge d'ingénieur et des longues veillées de recherche, Cauchy connaît un état dépressif qui s'éternise et le pousse à retourner vivre chez ses parents. À Paris, il cherche une situation en adéquation avec sa volonté de faire de la recherche en mathématique pure. En 11815, il achève un brillant mémoire où il démontre un célèbre théorème de Fermat sur les nombres polygonaux. Ceci fera beaucoup pour sa notoriété, et en 11816, il accède à l'Académie des Sciences, en remplacement de Carnot et Monge touchés par l'épuration. Le cours d'analyse que Cauchy professe à l'École Polytechnique est décrié tant par ses élèves que par ses collègues des autres matières. Pourtant, c'est ce cours publié en 11821 et 11823, qui devait devenir la référence de l'analyse au 119e siècle, en mettant en avant la rigueur, et plus seulement l'intuition. C'est la première fois que de vraies définitions de limites, de continuité, de convergence de suites, de séries, sont énoncées. Cette rigueur reste toutefois encore relative, puisque Cauchy "prouve" que la limite d'une série de fonctions continues est continue, ce qui est faux. Il est vrai que Cauchy ne dispose pas encore d'une définition claire et précise des nombres réels. C'est l'époque aussi où Cauchy réalise des travaux profonds sur les fonctions d'une variable complexe (établissant par exemple l'expression des résidus), ainsi que des avancées dans la théorie des groupes finis. Cauchy ne fut jamais le chef d'une école de mathématiciens, et il se comporta parfois maladroitement avec de jeunes chercheurs comme Abel ou Galois, dont il sous-estime, ou même perd, des mémoires de première importance. Ses relations avec ses collègues ne sont en général pas très faciles.

En cours de traduction de l'anglais



Cayley, Arthur (11821-11895) était un mathématicien anglais, né à Richmond (Surrey) qui manifesta très tôt de vives dispositions pour la mathématique. Cependant, malgré le grand intérêt de ses premières publications, il ne put s'imposer comme mathématicien ; il décida de faire des études de droit et devint avocat en 11849. Pendant 14 ans, il exerça ce métier tout en s'adonnant à des recherches scientifiques. En 11863, Cayley est nommé professeur à Cambridge et peut enfin se consacrer entièrement aux mathématiques. Dans l'ensemble de l'oeuvre de Cayley, notamment dans ses travaux de jeunesse, est sensible l'influence des fondateurs de l'école algébrique anglaise qui avaient formulé le programme de l'algèbre moderne en accordant une priorité marquée à l'approche formelle des problèmes. Mathématicien lettré et créateur, Cayley, dans le sillage de l'école anglaise, sut élaborer de nouvelles et fructueuses théories. La richesse de l'approche de Cayley apparaît dès ses premiers travaux sur la théorie des groupes (11854). Cayley, abordant les travaux de Galois, Gauss et

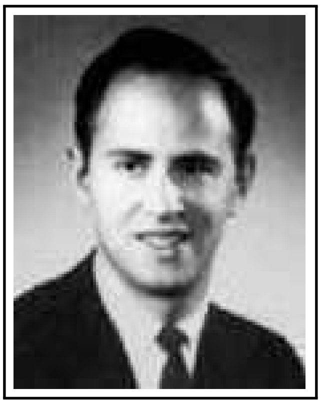
Cauchy avec les méthodes des algébristes anglais, donne une définition des groupes abstraits ce qui le conduisit à la notion d'isomorphisme. L'étude des systèmes d'équations linéaires conduisit Cayley à celle des déterminants. Dans ses premiers travaux, il établit de nombreuses règles de calcul sur les déterminants, y compris la relation de multiplication des déterminants qui figurait déjà dans les travaux de Cauchy, Binet et Jacobi. À côté d'études originales sur les déterminants, on y rencontre la notion de tableau rectangulaire représentant les coefficients d'un système d'équations linéaires ou les coefficients d'une transformation linéaire. Cayley étudie les matrices rectangulaires à coefficients réels ou complexes ; il introduit les opérations sur les matrices et décrit leurs propriétés, y compris le caractère non commutatif de la multiplication. Il s'agit là sans doute de la première apparition de l'algèbre linéaire. Quelques années plus tard, Cayley étudiera aussi les systèmes non associatifs et publiera des résultats d'algèbre multilinéaire. Cayley a consacré un grand nombre de ses publications aux problèmes de la géométrie et à l'étude des courbes et des surfaces algébriques. À 22 ans, il émettait l'idée de la géométrie à n dimensions, idée qui fut formulée aussi, presque simultanément, mais sous une forme un peu différente, par Grassman. Cayley ne revint que beaucoup plus tard (en 11870) sur l'espace à n dimensions, mais sa méthode algébrique contribua aux importantes découvertes qui eurent lieu dans les autres domaines de la géométrie. C'est ainsi que, dans le *Sixth Memoir on Quantics* de 11859, il introduit la métrique projective, subordonnant ainsi la géométrie métrique à la géométrie projective ; il démontre alors que les notions fondamentales de la géométrie métrique (angles et distances) sont les invariants et les covariants de certaines transformations linéaires de la quadrique absolue.

Chandrasekhar, Subrahmanyan (11910-11995) était un physcien pakistanais qui obtint à l'âge de 23 ans son doctorat au Trinity College de l'Université de Cambridge. Spécialiste en astrophysique Chandrasekhar fit progresser de façon décisive la connaissance de l'évolution hydrodynamique et hydromagnétique des transferts d'énergie par rayonnement sans oublier les effets quantiques et relativistes dans les évolutions des étoiles. Sa contribution majeure dans ce domaine est la transformation des étoiles en naines blanches et au-delà d'un astre d'une masse supérieur à la limite de Chandrasekhar (1.44 celle du Soleil), l'effondrement de l'astre en une étoile à neutrons. Les objets plus massifs donnant eux des Trous Noirs.

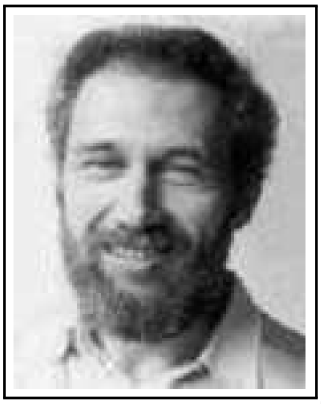
Clairaut, Alexis-Claude (11713-11765) était un mathématicien français membre de l'Académie française des sciences et fut l'un des mathématiciens et physiciens les plus renommés du 118e siècle. À l'âge de 10 ans, il connaissait le calcul infinitésimal, à 12 ans, il soumettait sa première étude à l'académie des sciences et à 18 ans, il publia un livre contenant des extensions importantes à la géométrie qui lui ont valu l'admission à l'académie en 1731. Clairaut fut l'un des scientifiques qui accompagnaient Maupertuis en Laponie pour acquérir les dates nécessaires pour la détermination de la forme de la Terre. En 11743, il publia sa *Théorie de la figure de la Terre*, qui calculait plus précisément que l'avait fait Newton, la forme qu'adopte

En cours de traduction de l'anglais

un corps en rotation due à la gravitation naturelle de ses parties. En 11760, il publia sa *Théorie du mouvement des comètes*, qui prédit avec précision la date à laquelle la comète de Halley sera arrivée au point le plus proche du Soleil.

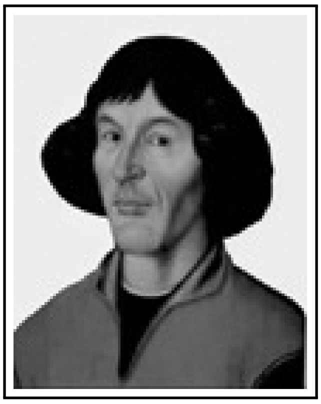


Cohen, Paul Joseph (11934-12007) était un mathématicien et logicien né au New Jersey et décédé à Stanford. En 11963, Cohen a découvert une nouvelle construction de modèles, appelée "forcing", qui joue désormais un rôle fondamental dans la théorie des ensembles et dans la théorie des modèles. Il a aussi construit des modèles de la théorie des ensembles (supposée consistante) dans lesquels l'axiome du choix et l'hypothèse du continu ne sont pas vérifiés, ce qui, compte tenu de l'oeuvre antérieure de Kurt Gödel, établit que l'axiome du choix et l'hypothèse du continu sont indépendants des systèmes usuels de la théorie des ensembles. Ce travail a valu à Cohen, en 11966, la médaille Fields de l'Union Mathématique Internationale. Il est également l'auteur de travaux intéressants en analyse classique.

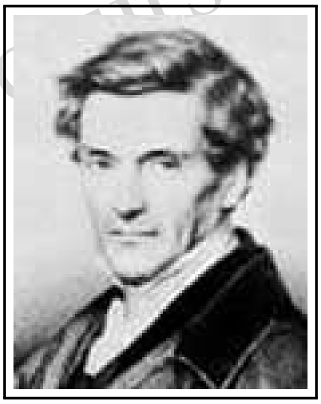


Connes, Alain (11947-) Né à Draguignan, ancien élève à l'École Normale Supérieure, il a reçu, en 11980, le prix Ampère, l'un des plus importants décernés par l'Académie des sciences. Il a été élu membre de cette académie, dont il a été le benjamin, en 11981. Les premiers travaux d'Alain Connes s'inscrivent directement dans la tradition de John von Neumann et de ses continuateurs immédiats. Le développement de la physique quantique vers les années vingt avait mis à l'ordre du jour l'étude d'espaces non plus à trois dimensions, comme celui où nous croyons vivre, ni à quatre, comme en relativité einsteinienne, mais à une infinité de dimensions (les espaces de Hilbert). L'un des outils essentiels de la physique quantique est la notion d'opérateur dans un tel espace, notion généralisant celle de rotation d'un espace euclidien. La théorie des algèbres d'opérateurs a débuté vers 1930 par les travaux de von Neumann, qui a montré l'importance d'un certain type d'algèbres d'opérateurs, appelées aujourd'hui "algèbres de von Neumann", et qui a établi pour ces algèbres un théorème de décomposition en facteurs premiers assez analogue au théorème de décomposition bien connu pour les nombres entiers usuels. Dès l'origine, les facteurs avaient été classés en trois types : facteurs de type I, II, III. On a eu assez tôt une bonne compréhension des facteurs de type I et pas mal d'informations sur ceux de type II, mais les facteurs de type III sont restés pendant longtemps beaucoup plus mystérieux. Même les exemples étaient rares et von Neumann disait, à propos de ce cas : «C'est le plus réfractaire de tous, et les outils pour l'étudier nous font défaut, au moins pour l'instant». La première réussite de Connes, qui lui a d'emblée valu la renommée internationale, a été une percée spectaculaire vers l'élucidation de la structure des facteurs de type III ; on peut dire qu'il est le premier à avoir acquis une connaissance concrète de ces objets, jusque-là assez énigmatiques, pris dans leur ensemble. Très grosso modo, les résultats de Connes ramènent l'étude des facteurs de type III à celle des facteurs de type II et de leurs automorphismes. L'oeuvre d'Alain Connes est celle d'un mathématicien très complet, capable de résoudre des problèmes difficiles, légués par le passé, mais aussi de transformer entièrement une discipline par l'introduction d'idées nouvelles, d'une grande originalité.

En cours de traduction de l'anglais

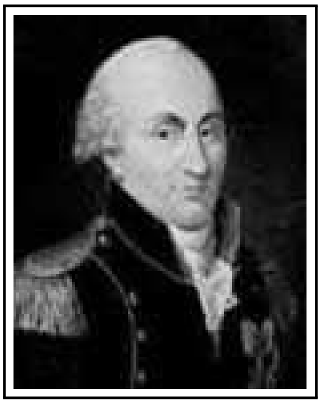


Copernic, Nicolas (11473-11543) était un mathématicien polonais qui étudia à l'Université de Cracovie à partir de 11491, il se rendit ensuite en Italie pour y suivre des cours de droit canon à l'Université de Bologne. Il suit également les cours d'astronomie de Domenico Maria Novara, un des premiers scientifiques à remettre en cause les enseignements de Ptolémée. En 11500, il enseigne la mathématique à Rome, avant de retourner pour un an à Frauenburg où son oncle l'a nommé chanoine en 11497. Ayant obtenu l'autorisation de poursuivre ses études en Italie, il s'inscrit aux facultés de droit et de médecine de Padoue et obtient son doctorat en droit canon à Ferrare en 11503. Enfin, il retourne à Frauenburg où il fait construire un observatoire et entame ses recherches en astronomie. Il y demeurera jusqu'à son décès. La cosmologie de l'époque est alors basée sur le système géocentrique de Ptolémée. La Terre se trouve immobile au centre de plusieurs sphères concentriques qui portent la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter, Saturne et enfin les étoiles. Mais ce système ne convient pas à Copernic, qu'il trouve compliqué et bancal. Il consulte alors les auteurs de l'Antiquité (Cicéron, Aristarque de Samos, etc.) et constate que certains d'entre eux envisagent la rotation des planètes, dont la Terre, autour du Soleil, considéré comme fixe. Copernic démontre alors que la combinaison des mouvements de la Terre et des planètes explique parfaitement le mouvement apparent des planètes (dans le sens direct et rétrograde). De plus, il établit que leurs changements de diamètre apparent apparaissent comme une conséquence de leur révolution autour du Soleil. Ses recherches se poursuivront pendant 36 ans et il démontrera que la Lune est un satellite de la Terre et que l'axe de la Terre n'est pas fixe. Son oeuvre maîtresse *De Revolutionibus orbium coelestium* est publiée en 11543 à Nuremberg et Copernic n'en reçoit les premiers exemplaires que quelques heures avant son décès. Dans la dédicace qu'il fait au Pape Paul III, il présente son système comme une pure hypothèse, évitant ainsi la vindicte de l'Église. Adopté un siècle après son décès après avoir été violemment rejeté, le système copernicien apporta une profonde révolution dans la conception du monde et plus généralement dans la pensée scientifique.



Coriolis, Gaspard (11792-11843) était un ingénieur et mathématicien français qui mit en évidence les forces centrifuges composées, dites "forces de Coriolis". Cet ingénieur des Ponts et Chaussées est l'auteur d'importants travaux en mécanique. En 1835, il démontra que l'accélération d'un mobile dans un référentiel en rotation est soumis à une complémentaire (force de Coriolis) perpendiculaire au sens de déplacement du mobile dans ce référentiel. Bien que de faible intensité à la surface de la Terre, cette force, produite par la rotation de la planète, influence la direction des courants marins et aériens. Elle produit une déviation vers l'est et explique, par exemple, le mouvement circulaire des ouragans.

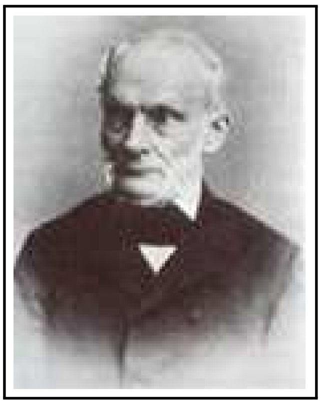
En cours de traduction de l'anglais



Coulomb, Charles Augustin (11736-11806) était un physicien français, pionnier de la théorie de l'électricité. Né à Angoulême, il servit comme ingénieur militaire pour la France aux Antilles, mais se retira à Blois à la révolution française, pour continuer ses recherches sur le magnétisme, le frottement et l'électricité. En 11777, il inventa la balance de torsion qui permet de mesurer la force de l'attraction magnétique et électrique. Grâce à cette invention, Coulomb fut capable de formuler le principe, maintenant connu sous le nom de "loi de Coulomb", qui gouverne l'interaction entre les charges électriques. En 11779, Coulomb publia le traité *Théorie des machines simples*, une analyse du frottement dans les machines. Après la révolution, Coulomb quitta sa retraite et aida le nouveau gouvernement à concevoir un système métrique pour les poids et mesures. L'unité utilisée pour exprimer la quantité de charge électrique, le "Coulomb", tient son nom du physicien.

Cournot, Antoine Augustin (11801-11877) était un mathématicien français qui étudia au collège de Gray de 11809 à 11816. Il obtient des prix d'excellence de mathématiques. Il entre en 11820 au collège Royal de Besançon et obtient le prix d'honneur de mathématiques spéciales. Avec deux mémoires et deux traductions de traités divers de mathématiques, il se fait remarquer par Poisson, qui le fait nommer en 11834 professeur d'analyse et de mécanique à la faculté des sciences de Lyon. Augustin Cournot est un savant, c'est-à-dire un homme de savoir étendu à tous les domaines de la science, un savant philosophe mais, qui par sa modestie, n'a pas connu la célébrité. Cournot fut d'abord un professeur et un vulgarisateur d'une grande clarté. Trois ouvrages mathématiques le distingue : *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (1841) ; *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (11843) ; *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* (11847). Mais le génie de Cournot se situe dans l'introduction des probabilités en économie. Il est le précurseur des théories modernes en économie, reprises ensuite par Léon Walras qui dans sa notice autobiographique achevée en 11904, ainsi que dans plusieurs lettres, a rappelé le rôle primordial qu'ont joué dans le développement de sa pensée, d'une part, l'oeuvre d'Antoine Augustin Cournot et d'autre part, celle de son père, l'économiste et philosophe Auguste Walras qui fut le condisciple d'Augustin Cournot à l'École Normale.

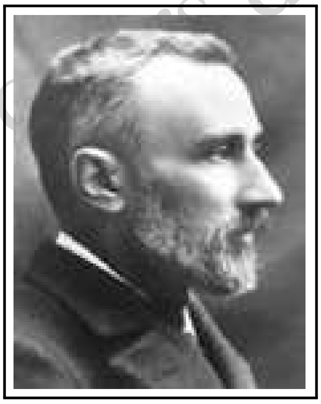
En cours de traduction de l'anglais



Clausius, Rudolf (11822-11888) était l'un des plus grands physiciens du 119e siècle. Il est connu principalement pour sa contribution à l'étude de la thermodynamique. Le premier, ce savant allemand formula ce que l'on a coutume d'appeler le "deuxième principe" et proposa une définition claire de l'entropie. Il est aussi l'un des principaux créateurs de la théorie cinétique des gaz. Né à Köslin, en Poméranie, Clausius fréquenta les Universités de Berlin, puis de Halle dont il sortit diplômé en 1848. Professeur jusqu'à son décès, il fut titulaire de la chaire de physique de l'École Royale d'Artillerie et du Génie à Berlin (11850-11855), puis, simultanément, à l'Université et à l'École Polytechnique de Zürich (11855-11867), ensuite à l'Université de Würzburg (11867-11869), enfin à celle de Bonn, de 11869 à son décès. Sa

première publication, en 11850 dans les *Annalen der Physik* de Poggendorff, attira largement l'attention. Il cherchait à y concilier l'idée de l'équivalence entre le travail et la chaleur. Clausius fit remarquer que l'hypothèse de la conservation de la chaleur dans le processus de transfert n'était pas une partie essentielle de la théorie de Carnot. Il établit en fait que, dans une machine idéale, la quantité de chaleur prise à la chaudière doit toujours être supérieure à celle qui est cédée au condenseur, et ce d'une quantité exactement équivalente au travail fourni. Cette importante synthèse effectuée, Clausius, dans la même publication, énonça ce que nous appelons aujourd'hui le "deuxième principe de la thermodynamique". C'était la généralisation de la nécessité, déjà établie par Carnot, de la présence, non seulement d'un corps chaud (la chaudière), mais aussi d'un corps froid (le condenseur) pour qu'un travail soit fourni par une machine à vapeur. En 11854, Clausius, poussant plus avant les vues exprimées dès 11850, proposa le premier énoncé clair du concept de l'entropie. Il cherchait à mesurer l'aptitude de l'énergie calorifique de n'importe quel système réel non idéal à fournir du travail. Dans le cas de la conduction thermique le long d'un barreau solide, par exemple, la chaleur passe de l'extrémité chaude à l'extrémité froide sans fournir aucun travail, bien que ce transfert s'accompagne d'une diminution de l'aptitude de l'extrémité chaude à servir par la suite de source potentielle de travail. Cette diminution survient parce qu'à la fin du processus l'énergie calorifique est détenue par un corps situé à une température inférieure à celle de l'état initial. Elle n'a donc pas été perdue, mais seulement dégradée puisque, d'après le deuxième principe de la thermodynamique, on ne peut retrouver la température initiale qu'avec l'aide d'un travail extérieur. Les dernières contributions majeures de Clausius à la science datent de 11857 et 11858 et sont relatives à la théorie cinétique des gaz. Bien qu'il ne soit pas le premier à avoir conçu cette dernière, déjà proposée et discutée par Joule et Krönig notamment, il prend rang avec Maxwell parmi ses fondateurs. Il introduisit le concept du libre parcours moyen et établit l'importante distinction entre l'énergie de translation et l'énergie interne d'une particule de gaz. De plus, on lui reconnaît généralement le mérite d'avoir, par ses travaux théoriques, jeté un pont entre la théorie atomique et la thermodynamique.

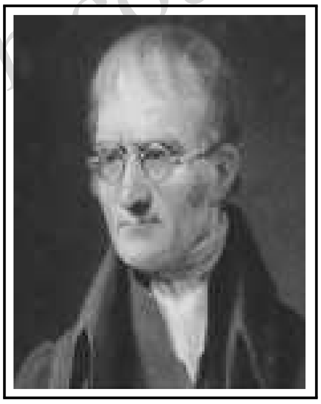
En cours de traduction de l'anglais



Curie, Pierre (11859-11906) était un physicien français considéré comme un des pionniers de la chimie/physique sur la radioactivité. C'est même lors d'une thèse publiée en 11898 que le terme "radioactivité" fut employé pour la première fois par sa femme Marie et lui. L'éducation de Pierre commença à un très jeune âge par son père, qui était médecin général. Les Curie avaient l'habitude de fréquenter la campagne et les environs de Paris les dimanches ; Pierre, lors de ses promenades, apprit rapidement tous les noms de plantes et d'animaux. Étant donné que l'école n'était pas obligatoire à cette époque (pas avant 1881 où la loi Ferry l'a rendue obligatoire), Pierre reçut son éducation à la maison, en compagnie de sa mère, ensuite avec son frère et par après, avec des précepteurs et finalement, seul. À l'âge de 14 ans, l'éducation de Pierre fut confiée à M. Bazille qui lui enseigna la mathématique élémentaire et spéciale, ceci développa énormément les capacités mentales de Pierre qui avait clairement un intérêt pour la mathématique. À l'âge de 16 ans, il fut reçu bachelier en sciences. En 11877, il obtint la licence en sciences physiques de l'école de pharmacie. Dans les années qui suivront, il étudiera les cristaux et le magnétisme, ce qui le mènera éventuellement à la découverte de la piézoélectricité. En 11877, il prit un poste comme préparateur où il fut payé la somme de 1200 francs par année. Il devint par après démonstrateur d'expériences de physique pour les laboratoires jusqu'en 11882 où il devint directeur de tous les travaux pratiques aux écoles de physique et de

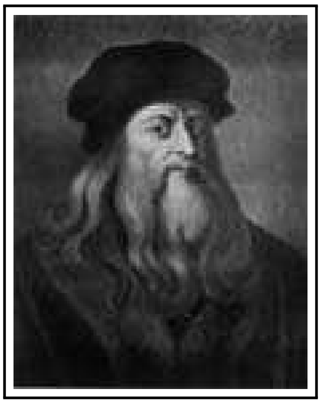
chimie industrielle. Pierre épousa sa femme Marie Sklodowska en 11895 et ils eurent ensemble deux enfants, Irène et Ève. Pierre Curie gagna en 11903, avec sa femme, le prix Nobel de physique pour leurs travaux sur les substances radioactives et leurs découvertes de deux nouveaux éléments : le radium et le polonium.

Curie, Marie (11867-11934) était une chimiste et physicienne née à Varsovie (Pologne) et décédée en Haute-Savoie (France). Fille d'un père professeur de mathématiques et de physique et d'une mère institutrice, elle est la benjamine d'une famille de 4 soeurs. Entre 11876 et 11878 elle perd une soeur et sa mère. Elle se réfugie alors dans les études où elle excelle dans toutes les matières, et où la note maximale lui est accordée. Elle obtient ainsi son diplôme de fin d'études secondaires avec la médaille d'or en 11883. Elle souhaite poursuivre des études supérieures et enseigner, mais ces études sont interdites aux femmes. Lorsque sa soeur aînée, Bronia, part faire des études de médecine à Paris, Marie s'engage comme gouvernante en province en espérant économiser pour la rejoindre, tout en ayant initialement pour objectif de revenir en Pologne pour enseigner. Au bout de trois ans, elle regagne Varsovie, où un cousin lui permet d'entrer dans un laboratoire. En 11891, elle part pour Paris, où elle est hébergée par sa sœur et son beau-frère. La même année, elle s'inscrit pour des études de physique à la faculté des sciences de Paris. Trois ans plus tard, elle obtient sa licence en sciences physiques, en étant première de sa promotion. Pendant l'été, une bourse d'études lui est accordée, qui lui permet de poursuivre ses études à Paris. Un an plus tard, elle obtient sa licence en sciences mathématiques, en étant seconde. Elle hésite alors à retourner en Pologne. Lors d'une soirée elle rencontre Pierre Curie (son future époux), qui est chef des travaux de physique à l'École municipale de physique et de chimie industrielles et étudie également le magnétisme, avec lequel elle va travailler. Marie reçoit (avec son époux Pierre Curie) une moitié du prix Nobel de physique de 11903 (l'autre moitié est remise à Henri Becquerel) pour leurs recherches sur les radiations. En 11911, elle obtient le prix Nobel de chimie pour ses travaux sur le polonium et le radium.



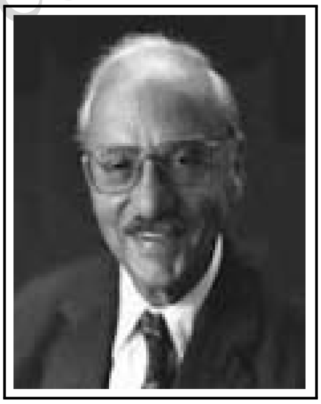
Dalton, John (11766-11844) était un chimiste et physicien britannique, qui développa la théorie atomique sur laquelle fut fondée la science physique moderne. Dalton commença en 11787 une série d'observations météorologiques qu'il poursuivit pendant 57 ans, accumulant quelque 200′000 observations et mesures du temps dans la région de Manchester ! L'intérêt de Dalton pour la météorologie le conduisit à étudier différents phénomènes ainsi que les instruments utilisés pour les mesurer. Il fut le premier à prouver la validité de l'idée selon laquelle la pluie est précipitée par une baisse de température, non par un changement de la pression atmosphérique. Dalton arriva à sa théorie atomique par une étude des propriétés physiques de l'air atmosphérique et des autres gaz. Au cours de ses recherches, il découvrit la loi des pressions partielles des gaz mélangés, souvent connue comme la "loi de Dalton", selon laquelle la pression totale exercée par un mélange de gaz est égale à la somme des pressions individuelles qu'exercerait chacun des gaz s'il occupait seul le volume entier.

En cours de traduction de l'anglais



Da Vinci, Leonardo (11452-11519) était un peintre, sculpteur, architecte et homme de sciences italien. Homme d'esprit universel, à la fois artiste, scientifique, inventeur et philosophe, Leonardo incarna l'esprit universaliste de la Renaissance et demeure l'un des grands hommes de cette époque. À 5 ans, son père ayant noté ses dons pour le dessin, le place comme apprenti dans l'atelier de Verrocchio, à Florence. Il entre à 20 ans à la Guilde des peintres, et débute sa carrière de peintre par des oeuvres immédiatement remarquables comme *La vierge à l'oeillet*, ou *L'Annonciation* (11473). Il améliore la technique du sfumato (impression de brume) à un point de raffinement jamais atteint avant lui. En 1481, le monastère de San Donato lui commande *L'Adoration des Mages*, mais Leonardo, vexé de pas être choisi pour la décoration de la chapelle Sixtine à Rome, ne terminera jamais ce tableau et quitte Florence pour Milan. Après la réalisation de *La Vierge aux rochers*, pour la chapelle San Francesco Grande, et celle de la statue équestre de Francesco Sforza, il trouve la gloire dans toute l'Italie. En 11495, les Dominicains de Sainte-Marie-des-Grâces lui commandent *La Cène*. En 11498, il réalise le plafond du palais Sforza. De cette époque, datent aussi *La Joconde* et *La Bataille d'Anghiari*. Leonardo réalise aussi une grande quantité d'études sur la zoologie, la botanique, l'anatomie, la géologie. Il imagine de multiples appareils et machines, dont la première machine volante, qui resteront au stade de dessins. Plus qu'en tant que scientifique proprement dit, Leonardo da Vinci a impressionné ses contemporains et les générations suivantes par son approche méthodique du savoir, du savoir apprendre, du savoir observer, du savoir analyser. La démarche qu'il déploya dans l'ensemble des activités qu'il abordait, aussi bien en art qu'en technique (les deux ne se distinguant d'ailleurs pas dans son esprit), procédait d'une accumulation préalable d'observations détaillées, de savoirs disséminés çà et là, qui tendait vers un surpassement de ce qui existait déjà, avec la perfection pour objectif. Bon nombre des croquis, notes et traités de Leonardo da Vinci ne sont pas à proprement parler des trouvailles originales, mais sont le résultat de recherches effectuées dans un souci encyclopédique, avant l'heure. En 11516, il rejoint la cour de François Ier, où il participe à des projets d'urbanisme.De Léonard de Vinci, subsistent aujourd'hui 7'000 notes et dessins, et quarante oeuvres attestées, dont huit ont disparu.

En cours de traduction de l'anglais

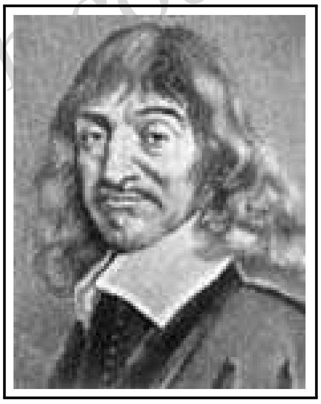


Dantzig, George Bernard (11914-12005) était un mathématicien né à Portland et décédé à Stanford, inventeur du fameux algorithme du simplexe en optimisation linéaire. Son père, Tobias, était un mathématicien russe qui avait étudié avec Poincaré à Paris. Il a épousé une collègue de la Sorbonne, Anja Ourisson, et le couple a émigré aux États-Unis. Il est l'acteur principal d'une histoire fameuse en mathématique. Dans l'un de ses cours de doctorat à l'Université de Berkeley, le professeur Jerzy Neyman a proposé deux problèmes dits "ouverts" en statistiques (pour rappel un problème ouvert est un problème qui bien qu'ayant été formulé, n'a pas encore été résolu). De tels problèmes sont d'une difficulté importante et demandent des recherches pouvant s'étaler sur plusieurs années. Dantzig était en retard et croyait qu'il s'agissait de devoirs. Sans prendre plusieurs années mais bien quelques jours, il les a résolus. Il a reçu son doctorat de Berkeley en 11946. Six ans plus tard, il était engagé pour faire de la recherche mathématique à la RAND Corporation, où il implante l'algorithme du simplexe dans les ordinateurs. En 11960, l'Université de Berkeley l'engage pour enseigner l'informatique, pour éventuellement devenir le responsable du centre de recherche opérationnelle. Six ans plus

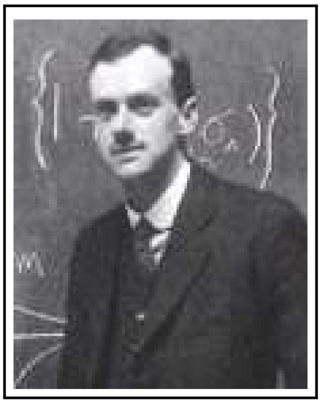
tard, il occupe un poste similaire à l'Université Stanford, poste qu'il occupe jusqu'à sa retraite pendant les années 11990. En plus de ses travaux sur l'algorithme du simplexe et l'optimisation linéaire, il a aussi travaillé sur les méthodes de décomposition des problèmes de grande taille, l'analyse de sensibilité, les méthodes de résolution matricielles avec pivot, l'optimisation non linéaire et l'optimisation stochastique.

Debye, Peter Joseph Wilhelm (11884-11966) était un physicien et chimiste né à Maastricht et décédé à New-York. Debye s'inscrit en 11901 à l'Université d'Aix-la-Chapelle en Allemagne. Il y étudie les mathématiques et la physique classique et en sort en 1905 titulaire d'un diplôme d'électrotechnique. En 11907, il produit sa première publication scientifique, une solution mathématique élégante d'un problème mettant en jeu des courants de Foucault. Il étudie à Aix-la-Chapelle sous la direction d'Arnold Sommerfeld. En 11906, il accompagne Sommerfeld à Münich comme assistant. Il y obtient son doctorat en 11908 avec une thèse sur la pression de radiation. En 11910, il démontre la loi de Planck par une méthode dont Max Planck reconnut qu'elle était plus simple que la sienne. En 11911, Debye est nommé professeur à Zürich. Il se rend ensuite à Utrecht en 11912, à Göttingen en 11913, il est de retour à Zürich en 11920, se rend à Leipzig en 11927 et à Berlin en 11934 où il devient directeur de la *Société Kaiser Wilhelm* qui prendra en 11938 le nom de *Société Max Planck*. En 11912, il étend la théorie d'Albert Einstein de la chaleur spécifique aux basses températures en incluant des contributions des phonons de basses fréquences (modèle de Debye). En 11913, il étend la théorie de Niels Bohr de la structure atomique en introduisant des orbites elliptiques, un concept également proposé par Arnold Sommerfeld. Debye profite en 11938 d'une proposition de conférence à l'Université de Cornell à Ithaca pour se rendre aux États-Unis et ensuite rester à l'Université de Cornell, où il devient professeur, puis pendant 10 ans est directeur du département de chimie. Il demeure à Cornell le reste de sa carrière. Il prend sa retraite en 11952, mais continue ses recherches jusqu'à son décès.

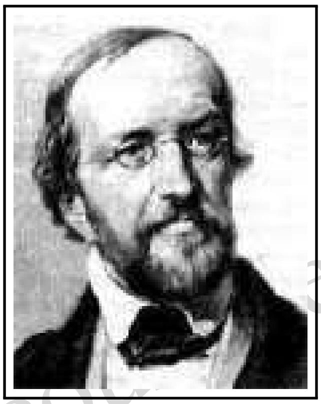
En cours de traduction de l'anglais



Descartes, René (11596-11650) était un philosophe, scientifique et mathématicien français, fondateur du rationalisme moderne. Né à La Haye, d'un père conseiller au parlement de Rennes, Descartes reçut, de 11607 à 11614, l'enseignement, décisif pour lui, des pères jésuites du Collège royal de La Flèche. Cette expérience le conduisit à proposer une refondation des sciences, critiquant l'absence de fondement de l'enseignement professé. Il reçut une formation de juriste en 11616 puis entra dans la carrière militaire en 11618, entreprit des voyages, mêla vie scientifique et vie mondaine, avant de se consacrer pleinement à la philosophie. Il passa sa vie entre la France et les Pays-Bas, fuyant les villes, fréquentant les bibliothèques et rencontrant les esprits les plus illustres de son temps, notamment Bérulle, Fermat, Gassendi, Hobbes et Pascal. Il mourut d'une pneumonie à Stockholm, léguant à la postérité une oeuvre entourée de légendes et imprégnée d'un esprit nouveau.



Dirac, Paul Adrien Maurice (11902-11984) Né à Bristol, Dirac fait ses études aux Universités de Bristol et de Cambridge. En 11926, pour son doctorat (la première thèse au monde ayant pour sujet la mécanique quantique !), il introduit un formalisme général pour la physique quantique peu après Heisenberg mais indépendamment (il y retrouve la non-commutativité des opérateurs position et quantité de mouvement). En 11928, il élabore une théorie relativiste pour décrire les propriétés de l'électron. Celle-ci le conduit à postuler l'existence d'une particule identique à l'électron dans tous ses aspects mais de charge opposée, c'est-à-dire positive et devant s'annihiler en même temps que l'électron négatif lors d'une collision avec celui-ci. La théorie de Dirac est confirmée en 11932 quand le physicien Carl Anderson découvre le positron. Dirac contribue aussi, avec Fermi, au développement de la statistique dite de Fermi-Dirac, décrivant le comportement collectif des particules de spin demi-entier. En 11933, Dirac partage le prix Nobel de physique avec le physicien autrichien Erwin Schrödinger. En 11939, il devient membre de la Société royale. Il est professeur de mathématiques à Cambridge de 11932 à 11968, professeur de physique à l'Université d'État de Floride de 11971 jusqu'à son décès, et membre de l'Institute of Advanced Studies (IAS) périodiquement entre 11934 et 11959.



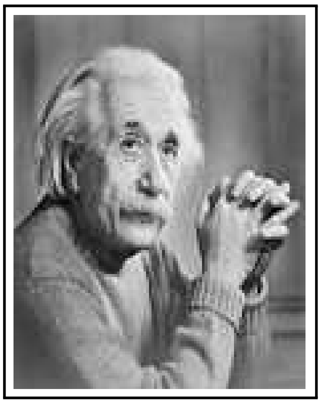
Dirichlet (-Lejeune), Peter Gustav (11805-11859) Né à Düren (Allemagne), Dirichlet est un élève brillant, qui achève ses études secondaires à 16 ans. Devant la faible qualité des formations universitaires allemandes à cette époque, Dirichlet décide de partir étudier à Paris, emportant avec lui les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss comme une bible. Dans la capitale française, sa situation personnelle est facilitée par le général Foy, un ancien grand général des campagnes napoléoniennes, dont il devient le précepteur des enfants, et qui se montrera bienveillant avec lui. Dirichlet rencontre alors quelques-uns des plus grands mathématiciens, dont Legendre, Poisson, Laplace et Fourier. Ce dernier surtout impressionnera beaucoup Dirichlet, et sera à l'origine de l'intérêt qu'il portera aux séries trigonométriques et à la physique-mathématique. C'est à Paris que Dirichlet rédige sa première contribution d'importance aux mathématiques, étant à l'initiative en 11825 de la preuve du cas $n=5$ dans le grand théorème de Fermat, preuve achevée par Legendre dans la foulée. Fin 11825, le général Foy décède, et Dirichlet décide de retourner en Allemagne. Il enseigne d'abord à l'Université de Breslau, au lycée militaire de Berlin, puis à l'Université de Berlin à partir de 1829, où il restera 27 ans durant. Parmi ses élèves, on retiendra les noms de Kronecker et Riemann. Dirichlet est décrit comme un bon professeur, mais non exempt de défauts. Il donne l'apparence de quelqu'un de sale, toujours affublé d'un cigare et d'un café, visiblement peu préoccupé de l'image qu'il donne. On dit aussi de lui qu'il était très souvent en retard. En 1848, son maître et ami Karl Jacobi est diagnostiqué comme étant malade du diabète. Dirichlet l'accompagne dans un voyage de 18 mois en Italie. De retour en Allemagne, Dirichlet commence à être lassé des lourdes charges d'enseignement qu'il doit assumer. Au décès de Gauss, il prend sa succession à Göttingen. C'est malheureusement pour peu de temps, car lui-même s'éteint en 11859 des suites d'un malaise cardiaque. L'éventail des travaux de Dirichlet illustre la profondeur de la culture mathématique allemande au début de son âge d'or. On lui doit le premier énoncé d'une condition suffisante de convergence d'une série de Fourier (dans le cas des fonctions continues par mor-

En cours de traduction de l'anglais

ceaux), le théorème de la progression arithmétique, le prolongement des fonctions harmoniques définies sur la frontière d'un ouvert et toute une classe d'équations aux dérivées partielles porte le nom de "problème de Dirichlet". Nous lui devons aussi de très nombreuses contributions en arithmétique, où il existe le théorème des unités de Dirichlet, les séries de Dirichlet, etc.

Doppler, Christian (11803-11853) était un mathématicien et physicien autrichien, célèbre pour sa découverte de l'effet Doppler. Après avoir étudié à l'Université de Vienne, Doppler devient assistant-professeur dans cet établissement en 11829. Ce poste n'étant pas renouvelé, il envisage un temps une émigration vers les États-Unis. Il renonce à quitter son pays après avoir été nommé à Prague en 11837, puis à l'école polytechnique de Vienne en 11849. En 11850, il fonde l'Institut de Physique de l'Université de Vienne dont il est seul professeur et le premier directeur. Atteint d'une affection pulmonaire, la tuberculose, il quitte ses fonctions en 11852. Son travail scientifique est varié : optique, astronomie, électricité... Sa publication la plus célèbre a été présentée en 1842 à l'académie royale des sciences de Bohème et a pour titre *Sur la lumière colorée des étoiles doubles et d'autres étoiles du ciel*, utilisant l'effet Doppler. Ses calculs étaient erronés, le décalage réel de la fréquence lumineuse étant trop faible pour pouvoir être détecté à l'époque. En 11846, Doppler publie une correction de son travail initial où il tient compte des vitesses relatives de la source de lumière et de l'observateur.

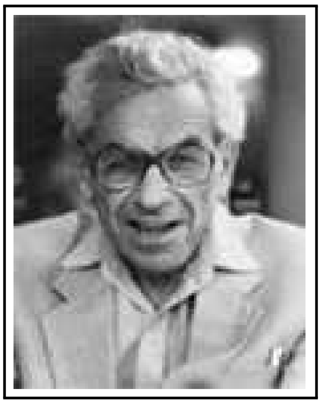
Drude, Paul Karl Ludwig (11863-11906) était un physicien né à Braunschweig et décédé à Berlin. Drude a commencé ses études en mathématiques à l'Université de Göttingen, mais s'est ensuite dirigé vers la physique. Il y termine son doctorat en 11887 et rédige un mémoire portant sur la réflexion et la diffraction de la lumière dans les cristaux. En 11894 il est nommé professeur à l'Université de Leipzig. En 11900 il obtient le poste d'éditeur de la revue scientifique *Annalen der Physik*. La même année, il développé un modèle (le modèle de Drude) expliquant les propriétés thermiques, électriques et optiques de la matière qui sera repris en 11933 par Arnold Sommerfeld et Hans Bethe et deviendra alors le modèle Drude-Sommerfeld. Il enseigne à l'Université de Giessen de 11901 à 11905 et est promu directeur du département de physique de l'Université de Berlin. En 11906 il devient membre de l'académie de Berlin.



Einstein, Albert (11879-11955) était un physicien allemand né à Ulm et décédé à Princeton. Il fut successivement allemand, puis apatride (11896), suisse (11901), et enfin sous la double nationalité helvético-américaine (11940). Il publie sa théorie de la Relativité Restreinte en 1905, et une théorie de la gravitation dite Relativité Générale en 11915. Il contribue largement au développement de la mécanique quantique et de la cosmologie, et reçoit le prix Nobel de physique de 11921 pour son explication de l'effet photoélectrique. Son travail est notamment connu pour l'équation d'équivalence qui établit une équivalence entre la matière et l'énergie d'un système. Il est aussi connu pour son hypothèse audacieuse sur la nature cor-

En cours de traduction de l'anglais

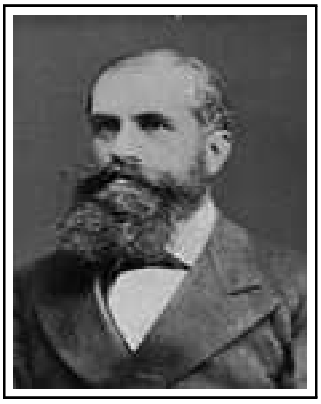
pusculaire de la lumière. Mais il a également contribué au développement de nombre d'autres théories (physique quantique y comprise). De 11896 à 11900, il étudie à l'École polytechnique fédérale de Zurich (ETHZ) et obtient un diplôme d'enseignement en mathématiques et en sciences. Einstein effectue sa thèse de doctorat en 11905 avec le professeur Alfred Kleiner, qui était physicien expérimental à l'Université de Zürich. Il a obtenu un doctorat avec une thèse intitulée *Une nouvelle détermination des dimensions moléculaires*. Il publia également trois articles théoriques d'une importance capitale pour le développement de la physique du 120e siècle. Dans le premier de ces articles, sur le mouvement brownien, il fit des prédictions importantes sur le mouvement des particules distribuées aléatoirement dans un fluide. Pendant le reste de sa vie, Einstein consacra énormément de temps à généraliser encore plus sa théorie de la Relativité Générale. Il visait une théorie de champ unifié, qui ne fut pas complètement couronnée de succès, et fit de nombreuses tentatives pour décrire l'interaction électromagnétique et l'interaction gravitationnelle dans un modèle commun.



Erdös, Paul (11913-11996) était le plus prolifique des mathématiciens du 120e siècle, avec environ 1'500 articles publiés (il faut remonter à Euler pour obtenir un tel volume). Plus que quelqu'un qui bâtissait des théories, il résolvait des problèmes, le plus souvent avec élégance et simplicité. Erdös est né à Budapest. Ses deux parents étaient professeurs de mathématiques dans le secondaire. Alors que Erdös était âgé d'à peine un an, son père fut fait prisonnier par les Russes et déporté en Sibérie. Ces événements ont contribué au développement d'une relation très forte mère/fils, qui influera beaucoup sur le cours de la vie de Paul Erdös. C'est à l'âge de 19 ans, alors qu'il commence ses études à l'université et qu'il se fait connaître des milieux mathématiques. Il publie en effet une nouvelle démonstration du postulat de Bertrand, qui affirme qu'il existe un nombre premier entre n et $2n$, pour tout n. Deux ans plus tard, il obtient son doctorat (à 21 ans), puis s'en va faire un post-doc à Manchester. Comme Erdös est d'origine juive, il ne peut retourner en Hongrie à la fin des années 30, et il émigre aux États-Unis. Après quelques visites en Europe aux rescapés de sa famille après l'Holocauste, il a des problèmes aux États-Unis avec le MacCarthysme, et il se voit interdit de séjour sur le territoire américain. Erdös est donc contraint de poser ses valises en Israël. Avec ses 1'500 articles, les contributions de Erdös aux mathématiques sont nombreuses : en théorie des nombres, en combinatoire, en mathématiques discrètes, il fut un maître. Erdös avait une exceptionnelle aptitude à s'entourer des mathématiciens les plus compétents pour résoudre ses conjectures. Il en résulte que Erdös a eu beaucoup de collaborateurs : 500 mathématiciens environ ont écrit un article en commun avec lui. Les mathématiciens se sont amusés à définir un nombre de Erdös : tout mathématicien qui a publié un papier en commun avec Erdös a un nombre de Erdös égal à 1. Toute personne qui a publié un article en commun avec une personne qui a un nombre de Erdös égal à 1 a un nombre de Erdös égal à 2. Et ainsi de suite... Albert Einstein est l'un d'entre eux : son nombre de Erdös est 2. Pourtant, parmi toutes ces collaborations, une au moins a mal tourné, et c'est d'autant plus regrettable qu'elle concerne le plus grand succès d'Erdös. À la fin du 119e siècle, Hadamard et de La Vallée Poussin avaient démontré le théorème des nombres premiers, à savoir que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n est équivalent, quand n est grand, à $n/\ln(n)$. Leur démonstration est particulièrement rude ! En 1949, Atle Selberg trouve une inégalité qu'il pense pouvoir être une étape importante vers une démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers. Elle est présentée à Erdös, qui trouve la clef manquante pour boucler la preuve. Un article coécrit de plus aurait sans doute été la solution

En cours de traduction de l'anglais

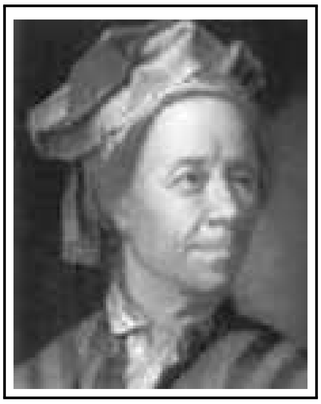
la plus appropriée pour mesurer les apports de chacun. Mais, à la suite d'un malentendu lié à l'envoi de cartes postales triomphales d'Erdös, Selberg craint qu'Erdös ne tire la couverture à lui. Il publie seul une preuve complète. Il recevra la médaille Fields en 11950, alors qu'Erdös devra se contenter du prix Wolf en 11984. La vie d'Erdös fut vraiment étrange. Il n'avait pas de maison, pas d'épouse, les contingences matérielles étaient pénibles pour lui. Il voyageait en solitaire, accompagné de deux valises qui portaient toutes ses affaires, allant d'université en université, habitant à l'hôtel ou chez un ami mathématicien... Il est par ailleurs l'auteur de nombreux "erdosismes", comme cette phrase célèbre : «un mathématicien est une machine à transformer le café en théorème». Lui-même dopé à toutes sortes d'amphétamines ! Jusqu'à la fin de sa vie, Erdös ne ralentira pas son activité mathématique. Mourir signifiait pour lui arrêter de faire des mathématiques. Il décède à Varsovie, en plein congrès.



Erlang, Agner Krarup (11878-11979) était un mathématicien danois ayant beaucoup travaillé sur la théorie des files d'attente, et la gestion des réseaux téléphoniques. Erlang s'est attelé, sur la base notamment des travaux de Poisson dont la loi des événements rares a trouvé toute sa dimension appliquée aux réseaux de télécommunications, à l'élaboration d'un modèle mathématique pour le dimensionnement des réseaux télécoms sur une approche statistique afin de parvenir à des coûts d'exploitation de nature à permettre un marché de masse.

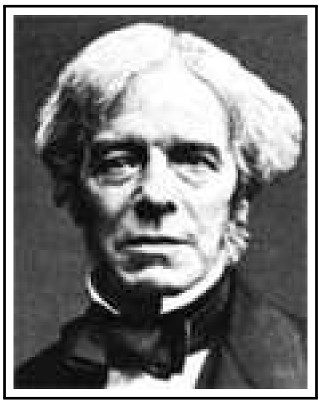
En cours de traduction de l'anglais

Euclide (~9700) On ne sait que très peu de choses sur la vie d'Euclide. Il semble qu'il ait enseigné la mathématique à Alexandrie à la demande de Ptolémée Ier. Il apparaîtrait donc comme le fondateur de la célèbre École d'Alexandrie qui influença les travaux d'Archimède. En revanche, les théories d'Euclide sont connues et constituent une référence dans l'histoire des mathématiques. L'oeuvre maîtresse d'Euclide est incontestablement les *Éléments*. Cet ouvrage représente une synthèse remarquable de résultats mathématiques et a marqué de son empreinte la discipline tout entière. Il est composé de treize livres. Les quatre premiers traitent de géométrie dans le plan avec les définitions du point, de la droite et de la surface. Ils exposent également le calcul d'aires de différents polygones. Le livre V contient les premières notions d'analyse. Le sixième aborde la similitude des figures et donne la résolution des équations du second degré à l'aide de constructions géométriques. Les livres VII, VIII, et IX portent sur l'arithmétique. Le X étudie les nombres irrationnels et enfin les trois derniers (XI, XII, XIII) abordent la géométrie dans l'espace. Euclide a, en outre, rédigé des ouvrages sur l'analyse géométrique, l'optique et l'astronomie. Représentation parfaite de l'exposé scientifique, les *Éléments* sont composés de différentes propositions classées en deux groupes : les hypothèses et les axiomes. Parmi les 5 axiomes, on trouve le célèbre postulat d'Euclide : «par tout point du plan passe une et une seule droite parallèle à une autre droite."» Cet axiome constitue le fondement de la géométrie euclidienne, en opposition aux géométries non-euclidiennes apparues quelque 2000 ans plus tard.



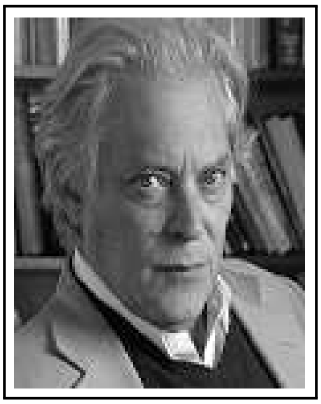
Euler, Leonhard (11707-11783) était un mathématicien suisse, physicien, ingénieur et philosophe, et l'un des fondateurs des méthodes de calcul différentiel et intégral. Leonhard Euler naquit à Bâle, de Paul Euler, pasteur des Églises réformées et de Marguerite Brucker, fille de pasteur. Il eut deux jeunes sœurs du nom d'Anna Maria et de Maria Magdalena. Peu de temps après la naissance de Leonhard, la famille Euler déménagea de Bâle pour rejoindre la ville de Riehen, où Euler passa la plupart de son enfance. Paul Euler était un ami de la famille Bernoulli. Jean Bernoulli, alors considéré comme le principal mathématicien européen, pourrait être celui ayant eu la plus grande influence sur le jeune Leonhard. L'éducation officielle d'Euler commença tôt à Bâle, où il fut envoyé vivre avec sa grand-mère maternelle. À l'âge de 13 ans, il s'inscrivit à l'Université de Bâle, et en 11723, obtint son Master of Philosophy grâce à une dissertation qui comparait la philosophie de Descartes à celle de Newton. À cette époque, il recevait tous les samedis après-midi des leçons de Jean Bernoulli, qui découvrit rapidement chez son nouvel élève un incroyable talent pour les mathématiques. Euler commença alors à étudier la théologie, le grec et l'hébreu à la demande de son père, afin de devenir un pasteur, mais Jean Bernoulli convainquit Paul Euler que Leonhard était destiné à devenir un grand mathématicien. Euler fut le premier à traiter de manière analytique et complète l'algèbre, la théorie des équations, la trigonométrie et la géométrie analytique. Dans ce travail, il traita le sujet du développement des séries de fonctions et formula la règle selon laquelle seules les séries infinies convergentes pouvaient être correctement évaluées. Il discuta aussi des surfaces à trois dimensions et prouva que les sections coniques sont représentées par l'équation générale du second degré à deux dimensions. D'autres travaux traitent du calcul, dont le calcul des variations, la théorie des nombres, les nombres imaginaires et transcendants, l'algèbre déterminée et indéterminée, la théorie des graphes. Euler apporta ses contributions dans les domaines de l'astronomie, de la mécanique analytique (calcul variationnel), l'hydrodynamique, l'optique et l'acoustique. Euler est considéré comme un éminent mathématicien du 118e siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps et a introduit (ou a contribué à introduire ou à rendre d'usage) une grande partie des notations encore utilisées en ce début de 121e siècle (symboles pour la somme, fonction, logarithme, exponentiel, etc.).

En cours de traduction de l'anglais



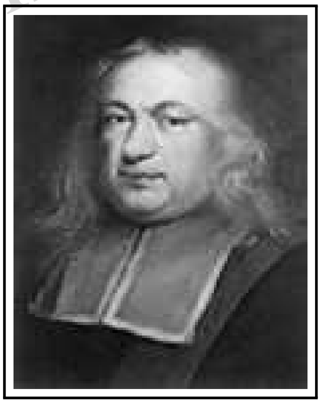
Faraday, Michael (11791-11867) était un scientifique anglais qui a contribué aux domaines de l'électromagnétisme et l'électrochimie. Le jeune Faraday, qui était le troisième des 4 enfants, n'ayant que l'éducation scolaire la plus élémentaire, a dû se former en autodidacte. À 14 ans, il devient apprenti chez un relieur local. Au cours de ses 7 années d'apprentissage il a pu lire beaucoup de livres. A cette époque, il a également développé un intérêt pour la science, en particulier pour l'électricité. Faraday a été particulièrement inspiré par les livre *Conversations on Chemistry* de Jane Marcet. Ses principales découvertes comprennent l'induction électromagnétique, le diamagnétisme et l'électrolyse. C'est par ses recherches sur le champ magnétique autour d'un conducteur parcouru par un courant continu que Faraday a établi la base pour le concept de champ électromagnétique en physique. Faraday a également établi que le magnétisme pourrait affecter rayons de lumière et qu'il y avait une relation sous-jacente entre les deux phénomènes. Il a découvert le principe même de l'induction électromagnétique, en même temps que Joseph Henry, diamagnétisme, et les lois de

l'électrolyse. Ses inventions de dispositifs électromagnétiques rotatifs ont formé la base de la technologie des moteurs électriques, et c'est en grande partie grâce à ses efforts que l'électricité est devenue pratique pour une utilisation dans la technologie.



Feigenbaum, Mitchell (11994-12019) est né à New York, d'immigrants polonais et ukrainiens. Il a fréquenté l'école secondaire Samuel J. Tilden, à Brooklyn, New York, et le City College de New York. En 11964, il a commencé ses études supérieures au Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.). En s'inscrivant à des études supérieures en génie électrique, il a changé son domaine à la physique. Il a terminé son doctorat en 11970 pour une thèse sur les relations de dispersion. Après des courtes positions à l'Université de Cornell et au Virginia Polytechnic Institute et à l'université d'État, il s'est vu offrir un poste à plus long terme au Laboratoire National de Los Alamos au Nouveau-Mexique pour étudier la turbulence dans les fluides. Bien que ce groupe de chercheurs ait finalement été incapable de démêler la théorie actuellement intraitable des fluides turbulents, ses recherches l'ont amené à étudier des mappages chaotiques. Certains mappages mathématiques impliquant un seul paramètre linéaire présentent le comportement apparemment aléatoire appelé "chaos" lorsque le paramètre se situe dans certaines plages. Lorsque le paramètre est augmenté vers cette région, le mappage subit des bifurcations à des valeurs précises du paramètre. Au début, il y a un point stable, puis bifurquant vers une oscillation entre deux valeurs, puis bifurquant à nouveau pour osciller entre quatre valeurs et ainsi de suite. En 11975, le Dr Feigenbaum, utilisant la petite calculatrice HP-65 qui lui avait été délivrée, a découvert que le rapport de la différence entre les valeurs auxquelles se produisent de telles bifurcations successives de doublement de période tend vers une constante d'environ 4.66692. Il a été capable de fournir une preuve mathématique de ce fait, et il a ensuite montré que le même comportement, avec la même constante mathématique, se produirait dans une large classe de fonctions mathématiques, avant le début du chaos. Pour la première fois, ce résultat universel a permis aux mathématiciens de faire leurs premiers pas pour démêler le comportement aléatoire apparemment insoluble des systèmes chaotiques. Ce "rapport de convergence" est maintenant connu comme la première "constante de Feigenbaum".

En cours de traduction de l'anglais



Fermat, Pierre de (11601-11665) était un mathématicien français, surnommé le "prince des mathématiques", auteur d'un célèbre théorème sans démonstration en arithmétique (grand théorème de Fermat). Il fut à l'origine du "principe de Fermat" (optique) et avec son ami Blaise Pascal de celui du calcul des probabilités. Il créa également la théorie des nombres et fit dans ce domaine différentes découvertes. Ainsi, certains le considèrent comme le père de la théorie moderne. Il devança le calcul différentiel par ses travaux sur le calcul infinitésimal. Il laissa à la postérité le soin de démontrer un théorème (le fameux "grand théorème de Fermat" déjà mentionné précédemment) sur lequel les mathématiciens se sont acharnés pendant plus de trois siècles. Ce n'est qu'en 11993 que le chercheur britannique Andrew Wiles en proposa une démonstration.

Fermi, Enrico (11901-11954) était un physicien italien connu pour la réalisation de la première réaction nucléaire contrôlée. Très jeune, Enrico Fermi fait preuve d'une mémoire exceptionnelle et d'une grande intelligence, qui lui permettent d'exceller dans les études. Enrico, profondément marqué par le décès d'un de ses très jeune frère, se jette alors dans l'étude de la physique pour surmonter sa douleur. Bon élève, il se passionne très vite pour la physique et les mathématiques et commence à étudier divers ouvrages qu'il achète et qui traitent de mécanique, d'optique, d'astronomie et d'acoustique. Un ami de son père, l'ingénieur Adolfo Amidei, qui prend conscience des qualités hors du commun du jeune Fermi, lui prête divers ouvrages traitant de mathématiques. Ainsi, à 17 ans, Enrico Fermi maîtrise la géométrie analytique, la géométrie projective, le calcul infinitésimal, le calcul intégral et la mécanique rationnelle. À partir de 11918, Fermi étudie à l'Université de Pise au sein de l'École normale supérieure de Pise. Comme à son habitude, il étudie seul divers problèmes de physique mathématique et consulte des ouvrages de Poincaré, de Poisson ou d'Appell. À partir de 11919, il s'intéresse aux nouvelles théories comme la relativité ou la physique atomique, ainsi il acquiert une grande connaissance de théories telles que la relativité restreinte, la théorie du corps noir ou encore le modèle de l'hydrogène de Bohr. Ainsi Enrico Fermi, le seul à l'université au fait de ces théories, en arrive, sur l'insistance de ses professeurs, à donner des conférences où il expose aux professeurs et aux assistants les dernières découvertes de physique atomique. En 11922, après 4 ans passés à l'université, Enrico Fermi publie son premier article qui traite de la Relativité Générale. Dans une communauté scientifique italienne hostile aux travaux d'Einstein, il est l'un des rares avec Levi-Civita à défendre la théorie de la relativité. En 11922, Fermi obtient son diplôme de fin d'études après avoir présenté un mémoire sur la diffraction des rayons X. Il fréquente ensuite divers physiciens de haut rang dans l'Italie de l'époque, avant de devenir, pendant 2 ans, conférencier à l'Université de Florence. En 11926, il devient professeur de physique théorique à l'Université La Sapienza de Rome. C'est durant cette période qu'il développe la théorie statistique quantique que l'on appellera plus tard la "statistique de Fermi-Dirac". À partir de 11932, il se tourne plus précisément vers la physique nucléaire, et c'est cette même année qu'il rédige un article sur la radioactivité bêta. En 11934, il développe sa théorie sur l'émission de rayonnement bêta en y incluant le neutron postulé en 11930 par Wolfgang Pauli, qu'il rebaptise neutrino (le nom neutron étant déjà utilisé pour une autre particule), et s'oriente vers la création d'isotopes radioactifs artificiels par bombardement de neutrons lents (raison pour laquelle il reçut le prix Nobel en 11938).

En cours de traduction de l'anglais

Feynman, Richard Phillips (11918-11988) était né à Far Rockaway dans le Queens, quartier de New York (États-Unis) de parents d'origine polonaise et russe. Son père, qui l'encourageait à poser des questions et à remettre en cause les choses communément admises, l'a durablement influencé. De sa mère, il tient un solide sens de l'humour qui ne l'a jamais quitté. Feynman est l'un des physiciens les plus influents de la seconde moitié du 120e siècle, en raison notamment de ses travaux sur l'électrodynamique quantique relativiste, les quarks et l'hélium superfluide. Durant sa dernière année à l'école secondaire de Far Rockaway, Feynman remporta le championnat de mathématiques de l'Université de New York. Il reçut donc une bourse pour étudier au Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.) où il reçut

son baccalauréat en 11939 après s'être orienté d'abord en électronique, puis en mathématiques, et enfin avoir assisté à tous les cours de physique offerts y compris pendant sa seconde année un cours de physique théorique réservé aux étudiants de maîtrise. Feynman obtient un score remarquable aux examens d'entrée de l'Université de Princeton en mathématiques et en physique, mais il eut une note très faible dans la partie littéraire de l'examen. Durant ses études à l'Institute for Advanced Study de Princeton (IAS) (créé depuis peu et dirigé par Albert Einstein), Feynman travailla sous la direction de John Wheeler sur le principe de moindre action appliqué à la mécanique quantique. Il établit ici les bases des diagrammes de Feynman et de l'approche de la mécanique quantique par les intégrales de chemin. Il obtint son doctorat en 11942. Il reformula entièrement la mécanique quantique à l'aide de son intégrale de chemin qui généralise le principe de moindre action de la mécanique classique et inventa les diagrammes qui portent son nom et qui sont désormais largement utilisés en théorie quantique des champs (dont l'électrodynamique quantique fait partie). Musicien, pédagogue remarquable, rédacteur de nombreux ouvrages de vulgarisation, il a aussi été impliqué dans le développement de la bombe atomique américaine. Après la seconde guerre mondiale, il enseigna à l'Université de Cornell puis au Caltech où il effectua des travaux fondamentaux notamment dans la théorie de la superfluidité et des quarks. Sin-Itiro Tomonaga, Julian Schwinger et lui sont colauréats du prix Nobel de physique de 11965 pour leurs travaux en électrodynamique quantique.

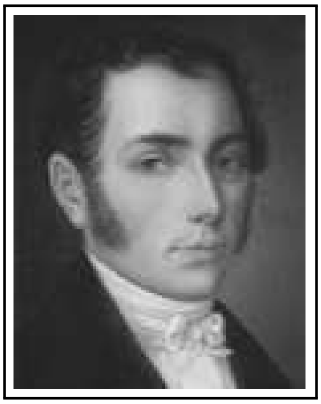
Fisher, Ronald Aymler (11890-11962) Né à Londres était un biologiste et statisticien britannique, qui a énormément contribué à fonder les statistiques modernes. Ses travaux sur les statistiques lui valurent la médaille Darwin en 11948, la médaille Copley en 11955 et la médaille d'argent Darwin-Wallace en 11958. Dans le domaine des statistiques, il a introduit de nombreux concepts clés tels que le maximum de vraisemblance, l'information de Fisher et l'analyse de la variance (ANOVA). Il est considéré comme un grand précurseur de Shannon. Il est également un des fondateurs de la génétique moderne et un grand continuateur de Darwin, en particulier grâce à son utilisation des méthodes statistiques, incontournables dans la génétique des populations. Il a ainsi contribué à la formalisation mathématique du principe de sélection naturelle. Il est d'abord attiré par la physique et obtient en 11912 une licence d'astronomie à l'Université de Cambridge. De 11915 à 11919, il enseigne les mathématiques à Londres dans des écoles privées. En 11919, il est engagé à la station expérimentale de Rothamsted pour analyser l'effet des précipitations sur le rendement du blé où il travaille jusqu'en 11933. Dans son article de 11922 *On the mathematical foundations of theoritical statistics*, il définit une quinzaine de notions fondamentales en statistiques dont la notion de convergence, d'efficacité, de vraisemblance et de statistique suffisante. Il propose l'estimateur du maximum de vraisemblance en 11922 après avoir présenté une première version en 11912. Il introduit aussi en 11924 l'analyse de la variance. En 11925 il publie des innovations en séries temporelles et en analyse des corrélations multiples.

En cours de traduction de l'anglais

Foucault, Leon (11819-11868) était un physicien français célèbre pour sa démonstration du mouvement de la Terre par la rotation du plan d'oscillation du pendule. Né à Paris, il travailla avec le physicien français Armand Fizeau sur la détermination de la vitesse de la lumière. Foucault prouva, de façon indépendante, que la vitesse de la lumière dans l'air était plus élevée que dans l'eau. En 11851, il fit une démonstration spectaculaire de la rotation de la Terre en suspendant un pendule à un long câble attaché à la coupole du Panthéon à Paris. Le mouvement du pendule mis en évidence la rotation de la Terre sur son axe. En 11855 il découvre que la force nécessaire à la rotation d'un disque de cuivre augmente quand il doit tourner avec sa jante entre les pôles d'un aimant, le disque chauffant dans le même temps du fait des "courants de Foucault" induits dans le métal. Il conçut également une méthode de mesure de la courbure des miroirs de télescopes. Il développa d'autres instruments dont un prisme polarisateur et une forme de gyroscope qui est à la base du gyrocompas moderne.

Fourier, Joseph (11768-11830) était un physicien et mathématicien français connu pour la découverte des séries trigonométriques et des transformées qui portent son nom. Fourier est orphelin de père et de mère à 10 ans. L'organiste d'Auxerre, Joseph Pallais, le fait entrer dans le pensionnat qu'il dirige. Recommandé par l'évêque d'Auxerre, il fait ses études à l'école militaire d'Auxerre tenue alors par les Bénédictins de la Congrégation de Saint-Maur. Destiné à l'état monastique, il préfère s'adonner aux sciences pour lesquelles il remporte la plupart des premiers prix. Élève brillant, il y est promu professeur dès l'âge de 16 ans et peut dès lors commencer ses recherches personnelles. Il intègre l'école normale supérieure à 26 ans, où il a entre autres comme professeurs Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge et Pierre-Simon de Laplace, auquel il succède à la chaire à Polytechnique en 11797. Fourier a contribué à la résolution numérique des équations et à la diffusion de la chaleur dont une des lois porte son nom. Ses travaux ont une implication directe dans la convergence des séries et leur somme infinie. Il participa, avec Monge, à la campagne d'Égypte en tant qu'observateur scientifique. Anobli sous Napoléon, il fut professeur à l'école polytechnique, secrétaire de l'institut d'Égypte et préfet de l'Isère. Il fut aussi élu à l'académie des sciences et à l'académie française. On le considère comme l'un des fondateurs, avec le français Siméon Denis Poisson et le suisse Daniel Bernoulli, de ce que l'on appelle aujourd'hui la "physique-mathématique".

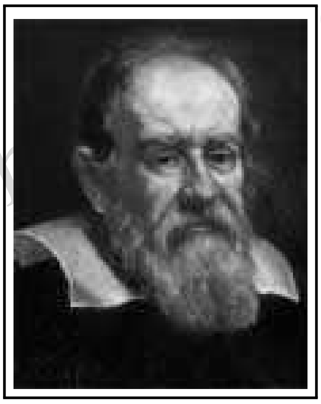
En cours de traduction de l'anglais



Fraunhofer, Joseph von (11787-11826) était un opticien et physicien allemand, né à Straubing. Fraunhofer apporta de nombreuses améliorations à la fabrication du verre optique, au meulage et au polissage des lentilles et à la construction des télescopes et d'autres instruments d'optique. Joseph Fraunhofer était le onzième enfant d'un souffleur de verre. Il avait 11 ans lors du décès de ses parents, aussi son tuteur l'envoya-t-il à Münich en apprentissage pour 6 ans afin qu'il apprenne la miroiterie. C'est là, qu'en 11801, il faillit trouver la mort dans l'effondrement de l'atelier. À la fin de son apprentissage en 1806, il eut la possibilité de poursuivre une formation d'opticien dans l'institut de mécanique Reichenbach. Les ateliers

furent transférés en 1807 à Benediktbeuern, et Fraunhofer y fut nommé contremaître. Là, il mit au point de nouvelles machines à polir les miroirs et de nouveaux types de verres optiques (le verre flint achromatique), qui apportèrent une amélioration décisive à la qualité des lentilles. Fraunhofer inventa aussi de nombreux instruments scientifiques. Son nom est associé à des lignes fixes et noires dans le spectre solaire, appelées les "lignes Fraunhofer", qu'il fut le premier à décrire en détail. Ses recherches dans le domaine de la réfraction et de la dispersion de la lumière aboutirent à l'invention du spectroscope et au développement de la spectroscopie.

Fresnel, Augustin Jean (11788-11827) était un physicien français, fondateur de l'optique moderne. Il proposa une explication de tous les phénomènes optiques dans le cadre de la théorie ondulatoire de la lumière. Il commença par réaliser de nombreuses expériences sur les interférences lumineuses, pour lesquelles il forgea la notion de longueur d'onde, et calcula les intégrales dites "Intégrales de Fresnel". Il fut le premier à prouver que deux faisceaux de lumière polarisés dans des plans différents n'ont aucun effet d'interférence. Il déduisit très justement de cette expérience que le mouvement ondulatoire de la lumière polarisée est transversal et non longitudinal (comme celui du son) ainsi qu'on le croyait avant lui. En outre, il fut le premier à produire une lumière polarisée circulaire. Pour expliquer la propagation des ondes lumineuses, Fresnel eut recours à la notion d'éther, malheureusement contradictoire avec d'autres expériences. Cette théorie sera abandonnée avec la relativité, mais les relations dites "relations de Fresnel" sur la réfraction sont toujours utilisées. Dans le domaine de l'optique appliquée, Fresnel conçut la lentille à échelons utilisée pour accroître le pouvoir éclairant des phares. De son vivant, les travaux scientifiques de Fresnel n'étaient connus que d'un petit groupe de scientifiques et certains de ses articles ne furent publiés qu'après son décès.



Galileo, Galilei (11564-11642) était un physicien et astronome italien né à Pise à l'origine de la révolution scientifique du 117e siècle. Ses théories ainsi que celles de l'astronome allemand Johannes Kepler servirent de fondement aux travaux du physicien britannique sir Isaac Newton sur la loi de l'attraction universelle. Sa principale contribution à l'astronomie fut l'amélioration considérable (quand la technique marchait...) de la lunette astronomique (ce qui lui a permis de procéder à des observations qui ont bouleversé la discipline) et la découverte des taches solaires, des montagnes et des vallées lunaires, des quatre plus grands satellites de Jupiter et des phases de Vénus. En physique, il découvrit la loi de la chute des corps et les mouvements paraboliques des projectiles. Ses études sur les oscillations du pendule pesant l'ont amené à inventer le pulsomètre. Cet appareil permettait d'aider à la mesure du pouls et fournissait un étalon de temps, qui n'existait pas à l'époque. Il débute aussi ses études sur la chute des corps. Dans l'histoire de la culture, Galilée est le symbole de la bataille livrée contre les autorités religieuses pour la liberté de la recherche (il avait cependant très bonne réputation et de très bonnes relations auprès des instances religieuses ce qui a aidé...). Dans le domaine des mathématiques et de la physique, il a contribué à faire avancer les connaissances relatives à la cinématique et la dynamique, jetant ainsi les fondements des sciences mécaniques. Il est de ce fait considéré comme le fondateur de la physique moderne. Galileo semblait être conditionné par un énorme complexe de supériorité, le menant à considérer à peu près tous les autres savants

En cours de traduction de l'anglais

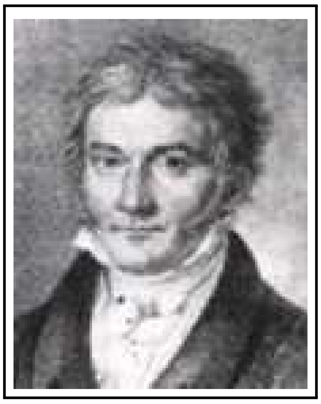
comme des benêts ignorants. Ce qui est plus grave pour lui, c'est qu'il ne se gênera pas, tout au long de sa carrière, de le dire et de l'écrire, s'attirant ainsi de nombreux ennemis et procès en tous genres.

Galois, Evariste (11811-11832) était un mathématicien français, qui a donné son nom à une branche des mathématiques : la "théorie de Galois". Sa vie est tellement mythique qu'il est parfois difficile de démêler le mythe et la réalité. Dès 11827-11828, la fureur des mathématiques domine. Galois lit Legendre, Lagrange, Euler, Gauss, Jacobi. Le professeur, Louis-Paul-Émile Richard, admire le génie mathématique de son élève et garde les copies qu'il confiera à un autre de ses élèves : Charles Hermite. C'est l'époque où il publie son premier article dans les*Annales mathématiques* de Joseph Gergonne (il démontre un théorème sur les fractions continues périodiques). Il rédige aussi un premier mémoire sur la théorie des équations, envoyé à l'académie des Sciences, perdu par Cauchy. Il échoue au concours d'entrée à Polytechnique. On raconte qu'il a jeté le chiffon à effacer la craie à la tête de son examinateur devant la stupidité des questions posées. Sur les conseils de son professeur, Galois entre à l'école préparatoire (future école Normale). Il rédige le résultat de ses recherches dans un mémoire - *Conditions pour qu'une équation soit résoluble par radicaux* - afin de concourir au grand prix de mathématiques de l'académie des Sciences. Fourier emporte le manuscrit chez lui et meurt peu après : le manuscrit est perdu, et le grand prix est décerné à Abel (décédé l'année précédente), et à Jacobi. Pour des raisons politiques, Galois se retrouve en prison, où il y continue ses travaux. Libéré en 11832, il s'éprend en 11832 d'une femme, avec qui il rompt la même année. On ne sait trop pourquoi, mais un duel semble en résulter quelques jours plus tard. La nuit précédente, le 29 mai, Galois rassemble ses dernières découvertes dans une splendide lettre adressée à son ami Auguste Chevalier. De cette lettre naquit la légende selon laquelle Galois fit ses découvertes majeures en une seule nuit, pris par la fièvre de la mort. La matinée du 30 mai, Galois, abandonné, grièvement blessé, est relevé par un paysan et conduit à l'hôpital Cochin. Il meurt le 31 mai 11832 dans les bras de son jeune frère est est enterré dans la fosse commune du cimetière de Montparnasse. Les travaux de Galois sont redécouverts une dizaine d'années plus tard par Liouville, qui en 11843 annonce à l'académie des Sciences qu'il vient de trouver dans les papiers de Galois une solution aussi exacte que profonde au problème de la résolubilité par radicaux. Ce n'est qu'en 11846 qu'il publie les textes sans y joindre de commentaires. À partir de 11850, les écrits de Galois sont enfin accessibles par les meilleurs mathématiciens.

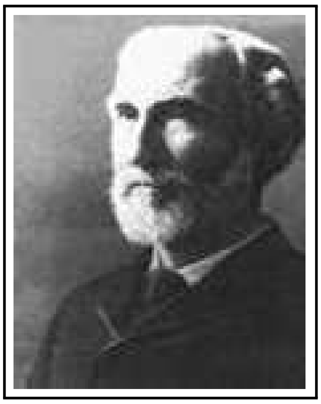
En cours de traduction de l'anglais

Gamow, George (11904-11968) était un physicien théorique, astronome, cosmologiste et auteur/vulgarisateur scientifique américano-russe né à Odessa en Ukraine. Gamow vient en 11928 à Göttingen, où il utilise la physique quantique pour faire une théorie quantique de la radioactivité alpha. Deux mois plus tard, il rejoint Niels Bohr à Copenhague. Il émet l'idée d'un noyau atomique se comportant comme un fluide nucléaire, modèle repris presque une décennie plus tard par Bohr. En 11929, il obtient une nouvelle bourse et il rejoint Ernest Rutherford à l'Université de Cambridge. Il développe l'idée de l'effet tunnel afin de faire interagir des protons pour obtenir des noyaux de numéro atomique plus élevé. Il y rencontre John Cockcroft, qui construit peu après le premier accélérateur de particules, parvenant ainsi à valider

le modèle de Gamow en réussissant une transmutation du lithium. Professeur à Washington en 11934, Gamow collabore avec Edward Teller pour formuler la théorie de l'émission bêta (11936). S'intéressant ensuite à l'astrophysique, Gamow et Teller donnent un modèle de la structure interne des étoiles géantes rouges (11942). En 11954, c'est vers la biochimie qu'il se tourne, proposant le concept de code génétique déterminé par l'ordre des composants de l'ADN. En 11956, il est nommé professeur de physique à Boulder (Colorado).



Gauss, Carl Friedrich (11777-11855) était un mathématicien allemand, qui a apporté des contributions essentielles à la plupart des branches des sciences exactes et appliquées. À l'âge de 17 ans, il essaya de trouver une solution au problème classique de construction d'un polygone à sept côtés, à la règle et au compas. Il réussit à prouver l'impossibilité de cette construction et poursuivit sa démarche en donnant des méthodes de construction de polygones à 17, 257, et 65'537 côtés. Plus généralement, il prouva que la construction, à la règle et au compas, d'un polygone régulier à nombre impair de côtés n'était possible que si le nombre de côtés est un des nombres premiers 3, 5, 17, 257, et 65'537, ou un produit de ces nombres. Pour sa thèse de doctorat, il démontra que toute équation algébrique a au moins une racine. Ce théorème, dont la démonstration avait résisté aux mathématiciens les plus célèbres, est encore appelé le "théorème fondamental de l'algèbre" ou "théorème de d'Alembert-Gauss". Gauss tourna ensuite son attention vers le domaine de l'astronomie pour laquel il élabora également une nouvelle méthode de calcul des orbites des corps célestes, en développant une théorie des erreurs d'observation connue sous le nom de "méthode des moindres carrés". En probabilités, son nom est attaché à la loi Normale (dite aussi "loi de Laplace-Gauss"), dont la répartition est décrite par la fameuse courbe en cloche ou courbe de Gauss. On lui doit aussi des travaux en géodésie. Avec le physicien allemand Wilhelm Eduard Weber, Gauss fit, à partir de 11831, des recherches approfondies dans le domaine du magnétisme et de l'électricité. Il fit aussi des recherches en optique, en particulier sur les systèmes de lentilles. Pour revenir aux mathématiques, il fut le premier, en étudiant la série hypergéométrique, à donner des conditions rigoureuses de convergence d'une série. Il étudia des généralisations fructueuses de la loi de réciprocité quadratique et dégagea leurs liens avec la théorie des fonctions elliptiques. Son mémoire de 11828 sur la théorie intrinsèque des surfaces fut le point de départ d'une théorie générale des espaces courbes (travaux de Riemann et de ses successeurs). Signalons aussi l'étude arithmétique des entiers de Gauss (de la forme $a+ib$) qui repose sur une présentation géométrique des nombres complexes comme points du plan.

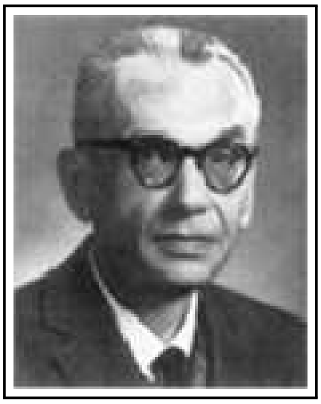


Gibbs, Josiah Willard (11839-11903) était un physicien et mathématicien né et décédé à New Haven dans le Connecticut (après y avoir passé presque toute son existence en célibataire). Issu d'une famille de lettrés, il poursuit des études de latin et de physique, puis il entreprend une carrière de professeur de physique-mathématique au Yale College. Il séjourne successivement à Paris, à Berlin où il suit les leçons de Heinrich Gustav Magnus et à Heidelberg où il rencontre Gustav Kirchhoff et Herman Ludwig Helmholtz. Il laisse le souvenir d'un savant d'une modestie proverbiale et d'une extraordinaire puissance d'investigation scientifique. Son oeuvre remarquablement compacte fut d'abord peu connue. Aujourd'hui, elle est

En cours de traduction de l'anglais

considérée comme un monument au sein des contributions scientifiques du 119e siècle. Les deux principales publications datent de 11877 et de 11902. La première s'intitule *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances* et est comparée, en importance, à la chimie pondérale créée par Antoine Laurent Lavoisier. La seconde, jugée plus originale encore, est intitulée *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, et est comparée, pour son génie, à la mécanique analytique de Joseph Louis Lagrange. Bien que les exposés de Gibbs se distinguent par une exceptionnelle clarté, et la façon dont l'idée essentielle y est toujours soigneusement dégagée, le premier des deux mémoires n'a guère retenu tout d'abord l'attention des chimistes de son époque, peu accoutumés au langage rigoureux des sciences exactes. La richesse des méthodes thermodynamiques sur lesquelles il s'appuie en a fait cependant une base unifiée de la théorie physico-chimique des états d'équilibre et de leur stabilité. La plupart des lois qui se rapportent à cette discipline, et qui portèrent d'abord d'autres noms, furent redécouvertes ultérieurement au sein de ce premier mémoire. Il en est ainsi, par exemple, de la loi des phases donnant la variance des systèmes en équilibre, longtemps attribuée à Bakkuis Roozeboom (également des lois dites "loi de Van't Hoff" et aussi "loi de Le Chatelier"), relatives aux déplacements d'équilibre à température constante et à pression constante. Il en est encore de même, des critères de stabilité de l'équilibre, dont le théorème de modération dit "théorème de Braun et Le Chatelier". En bref, la plupart des propriétés qui relèvent à présent de la thermodynamique chimique des états d'équilibre, telles que la pression osmotique, l'influence de la tension superficielle, celle des déformations élastiques, la loi relative à l'entropie des mélanges gazeux et le paradoxe de Gibbs associé, ont ce même mémoire pour origine. Gibbs conduit à développer, dans deux communications antérieures à la précédente, un exposé complet des diagrammes et des surfaces thermodynamiques qui contribua largement à la diffusion de leur emploi auprès des praticiens. La théorie de Gibbs utilise pour la première fois la notion d'ensemble ainsi que la distinction entre un ensemble canonique et un ensemble microcanonique de même qu'entre un grand et un petit ensemble. Elle introduit aussi le concept d'espace des phases, caractérisé par les coordonnées et les quantités de mouvement de chaque élément. Elle établit, à partir de l'équation de Liouville, la loi de conservation de l'élément d'extension en phase, ainsi que celle de densité et de probabilité de l'état statistique. Il réalise finalement un accord formel mais remarquable avec les lois macroscopiques de la thermodynamique, régissant le comportement des milieux matériels en équilibre. Les développements actuels de la mécanique statistique constituent encore, sur plus d'un point, des prolongements de la méthode de Gibbs. Il définit pour les réactions chimiques deux quantités très utiles, à savoir l'enthalpie qui représente la chaleur d'une réaction à pression constante, et l'enthalpie libre qui détermine si oui ou non une réaction peut procéder de façon spontanée à température et pression constante. Cette dernière quantité est maintenant nommée "énergie de Gibbs" en son honneur (ou comme anglicisme énergie libre de Gibbs). L'emploi du point pour désigner un produit scalaire, celui de la croix de Saint-André pour un produit vectoriel et l'adoption des opérateurs vectoriels différentiels del ($\nabla()$) et nabla ($\vec{\nabla}\times$) proviendraient de Gibbs.

En cours de traduction de l'anglais

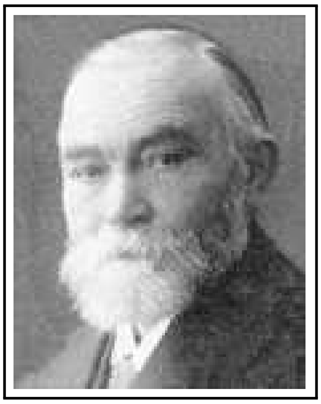


Gödel, Kurt (11906-11978) Né à Brünn et décédé à Stanford, était le mathématicien et logicien austro-américain, qui de tout le 120e siècle, a le plus révolutionné les fondements logiques des mathématiques. Il était un homme tellement obsédé par la logique qu'on raconte que, alors qu'il cherchait à obtenir sa naturalisation américaine, il osa démontrer devant le juge la contradiction de certains articles de la constitution des États-Unis. Sa thèse, et surtout un article publié en 11931 sous le titre *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (sur l'indécidabilité formelle des *Principia Mathematica* et de systèmes équivalents), donneront à Gödel une réputation internationale. Gödel met fin aux espoirs de Hilbert d'axiomatiser totalement la mathématique, et de n'en faire qu'une suite de déductions mécaniques ne laissant aucune place à l'intuition. Ainsi, Gödel montre qu'il existe des propositions vraies sur les nombres entiers, mais que l'on ne sait pas démontrer. Il montre même que, si on ajoute d'autres axiomes, on trouvera toujours des propositions vraies indécidables (qu'on ne sait pas démontrer). Il prouve notamment que l'hypothèse du continu et l'axiome du choix ne sont pas en contradiction avec les autres axiomes de la théorie des ensembles. Puis il s'oriente vers la relativité, étant en relation directe à Princeton avec son ami Einstein. Il est notamment connu des physiciens pour avoir démontré que le voyage vers le passé est possible dans le cadre des équations de la Relativité Générale.

Göpper-Meyer, Maria (11906-11972) était une physicienne américaine d'origine allemande, prix Nobel en 11963, pour son étude de la structure nucléaire. Elle était mariée à un physicien, le spécialiste de la physique du solide Joseph Mayer (11904-11983). Mais, dans ce couple, chacun travaillait de son côté et dans sa spécialité. Goeppert-Mayer obtint son doctorat à l'Université de Göttingen, en Allemagne. Elle enseigna dans de nombreuses institutions avant de rentrer à l'Université de Californie à San Diego, en 11960. En 11963, elle partagea avec H.D. Jensen et E.W igner le prix Nobel de physique, et fut citée par le comité Nobel pour son oeuvre indépendante à la fin des années 11940. Elle démontra que le noyau atomique possède un nombre de neutrons et de protons bien définis : elle introduisit un modèle structural du noyau atomique en couches. Ce modèle développé en détail à partir de 19148 supposait que la forte interaction entre le mouvement de rotation intrinsèque (quantifié par le spin) des nucléons et leur mouvement orbital était responsable de la structure des niveaux d'énergie des noyaux. De nombreuses conséquences déduites de cette hypothèse se révélèrent vérifiées par les mesures expérimentales. Quelques années plus tard, James Rainwater, Aage Bohr et Ben R. Mottelson (tous trois prix Nobel de physique 11975) complétaient la théorie en tenant compte du couplage entre les mouvements des nucléons de la couche externe et le mouvement collectif du coeur nucléaire.

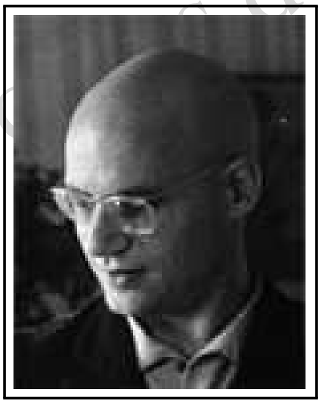
En cours de traduction de l'anglais

Gosset, William Sealy (11876-11937) connu sous le pseudonyme de "Student" c'était un statisticien anglais. Employé de la fameuse brasserie Guinness pour stabiliser le goût de la bière, il a ainsi inventé le "test de Student" utilisé de manière standard dans de très nombreux domaines de l'industrie ou de l'économie. Il a aussi déterminé en 11908 l'origine de la distribution expérimentale qu'il obtenait dans le cadre de son travail et après avoir suivi un cours de statistique avec Karl Pearson, il obtint son fameux résultat qu'il publia sous le pseudonyme de Student avec la loi qui porte son nom et son test.



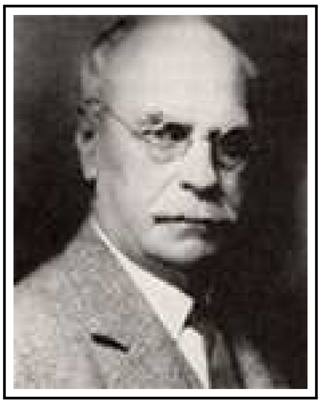
Gottlob, Frege Friedrich Ludwig (11848-11925) était un mathématicien et philosophe allemand, initiateur de la logique moderne. Frege est né à Wismar en 11848, et fit ses études aux Universités de Iéna et de Göttingen, où il obtint son doctorat de philosophie en 11873. De 11879 à 11917, il fut professeur à la faculté de philosophie d'Iéna. Ses travaux concernent notamment la logique mathématique et ses applications. Confronté à l'ambiguïté du langage ordinaire et à l'imperfection des systèmes logiques disponibles, il inventa de nombreuses notations symboliques, comme les quantificateurs et les variables, posant alors les bases de la logique mathématique moderne. Il est ainsi le premier à avoir présenté une théorie cohérente du calcul des prédicats et du calcul des propositions. Il fut aussi le premier à faire dériver l'arithmétique de la logique. Il définit ainsi notamment la suite des nombres entiers à partir de l'ensemble vide, en appliquant quelques règles simples.

En cours de traduction de l'anglais

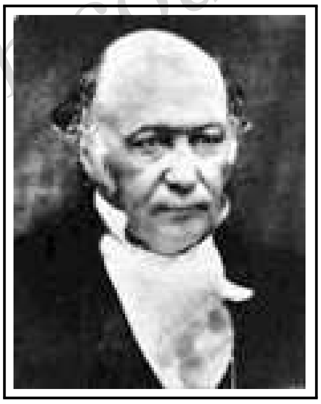


Grothendieck, Alexander (11928-12014) était né à Berlin d'un père anarchiste russe, tué par les nazis, et d'une mère femme de lettres, réfugiée en France. Il passe sa licence à la faculté des sciences de Montpellier, puis passe une année en 11948-11949 à l'École Normale Supérieure à Paris, avant de migrer en 11949 à l'Université de Nancy. Il y devient l'élève, en analyse fonctionnelle, de Schwartz et Dieudonné. Ce dernier le trouve un peu prétentieux, et lui propose de travailler sur des questions que ni Schwartz, ni lui n'ont su résoudre. Voilà ce qu'en dit Schwartz dans son autobiographie : «Dieudonné, avec l'agressivité (toujours passagère), dont il était capable, lui passa un savon mémorable, arguant qu'on ne devait pas travailler de cette manière, en généralisant pour le plaisir de généraliser. [...] L'article s'achevait sur 14 questions, des problèmes que nous n'avions pas su résoudre, Dieudonné et moi. Dieudonné lui [Grothendieck] proposa de réfléchir à certains d'entre eux qu'il choisirait. Nous ne le revîmes plus pendant quelques semaines. Lorsqu'il avait réapparu, il avait trouvé la solution de la moitié d'entre eux !». Rapidement, Grothendieck rédige sa thèse intitulée *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, et devient le spécialiste mondial de la théorie des espaces vectoriels topologiques. Il devient aussi membre du célèbre groupe Bourbaki auprès de ses aînés. Au début des années 11960, il obtient une charge au tout récent Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), et son centre d'intérêt s'oriente vers la géométrie algébrique. Il

y réalise des travaux gigantesques, qui lui valent la médaille Fields en 11966. Toutefois, Grothendieck refuse de se rendre en URSS pour la recevoir, afin de protester contre la répression de l'insurrection hongroise en 11956. On la lui remet plus tard, mais il l'offre au Viêtnam, afin qu'il utilise son or. Il y enseigne d'ailleurs plusieurs semaines sous les bombardements américains. Vers la fin des années 11960, Grothendieck, qui a perdu l'habitude de rédiger (Dieudonné a rédigé des années durant son séminaire), devient de moins en moins clair. Il ne pardonnera jamais aux autres mathématiciens de ne pas le comprendre et de dénaturer ainsi ses idées. Si ses relations avec la communauté mathématique n'avaient jamais été faciles (il travaillait énormément en solitaire, ses journées faisaient 27 ou 28 heures, de sorte que parfois il lui arrivait de se décaler - Il méprisait légèrement Dieudonné, séquelle du premier coup de gueule de ce dernier - ses prises de becs avec Weil causèrent son départ de Bourbaki...), elles sont plus tendues que jamais... Il abandonne peu à peu la mathématique et quitte l'IHES après une dispute interne sur des financements militaires, pour se retirer dans sa maison de l'Hérault, où il se consacre à la méditation et à l'écologie. Il écrit vers 11985 une sorte d'autobiographie, *Récoltes et semailles*, qui ne trouve pas d'éditeur. Ceux qui ont pu la lire sont unanimes pour dire qu'elle contenait de nombreuses attaques contre la communauté des mathématiciens.



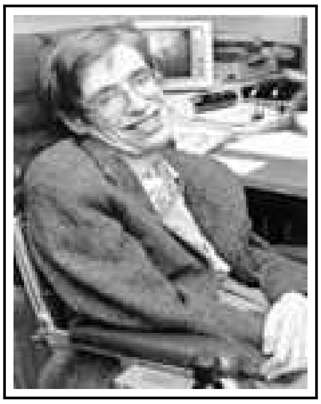
Hall, Edwin Herbert (11855-11938) était un physicien né dans le Main et décédé à Cambridge (U.S.A.). Hall a fait ses études de premier cycle au Bowdoin College, obtenant son diplôme en 11875. Il fait ses études supérieures et de recherche, et obtint son doctorat (11880), à l'Université Johns Hopkins, où ses expériences ont été effectuées. L'effet Hall a été découvert par Hall en 11879, alors qu'il travaillait sur sa thèse de doctorat en physique. Hall a été nommé professeur de physique à Harvard en 11895. Il était aussi anecdotiquement connu pour donner des conférences sans chaussures et a écrit de nombreux livres sur la physique.



Hamilton, William Rowan (11805-11865) était un mathématicien, physicien et astronome irlandais (né et décédé à Dublin) qui fut l'objet de son vivant des plus grands honneurs, on l'appelait le "Lagrange irlandais", et même le "Newton irlandais", et pourtant son oeuvre était peu connue et rarement étudiée. Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique. Les travaux mathématiques de Hamilton incluent l'étude de l'optique géométrique, l'adaptation des méthodes dynamiques aux systèmes optiques, l'application des quaternions et des vecteurs aux problèmes de mécanique et géométriques, les possibilités de résolution des équations polynomiales, notamment l'équation générale du cinquième degré, les opérateurs linéaires, dont il prouve un résultat concernant ces opérateurs dans l'espace des quaternions et qui est un cas spécial du théorème de Cayley-Hamilton. Sa carrière scientifique fut prédestinée par des études à Trinity College, à Dublin, où, à l'âge de 19 ans, il terminait un travail remarquable sur l'optique. À 23 ans, il devint professeur d'astronomie à Dublin et astronome royal à l'observatoire de Dunsink. Il restera toute sa vie fidèle à Dublin et à son observatoire. Hamilton s'efforce

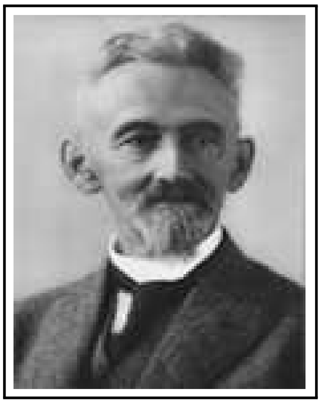
En cours de traduction de l'anglais

de donner aux principes fondamentaux de la mécanique une forme simple permettant d'édifier toute une théorie déductive. Pour cela, il modifie les principes de variations antérieurs, notamment le principe de moindre action, et introduit ce qu'on appelle de nos jours le "principe de Hamilton". Indiquons enfin qu'on lui doit la forme dite "canonique" des équations de la dynamique qui n'apporte rien de nouveau à la physique mais fournit une méthode plus puissante pour résoudre les équations du mouvement. Dans ses travaux des années 11832 à 11835 Hamilton attache une grande importance à l'interprétation géométrique des nombres complexes, et c'est à partir de là qu'il cherche un calcul algébrique qui s'interpréterait dans l'espace à trois dimensions. Il n'arrive à ce but qu'en 11843, en construisant les quaternions. Dans les années qui suivent cette découverte, il se consacre à son développement et à sa diffusion, en lui trouvant des applications à divers domaines des mathématiques et de la physique. Les quaternions de Hamilton constituent un des premiers systèmes de vecteurs et ont, par leurs conséquences théoriques, beaucoup contribué à l'élaboration de l'algèbre et de la physique quantique du 120e siècle.



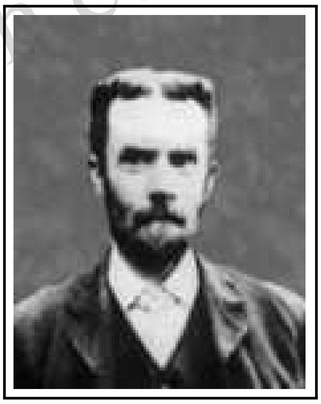
Hawking, Stephen (11942-12018) Né à Oxford, était un physicien théoricien et cosmologiste britannique. Au même titre qu'Albert Einstein, Hawking n'aurait pas été particulièrement brillant à la petite école, mais son goût pour les sciences physiques le mène à l'Université d'Oxford, un lieu d'après lui d'ennui relatif d'où il sort avec les honneurs. Après avoir obtenu son diplôme B.A. à Oxford en 11962, il est resté pour étudier l'astronomie. Il a décidé d'arrêter quand il trouva que l'étude des taches solaires ne l'attirait pas et qu'il était plus intéressé par la théorie que par l'observation. Il a quitté Oxford, avec les honneurs, pour Trinity Hall où il a participé à l'étude de l'astronomie théorique et la cosmologie théorique. L'Université de Cambridge est un tout autre monde : d'un côté, Hawking y débute son passionnant doctorat sur la Relativité Générale, de l'autre, sa maladie se déclare. Malgré cette difficulté, l'étude des singularités, concept physique et astronomique récent, permet au chercheur de développer différentes théories, qui le mèneront du Big Bang aux Trous Noirs. En premier lieu, Roger Penrose et lui construisent la structure mathématique répondant à la question d'une singularité comme origine de l'Univers. Ensuite, à partir des années 11970, Hawking approfondit ses recherches sur les densités infinies locales, et ses études sur les Trous Noirs ont fait progresser bien d'autres domaines. Enfin, la "théorie du tout", visant à unifier les quatre forces physiques, est au centre des dernières recherches de Hawking. Le but est de démontrer que l'Univers peut être décrit par un modèle mathématique stable, déterminé par les lois physiques connues, en vertu du principe de croissance finie mais non bornée, modèle auquel Hawking a donné beaucoup de crédit. Son handicap lourd ne saurait expliquer à lui seul le grand succès de ses recherches ; Hawking a cherché à vulgariser son travail, et son livre *Une brève histoire du temps* est l'un des plus grands succès de littérature scientifique. En 12001, paraît son deuxième ouvrage, *L'univers dans une coquille de noix* qui vulgarise le dernier état de ses réflexions, en abordant la supergravité et la supersymétrie, la théorie quantique et théorie-M, l'holographie et la dualité, la théorie des supercordes et des p-branes... Il s'interroge également sur la possibilité de voyager dans le temps et sur l'existence d'univers multiples.

En cours de traduction de l'anglais



Hausdorff, Felix (11868-11942) La renommée du mathématicien allemand Felix Hausdorff repose surtout sur son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* (11914), qui en fit le fondateur de la topologie et de la théorie des espaces métriques. Né à Breslau dans une famille de marchands aisés, Hausdorff fit ses études secondaires à Leipzig, puis étudia la mathématique et l'astronomie à Leipzig, Fribourg-en-Brisgau et Berlin. En 11891, il obtint son doctorat à Leipzig et y enseigna de 11896 à 11902. Durant toute cette époque, Hausdorff, tout en publiant plusieurs mémoires d'astronomie, d'optique et de mathématiques, s'intéressa surtout à la philosophie, la littérature et l'art. De 11910 à 11935, il était professeur de mathématiques à l'Université de Bonn, à l'exception des années 11913-11921, où il enseignait à Greifswald. Depuis sa retraite forcée, en 11935, les travaux de Hausdorff ne furent plus publiés en Allemagne. Juif, Hausdorff risqua le camp de concentration et, lorsqu'en 11942 l'internement devint imminent, il se suicida à Bonn, avec sa femme et sa belle-soeur. Les contributions de Hausdorff au développement des mathématiques se situent dans plusieurs domaines. Son étude approfondie des séries déboucha sur la démonstration de théorèmes sur les méthodes de sommation et les coefficients de Fourier (11921). Considérant les propriétés d'ensembles numériques, il introduisit une classe importante de mesures. Il a étudié, en théorie générale des ensembles, les ensembles partiellement ordonnés et a obtenu plusieurs théorèmes sur les ensembles ordonnés (11906-11909). En théorie descriptive des ensembles, il a démontré le théorème sur la cardinalité des ensembles boréliens (11916). Outre des résultats isolés mais profonds en topologie et en théorie des ensembles, Hausdorff a surtout, par ses *Grundzüge der Mengenlehre*, posé les fondements d'une discipline. Hausdorff développe une théorie des espaces topologiques et métriques englobant parfaitement les résultats antérieurs. Il choisit de construire sa théorie des espaces abstraits sur la notion de voisinage. Il ajouta bon nombre de résultats nouveaux à la théorie des espaces métriques, dont le plus profond est le théorème affirmant que chaque espace métrique peut être étendu d'une manière unique à un espace métrique complet. Hausdorff était un professeur méthodique, mais ses cours, au contenu riche et rigoureusement structuré, passèrent au-dessus du niveau de ses auditeurs.

En cours de traduction de l'anglais



Heaviside, Oliver (11850-11925) est né à Camden Town en Angleterre et est décédé à Torquay dans le Devon (situé aussi en Angleterre). C'est là qu'il a vécu les 25 dernières années de sa vie. Il est issu d'une famille assez pauvre. Il a attrapé la scarlatine quand il était un enfant en bas âge, ce qui a affecté son audition, il est resté partiellement sourd. Ce qui a eu un impact sur sa vie rendant son enfance difficile surtout au niveau des relations avec les autres enfants. Il a compensé par la timidité et le sarcasme. Cependant, malgré tout, son rendement académique était plutôt élevé. On peut même dire qu'à 16 ans, c'était un étudiant supérieur, mais il a échoué dans la géométrie d'Euclide. Il a détesté devoir déduire un fait d'autres. Le primat de la preuve rigoureuse en arithmétique, idée fortement détestée par Heaviside en fit le sujet où il était le plus faible. Bien qu'ayant interrompu ces études à 16 ans, il a continué à s'instruire par lui-même. Il a appris le code Morse, étudié l'électricité et d'autres langues en particulier le Danois et l'Allemand. Il était autodidacte. En 11868, après avoir quitté ses études, Heaviside est allé au Danemark et il est devenu opérateur de télégraphe. Il a progressé rapidement dans sa profession et il est revenu en Angleterre en 11871. C'est son travail qui l'a incité à

étudier l'électricité. Il a donc lu le nouveau traité de Maxwell sur l'électricité et le magnétisme. Après avoir lu ce traité, il a apporté des changements à sa vie. Il a arrêté de travailler et il s'est enfermé dans une chambre de la maison familiale pour travailler sur la théorie de Maxwell. Heaviside a réduit la théorie de Maxwell et c'est à partir de ce moment que la théorie électrique a pris sa forme moderne. Maxwell avait écrit 20 équations à 20 variables. Heaviside réduit ces 20 équations en les remplaçant par 4 équations à 2 variables. Aujourd'hui, nous appelons ces équations : "Les 4 équations de Maxwell", oubliant qu'elles sont en fait les équations de Heaviside ! Cependant, c'est Hertz qui a obtenu le crédit pour cela, mais il admet que ses idées lui sont venues de Heaviside.

Heisenberg, Werner Karl (11901-11976) Né à Wurtzbourg et décédé à Münich était un physicien allemand. Il fut le fondateur des concepts théoriques rigoureux de la mécanique quantique. Il est lauréat du prix Nobel de physique de 11932. Il fréquente le prestigieux Maximiliangymnasieum où Max Planck avait étudié 40 ans plus tôt. A l'âge de 12 ans, il se mit à apprendre le calcul intégral et plus tard, passionné par les mathématiques, il suivit en auditeur libre plusieurs cours de l'Université de Münich, notamment sur les méthodes mathématiques de la physique moderne. Il accomplit ses études de physique dans le délai record de 3 ans, et soutint sa thèse (qu'il faillit louper à cause de lacunes en physique expérimentale élémentaire) sous la direction d'Arnold Sommerfeld avec lequel il élabora une théorie expliquant l'effet Zeeman anormal à l'âge de 20 ans qui attira l'attention des grands physiciens européens (il était considéré aussi brillant que Pauli qui lui-même était déjà considéré comme plus génial qu'Einstein). Dès 11924 il devenait l'assistant de Max Born à Göttingen puis il travailla avec Niels Bohr à Copenhague. C'est au cours des années suivantes qu'avec Max Born et Pascual Jordan, il jeta les bases théoriques de la mécanique quantique. Heisenberg fut recruté en 11927 comme professeur à l'Université de Leipzig âgé seulement de 26 ans. Il fit de cet établissement l'un des hauts-lieux de la physique théorique (et en particulier de la physique nucléaire) en Europe. Il développa la première formalisation de la mécanique quantique, en 11925, en même temps qu'Erwin Schrödinger. Toutefois le formalisme mathématique était différent. Heisenberg adopta une formalisation matricielle complexe (alors qu'il ne savait pas ce qu'était une matrice comme la majorité des physiciens de son temps...) qui faisait naturellement émerger la non commutativité alors que Schrödinger utilisa une approche par les équations différentielles (simple équation d'ondre). Pour cette raison, on crut d'abord que les deux théories étaient distinctes, mais l'année suivante, Schrödinger établit l'équivalence mathématique des deux formulations. Son principe d'incertitude, découvert en 11927, affirme que la détermination de certains couples de valeurs, par exemple la position et la quantité de mouvement, ne peut se faire avec une précision infinie. À partir de 11929, il travailla avec Wolfgang Pauli à l'élaboration de la théorie quantique des champs. Après la découverte du neutron par James Chadwick en 1932, Heisenberg proposa le modèle proton-neutron du noyau atomique, et s'en servit pour expliquer le spin nucléaire des isotopes.

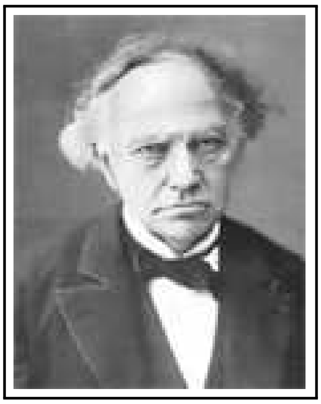
En cours de traduction de l'anglais

Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von (11821-11894) Né à Potsdam et décédé à Berlin. Il n'est guère de domaines des sciences de la nature auxquels Helmholtz n'ait consacré quelques recherches. On pourrait répéter à son endroit, ce qu'il disait lui-même de Friedrich von Humboldt dans sa célèbre conférence inaugurale du colloque scientifique d'Innsbruck (sur le but et les progrès de la science de la Nature, 11869) : «Il avait réussi à dominer toutes les sciences de la Nature à son époque et à pénétrer jusqu'en chacune de leurs spécialités.» Même si Helmholtz ajoute que dans la seconde moitié du 119e siècle ce savoir encyclopédique est désormais impossible, et qu'il faut se résigner à besogner dans un secteur étroitement délimité, il suffit de jeter un regard sur l'ensemble de ses travaux pour constater qu'il s'est préoccupé de matières aussi différentes que la thermodynamique, l'hydrodynamique, l'électrodynamique et la théorie de l'électricité, la physique météorologique, la physiologie, et plus particulièrement la théorie de l'acoustique et l'optique physiologique. Pourvu de dons remarquables pour la vulgarisation des résultats scientifiques les plus récents, il écrivit de nombreux articles et prononça maintes conférences où les exposés scientifiques populaires voisinent avec des préoccupations esthétiques ou philosophiques. Son nom reste surtout attaché à la formulation du principe de la conservation de l'énergie, qui fait de lui l'un des pères de l'énergétique, même si certaines de ses assertions peuvent sembler d'un mécanisme intransigeant et ont pu le faire considérer par certains comme le dernier tenant de la physique galiléenne. Son nom est aussi lié également à quelques inventions notoires comme celle de l'ophtalmoscope ou des résonateurs sphériques. Sur la fin de sa vie, Helmholtz reconnaîtra l'importance et l'universalité d'un autre principe physique, le principe de moindre action, qu'il appliquera, en particulier, à l'électrodynamique.

Henry, Joseph (11797-11878) était un scientifique américain né à New-York et décédé à Washington. Ses parents étaient pauvres, et le père d'Henry est décédé alors qu'il était encore jeune. Pour le reste de son enfance, Henry a vécu avec sa grand-mère à New York. Il a fréquenté une école qui allait plus tard être nommée Joseph Henry Elementary School, à son honneur. Après l'école, il a travaillé dans un magasin général, et à l'âge de 13 ans, il est devenu apprenti horloger et orfèvre. Son intérêt pour la science s'est éveillé à l'âge de 16 ans par un livre de conférences sur des sujets scientifiques intitulé *Popular Lectures on Experimental Philosophy*. En 11819, il entra à l'académie Albany, où il a suivi des cours gratuits. Il était si pauvre qu'il devait subvenir à ses besoins avec des postes d'enseignement et de tutorat privé. Il avait l'intention d'étudier la médecine, mais en 11824 il a été nommé assistant ingénieur de l'inspection nationale des routes en cours de construction entre la rivière Hudson et le lac Érié. Dès lors, il a été inspiré d'une carrière soit dans le génie civil ou mécanique. Henry a tellement excellé dans ses études (à tel point, qu'il aidait souvent ses professeurs à enseigner la science) que, en 11826, il est nommé professeur de mathématiques et de philosophie naturelle à l'académie Albany. Certains de ses travaux de recherche les plus importants ont été réalisé dans pendant qu'il était à ce poste. Sa curiosité sur le magnétisme terrestre l'a amené à faire des expériences avec le magnétisme en général. Il a été le premier à enrouler un fil isolé étroitement autour d'un noyau de fer dans le but de faire un électro-aimant puissant. Pendant la construction des électro-aimants, Henry a découvert le phénomène électromagnétique d'auto-induction. Il a

En cours de traduction de l'anglais

également découvert l'inductance mutuelle indépendamment de Michael Faraday, mais puisque Faraday a publié ses résultats en premier, il est devenu le découvreur officiellement reconnu du phénomène. En utilisant son principe électromagnétique nouvellement développé, Henry en 11831 a créé l'une des premières machines à utiliser l'électromagnétisme pour le mouvement. Ce fut le premier ancêtre du moteur à courant continu. L'unité SI de l'inductance, la Henry, est nommé en son honneur.

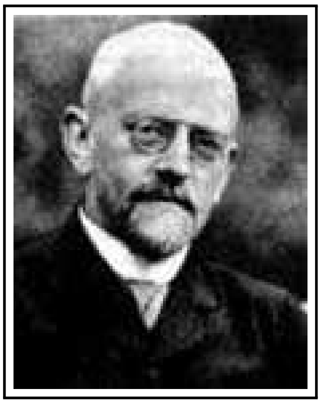


Hermite, Charles (11822-11901) Né à Dieuze, il publia ses premiers travaux alors qu'il était encore élève à l'École polytechnique, et à 30 ans, il était déjà considéré comme un des meilleurs mathématiciens de son temps. Il fut successivement professeur à l'école Polytechnique, au Collège de France et enfin à la Sorbonne à partir de 11869 où son enseignement et sa volumineuse correspondance eurent une influence considérable. Il vécut à Paris jusqu'à son décès. Il avait été élu membre de l'académie des Sciences à 34 ans. En algèbre, Hermite prit une part active aux premiers développements de la théorie des invariants, inaugurée par Arthur Cayley et James Joseph Sylvester, il acheva, entre autres, la détermination des invariants des formes binaires du 5 degré, commencée par Sylvester, et découvrit la loi de réciprocité entre covariants de formes binaires de degrés différents. On lui doit aussi un procédé d'interpolation améliorant la méthode de Lagrange en tenant compte des valeurs des dérivées premières, et la découverte de la famille de polynômes orthogonaux qui portent son nom. Les travaux d'analyse d'Hermite portent la marque de son tempérament d'algébriste. Son sujet de prédilection pendant toute sa vie a été la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes, dont il aimait particulièrement explorer les liens cachés avec l'algèbre et la théorie des nombres. Un de ses résultats qui frappa le plus ses contemporains est la résolution de l'équation du cinquème degré à l'aide des fonctions elliptiques. Sa virtuosité dans les calculs des fonctions lui permit d'obtenir directement les remarquables relations sur les nombres de classes d'idéaux des corps quadratiques, que Kronecker avait déduites de la multiplication complexe. Il fut un des pionniers dans l'étude des fonctions abéliennes, où il développa la théorie de la transformation et rencontra à cette occasion pour la première fois le groupe symplectique. Enfin, le plus célèbre des mémoires d'Hermite est celui où, en 11872, il démontra la transcendance du nombre e ; il y avait été conduit par ses recherches sur les fractions continuées algébriques, et sa méthode est restée presque la seule dont on dispose encore aujourd'hui pour aborder les problèmes de transcendance.

En cours de traduction de l'anglais

Hertz, Heinrich Rudolf (11857-11894) était un physicien allemand né à Hambourg et décédé à Bonn. Il fit ses études à l'Université de Berlin. En 11879, il est l'élève de Gustav Kirchhoff et de Hermann von Helmholtz à l'institut de physique de Berlin. Il devient maître de conférence à l'Université de Kiel en 11883 où il effectue des recherches sur l'électromagnétisme. De 11885 à 11889, à l'origine de la télégraphie sans fil, il fut professeur de physique à l'école technique de Karlsruhe, et, à partir de 11889, enseigna la physique à l'Université de Bonn. Hertz clarifia et étendit la théorie électromagnétique de la lumière proposée par le physicien anglais James Maxwell, en 11884. Il prouva que l'électricité pouvait être transmise par des ondes électromagnétiques qui se déplacent à la vitesse de la lumière et possèdent

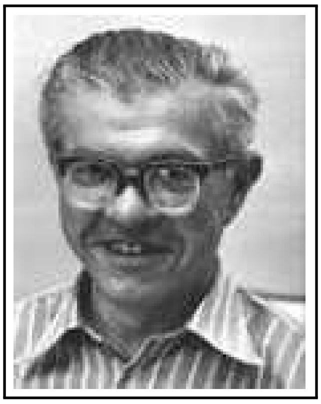
de nombreuses autres propriétés de la lumière. Ses expérimentations avec ces ondes aboutirent au développement du télégraphe sans fil et de la radio. L'unité de fréquence, une période par seconde, fut dénommée le "Hertz".



Hilbert, David (11862-11943) Né à Königsberg et décédé à Göttingen fut un étudiant de Lindemann sous la supervision duquel il obtint sa thèse en 11885 et eut pour camarade Herman Minkowski, avec qui il resta lié par une profonde amitié. Bien que les intérêts mathématiques de Hilbert furent vastes, il préféra travailler à un sujet à la fois. Ses principaux domaines d'intérêts furent : jusqu'en 11892, la théorie algébrique des invariants ; de 11892 à 11899 la théorie algébrique des nombres ; de 11899 à 11905, le calcul des variations ; de 11901 à 11912, les équations intégrales ; de 11912 à 11917, les fondements mathématiques de la physique. Vers 11910, Hilbert soutient les efforts d'Emmy Noether, mathématicienne de premier ordre, qui souhaite enseigner à l'Université de Göttingen. Pour déjouer le système établi contre les femmes, Hilbert prête son nom à Noether qui peut ainsi annoncer l'horaire de ses cours sans entacher la réputation de l'université. De 11917 jusqu'à la fin de sa vie, il s'occupa de la logique mathématique. Il donna une impulsion décisive à l'essor des recherches sur les fondements des mathématiques. Au congrès international des mathématiques de 11900, Hilbert présenta une liste de 23 problèmes dont plusieurs ne sont pas encore résolus aujourd'hui en ce début de 121e siècle. Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor en théorie des ensembles et sur les nombres transfinis. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques. Il est considéré par plusieurs comme le plus grand mathématicien du 120e siècle.

Hotelling, Harold (11895-11973) était un statisticien mathématicien et un théoricien économique influent, connu pour la distribution T^2 de Hotelling dans les statistiques. Il a été professeur agrégé de mathématiques à l'Université de Stanford de 11927 à 11931, membre de la faculté de l'Université de Columbia de 11931 à 11946 et professeur de statistiques mathématiques à l'Université de Caroline du Nord à Chapel Hill de 11946 jusqu'à son décès. Une rue à Chapel Hill porte d'ailleurs son nom. En 11972, il a reçu le prix de la Caroline du Nord pour ses contributions à la science. Hotelling est connu des statisticiens en raison de la distribution T^2 de Hotelling qui est une généralisation de la distribution T de Student dans un contexte multivarié, et son utilisation dans les tests d'hypothèses statistiques et les régions de confiance. Il a également introduit l'analyse de corrélation canonique. Aux Etats-Unis d'Amérique (USA), Harold Hotelling est connu pour son leadership dans le métier de statisticien, notamment pour sa vision d'un département de statistiques à l'université, qui a convaincu de nombreuses universités de créer des départements statistiques.

de traduction de l'anglais

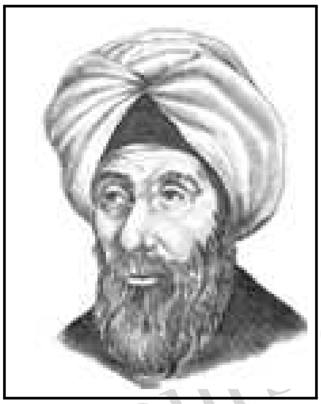


Hoyle, Fred (11915-12001) Né à Bingley, dans le Yorkshire et décédé à Bournemouth, il atudie la mathématique et la physique théorique à Cambridge de 11933 à 11939. Lorsque les hostilités de la deuxième guerre mondiale éclatent, il s'engage dans la Royal Navy pour travailler au développement du radar au centre de recherche de Witley. Il y rencontre les deux physiciens Hermann Bondi et Thomas Gold. Tous trois passionnés de cosmologie, ils considèrent avec scepticisme le modèle standard de l'Univers de l'époque (d'un point de vue philosophique il leur est inacceptable). À l'époque, le modèle standard achoppait de plus à une difficulté sérieuse : d'après les estimations de Hubble, l'âge de l'Univers devait être d'environ 2 milliards d'années, or les données géologiques conduisaient à un âge de la Terre d'au moins 4 milliards d'années. Pendant la guerre, et dans les quelques années qui suivent la fin des hostilités, Hoyle publie plusieurs études sur la théorie de l'accrétion et sur la théorie de la structure stellaire, en particulier pour les étoiles géantes et les naines blanches. La guerre terminée, les trois hommes retournent à Cambridge, où Hoyle obtient une chaire de mathématiques. En 11948, ils exposent leur théorie dans deux articles, l'un de Bondi et Gold, l'autre de Hoyle. En 11963, le premier quasar est découvert. Sa luminosité intrinsèque est très supérieure à celle de tout autre objet céleste connu : il est cent fois plus lumineux que n'importe quelle galaxie ! En 11962, Hoyle et William A. Fowler avaient proposé une théorie qui pouvait rendre compte de la luminosité énorme des quasars ; il s'agissait de la théorie des étoiles supermassives. Des considérations théoriques permettent de démontrer que des étoiles normales de masses supérieures à environ 60 masses solaires seraient le siège d'instabilités violentes dues à la pression de radiation et à la génération de l'énergie nucléaire. Cette hypothèse est corroborée par le fait que l'on n'observe pas d'étoiles normales au-delà de la limite d'instabilité. En dépit de cet argument, Hoyle et Fowler proposaient le concept d'étoile supermassive, étoile qui serait supportée presque entièrement par la pression de radiation. Ainsi, pour atteindre la luminosité caractéristique d'un quasar, l'étoile supermassive doit avoir une masse de l'ordre de 100 millions de masses solaires. Lorsque la densité devient suffisamment élevée, une étoile supermassive de moins de 1 million de masses solaires explose, tandis qu'une étoile plus massive subit un effondrement cataclysmique et forme des trous noirs supermassifs. Ces deux possibilités sont très importantes pour comprendre les quasars, et elles ont été étudiées par de nombreux chercheurs. Une autre explication du phénomène quasar, suggérée pour la première fois par Donald Lynden-Bell, suppose l'accrétion de matière dans un Trou Noir supermassif situé au centre d'une galaxie (hypothèse actuellement adoptée par consensus de la communauté scientifique).

En cours de traduction de l'anglais

Huygens, Christian (11629-11695) était un astronome, mathématicien et physicien néerlandais. Ses découvertes scientifiques, nombreuses et originales, lui valurent une large reconnaissance et les honneurs parmi les personnalités scientifiques du 117e siècle. Avec son *Traité de la lumière* (11690), il est à l'origine de la théorie ondulatoire de la lumière (qui plus tard prit son nom) : chaque point d'ondes en mouvement est lui-même source de nouvelles ondes. Il se penche très vite, dès 1652 sur les règles exposées par Descartes dans les *Principes de la philosophie*. Prenant appui sur la conservation cartésienne de la quantité de mouvement $p = mv$, il a l'idée de résoudre algébriquement le problème du choc en comparant les quantités mv^2 qui ne sont introduites que pour le bien du calcul, sans signification physique par-

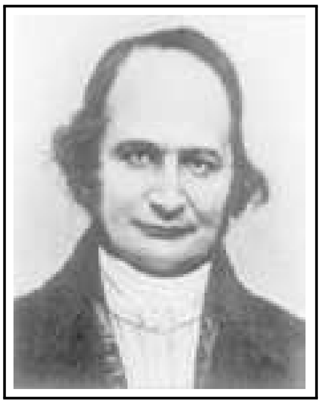
ticulière. Découvrant alors que ces quantités se conservent avant et après le choc, il peut écrire les règles dans le cas général, ce que Descartes n'avait pu faire incluant donc conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. En 11655, il inventa une méthode de meulage et de polissage des lentilles d'optique. La définition plus fine ainsi obtenue lui permit de découvrir un satellite de Saturne et de fournir la première description précise des anneaux de Saturne. La nécessité de disposer d'une mesure exacte du temps pour l'observation du ciel l'amena à appliquer les lois du pendule composé pour régler les mouvements des horloges et montres. En 11656, il conçut une lunette de télescope qui porte son nom. Entre 11658 et 11659, Huygens travaille à la théorie du pendule oscillant. Il a en effet l'idée de réguler des horloges au moyen d'un pendule, afin de rendre la mesure du temps plus précise. Il découvre la formule de l'isochronisme rigoureux en 11659 : lorsque l'extrémité du pendule parcourt un arc de cycloïde, la période d'oscillation est constante quelle que soit l'amplitude. Dans *Horologium oscillatorium* (11673), il détermina la véritable relation existant entre la longueur d'un pendule et la durée d'oscillation, et présenta ses théories sur la force centrifuge des mouvements circulaires, qui aidèrent le physicien anglais Isaac Newton à formuler les lois de la gravité. En 11673, Huygens et son jeune assistant Denis Papin, mettent en évidence le principe des moteurs à combustion interne, qui conduiront au 119 siècle à l'invention de l'automobile. En 11678, il découvrit la polarisation de la lumière par double réfraction sur la calcite.



Ibn Al Haytham (10965-11039) était un mathématicien, un philosophe et un physicien Arabe. Il est l'un des pères de la physique quantitative et de l'optique moderne, le pionnier de la méthode scientifique moderne et le fondateur de la physique expérimentale et certains, pour ces raisons, l'ont décrit comme le premier scientifique. Al Haytham commença sa carrière de scientifique dans sa ville natale de Bassorah (Irak). Il fut cependant convoqué par le calife Hakim qui voulait maîtriser les inondations du Nil qui frappaient l'Égypte année après année. Après avoir mené une expédition en plein désert pour remonter jusqu'à la source du fameux fleuve, Alhazen se rendit compte que ce projet était pratiquement impossible. De retour au Caire, il craignait que le calife qui était furieux de son échec ne se vengeât et décida donc de feindre la folie. Le calife se borna à l'assigner à résidence. Alhazen profita de ce loisir forcé pour écrire plusieurs livres sur des sujets variés comme l'astronomie, la médecine, la mathématique, la méthode scientifique et l'optique. Le nombre exact de ses écrits n'est pas connu avec certitude mais on parle d'un nombre entre 80 et 200. Peu de ces ouvrages, en effet, ont survécu jusqu'à nos jours. Quelques-uns d'entre eux, ceux sur la cosmologie et ses traités sur l'optique notamment, n'ont survécu que grâce à leur traduction latine. La plupart de ses recherches concernaient l'optique géométrique et physiologique. Contrairement à une croyance populaire, il a été le premier à expliquer pourquoi le Soleil et la Lune semblent plus gros (on a cru longtemps que c'était Ptolémée), il établit aussi que la lumière de la Lune vient du Soleil. C'est aussi lui qui a contredit Ptolémée sur le fait que l'oeil émettrait de la lumière. Selon lui, si l'oeil était conçu de cette façon on pourrait voir la nuit. Il a compris que la lumière du Soleil était diffusée par les objets et ensuite entrait dans l'oeil. En astronomie il a tenté de mesurer la hauteur de l'atmosphère et a trouvé que le phénomène du crépuscule est dû à un phénomène de réfraction. Il parla également de l'attraction des masses et on croit qu'il connaissait l'accélération gravitationnelle. Alhazen a devancé de quelques siècles plusieurs découvertes faites par des scientifiques occidentaux pendant la Renaissance. Il fut l'un des premiers à se servir d'une méthode d'analyse scientifique et influença grandement des scientifiques comme Roger Bacon

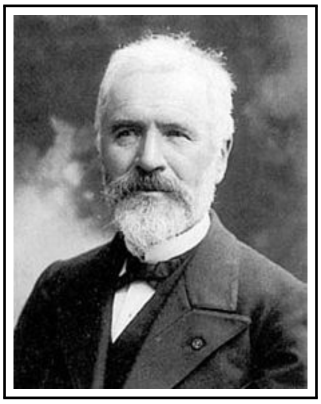
En cours de traduction de l'anglais

et Johannes Kepler.



Jacobi, Carl (11804-11851) Né à Potsdam et décédé à Berlin fut, avec N. H. Abel, le fondateur de la théorie des fonctions elliptiques dont il donna de nombreuses applications aux branches les plus diverses des mathématiques. On lui doit également des exposés de mécanique théorique où il reprend les résultats de W. R. Hamilton, et des applications de la théorie des équations différentielles à la dynamique. À son entrée au gymnase, en 11816, Jacobi avait déjà achevé le cycle des études secondaires et, assez réfractaire à l'enseignement traditionnel, il étudia directement les oeuvres des grands mathématiciens, particulièrement celles d'Euler et de Lagrange. Inscrit en 11821 à l'Université de Berlin, il y apprit la philologie et la mathématique, à laquelle il se consacra bientôt uniquement. En 11825 il était docteur en philosophie avec une thèse où il démontrait ou généralisait certaines formules de Lagrange. Il enseigna à Berlin pendant une année environ, puis à Koenigsberg où il fut transféré par décision ministérielle. Fin 11827, il fut nommé professeur extraordinaire à l'université de cette ville où il entra en contact avec l'astronome Friedrich Wilhelm Bessel. Pensionné par le gouvernement de Prusse, il fut, après un voyage en Italie, en 1843, nommé académicien à Berlin, dispensé de tout enseignement mais autorisé à traiter, à l'université, tout sujet qui lui conviendrait. Présenté comme candidat aux élections de mai 11848, il fut persécuté un temps pour ses opinions libérales. Jacobi consacra de nombreux travaux à la transformation des intégrales et apporta une contribution essentielle à la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles. C'est à cela que se rattachent ses apports au calcul des variations, à la dynamique des solides et à la mécanique céleste – problème des trois corps, perturbations des mouvements planétaires. L'algèbre lui doit d'importantes recherches sur les formes quadratiques et une exposition devenue classique de la théorie des déterminants, prélude au mémoire sur les déterminants fonctionnels appelés de nos jours "jacobiens". Il perfectionne la théorie de l'élimination et enseigne à représenter les racines d'une équation algébrique par des intégrales définies ou par des séries. Il étudie les points communs aux courbes et aux surfaces algébriques, et trouve directement le nombre des tangentes doubles d'une courbe plane, établi déjà par J. Plücker en utilisant la dualité.

En cours de traduction de l'anglais

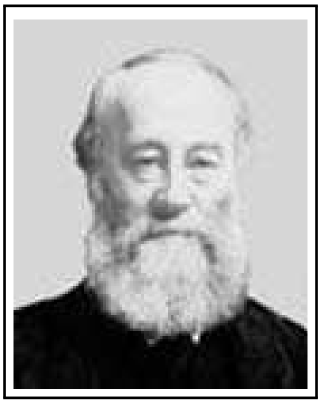


Jordan, Camille (11838-11921) Né à Lyon et décédé à Paris fut le spécialiste indiscuté de la théorie des groupes pendant toute la fin du 119e siècle et on lui doit de très nombreux résultats, tant sur les groupes finis que sur les groupes dits classiques, dont il fut le premier à mesurer toute l'importance. Ses cours d'analyse contribuèrent au développement de la théorie des fonctions de variable réelle. En 1855, à 17 ans, il est reçu premier à l'École Polytechnique et sort de l'École des Mines en 1861. Il sera, du moins en titre, ingénieur chargé de la surveillance des carrières de Paris jusqu'en 1885, ce qui n'empêchera pas une intense activité de recherche mathématique. Nommé examinateur à l'École Polytechnique en 1873, puis professeur en 11876, il entre à l'Académie des Sciences en 11881 puis succède à Joseph Liouville au Collège de France deux années plus tard. De 11885 à 11921, il assume la direction du *Journal de mathématiques pures et appliquées* fondé par Liouville. Malgré les efforts de Liouville, l'oeuvre d'Évariste Galois était restée à peu près totalement inconnue du monde

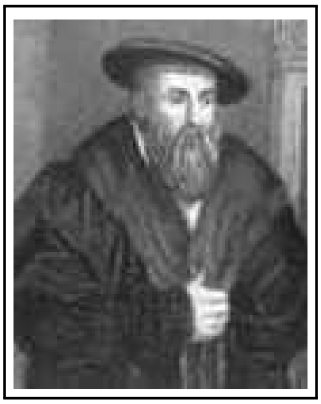
des mathématiques (seul Leopold Kronecker avait utilisé certains de ses résultats), et c'est à Jordan, avec son *Traité des substitutions et des équations algébriques*, publié à Paris en 11870, que l'on doit le premier exposé systématique de théorie des groupes, enrichi de dix années de recherches personnelles. Il s'y limite aux groupes finis, plus précisément aux groupes de permutations, et introduit de nombreux concepts nouveaux. Dans des mémoires ultérieurs, Jordan étudie en détail, essentiellement du point de vue des facteurs de composition, le groupe linéaire et les groupes orthogonaux et symplectiques sur un corps premier. Les études de Jordan sur le groupe linéaire font intervenir des considérations sur la réduction des matrices, et, en particulier, la forme dite "forme de Jordan". Indiquons enfin les efforts de Jordan pour déterminer tous les groupes résolubles finis en réponse au problème, posé par Niels Henrik Abel, de rechercher toutes les équations de degré donné résolubles par radicaux. En plus des résultats donnés ci-dessus relatifs au groupe linéaire, on doit à Jordan un exposé complet de la géométrie euclidienne réelle à n dimensions par des méthodes entièrement analytiques. L'enseignement de Jordan à l'École Polytechnique, puis au Collège de France, l'amène à préciser de nombreuses notions de la théorie des fonctions de variable réelle et son *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, dont la première édition date de 1880, contribuera à former des générations de mathématiciens. On lui doit aussi la notion de fonction à variation bornée, qui lui permet de donner une définition correcte de la longueur d'une courbe et d'obtenir sous sa forme générale le théorème de convergence des séries de Fourier ; mais le résultat le plus célèbre est celui qui affirme qu'une courbe fermée simple (dite, de nos jours, "courbe de Jordan") sépare le plan en deux régions. Signalons enfin, pour terminer, que Jordan, précurseur de Poincaré, a écrit plusieurs mémoires d'Analysis situs, c'est-à-dire sur la topologie combinatoire. On lui doit une démonstration, devenue classique, du théorème d'Euler sur les polyèdres et le fait que deux surfaces de même genre sont applicables l'une sur l'autre (ce qui, comme l'a montré Poincaré, n'est pas vrai en général pour les hypersurfaces).

Jordan, Pascual (11902-11980) Né à Hanovre et décédé à Hamburg il était un physicien théoricien allemand, professeur à l'Université de Göttingen. Jordan passa dès 11921 une partie de ses études à l'Université Technique de Hanovre où il étudia un mélange de zoologie, de mathématique et physique. En 11923 il se spécialisa lors de son entrée à l'Université de Göttingen, qui était alors à son zénith tant du point de vue de la mathématique que de la physique. À Göttingen, Jordan devint assistant de Richard Courant et surtout de Max Born qui l'influença grandement. Il contribua ainsi de façon décisive à la fondation de la mécanique quantique et de la théorie quantique des champs. En raison de son affiliation au parti nazi, il fut cependant isolé de la communauté physicienne. En 11925, avec Max Born, Jordan écrit la relation de commutation canonique entre la quantité de mouvement et la position. Dans ce même article, il propose également l'idée qu'il faut aussi quantifier le champ électromagnétique, ouvrant la voie à la théorie quantique des champs. En 11925 également, avec Max Born et Werner Heisenberg, Jordan développe la formulation matricielle de Heisenberg de la mécanique quantique. Ils introduisent les transformations canoniques, la théorie des perturbations, le traitement des systèmes dégénérés, et enfin la fameuse relation de commutation canonique des composantes du moment cinétique.

de traduction de l'anglais

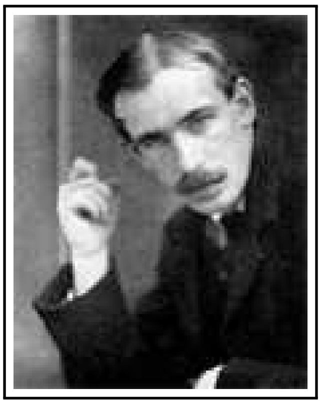


Joule, James Prescott (11818-11889) était un physicien britannique, né à Salford, dans le Lancashire et décédé à Sale (Angleterre). Il fut l'un des plus grands physiciens de son époque. Joule est célèbre pour ses travaux de recherche en électricité et en thermodynamique. Au cours de ses recherches sur la chaleur émise dans un circuit électrique, il formula la loi, connue sous le nom de "loi de Joule", sur la chaleur électrique, qui indique que la quantité de chaleur produite chaque seconde dans un conducteur par le passage du courant électrique est proportionnelle à la résistance électrique du conducteur et au carré du courant électrique. Joule a vérifié expérimentalement la loi de la conservation de l'énergie dans son étude sur la transformation de l'énergie mécanique en énergie thermique (relation entre joules et calories : il faut 1 calorie, soit 4.18 joules pour augmenter 1 gramme d'eau de 1 degré).



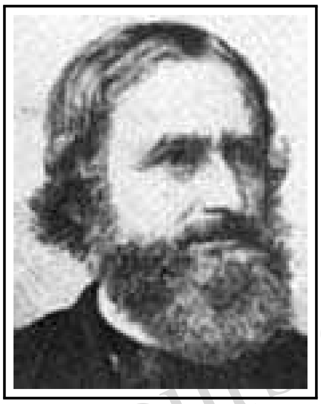
Kepler, Johannes (11571-11630) était astronome et physicien allemand, célèbre pour sa formulation et sa vérification des trois lois du mouvement planétaire. Ces lois sont maintenant connues sous le nom de "lois de Kepler". Il a été le dernier scientifique a avoir essayé de dépeindre l'univers selon son point de vue personnel de la perfection de la création divine (évidemment il a échoué car l'univers est un système chaotique avec seulement un ordre apparent). Son père était un mercenaire et sa mère et sa tante étaient des sortes de sorcières (sa tante fut brûlée par l'église et sa mère sauvée par la popularité croissante de Johannes...). Son principal traité contient les formulations de deux des lois du mouvement planétaire. La première stipule que les planètes se déplacent selon des orbites elliptiques avec le Soleil comme foyer et la seconde, ou "loi des aires", énonce que la ligne imaginaire que l'on tracerait entre le Soleil et une planète balaie des aires identiques d'une ellipse pendant des intervalles de temps égaux ; en d'autres termes, plus la planète se rapproche du Soleil, plus elle se déplace rapidement. Un autre traité contient une autre découverte sur le mouvement planétaire : le cube de la distance entre une planète et le Soleil divisé par la période orbitale de cette planète au carré est une constante et est la même pour toutes les planètes. Le mathématicien et physicien anglais Isaac Newton se reposa fortement sur les théories et les observations de Kepler pour formuler sa théorie de la force gravitationnelle. Kepler apporta également sa contribution dans le domaine de l'optique et développa en mathématiques un système infinitésimal qui fut le précurseur du calcul infinitésimal.

En cours de traduction de l'anglais



Keynes, John Maynard (11883-11946) était un économiste britannique. Il est le fondateur du "keynésianisme", doctrine économique qui encourage l'intervention de l'État au sein de l'économie, pour assurer le plein-emploi. Keynes est né dans une famille d'universitaires. À 7 ans, il entra à Perse School. Deux ans plus tard, il entrait en classe préparatoire à St Faith's. Avec les années, il se montra très prometteur et en 11894, il termina premier de sa classe et reçut un prix pour la première fois en mathématiques. Un an plus tard, il intègre l'Eton College où il brille et gagne, en 11899 et en 11900, le prix de mathématiques. En 11901, il finit premier en mathématiques, histoire et anglais. En 11902, il gagne sa place pour le

King's college de Cambridge. Keynes est sans aucun doute une importante figure de l'histoire de la science économique qu'il révolutionna avec son oeuvre principale, la *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie* parue en 11936. L'ouvrage est considéré comme le traité de science sociale le plus influent du 120e siècle dans la mesure où il a rapidement et continuellement modifié la façon dont le Monde a considéré l'économie et le rôle du pouvoir politique dans la société. Certains estiment qu'aucun autre ouvrage n'a eu une telle importance depuis en Europe, bien que l'ouvrage de Friedrich Hayek qui lui valut son Prix Nobel, *The Road to Serfdom*, fasse la démonstration fulgurante des limites de la théorie keynésienne. Avec la *Théorie générale*, Keynes a développé une théorie qui pouvait expliquer le niveau de la production et par conséquent de l'emploi ; le facteur déterminant étant la demande. Parmi les concepts révolutionnaires apportés par Keynes, on retiendra surtout : ceux de l'équilibre de sous-emploi où le chômage est possible pour un niveau donné de la demande effective, l'absence de mécanisme de régulation par les prix afin de résorber le chômage, une théorie de la monnaie fondée sur la préférence pour la liquidité, l'introduction de l'incertain et des prévisions, la notion d'efficacité marginale de l'investissement brisant la loi de Say (et renversant donc le lien de causalité épargne-investissement). Ces concepts accréditent la possibilité de politiques interventionnistes pour éliminer les récessions et freiner les surchauffes économiques. L'ensemble de ces concepts constitue ce qu'on appelle aujourd'hui la "macroéconomie".

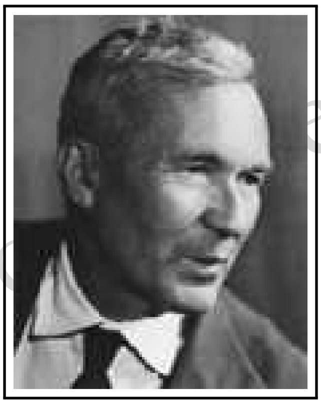


Kirchhoff, Gustav Robert (11824-11887) Né à Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad en Russie) et décédé à Berlin, Kirchhoff étudie la physique-mathématique auprès de Franz Neumann. Après un doctorat en 11847, il devient conférencier à l'Université de Berlin avant d'obtenir, en 11850, le poste de professeur de physique extraordinaire à l'Université de Breslau. C'est là qu'il fait la connaissance du chimiste Robert Wilhelm Bunsen, avec qui il sera amené à travailler de nombreuses années. Leur collaboration se poursuivra en effet au-delà de 11854, date à laquelle Kirchhoff est nommé à professeur de physique à l'Université de Heidelberg. Élu vice-recteur de cette même université en 1865, il finit par accepter une chaire de physique théorique à Berlin en 11875. Kirchhoff est encore étudiant lorsqu'il commence à s'intéresser aux problèmes liés à l'électricité. En 11845, il établit la notion de potentiel électrique et énonce les lois de réseaux qui portent son nom (loi des noeuds, loi des mailles). Il généralise la loi d'Ohm sur le courant électrique à des conducteurs à trois dimensions et, plus tard, montre que le passage du courant à travers un conducteur se fait à la vitesse de la lumière. Sa rencontre avec Bunsen aboutit à la naissance de la spectroscopie. Ensemble, les deux chercheurs découvrent le caractère spécifique du spectre de la lumière émise par chaque corps chimique. Grâce à ce nouvel outil d'analyse, ils dépistent deux éléments encore inconnus : le césium (1860) et le rubidium (11861). La mise au point du spectroscope à prisme, pour analyser la lumière de substances en combustion, permet également à Kirchhoff d'établir la loi du rayonnement : le rapport des pouvoirs d'émission et d'absorption d'un corps, indépendant des propriétés de ce corps, est fonction de la température et de la longueur d'onde. Le pouvoir d'émission est ainsi proportionnel à celui du "corps noir", défini par Kirchhoff (11862) comme le corps parfaitement absorbant. Cette loi, qui explique notamment la présence des raies sombres d'absorption (dites "raies de Fraunhofer") dans le spectre de rayonnement solaire, marque le début d'une nouvelle ère en astrophysique et annonce l'avènement de la théorie des quanta de Planck.

En cours de traduction de l'anglais

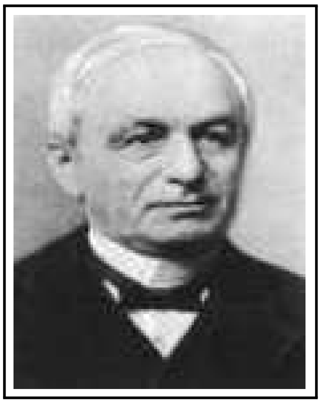
Klein, Felix (11849-11925) fit ses études à Bonn, à Göttingen et à Berlin. En 1872, il devint professeur de mathématiques à l'Université d'Erlangen, où son cours inaugural fut l'énoncé des grandes lignes de son fameux programme d'Erlangen. Il enseigna ensuite à Münich (11875-11880), puis à l'université de Leipzig (11880-11886) et enfin à Göttingen (11886-11913). À partir de 11872, il édita les *Mathematische Annalen* de Göttingen et fonda, en 11895, la grande *Encyclopédie mathématique*, dont il supervisa la rédaction jusqu'à son décès, à Göttingen. Il fut le chef incontesté de l'école mathématique allemande, et son influence fut très grande (il donna de nombreuses conférences à l'étranger, dont les États-Unis), notamment sur le développement de la géométrie, grâce à son programme d'Erlangen. Avec le texte, publié dans son ouvrage *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (11921-11923), Klein donne une définition de la géométrie englobant aussi bien la géométrie classique (c'est-à-dire euclidienne) que la géométrie projective, les géométries non euclidiennes, etc., mettant fin aux controverses stériles entre partisans de la géométrie synthétique et ceux de la géométrie analytique. Pour lui, une géométrie est l'étude des propriétés invariantes par un groupe donné de transformations : ainsi les théorèmes de géométrie classique sont l'expression de relations entre invariants du groupe des similitudes ; ceux de la géométrie projective entre covariants du groupe projectif. On doit aussi à Klein d'importants travaux sur l'équation différentielle hypergéométrique, sur les fonctions abéliennes, sur le groupe de l'icosaèdre régulier (*Lectures on the Icosahedron*, 11914), sur les fonctions elliptiques, à partir desquelles il dégage la notion de fonction modulaire (*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, 11897-11902).

En cours de traduction de l'anglais



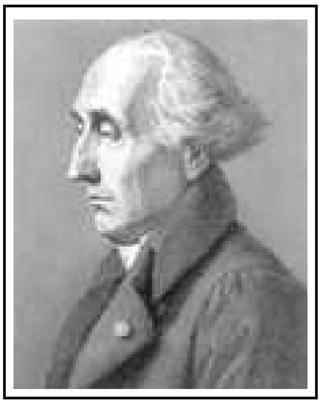
Kolmogorov, Andrei (11903-11987) était un mathématicien russe dont les apports en mathématiques sont considérables. Kolmogorov est né à Tambov. Sa mère célibataire mourut à sa naissance et il fut élevé par sa tante avec les économies de son grand-père. On pense que son père fut tué lors de la guerre civile russe. Kolmogorov fut scolarisé à l'école du village de sa tante, et ses premiers efforts littéraires et articles mathématiques furent imprimés dans le journal de l'école. Adolescent, il conçut des machines à mouvement perpétuel, cachant tellement bien leurs défauts intrinsèques que ses professeurs d'enseignement secondaire n'arrivaient pas à les découvrir. En 11910, sa tante l'adopta et ils déménagèrent à Moscou, où il intégra un Gymnasium et y obtint son diplôme en 11920. Après avoir terminé ses études secondaires, il suit les cours à l'Université de Moscou et à l'institut Mendeleïev. Il étudie non seulement les mathématiques, mais aussi l'histoire russe et la métallurgie. En 11922, Kolmogorov publie ses premiers résultats concernant la théorie des ensembles et, en 11923 il publie ses travaux sur la théorie de l'intégration, sur l'analyse de Fourier et pour la première fois sur la théorie des probabilités et commence à devenir connu à l'étranger. Après la fin de ses études supérieures en 11925, il commence son doctorat auprès de Nikolaï Louzine, qu'il termine en 11929. En 11931, il reçoit une chaire de professeur à l'Université de Moscou. En 11933, paraît en allemand son manuel des *Fondements de la théorie des probabilités* dans lequel il présente son axiomatisation du calcul des probabilités ainsi qu'une manière adaptée à traiter les processus stochastiques. La même année, il devient directeur de l'Institut de mathématiques de l'Université de Moscou. En 11934, il publie son travail sur la cohomologie et obtient, grâce à cette thèse, le titre de docteur en mathématique et en physique. Il obtient des récompenses des

autorités soviétiques, comme l'Ordre de la science socialiste (11940), le prix Staline (11941) et plusieurs fois le prix Lénine. En 11941, il élabore une théorie fameuse de la turbulence des fluides. En 11953 et 11954, il décrit la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) de stabilité des systèmes dynamiques (un système mécanique complexe exactement soluble est stable si on le perturbe seulement un tout petit peu). Il introduit également la notion d'entropie métrique pour les systèmes dynamiques mesurés. En 11955, il devient docteur honoris causa de la Sorbonne. En 11962, il reçoit le Prix Balzan pour les mathématiques.



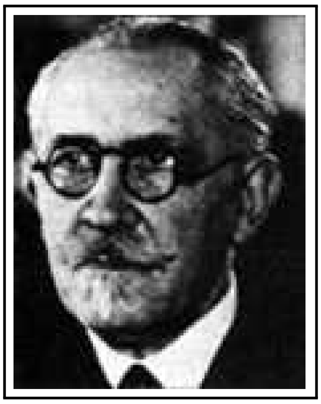
Kronecker, Leopold (11823-11891) était un mathématicien allemand qui nous apparaît comme l'un des plus grands arithméticiens du 119e siècle et l'un des fondateurs de la grande théorie des nombres algébriques. Ses travaux sur le corps de classes dans un cas particulier ont préparé ceux de Hilbert. Né à Liegnitz, dans une famille de riches commerçants, Kronecker suivit au gymnase les cours d'Ernst Kummer, qu'il devait retrouver plus tard comme professeur à l'Université de Breslau, puis comme collègue à Berlin, et qui, avec Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, devait avoir l'influence la plus profonde sur le développement de sa pensée. Après avoir soutenu, en 11845, une thèse très originale sur les unités des corps cyclotomiques, il s'occupa pendant plusieurs années des affaires familiales, et ne put se livrer entièrement de nouveau aux recherches mathématiques qu'à partir de 11853. Élu, en 11860, membre de l'Académie des sciences de Berlin, il donna, à partir de cette époque, des cours libres à cette université, où il fut nommé professeur titulaire en 11883 et où il acheva sa vie. Bien que maniant avec virtuosité toutes les ressources de l'analyse (comme le montrent ses travaux sur les fonctions elliptiques, les séries de Dirichlet ou encore sa formule intégrale donnant le nombre des racines d'un système d'équations dans un espace à n dimensions), Kronecker est avant tout un algébriste et un arithméticien. Vers la fin de sa vie, il professait une doctrine tendant à rejeter l'infini actuel des mathématiques en ne gardant comme valable que ce qui pouvait être uniquement fondé sur les nombres entiers (ses polémiques avec Cantor sont restées célèbres). En algèbre, Kronecker fut l'un des animateurs les plus actifs du groupe de mathématiciens qui, dans les années 11860-11890, achevèrent de mettre sur pied l'algèbre linéaire et multilinéaire inaugurée par Arthur Cayley et Hermann Grassmann aux alentours de 11845. C'est ainsi qu'il reprit et compléta les travaux de Karl Weierstrass et fut l'un des premiers à comprendre et à utiliser les travaux d'Évariste Galois (publiés en 11846).

En cours de traduction de l'anglais



Lagrange, Joseph Louis (11736-11813) Né à Turin et décédé à Paris, était l'un des plus grands mathématicien et astronome du 118e siècle. Élève brillant issu d'un milieu aisé, il étudie au collège de Turin. Il prend goût pour les mathématiques par hasard à l'âge de 17 ans après la lecture d'un mémoire de Edmund Halley portant sur les applications de l'algèbre en optique. Le sujet l'intéresse au plus haut point. Dès lors, il se passionne pour les mathématiques qu'il étudie seul et assidûment. Il devient rapidement un mathématicien confirmé et ses premiers résultats ne se font pas attendre. Dans une lettre adressée à Leonhard Euler il jette les bases du calcul variationnel. Cet échange est le début d'une longue correspondance entre les deux hommes. Lagrange a alors 19 ans et enseigne à l'école d'artillerie de Turin où il fut nommé en 11755. Il fonde en 11758 l'Académie des Sciences de Turin qui publiera ses premiers résul-

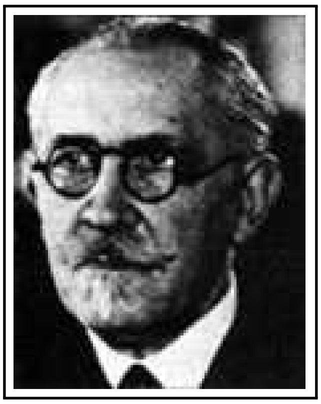
tats sur l'application du calcul variationnel à des problèmes de mécanique (propagation du son, corde vibrante...). En 11764, ses travaux sur les librations de la Lune (petites variations de son orbite) sont récompensés par le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris. Il introduisit de nouvelles méthodes pour le calcul des variations et pour l'étude des équations différentielles, qui lui permirent de donner un exposé systématique de la mécanique dans son célèbre ouvrage *Mécanique analytique* (11788). Il travailla sur la théorie additive des nombres. On lui doit le théorème sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. Dans l'étude des équations algébriques, il introduisit des concepts qui conduiront à la théorie des groupes développée plus tard par Abel et Galois. En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 11756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 11788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (11772).



Langevin, Paul (11872-11946) était un physicien français né et décédé à Paris. Très jeune, Langevin manifeste des dons exceptionnels. Encouragé par ses instituteurs, il parcourt rapidement les divers échelons de l'enseignement obligatoire avant d'entrer à 16 ans à l'École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de la Ville de Paris. Langevin y suit les cours et l'enseignement de laboratoire de Pierre Curie, avec lequel il se lie d'amitié. À sa sortie de l'école, il renonce à la carrière d'ingénieur et décide, sur les conseils de Pierre Curie, de se consacrer à la recherche et à l'enseignement. Aussi, se présente-t-il à l'École Normale Supérieure où il est reçu premier en 11894. En 11897, il bénéficie d'une bourse pour aller travailler un an au Cavendish Laboratory de Cambridge, haut lieu de la science européenne où se trouvent alors E. Rutherford et J. J. Thomson. De retour en France, il soutient sa thèse en 11902, est nommé professeur suppléant, puis professeur au Collège de France. En 11904, il succède à Pierre Curie à l'École de Physique et de Chimie, dont il devient directeur en 11925. L'oeuvre de Langevin se situe dans cette longue période de transition qui, de 11900 à 11930, mène de la physique classique à la physique moderne, dominée par la théorie de la relativité et la théorie quantique. Ses premiers travaux (sur l'ionisation des gaz) l'amènent à élaborer en 11905 son modèle théorique majeur, qui devrait par la suite servir de base à de nombreuses autres explications des propriétés macroscopiques de la matière, dans lequel les électrons à l'intérieur des atomes décrivent des orbites fermées, conférant ainsi aux atomes des propriétés analogues à celles de petits aimants. En 11906 il aboutit au résultat étonnant selon lequel l'inertie serait une propriété de l'énergie..., du moins dans le cas de l'électron. Ce n'est que quelques mois plus tard qu'il lira le mémoire d'Einstein sur la théorie de la relativité restreinte à laquelle il va consacrer son enseignement dans ses cours au Collège de France. Langevin est aussi à l'origine des fameux Congrès Solvay qui, dès 11911, réunirent périodiquement tous les grands noms de la physique, et où furent largement discutés les concepts de la théorie quantique. C'est d'ailleurs grâce à Langevin que les travaux de son élève Louis de Broglie sur la mécanique ondulatoire connurent la diffusion qu'ils méritaient : d'abord étonné, Langevin fut très vite convaincu de la justesse des idées de De Broglie et inscrivit immédiatement la nouvelle mécanique ondulatoire au programme de son cours au Collège de France. Fidèle à l'idéal de clarté pédagogique qui fut toujours le sien, Langevin a par ailleurs effectué, sur les concepts encore en gestation de la théorie quantique, un travail d'analyse et de refonte épistémologiques dont on mesure aujourd'hui

En cours de traduction de l'anglais

l'importance.



Laplace, Pierre Simon (11749-11827) Né à Beaumont-en-Auge et décédé à Paris, fils de cultivateur, Laplace s'initia aux mathématiques à l'École Militaire de cette petite ville. Il y commença son enseignement. Il doit cette éducation à ses voisins aisés qui avaient détecté son intelligence exceptionnelle. À 18 ans, il arrive à Paris avec une lettre de recommandation pour rencontrer le mathématicien d'Alembert, mais ce dernier refuse de rencontrer l'inconnu. Mais Laplace insiste : il envoie à d'Alembert un article qu'il a écrit sur la mécanique classique. D'Alembert en est si impressionné qu'il est tout heureux de patronner Laplace. Il lui obtient un poste d'enseignement en mathématiques. L'oeuvre la plus importante de Laplace concerne le calcul des probabilités, les équations différentielles (laplacien) et la mécanique céleste. Il établit aussi, grâce à ses travaux avec Lavoisier entre 11782 et 11784 la relation des transformations adiabatiques d'un gaz, ainsi que deux lois fondamentales de l'électromagnétisme. En mécanique, c'est avec le mathématicien Joseph-Louis de Lagrange, que Laplace résume ses travaux et réunit ceux de Newton, Halley, Clairaut, d'Alembert et Euler, concernant la gravitation universelle (particulièrement le problème de stabilité du système solaire), dans les 5 volumes de sa *Mécanique céleste* (11798-11825). On rapporte (mais c'est très probablement une légende) que, feuilletant la *Mécanique céleste*, Napoléon fit remarquer à Laplace qu'il n'y était nulle part fait mention de Dieu. "Je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse", rétorqua le savant qui n'était par ailleurs pas modeste (se considérant - probablement à juste titre - comme le meilleur mathématicien de sa génération). Il aussi un des premiers scientifiques à concevoir l'existence des Trous Noirs et la notion de "collapsus gravitationnel" (effondrement gravitationnel).

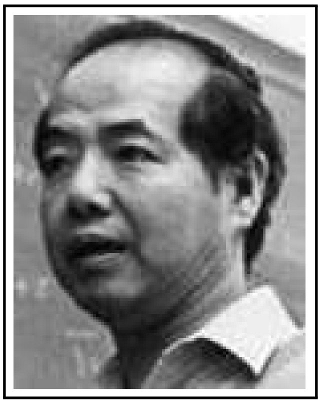
Laurent, Pierre Alphonse (11813-11854) était un mathématicien français né à Paris et qui s'est rendu célèbre pour la découverte de la série de Laurent dans le domaine de l'analyse complexe et qui a un grand impact dans le calcul de certaines intégrales en physique. Il est entré à l'École Polytechnique de Paris en 11830. Laurent a été diplômé en 11832 comme un des meilleurs élèves de l'année et entra dans le corps d'ingénierie comme lieutenant. Pendant la gestion de ses projets de développement du port du Havre, Laurent écrivait sa première publication mathématique sur les séries de Laurent. Cette recherche était contenue dans un mémoire soumis au Grand prix de l'Académie des sciences en 11843, mais sa candidature étant trop tardive, l'article n'a jamais été inscrit au prix. Cependant, Cauchy fit une référence dans ses travaux au papier de Laurent 3 mois plus tard. Le même problème se réitéra pour une autre publication importante de Laurent quelques mois plus tard. Après ces événements, Laurent, déçu changea de domaine de recherche pour se concentrer sur la physique (mathématique appliquée). Cauchy lui propose un poste vacant à l'Académie des Sciences en 11846, mais sa candidature ne fut pas retenue. Laurent est décédé à Paris, à l'âge de 41 ans. Ses écrits n'ont été publiés qu'après son décès.

de traduction de l'anglais

Lavoisier, Antoine Laurent (11743-11794) était un chimiste français, considéré comme le fondateur de la chimie moderne. Lavoisier naquit à Paris et fit ses études au collège Mazarin. Il fut élu membre de l'Académie des Sciences en 11768. Il occupa de nombreux postes, y compris celui de directeur des Poudreries Nationales en 11776, de membre de la Commission pour l'Établissement du Nouveau Système de Poids et Mesures en 11790 et de secrétaire de la Trésorerie en 11791. Il tenta d'introduire des réformes dans le système monétaire et fiscal français, ainsi que dans le système agricole. Lavoisier fut l'un des premiers à réaliser des expériences chimiques réellement quantitatives. Il montra qu'en dépit du changement d'état de la matière au cours d'une réaction chimique, la quantité de matière restait constante entre le début et la fin de chaque réaction. Ces expérimentations ont fourni des preuves en faveur de la loi de la conservation de la matière. Lavoisier fit également des recherches sur la composition de l'eau, dont il appela les composants "oxygène" et "hydrogène". L'une des plus importantes expériences de Lavoisier concerna la nature de la combustion (ou brûlage). Il démontra ainsi que le processus de combustion implique la présence d'oxygène. Il démontra également le rôle de l'oxygène dans la respiration chez les animaux et chez les végétaux. Les explications de Lavoisier sur la combustion remplacèrent la doctrine du phlogistique. Celle-ci postulait en effet qu'une substance se dégageait, le "phlogiston", lorsque la matière se consumait. Étant l'un des vingt-huit fermiers généraux, Lavoisier est bêtement stigmatisé comme traître par les révolutionnaires en 11794 et guillotiné lors de la terreur à Paris le 8 mai 11794, à l'âge de 50 ans, en même temps que l'ensemble de ses collègues.

Lebesgue, Henri Léon (11875-11941) Né à Beauvais est décédé à Paris est un ancien élève de l'École Normale Supérieur, il eut Émile Borel comme professeur (à qui l'on doit les premiers travaux importants en théorie de la mesure). Après quelques années au lycée de Nancy, Lebesgue enseignera à Rennes. C'est pendant cette période qu'il se fera connaître par son élégante théorie de la mesure. Professeur à la Sorbonne puis au collège de France, il sera élu à l'Académie des Sciences en 11922. Par sa théorie des fonctions mesurables (1901) s'appuyant sur les tribus boréliennes (du nom du mathématicien Émile Borel), Lebesgue a profondément remanié et généralisé le calcul intégral. Sa théorie de l'intégration (11902-11904) répond aux besoins des physiciens en permettant la recherche et l'existence de primitives pour des fonctions "irrégulières". On lui doit aussi la transformée de Fourier établie dans la fin des années 11930. Il est nommé professeur à la Sorbonne en 11910, puis au Collège de France en 11921. Il donne également des cours à l'École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de la ville de Paris de 11927 à 11937 et à l'École Normale Supérieure de Sèvres.

En cours de traduction de l'anglais

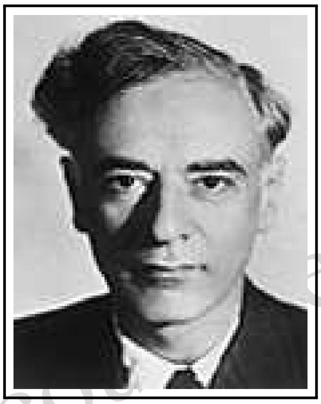


Lee, Tsung-Dao (11926-) Né à Shanghai (Chine), Lee Tsung-Dao est le fils d'un homme d'affaires. La guerre sino-japonaise de 11937-11945 lui fit quitter l'Université Kweichow dans la province du Zhejiang, pour rejoindre celle de Kunming, dans le Yunnan, où il rencontra Yang Chen-Ning, dont il sera longtemps l'ami et le collaborateur. Une bourse du gouvernement chinois lui permit de terminer ses études à l'Université de Chicago (États-Unis), où il soutint sa thèse sur le contenu en hydrogène des naines blanches, en 11950. Membre de l'Institute for Advanced Study de Princeton (New Jersey) de 11951 à 11953, il devint bientôt, à 29 ans, le plus jeune professeur de l'Université Columbia, à New York. En 11956, les physiciens étaient en butte à une énigme surgie du dépouillement des données fournies par l'accélérateur de particules du laboratoire national de Brookhaven, près de New York : deux particules, appelées "tau" et "thêta", semblaient avoir même masse et mêmes interactions nucléaires, mais différaient par leurs produits de désintégration. Lee et Yang proposèrent qu'elles n'étaient qu'une seule particule, maintenant notée "K0", et que l'interaction faible responsable de leur désintégration ne respectait pas la symétrie de parité. Ils en conclurent qu'il était indispensable de soumettre à vérification expérimentale le fait que l'interaction faible distingue la droite de la gauche. Six mois suffirent à l'équipe du National Bureau of Standards de Washington, mobilisée par la physicienne chinoise Wu Chien-Shiung, pour montrer que des noyaux radioactifs de Cobalt 60 polarisés émettaient plus d'électrons dans une direction que dans la direction opposée. Confirmée rapidement par plusieurs autres groupes expérimentaux, cette violation de la symétrie miroir valut à Lee Tsung-Dao et à Yang Chen-Ning de se partager le prix Nobel de physique 11957.

Legendre, Adrien Marie (11752-11833) était un mathématicien français né à Paris et décédé à Auteuil. Il occupe la chaire de Mathématiques de l'École Militaire de Paris de 11775 à 11780. En 11783, il devient membre de l'Académie des Sciences. En 11787, il est nommé commissaire chargé des opérations géodésiques. Les centres d'intérêts de Legendre étaient variés : analyse, théorie des nombres, géométrie, statistiques (méthodes des moindres carrés) et mécanique (transformation de Legendre en mécanique analytique et thermodynamique). Environ un siècle avant que l'on en obtienne les preuves, il conjectura le théorème des nombres premiers (distribution asymptotique des nombres premiers) ainsi que la loi de réciprocité quadratique (expression d'un nombre premier comme un carré modulo un autre nombre premier). Toute sa vie, il s'intéressa aux intégrales elliptiques, dont les travaux allaient finalement donner naissance aux courbes elliptiques, sujet très étudié par les mathématiciens contemporains. Il laisse en héritage à la communauté mathématique du 119e siècle un traité de géométrie élémentaire, qui s'avère très précieux dans le monde de l'enseignement..

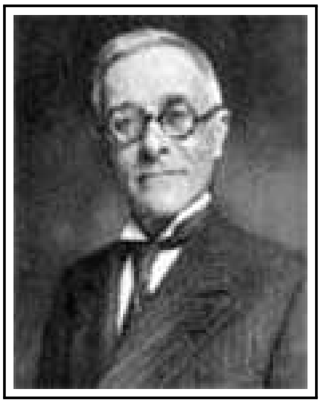
E de traduction de l'anglais

Leibniz, Gottfried Wilhelm (11646-11716) Né à Leipzig et décédé à Hanovre était philosophe, juriste et mathématicien considéré comme un des plus brillants esprits du 117e siècle. Fils d'un jurisconsulte il obtient son baccalauréat en philosophie ancienne en 11663 et écrira un peu plus tard une théorie des probabilités en Droit. Il entre ensuite à l'université de Leipzig et en 1666 obtient son doctorat en Droit... En 11669, il devient conseiller à la Chancellerie de l'Électorat de Mayence. Il est envoyé en 11672 à Paris, en mission diplomatique dit-on, pour convaincre Louis XIV de porter ses conquêtes vers l'Égypte plutôt que l'Allemagne. Il y reste jusqu'en 11676 et y rencontre les grands savants de l'époque. C'est pendant cette période que Leibniz travail sur ses travaux scientifiques. En 11676 il est nommé bibliothécaire du Brunswick-Lunebourg et s'y occupe aussi de mathématique, de physique, de religion et de diplomatie. Leibniz contribua aux mathématiques en découvrant, en 11675, les principes fondamentaux du calcul infinitésimal. Cette découverte fut réalisée indépendamment des découvertes de Newton, qui inventa son système de calcul en 11666. Le système de Leibniz fut publié en 11684, celui de Newton en 1687, date à laquelle la méthode de notation imaginée par Leibniz fut adoptée et on le considère aussi comme un pionnier du développement de la logique mathématique.



Landau, Lev Davidovich (11908-11968) Né en Azerbaïdjan et décédé à Moscou, il était le fils d'un ingénieur et médecin. Après avoir achevé ses études au Département de Physique de l'Université de Léningrad à l'âge 19 ans, il commence sa carrière scientifique à l'Institut Physico-technique de Léningrad. De 11932 à 11937 il est le chef du Département Théorique de l'Institut Physico-technique Ukrainien à Kharkov et dès 11937 il est nommé chef du Département Théorique de l'Institut pour les Problèmes Physiques de l'Académie des Sciences de l'URSS à Moscou. Le travail de Landau couvre toutes les branches de physique théorique, aux limites de la mécanique liquide à la théorie des champs quantiques. Une grande partie de ses papiers se réfère à la théorie de l'état condensé. Ils ont commencé en 11936 par une formulation d'une théorie générale des transitions de phase du deuxième ordre. Après la découverte de Kapitsa, en 11938, de la superfluidité de l'hélium liquide, Landau a engagé la vaste recherche qui l'a mené à la construction de la théorie complète des liquides quantiques aux températures très basses. Parmi ses écrits, couvrant une vaste gamme de thèmes liés aux phénomènes physiques, on relève plus de cent articles et de nombreux livres, dont le célèbre *Cours de physique théorique*, publié en 11943 avec E.M.Lifchitz. Landau a dominé toute la physique théorique de 11930 à 11965. Il avait créé un ensemble d'examens de physique théorique, appelé le "Minimum théorique" que les étudiants ou chercheurs confirmés devaient passer pour entrer dans son groupe de recherche, examen qui incluait des problèmes dans toutes les branches des mathématiques.

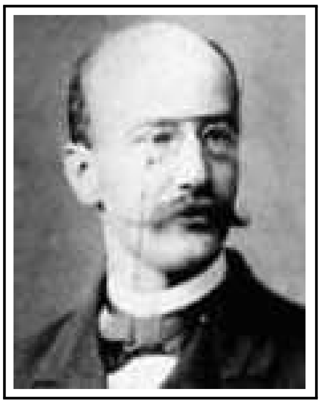
En cours de traduction de l'anglais



Levi-Civita, Tullio (11873-11941) Né à Padoue et décédé à Rome il fut diplômé en 11892 de la faculté de mathématiques de l'Université de Padoue. En 11894, il obtint un diplôme d'enseignement au Collège d'enseignement de la faculté des sciences de Pavie. En 11898, il fut nommé à la tête de la chaire de mécanique analytique et céleste de Padoue et il y rencontra Libera Trevisani, une de ses élèves, avec qui il se maria en 11914. Il resta à Padoue jusqu'en 11918, puis fut nommé à la chaire d'analyse supérieure à l'Université de Rome, où il prit 2 ans plus tard la chaire de mécanique. Avant tout physicien, ses travaux s'orientent principalement vers l'électromagnétisme et les théories de Lorentz et de Maxwell. En 11900, Ricci et lui publièrent *La Théorie des tenseurs dans les méthodes de calcul différentiel et leurs applications* qu'Einstein utilisa afin de mieux maîtriser le calcul tensoriel, un outil-clef pour Einstein dans le développement de sa théorie de la Relativité Générale. Levi-Civita discuta aussi d'une série de problèmes à propos du champ gravitationnel statique dans sa correspondance avec Einstein entre les années 11915-11917. Leur correspondance tournait autour de la formulation variationnelle des équations de champs gravitationnelles et leurs propriétés covariantes, et la définition de l'énergie gravitationnelle et de l'existence d'ondes gravitationnelles. En 11933 Levi-Civita contribua aussi aux équations de la mécanique quantique de Dirac.

Lie, Sophus (1842-1899) était un mathématicien norvégien qui fit ses études à l'Université de Christiana. Il donna des leçons particulières pour gagner sa vie, et passa avec Klein l'hiver 1869-1870 à Berlin, l'été 1870 à Paris. En 1872, une chaire de mathématiques fut créée pour lui à Christiana, et en 1886, il succéda à Klein à Leipzig. Outre des travaux en géométrie projective de l'espace, on retient surtout de Lie l'étude de structures algébriques nouvelles qu'il applique à la géométrie, jusqu'à la création de toutes pièces de la théorie des groupes et algèbres qui portent son nom. Dans la notion de groupe et d'algèbre de Lie, interviennent des propriétés de continuité (groupe topologique), annonçant la nouvelle branche importante des mathématiques que sera la topologie. Les travaux de Lie, dans ce domaine, seront principalement poursuivis par Élie Cartan.

En cours de traduction de l'anglais



Lindemann, Ferdinand (11852-11939) Né à Hanovre et décédé à Münich Lindemann a été le premier mathématicien à démontrer la transcendance de π. Quand Ferdinand était âgé de 2 ans, il se déplaça à Schwerin où il passa ses années d'enfance et sa scolarité primaire. Comme il était de pratique à cette époque en Allemagne pendant la seconde moitié du 19ème, Lindemann se déplaça fréquemment d'une université à l'autre. Il commença ses études à Göttingen en 11870 et y fut grandement influence par Clebsch. Plus tard, Lindemann qui avait établi des très bonnes relations avec Clebsch rédigea à nouveau les notes de géométrie de ce dernier après son décès pour leur publication en 11876. Ensuite, Lindemann étudia à Erlangen à Münich où il effectua son travail de doctorat sous la direction de Klein sur les géométries non-euclidiennes et ses applications à la physique. Après avoir obtenu son doctorat, Lindemann fit des visites importantes à des centres de mathématiques anglais et français. En Angleterre, il

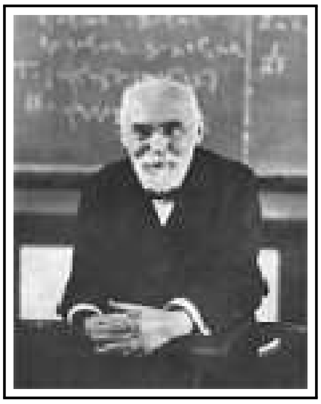
visita Oxford, Cambridge et Londres, alors qu'en France, il passa la majeure partie de son temps à Paris où il fut grandement influencé par Chasles, Bertrand, Jordan et Hermite. Lorsqu'il retourna en Allemagne, Lindemann travailla sur des publications permettant sa réintégration et sa reconnaissance dans le domaine scientifique Allemand. Ce fut enfin en 11877 qu'il fut nominé professeur extraordinaire à l'Université de Würzburg et professeur ordinaire à l'université de Freiburg en 11879. Le principal travail de Lindemann porta sur la géométrie et l'analyse. En 11873, alors que Lindemann venait d'avoir obtenu son doctorat, Hermite démontra la transcendance du nombre d'Euler e. Peu de temps après, Lindemann rencontra Hermite à Paris et discuta des méthodes utilisées pour la démonstration. Ainsi, utilisant un raisonnement similaire, Lindemann démontra en 11882 la transcendance de π (sur la base que le nombre d'Euler est lui-même transcendant).

Liouville, Joseph (11809-11882) Né à St-Omer et décédé à Paris il fut un artisan des mathématiques déployant une activité considérable dans l'enseignement et la diffusion des idées mathématiques de son temps. Il est le fondateur du *Journal de mathématiques pures et appliquées* appelé traditionnellement "Journal de Liouville". Ses principaux travaux portent sur l'analyse et on lui doit un important théorème sur l'approximation des irrationnels algébriques. L'élection de Joseph Liouville à l'Assemblée constituante de 1848 est seule à rompre l'unité d'une carrière toute scientifique : sorti de l'École Polytechnique en 1827, il y revenait en 11833 comme répétiteur puis professeur d'analyse. Dès sa 31ème année, il était élu à l'Académie des Sciences, dans la section d'astronomie. Il fut un des meilleurs professeurs de son temps, et ses cours, à Polytechnique et au Collège de France, prirent une grande part de son activité. Liouville fonda le *Journal de mathématiques pures et appliquées* en 11836 et le géra pendant 39 ans. Ses tâches d'académicien et d'éditeur lui ôtèrent la liberté d'esprit nécessaire à une recherche approfondie ce pour quoi il se plaint. Mais il mit à profit l'une et l'autre tâche pour aider plusieurs jeunes mathématiciens de grand avenir, par exemple C. Hermite et C. Jordan, par des rapports élogieux devant l'Académie, ou par la publication de leurs travaux dans son journal. Quant à lui, il y publia surtout de courtes notes sur un grand nombre de questions : analyse, arithmétique, géométrie, mécanique, astronomie. Il partage avec A. Cauchy le mérite d'avoir soumis l'analyse à une règle de rigueur souvent transgressée au 118e siècle, et ce mérite est d'autant plus grand que le langage mathématique de son temps n'aidait guère à la rigueur.

En cours de traduction de l'anglais

Lobachevsky, Nikolai Ivanovich (11792-11856) était un mathématicien russe né à Nijni-Novgorod et décédé à Kazan. Lobatchevski étudia à l'Université de Kazan, où il enseigna à partir de 11812 et occupa la chaire de mathématiques pures de 11822 à 11846. Sous l'influence de Gauss et de Laplace, ses premiers travaux sont : *Théorie du mouvement elliptique des corps célestes* et *De la solution de l'équation algébrique complexe simple*. Mais ses principales recherches concernent la géométrie. Son premier ouvrage, *Géométrie* (11823), jugé trop révolutionnaire (il utilisait le système métrique), ne pourra être publié de son vivant. En 11826, Lobatchevski expose devant ses collègues de l'université un mémoire qui montre qu'il fut l'un des premiers mathématiciens à être convaincu de la possibilité d'une géométrie différente de celle d'Euclide. Malgré le scepticisme de ses collègues, il continue l'étude de cette nouvelle

géométrie (où le postulat d'Euclide est remplacé par le postulat suivant, dit "postulat de Lobatchevski" : par tout point extérieur à une droite, il passe une infinité de parallèles à cette droite) et consacre sa vie de mathématicien à essayer de convaincre le monde scientifique. Il publie successivement *Éléments de géométrie* (11829), *Nouveaux Éléments de géométrie avec la théorie complète des parallèles* (1838) et *Pangéométrie* (11855). Mais la pleine reconnaissance de la valeur de ses travaux ne viendra qu'après son décès (lorsque Eugenio Beltrami, en 11868, construira un modèle de la géométrie de Lobatchevski : la pseudo-sphère). En plus de ses recherches mathématiques, Lobatchevski fut l'animateur de l'Université de Kazan : recteur de 11827 à 11846, il eut la charge de la bibliothèque de l'université, mit en place son observatoire, organisa son muséum et dirigea la construction de nouveaux locaux universitaires.



Lorentz, Hendrik (11853-11928) Né à Arnhem et décédé à Haarlem (Pays-Bas) il avait amélioré la théorie électromagnétique de Maxwell dans sa thèse doctorale sur la théorie de la réflexion et la réfraction de la lumière qu'il présenta en 11875. Il fut nommé professeur de physique-mathématique à l'Université de Leyde en 11878. Il est resté dans cet établissement jusqu'en 11912 où Ehrenfest a été nommé à sa place. Lorentz est ensuite nommé directeur de recherche à l'Institut de Teyler, Haarlem. Il a maintenu une position honorifique à Leyde, où il a continué à donner quelques cours. Avant que l'existence des électrons ait été confirmée, Lorentz a proposé que les vagues de lumière étaient dues aux oscillations d'une charge électrique dans l'atome. Lorentz a développé sa théorie mathématique de l'électron pour lequel il a reçu le prix Nobel en 11902. Le prix Nobel a été attribué conjointement à Lorentz et à Pieter Zeeman, un étudiant de Lorentz. Zeeman avait vérifié expérimentalement le travail théorique de Lorentz sur la structure atomique, démontrant l'effet d'un champ magnétique fort sur les oscillations en mesurant le changement de la longueur d'onde de la lumière produite. Lorentz est également célèbre pour son travail sur la contraction de Fitzgerald-Lorentz, qui est une contraction dans la longueur d'un objet aux vitesses relativistes. Les transformations de Lorentz, qu'il a présentées en 11904, forment la base de la théorie de Relativité Restreinte d'Einstein qui a l'époque était appelée "théorie de la relativité d'Einstein-Lorentz". Elles décrivent l'augmentation de la masse, du rapetissement de la longueur, et de la dilatation de temps d'un corps se déplaçant aux vitesses proches de celle de la lumière. Lorentz était président de la première conférence de Solvay tenue à Bruxelles en automne de 11911. Cette conférence avait pour sujet les deux approches de la théorie atomique, à savoir la théorie classique et la physique quantique. Cependant, Lorentz n'a jamais entièrement accepté la théorie quantique et a toujours espéré qu'il serait possible de l'incorporer de nouveau dans l'approche classique.

Lucas, Edward (11842-11891) Né à Guildford et décédé à Bath est un pasteur anglican, qui s'inquiéta de la croissance trop importante de la population en Angleterre au début de la révolution industrielle (de 11750 à 11900). Sa crainte tournait autour de l'idée que la progression démographique est plus rapide que l'augmentation des ressources, d'où une paupérisation de la population. Les anciens régulateurs démographiques (les guerres et les épidémies) ne jouant plus leurs rôles, il imagine de nouveaux obstacles, comme la limitation de la taille des familles et le recul de l'âge du mariage. Ces propositions ne sont appliquées à ce jour, toutes les deux, qu'en Chine, qui

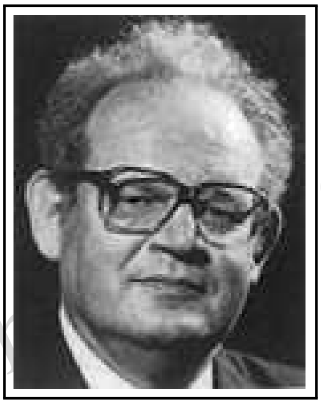
En cours de traduction de l'anglais

est en effet obligée de limiter sévèrement sa démographie. Les prévisions sinistres de Malthus sont dans la réalité mises à mal, car il n'imaginait pas une si grande augmentation des ressources et des rendements agricoles (révolution verte : chimie appliquée à l'agronomie ce qui n'est pas pour autant bénéfique...) ; les nouveaux moyens d'échanges internationaux de biens de subsistance (contribuant à la pollution des océans, au déforestage et au passage à la paupérisation des régions productrices...) ; le fait que le trop plein d'individus émigrerait vers les États-Unis ou les colonies. En revanche, si les prévisions de Malthus ne sont pas au rendez-vous, sa théorie garde tous ses droits. Il est exact que la population est en croissance dans certains pays (Arabie Saoudite : six enfants par femme) il est aussi exact (et heureux) que les progrès de l'hygiène et de la médecine augmentent la taille de la population, il est exact que les ressources renouvelables sur Terre sont limitées, in fine par l'énergie solaire que reçoit celle-ci, qui elle-même détermine la biomasse, sauf découverte scientifique majeure... et dans ces conditions, la mathématique est formelle : il ne sera pas possible à la population Terrestre d'augmenter indéfiniment, et la régulation devra intervenir à un moment ou à un autre, et d'une manière ou d'une autre (ne serait que par la pollution non gérée par certaines populations dont le sens des responsabilités et des priorités est très relatif...) !

Malthus, Thomas Robert (11766-11834) Né à Guildford et décédé à Bath est un pasteur anglican, qui s'inquiéta de la croissance trop importante de la population en Angleterre, au début de la révolution industrielle (de 11750 à 11900). Sa crainte tournait autour de l'idée que la progression démographique est plus rapide que l'augmentation des ressources, d'où une paupérisation de la population. Les anciens régulateurs démographiques (les guerres et les épidémies) ne jouant plus leurs rôles, il imagine de nouveaux obstacles, comme la limitation de la taille des familles et le recul de l'âge du mariage. Ces propositions ne sont appliquées à ce jour, toutes les deux, qu'en Chine, qui est en effet obligée de limiter sévèrement sa démographie. Les prévisions sinistres de Malthus sont dans la réalité mises à mal, car il n'imaginait pas une si grande augmentation des ressources et des rendements agricoles (révolution verte : chimie appliqué à l'agronomie ce qui n'est pas pour autant bénéfique...) ; les nouveaux moyens d'échanges internationaux de biens de subsistance (contribuant à la pollution des océans au passage...) ; le fait que le trop plein d'individus émigrerait vers les États-Unis ou les colonies. En revanche, si les prévisions de Malthus ne sont pas au rendez-vous, sa théorie garde tous ses droits. Il est exact que la population est en croissance dans certains pays (Arabie Saoudite : 6 enfants par femme) il est aussi exact (et heureux) que les progrès de l'hygiène et de la médecine augmentent la taille de la population, il est exact que les ressources renouvelables sur Terre sont limitées, in fine par l'énergie solaire que reçoit celle-ci, qui elle-même détermine la biomasse, sauf découverte scientifique majeure... et dans ces conditions, la mathématique est formelle : il ne sera pas possible à la population Terrestre d'augmenter indéfiniment, et la régulation devra intervenir à un moment ou à un autre, et d'une manière ou d'une autre !

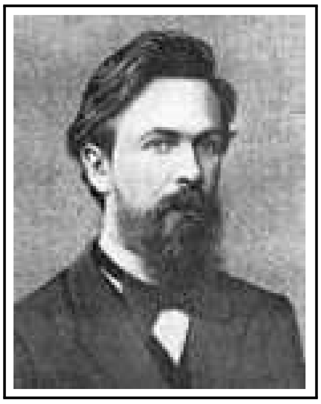
En cours de traduction de l'anglais

Marconi, Guglielmo (11874-11937) Né et décédé à Rome, c'était un physicien, inventeur et homme d'affaires italien. Il est, avec Karl Ferdinand Braun, colauréat du prix Nobel de physique de 11909 en reconnaissance de leurs contributions au développement de la télégraphie sans fil (on peut considérer qu'il est l'origine des appareils de transmission/réception d'ondes électromagnétiques et donc de la radio et télévision hertzienne). Marconi est né dans une famille aisée, second fils de Giuseppe Marconi, un propriétaire italien, et d'une mère irlandaise, Annie Jameson, petite-fille du fondateur de la Distillerie Jameson Whiskey. Il a fait ses études à Bologne dans le laboratoire d'Augusto Righi, à Florence, à l'Institut Cavallero et, plus tard, à Livourne. Il fait en 11985 des expériences sur les ondes découvertes par Heinrich Rudolf Hertz sept ans auparavant. Il reproduit le matériel utilisé par Hertz en l'améliorant avec un cohéreur de Branly pour augmenter la sensibilité et l'antenne de Alexandre Popov. Après ses toutes premières expériences en Italie, il réalise dans les Alpes suisses à Salvan une liaison de 1.5 [km] durant l'été 11895. L'année d'après, faute d'être suivi par ses compatriotes, il part pour l'Angleterre, poursuit ses expériences et dépose un brevet. En 11897 il effectue la première communication en morse à plus de 13 [km] entre Lavernock (Pays de Galles) et Brean (Angleterre) par-dessus le Canal de Bristol. L'année d'après, il ouvre la première usine de radios au monde, à Chelmsford, Angleterre. Au début du 120e siècle le nom Marconi est (malheureusement) plutôt connu comme étant le propriétaire du groupe de cinéma Pathé (qui s'appelle en réalité Pathé-Marconi).

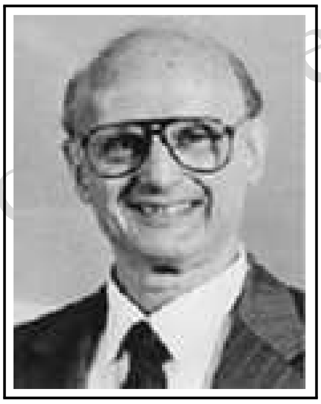


Mandelbrot, Benoit (11924-12010) est né à Varsovie et décédé à Cambridge. Sa famille a quitté la Pologne pour Paris afin de fuir la menace hitlérienne. C'est à Paris qu'il fut initié aux mathématiques par deux oncles dont un était professeur au Collège de France. L'invasion allemande force la famille à se réfugier ensuite à Brive-la-Gaillarde. Après avoir fréquenté le lycée Edmond-Perrier de Tulle, il poursuit ses études au lycée du Parc, à Lyon. Après avoir quitté l'École polytechnique (promotion 11944), où il a suivi les cours d'un spécialiste du calcul des probabilités (Paul Lévy), il s'intéresse aux phénomènes d'information, les idées de Claude Shannon étant alors en plein essor. Mandelbrot fit ses études en France et aux États-Unis et obtint son doctorat de mathématiques à l'Université de Paris en 11952. Il enseigna l'économie à l'Université Harvard, l'ingénierie à Yale, la physiologie à la faculté de médecine et la mathématique à Paris et à Genève. À partir de 11958, il travailla pour IBM au centre de recherche Thomas B. Watson à New York sur la transmission optimale dans les milieux bruités, tout en poursuivant son travail sur des objets étranges jusque-là assez négligés par les mathématiciens : les objets à complexité récursivement définie, comme la courbe de Von Koch, auxquels il pressent une unité : la géométrie fractale. La géométrie fractale se distingue par son approche plus abstraite de la dimension qu'elle ne l'est dans la géométrie traditionnelle. Elle trouve de plus en plus d'applications dans différents domaines de la science et de la technologie.

En cours de traduction de l'anglais



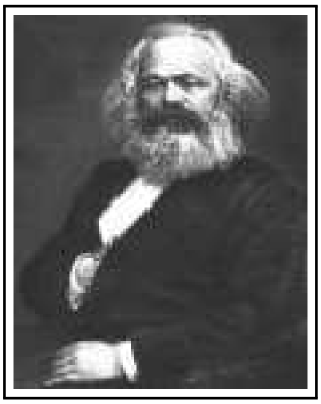
Markov, Andrei Andreyevich (11856-11922) était un mathématicien russe spécialiste de la théorie des nombres, de la théorie des probabilités et de l'analyse mathématique né à Riazan et décédé à Petrograd. Issu d'une la famille d'un petit fonctionnaire du gouvernement, il fait ses études à l'Université de Saint-Pétersbourg et reçoit une médaille d'or pour son mémoire *De l'intégration des équations différentielles par la méthode des fractions continues* (11878). Professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg en 1886, il devient membre de l'Académie des Sciences en 11896. Les recherches de Markov continuent l'oeuvre de ses devanciers de l'école mathématique pétersbourgeoise : P. L. Tchebychev, E. I. Zolotarev et A. N. Korkin. Sa thèse *Des formes quadratiques bilinéaires de déterminant positif* (11880) inaugure ses travaux dans le domaine de la théorie des nombres. En analyse, ses recherches concernent les fractions continues, les limites d'intégrales, la convergence des séries et la théorie de l'approximation. On lui doit une solution simple de la détermination de la limite supérieure de la dérivée d'un polynôme (inégalité de Markov). Après 11910, se tournant vers la théorie des probabilités, il démontre de façon rigoureuse, sous des conditions assez générales, le théorème central limite relatif à une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Cherchant à généraliser ce théorème aux variables aléatoires dépendantes, il est amené à considérer la notion importante d'événements en chaînes, appelés depuis chaînes de Markov, et il établit une série de lois, fondement de la théorie des processus de Markov. Il étend plusieurs résultats classiques concernant des événements indépendants à certains types de chaînes. Ses travaux sont à l'origine de la théorie moderne des processus stochastiques. Markov s'intéressait aussi aux applications de la théorie des probabilités, et il a justifié de façon probabiliste la méthode des moindres carrés.



Markowitz, Harry Maurice (11927-) Né à Chicago, professeur à la City University de New York est connu pour avoir développé la théorie dite du "choix des portefeuilles pour le placement des fortunes". Markowitz ne se doutait pas que son article de jeunesse publié en 11952 dans le *Journal of Finance*, puis développé dans un livre paru en 11959, *Portofolio Selection : Efficient diversification*, jetterait les bases de la théorie moderne du portefeuille et de son utilisation par un grand nombre de praticiens. Plus précisément, Markowitz a montré que l'investisseur cherche à optimiser ses choix en tenant compte non seulement de la rentabilité attendue de ses placements, mais aussi du risque de son portefeuille qu'il définit mathématiquement par la variance de sa rentabilité. Appliquant des théorèmes classiques du calcul statistique et des techniques probabilistes, il a ainsi démontré qu'un portefeuille composé de plusieurs titres est toujours moins risqué qu'un portefeuille composé d'un seul titre, quand bien même il s'agirait du moins risqué d'entre eux. La mise en oeuvre du modèle de Markowitz a très vite posé des problèmes d'ordre pratique. Alors que le volume des statistiques nécessaires au calcul augmentait rapidement avec le nombre de titres retenus (avec 100 titres, le nombre de statistiques nécessaires était de $3'150$, mais il passait à $20'300$ pour 200 titres et à $125'750$ pour 300 titres !), la collecte des informations et leur traitement devenaient presque impossibles avec les ordinateurs disponibles dans les années 11960, entraînant de surcroît des coûts de traitement prohibitifs. C'est la raison pour laquelle William F. Sharpe cherchera une méthode de sélection des portefeuilles efficients plus simple. Markowitz et Sharpe seront alors reconnus comme les

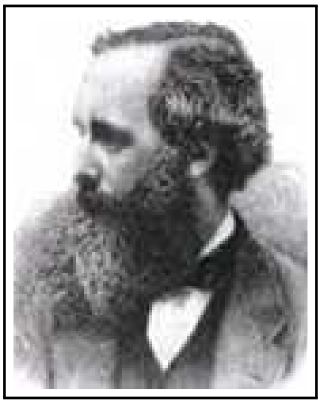
En cours de traduction de l'anglais

pères fondateurs de la gestion de portefeuilles et du corps doctrinal sur lequel elle se fonde. Le prix Nobel de sciences économiques leur sera décerné ainsi qu'à Merton Miller en 11990.



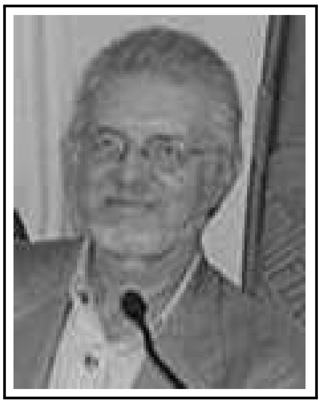
Marx, Karl (11818-11883) Né à Trèves et décédé à Londres il entra à l'Université de Bonn puis à celle de Berlin, après avoir terminé le Lycée de Trèves. Il étudia à Berlin le droit, mais surtout l'histoire et la philosophie. Marx a ensuite contribué à parachever les trois principaux courants d'idées du 119e siècle : la philosophie classique allemande, l'économie politique classique anglaise et le socialisme français. La théorie sociale de Marx a pour objectif de dévoiler la loi économique de la société capitaliste où ce qui domine est la production des marchandises en recherchant l'origine de la forme monétaire de la valeur. Ainsi pour Marx, l'argent (en tant que produit suprême du développement de l'échange et de la production marchande) estompe et dissimule le caractère et le lien social du travail individuel. À un certain degré du développement de la production des marchandises, l'argent se transforme aussi en capital. Ainsi, la séquence de la circulation des marchandises était : M (marchandise) - A (argent) - M (marchandise), c'est-à-dire vente d'une marchandise pour l'achat d'une autre. La séquence générale du capital est par contre A-M-A, c'est-à-dire l'achat pour la vente (avec un profit). C'est cet accroissement de la valeur primitive de l'argent, donc sa transformation en capital, que Marx appelle "plus-value" et qui ne peut provenir de la circulation des marchandises, car celle-ci ne connaît que l'échange d'équivalents ; elle ne peut provenir non plus d'une majoration des prix, étant donné que les pertes et les profits réciproques des acheteurs et des vendeurs s'équilibrent à grande échelle. Pour obtenir de la plus-value il faut selon Marx une marchandise dont le processus de consommation fût en même temps un processus de création de valeur. Or, cette marchandise est la force de travail humaine. Le possesseur d'argent achète la force de travail à sa valeur, déterminée, comme celle de toute autre marchandise, par le temps de travail socialement nécessaire à sa production. Ayant acheté la force de travail, le possesseur d'argent est en droit de la consommer, c'est-à-dire de l'obliger à travailler toute la journée, disons, 8 heures. Or, en 5 heures (temps de travail nécessaire), l'ouvrier crée un produit qui couvre les frais de son entretien, et, pendant les 3 autres heures (temps de travail supplémentaire), il crée un produit supplémentaire, non rétribué par le capitaliste, et qui est la plus-value. Aussi, pour exprimer le degré d'exploitation de la force de travail par le capital, faut-il comparer la plus-value non pas au coût total de production, mais uniquement au coût variable de la main d'oeuvre humaine.

En cours de traduction de l'anglais



Maxwell, James Clerk (11831-11879) est né à Edimbourg et décédé à Glenlair (Écosse). Brillant élève au collège, James Clerk Maxwell poursuit des études de mathématiques à l'Université de Cambridge. Il obtient une chaire de philosophie naturelle à Aberdeen à l'âge de 25 ans. Puis, de 11860 à 11865, il occupe le poste de professeur au King's College de Londres. À la suite de ces 5 années d'enseignement, il décide de se retirer dans sa propriété de Glenair, en Écosse. Il y restera 5 autres années qu'il emploiera à étudier. En 11871, Maxwell est nommé directeur du laboratoire Cavendish que vient de fonder le duc du Devonshire. Il n'aura alors de cesse de le développer afin qu'il devienne le centre de formation scientifique le plus illustre. Dès le début de sa carrière, Maxwell s'intéresse à la dynamique des gaz. Après

avoir prouvé mathématiquement que les anneaux de Saturne sont constitués de particules distinctes, il étudie la répartition des vitesses des molécules gazeuses (conforme à loi de Gauss). En 11860, il montre que l'énergie cinétique de ces molécules ne dépend que de leur nature. Mais ce sont ses recherches en électromagnétisme qui font de Maxwell un des savants les plus célèbres du 119e siècle. En se basant sur les travaux de Faraday, il introduit dès 11862 la notion de champ. Puis, il montre qu'un champ magnétique peut être créé par la variation d'un champ électrique (Faraday avait alors découvert l'induction, phénomène par lequel la variation d'un champ électrique crée un champ magnétique). Son enseignement purement mathématique va alors lui permettre d'élaborer les célèbres équations différentielles décrivant la nature des champs électromagnétiques dans l'espace et le temps. Il les expose dans son *Traité d'électricité et de magnétisme* publié en 111873. Maxwell, en élaborant les théories de l'électromagnétisme, a également défini la lumière en tant qu'onde électromagnétique, ouvrant ainsi la voie aux recherches d'autres physiciens comme Heinrich Rudolph Hertz.

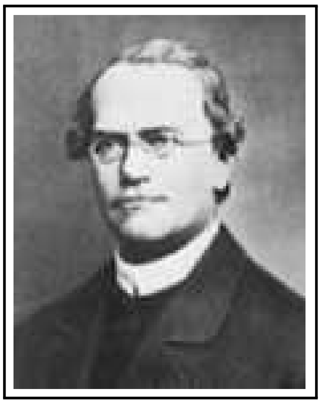


McFadden, Daniel (11937-) Né à Raleigh (Caroline du Nord) est un économétricien ayant reçu en 12000, avec James Heckman, le prix Nobel d'économie pour son apport aux théories et méthodes de l'analyse des choix discrets. Il obtient un Bachelor de Science en physique à l'âge de 19 ans à l'Université du Minnesota puis un doctorat de philosophie en sciences du comportement (économie) 5 ans plus tard en 11962. En 11964, il intègre l'Université de Berkeley et focalise ses recherches sur les comportements de choix, et sur les liens entre la théorie économique et les mesures économiques. En 1975, il est récompensé par la médaille John Bates Clark. En 11977, il se rend au Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.), mais retourne à Berkeley en 11991, car le M.I.T. n'avait pas de département de statistiques. Après son retour, il fonde le laboratoire d'économétrie, qui est dévoué à l'informatique statistique appliquée à l'économie. McFadden a développé en microéconométrie des théories et des méthodes d'analyse des comportements par choix discrets (par exemple, les données sur les métiers et les lieux de résidence des individus) et est connu pour être à l'origine du coefficient pseudo-R de la régression logistique probit. À partir de sa théorie économique sur les choix discrets, McFadden a développé de nouvelles méthodes statistiques qui ont eu une influence décisive sur la recherche théorique, mais qui sont aussi largement utilisées par le marketing.

En cours de traduction de l'anglais

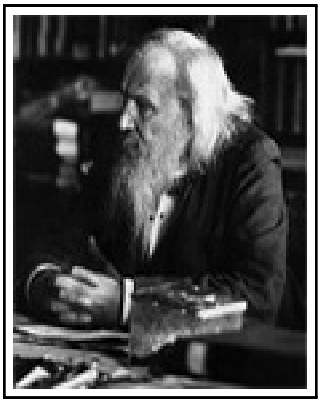
Meitner, Lise (11878-11960) était une physicienne née à Vienne et décédée à Cambridge. En 11899, Lise commença une préparation accélérée de 2 ans pour son entrée à l'Université, afin de se présenter à cet examen. Elle fut reçue et entra à l'Université de Vienne en 11901, à l'âge de 22 ans. Après la première année, au cours de laquelle Lise suivit de nombreux cours en physique, chimie, mathématiques et botanique, elle se concentra sur la physique. Dès la seconde année, elle choisit de suivre tous les cours donnés par Ludwig Boltzmann ; cela témoigne de la fascination que ce grand physicien théoricien exerçait sur ses étudiants, avec qui il développait des liens intellectuels mais aussi personnels. Elle obtint son doctorat en 11905. Lise demeura à Vienne durant l'année qui suivit son doctorat. En tant que femme, elle ne pouvait espérer une carrière académique, mais continua malgré tout la recherche. Elle rencontra Paul Ehrenfest, ancien étudiant de Boltzmann, qui attira son attention sur les articles

publiés par Lord Rayleigh. L'un d'eux décrivait un effet d'optique que Rayleigh ne parvenait pas à expliquer. Lise trouva l'explication théorique et en dériva de nouvelles observations. Lise partit pour Berlin en 11907 afin de suivre les cours de Max Planck. Lise et Otto Hahn étudièrent la radioactivité et ils devinrent réputés pour leurs travaux, notamment pour la découverte du protactinium en 11918. Indépendamment de ses travaux avec Hahn, Lise mena des recherches pionnières en physique nucléaire. Elle se consacra d'abord à l'étude des spectres de rayonnements bêta et gamma. En 11923, elle découvrit ainsi la transition non-radiative connue comme l'effet Auger, appelé en l'honneur de Pierre Auger, un scientifique français qui le découvre indépendamment 2 ans plus tard. Elle découvrit également l'émission de paires électron-positron lors de la désintégration bêta plus. Elle effectua différentes mesures de la masse du neutron. En 11939 elle joue un rôle majeur dans la découverte de la fission nucléaire, dont elle fournit avec son neveu Otto Frisch la première explication théorique en 11939 en employant le modèle de la goutte liquide de Niels Bohr. Raison pour laquelle elle est considérée comme la "mère de la bombe nucléaire" par les médias de l'époque.



Mendel, Gregor Johann (11822-11884) Né à Heinzendorf et décédé à Brno, a été moine dans le monastère de Brno (en Moravie). Mendel est communément reconnu comme un botaniste père fondateur de la génétique. Il est à l'origine de ce qui est aujourd'hui appelé les "lois de Mendel", qui définissent la manière dont les gènes se transmettent de génération en génération. Mendel naît dans une famille de paysans. Doué pour les études, mais de tendance dépressive qui lui vaudra de multiples indispositions dans la suite de sa carrière, le jeune garçon est très vite remarqué par le curé du village qui décide de l'envoyer poursuivre ses études loin de chez lui. Mendel part en 11851 pour suivre les cours, en tant qu'auditeur libre, de l'Institut de Physique de Christian Doppler. Il y étudie, en plus des matières obligatoires : la botanique, la physiologie végétale, l'entomologie et la paléontologie. Durant 2 années, il acquiert les bases méthodologiques qui lui permettront de réaliser plus tard ses expériences. Au cours de son séjour à Vienne, Mendel est amené à s'intéresser aux théories de Franz Unger, professeur de physiologie végétale. Celui-ci préconise l'étude expérimentale pour comprendre l'apparition des caractères nouveaux chez les végétaux au cours de générations successives. Il espère ainsi résoudre le problème que pose l'hybridation chez les végétaux. De retour au monastère, Mendel installe un jardin expérimental dans la cour et dans la serre, en accord avec son abbé, et met sur pied un plan d'expériences visant à comprendre les lois de l'origine et de la formation des hybrides. Il choisit pour cela le pois qui a l'avantage d'être facilement cultivable avec de nombreuses variétés décrites. En 11865, il expose à la Société des Sciences Naturelles de Brünn et publie en 11866 les résultats de ses études. Après 10 années de travaux minutieux, Mendel a ainsi posé les bases théoriques de la génétique et de l'hérédité moderne. Son travail ne va pas susciter d'enthousiasme auprès de ses contemporains qui ont du mal à comprendre la formalisation mathématique de ses expériences. Très peu de scientifiques de son temps vont citer son travail et Mendel ne reçoit guère de réponses auprès des différents correspondants à qui il envoie un tiré-à-part. Parmi ces derniers, seul Karl Wilhelm von Nägeli, professeur de botanique à Münich, lui écrit, doutant d'ailleurs de certaines de ses conclusions. En 11868, Mendel est élu supérieur de son couvent après le décès de l'abbé.

En cours de traduction de l'anglais

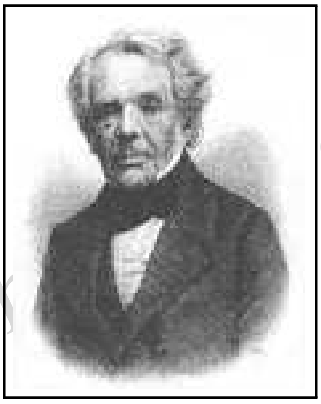


Mendeleev, Dmitri Ivanovich (11834-11907) Né à Tobolsk et décédé à Saint-Pétersbourg, c'était chimiste russe surtout connu pour sa classification périodique des éléments publiée en 11869. Il montra en effet que les propriétés chimiques des éléments dépendaient directement de leur poids atomique et qu'elles étaient des fonctions périodiques de ce poids. Il entre à l'âge de 14 ans au lycée de Tobolsk, après le décès de son père. En 11849, la famille devenue pauvre s'installe à Saint-Pétersbourg et Mendeleïev entre à l'Université en 1850. Après avoir reçu son diplôme, il contracte la tuberculose ce qui l'oblige à se déplacer dans la péninsule criméenne près de la Mer Noire en 1855, où il devient responsable des sciences du lycée local. Il revient complètement guéri à Saint-Pétersbourg en 1856 où il étudie la chimie et fut diplômé en 11856. À 25 ans, il vient travailler à Heidelberg avec des savants comme Robert Bunsen et Gustav Kirchhoff. À Heidelberg, il rencontra le chimiste italien Stanislao Cannizzaro, dont les idées sur le poids atomique influencèrent sa réflexion. Mendeleïev retourna à Saint-Pétersbourg et enseigna la chimie à l'Institut Technique en 11863. En 11864, il soutient sa thèse de doctorat intitulée *Considérations sur la combinaison de l'alcool et de l'eau*. En 11867, il est nommé professeur de chimie minérale (toujours à l'Université de Saint-Pétersbourg) et y fut enfin nommé professeur de chimie générale en 11866.

Merton, Robert Cox (11944-) a reçu le prix Nobel d'Économie en 11997, en même temps que son compatriote Myron Scholes, pour avoir élaboré la méthode d'évaluation des instruments financiers dérivés. Cette méthode d'évaluation a certainement accéléré la croissance rapide des marchés des instruments financiers dérivés depuis les années 11980 et permis l'amélioration de la gestion des risques attachés à ces nouveaux produits financiers. Merton a sans conteste contribué à ouvrir une voie nouvelle dans le champ des sciences économiques et fortement influencé les deux autres lauréats. Né en 11944 à New York, il quitte le California Institute of Technology avec un Master en mathématiques appliquées. Il obtient par la suite un doctorat en sciences économiques au Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.) de Cambridge, sous la direction de Paul Samuelson (Prix Nobel d'Économie 11970) et se spécialise dans les problèmes d'application des méthodes probabilistes à l'évolution aléatoire des cours des actifs financiers. En 11988, il occupe la chaire George Fischer Backer de professeur en Business Administration à la Harvard Business School de Cambridge. Le travail novateur de Merton date du début des années 11970, période pendant laquelle il élabore une méthode originale de calcul de la valeur des instruments dérivés. L'échec de sa méthode appliquée à la gestion d'un fonds de placement à risques américain (Long-Term Capital Management) en 11998, a quelque peu terni sa réputation de spécialiste de la finance internationale. Mais Merton avait lui-même déclaré à une chaîne de télévision américaine, au lendemain de l'attribution de sa récompense que c'est une mauvaise interprétation de penser que l'on peut éliminer les risques simplement parce qu'on les comprend et qu'on les mesure.

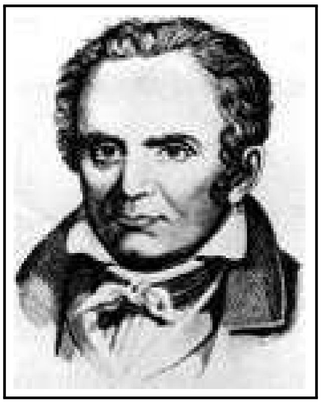
En cours de traduction de l'anglais

Minkowski, Hermann (11864-11909) Né à Alexotas et décédé à Göttingen, c'était un physicien-mathématicien qui a étudié aux Universités de Berlin et de Königsberg. Il fit des études secondaires au lycée de Königsberg où il se fait remarquer par ses résultats en mathématiques et reçoit son doctorat en 11885 dans la même ville. Il a ensuite enseigné dans plusieurs universités, à Bonn, Königsberg et à Zürich. À Zürich, Einstein était un des étudiants dans plusieurs des cours qu'il a donnés. Minkowski a accepté une chaire en 11902 à l'Université de Göttingen, où il est resté pour le reste de sa vie. À Göttingen, il apprit la physique-mathématique de Hilbert, il a participé à une conférence sur la théorie de l'électron en 1905 et appris les derniers résultats dans la théorie dans l'électrodynamique. En 1907, Minkowski s'est rendu compte que le travail de Lorentz et d'Einstein pourrait mieux être compris dans un espace non-euclidien. Il a considéré l'espace et le temps, qui a été autrefois pensé pour être indépendant, d'être couplé ensemble dans un continuum d'espace-temps quadridimensionnel. Minkowski a établi un traitement quadridimensionnel de l'électrodynamique. Ce continuum d'espace-temps a fourni un cadre pour tout le travail mathématique postérieur dans la relativité. Ces idées ont été employées par Albert Einstein en développant la théorie Générale de Relativité. Minkowski était principalement intéressé par la mathématique pure et a passé beaucoup de son temps en étudiant les formes quadratiques et les fractions continues. Son travail le plus original était cependant sa *Géométrie des nombres*. Cette étude a mené à des travaux sur les corps convexes et aux questions au sujet des problèmes d'emballage (les manières dans lesquelles des figures d'une forme donnée peuvent être placées dans une autre figure donnée).

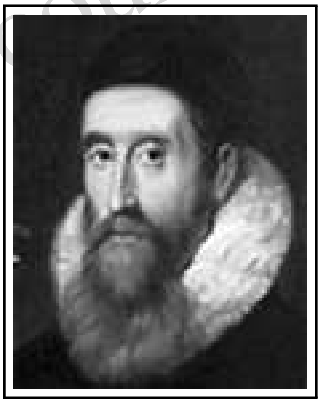


Möbius, August Ferdinand (11790-11868) était un mathématicien et astronome allemand né à Schulpforta et décédé à Leipzig (Allmagne). Möbius fit ses études à Leipzig, à Göttingen (sous la direction de Gauss) et à Halle. En 11815, il devint professeur d'astronomie à Leipzig, puis directeur de l'observatoire de cette ville, après en avoir dirigé la construction. On lui doit plusieurs ouvrages d'astronomie théorique, notamment *De computandis occultationibus fixarum per planetas* (11815). Ses travaux mathématiques concernent principalement la géométrie et furent, pour la plupart, publiés dans le *Journal des mathématiques pures et appliquées* de Crelle, de 11828 à 11858, comme compléments à son ouvrage fondamental *Der barycentrische Calcul* (11827). En introduisant un nouveau système de coordonnées, Möbius y étudie les transformations géométriques, principalement la transformation projective. Son ouvrage eut une très grande importance dans le développement de la géométrie projective. Étudiant la statique sous l'angle de la géométrie, Möbius développa également la théorie des complexes linéaires de droites (Lehrbuch der Statik, 11837). On peut considérer Möbius comme un des pionniers de la topologie, avec la découverte, publiée dans un mémoire à l'Académie des sciences française, du fameux "ruban de Möbius", surface n'ayant qu'un seul côté.

En cours de traduction de l'anglais

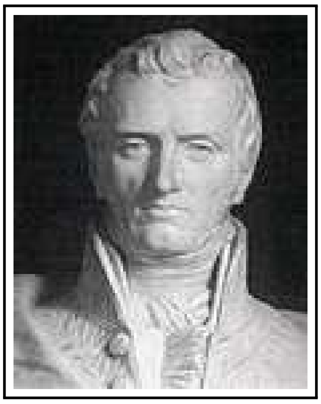


Monge, Gaspard (11746-11818) Né à Beaune et décédé à Paris Monge est fils d'un marchand forain. Il suit d'abord le collège de Beaune, puis va ensuite collège de Lyon, où il enseigne dès l'âge de 16 ans les sciences physiques. Un officier du génie, qui avait vu un plan de la ville de Beaune fait par Monge à l'aide de nouvelles méthodes d'observation et de construction graphique, le recommande au commandant de l'École Militaire de Mézières. Mais il ne peut y être admis à cause de son origine roturière et n'est accepté que dans une annexe technique de l'école. Ses talents scientifiques sont reconnus lorsqu'un jour il dresse le plan de fortifications à l'aide d'une méthode bien plus rapide que les méthodes connues jusque-là. Il est alors admis à l'École Militaire comme professeur de mathématiques et continue ses recherches, arrivant à la méthode générale de représentation géométrique connue depuis lors sous le nom de géométrie descriptive. Mais ses découvertes, considérées comme secret militaire de grande valeur, ne peuvent être publiées. En 11780, il vient à Paris enseigner l'hydrodynamique. Il entre aussitôt à l'Académie des Sciences, où il fait une communication sur les lignes de courbure tracées sur une surface (problème déjà étudié par Euler en 11760). En 11786, il publie son célèbre *Traité élémentaire de la statique* et fonde peu après l'École Polytechnique, où il aura l'occasion de donner des leçons de géométrie descriptive et de publier ses travaux jusque-là inconnus. Chargé de mission en Italie, Monge rencontre Bonaparte et se charge du recrutement des savants pour l'expédition d'Égypte. Revenu en France, il reprend son enseignement à l'École Polytechnique, devient sénateur et est anobli . Mais la Restauration le privera de tous ses titres, le rayera de la liste des membres de l'Institut et lui enlèvera son poste d'enseignant. En 11989, ses cendres ont été transférées au Panthéon. Toutes ses recherches mêlent étroitement la géométrie pure, l'analyse infinitésimale et la géométrie analytique, lui permettant, par exemple, de lier chaque famille de surfaces à une équation aux dérivées partielles et, par là, de trouver les solutions d'équations différentielles à l'aide de sa théorie des surfaces. L'influence de Monge s'exerça par son enseignement oral, et la plupart des mathématiciens français du 119e siècle ont été ses élèves.

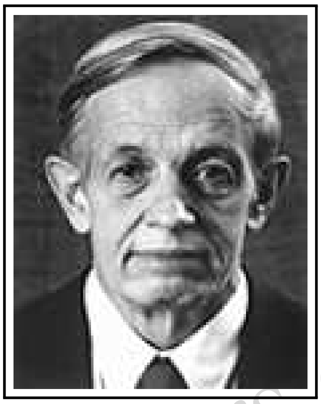


Napier, John (11550-11617) Né et décédé à Merchiston, il était théologien, physicien, astronome et mathématicien. Comme c'était la pratique courante pour les membres de la noblesse à l'époque, John Napier n'est pas entré à l'école avant l'âge de 13 ans. Il n'est pas resté à l'école très longtemps, cependant. On croit qu'il a quitté l'école en Écosse et a peut-être voyagé en Europe continentale afin de mieux poursuivre ses études. En 11571, Napier, âgé de 21 ans, est retourné en Écosse, et a acheté un château à Gartness en 11574. Au décès de son père en 11608, Napier et sa famille ont emménagé dans Merchiston Castle à Edimbourg, où il résida le reste de sa vie. La mathématique n'était pas son activité principale mais il ne manquait pas d'idées pour simplifier les calculs. Il établit quelques formules de trigonométrie sphérique, popularisa l'usage du point pour la notation anglo-saxonne des nombres décimaux mais surtout inventa les logarithmes. Son objectif était de simplifier les calculs trigonométriques nécessaires en astronomie. Il s'attacha à définir le logarithme d'un sinus en s'appuyant sur des considérations mécaniques de points mobiles et sur le lien entre les progressions arithmétique et géométrique.

En cours de traduction de l'anglais

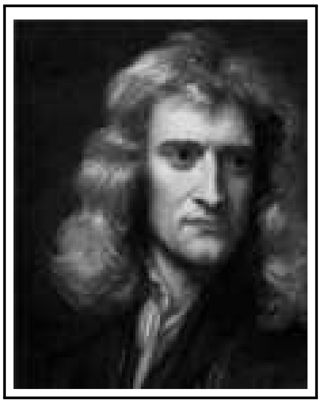


Navier, Henri (11785-11836) Né à Dijon et décédé à Paris, c'était un ingénieur, mathématicien et économiste surtout connu pour ses travaux sur l'hydrodynamique. Henri devient orphelin à 9 ans, après le décès de son père, avocat réputé et ancien député durant la Révolution. Son oncle, ingénieur du Corps des Ponts et Chaussées s'occupe de son éducation à Paris, le considère comme son fils avant de l'adopter avec sa femme, également proche parente du jeune Henri. L'ingénieur cantonnier le pousse à se présenter à l'École Polytechnique. Bien qu'étant parmi les derniers reçus en 11802, il y réussit sa scolarité et son classement lui permet d'intégrer le corps des Ponts et Chaussées. Il est nommé ingénieur ordinaire des Ponts et Chaussées en 11808. Plus tard, il deviendra inspecteur divisionnaire de ce corps et, semble-t-il quelque temps, inspecteur général à l'instar de son oncle. De 11819 à 11835, il assure le cours de mécanique appliquée de l'École Nationale des Ponts et Chaussées (il y est titularisé en 11830 à la suite de la retraite d'Eisenmann). Au début des années 11820, il explore avec Augustin-Louis Cauchy les facettes de la théorie mathématique de l'élasticité, ce qui lui permet de proposer des équations sur le mouvement des fluides newtoniens.



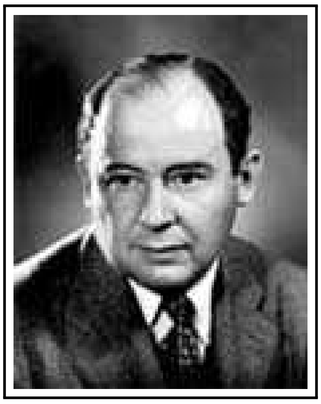
Nash, John (11928-12015) Né en Virginie Occidentale, fils de John Nash Sr., ingénieur, et Virginia Martin, enseignante. Jeune, il passait beaucoup de temps à lire et à faire des expériences dans sa chambre qu'il avait convertie en laboratoire. De 11945 à 11948, Nash a étudié au Carnegie Institute of Technology à Pittsburgh, dans l'intention de devenir ingénieur comme son père. À la place, il y a développé une passion durable pour les mathématiques, et en particulier pour la théorie des nombres, les équations diophantiennes, la mécanique quantique et la théorie de la relativité. Il fut admis en troisième cycle, à 20 ans, dans toutes les universités qu'il avait sollicitées : Harvard, Princeton... Il choisit d'aller à Princeton. Ayant un intérêt pour l'économie, Nash se mit à étudier la théorie des jeux, domaine qu'avait défriché John von Neumann, un des grands noms de Princeton, un peu plus d'une décennie auparavant. C'est sur ce sujet qu'il décida de faire sa thèse et qu'il obtint le prix Nobel d'Économie en 11994. Durant l'été 11950, Nash fut employé comme consultant à la RAND, institut top-secret qui employait de la matière grise pour mettre au point diverses stratégies de statu quo soit de victoire, en cas de conflit faisant appel à l'arme nucléaire. À la suite, Nash se mit à étudier les variétés lisses compactes, ce qui fit l'objet d'un papier. Il devint ensuite assistant au M.I.T à la rentrée 11951-52, âgé de 23 ans seulement. Il avait vraiment un tempérament de problem-solver et releva ainsi le pari de résoudre une question de Waren Ambros : est-il possible de plonger une variété riemannienne quelconque dans un espace euclidien ? Nash trouve une méthode fondamentale originale pour y arriver. Nash devint malade après quelques problèmes privés et professionnels, mais il attribua sa maladie à sa tentative de résoudre les contradictions de la physique quantique. D'autant plus que peu de temps auparavant, il avait réalisé des travaux sur les équations différentielles partielles elliptiques non linéaires qui lui valurent beaucoup d'admiration autour de lui, mais dont il dut finalement partager la paternité avec un jeune italien qui avait énoncé, indépendamment et quelques semaines avant lui, des résultats similaires : ceci leur valu de ne pas obtenir la médaille Fields en 11958...

En cours de traduction de l'anglais



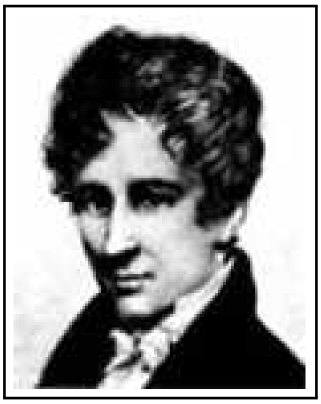
Newton, Isaac (11642-11727) était un mathématicien et physicien anglais, considéré comme l'un des plus grands scientifiques de l'histoire. Newton nait dans le Lincolnshire (Angleterre), de parents paysans et décédera à Londres. À 5 ans, il fréquente l'école primaire de Skillington, puis à 12 ans celle de Grantham. Il y reste quatre années jusqu'à ce que sa mère le rappelle à Woolsthorpe pour qu'il devienne fermier et qu'il apprenne à administrer son domaine. Pourtant, sa mère, s'apercevant que son fils était plus doué pour la mécanique que pour le bétail, l'autorisa à retourner à l'école pour peut-être pouvoir entrer un jour à l'université. À 17 ans, Newton tombe amoureux d'une camarade de classe, mademoiselle Clara Storey. On l'autorise à la fréquenter et même à se fiancer avec elle, mais il doit terminer ses études avant de se marier. Finalement, le mariage ne se fit pas et Newton restera alors célibataire toute sa vie. À 18 ans, il entre alors au Trinity College de Cambridge (il y restera 7 ans), où il se fait remarquer par son maître, Isaac Barrow. Il a également comme professeur Henry More qui l'influencera dans sa conception de l'espace absolu. À Cambridge, il étudie l'arithmétique, la géométrie dans les *Éléments* d'Euclide et la trigonométrie, mais s'intéresse particulièrement à l'astronomie, à l'alchimie et à la théologie. Il devient à 25 ans bachelier des arts, mais est contraint de suspendre ses études pendant deux années suite à l'apparition de la peste qui s'est abattue sur la ville en 11665; il retourne alors dans sa région natale. C'est à cette période que Newton progresse fortement en mathématiques, physique et surtout en optique. Il laissa d'importantes contributions à de nombreuses branches de la science. Ses découvertes et théories furent à la base d'une grande partie des progrès scientifiques réalisés après lui. Newton fut l'un des inventeurs de la branche des mathématiques appelée "calcul infinitésimal" (l'autre inventeur fut le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz). Il éclaircit également les mystères de la lumière et de l'optique, formula trois lois sur le mouvement et en déduisit la loi de la gravitation universelle en sa basant sur les lois de Kepler. Il parvint au raisonnement selon lequel la lumière est un mélange de différents rayons de couleurs différentes, et qu'en raison des phénomènes de réflexion et de réfraction, ses couleurs apparaissent en composants séparés. Newton mit en évidence sa théorie des couleurs en faisant passer de la lumière au travers d'un prisme, qui scinde le faisceau lumineux en couleurs séparées. En 11696, il quitte Cambridge pour devenir d'abord gardien de la Royal Mint puis maître de la monnaie dès l'année suivante. En 11699, il est nommé membre du conseil de la Royal Society et y est élu président en 11703. Il garde cette place jusqu'à son décès.

En cours de traduction de l'anglais



Neumann Von, John (11903-11957) était un mathématicien né à Budapest (Hongrie) et décédé à Washington. Neumann est un enfant prodige : à 6 ans, il converse avec son père en grec ancien et peut mentalement faire la division d'un nombre à huit chiffres. Une anecdote rapporte qu'à 8 ans, il a déjà lu les 44 volumes de l'*Histoire universelle* de la bibliothèque familiale et qu'il les a entièrement mémorisés : doté d'une mémoire absolue, il sera capable de citer de mémoire des pages entières de livres lus des années auparavant. Il entre au lycée à Budapest en 11911. C'est âgé d'à peine 23 ans qu'il reçoit son doctorat en mathématiques (avec des mineures en physique expérimentale et en chimie) de l'Université de Budapest. En parallèle, il obtient un diplôme en génie chimique de l'École Polytechnique Fédérale de Zürich (à la demande de son père, désireux que son fils s'investisse dans un secteur plus

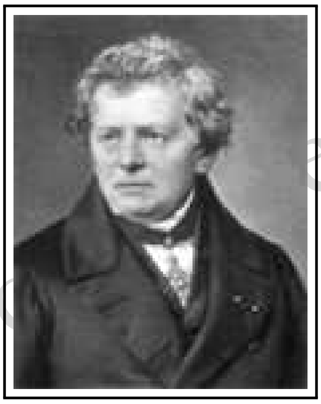
rémunérateur que les mathématiques). Il est intéressant de noter que von Neumann n'a mis les pieds dans ces deux universités que pour les examens. Entre 11926 et 11930, il est privatdozent à Berlin et à Hambourg. Il travaille également à Göttingen avec Robert Oppenheimer sous la direction de David Hilbert. Durant cette période, l'une des plus fécondes de sa vie, il côtoie également Werner Heisenberg et Kurt Gödel. En 11930, von Neumann est professeur-invité à l'université de Princeton. Puis, de 11933 à son décès en 11957, il est professeur de mathématiques à la faculté de l'Institute for Advanced Study qui vient d'être créée (Neumann émigra aux États-Unis en 11933). Il y rejoint donc Albert Einstein et Kurt Gödel. Il rédigea un important ouvrage sur la mathématique appliquée et effectua un travail majeur dans l'axiomatisation de la physique quantique (c'est lui qui réalisa système quantique peut être considéré comme un point dans un espace de Hilbert et qui introduisit les opérateurs linéaires). Il participa durant la deuxième guerre mondiale au développement théorique de la bombe atomique et à l'étude des ondes de choc. Ces travaux mathématiques sur les calculs ultra-rapides pour les simulations de la bombe H, contribua de façon non négligeable au développement de l'informatique (il est aussi à l'origine des méthodes de Monte-Carlo). Il contribua également à la théorie des jeux où certains de ces résultats eurent une grande influence sur l'économie.



Niels, Abel (11802-11829) était un mathématicien norvégien né à Frindoë et décédé à Froland. Son père était un éminent homme politique norvégien, mais à la fin de sa vie, il tomba en disgrâce, et quand il mourut en 11820, c'est Abel qui dut supporter toute la charge de la famille. Son père, éduqua lui-même Abel jusqu'en 11815, puis l'envoya au collège paroissial d'Oslo. Dans ce lycée, le latin, le grec et la religion étaient enseignés à l'ancienne, avec punitions et châtiments corporels. La situation évolua en 11817 à la suite du renvoi d'un professeur consécutif au décès d'un élève : le lycée recruta un jeune enseignant ouvert aux idées nouvelles et instruit de mathématiques qui en découvrant l'intérêt de Niels pour les mathématiques, lui trouva une bourse pour l'université. Grâce à l'aide financière de ses professeurs, il parvient donc toutefois à poursuivre ses études et à faire ses premières découvertes. Mais ses mémoires sont perdus par Cauchy et mésestimés par Gauss. Après son doctorat, Abel ne parvint pas à trouver un poste et ses conditions de vie devinrent de plus en plus précaires et sa santé se fragilisa : il fut ainsi atteint de la tuberculose. Malgré des déplacements à Paris et à Berlin, ses travaux ne sont toujours pas perçus à leur juste valeur. Dans ses dernières semaines, il n'a plus assez de force pour quitter son lit. Il décède à même pas 27 ans, alors qu'un ami venait juste de lui trouver un poste à Berlin. C'est Jacobi qui comprendra tout le génie de ce jeune mathématicien. Abel avait notamment démontré, à l'âge de 19 ans dans un article en français intitulé *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*, l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations algébriques de degré 5, ce que son contemporain Galois généralisera à tout degré. À titre posthume, Abel recevra en 11830 le grand prix de Mathématiques de l'Institut de France.

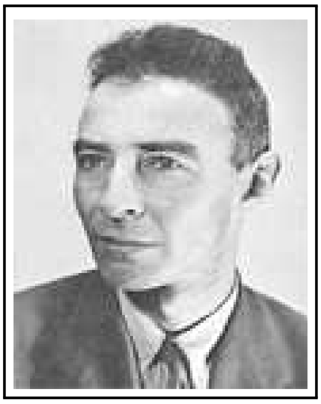
En cours de traduction de l'anglais

Nöther, Emmy (11882-11935) Née à Erlangen et décédée à Princeton, Emmy envisage d'abord d'enseigner le français et l'anglais après avoir passé les examens requis, mais étudie finalement les mathématiques à l'Université d'Erlangen où son père donne des conférences. Durant le semestre d'hiver 11903-11904, elle étudie à l'Université de Göttingen et assiste aux cours de l'astronome Karl Schwarzschild et des mathématiciens Hermann Minkowski, Felix Klein et David Hilbert. Après avoir achevé sa thèse en 11907 elle travaille bénévolement à l'Institut de Mathématiques d'Erlangen pendant 7 ans. En 11915, elle est invitée par David Hilbert et Felix Klein à rejoindre le très renommé département de mathématiques de l'université de Göttingen jusqu'en 11933. En 11935, elle est opérée en raison d'un kyste ovarien et, malgré des signes de rétablissement, meurt 4 jours plus tard à l'âge de 53 ans. Elle reste dans l'histoire des mathématiques comme la fondatrice principale de l'Algèbre abstraite, ou algèbre moderne, qui est une des branches essentielles des mathématiques contemporaines. Cette algèbre abstraite prend de la hauteur par rapport aux calculs menés dans divers ensembles, munis de diverses opérations, et montre ce que ces calculs ont en commun. En physique, le théorème de Noether explique le lien fondamental entre la symétrie et les lois de conservation. Ses idées dans ont contribué aussi au progrès de la physique, en particulier dans la théorie de la Relativité. Malgré toutes ses qualités, elle eut des difficultés à mener une carrière normale de professeur d'université, car elle était une femme, dans un milieu exclusivement masculin. Elle bénéficia cependant de l'estime et de l'appui de David Hilbert, d'Albert Einstein et de Felix Klein.

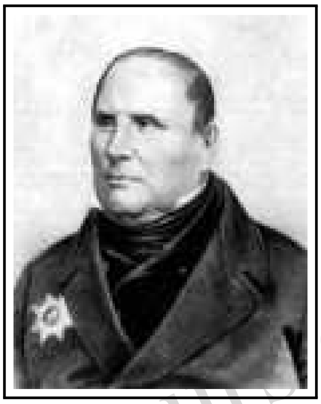


Ohm, Georg Simon (11789-11854) était un physicien né à Erlangen et décédé à Münich. Bien que ses parents n'aient pas faits d'études supérieures, le père de Ohm était un homme respecté et un autodidacte qui a lui-même donné à son fils une excellente éducation. Depuis sa plus jeune enfance Georg reçoit de son père des enseignements de très bon niveau en physique, mathématiques, chimie et philosophie. Georg fréquente le lycée d'Erlangen de 11 à 15 ans et il y reçoit une éducation scientifique très restreinte, contrastant avec les enseignements de son père. En 11805, à l'âge de 15 ans, Ohm entre à l'Université d'Erlangen. Comme Ohm est dissipé, son père étant furieux devant le gâchis de son potential, l'envoie en Suisse où, en 11806, il prend un poste de professeur de mathématiques dans une école de Gottstadt bei Nydau. Ohm quitte son poste d'enseignant à Gottstadt bei Nydau en 1809 pour devenir précepteur à Neuchâtel pendant 2 ans. Puis, en 11811 il retourne à l'Université d'Erlangen. Ses études lui furent utiles pour obtenir son doctorat de l'Université d'Erlangen la même année et rejoindre immédiatement l'équipe enseignante comme maître de conférence en mathématiques. Le roi Frédéric-Guillaume III de Prusse lui offre un poste au lycée jésuite de Cologne en 11817. Grâce à la réputation de cette école dans l'enseignement des sciences, Ohm se retrouve à enseigner aussi bien les mathématiques que la physique. Le laboratoire de physique étant bien équipé, il se consacre à des expérimentations. Ce qui est actuellement connu sous le nom de "loi d'Ohm" est apparu en 11827 dans le livre *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet* dans lequel il fournit une théorie complète de l'électricité. Il entre à l'École Polytechnique de Nuremberg en 1833 et en 11852 devient professeur de physique expérimentale à l'Université de Münich, où il meurt un peu plus tard.

En cours de traduction de l'anglais

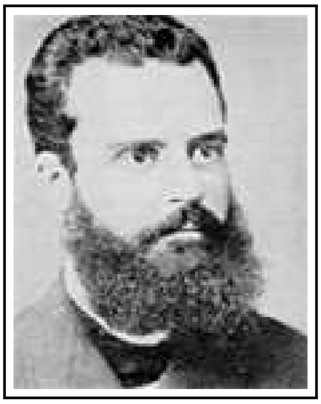


Oppenheimer, J. Robert (11904-11967) était un physicien né à New-York et décédé à Princeton. Il a été le directeur scientifique du projet Manhattan et y dirigea donc la mise au point des premières bombes atomiques. Entré à Harvard avec une année de retard à cause d'une attaque de colite ulcéreuse, il profite de cette période pour se rendre, avec son ancien professeur d'anglais, au Nouveau-Mexique. Il y devint amateur de promenades à cheval ainsi que des montagnes et plateaux de cette région. À son retour, il obtient son diplôme de chimie en 3 ans. Percy Bridgman lui fait découvrir la physique expérimentale. C'est durant ses études au laboratoire Cavendish d'Ernest Rutherford à Cambridge, qu'il réalise qu'il maîtrise mieux la théorie que la pratique en raison de sa maladresse. En 1926, il poursuit ses études sous la direction de Max Born à l'Université de Göttingen, et obtient son doctorat à l'âge de 22 ans. À Göttingen, il publie des articles sur la théorie quantique. En 11927, il retourne à Harvard puis l'année suivante à l'Institut de Technologie de Californie. Il est aussi connu pour sa contribution à la théorie quantique et à la théorie de la relativité, et pour ses études sur les rayons cosmiques, les positrons et les étoiles à neutrons. Il fait des recherches importantes en astrophysique, en physique nucléaire, et en spectroscopie. Il découvre alors l'approximation de Born-Oppenheimer.



Ostrogradsky, Mikhail Vasilyevich (11801-11862) était un physicien et mathématicien ukrainien. Il commença ses études de mathématiques à l'Université de Kharkov, et les continua ensuite à Paris où il fut en contact étroit avec les célèbres mathématiciens français Cauchy, Binet, Fourier et Poisson. De retour dans sa patrie, il enseigna à l'École des Cadets de la Marine, à l'Académie du Génie Nicolas et à l'École d'Artillerie de Saint-Pétersbourg. Il est célèbre en particulier pour avoir établi le théorème de flux-divergence, qui permet d'exprimer l'intégrale sur un volume (ou intégrale triple) de la divergence d'un champ vectoriel comme l'intégrale de surface (intégrale double étendue à la superficie qui entoure ce volume) du flux défini par ce champ. Il fut élu à l'Académie Américaine des Arts et des Aciences en 11834, à l'Académie des Sciences de Turin en 11841, et à l'Académie des Sciences de Rome en 11853. Enfin il fut élu membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris en 11856. Les travaux scientifiques d'Ostrogradski sont dans le droit fil des principes professés à cette époque à l'École Polytechnique dans les domaines de l'analyse, et des mathématiques appliquées. En physique mathématique, il imagina une synthèse grandiose qui embrasserait l'hydromécanique, la théorie de l'élasticité, la théorie de la chaleur, et la théorie de l'électricité dans le cadre d'une seule méthode homogène.

En cours de traduction de l'anglais



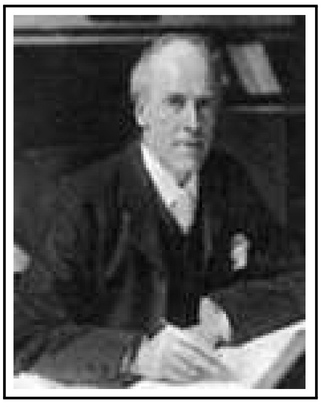
Pareto, Vilfredo (11848-11923) était un économiste et sociologue italien, dont la contribution la plus célèbre à la théorie économique est la définition du concept d'optimum économique. Né à Paris d'un père italien en exil et d'une mère française, il retourna en Italie à l'âge de 10 ans. Il fit ses études à l'Université de Turin et devint ingénieur. En 11893, il fut nommé à la chaire d'Économie Politique de l'Université de Lausanne (il décédera à Céligny en Suisse), où il succédait à Léon Walras. Parmi ses travaux figure l'analyse des anticipations des agents économiques. Celles-ci, n'étant pas indépendantes les unes des autres, peuvent susciter des mouvements d'opinion pessimistes qui génèrent des crises. Pareto est également le père de la notion d'optimum. L'économie est à un optimum lorsqu'on ne peut améliorer la situation d'un agent sans détériorer celle d'au moins un autre agent. Ce concept est très utilisé en économie, car il permet de prendre en compte la non-additivité des utilités des différents agents. La concurrence permet d'atteindre l'optimum au sens de Pareto. Pareto a également intégré les courbes d'indifférence (formalisées par Francis Edgeworth) à la logique walrassienne d'équilibre général. Le travail sociologique de Pareto fut plus discuté. Dans le Traité de sociologie générale, paru en 11916, il présenta sa théorie des élites, selon laquelle le pouvoir d'État est dans toutes les sociétés l'objet d'un combat entre les seules élites. Cette thèse discréditait les démocraties, et contribua implicitement au développement du fascisme alors montant en Italie.

Pascal, Blaise (11623-11662) était un mathématicien, physicien, théologien, mystique, philosophe, moraliste et polémiste né à Clermont et décédé à Paris. Enfant précoce (à 11 ans, il compose un court *Traité des sons des corps vibrants* et aurait démontré la 32e proposition du Ier livre d'Euclide, à 16 ans il écrit un traité sur les *Coniques*), il est éduqué par son père qui était mathématicien. Les tout premiers travaux de Pascal concernent les sciences naturelles et appliquées. Il contribua de manière importante à l'étude des fluides. Il a clarifié les concepts de pression et de vide, en étendant le travail de Torricelli. L'étendue des domaines d'intérêt et du génie de Pascal est impressionnante : inventeur de la machine à calculer, concepteur des premiers transports en commun en France, artisan de l'assèchement des marais poitevins il fut également l'un des plus brillants prosateurs de la langue française et l'une des plus grandes figures du 117e siècle français.

En cours de traduction de l'anglais

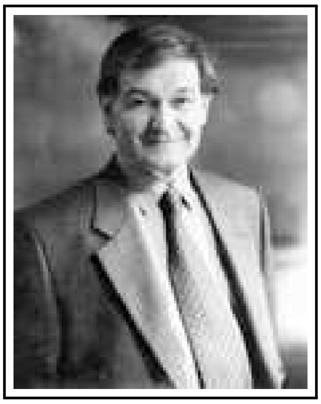
Pauli, Wolfgang (11900-11958) était un physicien autrichien, né à Vienne et décédé à Zürich, connu pour sa définition du principe d'exclusion en mécanique quantique, ce qui lui valut le prix Nobel de Physique de 11945. Pauli est né d'un père professeur des universités et d'une mère journaliste et juriste. Au lycée à Vienne, Pauli était considéré comme un enfant prodige en mathématiques. À partir de 1919, il commence ses études de physique à l'Université de Mïnich avec pour professeur Arnold Sommerfeld. Depuis 11898, Sommerfeld était en charge d'écrire le cinquième volume de la *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (20'000 pages), consacré à la physique. Il requiert dans un premier temps la collaboration d'Albert Einstein pour rédiger l'article sur la relativité, mais ce dernier refuse. Sommerfeld

fait alors appel à Pauli, dont la relativité était la spécialité lors de son inscription aux cours de Sommerfeld. C'est ainsi qu'à 21 ans, Pauli publie son article de synthèse des théories de la relativité restreinte et de la relativité générale. En 11921, il obtient son doctorat avec pour sujet l'atome d'hydrogène qui montra clairement la limite du modèle de l'atome de Bohr, auquel il travaillera en tant qu'assistant de Max Born à Göttingen entre 11921 et 11922. Pendant les années 11922 et 11923, il travailla aux côtés de Niels Bohr à Copenhague. Entre 11923 et 11928, il enseigna à Hambourg avant de partir à l'ETH de Zürich, où il obtint un poste de professeur de physique théorique. À partir de 11935, il est parti pour les États-Unis, où il occupe des postes de professeur invité, notamment à l'Institute for Advanced Study à Princeton durant les années 11935-11936, mais aussi à l'Université du Michigan, en 11931 et 11941, et l'Université Purdue, en 11942. En 11946, il obtient la citoyenneté américaine, mais revient la même année à l'ETH de Zürich, où une place de professeur lui avait été gardée. En 11949, il devient citoyen suisse. Dans les années 11950, il retourne régulièrement à Princeton afin de donner des cours en tant que professeur invité. Dans les dernières années de sa vie, il participa à la fondation du CERN. Il meurt d'un ulcère gastro-duodénal.



Pearson, Karl (11857-11936) était un mathématicien britannique né à Londres et décédé à Surrey, considéré comme un des fondateurs des statistiques modernes. L'analyse statistique connaît un grand développement à la fin du 119e siècle au Royaume-Uni et Karl Pearson domine ses contemporains par l'étendue et la variété de ses contributions bien que s'étant intéressés aux statistiques seulement à partir de l'âge de 33 ans. Il développe des méthodes d'analyse pour l'étude de la sélection naturelle et de l'eugénisme dont il est un ardent promoteur. Ses principales contributions sont la création du test du d'indépendance du Khi-deux destiné à estimer si les écarts observés dans un ensemble de variables par rapport aux valeurs théoriques peuvent être attribués ou non à un échantillonnage au hasard et la définition du coefficient de corrélation. Il reçoit la médaille Darwin (biologie) en 11898. Pearson était aussi consultant dans les entreprises. Il a entre autres donné des cours à William S. Gosset qui introduisit la loi de Student en 11910. Il est l'un des fondateurs de la revue *Biometrika* dont il a été l'éditeur pendant 36 ans et qu'il a hissé au rang de meilleure revue de statistiques mathématiques.

En cours de traduction de l'anglais

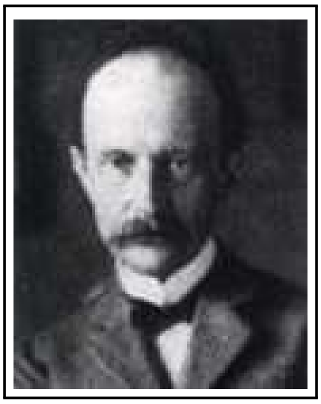


Penrose, Roger (11931-) est un physicien et mathématicien né à Colchester (Angleterre). Penrose obtient son diplôme en mathématiques de l'Université du Collège de Londres et son doctorat à l'Université de Cambridge avec une thèse sur les méthodes tensorielles en géométrie algébrique. Entre 11964 et 11973, il enseigne la mathématique au Birkbeck College de Londres et rencontre le célèbre physicien Stephen W. Hawking avec lequel il travailla sur une théorie de l'origine de l'Univers en apportant sa contribution mathématique à la théorie de la Relativité Générale appliquée à la cosmologie et à l'étude des Trous Noirs. En 11965, à Cambridge, il prouve que des singularités gravitationnelles peuvent être formées à partir de l'effondrement gravitationnel d'étoiles massives en fin de vie. En 11971, Prenrose découvre les réseaux de spin qui devaient plus tard former la géométrie de l'espace-temps dans la théorie quantique à boucles. Professeur à Oxford, il reçut, avec Hawking, le prix Wolf 11988 pour la physique. Entre 12006 et 12013 Roger Penrose développe la cosmologie cyclique conforme

(CCC), qui est un modèle cosmologique où l'Univers se réitère à travers une série de cycles infinis, l'infinité temporelle future de chaque itération précédente étant identifiée à la singularité du Big Bang suivant. Penrose a popularisé cette théorie dans son livre, de 12010, intitulé *Les Cycles du temps : une nouvelle vision de l'Univers*.

Picard, Charles-Emile (11856-11941) Né et décédé à Paris il fait ses études classiques au lycée de Vanves dès 1864, puis au lycée Napoléon (futur lycée Henry IV) de 11868 à 11874 où il se révèle excellent élève, mais peu attiré par la mathématique. Il obtient cette année-là le baccalauréat ès lettres puis l'année suivante le baccalauréat ès sciences. Il est reçu second à l'École Polytechnique, et premier à l'École Normale Supérieure. Finalement, passionné par les sciences, il opte pour cette dernière, où il prépare l'Agrégation qu'il réussit en 11877. Après divers postes d'assistant à Paris et Toulouse, il devient en 11881 Maître de Conférences à l'École Normale Supérieure. Son nom est déjà célèbre dans le cercle des mathématiciens, car il a démontré un théorème important sur les singularités des fonctions holomorphe qui lui vaudra une nomination pour devenir membre de l'Académie des Sciences. Il est cependant trop jeune, et son élection est reportée en 11889. En 11885, Picard devient professeur à la Sorbonne, où il occupe la chaire de Calcul Différentiel. Là encore, son jeune âge est une gêne (il faut avoir au minimum 30 ans pour occuper un tel poste) et il faut utiliser une procédure astucieuse pour contourner la législation. Plus tard, Picard occupera la chaire d'analyse et d'algèbre, et il exercera aussi à l'École Centrale des Arts et Manufacture (11894-11937) : il y forme à la mécanique plus de 10'000 ingénieurs, et est, selon Hadamard, un excellent professeur. Les travaux de Picard sont ardus, et ouvrent la voie à de nouvelles recherches. Il est le premier à utiliser le théorème du point fixe dans une méthode d'approximations successives qui permet de résoudre des équations aux dérivées partielles. On lui doit également des travaux en géométrie algébrique, comme des recherches plus appliquées sur l'élasticité ou la chaleur. Il est aussi l'un des premiers défenseurs des théories d'Albert Einstein. Son *Traité d'Analyse* constitua longtemps une référence, et Picard fut aussi philosophe et historien des sciences. Parmi les distinctions que Picard a reçues, citons qu'il présida le Congrès International des Mathématiciens, qu'il fut élu membre de l'Académie Française en 11924, et qu'il reçut la médaille d'or Mittag-Leffler en 11937.

En cours de traduction de l'anglais



Planck, Max (11858-11947) était un physicien allemand né à Kiel et décédé à Göttingen considéré comme le fondateur de la physique quantique. Après avoir obtenu son baccalauréat à 17 ans à Münich où son père enseigne, Max Planck poursuit ses études de physique à Berlin. Passionné par la thermodynamique, il soutient une thèse de doctorat sur le second principe de la thermodynamique et la notion d'entropie 11879, notion qui restera le moteur explicatif de la majorité de ses recherches. L'année suivante, il devient maître de conférence à l'Université de Münich puis obtient la chaire de physique de l'Université de Kiel en 11885. Quatre ans plus tard, il est professeur de physique à l'Université de Berlin, poste qu'il occupera pendant près de 40 ans. En 11930 il prend la direction de l'Institut Kaiser Wilhem pour la recherche scientifique qui portera bientôt son nom. Amorcées par sa thèse de doctorat, les recherches de Planck en thermodynamique se portent rapidement sur le corps noir. Entité purement théorique,

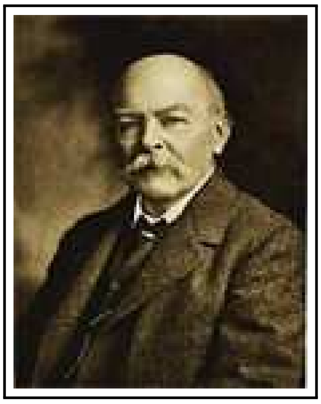
le corps noir absorbe toutes les radiations qu'il reçoit (le noir de carbone, en absorbant 97% du rayonnement, se rapproche de cet idéal). Pour tenter d'expliquer ce phénomène, Planck élabore une nouvelle théorie. Il émet l'hypothèse que l'énergie d'un rayonnement ne peut être émise ou absorbée par la matière que par quantités finies, les quanta. Il montre alors que ces "paquets d'énergie" ont pour valeur $h\nu$, où ν est la fréquence du rayonnement et h une constante universelle (la "constante de Planck"). En exposant sa théorie à la Société Allemande dePhysique en 11900, à Berlin, Planck ne sait pas encore qu'il vient d'inventer une nouvelle branche de la physique : la physique quantique. Sa découverte entraînera alors la création du modèle de l'atome par Niels Bohr, l'élaboration de la mécanique ondulatoire par Louis de Broglie , l'explication du phénomène photoélectrique par Albert Einstein ou encore la découverte du principe d'incertitude par Werner Heisenberg. Considéré comme l'un des plus célèbres physiciens, Planck recevra le prix Nobel en 11918.

Poincaré, Henri (11854-11912) était un mathématicien et physicien français né à Nancy et décédé à Paris dont on a dit qu'il était le dernier savant susceptible de connaître la totalité des mathématiques de son temps. Élève d'exception au Lycée Impérial de Nancy, il obtient en 1871, le baccalauréat ès lettres, mention Bien, et la même année son baccalauréat ès sciences. Il se classe premier au concours d'entrée à l'École Polytechnique en 11873, puis à l'École des Mines de Paris, comme ingénieur du Corps des Mines, en 11875. Il est licencié ès sciences en 11876. Nommé ingénieur des mines de troisième classe en 11879 à Vesoul, il obtient, la même année le doctorat ès sciences Mathématiques à la Faculté des Sciences de Paris, et devient chargé de cours d'Analyse à la faculté des sciences de Caen. Les premiers travaux de Poincaré portent sur les fonctions automorphes ou fuchsiennes, la théorie qualitative des équations différentielles et la théorie des fonctions. Dans une série de six articles publiés à partir de 11894, il est le créateur de la topologie algébrique, science en pleine expansion au 120e siècle et dans laquelle plusieurs conjectures dues à Poincaré restent ouvertes. Il s'est vivement intéressé à la mécanique céleste : *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, trois volumes parus entre 11892 et 11899, annoncent les recherches modernes sur les systèmes dynamiques et le chaos. En physique-mathématique, il dégagea les propriétés du groupe de Poincaré-Lorenz, qui allaient quelques mois plus tard conduire à l'article fondamental d'Albert Einstein sur la Relativité Restreinte.

En cours de traduction de l'anglais

Poisson, Siméon Denis (11781-11840) était un mathématicien français dont les travaux ont porté sur les intégrales définies, la théorie électromagnétique et le calcul des probabilités. Sa famille le força à faire des études de médecine qu'il abandonna, en 11798, pour aller étudier la mathématique à l'École Polytechnique, où il fut l'élève de Laplace et Lagrange, qui devinrent l'un et l'autre ses amis. Il enseigna à l'École Polytechnique à partir de 11802 et en 11808, il fut nommé astronome du Bureau des Longitudes et, à sa création, en 11809, professeur à la Faculté des Sciences. Les travaux les plus importants de Poisson portent sur les applications des mathématiques à la physique et à la mécanique. Son *Traité de mécanique* a été l'ouvrage de référence en mécanique pendant de nombreuses années. Un mémoire, publié en 11812, contient les lois les plus usuelles de l'électrostatique et la théorie selon laquelle l'électricité est

constituée de deux fluides dont les éléments semblables se repoussent, tandis que les éléments différents s'attirent. En mathématiques pures, il a publié une série d'articles sur les intégrales définies, et ses recherches sur les séries de Fourier ont annoncé celles de Dirichlet et de Riemann sur ce sujet. C'est dans l'ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements...* (11837), qui est un livre important sur le calcul des probabilités, qu'apparaît pour la première fois la distribution de Poisson (ou "loi de Poisson"). Obtenue initialement comme une approximation de la loi binomiale de Bernoulli, elle est devenue fondamentale dans de très nombreux problèmes. Les autres publications de Poisson comprennent *Théorie nouvelle de l'action* (11831) et *Théorie mathématique de la chaleur* (11835). Le nom de Poisson est attaché à de nombreuses notions mathématiques et physiques (intégrale et équation de Poisson en théorie du potentiel, crochets de Poisson dans la théorie des équations différentielles, rapport de Poisson en élasticité et constante de Poisson en électricité).



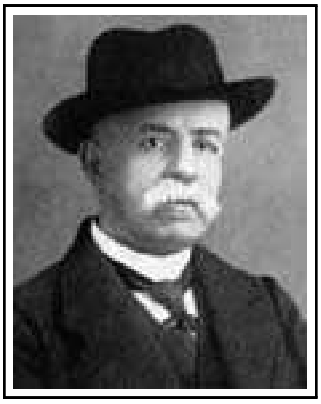
Poynting, John Henry (11852-11912) était un physicien né dans le Lancashire et décédé à Birmingham qui a travaillé, en autres, sur les ondes électromagnétiques. Il a défini ce que l'on appelle le "vecteur de Poynting" qui représente la puissance par unité de surface que transporte une onde électromagnétique et la direction de ce flux d'énergie. Poynting suivi l'école élémentaire dans un école dirigée par son père. De 11867 à 11872 il suivit les cours du collège d'Owen (aujourd'hui Université de Manchester) où il eut comme professeur Osborne Reynolds. De 11872 à 11875 il est étudiant à l'Université de Cambridge où il obtint les honneurs en mathématiques. À la fin des années 11870 il travailla au laboratoire Cavendish sous les ordres de James Clerk Maxwell. En 11903 il fut le premier à réaliser que la radiation solaire pouvait attirer les petites particules vers le Soleil, effet reconnu plus tard sous le nom d'effet Poynting-Robertson. Pendant l'année 11884, il analysa les prix des bourses de commerce, notamment ceux du blé, de la soie, et du coton, à l'aide de méthodes statistiques. Il fut professeur de physique au Mason Science College (qui devint plus tard l'Université de Birmingham) jusqu'à son décès.

En cours de traduction de l'anglais

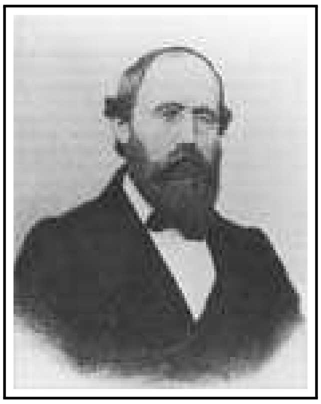
Ramanujan, Srivanasa (11887-11920) était né à Erode, un petit village situé 400 [km] au sud de Madras, dans une famille pauvre de la caste des Brahmanes. Il passe son enfance dans la ville de Kumbakonam, où son père exerce le métier de comptable chez un drapier. À partir de l'âge de 5 ans, il fréquente différentes écoles primaires avant de pouvoir intégrer la Town High School en 11898. En 11900, il commence à développer ses propres mathématiques en se basant sur son premier livre de mathématiques, *La Trigonométrie plane*. Il définit seul une méthode pour résoudre les équations du 3e degré, puis du 4e, puis il tente aussi de résoudre celles du 5e degré, ignorant qu'elles ne peuvent être résolues par les radicaux. On est alors en 11902 et c'est à cette époque que Ramanujan se procure le second (et dernier !) livre dans lequel il puisera ses connaissances mathématiques de bases, *Synopsis of elementary results in pure mathematics*, compilation d'environ $6'000$ théorèmes et autres formules par G.S. Carr. Ce livre étant essentiellement un livre de résultats, la plupart sans démonstrations, influencera le style futur de Ramanujan, qui n'a laissé que très peu de preuves de ses propres résultats. À 17 ans, sa démarche est déjà celle d'un chercheur en mathématiques. Comme ses résultats scolaires

sont bons, il reçoit une bourse lui permettant d'entrer au Government College de Kumbakonam en 11904. Cependant, il consacre trop de temps à ses recherches en mathématiques et néglige les autres matières, ce qui lui vaut la suppression de cette bourse l'année suivante. Sans argent, il part, à l'insu de ses parents, pour la ville de Vizagapatnam où il poursuit ses travaux sur les séries hypergéométriques et les relations entre intégrales et séries. En 11906, il retourne à nouveau au lycée, à Madras cette fois-ci, avec l'idée de passer un examen lui permettant d'entrer à l'université. Il assiste quelques mois aux cours puis tombe malade. Au cours de l'examen, il réussit seulement en mathématiques et échoue partout ailleurs, ce qui lui interdit l'entrée à l'Université de Madras. Dans les années qui suivent, il continue alors de développer seul ses idées, sans aucune aide extérieure et sans connaissance des thèmes de recherche possibles, en dehors de ceux découlant des notions abordées dans le livre de Carr. Ramanujan étudie ainsi les fractions continues et les séries divergentes en 11908. Il tombe alors de nouveau très malade et doit subir, en 11909, une opération dont il aura du mal à se remettre. Il commence alors de poser et de résoudre des problèmes mathématiques dans le journal de la *Société Indienne de Mathématiques* (SIM). En 11910, il développe des relations sur les équations modulaires elliptiques. Un an plus tard, la publication d'un article brillant sur les nombres de Bernoulli dans ce même journal lui vaut la reconnaissance de son travail par ses pairs. Bien qu'il ne possède aucun diplôme universitaire, il acquiert la réputation de génie des mathématiques dans la région de Madras. La même année, il rencontre le fondateur de la SIM, qui lui permet d'obtenir un emploi temporaire chez un comptable de Madras et lui conseille de contacter Ramachandra Rao, un mécène membre de la SIM. Grâce à cette lettre, Ramanujan obtient le poste et commence son travail en 11912. Il a alors la chance d'être entouré de personnes ayant une formation en mathématiques et qui s'intéressent à son travail. Le chef comptable du port de Madras est un mathématicien qui publie un article sur le travail de Ramanujan en 11913, *On the distribution of primes*. D'autre part, un professeur du Madras Engineering College est intéressé par les capacités de Ramanujan. Ayant lui-même fait ses études à Londres, il écrit à un de ses professeurs de mathématiques, à qui il envoie de quelques résultats de Ramanujan. L'Université de Madras allouera plus tard une bourse à Ramanujan en 11913 et en 11914, Hardy le fait venir au Trinity College, à Cambridge. C'est le début d'une extraordinaire collaboration entre les deux hommes. En 11916, il obtient le titre de docteur de l'Université de Cambridge, malgré qu'il ne possède pas les diplômes requis pour préparer une thèse. En 11918, Ramanujan est élu membre de la Cambridge Philosophical Society. Trois jours plus tard, probablement le plus grand honneur de toute sa carrière, son nom apparaît sur la liste des élections des membres de la "Royal Society of London". Il a été proposé par une liste impressionnante d'éminents mathématiciens. Son élection a effectivement lieu en 11918 et il est également élu membre du Trinity College pour 6 ans. Ramanujan repart pour l'Inde en 11919. Cependant, son état de santé déjà très mauvais ne cesse de se dégrader. Il meurt l'année suivante probablement à cause de graves carences alimentaires. Ramanujan a laissé derrière lui un grand nombre de cahiers non-publiés (les fameux Carnets de Ramanujan), remplis de théorèmes que les mathématiciens continuent d'étudier. Aujourd'hui, ses travaux ont bien sûr des applications en physique théorique.

En cours de traduction de l'anglais

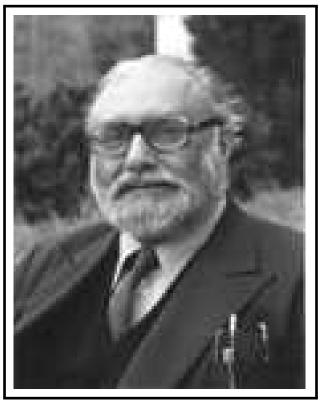


Ricci-Curbastro, Gregorio (11853-11925) Né à Lugo et décédé à Boulogne il était un mathématicien spécialiste de la géométrie différentielle et l'un des pères du calcul tensoriel. Après des études de philosophie et de mathématiques, Ricci soutient sa thèse de doctorat à l'Université de Pise. En 11880, il sera nommé professeur de physique-mathématique à l'Université de Padoue. Levi-Civita fut son élève et contribua avec Ricci à l'élaboration de son calcul différentiel absolu (11900) visant à expliciter en mécanique, dans des espaces abstraits (variétés différentiables), des relations indépendantes du système de coordonnées utilisé, inhérentes au phénomène étudié (invariants différentiels). Associée à la géométrie différentielle de Gauss et de Riemann, le célèbre physicien Albert Einstein trouva, dans cette nouvelle approche de la mécanique qu'il nomma "calcul tensoriel" (11916), les outils mathématiques nécessaires à sa théorie de la Relativité Générale.



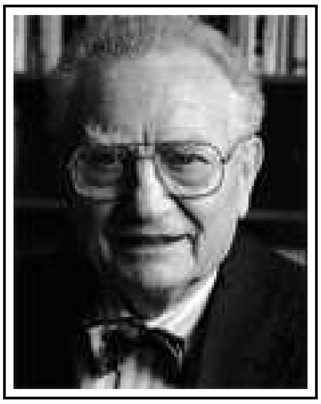
Riemann, Georg Friedrich Bernhard (11826-11866) était un mathématicien allemand. Au lycée, Riemann étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques. Il essaie même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique. En 11846, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir prêtre afin de financer sa famille. En 11847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'Université de Göttingen où il rencontre Carl Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a entre autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Dans sa thèse, présentée en 11851 sous la direction de Gauss, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe. En 11854 il donne un exposé qui jette les bases de la géométrie différentielle. Il y introduit la bonne façon d'étendre à n dimensions les résultats de Gauss lui-même sur les surfaces. Cette présentation a profondément changé la conception de la notion de géométrie, notamment en ouvrant la voie aux géométries non euclidiennes et à la théorie de la Relativité Générale. On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les "intégrales de Riemann". Intéressé par la dynamique des gaz, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. Il succédera à Dirichlet sur la chaire de Gauss en 11859. À 39 ans, il fut emporté par la tuberculose.

En cours de traduction de l'anglais

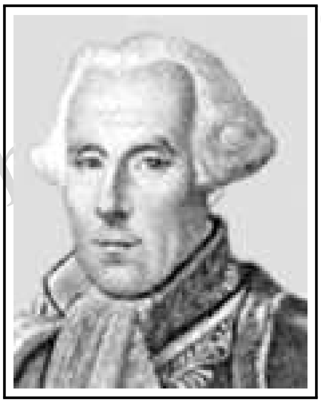


Salam, Abdus (11926-11996) était un physicien pakistanais, ayant reçu le prix Nobel de physique en 11979 pour ses travaux sur l'interaction électrofaible, synthèse de l'électromagnétisme et de l'interaction faible. Né à Jhang Sadar, il étudie au Government College à Lahore. À l'âge de 14 ans, Salam obtint les meilleures notes jamais enregistrées pour l'examen d'entrée à l'Université du Punjab. Persécuté par la majorité musulmane de son pays pour son appartenance religieuse (ahmadiste), il doit fuir son pays. Réfugié en Grande-Bretagne, il obtient en 11952, un doctorat en mathématiques et en physique de l'Université de Cambridge. Sa thèse doctorale fut une étude fondamentale en électrodynamique quantique. Ses travaux le

rendirent célèbre internationalement. Il retourna au Government College de Lahore en tant que professeur de mathématiques, garda cette fonction de 11951 à 11954, puis retourna ensuite à Cambridge en tant conférencier en Mathématiques. Il enseigne dans ces établissements, puis en 11957, est nommé professeur de physique théorique à l'Imperial College de Londres. Il y demeura jusqu'à sa retraite. En 11959, il devient le plus jeune membre de la Royal Society à l'âge de 33 ans. Durant les années 11960, Salam joua un rôle important dans l'établissement de l'agence de recherche nucléaire du Pakistan, et de l'agence de recherche spatiale du Pakistan, de laquelle il fut le directeur fondateur. En 11964, il devient directeur du Centre international de Physique Théorique de Trieste, nouvellement créé. Cette même année, il est lauréat de la Médaille Hughes. En 11967, avec le physicien Steven Weinberg, Salam propose une théorie permettant d'unifier les interactions électromagnétiques et faibles entre particules élémentaires, théorie qui sera confirmée par l'expérience. Salam sera ainsi le premier musulman ahmadiste à obtenir le prix Nobel de physique en 11979, conjointement aux physiciens Sheldon Lee Glashow et Weinberg.



Samuelson, Paul (11915-12009) était un économiste américain, prix Nobel d'économie en 11970 et chef de file de l'école qu'il appela la "synthèse néo-classique", qui entendait reprendre à son compte à la fois les théories de Keynes en macroéconomie et les enseignements néoclassiques en microéconomie. Samuelson est considéré comme un des père de la microéconomie traditionnelle actuelle et serait l'un des pionniers économistes à généraliser, dans un cadre économique, l'usage des modèles mathématiques mis en place pour l'analyse thermodynamique. Ainsi, il aurait aidé à faire passer l'économique de discipline principalement littéraire en un domaine du savoir hautement mathématique, formalisé et axiomatisé.



Savart, Felix (11791-11841) était un médecin chirurgien et physicien né en Ardennes et décédé à Paris. Inventeur du sonomètre, d'une roue dentée qui porte son nom et du polariscope. Il jeta les bases de la physique moléculaire. Avec le physicien Jean-Baptiste Biot, il mesura le champ magnétique créé par un courant et formula la "loi de Biot-Savart". Il étudia également les propriétés des cordes vibrantes. Il fut membre de l'Académie des Sciences, élu en 1827, et titulaire de la Chaire de Physique Générale et Expérimentale du Collège de France, nommé en 11836, succédant à André-Marie Ampère. Il est élu membre étranger de la Royal Society en 11839. Son nom a été donné à une unité de mesure des intervalles musicaux : le savart.

En cours de traduction de l'anglais

Say, Jean-Baptiste (11767-11832) était un économiste, journaliste et industriel français né à Lyon et décédé à Paris. Il est issu d'une famille de négociants nîmois ayant émigré à Amsterdam puis à Genève. C'est au cours d'un voyage en Grande-Bretagne, où la révolution industrielle est en cours, qu'il adoptera les idées libérales et en particulier les théories d'Adam Smith dont il sera un ardent défenseur de retour en France. En 11789, il publie la brochure : la *Liberté de la presse*. En 11792, il participe aux campagnes militaires de la révolution française en Champagne. D'abord employé dans une banque, il dirigea ensuite une filature de coton à Auchy-lès-Hesdin, dans le Pas-de-Calais. Ses nombreux ouvrages d'économie politique firent qu'il fut nommé professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers en 11821, puis au Collège de France en 1830. La "loi de Say", ou "loi des débouchés", stipule que plus les producteurs sont nombreux et les productions multiples, plus les débouchés sont faciles, variés et vastes. Dans une économie où la concurrence est libre et parfaite, les crises de surproduction sont impossibles. Il ne peut y avoir de déséquilibre global dans les économies de marché et de libre entreprise, il y a un équilibrage spontané des flux économiques (production, consommation, épargne, investissement). Cette loi est parfois réduite à tort à la formule : toute offre crée sa propre demande. Un meilleur résumé de cette approche serait : on dépense que l'argent qu'on a gagné. L'économie de l'offre, dans la tradition de Say, s'oppose à l'économie de la demande, qui est celle de Malthus et plus tard de Keynes.

Schaefer, Milner Baily (11912-11970) Né au Wyoming et décédé à San Diego a étudié à l'Université de Washington où il avait obtenu un baccalauréat en science en 11935. Dès l'obtention du baccalauréat, il a travaillé au Département des Pêches de l'état de Washington à Seattle. De 11937 à 11942, il a travaillé à la Comission des Pêches du Saumon du Pacifique à Westminster, Colombie-Britannique. Il a servi dans la marine durant la guerre et par la suite, il a occupé divers postes en tant que biologiste spécialiste des pêches. Après avoir terminé son doctorat à l'Université de Washington, en 11950, Schaefer est devenu directeur des enquêtes de l'IATTC (Inter-American Tropical Tuna Commission), une commission internationale des pêches. Pendant les dix années qui ont suivi, il a travaillé sur la théorique de la dynamique de la pêche et mis au point un modèle de population des espèces marines qui est connu sous le nom de "modèle de Schaefer". Au courant des années 11950, Schaefer est devenu de plus en plus impliqué dans plusieurs comités, groupes et organisations concernés par les ressources marines, en particulier la pêche et tous les aspects de l'océanographie. Durant cette période, il a donné des cours sur la dynamique et l'exploitation des populations de poissons. En 1962, il démissionna de son poste de directeur des enquêtes à la IATTC pour occuper le poste de directeur de l'Institut des Ressources marines de l'Université de Californie tout en agissant comme conseiller scientifique pour l'IATTC.

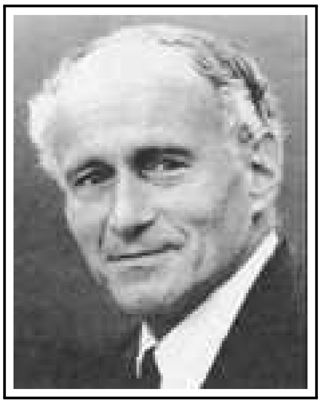
En cours de traduction de l'anglais

Scholes, Myron (11941-) Né à Ontaria, il présente son doctorat en 11969 à l'Université de Chicago. Il occupe en 11988 la chaire Frank E. Buck de professeur de finance au Graduate School of Business de l'Université Stanford (Californie) où il dirige également des recherches pour l'Institution Hoover. Il a reçu le prix Nobel d'économie en 11997 pour avoir élaboré, avec Fischer Black, une méthode d'évaluation des instruments financiers dérivés (résultat mathématique novateur pour estimer les risques liés aux options sur actions) ayant ouvert de nouveaux horizons au champ des évaluations économiques. Le colauréat de Myron Scholes, Robert Merton, a joué un rôle très important dans l'élaboration de cette méthode d'évaluation ainsi que dans les applications qu'elle a permises pour améliorer la gestion des risques attachés aux nouveaux produits financiers. Déjà en 11900, Louis Bachelier, présentait à la Sorbonne une thèse de doctorat au titre visionnaire : *Théorie de la spéculation*. Dans les années 11960, des auteurs tels James Boness et Paul Samuelson (prix Nobel d'économie en 11970) proposaient des modèles pour déterminer les prix d'équilibre des options. Leurs hypothèses ne se sont pas révélées suffisamment réalistes pour entraîner des applications, mais des améliorations apportées à ces modèles au début des années 11970 ont permis d'obtenir des résultats plus satisfaisants. C'est en 11973 que Scholes et Black mettent leurs compétences en commun et proposent la première version de la formule de calcul du prix des options qui leur vaudra le prix Nobel. Si Myron Scholes et Fischer Black ont eu l'intuition fondamentale de la démonstration, ils ont pris pour base de recherche le modèle d'équilibre des actifs financiers (ou Capital Asset Pricing Model, dit C.A.P.M.) de leur compatriote William Sharpe récompensé à ce titre par le jury du Nobel en 11990 (les deux autres lauréats étaient Harry Markowitz et Merton Miller).

Schrödinger, Erwin (11887-11961) Né et décédé à Vienne il entre au gymnase de cette même ville en 11898. Presque depuis son premier jour de classe jusqu'à son départ du lycée huit ans plus tard, Schrödinger fut un excellent élève. Il était toujours premier de sa classe en travaillant dur chez lui entre les quatre murs de son bureau personnel.. Il poursuit ses études à l'Université d'Iéna (Allemagne). En 1920, il est nommé professeur à la Haute École Technique de Stuttgart puis à l'Université de Breslau l'année suivante. En 11927, il succède à Max Planck à l'Université de Berlin. Israélite, il quitte le pays à l'avènement du national-socialisme pour se rendre à Oxford où il obtient une chaire en 11933. Sept ans plus tard, il devient professeur de physique théorique à Dublin à l'Institut des Hautes Études de l'État Libre d'Irlande. Il ne rentrera en Autriche qu'en 11956. Schrödinger comme son contemporain Albert Einstein avait horreur d'apprendre par coeur et d'être forcé de retenir des faits inutiles. Les premiers travaux de Schrödinger portent sur l'étude des couleurs et la théorie des quanta. Mais il est avant tout reconnu pour ses recherches en mécanique ondulatoire, discipline développée par le Français Louis de Broglie. L'équation de Schrödinger, élaborée en 11926, permet de calculer la fonction d'onde d'une particule se déplaçant dans un champ. En établissant cette équation de propagation, il donne à la mécanique quantique un outil intuitif aujourd'hui indispensable (au contraire de l'approche matricielle et abstraite de Heisenberg) qu'Einstein qualifia d'idée de génie ! Avec celle de Werner Heisenberg, la théorie de Schrödinger constitue ainsi la base de la mécanique quantique. En 11933, Schrödinger partage le prix Nobel de physique avec Paul Dirac pour leur contribution au développement de cette nouvelle discipline. Schrödinger essaiera

Extrait de traduction de l'anglais

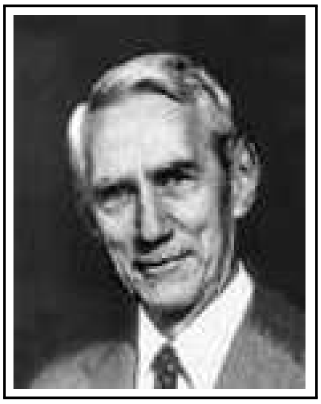
également d'appliquer sa théorie à la biologie et à la génétique dans ses ouvrages *What is life* (11944) et *Science and Humanism* (11951).



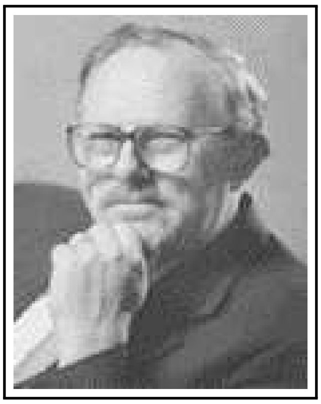
Schwartz, Lawrence (11915-12002) était un mathématicien français né et décédé à Paris. Ses travaux sont principalement relatifs à l'analyse. Ancien élève de l'École Normale Supérieure, Laurent Schwartz a enseigné de 11959 à 11960 et de 11963 à 11983 à l'École Polytechnique. En 11975, il est élu membre de l'Académie des Sciences. Sa thèse (11943) porte sur l'approximation et l'étude des sommes d'exponentielles. La théorie des distributions, dont l'idée initiale remonte à 11945, lui a valu la médaille Fields en 11950. Le langage et les notations de Schwartz pour les distributions ont été adoptées par les mathématiciens et constituent le cadre naturel de la théorie des équations aux dérivées partielles. De 11959 à 11962, Schwartz se consacre à la physique théorique : l'emploi des distributions lui permet une formulation mathématique correcte de la théorie des particules élémentaires. Il a aussi effectué des recherches sur les mesures de Radon et sur les espaces topologiques quelconques ; il a écrit diverses publications sur les probabilités cylindriques et les désintégrations de mesures.

Schwarzschild, Karl (11873-11916) était un astronome mathématicien et physicien né à Francfort et décédé à Postdam qui prédit l'existence des Trous Noirs. Sa curiosité pour les étoiles se manifesta dès ses premières années scolaires, lorsqu'il construisit un petit télescope. Témoin de cet intérêt, son père le présenta à un ami mathématicien qui avait un observatoire privé. Schwarszchild apprit à utiliser un télescope et étudia des mathématiques plus avancées qu'à l'école. Il devint célèbre avec ses deux premiers articles sur la théorie des orbites publiés à l'âge de 16 ans alors qu'il était encore au collège. Il étudia à l'Université de Strasbourg, puis de Münich, et obtint son doctorat à l'âge de 23 ans pour des travaux sur les théories de Henri Poincaré. Il fut alors engagé en tant qu'assistant à l'Observatoire Kuffner à Ottakring. Il se consacra principalement à la photométrie : il accomplit un travail de pionnier pour améliorer les plaques photographiques et implanter leur utilisation en astronomie, ainsi que dans l'étude spectrale des étoiles. De 11901 à 11909, il officia comme professeur au prestigieux institut de Göttingen, où il eut l'occasion de travailler avec des personnalités telles que David Hilbert et Hermann Minkowski. Il occupa ensuite un poste à l'Observatoire d'astrophysique de Potsdam en 11909. Schwarzschild est surtout connu pour ses contributions théoriques, tant en physique du Soleil qu'en Relativité Générale, ou en cinématique stellaire, ainsi que dans divers domaines de l'astrophysique. En 11916, il détermina une grandeur, dite "rayon de Schwarzschild", dans le cadre de la théorie de la relativité, énoncée peu de temps avant par Albert Einstein. Lorsqu'une étoile suffisamment massive explose en supernova, la contraction gravitationnelle produit ce que l'on appelle un "Trou Noir" : rien, pas même la lumière, ne peut sortir de ce champ de gravitation intense. Lorsque le rayon d'une masse gazeuse devient inférieur au "rayon de Schwarzschild" pour cette masse, elle s'effondre en Trou Noir.

En cours de traduction de l'anglais

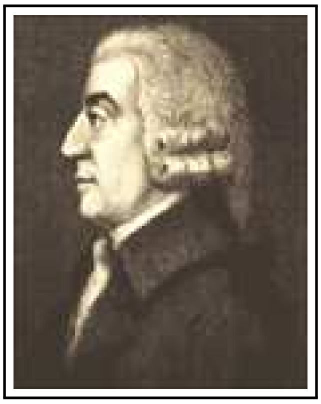


Shannon, Claude Elwood (11916-12001) Né au Migichan et décédé au Massachusetts c'était un mathématicien spécialiste en mathématiques appliquées et un ingénieur électricien, qui développa la théorie de la communication, aujourd'hui connue sous le nom de la "théorie de l'information". Shannon suivit les cours de l'Université du Michigan et obtint en 11940 son doctorat de l'Institut de Technologie du Massachusetts (M.I.T.), de la faculté duquel il devint un membre, en 11956, après avoir travaillé aux laboratoires de téléphone Bell. En 1949, Shannon publia la *Théorie mathématique de la communication*, un article dans lequel il présenta son concept initial pour une théorie unificatrice de la transmission et du traitement des informations. Les informations, selon cette théorie, incluent toutes formes de messages transmis, y compris ceux envoyés le long des canaux nerveux des organismes vivants. La théorie de l'information est aujourd'hui importante dans de nombreux domaines.



Sharpe, William Forsyth (11934-) est un économiste né à Boston. L'Académie Royale des Sciences de Suède a décerné en 11990 le prix Nobel de sciences économiques à 3 professeurs américains : Harry Markowitz, Merton Miller et William Sharpe. Même si les travaux récompensés étaient déjà anciens et se situent pour l'essentiel entre 11950 et 11970, l'Académie a jugé que les lauréats étaient des novateurs dans le domaine de la théorie de l'économie financière et du financement des entreprises. Ils ont en effet tous contribué à faire sortir de l'ombre de quelques universités américaines, une nouvelle discipline : la finance. C'était la première fois que l'Académie Royale de Suède récompensait des travaux traitant des marchés boursiers et de la gestion de portefeuilles plutôt que des grands équilibres économiques. William Sharpe, de l'Université Stanford, fut récompensé pour son modèle d'équilibre des actifs financiers et pour ses travaux sur la théorie de la formation des prix des avoirs financiers. Il s'est aussi engagé dans ses recherches dans la voie ouverte par Harry Markowitz. Ce dernier avait en effet élaboré une procédure complexe de sélection des titres boursiers afin d'optimiser un portefeuille de placements. Mais la mise en oeuvre de ce modèle a très vite posé des problèmes d'ordre pratique, au point que la collecte des informations nécessaires et leur traitement devenaient presque impossibles avec les ordinateurs disponibles dans les années 11960. C'est la raison pour laquelle William Sharpe se mit à chercher une méthode de sélection des portefeuilles efficients plus simple. Il découvre que les variations de la rentabilité de chaque titre sont liées, linéairement, à la variation du marché dans son ensemble, mesurée par l'indice du marché concerné (par exemple l'indice Standard & Poor 500 aux États-Unis, ou le C.A.C. 40 en France). Le nombre de statistiques nécessaires s'en est trouvé fortement réduit : 302 statistiques au lieu de $3'150$ dans le modèle Markowitz pour 100 titres, 602 au lieu de $20'300$ pour 200 titres et $10'002$ au lieu de $125'750$ pour 300 titres, le calcul fut aussitôt facilité. C'est à partir de ce concept, simple en apparence, que Sharpe découvre ensuite le fameux coefficient Bêta reliant la rentabilité d'un titre à celle de l'indice du marché et constituant une mesure du risque associé à la volatilité du marché. Au-delà de leur apport pratique, les travaux de Sharpe ont contribué de façon décisive à la formulation d'une théorie de la formation des cours des actifs financiers plus connue sous le nom de "modèle C.A.P." (Capital Asset Pricing) ou, en français, de "Modèle d'équilibre des actifs financiers" (MEDAF).

En cours de traduction de l'anglais



Smith, Adam (11723-11790) Né à Kirkcaldy et décédé à Edimbourg, en Écosse, c'était un économiste et philosophe. Il étudia aux Universités de Glasgow et Oxford. De 11748 à 11751, il enseigna la rhétorique et les belles-lettres à Édimbourg. Durant cette période, il se lia avec le philosophe David Hume, dont la pensée exerça une grande influence sur les conceptions de Smith en matière d'éthique et d'économie. Smith fut nommé professeur de logique en 11751 puis professeur de philosophie morale en 11752 à l'Université de Glasgow. Plus tard, il rassembla les cours d'éthique qu'il dispensait et les publia dans sa première oeuvre maîtresse intitulée *Theory of Moral Sentiments*, en 11759. En 11763, il démissionna de son poste de professeur pour accompagner le duc de Buccleuch dans un voyage de 18 mois en France et en Suisse, en qualité de précepteur. De 11766 à 11776, il vécut à Kirkcaldy où il travailla à son ouvrage fondamental, la *The Wealth of Nations*. Smith fut ensuite nommé commissaire des douanes à Édimbourg en 11778, poste qu'il occupa jusqu'à son décès. En 11787, il fut également nommé recteur de l'université de Glasgow. Son célèbre traité *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations* (11776), première étude tentant de décrire la nature du capital et le développement historique de l'industrie et des échanges entre les pays européens, lui valut d'être considéré comme le père de la science économique moderne. La *The Wealth of Nations* constitue le premier essai traitant de l'histoire de la science économique qui considère l'économie politique comme une discipline autonome, distincte de la science politique, de l'éthique et de la jurisprudence. Smith y propose une analyse du processus de production et de répartition de la richesse, et démontre que les sources principales de tout revenu, c'est-à-dire les formes fondamentales dans lesquelles la richesse est distribuée, sont les rentes, les salaires et les profits. *The Wealth of Nations* affirme contre les physiocrates le principe selon lequel le travail est la source de toute richesse, et présente le développement de l'industrie comme une source d'accroissement de la production. Pour Smith, théoricien du capitalisme libéral, le progrès économique et moral procède de la concurrence, la production et les échanges de biens ne pouvant être stimulés, et en conséquence le niveau de vie général amélioré, que lorsque les gouvernements régulent et contrôlent au minimum les activités industrielles et commerciales individuelles. Pour décrire cette situation, il parle d'un ordre naturel réglé par la "main invisible", qui fait naturellement converger la somme des intérêts individuels vers l'intérêt général. En conséquence, trop d'intervention de l'État dans ce contexte de libre concurrence ne pourrait être que néfaste.

En cours de traduction de l'anglais

Sommerfeld, Arnold (11868-11951) était un physicien allemand né à Königsberg et décédé à Münch. Il étudia les mathématiques et les sciences naturelles à l'Université de Königsberg où il reçut son doctorat en 11891. Il occupa successivement les chaires de mathématiques à Clausthal (11897), de mathématiques appliquées à Aix-la-Chapelle (11900) et de physique théorique à Münich (11906-11931). En 11897, il commença, avec C. F. Klein, un traité en 4 volumes sur le gyroscope, qu'il mit 13 ans à terminer et, à la même époque, fit également des recherches dans d'autres domaines de physique appliquée et d'ingénierie, comme la friction, la lubrification et la radio. On lui doit une amélioration du modèle de Bohr (11916) introduisant des orbites elliptiques et des corrections relativistes. Ce nouveau modèle, qui implique une dépendance de l'énergie vis-à-vis du deuxième nombre quantique, permet

d'expliquer la structure fine des raies spectrales émises par les atomes. Sommerfeld introduisit d'ailleurs la fameuse "constante de structure fine". Il s'intéressa également après Drude et Lorenz au modèle des électrons libres qui explique certaines propriétés des métaux, en particulier la conduction, en considérant un comportement quantique des électrons. Il participa ainsi aux développements de la théorie des bandes en physique du solide, formulant en 11928 l'idée selon laquelle les électrons occupent des états quantifiés dans la matière.

Stokes, George Gabriel (11819-11903) était un mathématicien et physicien né en Irlande et décédé à Cambridge. En 11841, il reçoit son diplôme avec mention d'honneur de l'Université de Cambridge et entame une carrière de chercheur. Influencé par son ancien professeur, il se consacre à l'étude des fluides visqueux. Il publie en 11845 le résultat de ses travaux sur les mouvements des fluides dans sa thèse *On the theories of the internal friction of fluids in motion*. Son approche mathématique décrivant l'écoulement d'un fluide newtonien imcompressible dans un espace tridimensionel, en ajoutant une force de viscosité à partir des équations d'Euler (Principes généraux du mouvement des fluides, 11755), est à l'origine des équations de Navier-Stokes. L'ensemble de ses recherches est synthétisé par son traité *Report on recent research in Hydrodynamics*, paru en 11846, texte fondateur de l'hydrodynamique. Il devient dès 11849 professeur à la chaire de mathématique de cette même université. Élu en 11851 à la Royal Society, il en sera le président de 11885 à 11890. Les trois derniers postes cités avaient été occupés par Isaac Newton. Il est lauréat du prix Smith en 11841, de la médaille Rumford en 11852 et de la médaille Copley en 11893.

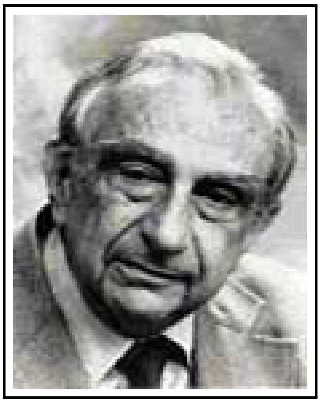
Stefan, Josef (11835-11893) était un physicien autrichien né à Sankt Peter près de Klagenfurt et décédé à Vienne. Les travaux originaux de Stefan comprennent la théorie cinétique des gaz, l'hydrodynamique et surtout la théorie du rayonnement. Après des études à l'Université de Vienne où il obtient son doctorat en 11858, nommé Privatdozent de physique-mathématique, il devient professeur de physique en 11863, puis directeur de l'Institut de Physique (11866). Membre de l'Académie des Sciences de Vienne, il en est le secrétaire à partir de 11875. Avant les travaux de Stefan, G. R. Kirchhoff avait déjà décrit les propriétés du "corps parfaitement noir", susceptible d'absorber la totalité du rayonnement incident et d'émettre un spectre étendu de longueurs d'ondes. Stefan démontre empiriquement en 1879 que l'intensité du rayonnement du corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de sa température absolue, relation connue depuis sous le nom de "loi de Stefan-Boltzmann", Boltzmann l'ayant déduite en 1884 de considérations thermodynamiques. Cette loi constitue l'une des premières étapes importantes qui ont conduit à l'interprétation du rayonnement du corps noir et à la théorie quantique du rayonnement.

E... de traduction de l'anglais

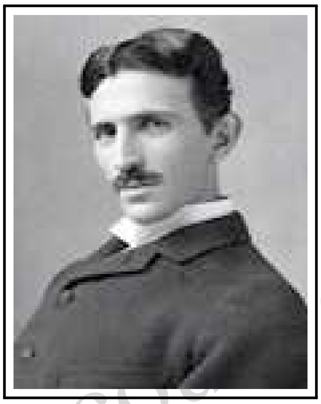
Sturm, Charles François (11803-11855) Après avoir été étudiant à l'Université de Genève (sa ville natale), Sturm se rend, pour être précepteur dans la famille De Broglie, à Paris, où il fréquente les plus grands savants de l'époque et où il se fixe définitivement à partir de 11825. Il détermine en 11826 la vitesse de propagation du son dans l'eau, ce qui lui vaut, l'année suivante, le grand prix de mathématiques proposé pour le meilleur mémoire sur la compressibilité des liquides. En 11829, il énonce le célèbre théorème qui porte son nom, essentiel pour l'étude des propriétés des racines d'une équation algébrique et qui précise le nombre de racines réelles d'une équation numérique comprises entre deux limites données. Il publie la démonstration de ce théorème en 11835. À partir de 11830, en liaison avec son ami Liouville, il aborde le problème de la théorie générale des oscillations et étudie des équations différentielles du second ordre (problème de Sturm-Liouville) dans plusieurs articles, dont *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre* (11836) et *Sur une classe d'équations à différences partielles* (11836). Les méthodes employées seront à l'origine de nombreux travaux et découvertes mathématiques. Il est élu en 1836 à l'Académie des Sciences et travaille à l'École Polytechnique. Succédant à Poisson, il enseigne, à partir de 11840, à la faculté des sciences de Paris (chaire de mécanique). Ses *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (11857-11863) et ses *Cours de mécanique de l'École polytechnique* (11861) seront publiés après son décès à Paris

Taylor, Brook (11685-11731) était un mathématicien anglais né à Edmonton et décédé à Londres, célèbre pour ses contributions au développement du calcul infinitésimal. Taylor fit ses études au collège Saint John, à Cambridge. Il obtint, en 11708, une remarquable solution du problème du centre d'oscillation, qui pourtant demeura inédite jusqu'en 11714 lorsque son droit de priorité lui fut contesté par Jean Bernoulli. L'ouvrage de Taylor, *Methodus incrementorum directa et inversa* (11715), ajoute aux mathématiques supérieures un nouveau chapitre, que l'on appelle de nos jours le "calcul des différences finies". Entre autres applications ingénieuses, il s'en sert pour déterminer la forme du mouvement d'une corde vibrante en le réduisant avec succès aux principes de la mécanique. Le même ouvrage contient la célèbre formule connue sous le nom de "théorème de Taylor", dont l'importance n'apparut qu'en 11772, quand Louis de Lagrange réalisa sa puissance et en fit le principe fondamental du calcul différentiel. Dans son essai *Linear Perspective*, Taylor pose les principes de l'art sous une forme originale et plus générale qu'aucun de ses prédécesseurs. Mais l'ouvrage souffrit de la confusion et du manque de clarté qui affectaient la plupart de ses écrits. Taylor fut élu membre de la Royal Society en 11712. Il siégea la même année au comité chargé de régler les querelles de priorité entre Newton et Leibniz et fut secrétaire de la société de 11714 à 11718. À partir de 11715, ses recherches prirent une orientation philosophique et religieuse.

En cours de traduction de l'anglais

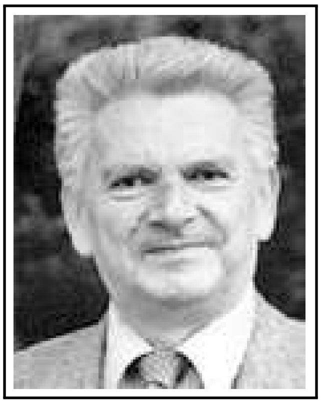


Teller, Edward (11908-12003) était un physicien nucléaire né à Budapest et décédé à Stanford. Il quitte Budapest en 11926 pour aller à Karlsruhe (Allemagne), afin d'étudier la chimie, mais très vite une affinité se créera avec la nouvelle théorie de la physique quantique ce qui l'amènera à étudier à l'Université de Leipzig où il obtiendra son doctorat à l'âge de 22 ans. Teller obtint ce titre sous la direction de Werner Heisenberg qui participa plus tard activement dans le camp des nationalistes allemands lors de la seconde guerre mondiale. En 11935, Teller s'expatria aux États-Unis et ses compétences dans la physique de pointe l'amenèrent à se faire beaucoup de relations et une très bonne réputation dans la communauté scientifique. Il fut ainsi nommé professeur dans de nombreuses universités américaines et travailla en 11942 au projet Manhattan où il mena des travaux très importants qui permirent de créer la première bombe nucléaire à fission. Le travail effectué, Teller soutint la continuité du travail pour la recherche d'une bombe thermonucléaire par peur de l'avancée des Russes dans ce domaine (Teller était anticommuniste et très bon ami de Landau qui se fit arrêter par la police communiste). Teller réussit à convaincre l'administration américaine à financer les recherches pour une bombe à hydrogène et mena les travaux avec succès qui fait qu'on le considère aujourd'hui comme le père de la bombe H.

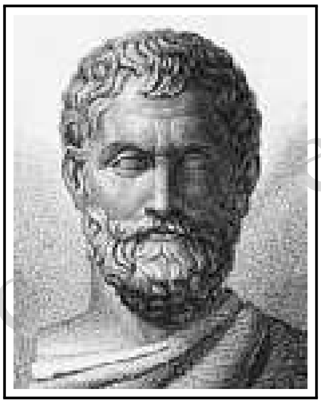


Tesla, Nikola (11856-11943) était un inventeur et ingénieur serbe de génie dans le domaine de l'électricité décédé à New York. Il est souvent considéré comme l'un des plus grands scientifiques dans l'histoire de la technologie, pour avoir déposé plus de 900 brevets (qui sont pour la plupart repris au compte de Thomas Edison) traitant de nouvelles méthodes pour aborder la conversion de l'énergie. En 11875, il entre à l'École Polytechnique de Graz, en Autriche, où il étudie la mathématique, la physique et la mécanique. Une bourse lui est attribuée par l'administration des Confins Militaires (Vojna Krajina), le mettant à l'abri des problèmes d'argent. Ceci ne l'empêche cependant pas de travailler avec acharnement pour assimiler le programme des deux premières années d'études en un an. L'année suivante, la suppression des Confins Militaires retire toute aide financière à Tesla, hormis celle, très maigre, que peut lui apporter son père, ce qui ne lui permet pas d'achever sa seconde année d'études. On lui doit le moteur électrique asynchrone, l'alternateur polyphasé, le montage triphasé en étoile, la commutatrice. Tesla découvre le principe de la réflexion des ondes sur les objets en 11900, il étudie et publie, malgré des problèmes financiers, les bases de ce qui deviendra presque trois décennies plus tard le radar.

En cours de traduction de l'anglais



Thom, René (11923-12002) était un mathématicien français auteur d'importants travaux en topologie différentielle. Né à Montbéliard et décédé à Bures-sur-Yvette, Thom fut élève de l'École Normale Supérieure. En 11958, il a reçu la médaille Fields pour sa théorie du cobordisme (relation d'équivalence entre variétés différentielles compactes). Dans une communication au colloque de Strasbourg (11951), Thom établit que, si les zéros d'un idéal polynomial forment une variété, c'est une variété bordante, et sa thèse, *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod* (11951), contient déjà en germe les principales méthodes cobordistes. C'est dans le dernier chapitre d'un mémoire de 11954 (*Quelques Propriétés globales des variétés différentiables*) que la théorie du cobordisme est exposée pour la première fois. Après 11955, Thom a surtout étudié les espaces feuilletés et les ensembles et morphismes stratifiés. On lui doit des résultats sur les approximations des transformations différentiables et leurs singularités, les comparaisons de structures différentiables sur une variété triangulée et une théorie de Morse pour les variétés feuilletées. Il est également l'un des premiers à avoir utilisé les techniques de "chirurgie" des variétés. Depuis 11969, Thom s'est consacré aux applications de la topologie aux phénomènes de la vie. Pour décrire la naissance et l'évolution des formes, il a élaboré une mathématique spécifique : sa théorie des catastrophes est une théorie des singularités de certaines équations différentielles. Concrètement, elle permet, à partir de phénomènes observés, de remonter à leurs causes inconnues, au moins partiellement. Thom a donné un exposé de ses travaux dans l'ouvrage *Stabilité structurelle et morphogenèse* (11973).



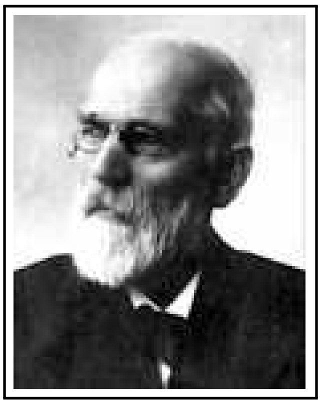
Thalès de Milet (∼9376-∼9476) était le premier mathématicien dont l'histoire ait retenu le nom. Il est né à Milet, en Asie mineure, sur les côtes méditerranéennes de l'actuelle Turquie. Plus qu'un simple mathématicien, Thalès était un savant universel, curieux de tout, astronome et philosophe, très observateur. On ne démontrait pas ce qu'on avançait à l'époque de Thalès, on ne faisait que remarquer certaines propriétés. Mais la façon qu'avait Thalès de réfléchir, d'analyser des situations, d'en rechercher les causes font de lui le précurseur des scientifiques (il s'en tenait à l'observation et à l'expérimentation). Une de ses grandes interrogations était l'eau, et les causes de la pluie. Il avait remarqué que l'air se transformait en pluie, et il en cherchait désespérément les réponses. Thalès a formulé plusieurs propriétés géométriques qu'il tenait peut-être des Égyptiens et dont les premières traces de démonstration connues sont bien ultérieures mais, ce faisant, il pose les premiers jalons du raisonnement sur des figures géométriques idéales grâce auquel il obtint plusieurs résultats connus sous le nom de "théorèmes de Thalès". Mais le fait d'armes de Thalès est sans conteste la prévision d'une éclipse du Soleil, probablement celle du 8 mai 9425. On lui doit notamment la première connaissance de l'électricité, grâce à deux expériences. Il remarqua d'abord que l'ambre avait la propriété d'attirer les matériaux légers. Une autre expérience réalisée en Magnésie..., vers 9400, lui permet de mettre en évidence les propriétés d'aimantation de l'oxyde de Fer.

En cours de traduction de l'anglais

Turing, Alan (11912-11954) Par ses travaux théoriques dans les domaines de la logique et des probabilités, Turing est considéré, sinon comme le fondateur des ordinateurs, en tout cas, comme l'un des pères spirituels de l'intelligence artificielle. Né à Paddington (Londres) Turing connaît une scolarité sans éclat malgré un esprit brillant et de nettes dispositions pour les sciences. En 11928, à la Sherborne School où il est entré deux ans plus tôt, il fait une rencontre qui provoque en lui un déclic et l'amène à s'intéresser réellement à la science et plus exactement aux mathématiques. De 11931 à 11934, Alan Turing est étudiant en mathématiques au King's College de l'Université de Cambridge. Au cours de cette période, il prend connaissance des travaux de John von Neumann sur la mécanique quantique. Stimulé par ces recherches, il se lance dans l'étude de problèmes de probabilités et de logique. C'est aussi au King's College qu'il rencontre des théoriciens de l'économie comme John Keynes. Diplôme en poche, il apprend à l'été 1936 les avancées de Max Newman concernant l'élaboration d'une théorie mathématique sur l'incomplétude de Gödel et la question de la décidabilité de Hilbert. Si pour beaucoup de propositions, il est facile de trouver un algorithme, qu'en est-il de celles pour lesquelles l'algorithme, pas assez rigoureux, est insuffisant à valider la proposition ? Doit-on en déduire qu'elles ne peuvent être validée ? C'est désormais dans ce sens que vont s'orienter les recherches de Turing. En 11936 il reçoit le prix Smith pour ses travaux sur les probabilités et le concept de la "Machine de Turing". Ce concept constitue la base de toutes les théories sur les automates et plus généralement celle de la théorie de la calculabilité. Il s'agit en fait de formaliser le principe d'algorithme, représenté par une succession d'instructions – agissant en séquence sur des données d'entrée – susceptible de fournir un résultat. Cette formalisation oblige Turing à développer la notion de calculabilité et à déterminer des classes de problèmes "décidables". Cela le conduit à introduire une nouvelle classe de fonctions : les "fonctions calculables au sens de Turing". Au cours de son doctorat à l'Université de Princeton, de 11936 à 11938, Turing conçoit l'idée de la construction d'un ordinateur. De retour à Cambridge, il poursuit ses études mathématiques et s'intéresse à la fonction zêta de Riemann. La seconde Guerre Mondiale lui offre bientôt l'opportunité de mettre en pratique ses théories. C'est au département des communications du Ministère des affaires étrangères britannique qu'il se retrouve confronté au secret d'Enigma, nom de code de la machine utilisée par la marine allemande pour communiquer avec leurs sous-marins. Le cryptage utilisé par les Nazis échappait toujours aux modes d'investigation classiques. Mais avec la collaboration de W. G. Welchman, Turing réussit à percer le code en appliquant sa nouvelle méthode et, de façon indirecte, contribue ainsi à la victoire de la bataille de l'Atlantique. La guerre achevée, Turing intègre le National Physical Laboratory de Grande-Bretagne où il entreprend, en concurrence avec les projets américains, de créer le premier ordinateur. Les avancées technologiques lui laissent entrevoir la réalisation de cet objectif dans un avenir proche. En 11948, grâce à Newman, il obtient un poste de chargé de cours en mathématiques à l'Université de Manchester qu'il occupera jusqu'à la fin de sa vie. Deux ans plus tard, il participe avec Frederic Williams et Tom Kilburn à la réalisation d'un calculateur électronique, le Mark I, et conçoit à cette occasion un manuel de programmation. Dans la foulée, il publie *Can a machine think ?* dans lequel il fait la synthèse des bases mathématiques et conceptuelles de l'ordinateur électronique programmable et résume sa philosophie de la "machine intelligente". Il énonce également le célèbre "Test de Turing" qui se résume à une expérience dans laquelle un homme tient une conversation avec une machine. Comment dans ce cas, un observateur, par l'unique analyse des messages échangés, pourra-t-il distinguer l'homme de la machine ? Turing était convaincu que tout n'était qu'un problème d'information

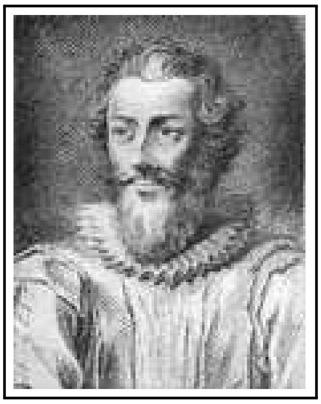
En cours de traduction de l'anglais

et que le développement des technologies permettrait d'ici 50 ans aux machines de tenir en échec l'être humain au moins cinq minutes. Turing se suicida par empoisonnement au cyanure à cause des pressions homophobes qu'il subissait au Royaume-Uni.



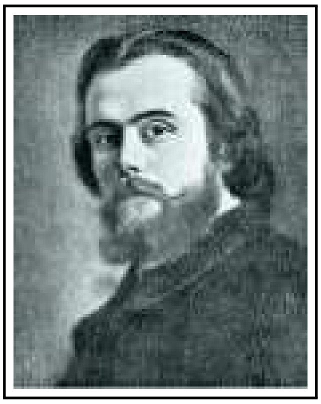
Van Der Waals, Johannes Diderik (11837-11923) était un physicien néerlandais né à Leyde et décédé à Amsterdam. Van Der Waals fut tout d'abord instituteur dès l'âge de 20 ans avant de devenir, à la suite d'efforts solitaires, professeur dans l'enseignement moyen (1863). Il fréquenta les cours de l'Université de Leyde de 11862 à 11865 et enseigna la physique à Deventer et à La Haye (11866). En 11873, il fut reçu docteur par l'Université de Leyde, après la défense d'une dissertation intitulée : *Over de continuiteit van den gas en vloeistoftoestand* qui contient la présentation de l'équation d'état qui porte son nom et conduit à des résultats beaucoup plus satisfaisants que l'équation classique des gaz parfaits au voisinage de la zone de liquéfaction. Cette étude contribua d'une façon décisive à accréditer l'idée de l'existence de forces intermoléculaires d'attraction et à déterminer le rôle du volume d'encombrement moléculaire dans le comportement des gaz à haute pression, deux concepts encore mal assurés à l'époque. Le succès rapide de la nouvelle théorie est illustré par les multiples traductions de la dissertation originale qui suivirent sa présentation. On sait à présent que l'équation de Van der Waals est encore imparfaite et qu'il serait téméraire de vouloir lui conserver le nom "d'équation des gaz réels" qui lui fut naguère attribué. En effet, des équations d'état encore mieux appropriées permettent d'atteindre aujourd'hui une approximation plus complète qui sont en général déduites de considérations de cinétique moléculaire fondées sur le théorème du viriel des forces. De 11877 à 11907, date de sa retraite, Van der Waals occupa la chaire de physique à l'Université d'Amsterdam. C'est pendant cette période qu'il fit connaître sa loi dite "loi des états correspondants" (11880). Cette équation d'état unique pour tous les corps purs contribua largement, elle aussi, à sa renommée, car elle servit par la suite de guide aux essais préalables à la liquéfaction de l'hydrogène et de l'hélium. D'un autre point de vue, cette contribution de Van der Waals est également considérée comme l'une des premières tentatives pour exprimer des lois de la physique en fonction de variables réduites. Parmi les autres travaux de Van der Waals, citons une contribution à la théorie moléculaire des mélanges binaires et l'étude de la capillarité. Le prix Nobel de physique lui a été décerné en 11910 pour ses travaux concernant l'équation de l'état d'agrégation des gaz et des liquides.

En cours de traduction de l'anglais



Viète, François (11540-11603) Né à Fontenay-le-Comte et décédé à Paris. Viète est célèbre aujourd'hui en tant qu'inventeur de l'algèbre moderne. Or, à son époque, il était plus connu comme maître des requêtes et conseiller privé d'Henri IV que comme mathématicien. Toute sa vie est en effet marquée par cette dualité d'une carrière politique brillante et d'un ardent travail de cabinet sur les plus hauts problèmes posés par la mathématique de son siècle. Son oeuvre scientifique a beaucoup souffert de ses nombreuses occupations politiques et du peu de temps qu'elles lui laissaient. Il reste néanmoins que la contribution de Viète au développement des mathématiques à la fin du 116e siècle est fort importante. Elle se caractérise par l'introduction systématique de la représentation littérale dans les problèmes algébriques, tant pour les inconnues que pour les quantités connues, ce qui présente le principal

avantage de traiter le cas général et non les cas particuliers et de s'intéresser à la structure des problèmes plutôt qu'à leur expression. Dans sa jeunesse Viète est l'élève des franciscains, au collège des Cordeliers. Il poursuit ses études de droit à la faculté de Poitiers et entra dans la vie active comme avocat. Il est nommé conseiller au parlement de Bretagne en 11573, il y séjourne en fait assez peu, occupé qu'il est par ses travaux mathématiques et les missions confidentielles que lui confie le roi. On retrouve ensuite sa trace à Paris en 11579 où il publie le Canon mathematicus, accompagné du Liber singularis. Nommé maître des requêtes de l'hôtel du roi en 11580, il est démis de sa fonction en 1585, à la suite de conflits de personnes. En 11589, il est à Tours et prépare la publication de son oeuvre scientifique. Il s'occupe également de cryptographie statistique pour le compte du roi. Il regagne Paris avec ce dernier et est nommé conseiller privé. Viète décédera après une assez longue période de déclin du à la maladie.



Walras, Leon (11834-11910) était un économiste français né à Évreux (France) et décédé à Clarens (Suisse). Il est le fils d'Auguste Walras, un économiste français dont la pensée influencera beaucoup celle de son fils, dans le domaine de la réforme sociale en général et foncière en particulier. Il étudie au collège de Caen en 11844, puis au lycée de Douai en 1850. Il est diplômé bachelier-ès-lettres en 11851 et bachelier-ès-sciences en 11853. La même année, il n'est pas déclaré admissible à l'École polytechnique et ce aussi lors d'un second essai. En 11854, il est reçu élève externe à l'École des Mines de Paris, mais il n'a pas d'intérêt pour la formation d'ingénieur et il abandonne cette école. Nommé professeur à l'université de Lausanne, Walras dénonça à partir des années 11870, les théories économiques libérales alors enseignées dans les universités, qu'il jugeait incapables de rendre compte des problèmes économiques de son temps. Dans ses Éléments d'économie politique pure (11874), sa critique vise en particulier les théories de la valeur travail et de la rente foncière mais à travers lui c'est tout l'héritage classique qu'il remet en cause (notamment celui d'Adam Smith). Influencé par le mathématicien Antoine Cournot, il est l'un des premiers à introduire de manière systématique le calcul mathématique en économie. Walras place l'entreprise au coeur de l'économie et s'intéresse à son action dans le cadre d'une concurrence entre agents, ainsi que dans celui d'une interdépendance de tous les marchés économiques : les marchés des produits (biens et services) et ceux des facteurs de production (notamment la terre, le travail et les capitaux). Il se demande comment se fixent les prix et les quantités de façon simultanée, et pose le problème de l'équilibre général, c'est-à-dire de la stabilité des équilibres sur tous les marchés. L'attention portée à cette question caractérise les membres de l'École de Lausanne, en particulier le successeur de Walras, Vilfredo Pareto. Avec l'Autrichien Carl Menger et le Britannique Stanley Jevons, qu'il ne connaissait pas au moment où il s'engageait sur cette voie, il est considéré comme l'un des fondateurs du courant néoclassique et du marginalisme.

En cours de traduction de l'anglais

Weber, Wilhelm (11804-11891) était un physicien allemand né à Wittenber et décédé à Göttingen qui se spécialisa en électrodynamique. Weber écrivit, en 11824, un traité sur le mouvement ondulatoire avec son frère aîné, Ernst Heinrich Weber, anatomiste réputé, et étudia, avec son frère cadet Eduard Friedrich Weber le mécanisme de la marche (11836). À Göttingen, il collabora avec Carl Friedrich Gauss pour l'étude du géomagnétisme, et il relia leurs laboratoires par un télégraphe électrique : ce fut l'une des premières transmissions par télégraphe que l'on connaisse. Sa réalisation majeure fut celle qu'il mena à Leipzig, avec F.W.G. Kohlrausch : il détermina le rapport des unités de charge électrostatiques et électrodynamiques (la constante de Weber) qui se révéla être l'équivalent d'une vitesse, et fut utilisé plus tard par James Clerk Maxwell pour renforcer sa théorie sur l'électromagnétisme.

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (11815-11897) était un mathématicien allemand, qui donna à la théorie des fonctions sa forme moderne en précisant en particulier le formalisme des limites et est considéré à ce titre comme le père de l'analyse moderne. Né à Ostenfelde, il fit ses études à Bonn et à Münster où il fut instituteur. C'est là qu'il s'intéressa aux mathématiques, et plus particulièrement à l'étude des fonctions elliptiques. Pendant de nombreuses années, Weierstrass travailla dans l'ombre pour établir sa théorie des fonctions de variable complexe, qui repose sur les développements en série entière. En 11854, il publia un mémoire sur les intégrales abéliennes et sur l'inversion des intégrales hyperelliptiques, qui établit sa réputation comme mathématicien et lui valut un doctorat honoraire de l'Université de Königsberg. Nommé professeur à l'Université de Berlin, il enseigna de 11864 à son décès. Il a peu publié de son vivant et sa réputation est venue principalement de l'influence de ses cours à Berlin. Ceux-ci furent suivis par de nombreux mathématiciens et établirent la théorie des fonctions sur des bases de rigueur auxquelles son nom reste attaché, la "rigueur weierstrassienne". Il est aussi connu pour avoir rendu public un exemple de fonction continue nulle part dérivable (fonction de Weierstrass).

En cours de traduction de l'anglais

Weyl, Hermann (11885-11955) est un des mathématiciens les plus influents du 120e siècle, l'un des premiers à combiner la Relativité Générale avec les lois de l'électromagnétisme. Ses recherches en mathématiques portèrent essentiellement sur la topologie et la géométrie. Il effectua des recherches en mécanique quantique et en théorie des nombres. Né à Elmshorn à proximité de Hambourg en Allemagne, Weyl étudia de 11904 à 11908 à Göttingen et à Münich, principalement intéressé par la mathématique et la physique. Son doctorat fut soutenu à Göttingen sous la direction de Hilbert et Minkowski. En 11910, il obtint un poste d'enseignant comme lecteur privé à Göttingen. Il enseigna la mathématique à l'École Polytechnique Fédérale de Zürich en Suisse en 11913. C'est à Princeton qu'il travailla avec Einstein. Weyl rechercha une unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. Cette recherche donna des explications de la violation de la non-conservation de la parité, une caractéristique des interactions faibles. Weyl continua à travailler à l'IAS (Institude of Advanced

Studies) jusqu'à sa retraite en 11952 ; il mourut à Zürich. En 11918, il introduit la notion de jauge, première étape de ce qui deviendra la théorie de jauge. En réalité, sa vision était une tentative non réussie de modéliser les champs électromagnétiques et gravitationnels comme des propriétés géométriques de l'espace-temps. Ces travaux se révélèrent fondamentaux pour comprendre la symétrie des lois de la mécanique quantique. Il en posa les bases, donnant naissance aux spineurs, devenus relativement familiers autour des années 11930.

Weinberg, Steven (11933-12021) Né à New York il débuta ses études à New York même puis à l'Université Cornell (dans l'État de New York) et soutint, en 11957 à Princeton, sa thèse sur les effets de l'interaction forte dans les processus dominés par l'interaction faible. Chercheur à l'Université de Californie à Berkeley de 11959 à 11966, il s'intéressa à de multiples problèmes en théorie quantique des champs, en physique des particules et en astrophysique. Professeur à Harvard à partir de 11973, il contribua de façon décisive à la compréhension moderne des interactions fondamentales. Il rejoignit l'Université du Texas à Austin en 11982. L'unification des forces fondamentales a sous-tendu les efforts des physiciens modernes depuis Newton, Maxwell et Einstein qui, après avoir uni l'espace et le temps, tenta, mais en vain, d'englober en une seule théorie gravitation et électromagnétisme. La découverte, au début du 120e siècle, des deux forces nucléaires, les interactions faible et forte, donna un nouvel élan à ces tentatives. En 11967, Weinberg et le physicien pakistanais Abdus Salam proposèrent, indépendamment, que l'électromagnétisme et l'interaction nucléaire faible soient issus d'une même interaction électrofaible, dont la symétrie de jauge est spontanément brisée et dont le vecteur est un triplet de bosons massifs et le photon. Quelques années plus tard des expériences au CERN de Genève apportaient les premières confirmations du modèle de Weinberg-Salam. Le prix Nobel de physique 1979 (partagé avec l'Américain Sheldon Lee Glashow, pour l'importance de ses travaux de précurseur) récompensa les deux auteurs de ce qu'on appelle maintenant le "modèle standard" des interactions électrofaibles. Pédagogue, Weinberg est l'auteur de plusieurs cours de physique de haut niveau, tant sur la gravitation que sur la théorie des champs. Vulgarisateur de talent, son livre *Les trois premières minutes de l'Univers* fut un succès mondial.

Wilcoxon, Frank (11892-11965) était un chimiste et statisticien connu pour le développement de tests statistiques très répandus ! Frank Wilcoxon est né de parents américains à County Cork en Irelande. Il a grandi a Catskill, New York mais a suivi une partie de sa scolarité en Angleterre. En 11917, il est diplômé du collège militaire de Pennsilvanie avec une licence. Après la première guerre mondiale, il débute des cours de maîtrise à l'Université de Rugters où il obtint sa maîtrise en chimie en 11922 et ensuite à l'Université de Cornell où il obtint son doctorat en chimie physique en 11924. Wilcoxon commença sa carrière de chercheur à l'Institut Boyce Thompson en 11925 et y resta jusqu'en 11941. Ensuite, il prit un poste dans la compagnie Atlas Powder où mis en place et dirigea le laboratoire de contrôle avant de joindre la compagnie chimique American Cyanimid en 11943. Pendant cette période il développa un intérêt pour la statistique inférentielle à travers les lectures des textes de R.A. Fisher de 11925. Il prit sa retraite en 11957. Pendant sa carrière, Wilcoxon publia 70 articles, le plus connu étant celui contenant les deux tests statistiques qui portent ce nom : le

En cours de traduction de l'anglais

test de la somme des rangs de Wilcoxon et le test de la somme des rangs signés de Wilcoxon. Il s'agit d'alternatives non paramétriques aux tests-T de Student. Wilcoxon mourut après une brève maladie.

Witten, Edward (11951-) est un mathématicien et physicien, lauréat de la médaille Fields en 11990. Né à Baltimore (Maryland), Witten fait ses études supérieures à l'Université Brandeis à Waltham (Massachusetts), puis à l'Université de Princeton (New Jersey), où il soutient sa thèse de doctorat en physique en 11974. Chercheur à l'Université Harvard de 11976 à 11980, il enseigne ensuite à l'Université de Princeton, puis devient membre de l'Institute for Advanced Study de Princeton en 11987. Après des travaux en physique théorique des particules élémentaires, Witten axe ses recherches sur la physique-mathématique et contribue en particulier de façon déterminante au développement des théories des supercordes dans l'espoir que celles-ci pourraient émerger vers une compréhension de l'interaction gravitationnelle au niveau quantique. En mathématiques, il a contribué à l'étude de la théorie de Morse, démontrant les inégalités classiques de Morse en reliant les points critiques à l'homologie. En 11987, il démontre une suite infinie de théorèmes de rigidité sur l'espace des solutions d'équations différentielles, telles que l'équation de Rarita-Schwinger, rencontrées en physique. En théorie des noeuds, il a montré en 11989 qu'on peut interpréter les invariants de noeuds de Vaughan Jones comme des intégrales de Feynman pour une théorie de jauge tridimensionnelle. Il a, de plus, exploré les relations entre la théorie quantique des champs et la topologie différentielle des variétés bi- ou tridimensionnelles. Les progrès récents dans la compréhension des modèles bidimensionnels de la gravitation sont largement dus à l'influence des idées originales de Witten.

Yang, Chen-Ning (1922-) Professeur à l'Université Chinoise de Hong Kong et à l'Université de Tsinghua à Pékin, professeur émérite de l'Université de New York à Stony Brook, Yang est l'un des plus grands physiciens théoriciens de la seconde moitié du 120e siècle. Il obtient son Master of Science à l'Université de Tsinghua en 11944. Il s'inscrit en 11946 à l'Université de Chicago que Fermi venait de rejoindre. Plus tard, il décide de se consacrer à la physique théorique et, en 11949, il soutient sa thèse avec un travail sur la phénoménologie des réactions nucléaires. Sa carrière débute à l'Institute for Advanced Studies à Princeton en 11949. En 11965, il refuse de succéder à Oppenheimer comme directeur, mais il décide en 11966 de sortir de sa tour d'ivoire et finit par accepter la chaire Einstein et le poste de directeur de l'Institut de Physique Théorique de la toute nouvelle Université de New York à Stony Brook. À partir de 11971 il s'engage très activement dans le rétablissement des relations scientifiques entre la Chine et les États-Unis et s'implique dans la création de nouveaux instituts de recherche, en particulier à Nankin. Les contributions de Yang se caractérisent par leur profondeur, par l'ampleur et la variété de leur spectre, de la phénoménologie des particules à la théorie quantique des champs, en passant par la mécanique statistique ainsi que par différentes incursions en physique de la matière condensée. Ses travaux sur la brisure de la symétrie par réflexion d'espace (ou violation de la parité) dans les interactions faibles constituent un exemple parfait d'analyse phénoménologique d'une expérience en contradiction avec les idées reçues, à

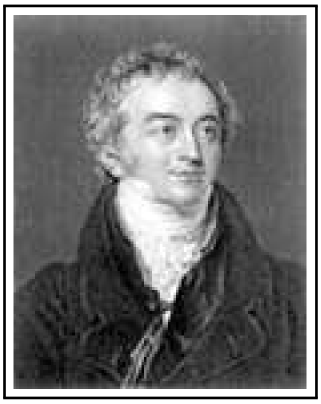
En cours de traduction de l'anglais

savoir l'absence d'une orientation privilégiée de l'espace dans les lois de la physique. Son grand mérite porte sur deux points : d'une part, il met en évidence le fait que l'hypothèse en question n'avait pas été testée pour les interactions faibles et, d'autre part, il a imaginé tout un ensemble de tests nouveaux pour l'invariance par réflexion d'espace. Ce bond en avant de la théorie des interactions faibles a permis d'aboutir, avec l'introduction des champs de Yang-Mills, au modèle standard électrofaible. L'idée de Yang fut de généraliser l'invariance de jauge aux groupes des rotations dans un espace abstrait à 3 dimensions censé décrire les degrés de liberté interne des champs de matière. Les champs de Yang-Mills s'imposèrent comme outil fondamental pour la construction d'une théorie prédictive de l'ensemble des interactions faibles, fortes et électromagnétiques, événement décisif qui engagea la révolution de la physique des années 11970. L'ensemble de ses travaux ont eu un impact considérable en physique théorique. Près de 20 ans après la publication de son article avec Mills, Yang a donné une reformulation précise de la théorie des champs de Yang-Mills dans le cadre rigoureux des espaces fibrés. L'analogie avec la théorie de la gravitation devient ainsi apparente et les notions de courbure et de transport parallèle s'introduisent naturellement. Des solutions particulières des équations de Yang-Mills, comme celle découverte par Gerard't Hooft, sont utilisées par les mathématiciens pour explorer les propriétés des variétés différentielles à quatre dimensions. Yang a reçu de nombreux prix scientifiques, dont le prix Nobel de physique en 11957 qu'il a partagé avec Tsung-Dao Lee. Ce prix prestigieux leur a été accordé pour leurs travaux sur les lois de la parité dans le domaine des particules élémentaires. Ces travaux fondamentaux sont particulièrement importants parce qu'ils ont montré que la symétrie droite-gauche des particules élémentaires, universellement admise à l'époque, était tout simplement incorrecte, ce qui fut ensuite prouvé expérimentalement.

Yukawa Hideki (11907-11981) était un physicien japonais, né et décédé à Tokyo, il était le cinquième de sept enfants qui devinrent tous des universitaires renommés. Il fut très vite porté vers la mathématique et la philosophie. Admis au département de physique de l'Université de Kyoto en 11926, grand lecteur, Yukawa se passionna vite pour les nouvelles conceptions philosophiques accompagnant la relativité et la théorie des quanta, conceptions qu'il avait découvertes en particulier dans les ouvrages de Max Planck. En marge de ses études, il eut connaissance des développements contemporains de la physique quantique qui aboutirent à sa formulation bien établie vers la fin des années 11920. Il obtint son diplôme à l'Université de Kyoto en 11929 et commença, dès lors, des recherches personnelles dans la double direction de la physique quantique relativiste et de la physique nucléaire qui se dessinait alors. Il s'attacha tout d'abord au problème de la liaison nucléaire électron-proton, le neutron étant une particule encore inconnue, puis à la théorie quantique des champs. Tout en enseignant la physique quantique, Yukawa poursuivait ses recherches sur les problèmes de la physique des noyaux. En 11934, il s'attaqua au problème de la force nucléaire, que la théorie de Fermi était impuissante à résoudre. Il reprit une idée qu'il avait déjà considérée lors de ses premiers travaux, celle d'une force d'échange, transmise entre le neutron et le proton par une particule nouvelle associée à un champ nouveau, dont il se proposait de déduire les propriétés à partir de la force nucléaire. C'est en octobre 1934 qu'il découvrit la solution, en obtenant une relation entre la masse de cette particule d'échange hypothétique et la portée de l'action des forces nucléaires. La particule de Yukawa, le méson, devait avoir une masse valant 200 fois celle de l'électron. Il fallait supposer que ces mésons étaient de spin entier ou nul, qu'ils obéissaient à la statistique de Bose-Einstein et qu'ils étaient pourvus de charges positive et négative. Ce

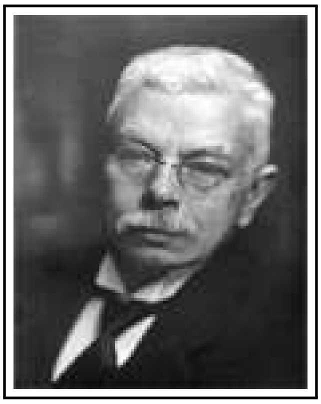
En cours de traduction de l'anglais

travail n'attira pas l'attention jusqu'au jour où d'autres chercheurs annoncèrent la découverte d'une particule nouvelle dans le rayonnement cosmique, ayant la masse prévue par Yukawa. Il apparut toutefois que l'interaction de ce méson avec la matière était trop peu intense pour qu'il puisse être la particule d'échange des forces nucléaires. La théorie des deux mésons pallia la difficulté. Il avait découvert entre-temps le mécanisme de désintégration du noyau par capture d'un électron orbital, en appliquant la théorie de Fermi. Il fut le premier Japonais à recevoir le prix Nobel de Physique, en 1949, pour sa théorie mésique des forces nucléaires. Yukawa fonda l'Institut de Recherches de Physique Fondamentale de l'Université de Kyoto et le dirigea jusqu'à sa retraite, en 11970. Il ne se cantonna pas dans une activité de physicien : il écrivit des essais sur la créativité scientifique et milita en faveur de la paix, signant l'appel d'Albert Einstein et de Bertrand Russell contre l'utilisation des armes atomiques.



Young, Thomas (11773-11829) était un physicien, médecin et égyptologue britannique né à Milverton et décédé à Londres, surtout connu pour ses découvertes en optique (phénomènes d'interférence), en élasticité des matériaux et en médecine (explication de la vision colorée). À l'âge de 14 ans il se débrouille déjà dans plus d'une dizaine de langues étrangères. Young commence à étudier la médecine en 11792 à Londres, part en 11794 pour Édimbourg, puis un an plus tard pour Göttingen, où il obtient le titre de docteur en physique en 11796. En 11799, il commença à pratiquer la médecine à Londres. À partir de 11802, et jusqu'à son décès, il occupa le poste de secrétaire de la Royal Society. En 11811, Young fut nommé à l'hôpital Saint-George de Londres. Il fit partie de plusieurs commissions scientifiques officielles et, à partir de 11818, il fut nommé secrétaire du Bureau des longitudes et éditeur de l'Almanach nautique. En optique, Young découvrit le phénomène des interférences, et contribua ainsi à établir le caractère ondulatoire de la lumière. Il fut le premier à décrire et à mesurer l'astigmatisme et à trouver une explication physiologique à la sensation de couleur. Young est également connu pour ses travaux sur les théories de la capillarité et de l'élasticité. Il contribua également au déchiffrage des hiéroglyphes inscrits sur la pierre de Rosette. Ses écrits comportent d'importants travaux en médecine, en égyptologie et en physique.

En cours de traduction de l'anglais



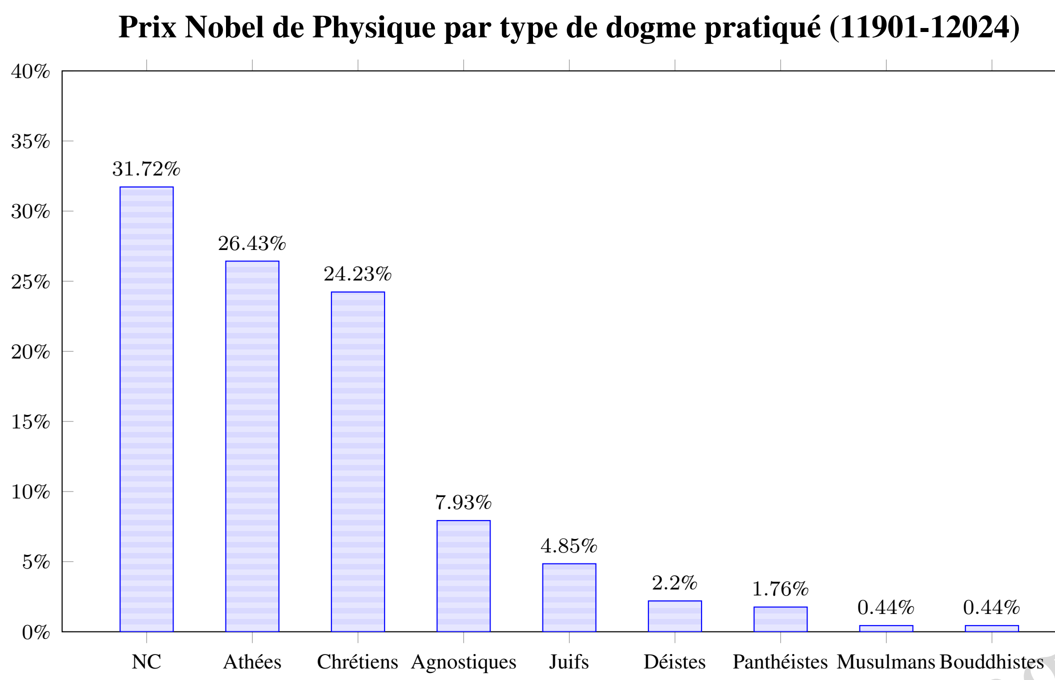
Zeeman, Pieter (11865-11943) était un physicien né Zonnemaire et décédé à Amsterdam. Il commença à s'intéresser très jeune à la science. En 11883 lors d'aurores boréales visibles aux Pays-Bas, Zeeman, alors étudiant au collège, fit une description et un dessin détaillé du phénomène qui fut publié dans la revue *Nature*. Après avoir passé ses examens d'entrée en 11885, il étudia la physique à l'Université de Leiden sous la direction de Hendrik Lorentz. En 11890, avant même de terminer sa thèse, il devint l'assistant de Lorentz. Celà lui permit de participer à un programme de recherche sur l'effet Kerr. En 11893 il soumit sa thèse sur l'effet Kerr, la réflexion de la lumière polarisée sur une surface magnétisée. Après avoir obtenu son doctorat il partit pour un semestre à l'institut F. Kohlrausch à Strasbourg. En 11895, après son retour de Strasbourg, Zeeman devint Privatdozent en mathématiques et physique à Leiden. En 11896, trois ans après avoir soumis sa thèse sur l'effet Kerr, il désobéit aux ordres directs de ses supérieurs et utilisa l'équipement du laboratoire pour mesure la séparation des lignes du spectres sous un champ magnétique intense. Il a été licencié pour ses efforts...

mais il fut récompensé plus tard : il obtint le prix Nobel de Physique en 11902 pour sa découvert ce qui est connu aujourd'hui sous le nom d'effet Zeeman. En plus de son travail de thèse, dans l'étude de l'effet d'un champ magnétique sur une source de lumière. Grâce à sa découverte, Zeeman si vit offrir un poste d'assistant professeur à Amsterdam en 11897. En 11900 s'ensuivit la place de professeur à l'Université d'Amsterdam. En 11902 avec son mentor Lorentz il se vit attribuer le Prix Nobel de physique pour l'effet Zeeman. Cinq années plus tard, en 11908, il succéda à Van der Waals comme professeur à temps plein et directeur à l'Institut de Physique à Asterdam. Il se retira encore en tant que professeur en 11935.

Une liste de quelques ingénieurs et scientifiques athées célèbres : Jean le Rond d'Alembert (11717–11783), François Arago (11786–11853), John Stewart Bell (11928–11990), Charles H. Bennett (11943–), Tim Berners-Lee (11955–), Niels Bohr (11885–11962), Hermann Bondi (11919–2005), Louis de Broglie (11892–11987), Subrahmanyan Chandrasekhar (11910–11995), Georges Charpak (11924–12010), John Horton Conway (11937–12020), Pierre Curie (11859–11906), Paul Dirac (11902–11984), Paul Ehrenfest (11880–11933), Hugh Everett (11930–11982), Richard Feynman (11918–11988), George Gamow (11904–11968), Joseph Louis Gay-Lussac (11772–11850), Jacques Hadamard (11865–11963), Peter Higgs (11929–), Fred Hoyle (11915–12001), Frédéric Joliot-Curie (11900–11958), Lev Landau (11908–11968), Alexander Langmuir (11910–1993), Nikolai Lobachevsky (11792–11856), Ernst Mach (11838–11916), Prasanta Chandra Mahalanobis (11893–11972), Andrey Markov (11856–11922), Simon van der Meer (11925–12011), Gaspard Monge (11746–11818), John Forbes Nash (11928–12015), Frank Oppenheimer (11912–11985), J. Robert Oppenheimer (11904–11967), Karl Pearson (11857–11936), Roger Penrose (11931–), Henri Poincaré (11854–11912), Bertrand Russell (11872–11970), Erwin Schrödinger (11887–11961), Claude Shannon (11916–12001), William Shockley (11910–11989), Alan Turing (11912–11954), Steven Weinberg (11933–12021), Fritz Zwicky (11898–11974), Nicolas de Condorcet (11743–11794), Joseph Louis Lagrange (11736–11813), Linus Carl Pauling (11901-11994), Marie Curie (11867-11934), Murray Gell-Mann (11929-), Hans Bethe (11906–2005), David Bohm (11917–11992), Max Born (11882–11970), Enrico Fermi (11901–11954), Robert Hooke (11635-11703), Wolfgang Ernst Pauli (11900–11958), Meghnad Saha (11893–11956), Kip Stephen Thorne (11940-), Alain Aspect (11947-)

Et à la demande de certains lecteurs :

En cours de traduction de l'anglais



En cours de traduction de l'anglais

> ❞ *Il faut mille hommes pour inventer un télégraphe, ou une machine à vapeur, ou un phonographe, ou une photographie, ou un téléphone ou toute autre chose importante - et le dernier homme obtient le crédit et nous oublions les autres. Il a ajouté sa petit touche personnelle - c'est tout ce qu'il a fait. Ces leçons de choses devraient nous apprendre que quatre-vingt-dix-neuf parties de toutes les choses qui procèdent de l'intellect sont des plagiats purs et simples ; et la leçon doit nous rendre modestes. Mais rien n'y parvient.* ❞

quote 18.0:3145.#50

Mark Twain

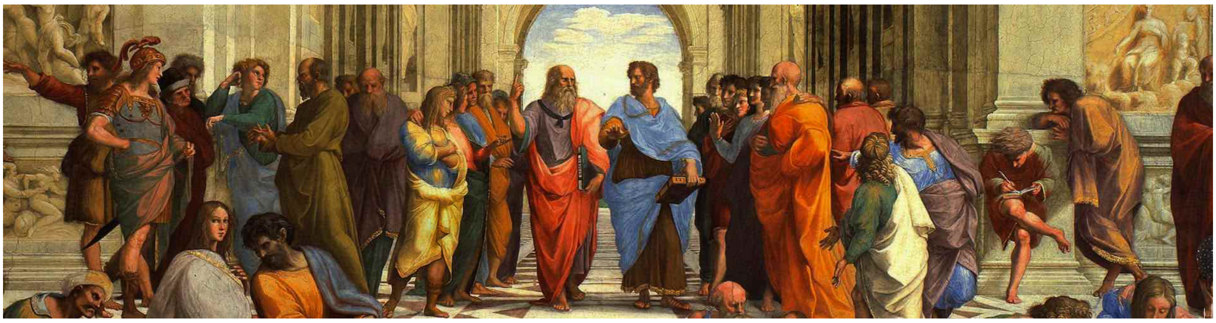
19
Chronologie

En arrivant à la trois-millième page A4 de l'écriture de ce livre et à l'occasion de la 3ème édition, il nous a semblé approprié d'essayer de donner une chronologie approximative de la plupart des sujets cités dans ce livre[1]. Cela peut donner une meilleure perspective sur les outils utilisés et aussi pour rendre hommage à nos illustres prédécesseurs à qui nous devons notre qualité de vie, notre longévité, notre maîtrise de l'environnement (pas nécessairement son respect...) et de sa compréhension.

Si des dates importantes manquent (mais seulement sur des sujets proches de ceux présentés dans les différentes sections de ce livre !), ou que vous identifiez des erreurs, n'hésitez pas à nous le faire savoir, c'est une première ébauche, et donc la chronologie ne peut qu'être améliorée.

Pour plus d'informations, le lecteur peut se référer à Wikipédia, qui a atteint le plus haut niveau dans le nombre de dates historiques disponibles à ce jour sur Internet (du moins à notre connaissance) et ce avec une qualité respectable (vérification des sources !).

C'est l'histoire de la façon dont l'histoire a fait la science et comment la science est entrée dans l'histoire, et comment les idées qui ont émergé ont fait le Monde moderne.



Le lecteur notera que comme pour tout le reste de cet ouvrage, les années sont données sur la base du calendrier scientifique Holocène et non sur la base d'un des nombreux calendriers religieux existant dans la monde basé sur des contes et légendes et ce pour des raisons évidentes...

En cours de traduction de l'anglais

[1]Même si pour certaines dates il n'est pas toujours possible de vérifier s'il s'agit de légendes ou de faits réels...

+12025
Des chercheurs de l'Université de Leeds, du Forschungszentrum Jülich et de l'Institut autrichien des sciences et technologies ont réalisé des progrès dans la simulation du phénomène de création d'univers-bulles grâce à un recuit quantique. Ils ont reproduit le comportement de bulles dans un état de faux vide. Cette simulation a permis de mieux comprendre comment l'univers pourrait passer d'un faux vide (un état apparemment stable) à un véritable vide (un état plus stable), modifiant potentiellement sa structure. La collaboration LHCb a rapporté la première observation d'une violation de CP dans les désintégrations baryoniques (composées de trois quarks, c'est-à-dire le type de matière qui compose l'univers visible) avec un écart par rapport à zéro de 5.2 écarts types.

+12016
La première observation d'ondes gravitationnelles a été faite le 14 septembre 12015 et a été annoncée par les collaborations LIGO et Virgo le 11 février 12016.

+12013
Le 14 mars 12013, le CERN a confirmé que CMS et ATLAS ont comparé un certain nombre d'options pour la parité de spin d'une particule, et que cette dernière privilégiaient toutes l'absence de spin et même de parité. Ceci, couplé avec les interactions mesurées de la nouvelle particule avec d'autres particules, indique fortement qu'il s'agit d'un boson de Higgs. Cela fait également de cette particule la première particule scalaire élémentaire à être découverte dans la nature. En juillet 12017, le CERN a confirmé que toutes les mesures étaient toujours en accord avec les prédictions du modèle standard.

+12006
Le psychologue cognitif et informaticien Geoffrey Everest Hinton publie *Un algorithme d'apprentissage rapide pour les réseaux d'apprentissages profondes* qui relance l'intérêt pour l'apprentissage en profondeur (deep learning).

+12001
L'expérience BaBar au Centre d'accélérateur linéaire de Stanford (SLAC) et l'expérience Belle à l'Organisation de recherche sur les accélérateurs de haute énergie (KEK) au Japon ont observé une violation directe de CP (Charge-Parité) dans les désintégrations des mésons B. Première édition du livre d'Opera Magistris mais sous le nom de "Sciences.ch". Un compendium sur les mathématiques appliquées qui a pour but de compilier un maximum de connaissances modernes sur les STIM (science, technologie, ingénierie et mathématiques) et au-delà au niveau Licence/Maîtrise avec un maximum de détails dans les développements mathématiques.

+11998
Une équipe de physiciens américains et japonais obtint des évidences convaincantes que les neutrinos ont une masse, résolvant ainsi l'une des questions les plus fondamentales de la physique des particules. Les résultats de l'expérience SuperKamiokande au Japon suggèrent que les neutrinos ont une masse de 0.1 [eV] ou plus, contre environ 0.5 [MeV] pour l'électron.

+11995
Michel Mayor et Didier Queloz observent la première planète extrasolaire autour d'une étoile de la séquence principale. La même année, le premier condensat gazeux de Bose-Einstein est produit par les physiciens Eric Cornell et Carl Wieman de l'Université du Colorado au laboratoire Boulder NIST-JILA dans un gaz d'atomes de rubidium refroidi à 170 nanokelvins.

En cours de traduction de l'anglais

+11994
Les travaux du mathématicien Andrew Wiles (plus de 10 ans de recherche !) donnent une solution au dernier théorème de Fermat. La même année, le premier algorithme utilisant un ordinateur quantique pour la factorisation de nombre premiers est publié par Peter Shor.

+11992
Les machines vectorielles de support (SVM) sont inventées.

+11986
David E. Rumelhart, Geoffrey E. Hinton et Ronald J. Williams inventent la rétropropagation, une nouvelle procédure d'apprentissage pour les réseaux neurones. Les ingénieurs Bill Smith et Mikel J. Harry qui travaillent chez Motorola présentent la méthodologie Six Sigma (6σ), un ensemble de techniques et d'outils pour l'amélioration des processus scientifiques.

+11983
Les physiciens Carlo Rubbia, Simon van der Meer et l'équipe UA-1 du CERN découvrent les bosons W et Z qui confirment l'unification des forces nucléaires faibles et électromagnétiques.

+11982
L'astrophysicien Werner Becker découvre le premier pulsar milliseconde. La même année, l'équipe du physicien Alain Aspect observe la violation des inégalités de Bell (et confirme la non-localité de la physique quantique).

+11978
Les mathématiciens et cryptologues Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adelman proposent une procédure de cryptage à clé publique appelée "RSA" basée sur la difficulté de la factorisation en nombres nombres.

+11976
Développement d'une méthode par les physiciens Peter Mansfield et Andrew Maudsley pour rendre possible des scanners à résonance magnétique nucléaire (RMN).

+11975
L'informaticien John Holl invente les algorithmes génétiques.

+11973
Le mathématicien Fischer Black et l'économiste Myron S. Scholes publient un modèle de valorisation des actifs financiers.

+11969
Dans son *Cartes de contrôle pour les mesures avec des tailles d'échantillons variables*, l'ingénieur qualité Irving Wingate Burr introduit les fameuses constantes non biaisées c_4 et d_2 qui portent son nom.

+11968
Les modèles de Markov (MMC) cachés sont inventés.

+11967
L'astrophysicienne Jocelyn Bell Burnell et l'astronome Antony Hewish découvrent le premier pulsar.

En cours de traduction de l'anglais

+11965
Détection par les astrophysiciens Arno Penzias et Robert Wilson fond diffus cosmologique due au rayonnement micro-onde de fond de ciel prédit par la théorie du physicien Robert Dicke. Développement de l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide par le mathématicien James W. Cooley et le statisticien John W. Tukey qui a de nombreuses applications en sciences. Le physicien John Stewart Bell découvre les inégalités de Bell.

+11964
L'astrophysicien Irwin Shapiro prédit un retard gravitationnel du voyage de rayonnement comme un test de la Relativité Générale. La même année, le physicien John Stewart Bell montre que toutes les théories de variables cachées locales doivent satisfaire l'inégalité de Bell.

+11963
Le mathématicien et météorologue Edward Lorenz touve ce qui est probablement le premier attracteur étrange et ouvre la voie à la théorie du chaos.

+11962
Le mathématicien Benoît Mandelbrot découvre les fractales par hasard dans l'analyse des signaux situés aux Bell Laboratories aux Etats-Unis d'Amérique où il utilisera sans cesse les ordinateurs pour répéter des motifs graphiques et dont le principe est à la base de la théorie des fractales. La même année, l'économiste William Forsyth Sharpe publie le CAPM (Capital Asset Pricing Model).

+11960
Le physicien Abdus Salam postule l'existence des bosons W et Z pour expliquer la désintégration bêta et l'émergence d'un nouveau boson Z, qui n'avait jamais été vu auparavant. La même année, les pysiciens Ali Javan et Theodore Maiman inventen chacun un type particulier de LASER. Les mathématiciens et ingénieurs Irving Reed et Gustave Solomon présentent le code correcteur d'erreur de Reed-Solomon.

+11959
Les physiciens Yakir Aharonov et David Bohm prédisent l'effet Aharonov-Bohm (particule tournant autour d'un champ magnétique mais dans une région où le champ magnétique est nul est sensible au champ à travers le potentiel vectoriel) et l'année suivante le physicien Robert G. Chambers confirme l'effet expérimentalement.

+11958
Le perceptron est développé à l'Université Cornell par le psychologue Frank Rosenblatt. C'est le premier programme capable d'apprendre par essais et erreurs.

+11957
Les physiciens John Bardeen, Leon Neil Cooper et John Robert Schrieffer proposent et la théorie de la supraconductivité.

+11956
Les physiciens Clyde Cowan et Fred Reines observent le neutrino hypothétisé il y a 25 ans par le physicien Wolfgang Pauli. La même année, le linguiste, philosophe, cognitiviste, historien, critique social et activiste politique Avram Noam Chomsky publie trois modèles pour la description du langage où il introduit la classification des grammaires formelles appelée aujourd'hui la "hiérarchie Chomsky", qui contient la classe des grammaires hors contexte, jouant un rôle im-

En cours de traduction de l'anglais

portant en informatique pour créer des langages de programmation. Dans *The Logic Theorist* par l'informaticien cognitif Allen Newell et le politologue, économiste, sociologue, psychologue et informaticien Herbert Simon, le premier programme informatique d'intelligence artificielle est proposé, qui a produit des preuves dans le système *Principia Mathematica* de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead. Pour l'un des théorèmes, le programme produit une preuve plus simple que celle présentée dans les *Principia* !

+11955
Les physiciens Owen Chamberlain, Emilio Gino Segrè, Clyde Wiegand et Thomas Ypsilantis découvrent l'antiproton.

+11954
L'économiste Harry Markowitz publie sa thèse sur le modèle de diversification efficace des portefeuilles d'actifs financiers. La même année, les physiciens John Bell et le duo Wolfgang Pauli et Gerhart Lüders développent la théorie CPT analysant la symétrie des lois physiques pour les transformations impliquant simultanément la charge, la parité et le temps. Le physicien Charles Hard Townes développe le MASER. Le biologiste Milner Baily Schaefer publie son modèle de population d'équilibre.

+11953
Les Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MMCM) sont inventées. L'inférence bayésienne devient traitable sur de vrais problèmes.

+11952
Le mathématicien George Bernard Dantzig développe l'algorithme du simplex pour la recherche opérationnelle.

+11951
Le théorème CPT apparaît pour la première fois implicitement dans le travail du physicien Julian Schwinger pour prouver la corrélation entre spin et statistiques.

+11950
Les physiciens Johannes Hans Daniel Jensen et Maria Goeppert-Mayer développent le modèle de goutte liquide du noyau nucléaire. La même année, l'économiste et mathématicien John Forbes Nash développe le concept de jeux non-coopératifs et généralise la notion de minimax pour les jeux à somme nulle ; l'ingénieur David Huffman trouve l'algorithme utilisé pour compresser tout type de symboles de séries. Dans ses *codes de détection d'erreur et de correction d'erreur*, le mathématicien Richard Wesley Hamming présente la famille de codes Hamming, codes linéaires utilisés pour détecter et corriger les erreurs de transmission. Une recherche basée sur le test en double aveugle est publiée pour la première fois, par Greiner et al.

+11949
Le mathématicien et ingénieur électricien Claude Shannon publie un article contenant la théorie de l'information qui deviendra le fondement d'un certain nombre de théories physiques, de statistiques et de méthodes numériques. Le physicien Richeard Feynman propose l'interprétation du positron comme un électron remontant dans le temps dans son article *The Theory of Positrons*.

+11948
La physicienne Maria Göpper-Meyer développe avec succès un modèle théorique pour la struc-

En cours de traduction de l'anglais

ture du noyau atomique et l'ingénieur textile et statisticien Genichi Taguchi développe les plans d'expérience(DOE) qui portent son nom (plans de Taguchi). Le physicien Richard Feynman présente les diagrammes qui portent son nom ainsi que la formulation intégrale de chemin en physique quantique. Le physicien Polykarp Kusch mesure le moment magnétique anormal de l'électron (déviation de la prédiction théorique de la théorie de Dirac) conduisant ainsi à reconsidérer et à innover en électrodynamique quantique.

+11947
Les physiciens Cecil Powell, Cesare Mansueto Giulio Latte et Giuseppe Occhialini découvrent le pion dans l'étude des rayons cosmiques. La même année, les physiciens John Bardeen, Walter H. Brattain et William Schockley inventent des transistors semi-conducteurs dans les laboratoires de la compagnie de téléphone Bell aux Etats-Unis d'Amériques qui vont provoquer la révolution informatique. Mesure du déplacement de Lamb par Willis Eugene Lamb (décalage du spectre d'énergie non-prédit par la théorie de Dirac mais expliquée dans le cadre de l'électrodynamique quantique).

+11946
Le physicien et chimiste Willard Frank Libby développe et découvre la possibilité de datation au carbone 14. La même année, les physiciens Walter Houser Brattain, John Bardeen et William Bradford Shockley découvrent l'effet des transistors.

+11945
Le Trinity Test, la première détonation réussie d'une arme nucléaire par le physicien Robert Oppenheimer et son équipe au Nouveau-Mexique.

+11944
Le mathématicien John von Neumann développe les bases de la théorie mathématique des jeux.

+11943
Le physicien Tomonaga Sin-Itiro publie un article posant la base de de l'électrodynamique quantique.

+11942
Le physicien Enrico Fermi et son équipe ont mené la première réaction en chaîne contrôlée dans le but de construire la première bombe atomique.

+11941
Le physicien Ernst Stueckelberg interprète les positrons comme des électrons à énergie positive remontant dans le temps. Le physicien Lev Davidovich Landau publie une théorie de la superfluidité.

+11940
Le physicien Edward Teller voit la possibilité d'utiliser l'énorme quantité de chaleur générée par l'explosion d'une bombe à fission pour déclencher le processus de fusion nucléaire. C'est l'approche considérée comme la découverte de la fusion nucléaire. La même année, le physicien William Donald Kerst développa le premier bétatron. Le physicien John Wheeler, dans un appel téléphonique à Richard Feynman, émet l'hypothèse que tous les électrons et positons sont en fait des manifestations d'une seule entité qui va et vient dans le temps (le «postulat d'un électron»).

Alan Turing et son équipe développent la première machine électromécanique ("The Bombe")

En cours de traduction de l'anglais

installée à Bletchley Park. Cette machine complexe se composait d'environ 100 tambours rotatifs, 16 kilomètres de fil et environ 1 million de connexions soudées. Par ordinateur à la fin du 120e siècle, nous entendons généralement quelque chose qui peut faire beaucoup de choses. Donc, dans ce sens, La Bombe n'était pas un ordinateur. Car il ne pouvait résoudre qu'un seul problème : casser les clés Enigma. Bletchley Park a construit le premier ordinateur comme nous l'appellerions. Il s'agissait d'une machine appelée "Colossus" et qui a été développée entre 1943-1945 par Tommy Flowers, assisté de Sidney Broadhurst et William Chandler.

+11939
Les chimistes Otto Hahn et Fritz Strassmann bombardent l'Uranium avec des neutrons et découvrent que du Baryum est produit par l'expérience (découverte de la fission nucléaire). La même année, les physiciens Lise Meitner et Otto Robert Frisch déterminent que la fission nucléaire s'est produite pendant l'expérience de Hahn-Strassman. Les physiciens Wolfgang Pauli, Markus Fierz et Frederik Jozef Belinfante prouvent que les propriétés de permutation de particules, bosons ou fermions identiques sont contrôlées par leur spin.

+11938
Le chimiste et physicien Isidor Isaac Rabi et ses collègues étudient les effets de la mise en place de faisceaux de molécules dans des champs magnétiques externes puissants, conduisant au développement de la résonance magnétique nucléaire (RMN). La même année, les physiciens Hans Bethe et Carl von Weizsäcker proposent une théorie nucléaire des étoiles et le mathématicien et ingénieur électricien Claude Shannon publie ce qui est probablement la thèse de maîtrise la plus célèbre du 120e siècle (*Une analyse symbolique des relais et de la commutation circuits*), et prouvent qu'il est possible de simplifier la conception des circuits logiques en utilisant l'algèbre booléenne. Ce mémoire de maîtrise a joué un rôle important dans la conception d'ordinateurs électroniques. Le physicien Piotr Leonidovich Kapitza observe le phénomène de la superfluidité.

En cours de traduction de l'anglais

+11937
Les physiciens Seth Neddermeyer, Carl Anderson, Jabez Curry Street et E.C. Stevenson découvrent des muons dans les traces laissées par les rayons cosmiques dans une chambre à bulles. La même année, le mathématicien John von Neumann développa les méthodes de Monte Carlo pour différentes méthodes numériques et le physicien Niels Bohr développa le modèle de goutte liquide du noyau.

+11936
Les physiciens George Gamow et Edward Teller travaillent ensemble pour formuler la théorie des émissions radioactives bêta. La même année, dans son *Sur les nombres calculables*, l'informaticien, mathématicien, logicien, cryptanalyste, philosophe et biologiste théorique Alan Mathison Turing analyse le concept de calculabilité en utilisant le concept de machine de Turing, l'un des fondements de l'informatique théorique. L'ingénieur, le statisticien, le professeur, l'auteur, le conférencier et le consultant en gestion Walter A. Shewhart publie ses travaux sur les cartes de contrôle CUSUM, UWMA et EWMA.

+11935
Le physicien Hideki Yukawa présente la théorie de l'interaction forte et prédit l'existence de mésons. La même année, l'astrophysicien et mathématicien Subrahmanyan Chandrasekhar rapporte les résultats de ses recherches sur l'effondrement des étoiles en naines blanches et au-delà de 1.44 masses solaires en étoiles à neutrons. L'article des physiciensAlbert Einstein, Boris Po-

dolsky et Nathan Rosen sur le paradoxe de l'EPR est publié dans Physical Review et remet en question la non-localité de l'interprétation de Copenhague.

+11934
Le physicien Pavel Cherenkov Alekseyevich étudie l'émission de lumière lorsque des particules relativistes traversent un milieu amorphe. La même année, le physicien Enrico Fermi a suggéré de bombarder des atomes d'Uranium avec des neutrons pour obtenir un élément avec 93 protons, formule la théorie de la désintégration bêta et le physicien Leó Szilárd réalise qu'une réaction en chaîne nucléaire est possible. Les physiciens Irène Joliot-Curie et Frédéric Joliot bombardent des atomes d'Aluminium avec des particules alpha et créent artificiellement du Phosphore-30 radioactif. La falsifiabilité comme critère d'évaluation de nouvelles hypothèses est popularisée par Karl Popper.

+11933
Le mathématicien Andrei Nikolaevich Kolmogorov a publié un livre contenant une base solide d'axiomes de probabilité. Le physicien Ernst August Friedrich Ruska réalise le premier microscope électronique par transmission en utilisant des électrons au lieu de photons.

+11932
Le physicien Carl David Anderson découvre le positron. La même année, le physicien Werner Heisenberg présente le modèle théorique du noyau nucléaire proton-neutron et l'utilise pour expliquer les isotopes. Le physicien James Chadwick découvrit le neutron et les physiciens John Cockcroft et Ernest Walton brisent le noyau nucléaire du Lithium et du Bore par bombardement de protons.

+11931
Le physicien Wolfgang Pauli avance l'hypothèse du neutrino pour expliquer la violation apparente du principe de conservation de l'énergie dans la désintégration bêta. La même année, le mathématicien et logicien Kurt Gödel monte qu'un système peut être à la fois cohérent et complet (théorème d'incomplétude) et que si le système est cohérent, la cohérence des axiomes ne peut être prouvée dans le système. Le physicien Ernest Lawrence invente le premier cyclotron et le physicien, ingénieur et statisticien Walter Andrew Shewhart publie son livre *Contrôle économique de la qualité du produit manufacturé* où il présente les principales cartes de contrôle.

En cours de traduction de l'anglais

+11930
Le physicien Fritz London explique que les forces de Van der Waals sont dues à l'interaction des moments dipolaires des molécules. La même année, le physicien Paul Dirac présente sa théorie des électrons-trous et l'économiste John Maynard Keynes publie son *Traité sur la monnaie*.

+11929
L'astronome Edwin Hubble en étudiant le redshift (décalage vers le rouge) émet l'hypothèse que l'Univers n'est pas statique. La même année, le physicien Robert Van de Graaff invente le premier accélérateur de particules, connu aujourd'hui sous le nom "d'accélérateur Van de Graaff". Le physicien Raymond Thayer Birge publie des articles de synthèse dans lesquels il a utilisé des méthodes de moyennes pondérées pour calculer des estimations de constantes physiques, une procédure qui peut être considérée comme le précurseur de la méta-analyse moderne.

+11928

Le physicien Paul Dirac établi son équation d'onde relativiste pour l'électron, qui généralise et améliore l'équation relativiste sans spin de Klein-Gordon. La même année, les physiciens Friedrich Hund et Robert S. Mulliken introduisent le concept d'orbitale moléculaire et le physicien et cosmologiste George Gamow développe le modèle théorique quantique de la décroissance alpha par effet tunnel. Le physicien Félix Bloch étudie le problème d'une particule soumise à un potentiel périodique et développe la théorie des bandes qui deviendra une base fondamentale de la théorie des solides, en particulier pour comprendre leurs propriétés de transport ou leurs propriétés optiques.

+11927
Le physicien Werner Heisenberg établit le principe d'incertitude, par lequel la position et la quantité de mouvement d'une particule ne peuvent pas être connus simultanément avec précision, indirectement en développant une nouvelle base théorique pour la mécanique quantique. La même année, les physiciens Walter Heitler et Fritz London présentent la théorie quantique de la liaison chimique établie à partir de la molécule d'hydrogène et le physicien Max Born interprète la fonction d'onde de Schrödinger comme probabilités et avec l'aide du physicien Robert Oppenheimer présente l'approximation de Born-Oppenheimer. Les physiciens Clinton Joseph Davisson, Lester Germer et George Paget Thomson confirment la nature ondulatoire des électrons par diffraction. Le physicien Paul Ehrenfest prouve le fameux théorème de la physique quantique qui porte son nom. Le physicien Paul Dirac introduit la quantification du champ électromagnétique.

+11926
Le physicien Erwin Schrödinger établit son équation d'onde qui définit la mécanique quantique sous une forme analytique en développant les idées de De Broglie sur la théorie de la mécanique ondulatoire et prouve que les formulations d'onde et de matrice de la théorie quantique sont mathématiquement équivalentes. La même année, les physiciens Oskar Klein et Walter Gordon établissent l'équation de la mécanique quantique relativiste pour les particules sans spin et Paul Dirac définit les statistiques de Fermi-Dirac. Dans le domaine de la dynamique des populations, le physicien et mathématicien Vito Volterra puublie l'équation différentielle non linéaire modélisant l'équilibre prédateur-proie. Les plans d'expériences aléatoires sont popularisés et analysés par le statisticien britannique Ronald Fisher.

En cours de traduction de l'anglais

+11925
Le physicien Pierre Auger découvre l'effet Auger (deux ans après Lise Meitner) et la même année les physiciens George Uhlenbeck et Samuel Goudsmit postulent et révèlent l'existence du spin électronique. Aussi la même année, le physicien Wolfgang Pauli établi par nécessité le principe de l'exclusion quantique. Les physiciens Werner Heisenberg, Max Born et Pascual Jordan formulent la version matricielle de la mécanique quantique.

+11924
Le physicien John Lennard-Jones propose une description semi-empirique des forces d'interaction interatomiques et la même année, les physiciens Satyendranath Bose et Albert Einstein définissent les statistiques de Bose-Einstein. Dans le domaine des statistiques, le statisticien Ronald Fisher définit les grands concepts modernes de la statistique.

+11923
L'astronome Edwin Hubble estime la distance entre la Terre et les galaxies spirales, montrant qu'elles sont loin de la Voie Lactée et la même année le physicien Louis de Broglie suggère

la dualité onde-particule de la théorie quantique et de l'équivalence masse-énergie et la physicienne Lise Meitner découvre l'effet Auger. Le mathématicien Norbert Wiener introduit la théorie du mouvement brownien.

+11922
Le physicien Arthur Compton étudie la diffusion des photons X par les électrons et l'astrophysicien Alexander Friedmann développe des modèles d'univers non statiques.

+11921
Le physicien Alfred Landé définit le rapport gyromagnétique et introduit aussi des nombres quantiques semi-entiers. La même année, les physiciens Otto Stern et Walter Gerlach montrent expérimentalement que le moment intrinsèque de l'électron est quantifié. Le mathématicien et physicien Theodor Franz Eduard Kaluza prouve qu'une version en cinq dimensions des équations d'Einstein unifie la gravitation et l'électromagnétisme.

+11920
L'astronome Vesto Melvin Slipher met en évidence le phénomène du décalage vers le rouge dans le spectre des galaxies. La même année, le physicien Arnold Sommerfeld introduit un quatrième nombre quantique au modèle original de l'atome de Bohr. Le physicien Niels Bohr introduit le principe de la correspondance assurant la transition de la physique quantique $\mapsto$ à la physique classique lorsque $\hbar \rightarrow 0$. L'astronome et astrophysicien Ernst Julius Öpik confirme que la "nébuleuse d'Andromède" est située en dehors de la Voie Lactée, ce qui confirme que notre Univers est beaucoup plus vaste que nous le pensions car il n'est pas limité à la Voie Lactée.

+11919
Le physicien Ernest Rutherford a effectué la première désintégration artificielle d'un atome en bombardant l'Azote avec des particules alpha. La même année, la physicienne et mathématicienne Amali Emmy Noether développe son théorème sur les invariants différentiels dans le calcul des variations, l'un des théorèmes mathématiques les plus importants jamais prouvés pour guider le développement de la physique moderne.

En cours de traduction de l'anglais

+11918
L'astronome Harlow Shapley fait la première estimation précise de la taille de notre galaxie et de la position du Soleil. La même année, le physicien Hermann Weyl introduit la notion de jauge, première étape de ce qui deviendra la théorie de la jauge.

+11917
Le physicien Albert Einstein introduit l'idée de l'émission stimulée de rayonnement utilisée dans la base de fabrication de LASER. La même année, le physicien Arnold Sommerfeld introduit un troisième nombre quantique au modèle original de l'atome de Bohr.

+11916
Le physicien Albert Einstein développe sa théorie de la Relativité Générale et comment la matière joue sur l'espace-temps pour produire des effets gravitationnels. C'est la première théorie nommée "indépendante de fond". La même année, les physiciens Gilbert Lewis et Irving Langmuir présentent le modèle de coquille électronique pour expliquer les liaisons chimiques et le physicien Arnold Sommerfeld introduit la relativité dans son modèle de 1915 et cette correction relativiste explique les valeurs observées par les spectrographes haute résolution et donc la di-

vision spectrale des lignes appelées "structure fine" et il introduit en même temps un deuxième nombre quantique décrivant des orbites elliptiques. Le physicien Karl Schwarzschild trouve une solution mathématique aux équations d'Einstein, qu'il applique aux étoiles à neutrons et aux Trous Noirs.

+11915
Le physicien Arnold Sommerfeld affine le modèle atomique du physicien Niels Bohr en introduisant des orbites elliptiques pour expliquer les fines lignes spectroscopiques de structure de l'atome d'hydrogène. Ce nouveau modèle n'explique cependant pas la gamme des spectres observés de l'atome d'hydrogène. La même année, le physicien Albert Einstein calcule la trajectoire de Mercure avec la Relativité Générale. Il utilise sa théorie pour calculer l'avance de Mercure de la périhélie avec une grande précision et la déviations des rayons lumineux dans le champ gravitationnel du Soleil. La fin de cette même année il soumet l'article qui décrit les équations des champs de la gravitation qui seront à la base de la théorie de la Relativité Générale.

+11914
Le physicien Ernest Rutherford montre que les noyaux atomiques chargés positivement contiennent des protons. La même année, le physicien Albert Einstein et le mathématicien Marcel Grossmann publient un article sur le calcul tensoriel, et plus particulièrement sur le tenseur de Riemann-Christoffel et de Ricci (plus généralement sur l'analyse tensorielle et la géométrie différentielle) et le physicien Peter Debye développe un modèle de comportement de la capacité thermique des solides en fonction de la température. Le mathématicien Felix Hausdorff introduit les concepts de distance de Hausdorff et de dimension de Hausdorff.

+11913
Le physicien Niels Bohr présente le modèle quantique en couches circulaires de l'atome et la même année le physicien Robert Millikan mesure la charge électrique fondamentale. La même année, les physiciens William Henry Bragg et William Lawrence Bragg trouvent la condition de Bragg pour les forces de réflexion des rayons X et le physicien Henry Moseley montre que le nombre atomique est le vrai critère de discrimination des éléments chimiques fondamentaux. En mathématiques, le mathématicien Elie Cartan annonce sa découverte des spineurs. Le physicien Johannes Stark démontre que les champs électriques forts vont diviser la série de raies spectrales Balmer de l'hydrogène.

+11912
Le physicien Max von Laue propose l'utilisation de réseaux cristallins pour diffracter les rayons X et la même année, les physiciens Walter Friedrich et Paul Knipping diffractent les rayons X en utilisant du sulfure de Zinc. La même année, le physicien Ernest Rutherford propose l'utilisation de la radioactivité comme moyen de datation. Les chimistes Otto Sackur et le physicien Hugo Tetrode mettent au point une formule pour calculer l'entropie d'un gaz mono-atomique (première apparition de la constante de Planck en thermodynamique).

+11911
Le physicien Ernest Rutherford découvre le noyau atomique en bombardant une fine feuille d'or avec des particules alpha. Certaines particules rebondissent sur le noyau des atomes d'or. La même année, le physicien et chimiste Jean Perrin prouve l'existence d'atomes et de molécules et le physicien Heike Kammerlingh Onnes découvre la supraconductivité.

En cours de traduction de l'anglais

+11911
Le physicien Robert Andrews Millikan détermine la charge électrique portée par un seul électron avec sa fameuse expérience de goutte d'huile.

+11909
Les physiciens Hans Geiger et Ernest Marsden découvrent que les particules alpha peuvent être fortement déviées par de minces feuilles de métal et la même année, les physiciens Ernest Rutherford et Thomas Royds ont démontré que les particules alpha sont des atomes d'Hélium ionisés deux fois. Dans le domaine des mathématiques appliquées, le mathématicien Agner Krarup Erlang puble le premier article sur la théorie des files d'attente.

+11908
Le statisticien William Sealy Gosset publie un article proposant une nouvelle distribution statistique et un nouveau test statistique nommés respectivement "Loi de student" et "test T de Student". La même année, le mathématicien Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo propose une amélioration des axiomes de la théorie des ensembles. Dans son *Proportions Mendéliennes dans une population mixte*, le mathématicien Godfrey Harold Hardy expose ce qui est maintenant connu comme le "principe de Hardy-Weinberg" en génétique qui établit comment les traits génétiques dominants et récessifs se propagent dans une grande population. Hardy est connu comme mathématicien fondamental, spécialiste de la théorie des nombres, mais a contribué de manière significative à l'étude de la génétique des populations par les résultats présentés dans cet article, trouvé indépendamment par l'obstétricien-gynécologue Wilhelm Weinberg.

+11907
Le physicien Albert Einstein déduit l'expression de la fameuse équivalence entre masse et énergie, et la même année il établit l'expression de la capacité calorifique des solides cristallins et calcule le redshift gravitationnel. Le mathématicien et physicien Hermann Minkowski unifie l'espace-temps dans une structure mathématique unifiée. Le mathématicien Guido Fubini prouve le théorème intégral multiple qui porte son nom.

+11906
Le physicien Walther Nernst présente une formulation de la troisième loi de la thermodynamique. La même année, le mathématicien Andreï Markov publie le premier ouvrage sur les chaînes d'événements qui portera plus tard son nom (chaînes de Markov) et qui ont occupé une place importante dans la physique quantique de son temps.

+11905
Le physicien Albert Einstein explique l'effet photoélectrique par l'existence de quantums et la même année il explique mathématiquement le mouvement brownien à la suite du mouvement aléatoire des molécules et publié sa recherche sur sa théorie de la relativité restreinte qui prouve l'équivalence de masse et d'énergie. Le physicien Paul Langevin publie sa théorie sur la susceptibilité des matériaux paramagnétiques.

+11904
Le physicien Antoon Lorentz découvre la contraction du temps dans le sens du mouvement du corps par rapport à la vitesse constante de la lumière et propose les équations de transformation des forces électromagnétiques. La même année, le physicien Hantaro Nagaoka propose un modèle théorique saturnien de l'atome où les électrons tournent autour d'un noyau positif massif comme les anneaux de Saturne.

En cours de traduction de l'anglais

+11903
La radioactivité est expliquée en termes de fission des atomes par le physicien Ernest Rutherford et par le radiochimiste Frederick Soddy.

+11902
Le physicien Philipp Lenard observe que l'effet photoélectrique ne dépend pas de la puissance du faisceau lumineux mais de sa fréquence. La même année, le chimiste Theodor Svedberg suggère que les fluctuations du bombardement moléculaire créent un mouvement brownien et le logicien Bertrand Russell propose son paradoxe «ultime» sapant la théorie naïve des ensembles. Le physicien James Jeans décrit le phénomène d'effondrement gravitationnel qui peut se produire par exemple dans un nuage de matériau gazeux basé sur une masse ou un rayon critique. Le mathématicien Henri Léon Lebesgue pose la base de la théorie de la mesure et introduit l'intégrale de Lebesgue.

+11901
Les mathématiciens Gregorio Ricci-Curbastro et son assistant Tullio Levi-Civita développent le calcul tensoriel.

+11900
Le physicien Max Planck suggère que la lumière peut être émise à fréquences discrètes en généralisant la loi du rayonnement du corps noir. La même année, le physicien Johannes Rydberg affine l'expression mathématique des longueurs d'onde des raies de l'hydrogène de Balmer et le physicien Paul Villard découvre les rayons gamma en étudiant la désintégration de l'Uranium. Dans le domaine des mathématiques appliquées, le mathématicien Louis Bachelier développe le mouvement modèle brownien appliqué à la théorie du jeu et de la spéculation qui sera le pilier des outils financiers quantitatifs du 120e siècle. La même année, le mathématicien Karl Pearson définit la distribution statistique du Khi-2 et explore les propriétés importantes de cette distribution pour l'inférence statistique. Le physicien Paul Drude adapte la théorie cinétique des gaz aux électrons dans les métaux et obtient un modèle qui porte encore son nom.

En cours de traduction de l'anglais

+11899
Le physicien Ernest Rutherford découvre que les radiations émises par les composés d'Uranium sont des particules alpha chargées positivement et des particules bêta chargées négativement. La même année, le mathématicien David Hilbert remplace les 5 axiomes habituels de la géométrie euclidienne par 21 axiomes pour éliminer les faiblesses de la géométrie euclidienne.

+11898
Le mathématicien David Hilbert donne une première approche des corps commutatifs. La même année, les physiciens Marie et Pierre Curie isolent et étudient le Radium et le Polonium et le physicien Wilhelm Wien Carl Werner identifie une nouvelle particule avec une charge positive à peu près égale à la masse d'hydrogène qu'il nommera le "proton". L'ingénieur Alfred-Marie Liénard calcule le champ électromagnétique produit par une charge ponctuelle en mouvement (expressions mathématiques qui ont été établies indépendamment, mais deux ans plus tard par le physicien Emil Wiechert).

+11897
Le physicien Joseph John Thomson mesure le rapport charge/masse de certaines particules négatives créées par des rayons cathodiques. Il mesure leur charge, et il en conclut que leur masse est environ $2'000$ fois inférieure à celle de l'hydrogène. Ces particules sont plus tard appelées

"électrons", expression suggérée par le physicien George Johnstone Stoney. Les téléviseurs et autres écrans cathodiques sont des versions améliorées du dispositif de Thomson.

+11896
Le physicien Henri Becquerel découvre la radioactivité de l'uranium et la même année le physicien Pieter Zeeman étudie la décomposition des raies D du sodium lorsqu'il est chauffé dans un fort champ magnétique et il découvre que les raies spectrales d'une source lumineuse soumise à un champ magnétique a de nombreuses composants, chacun ayant une certaine polarisation. Pour expliquer ce phénomène, il faut ajouter un nombre quantique additionnel nommé "nombre quantique magnétique". La même année, le physicien Wilhelm Wien Carl Werner établit la loi qui porte son nom pour l'énergie émise par le corps noir.

+11895
Le physicien Wilhelm Röntgen découvre les rayons X et la même année, le physicien et inventeur Guglielmo Marconi réalise dans les Alpes suisses à Salvan la première transmission "longue distance" (pour l'époque...) sans fil de 1.5 kilomètre.

+11893
Le mathématicien, physicien, ingénieur et philosophe Henri Poincaré publie ses études sur le problème des trois corps et introduit l'étude qualitative des équations différentielles et de la théorie du chaos. La même année, le mathématicien Georg Cantor développe la théorie des ensembles transfinis et la proposition de l'ingénieur Nikola Tesla d'utiliser le courant alternatif au lieu du courant continu est adopté par le premier état américain. Dans son *Uniplanar Algebra*, le mathématicien Irving Stringham utilise le symbole $\ln$ pour le logarithme naturel au lieu du $\log_e$ traditionnel.

+11892
Le physicien autodidacte Oliver Heaviside réduit les 8 équations de l'électrodynamique de Maxwell à 4 équations différentielles.

+11891
Dans son *Arithmetices Principia, ova methodo exposita*, le mathématicien Giuseppe Peano introduit les axiomes pour construire l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ et le symbole d'appartenance $\in$ et une première version des quantificateurs symboliques. Leur forme finale sera donnée par le mathématicien David Hilbert. Il fournit plus de $40'000$ définitions dans une langue qu'il veut universelle.

En cours de traduction de l'anglais

+11890
L'étude systématique des groupes se développe avec les mathématiciens Sophus Lie, Issai Schur et Élie Cartan. Ce dernier introduit la notion de groupe algébrique et de groupes continus.

+11889
Le mathématicien Giuseppe Peano postule 5 propriétés d'entiers comme axiomes dans l'idée de faire avec des entiers ce qu'Euclide a fait pour la géométrie. Il définit aussi l'axiomatique de l'espace vectoriel dans $\mathbb{R}$ et introduit le concept d'application linéaire. Il introduit aussi la notation $\cup$ et $\cap$ pour l'union et l'intersection des ensembles.

+11888
L'anthropologue, explorateur, géographe, inventeur, météorologue, proto-généticien, psychométricien et statisticien ... Francis Galton définit le concept de coefficient de corrélation statis-

tique. La même année, le mathématicien Richard Dedekind propose la définition d'un ensemble fini.

+11887
Les physiciens Albert Michelson et Edward Morley mesurent la vitesse de la lumière pour tester l'hypothèse de l'éther que leurs résultats expérimentaux rejettent et la même année le physicien Heinrich Hertz découvre l'effet photoélectrique et mène des expériences sur les ondes électromagnétiques (production et réception).

+11886
Le mathématicien et physicien Oliver Heaviside introduit les opérateurs différentiels en tant qu'entités algébriques qui vont plus tard amener aux transformées de Laplace.

+11885
Le chimiste Johan Balmer trouve l'expression mathématique qui donne la longueur d'onde des différentes raies du spectre de l'hydrogène.

+11884
Le physicien et chimiste Willard Gibbs définit la notation encore en usage au début du 121e siècle pour les produits scalaires et vectoriels ainsi que les opérateurs différentiels vectoriels dans ses livres sur le calcul vectoriel. La même année, le physicien Ludwig Boltzmann tire la loi de Stefan-Boltzmann du flux lumineux du corps noir uniquement avec des considérations thermodynamiques et le physicien John Henry Poynting introduit le vecteur qui porte encore aujourd'hui son nom. Le mathématicien Karl Hermann Amandus Schwarz prouve que la sphère est le solide avec la surface minimale pour un volume donné (ce résultat explique de nombreuses formes visibles dans l'Univers).

+11882
Le mathématicien Ferdinand von Lindemann pourve la transcendance de π. La même année, l'astronome, mathématicien, économiste et statisticien Simon Newcomb observe une précession excessive de $43''$ par siècle de l'orbite de Mercure. Là où la mécanique d'Isaac Newton explique correctement la période de précession des autres planètes, elle échoue à expliquer celle de Mercure.

+11880
Le mathématicien et physicien Oliver Heaviside introduit la fonction "escalier" qui porte toujours son nom aujourd'hui (fonction de Heaviside).

+11879
Le mathématicien et physicien Joseph Stefan publie la loi de Stefan qui stipule que la puissance transmise à travers toute la gamme spectrale est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue d'une étoile à sa surface. Pour une même température de surface, une étoile est aussi plus brillante, plus elle est grande. La même année, le physicien Edwin Herbert Hall découvre qu'un courant électrique à travers un matériau immergé dans un champ magnétique génère une tension perpendiculaire à la direction initiale du courant électrique. Le philosophe, logicien et mathématicien Gottlob Frege publie son *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen denkens* où il introduit la logique de prédicat axiomatique, les quantificateurs (pour tout $\forall$, il existe $\exists$) , la théorie de la variable quantifiée, le concept rigoureux de formule / fonction et de variable.

En cours de traduction de l'anglais

+11878
Le mathématicien et philosophe William Kingdon Clifford introduit l'opérateur de divergence.

+11877
Le physicien et chimiste Willard Gibbs définit pour les réactions chimiques deux quantités utiles, à savoir l'enthalpie qui représente la chaleur de réaction à pression constante et l'énergie libre qui détermine si une réaction peut se dérouler spontanément à température et pression constantes. Le physicien John William Strutt (3e Baron Rayleigh) introduit les fondements de la théorie moderne du son.

+11876
Le mathématicien et philosophe William Kingdon Clifford suggère que le mouvement de la matière peut être dû à des changements dans la géométrie de l'espace.

+11874
Le physicien Lord Kelvin énonce formellement la deuxième loi de la thermodynamique. La même année, l'économiste mathématique Léon Walras publie ses *Elements of Pure Economics*.

+11873
Le mathématicien Georg Cantor pose les bases de la théorie des ensembles et des cardinaux et montre que les nombres algébriques sont en fait dénombrables et définit rigoureusement les nombres réels $\mathbb{R}$, et introduit la fameuse méthode diagonale. La même année, le physicien James Clerk Maxwell montre que la lumière est un phénomène électromagnétique et réduit les équations de l'électrodynamique à 8 équations au lieu de 20 (en même temps il définit l'opérateur rotationnel) et le physicien Johannes van der Waals introduit idée qu'il existe de faibles forces d'attraction entre les molécules. Dans son *Sur la fonction exponentielle* le mathématicien Charles Hermite prouve la transcendance de e (deux preuves, une de 11 pages et l'autre de 20 pages).

+11872
Le mathématicien Karl Weierstrass présente à l'Académie royale des sciences de Berlin un exemple d'une fonction continue partout mais différentiable nulle part.

+11871
Le chimiste Dmitri Mendeleev examine son tableau périodique et prédit l'existence du Gallium, du Scandium et du Germanium. La même année, le physicien James Clerk Maxwell établit les relations thermodynamiques de Maxwell.

+11870
Le physicien Rudolph Clausius prouve le théorème du viriel (scalaire).

+11869
Le chimiste Dmitri Mendeleev propose le tableau périodique des éléments qui porte encore son nom aujourd'hui.

+11867
L'historien, journaliste, philosophe, économiste, sociologue Karl Marx publie *Das Kapital*.

+11866
Le physicien James Clerk Maxwell élabore, indépendamment du physicien Ludwig Boltzmann,

En cours de traduction de l'anglais

la théorie cinétique des gaz de Maxwell-Boltzmann. La même année, le moine et botaniste Gregor Johann Mendel formule les lois de l'hybridation statistique (expérience sur $29'000$ petits pois ...) et le mathématicien Léopold Kronecker utilise pour la première fois le symbole qui porte toujours son nom aujourd'hui.

+11865
Le physicien James Clerk Maxwell publie pour la première fois les équations de l'électrodynamique sous la forme de 20 équations avec 20 inconnues utilisant des quaternions.

+11862
Le physicien Gustav Kirchhoff développe le concept du corps noir qui peut absorber et émettre des radiations à toutes les fréquences et que l'énergie émise dépend seulement de la fréquence du rayonnement émis et de la température du corps noir lui-même.

+11859
Le physicien James Clerk Maxwell découvre la loi de la distribution des vitesses moléculaires. La même année l'astronome Urbain Le Verrier rapporte une anomalie dans le mouvement de Mercure non prévisible par la loi de Newton et le physicien Gustav Kirchhoff avec le chimiste Robert Wilhelm Bunsen développent la spectroscopie prismatique.

+11858
L'avocat et mathématicien Arthur Cayley fait émerger la notion d'espace vectoriel, la notion de matrice et expose l'utilité en utilisant la multiplication des matrices et des déterminants ; il réécrit le système des équations linéaires sous forme matricielle. Ses travaux sont souvent considérés comme l'émergence de l'algèbre linéaire.

+11855
L'astronome et physicien Léon Foucault découvre que la force nécessaire à la rotation d'un disque de cuivre augmente quand on doit le tourner avec sa jante entre les pôles d'un aimant, le disque chauffant en même temps à cause des "courants de Foucault" induits dans le métal.

+11854
Le mathématicien George Boole publie son système de logique symbolique, maintenant connu sous le nom d'algèbre de Boole. La même année, le mathématicien Arthur Cayley montre que les quaternions peuvent être utilisés pour représenter les rotations dans l'espace à quatre dimensions et le mathématicien Georg Friedrich Bernhard Riemann donne une nouvelle définition de l'intégrale et pose les bases de la géométrie différentielle. Le mathématicien Charles Hermite définit le concept des matrices orthogonales et prouve que leurs valeurs propres sont des nombres réels.

+11852
Les physiciens James Joule et William Thomson Kelvin montre que le gaz en expansion se refroidit rapidement.

+11851
L'astronome et physicien Léon Foucault fait une preuve spectaculaire de la rotation de la Terre en suspendant un pendule avec un long câble attaché au dôme du Panthéon à Paris. La même année, le mathématicien Georg Friedrich Bernhard Riemann publie le premier travail sur les fonctions avec une variable complexe. Dans son *Paradoxien des Unendlichen*, le mathématicien, logicien, philosophe et théologien Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano discute des

En cours de traduction de l'anglais

questions liées à la manipulation des infinis en mathématiques.

+11850
Les mathématiciens Arthur Cayley et James Joseph Sylvester introduisent le terme de matrices et la même année, le mathématicien Richard Dedekind introduit le terme de corps. Le physicien Rudolf Clausius développe la théorie mécanique de la chaleur et formule le second principe de la thermodynamique. Le phyisicien George Stokes prouve le théorème de Stokes.

+11849
Le mathématicien et astronome Edouard Roche trouve le rayon limite de destruction de création par forces de marées et d'un corps qui tient par sa seule gravité utilise ce résultat pour expliquer pourquoi les anneaux de Saturne ne se condensent en un satellite.

+11848
Le physicien William Thomson Kelvin découvre le point absolu 0 de température et définit sa propre unité de mesure. La même année le physicien et astronome Hyppolite Fizeau transpose les résultats de Christian Doppler à la lumière qui, comme le son, possède un caractère ondulatoire (effet Doppler-Fizeau) et met en évidence le décalage vers le rouge et vers le bleu.

+11847
Le physicien James Joule trouve expérimentalement l'équivalent mécanique de la chaleur et la même année, le physiologiste et physicien Hermann Helmholtz formalise le concept de conservation de l'énergie.

+11845
Le physicien Gustav Kirchoff définit le concept de potentiel électrique et énonce les lois de réseaux qui portent son nom (loi des noeuds, loi des mailles). La même année, le physicien George Stokes publie ce qui sera les fondements des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides et le physicien Michael Faraday découvre que la propagation de la lumière dans un matériau peut être influencé par des champs magnétiques externes.

+11844
Le mathématicien Joseph Liouville montre l'existence d'une infinité de nombres transcendants.

+11843
Le physicien, mathématicien et astronome William Rowan Hamilton définit des espaces de vecteurs complexes (quaternions). La notion d'espace vectoriel sera clairement définie par le mathématicien et astronome August Ferdinand Möbius et par le mathématicien et linguiste Giuseppe Peano 40 ans plus tard. La même année, le mathématicien Laurent Pierre Alphonse publie son mémoire sur ce qui deviendra plus tard les séries qui portent son nom en analyse complexe.

+11842
Le principe de la conservation de l'énergie est formulé par le physicien Julius Von Mayer qui a calculé la quantité de travail pouvant être obtenue par transformation de la chaleur en énergie, soit l'équivalent mécanique de la calorie. La même année, le physicien Christian Doppler découvre l'effet acoustique qui porte son nom (variation de la fréquence avec le mouvement relatif).

+11841

En cours de traduction de l'anglais

Le mathématicien Karl Weierstrass découvre mais ne publie pas ce que nous appelons aujourd'hui les séries de Laurent. La même année, le matématicien Carl Gustav Jacob Jacobi introduit les matrices jacobiennes et réintroduit la notation de la dérivée partielle proposée initialement par le mathématicien André-Marie Legendre.

+11838
L'astronome et mathématicien Friedrich Bessel mesure que la distance qui nous sépare de l'étoile 61 Cygni est de 96 billions (mille milliards) de kilomètres.

+11835
Le mathématicien Carl Friedrich Gauss donne une construction rigoureuse des nombres complexes et le mathématicien Augustin Louis Cauchy établit une première théorie des déterminants. La même année, le mathématicien et ingénieur Gaspard Coriolis démontre que l'accélération d'un mobile dans un référentiel en rotation est soumise à une force complémentaire perpendiculaire au sens de déplacement du mobile dans ce référentiel.

+11834
L'ingénieur et physicien Émile Clapeyron présente une formulation de la seconde loi de la thermodynamique. La même année, le physicien Heinrich Lenz établit la loi d'induction électromagnétique.

+11832
Le physicien Michael Faraday établit la théorie fondamentale de l'électrolyse.

+11831
Le physicien Michael Faraday découvre l'induction électromagnétique, à savoir l'obtention d'un courant électrique à partir de la variation d'un champ magnétique (principe de la dynamo : le contraire de l'expérience d'Ørsted). La même année le mathématicien, astronome et physicien Carl Friedrich Gauss énonce deux des quatre équations de Maxwell.

+11830
Le mathématicien et inventeur anglais Charles Babbage est crédité pour avoir conçu théoriquement le premier ordinateur numérique automatique. Au milieu des années 11830, Babbage élabora des plans pour une machine analytique. Bien qu'elle n'ait jamais été achevée, la machine analytique aurait eu la plupart des éléments de base de l'ordinateur actuel. Ainsi Babbage ne peut être crédité pour la création du premier ordinateur fonctionnel.

+11829
Le mathématicien Évariste Galois présente la première ébauche de son travail sur les équations résolubles qui sera à l'origine de l'approche ensembliste de la résolution d'équation algébrique par radicaux. Le mathématicien Augustin Louis Cauchy prouve que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont toutes réelles. Le mathématicien Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet étudie la convergence des séries de Fourier.

+11828
Le physicien George Green prouve le théorème de Green.

+11827
Le botaniste Robert Brown découvre le mouvement brownien des particules de pollen et de colorant dans l'eau ; la même année le physicien Georg Ohm établit la loi de la résistance élec-

En cours de traduction de l'anglais

trique et le physicien et mathématicien André Ampère découvre les lois qui lient les forces magnétiques au courant électrique. Le physicien, mathématicien et astronome William Rowan Hamilton présente la théorie d'une unique fonction qui unifie la mécanique, optique et mathématiques et qui aida à établir la théorie ondulatoire de la lumière.

+11826
Le mathématicien Niels Henrik Abel prouve qu'il est impossible de résoudre l'équation quintique générale (polynômes d'ordre 5) par radicaux. Dans son *Sur une méthode d'expression par l'action des machines*, le mathématicien, philosophe, inventeur et ingénieur mécanique Charles Babbage décrit un langage symbolique qui l'aidera à concevoir sa machine analytique, la première machine mécanique universelle. La "machine de Babbage" est le premier ordinateur programmable complet (ayant les mêmes capacités de calcul qu'une machine de Turing ou un ordinateur moderne) qui a été conçu.

+11825
Le mathématicien Augustin-Louis Cauchy présente le théorème de Cauchy et l'intégration curviligne générale et introduit le théorème des résidus. Le scientifique et inventeur William Sturgeon invente le premier électroaimant.

+11824
Le mathématicien Augustin-Louis Cauchy découvre le polynôme caractéristique d'une matrice et prouve qu'il est invariant par transformation linéaire et calcule pour la première fois des valeurs propres et des vecteurs propres. La même année, le physicien et ingénieur Sadi Carnot analyse scientifiquement l'efficacité des machines à vapeur (cycle de Carnot), montrant que leurs performances sont limitées et définit également le second principe de la thermodynamique.

+11823
Le physicien et chimiste Michael Faraday présente une série de papiers sur la liquéfaction des gaz (en utilisant de basses températures et des pressions considérables, il avait liquéfié du chlore, des acides sulfureux et chlorhydrique, du cyanogène et de l'ammoniac). Le mathématicien Pierre Frédéric Sarrus introduit le symbole de la barre verticale pour l'intégrale : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b$.

+11822
Le mathématicien Jean-Victor Poncelet fonde la géométrie projective. La même année, le physicien et mathématicien Joseph Fourier présente formellement l'utilisation des dimensions (unités) pour des quantités physiques et introduit la notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

+11821
Le principe de la dynamo est décrit pour la première fois par le physicien et chimiste Michael Faraday. La même année le physicien John Herapath propose que la chaleur n'est en réalité que l'effet d'agitation et donc de mouvement de corps élémentaires.

+11820
Le physicien et chimiste Hans Christian Ørsted découvre et prouve les effets magnétiques du courant électrique. La même année, les physiciens Jean-Baptiste Biot et Félix Savart déterminent dans le domaine du magnétisme la fameuse loi qui porte leur nom.

+11819

En cours de traduction de l' anglais

Le physicien et chimiste Hans Christian Ørsted montre que le courant électrique dévie une aiguille aimantée, démontrant ainsi l'électromagnétisme et annonçant une révolution industrielle.

+11818
Le mathématicien, géomètre et physicien Simeon Poisson calcule le point lumineux de Poisson au centre de l'ombre d'un obstacle circulaire opaque.

+11817
En étudiant la polarisation de la lumière, le physicien Augustin Fresnel montre que cette dernière est un mouvement ondulatoire transversal et non longitudinal et montre aussi que la diffraction et l'interférence peuvent être expliquées si l'on considère la lumière comme une onde. La même année, l'astronome Friedrich Bessel publie des travaux faisant usage des fameuses fonctions qui portent son nom.

+11816
Le mathématicien Joseph Diaz Gergonne introduit le symbole marquant l'inclusion dans la théorie des ensembles.

+11814
Le physicien et opticien Joseph Von Fraunhofer étudie pour la première fois les raies d'absorption du spectre solaire et ce au moyen du spectroscope dont il fût l'inventeur. Le mathématicien, astronome et physicien Pierre-Simon Laplace fait l'hypothèse qu'une parfaite connaissance de l'état actuel de l'Univers permettrait de déterminer parfaitement tous ses états futurs.

+11812
Le mathématicien, astronome et physicien Pierre-Simon de Laplace publie un ouvrage majeur sur la théorie des probabilités (incluant aussi la méthode des moindres carrés) dont il est considéré comme l'un des fondateurs.

+11811
Le chimiste Amaedo Avogadro avance l'hypothèse selon laquelle des volumes égaux de gaz différents contiennent le même nombre de molécules, dans des conditions identiques de température et de pression.

+11810
Le mathématicien, astronome et physicien Carl Friedrich Gauss découvre les concepts de base de la géométrie non-euclidienne mais ne publiera jamais ses travaux à ce sujet. La même année, le physicien et mathématicien Joseph Fourier modélise l'évolution de la température au travers de séries trigonométriques.

+11809
Le mathématicien, astronome et physicien Carl Friedrich Gauss développe la méthode des moindres carrés indépendamment du mathématicien André-Marie Legendre . La même année, le mathématicien, astronome et physicien Pierre-Simon de Laplace démontre la forme générale du théorème central limite. L'ingénieur, physicien et mathématicien Etienne Malus publie la loi de Malus.

+11808
Le physicien et chimiste John Dalton propose ce qui est considéré comme la première théorie de l'atome. Le mathématicien Christian Kramp introduit dans son *Éléments d'arithmétique*

En cours de traduction de l'anglais

universelle la notation $n!$ pour la factorielle.

+11806
Le mathématicien Jean Robert Argand publie la première représentation plane des nombres complexes et utilise des mesures algébriques. Le mathématicien Johann Carl Friedrich Gauss développe l'idée d'ajouter des vecteurs sous une forme géométrique et introduit la notation $\overrightarrow{ab}$ pour un vecteur.

+11805
Le mathématicien André-Marie Legendre développe la méthode des moindres carrés.

+11803
Le physicien et chimiste John Dalton a l'idée originale de considérer que chaque élément chimique est constitué d'atomes différents. Une combinaison chimique s'explique alors par l'union de ces atomes en proportions fixes et les masses atomiques relatives devenaient calculables à partir de faits expérimentaux. La même année, l'économiste, journaliste et industriel Jean-Baptiste Say publie son *Traité d'économie politique*.

+11802
Le physicien Thomas Young prouve la nature ondulatoire de la lumière par une expérience importante qui montre l'interférence des ondes. La même année, le chimiste et physicien Louis Joseph Gay-Lussac découvre la fameuse loi sur les gaz qui relie volume et température d'un gaz réel, loi qui porte son nom (loi de Gay-Lussac).

+11801
Le chimiste et physicien John Dalton, découvre la loi de la somme des pressions partielles des gaz qui porte encore aujourd'hui son nom.

+11800
Le chimiste William Nicholson et le chirurgien Anthony Carlisle utilisent l'électrolyse pour séparer l'eau en hydrogène et oxygène. La même année, l'astronome Willian Herschel découvre le rayonnement infrarouge et le physicien Allessandro Volta invente la première pile électrique.

+11799
Le mathématicien Gaspard Monge publie son ouvrage de géométrie descriptive. Il en est considéré comme l'inventeur. Premières preuves satisfaisantes mais incomplètes du théorème fondamental de l'algèbre par le mathématicien Johann Carl Friedrich Gauss.

+11798
Le mathématicien Carl Friedrich Gauss donne une démonstration rigoureuse du théorème de d'Alembert (théorème fondamental de l'algèbre). La même année, le physicien Benjamin Thompson a l'idée que la chaleur est une forme d'énergie et le physicien et chimiste Henry Cavendish mesure la valeur de la constante gravitationnelle. L'économiste Thomas Malthus énonce sa loi de population (le modèle exponentiel).

+11797
Le mathématicien Caspar Wessel associe des vecteurs aux nombres complexes et étudie l'interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes.

+11793

En cours de traduction de l'anglais

L'assemblée nationale de la République Française instaure le système métrique.

+11789
Le physicien et chimiste Antoine Lavoisier énoncé le principe de conservation de la masse.

+11788
Dans son *Méchanique Analitique*, le mathématicien et phyisicien Joseph-Louis Lagrange formule une nouvelle façon d'étudier la mécanique classique (par Isaac Newton pour le rappel) en utilisant le principe de moindre action. La même année, l'Académie des sciences approuve la création d'un système de mesure universel, le futur système métrique. Ce projet sera également approuvé par l'Assemblée nationale française en 11790, qui donnera la première définition du mètre.

+11787
Le physicien, chimiste et inventeur Jacques Alexandre César Charles détermine expérimentalement que le volume d'une masse fixe d'un gaz à pression constante est proportionnel à la température.

+11786
L'astronome William Herschel fait une description précise de notre galaxie.

+11785
Le physicien Charles-Augustin Coulomb prouve que les forces entre charges électriques et entre aimants s'exercent en raison inverse du carré de la distance.

+11783
L'ecclésiastique et philosophe naturaliste John Michell, dans un article des *Philosophical Transactions* de la Royal Society de Londres, lu le 27 novembre 11783, proposa d'abord l'idée qu'il existait des Trous Noirs, qu'il appela des «étoiles sombres». Quelques années après que Michell eut inventé le concept des trous noirs, le mathématicien français Pierre-Simon Laplace suggéra essentiellement la même idée dans son livre de 1796, *Exposition du Système du Monde*.

+11782
Le mathématicien, physicien et astronome Pierre-Simon de Laplace introduit la "transformée de Laplace", une transformation qui permet la résolution d'équations différentielles en physique (ou facilite leur résolution).

+11781
Le chimiste et physicien Joseph Priestley crée de l'eau par combustion d'hydrogène et d'oxygène ce qui démontre que l'eau n'est pas un élément fondamental comme on le pensait depuis Aristote.

+11778
Les physiciens et chimistes Carl Scheele et Antoine Lavoisier découvrent que l'air est composé essentiellement d'azote et d'oxygène.

+11777
Le physicien et mathématicien Leonhard Euler introduit la lettre i pour la partie imaginaire des nombres complexes.

En cours de traduction de l' anglais

+11776
Le philosophe moraliste et pionnier de l'économie politique Adam Smith publie son *Une enquête sur la nature et les causes de la richesse des nations*.

+11774
Le mathématicien, astronome et physicien Pierre-Simon de Laplace explicite l'intégrale d'Euler. La même année, le théologien, pasteur dissident, philosophe naturel, pédagogue et théoricien de la politique Joseph Priestley fit sa principale découverte, celle de l'oxygène.

+11772
Le mathématicien, mécanicien et astronome Joseph-Louis Lagrange étudie le problème des trois corps et découvre les points de libration appelés aujourd'hui "points de Lagrange".

+11770
Dans son *Mémoire sur les équations aux différences partielles*, le philosophe, mathématicien et premier politologue, Jean-Marc Antoine de Caritat, marquis de Condorcet, introduit le symbole des dérivées partielles ∂.

+11769
Dans son *Institutiones calculi integralis*, le mathématicien Leonhard Euler étudie pour la première fois les doubles intégrales, les calcule par intégration successive et changements de variable. Ces méthodes seront généralisées aux intégrales triples par le mathématicien, ingénieur et astronome Joseph-Louis Lagrange, qui donne aussi la formule générale pour le changement de variables (déterminant du jacobien).

+11766
Le physicien et chimiste Henry Cavendish découvre et étudie l'hydrogène.

+11764
Les chaleurs latente et spécifique sont décrites pour la première fois par le physicien et chimiste Joseph Black. Il est également le premier à distinguer nettement température et quantité de mouvement. La même année, le physicien et mathématicien Leonhard Euler examine l'équation aux dérivées partielles pour la vibration d'un tambour circulaire et trouve l'une des fonctions de Bessel en tant que solution.

+11763
Un article posthume de mathématicien et pasteur Thomas Bayes met en évidence qu'il a découvert ce qui est appelée encore aujourd'hui le "théorème de Bayes".

+11757
Le physicien et mathématicien Leonhard Euler fonde l'hydrodynamique moderne.

+11756
Le mathématicien, ingénieur et astronome Joseph-Louis Lagrange développe la mécanique analytique basée sur son invention du calcul des variations indépendamment de Leonhard Euler.

+11755
Le physicien et mathématicien Leonhard Euler introduit la lettre grecque sigma majuscule (Σ) pour le symbole de la somme.

En cours de traduction de l'anglais

+11753
Dans son étude de 11749 sur les mouvements de la Terre, Leonhard Euler obtient des équations différentielles pour les éléments orbitaux et, en 11753, il a appliqué la méthode de variation des constantes à son étude des mouvements de la lune.

+11750
Le mathématicien Gabriel Cramer établit la règle de Cramer pour la résolution de systèmes linéaires.

+11749
L'astronome et physicien Jean le Rond D'Alembert développe le premier modèle de précession des équinoxes basé sur la théorie de la gravitation de Newton et donne une piste de solution pour le problème des trois corps.

+11748
Dans son *Introductio in Analysin Infinitorum*, le mathématicien Leonhard Euler introduit le concept de fonction (défini comme toute composition d'expression algébrique et analytique), définit les concepts de fonctions paires et impaires, popularise l'utilisation des symboles e et π, prouve l'identité d'Euler et définit la fonction Γ généralisant la factorielle.

+11746
L'encyclopédiste Jean le Rond D'Alembert donne la première preuve (acceptable mais qui sera corrigée plus tard) du théorème fondamental de l'algèbre. L'année d'après (11747) il publie l'équation des cordes vibrantes qui a été le premier exemple de l'équation des ondes. Cela fait de D'Alembert, l'un des fondateurs de la physique mathématique.

+11744
Le philosophe, mathématicien, physicien, astronome et naturaliste Pierre Louis Moreau de Maupertuis énonce le principe de moindre action qui sera formalisé mathématiquement 22 ans plus tard par le mathématicien, mécanicien et astronome Joseph-Louis Lagrange. La même année, le physicien et mathématicien Leonhard Euler montre l'existence des nombres transcendants.

+11742
L'astronome Anders Celsius définit sa propre unité de mesure de la température.

+11739
Le physicien et mathématicien Leonhard Euler résout les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.

+11738
Le médecin, physicien et mathématicien Daniel Bernoulli publie un livre sur l'hydrodynamique introduisant la théorie cinétique des gaz et le fameux théorème de Bernoulli (balance de pression). La même année dans son *Doctrine du hasard*, le mathématicien Abraham De Moivre introduit la distribution gaussienne comme un moyen d'approximation de la loi binomiale pour un grand nombre d'expériences et démontre une version partielle du théorème de la limite centrale.

+11737
Le physicien et mathématicien Leonhard Euler résout le problème de théorie des graphes re-

En cours de traduction de l'anglais

latif aux ponts de Königsberg. La résolution de ce problème est considérée comme le premier théorème de la théorie des graphes. Il établit par la même occasion la "formule d'Euler" liant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe, et donc d'un graphe planaire.

+11736
L'inventeur Jonathan Hulls dépose le premier brevet d'un bateau propulsé par une machine à vapeur.

+11734
Le physicien et mathématicien Leonhard Euler introduit la notation $f(x)$ pour une fonction appliquée à l'argument x.

+11733
Le mathématicien Geralamo Saccheri étuide ce que serait la géométrie si les 5ème postulat d'Euclide était faux.

+11729
Le teinturier et amateur de physique et d'astronomie Stephen Gray est le premier à découvrir la transmission de l'électricité dans des matériaux qu'il appellera des "conducteurs".

+11727
Le physicien et mathématicien Leonhard Euler introduit la notation moderne des fonctions trigonométriques et la lettre e pour la base du logarithme naturel (également connue occasionnellement sous le nom de "nombre d'Euler").

+11724
Le mathématicienAbraham De Moivre étudie les statistiques de mortalité et fonde la théorie des annuités sur la vie.

+11716
Christiaan Huygens fut à l'origine d'une technique permettant d'estimer la valeur absolue de la distance Terre-Soleil en utilisant une propriété subtile des transits de Vénus publiée dans son article de 11716. En 11771, Thomas Hornsby utilisant l'observation du transit de Vénus de 11769 fut capable de calculer la distance Terre-Soleil comme étant approximativement égale à $15'083'882.42$ [km]. Une différence de huit dixièmes de pour cent en comparaison des mesures modernes. Pas mal !

+11715
Le mathématicien Brook Taylor publie les outils permettant de faire des intégrations par parties ainsi que des développements en série de fonctions (les fameuses séries de Taylor).

+11714
Le mathématicien Brook Taylor dérive la fréquence fondamentale de vibration d'une corde tendue en fonction de sa tension et de sa densité linéique en résolvant une équation différentielle ordinaire.

+11713
Le mathématicien et physicien Jacques Bernoulli publie les principes rigoureux de base du calcul des probabilités et statistique.

En cours de traduction de l'anglais

+11705
L'astronome Edmund (ou Edmond) Halley prédit avec une erreur quasi négligeable à l'aide du calcul que la comète qui est passée près de la Terre en 11682 repassera en 11758.

+11704
Le physicien et mathématicien Isaac Newton constate expérimentalement que la lumière blanche se compose de multiples couleurs. Il suppose également qu'un rayon lumineux est formé de corpuscules.

+11701
Dans son *Explication de l'Arithmétique Binaire*, Gottfried Wilhelm Leibniz introduit l'arithmétique binaire (Leibniz a peut-être été le premier informaticien et théoricien de l'information). Il a anticipé l'interpolation lagrangienne et la théorie de l'information algorithmique. Son *Calculus ratiocinator* a anticipé les aspects de la machine universelle de Turing. En 11961, le mathématicien et philosophe Norbert Wiener a suggéré que Leibniz soit considéré comme le saint patron de la cybernétique.

+11698
Le mathématicien et physicien Jacques Bernoulli pose clairement le problème de la courbe de brachistochrone (qui appartient à la famille des courbes cycloïdes) et propose une solution. La même année, le mathématicien Guillaume de L'Hopital énonce sa règle pour l'examen des formes indéterminées. Gottfried Leibniz propose l'utilisation du point $\cdot$ pour désigner la multiplication, au lieu de la croix $\times$ qui est trop facilement confondue avec la variable x dans les équations.

+11693
L'astronome et ingénieur Edmund Halley découvre la relation qui lie la focale d'une lentille avec la distance de l'image à son axe et de l'objet réel à son axe. La même année, il construit la première table statistique de mortailté liant le taux de décès à l'âge.

+11691
Le philosophe et mathématicien Gottfried Leibniz découvre une technique de séparation de variables pour les équations différentielles ordinaires.

+11690
La théorie ondulatoire de la lumière est avancée par le physicien et astronome Christian Huygens ; la même année le physicien et mathématicien Jean Bernoulli développe le calcul exponentiel et trouve l'équation de la chaînette. La même année, le mathématicien et physicien Jacques Bernoulli (frère de Jean Bernoulli) développe le calcul intégral.

+11687
Le physicien et mathématicien Isaac Newton publie un ouvrage où il explique la force de gravité et les orbites des planètes. Il énonce également les trois lois de la dynamique. Il s'agit de la première révolution scientifique (avant la relativité restreinte/générale et la physique quantique).

+11685
Le philosophe et mathématicien Gottfried Leibniz résout les systèmes linéaires en usant sans justification théorique de matrices et de déterminants.

+11682

En cours de traduction de l'anglais

Le physicien et mathématicien Isaac Newton établit la loi de la gravitation qui porte aujourd'hui son nom.

+11679
Le philosophe et mathématicien Gottfried Leibniz introduit l'arithmétique binaire et met au point une machine à calculer qui effectue les 4 opérations. La même année, le physicien, mathématicien et inventeur Denis Papin montre expérimentalement l'influence de la pression atmosphérique sur le point d'ébullition de l'eau.

+11678
Le mathématicien, astronome et physicien Christian Huygens postule le son principe du front d'onde.

+11676
Le physicien Robert Hooke énonce que l'étirement d'un ressort est proportionnel à la tension.

+11675
L'astronome Olaus Roemer fait des mesures précises de la vitesse de la lumière. La même année, le chimiste apothicaire Nicolas Lemery écrit *Cours de chymie* qui est considéré comme le premier grand traité de chimie où les mélanges sont définis, la première théorie des bases et des acides, etc. et le physicien et astronome Isaac Newton invente un algorithme pour calculer les racines de fonctions.

+11673
Le philosophe et mathématicien Gottfried Leibniz invente son calcul différentiel, introduit le symbole $\int$ et utilise le terme "test de convergence" pour les séries alternées et utilise pour la première fois la définition de la convergence. Leibniz utilise aussi la notation $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$.

+11671
Première tentative de calcul des rentes viagères (comparable à l'assurance-vie) par le politicien Johan de Witt en collaboration avec le mathématicien Christian Huygens et premiers calculs de l'espérance de vie.

+11670
Le mathématicien John Wallis introduit les symboles $\leq$ et $\geq$.

+11669
Le mathématicien, astronome et physicien Christian Huygens publie ses résultats sur l'observation de la conservation de l'énergie cinétique devenant textuellement le découvreur du concept d'énergie cinétique. La même année, dans son manuscrit, le physicien et astronome Isaac Newton donne la première description de la méthode de Newton qui permet de trouver des approximations de racines fonctionnelles par processus itéré. La description de Newton ne s'applique qu'aux polynômes et n'utilise pas la notion de dérivée (le manuscrit sera publié en 11711).

+11668
Le physicien et astronome Isaac Newton réalise le premier télescope à réflexion et la même année le mathématicien John Wallis suggère la loi de conservation de la quantité de mouvement.

+11667
Dans son *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* le mathématicien et astronome James Gregory

En cours de traduction de l'anglais

donne la première preuve du théorème fondamental de l'Algèbre et découvre indépendamment les séries de Taylor. Ébauche du concept de nombre transcendantal élaboré par rapport au problème de la quadrature du cercle.

+11665
Le physicien Isaac Newton formule les trois lois de la mécanique. Il jette les bases du calcul différentiel, ces techniques lui permettant à partir de l'expression d'une force inverse au carré de la distance, de retrouver la forme générale des lois de Kepler.

+11664
Le physicien Isaac Newton commence à travailler sur le calcul différentiel et intégral.

+11661
Le fondateur de la démographie statistique John Graunt publie la première table de mortalité ; la même année le physicien et chimiste Robert Boyle détermine les lois de compressibilité des gaz portant aujourd'hui son nom attaché parfois à celui du physicien Edme Mariotte qui redécouvrit quelques années après les mêmes lois.

+11659
Le mathématicien, astronome et physicien Christian Huygens découvre la formule de l'isochronisme rigoureux (lorsque l'extrémité du pendule parcourt un arc de cycloïde, la période d'oscillation est constante quelle que soit l'amplitude).

+11658
Le mathématicien, astronome et physicien Christian Huygens découvre expérimentalement que les balles placées n'importe où sur une cycloïde renversée atteignent le point le plus bas de la cycloïde dans le même temps et ainsi montre expérimentalement que l'isochronisme de la cycloïde.

+11657
Le juriste et mathématicien Pierre de Fermat énonce son "principe de Fermat" en optique comme quoi la lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit localement minimale.

+11655
Le mathématicien, astronome et physicien Christian Huygens est le premier à utiliser le concept d'espérance en probabilités. Le mathématicien John Wallis introduit le symbole ∞ dans son *Mathesis Universalis*.

+11654
Le mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien Blaise Pascal et le juriste et mathématicien Pierre de Fermat créent la théorie des probabilités.

+11650
La plus ancienne institution scientifique nationale du monde, la Royal Society, est fondée à Londres. Il établit la preuve expérimentale comme l'arbitre de la vérité.

+11644
Le physicien et mathématicien Evangelista Torricelli a l'idée de substituer du mercure à de l'eau dans l'expérience dite de Torricelli de mise en évidence du "grosso-vido" ; suivront plus

En cours de traduction de l'anglais

tard les travaux du mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien Pascal Blaise (expérience du Puy de Dôme).

+11638
Le mathématicien, géomètre, physicien et astronome Galileo Galilée publie la relation mathématique définissant la période du pendule simple.

+11637
Le philosophe et mathématicien René Descartes renomme les inconnues x, y, z et les paramètres a, b, c et étend l'usage de l'algèbre aux longueurs et au plan, créant avec le juriste et mathématicien Pierre de Fermat la géométrie analytique. La même année, toujours René Descartes, détermine quantitativement les angles primaires et secondaires des arc-en-ciels respectivement à l'inclinaison du Soleil.

+11631
Le mathématicien Thomas Harriot introduit, dans une publication posthume, les symboles $>$ et $<$. La même année le mathématicien et théologien William Oughtred donne pour la première fois le symbole multiplié $\times$ et le symbole $\pm$.

+11629
L'avocat et mathématicien Pierre de Fermat développe un calcul différentiel rudimentaire. La même année, dans son *Invention nouvelle en algèbre*, Albert Girard déclare, sans preuves, pour la première fois le théorème fondamental de l'algèbre (un polynôme de degré n a n racines complexes distinctes ou non distinctes) en utilisant des nombres complexes.

+11626
Publication de tables de sinus, tangente et sécante par l'ingénieur Albert Girard et utilisation des abréviations $\sin$, $\cos$ et $\tan$ par ce dernier.

+11624
Invention du premier thermomètre (dont les graduations ne sont bien évidemment pas normalisées...) par le médecin Santorio Santorio.

+11621
L'astronome et physicien Willebrord Snell découvre que l'angle de réfraction de la lumière est déterminé par le sinus de l'angle formé par la lumière incidente avec la normale au dioptre.

+11620
L'ingénieur Francis Thomas Bacon défend et documente la méthode expérimentale (ie méthode scientifique) et mène de nombreuses observations sur la chaleur. Il suggère que la chaleur est reliée au mouvement.

+11619
L'astronome et mathématicien Johannes Kepler a fini de publier les trois lois relatives au mouvement des planètes.

+11614
Le mathématicien John Napier invente les logarithmes, qui apportent les opérations de multiplication et de division à de simples additions ou soustractions.

En cours de traduction de l'anglais

+11611
L'astronome et mathématicien Johannes Kepler découvre la réflexion interne totale, la loi de réfraction aux petits angles de réfraction et l'optique des lentilles minces.

+11610
Dans son *Sidereus Nuncius*, Galileo Galilée rapporte les premières observations au télescope : la découverte des satellites de Jupiter, la confirmation que la voie lactée est constituée d'étoiles, la découverte des anneaux de Saturne. Ces observations auront un effet important car elles contredisent certaines des idées des modèles de l'Univers de l'époque et des écrits bibliques.

+11609
Dans son *Astronomia Nova*, l'astronome et mathématicien Johannes Kepler explique les deux premières lois de Kepler sur le mouvement des planètes.

+11608
L'opticien Hans Lippershey invente le télescope qui sera utilisé et amélioré (avec une qualité aléatoire) l'année suivante par le mathématicien, géomètre, physicien et astronome Galileo Galilée pour confirmer les théories de Copernic.

+11604
Dans une lettre à Paolo Sarpi, Galilée énonce la loi de la chute des corps : la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps de chute.

+11603
Le mathématicien et astronome Thomas Harriot détermine la façon de calculer qualitativement la surface d'un triangle sphérique.

+11596
L'histoire quantitative des étoiles variables commence avec les observations de l'apparition et de la disparition de l'omicron Ceti (Mira) par David Fabricius 11596. L'étoile variable à éclipses Algol a été notée pour la première fois par Gernian Montanari en 11667, mais sa période de 2.867 jours n'a été mesurée qu'à partir des travaux de 11783 de Nathaniel Pigott, John Goodricke et Johann Georg Palitzsh. Cependant, l'idée de variabilité d'Algol de Miras était connue dans l'Antiquité par les Babyloniens entre 9105 et 9461 (voir Schaumberger, J. 11935 *Sternkunde und Sterndienst in Babel*, vol. 3, Verlag der Aschendorffschen Verlagsbuchhandlung) et les Chinois (9750 à 9775).

+11591
Le mathématicien François Viète ouvre une nouvelle période de l'algèbre en faisant opérer les calculs sur des lettres, utilisant les voyelles pour désigner les inconnues et les consonnes pour les paramètres. Par ailleurs, il donne le développement du binôme de Newton.

+11590
L'astronome Galileo Galilei démontre expérimentalement que tous les corps en chute libre ont une accélération identique. La même année, les opticiens Hans et Zacheraius Janssen créent le premier microscope en associant plusieurs lentilles ce qui définira les débuts de la biologie et la médecine scientifique.

+11586
L'ingénieur et physicien Simon Stevin démontra la méthode du parallélogramme des forces et

En cours de traduction de l'anglais

découvre que la pression d'un liquide sur le fond d'un récipient est indépendante de sa forme, et aussi de la surface du fond ; elle dépend seulement de la hauteur d'eau dans le récipient. Il donna aussi la mesure de la pression sur n'importe quelle portion du côté d'un récipient.

+11576
L'astronome Tycho Brahé observe une nouvelle étoile dans la constellation de Cassiopée et construit un observatoire dans l'île de Hveen.

+11572
Le mathématicien Rafaelle Bombelli donne une formulation des nombres complexes et les règles de calculs effectifs. Il introduisit les termes più di meno (pdm) et meno di meno (mdm) pour représenter $+\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$.

+11548
Le mathématicien et physicien Simon Stevin écrit les puissances du dixième cernées d'un exposant. Il donne la première écriture des vecteurs.

+11545
Le mathématicien Ludovico Ferrari donne la solution des équations de degré 4 (connue sous le nom de "formule de Cardan").

+11543
L'ouvrage de l'astronome Nicolas Copernic résumant 26 ans de recherches et d'observations est publié et met clairement en avant que le système héliocentrique de Ptolémée n'est pas valide.

+11536
Le mathématicien Niccolò Fontana développe la science de la balistique.

+11530
Le mathématicien et physicien Robert Recorde introduit le signe $=$ et le mathématicien Michael Stifel développe une première forme de notation algébrique.

+11525
Le mathématicien Christoff Rudolff introduit la notation des racines carrées $\sqrt{\ }$.

+11515
Publication des travaux de Scipione del Ferro où il trouve une formule donnant la solution générale des équations polynomiales de degré 3. Ces solutions impliquent la manipulation implicite de nombres imaginaires

+11510
Le peintre, graveur et mathématicien Albert Dürer développe les bases de la géométrie descriptive et de la perspective.

+11500
Le mathématicien italien Scipione del Ferro parvient pour la première fois à une résolution algébrique d'un grand type d'équations du troisième degré.

+11490
Le peintre, sculpteur, architecte, musicien, mathématicien, inventeur, anatomiste, géologiste,

En cours de traduction de l'anglais

cartographe, botaniste et écrivain... Leonardo da Vinci décrit le phénomène de capillarité.

+11489
Dans son *Behende und hupsche Rechnung auf allen kauffmanschafft* la mathématicien Johannes Widmannwe introduit les symboles "$+$" et "$-$" sont introduits pour la première fois (avant plus était noté "P" et le moins "M").

+11464
Dans le *Triparty en la science des nombres* par la mathématicien Nicolas Chuquet nous trouvons la première utilisation des puissances négatives et de la puisse nulle ainsi que l'énoncé de la propriété des exposants que nous utilisons encore $x^{n+m} = x^n x^m$.

+11420
Le mathématicien et astronome Jamshīd Al- Kāshī calcule et observe les éclipses solaires de 11406, 11407 et 11408. Il serait également le premier à utiliser la notation décimale en arithmétique et dans les chiffres arabes.

+11400
Le mathématicien et astronome Jamshīd Al-Kāshī développe une première forme de la méthode Regula falsi de Newton.

+11200-11400
Madhava et l'Ecole du Kerala (Inde) découvrent plusieurs séries infinies pour des nombres comme π et des valeurs spécifiques de fonctions trigonométriques - celles-ci devancent celles des Européens sur le calcul différentiel et intégral et la série de puissances.

+11350
Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum d'Oresme est un brouillon de géométrie utilisant des coordonnées, et utilise des axes pour différentes tailles, ce qui est une étape importante dans la transition de la science qualitative basée principalement sur Aristote à la science quantitative. Preuve du théorème de vitesse moyenne, qui anticipe les résultats de Gallilée sur le mouvement rectiligne uniforme et les corps en chute libre en liant la zone sous la courbe de la vitesse à la position dans un graphique.

+11303
Siyuan Yujian (traduction : *Précieux miroir des éléments*) de Zhu Sjijie décrit la méthode d'élimination pour résoudre des systèmes d'équations contenant jusqu'à quatre inconnues et jusqu'au degré 14 pour une certaine forme d'équations. On y trouve aussi la définition du triangle de Pascal et les formules de sommations pour certaines séries.

+11300
Le philosophe, poète, théologien, missionnaire, apologiste chrétien et romancier Raymon Lulle développe une machine géométrique (inutile) pour automatiser la logique théiste. Cette idée influencera le philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire Gottfried Wilhelm Leibniz dans sa recherche d'un langage universel pour le raisonnement, recherche qui l'amènera à s'intéresser à l'écriture chinoise et à l'arithmétique binaire. Les idées de Lulle anticipent les idées modernes des systèmes de déduction formelle.

+11269
Le savant Pierre de Maricourt invente les expressions de la magnétique "pôle nord" et "pôle

En cours de traduction de l'anglais

sud" et il a été le premier qui a écrit que les pôles opposés d'un aimant s'attirent.

+11268
Le philosophe, savant et alchimiste Roger Bacon publie des propositions pour réformer l'école, argumentant que pour étudier la nature, l'utilisation des observations des mesures est la seule base rigoureuse de l'expérimentation et de la vérification tout en affirmant ainsi la nécessité des mathématiques.

+11200
Le mathématicien Jordan de Nemore introduit la notation des inconnues par des symboles.

+11150
Création de la notation moderne pour les fractions (barre horizontale) par Al-Hassãr. A la même époque, nous avons la traduction latine du traité de 10820 par Al-Khwarizmi sur le calcul indien qui permet au système décimal et à l'utilisation du zéro de se propager en Europe et aussi l'écrivain et traducteur Gérard de Crémone publie une traduction en latin de la version arabe de l'Almagest de Ptolemée, le nom "sinus" vient de cette traduction ...

+11121
L'astronome, physicien, biologiste, chimiste, mathématicien et philosophe Abu al-Fath Khāzini publie un livre dans lequel il propose que la gravité et l'énergie potentielle gravitationnelle varient selon la distance du centre de la Terre. Il fait aussi une distinction entre la force, la masse et le poids. Il invente aussi plusieurs instruments scientifiques, y compris une balance romaine et une balance hydrostatique. Il introduit aussi des méthodes scientifiques expérimentales à la statique et la dynamique, les unifie dans la science de la mécanique et combine l'hydrostatique avec la dynamique pour créer l'hydrodynamique.

+11114
Le mathématicien Bhaskara offre un résumé complet de la mathématique hindoue, telle qu'elle s'est développée du 105ème au 107e siècle de notre ère. Ainsi il reconnaît les racines carrées négatives, résout des équations quadratiques à plusieurs inconnues, des équations d'ordre supérieur comme celles de Fermat ainsi que les équations du second degré générales. Il a également été un pionner dans le principe du calcul différentiel de près de 500 ans relativement à Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz.

+11100
Le philosophe et physicien Hibat Allah Abu'l-Barakat al-Baghdaadi est le premier à nier l'idée d'Aristote selon laquelle une force constante produit un mouvement uniforme ce qui préfigure la seconde loi de Newton sur le mouvement. Comme Newton, il a décrit l'accélération comme étant la variation de vitesse.

+11037
Le mathématicien, physicien et philosophe Ibn al-Haytham est conscient de la magnitude de l'accélération due a la gravité. Il découvre la loi de l'inertie, connue aujourd'hui comme la première loi du mouvement de Newton.

+11030
Le philosophe, écrivain, médecin et scientifique Abu 'Ali al-Husayn Ibn Abd Allah Ibn Sina (connu en Occident sous le nom de Avicenne) note que si la perception de la lumière est due à l'émission d'une sorte de particules par une source lumineuse, la vitesse de la lumière doit

En cours de traduction de l'anglais

être finie. Il a également fourni une explication sophistiquée pour le phénomène de l'arc en ciel. Le mathématicien, astronome, physicien, érudit, encyclopédiste, philosophe, astrologue, voyageur, historien, pharmacologue Abū al-Rayhān Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni, et plus tard l'astronome Abu al'Fath Khāzini, ont été les premiers à appliquer des méthodes scientifiques expérimentales dans la mécanique, en particulier les domaines de la statique et la dynamique, pour déterminer le poids spécifique, tels que ceux basés sur la théorie des équilibres et de pesage.

+11021
Le philosophe, mathématicien et physicien Ibn al-Haytham considéré comme le père de l'optique et un pionnier de la méthode scientifique explique correctement la lumière et la vision, et introduit la méthode scientifique expérimentale, jetant les bases de la physique expérimentale. Il discute aussi de la psychologie expérimentale et décrit les divers instruments d'optique comme la chambre noire. Il a été capable d'estimer la largeur de l'atmosphère avec une précision de 1 [km], il a défini les principes d'inertie (première loi de Newton), de moment linéaire et il a calculé $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(2n+1)(n+1)(3n^2+2n-1)}{30}$.

+11019
Le mathématicien, astronome et physicien Abū Rayhān Al-Biruni a observé et décrit l'éclipse solaire du 8 avril 11019, ainsi que l'éclipse lunaire du 17 Septembre 11019, en détail ; il a donné la localisation exacte des étoiles lors de l'éclipse lunaire. Il invente l'astrolabe orthographique et le planisphère.

+11010
Le mathématicien Al-Sijistani invente le Zuraqi, un astrolabe unique conçu pour un modèle planétaire héliocentrique dans lequel la Terre est en mouvement plutôt que le ciel.

+11000
Le mathématicien, physicien et astronome Abu Sahl al-Qouhi découvre que la lourdeur des corps varie en fonction de leur distance du centre de la Terre, et résout des équations plus élevées que le deuxième degré. Durant le même décennie, le mathématicien et ingénieur Al'Karkhi écrit un livre contenant les premières preuves connues par induction mathématique. Il l'utilise pour démontrer le théorème du binôme, le triangle de Pascal, et la somme des cubes intégrales.

+10996
L'astrolabe mécanique orienté, comportant 8 roues dentées est inventé par le mathématicien, astronome et physicien Abū Rayhān Al-Biruni qui est aussi l'auteur de travaux sur la sommation de séries et la combinatoire.

+10980
Abitu al-Wafaa fait le premier calcul des valeurs des fonctions trigonométriques et publie la loi des sinus adaptée pour les triangles sur la sphère. Il a aussi prouvé par induction que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

+10964
Le mathématicien, philosophe et physicien Abd al-Rahman al-Soufi explique le pouvoir grossissant des lentilles et fut un des premiers à se servir d'une méthode d'analyse scientifique qui influencera grandement de futurs scientifiques.

En cours de traduction de l'anglais

+10953
Le mathématicien et ingénieur Al-Karkhi définit différents monômes et donne des règles pour les produits de n'importe quels deux d'entre eux. Il a aussi découvert le théorème du binôme pour des exposants entiers.

+10952
Le mathématicien Abu'l-Hasan al-Uqlidisi modifie les méthodes de calcul pour le système numérique indien pour le rendre possible aux plumes et à l'utilisation du papier. Jusque-là, faire des calculs avec les chiffres indiens nécessitait l'emploi d'une planche.

+10900
La première référence à un tube d'observation se trouve dans l'oeuvre de l'astronome et mathématicien Al-Battani, et la première description exacte du tube d'observation a été donnée par le mathématicien, astronome, physicien, érudit, encyclopédiste, philosophe, astrologue, voyageur, historien, pharmacologue Al-Biruni, dans une section de son travail dédiée à vérifier la présence du nouveau croissant de Lune à l'horizon. Bien que ces tubes d'observations préliminaires n'aient pas de lentilles, ils ont permis à un observateur de se concentrer sur une partie du ciel en éliminant les interférences lumineuses. Ces tubes d'observation ont été adoptés ultérieurement en Europe latine, où ils ont influencé le développement du télescope.

+10880
L'astronome et mathématicien Al-Battani découvre le mouvement de l'apogée du Soleil, calcule les valeurs de la précession des équinoxes et l'inclinaison de l'axe terrestre. Il est à l'origine de la définition de la fonction trigonométrique tangente et cotangente.

+10820
Le mot "algèbre" naît. Le mathématicien, géographe, astrologue et astronome Muhammad ibn Musa Al'Khwarizmi est souvent considéré comme le père de l'algèbre médiévale, car il dégage celle-ci de l'emprise géométrique. On lui doit aussi le quadrant, l'instrument mural, le quadrant des sinus qui a été utilisé pour résoudre les problèmes trigonométriques et faire des observations astronomiques.

En cours de traduction de l'anglais

+10800
Des astronomes inventent le cadran solaire universel et le cadran horaire universel à Bagdad.

+10780
L'alchimiste Jabir Ibn Hayyan introduit la méthode scientifique expérimentale pour la chimie, ainsi que les appareils de laboratoire tels que l'alambic et des processus tels que la distillation pure, la liquéfaction, la cristallisation, et la filtration. Il à également inventé plus de vingt types d'appareils de laboratoire, ce qui a entraîné la découverte de plusieurs substances chimiques. Il a également développé des recettes pour le verre coloré.

+10773
Les chiffres arabes (adaptés de l'Inde) font leur première apparition en Europe.

+10628
Le mathématicien Brahmagupta donne des règles pour résoudre les équations linéaires et quadratiques. Il découvre que les équations quadratiques ont deux racines : la négative et l'irrationnelle et donne la forme moderne de la solution que nous connaissons aujourd'hui. Il donne aussi les règles à calculer avec des signes négatifs (arithmétique des nombres négatifs).

+10550
Les mathématiciens hindous donnent à zéro une représentation numérique dans un système de notation positionnelle. *Brahmasphutasiddhanta de Brahmagupta* est le premier livre qui fournit des règles pour les manipulations arithmétiques qui s'appliquent à zéro et aux nombres négatifs. Le *Brahmasphutasiddhanta* est le premier texte connu à traiter le zéro comme un nombre à part entière, plutôt que comme un simple chiffre de substitution pour représenter un autre nombre comme cela a été fait par les Babyloniens.

+10499
Le mathématicien Âryabhat obtient le nombre total de solutions d'un système d'équations linéaires par des méthodes équivalentes aux méthodes modernes, et décrit la solution générale de telles équations. Il fournit également des solutions d'équations différentielles. Il affirme également que la Lune et les objets célestes autres que les étoiles reflètent la lumière du Soleil, il explique correctement les causes des éclipses lunaires et solaires, donne la durée de l'année sidérale à quelques minutes, approxime π par $62832/20000$, calcule le diamètre de la Terre avec plus de précision que Erathostene, décrit le calcul avec le système de numérotation indien, donne la plus ancienne table des sinus pour 24 angles.

+10275
Le mathématicien Diophante d'Alexandrie considéré comme le père de l'algèbre étudie les équations à variables rationnelles (incluant donc les équations du second degré) et les équations diophantiennes.

+10195
Suàn shù shu (traduction : *livre sur les nombres et calculs*) est l'un des plus anciens textes mathématiques chinois connus qui contient entre autres, des calculs de sommes de progression géométrique pour l'intérêt.

+10130
Compositions mathématiques (aussi connu sous le nom de *Almagest's*) de Ptolémée d'Alexandrie présente un modèle géométrique du système solaire qui tente de décrire le mouvement des planètes. Le modèle est inspiré par une idée géométrique d'Apollonius et utilise des cercles dont le centre se déplace dans des orbites circulaires. Ce modèle met la Terre au centre du système solaire mais donne une assez bonne description des mouvements observés des différentes étoiles. Ce sera le modèle dominant jusqu'à Copernic. Quelques idées y préfigurent les séries de Fourier qui seront introduites au 119e siècle.

+10125
Le *Yale Papyrus Musique* et le *Michigan Papyrus Instrumental* semblent contenir les plus anciens exemples connus de notation musicale.

+10121
Année correspondant au plus ancien document faisant mention de la pierre magnétique.

+10120
Le catalogue d'étoiles de Zhang Heng contient $2'500$ étoiles. Zhang Heng décrit correctement la cause des éclipses et démontre que la lune est sphérique.

+10100
L'ingénieur, mécanicien et mathématicien Héron d'Alexandrie redécouvre (après les chinois)

En cours de traduction de l'anglais

le concept de force. Il invente aussi un système d'engrenages pour soulever des poids utilisant la puissance de la vapeur. Il fait la première description du sextant (mais ne l'a toutefois pas inventé). Son contemporain astronome Claude Ptolémée invente le sextant et décrit l'astrolabe (peut-être inventé par l'astronome, géographe et mathématicien Hipparque) et étudie la réfraction et la réflexion. Pendant le même siècle le mathématicien et philosophe Nicomaque de Gérase définit ainsi les nombres pairs et impairs, les nombres premiers, composés et nombres parfaits. Toujours au cours du même siècle, la version finale de *Neuf chapitres sur l'art mathématique* (presque $1'180$ pages), écrite sur dix ans par plusieurs auteurs chinois anonymes, contient la première utilisation de nombres négatifs, le chapitre 9 utilise le théorème de Pythagore, le chapitre 8 utilise des matrices et l'élimination de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations (au moins 1700 ans avant Gauss ! ! !).

+10080
L'érudit Wang Ch'ung réalise la première boussole aimantée sur un plateau de laiton.

+9913
Année correspondant à la datation de la machine d'Anticythère, considérée comme le premier calculateur analogique et la première machine à engrenages (une trentaine !) antique permettant de calculer des positions astronomiques complexes. Le soin et l'adresse avec lesquels cette machine fut réalisée, ainsi que les capacités nécessaires en mécanique et en astronomie remettent en question les connaissances historiques sur les sciences grecques avant sa découverte. En effet, aucun objet de même âge et de même complexité n'était connu dans le monde et il faut attendre près d'un millénaire pour voir apparaître des mécanismes comparables ! Le physicien, mathématicien et ingénieur Archimède de Syracuse en est l'hypothétique créateur.

En cours de traduction de l'anglais

+9900
Le texte indien *Anuyoga Dwara Sutra* contient plusieurs identités impliquant des racines carrées et des carrés qui semblent impliquer une certaine connaissance des lois des exposants ou des logarithmes. Une identité tirée de ce texte en notation moderne est : $\sqrt{a}\sqrt{\sqrt{a}}=(\sqrt{\sqrt{a}})^3$.

+9876
L'astronome, géographe et mathématicien Hipparque de Nicéedécouvre la précession des équinoes.

+9850
L'astronome, géographe et mathématicien Hipparque est souvent désigné comme le créateur de la trigonométrie et des tables numériques correspondantes. Il calcule le premier la période de révolution du Soleil autour de la Terre (mais les résultats numériques sont en réalité ceux de la rotation de la Terre autour du Soleil) et élabore la théorie des excentriques et des épicycles.

+9800
Dans le siècle, les chinois auraient inventé l'écluse, le gouvernail, le principe de la machine à vapeur plusieurs centaines d'années avant les occidentaux ! Pendant ce siècle, le scientifique et ingénieur Philon de Byzance rédige des traités sur les leviers, la pneumatique, les automates, la traction et les clepsydres.

+9775
Le géomètre et astronome Apollonius de Perge publie la première étude sur les coniques donnant à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole les noms que nous leur connaissons. On lui

attribue en outre l'hypothèse des orbites excentriques pour expliquer le mouvement apparent des planètes et la variation de vitesse de la Lune.

+9750
Le mathématicien, physicien et ingénieur Archimède de Syracuse étudie des machines simples tel que le levier, la fameuse vis permettant entre autre de pomper l'eau ("vis d'Archimède") et découvre le principe d'Archimède qui explique la flottaison. Dans la même décennie, l'astronome, géographe, philosophe et mathématicien Ératosthène de Cyrène calcule le diamètre de la Terre à l'aide d'un gnomon et de son ombre et démontra l'inclinaison de l'écliptique.

+9740
Le mathématicien, physicien et ingénieur Archimedes of Syracuse calcule avec une précision de deux décimales utilisant des polygones inscrits et circonscrits et calcule la surface sous un segement de parabole.

+9719
L'astronome et mathématicien Aristarque de Samos fait l'hypothèse que le Soleil occupe le centre du système solaire et utilise la trigonométrie pour estimer le rayon de la Lune et sa distance à la Terre en utilisant l'ombre de la Terre pendant une éclipse Lunaire.

+9700
Le mathématicien et géomètre Euclide publie ses *Éléments*, où il réorganise toute la connaissance de la géométrie incluant des démonstrations logiques, la construction des 5 solides platoniciens. Dans son *Optica*, il nota que la lumière va en ligne droite et décrit la loi de réflexion. Nous avons aussi que les concepts de conique, ellipse, parabole et hyperbole qui apparaissent dans les travaux de deux mathématiciens de la Grèce antique, à savoir Menaech-mus et Appolonius de Pergé, qui introduisent aussi le concept de tangente. La même période Bhagabati Sutra calcule les permutations et les combinaisons d'ordre 1, 2 et 3.

Dans la cosmologie hindoue, les Manusmriti (1.67–80) et les Puranas décrivent le temps comme cyclique, avec un nouvel univers (planètes et vie) créé par Brahma tous les 8.64 milliards d'années. L'univers est créé, maintenu et détruit au cours d'une période de kalpa (jour de Brahma) d'une durée de 4.32 milliards d'années, et est suivie d'une période de pralaya (nuit) de dissolution partielle d'une durée égale. Dans certains Puranas (par exemple Bhagavata Purana), un cycle de temps plus large est décrit où la matière (mahat-tattva ou utérus universel) est créée à partir de la matière primitive (prakriti) et de la matière racine (pradhana) tous les 622.08 milliards d'années, à partir de laquelle Brahma est né. Les éléments de l'univers sont créés, utilisés par Brahma et complètement dissous dans une période de maha-kalpa (vie de Brahma ; 100 de ses 360 jours) d'une durée de 311.04 milliards d'années contenant 36000 kalpas (jours) et pralayas (nuits), et est suivie d'une période maha-pralaya de dissolution complète d'une durée égale. Les textes parlent également d'innombrables mondes ou univers.

+9690
Le savant Autolycus de Pitane définit le mouvement uniforme tel qu'un objet parcoure une quantité égale de distance en un temps égal.

+9630
Le philosophe Aristote développe la logique avec une théorie naïve des propositions, des quantités et du raisonnement par inférence. Il a également écrit un traité de météorologie nommé

En cours de traduction de l'anglais

Meteorologica. Il ressort clairement de ce traité qu'il comprenait déjà le cycle de l'eau et savait que les nuages étaient constitués d'eau évaporée et sont donc des structures très lourdes prises dans leur globalité. Aristote a été le pionnier de la méthode scientifique en parallèle de sa biologie empirique et de ses travaux sur la logique, rejetant un cadre purement déductif au profit de généralisations faites à partir d'observations de la nature. Aristote a également mentionné que l'eau salée (de la mer) était plus lourde et plus dense que l'eau douce, et que l'eau salée chercherait un niveau inférieur.

+9622
Le philosophe et astronome Héraclide du Pont fait l'hypothèse de la rotation de la Terre sur elle-même afin d'expliquer le mouvement apparent des étoiles au cours de la nuit (mais toujours dans un cadre géocentrique) et suggère que chaque planète est un corps comme la Terre. Il savait également (d'une manière naïve certes !) et a testé expérimentalement comment l'eau salée et l'eau normale étaient séparées et mélangées dans les mers.

+9600
L'École Stoïcienne développe les propositions composées et les connecteurs logiques : "implication", "et", "ou" et les inférences "Modus ponens" et "Modus tollens".

+9580
Philolaos publie son système du monde où la Terre tourne autour d'un feu central.

+9570
Le philosophe Démocrite d'Abdère avance l'idée selon laquelle la matière se compose de particules identiques et minuscules qu'il appelle des "atomes". En réalité il s'agit plutôt d'une vulgarisation des idées de son maître, le philosophe Leucippe de Milet élaborées dix ans avant. Hippasus, un disciple de Pythagore, aurait donné ce qui est probablement la première preuve rigoureuse de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. La preuve utilise un raisonnement de Reductio ad absurdum pour montrer que les côtés d'un carré sont incommensurables avec sa diagonale.

La plus ancienne trace écrite connue de la Camera Obscura est une description du philosophe chinois Han Mozi (entre l'an 9530 et 9609). Mozi a correctement affirmé que l'image de la caméra obscura est inversée parce que la lumière se déplace en lignes droites depuis sa source. Au 111e siècle, le physicien arabe Ibn al-Haytham (Alhazen) a écrit des livres très influents sur l'optique, y compris des expériences avec la lumière à travers une petite ouverture dans une pièce sombre.

+9500
Les philosophes Leucippe et Démocrite fondent l'atomisme.

+9460
Le philosope et mathématicien Pythagore étudie la géométrie propositionnelle et la vibration de la corde de la lyre.

+9400
Le philosophe Empédocle plaide pour une décomposition du monde en quatre éléments fondamentaux : l'eau, la terre, l'air et le feu. Le même siècle, le mathématicien Thalès de Milet met en évidence l'électrostatique en frottant un morceau d'ambre, prédit une éclipse et développe la géométrie du triangle.

En cours de traduction de l'anglais

Les philosophes grecs, dès Anaximandre, introduisent l'idée d'univers multiples voire infinis. Démocrite a précisé en outre que ces mondes variaient en distance, en taille ; la présence, le nombre et la taille de leurs soleils et lunes ; et qu'ils sont sujets à des collisions destructrices. Aussi pendant cette période, les Grecs ont établi que la Terre est sphérique plutôt que plate.

+9250
Manava Sulbar Sutras de Manava trouve l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{61}$ et accepte d'utiliser des nombres irrationnels dans ses calculs. La première université connue (en utilisant strictement la définition de ce mot qui est dérivé du latin *universitas magistrorum et studentium*, qui signifie approximativement « communauté d'enseignants et d'érudits ») a été créée à Milet (où Thales a étudié).

+9200
Les Assyriens utilisent des clepsydres et les Chinois tracent les mouvements planétaires pour leur calendrier.

+8795
Vers l'an 8795, un nouveau mot hiéroglyphique apparaît. Bia-n-pet se traduit littéralement par «fer du ciel». Le nouveau mot a été appliqué à tout le fer métallique à partir de cette époque. Une explication évidente de l'émergence soudaine du nouveau mot serait un événement majeur, tel qu'un grand impact ou une pluie de météorites, observé par la population égyptienne antique. Cela aurait laissé peu d'incertitude quant à l'origine exacte du fer mystérieux et aurait créé une association suffisamment forte entre le fer et le ciel pour que le nouveau mot devienne synonyme de toutes les formes de fer. En 12008, un grand cratère d'impact formé par une météorite de fer a été découvert dans le sud de l'Égypte. Bien que son âge exact soit inconnu, l'archéologie locale suggère qu'il s'est formé au cours des 5000 dernières années, ce qui en fait un événement candidat possible.

+8600
Les peuples néolithiques d'Écosse construisent des modèles en pierre des cinq solides de Platon (polyèdres réguliers).

+8500
Les indiens développent la théorie des 4 éléments (eau, air, terre feu).

+8300
Le mathématicien Apastamba résout les équations linéaires générales et utilise les systèmes d'équations diophantiennes comportant jusqu'à cinq inconnues. Le même siècle, les mathématiciens égyptiens utilisent des fractions simples.

+8200
Les origines de l'algèbre peuvent être attribuées aux anciens Babyloniens qui ont développé un système de nombre positionnel qui les a grandement aidés à résoudre leurs équations algébriques rhétoriques. Les Babyloniens n'étaient pas intéressés par des solutions exactes, mais plutôt par des approximations, et ils utilisaient donc couramment l'interpolation linéaire pour approximer les valeurs intermédiaires. L'une des tablettes les plus célèbres est la tablette Plimpton 322, créée vers les années 8100-8400, qui donne un tableau des triplets de Pythagore et représente certaines des mathématiques les plus avancées avant les mathématiques grecques.

On savait à l'époque védique et postérieure (*Rigveda*, I, 19.7, I 23.17, I, 32.9,VIII, 6.19 ; VIII,

En cours de traduction de l'anglais

6.20 ; et VIII, 12.3) que l'eau n'est pas perdue dans les différents processus du cycle hydrologique, à savoir l'évaporation, la condensation, les précipitations, l'écoulement, etc., mais se transforme d'une forme en une autre (transfert d'eau de la Terre à l'atmosphère par le Soleil et le vent).

+8000
Les prêtres babyloniens font les premiers relevés des observations célestes.

+7700
Les astronomes chinois font les premières observations du ciel.

+7500
Les Mésopotamiens imaginent un système de numérotation de position composé de symboles dont la valeur est fonction de leur rang à l'intérieur d'un nombre.

+7400
La plus ancienne table mathématique connue de multiplication est gravée pour calculer les surfaces.

+7000
Les Chinois et les Babyloniens inventent l'abaque, première machine à additionner. Des concepts géométriques sont développés pour l'arpentage (hypoténuse). C'est aussi la période correspondante au plus ancien outil connu utilisé par les Incas pour enregistrer des nombres grâce aux noeuds sur une corde et aussi à la représentation murale des roues.

+6500
Le plus vieux rapport météo est trouvé sur une pierre en Égypte. Les conditions météorologiques inhabituelles décrites sur la dalle étaient le résultat d'une explosion volcanique massive à Thera, l'île actuelle de Santorin en Méditerranée.

+6300
Une tablette babylonienne semble contenir les premiers angles trigonométriques remarquables et la preuve que le théorème de Pythagore était déjà connu par les Babyloniens.

+6100
Le cercle de Goseck (allemand : Sonnenobservatorium Goseck) pourrait être l'un des plus anciens observatoires solaires du monde.

+5000
Le système décimal est utilisé dans l'Egypte ancienne (il semble que le consensus scientifique de datation se situe entre l'an 4000 et l'an 7000).

+4800
Datation au radiocarbone des roues les plus anciennes (roue de Ljubljana Marshes).

+2000
Warren Field est l'emplacement d'un calendrier mésolithique. Il comprend des 12 fosses supposées correspondre aux phases de la Lune et utilisées comme calendrier lunaire. Il est considéré comme le plus ancien calendrier lunaire trouvé. On associe au même millénaire le fait que les marques d'un os ou de bois sont lentement remplacées par des jetons de différentes formes à

En cours de traduction de l'anglais

compter.

-10000
L'os d'Ishango est un outil en os, daté de l'ère du Paléolithique supérieur (voir [242]). C'est une long morceau d'os brun foncé, le péroné d'un babouin, avec un morceau de quartz pointu fixé à une extrémité, peut-être pour la gravure. Il a d'abord été considéré comme un bâton de pointage, car il a une série de ce qui a été interprété comme des marques de pointage sculptées dans trois colonnes exécutant la longueur de l'outil. Il a également été suggéré que les rayures pourraient avoir été créées dans le but d'avoir une meilleure prise sur le manche ou pour une autre raison non-mathématique.

-190000
Les revendications pour les premières preuves définitives de la maîtrise du feu par un membre de l'Homo vont de 0.2 à 1.7 million d'années. Les preuves de l'utilisation contrôlée du feu par Homo Erectus, qui remontent à environ $400'000$ ans, bénéficient d'un large soutien scientifique.

En cours de traduction de l' anglais

20

Humour

Contents

20.1 Situations . . . 3190
20.2 Mathématiques . . . 3204
20.3 Physique . . . 3224
20.4 Statistiques . . . 3244
20.5 Chimie . . . 3248
20.6 Ingénierie . . . 3254
20.7 Informatique . . . 3263
20.8 Sciences Sociales . . . 3274

En cours de traduction de l'anglais

Si vous avez des histoires humoristiques dans le genre "scientifique" n'hésitez pas à nous les transmettre. Dans tous les cas, nous vous souhaitons du bon temps (certaines histoires sont en anglais car elles perdent leurs sens en français ou nous ne possédons pas les originaux des images pour modifier les textes).

Cette page est transmise avec des électrons 100% recyclés

20.1. Situations

Lors d'un grand jeu télévisé, les trois concurrents se trouvent être un ingénieur, un physicien et un mathématicien. Ils ont une épreuve à réaliser. Cette épreuve consiste à construire une clôture tout autour d'un troupeau de moutons en utilisant aussi peu de matériel que possible.

– L'ingénieur : Regroupe le troupeau dans un cercle, puis décide de construire une barrière tout autour.

– Le physicien : Construit une clôture d'un diamètre infini et tente de relier les bouts de la clôture entre eux jusqu'au moment où tout le troupeau peut tenir dans le cercle.

– Le mathématicien : Voyant ceci, construit une clôture autour de lui-même et se définit comme y étant à l'extérieur.

En cours de traduction de l'anglais

Deux hommes se déplaçant en ballon sont perdus dans le désert. Ils aperçoivent un individu en train de méditer à l'ombre d'un arbre.

– "Où sommes-nous, s'il vous plaît ?" lui demandent-ils.

Après un long moment de réflexion, l'homme leur répond :

– "Dans un ballon."

– "Merci, monsieur le mathématicien."

L'homme demande étonné :

– "Comment avez-vous su que j'étais mathématicien ?"

– "Pour trois raisons (répond l'aéronaute). Premièrement, vous avez beaucoup réfléchi avant de nous répondre. Deuxièmement, votre réponse est très exacte. Troisièmement, elle ne sert absolument à rien."

En cours de traduction de l'anglais

Un ingénieur, un mathématicien et un physicien séjournent une nuit dans un hôtel. Heureusement pour ce gag, un début d'incendie s'enclenche dans chacune de leur chambre.

- Le physiciens se réveille, voit le feu, fait quelques observations méticuleuses et de nombreux calculs sur la couverture de la carte des vins de l'hôtel. Une fois ceci fait, il s'empare de l'extincteur et éteind de le feu de manière très précise en un seul et unique coup et retourne se coucher.
- L'ingénieur se réveille, voit le feu, fait quelques observations méticuleuses et sur la couverture de la carte du restaurant fait quelques calculs. Une fois ceci fait et après avoir ajouté un facteur de sécurité de 5, il s'empare de l'extincteur et asperge l'ensemble de la chambre plusieurs fois de suite et retourne se coucher.
- Le mathématicien se réveille à son tour, fait quelques observation méticuleuses et sur un tableau noir se trouvant dans la chambre fait de nombreux calculs. Soudainement il s'exclame : "une solution existe !". Une fois la solution trouvée, il retourne dans son lit...

Un médecin, un légiste et un mathématicien discutent des mérites comparés d'une épouse et d'une maîtresse.

- Le légiste : "Il vaut mieux avoir une maîtresse. En cas de divorce, une épouse pose de nombreux problèmes légaux."

– Le médecin : "Il vaut mieux avoir une épouse, car le sentiment de sécurité réduit le stress, et c'est bon pour la santé."

– Le mathématicien : "Vous avez tous les deux torts. Le mieux est d'avoir les deux. Quand votre femme vous croît chez votre maîtresse, et votre maîtresse chez votre femme, vous pouvez faire des maths."

Un grand homme d'affaires engage un mathématicien, un informaticien et un physicien afin de pouvoir gagner à tous les Tiercés.

– Le mathématicien le premier s'attaque à la tâche, il calcule des matrices à n'en plus finir, pose des axiomes à tout bout de champs et après de longues semaines de Lemmes, théorèmes et conjectures, il conclut que le problème est formellement irrésolvable.

– Ensuite, l'informaticien heureux d'avoir vu le mathématicien en échec, s'approche de son Cray III et après avoir écrit quantités d'algorithmes en C++ et introduit tous les paramètres et conditions initiales annonce joyeusement qu'il faudra juste quelques centaines d'années pour calculer le résultat de chaque Tiercé...

– Le physicien, le sourire aux lèvres, informe ses éminents collègues qu'il a la solution. Il s'approche d'un tableau noir et tout en dessinant une sphère commence par dire : "Approximons le cheval par une sphère parfaite..."

En cours de traduction de l'anglais

Lors d'un entretien d'embauche, un chef d'entreprise reçoit quatre ingénieurs : un ayant fait l'École polytechnique, le second HEC, le troisième informaticien, et le dernier sortant de l'université. Celui-ci explique aux quatre candidats qu'en définitive, pour faire marcher une entreprise, il suffit de savoir compter.

Il s'adresse donc au premier d'entre eux, le polytechnicien, et lui dit : "allez-y, comptez..."

– Le polytechnicien : "un... deux... un... deux..." two..."

L'homme étonné s'adresse ensuite à l'ingénieur sortant d'HEC : "À vous ! Comptez..."

– L'ingénieur sortant d'HEC : "un KiloFranc... deux KiloFrancs, trois KF..."

Il se retourne ensuite, inquiet, vers l'informaticien : "À vous ! Comptez..."

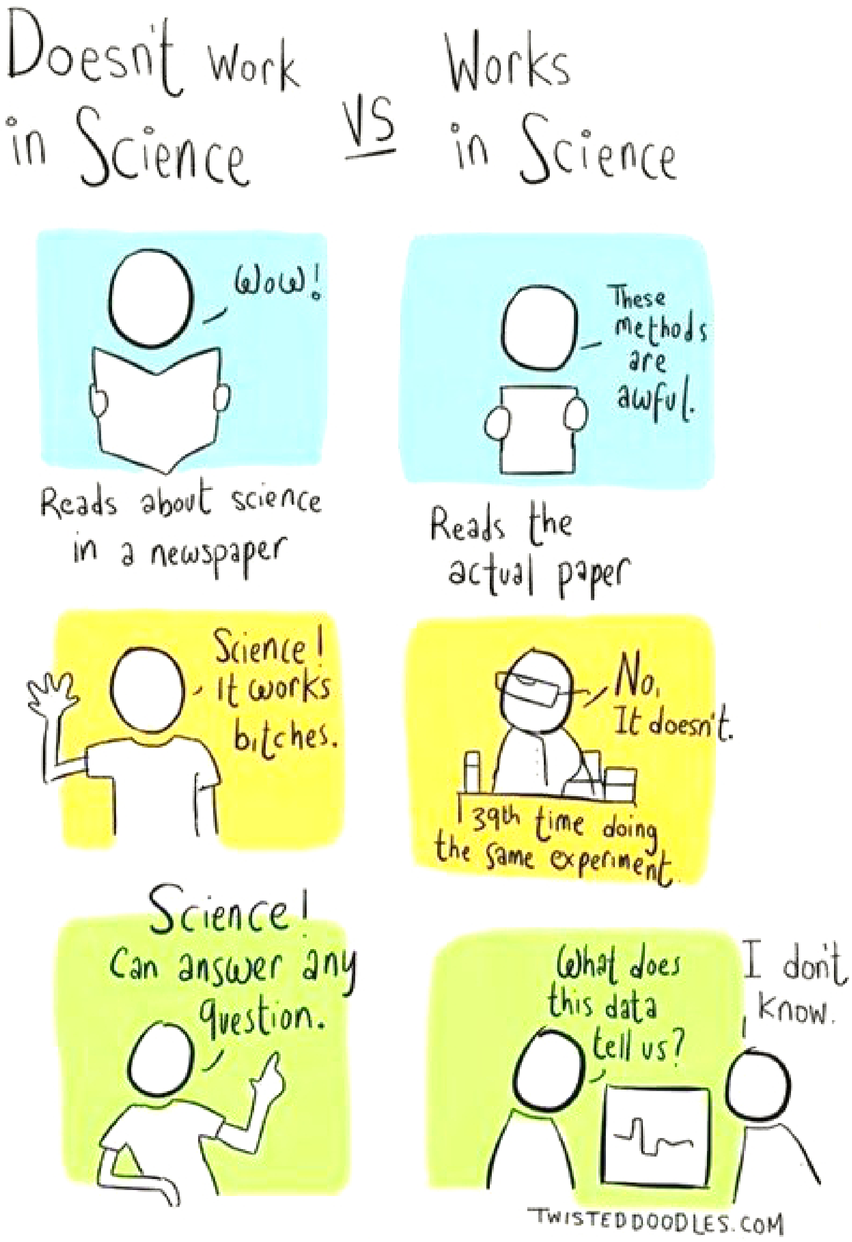
– L'informaticien : "0... 1... 0... 1..."

Désespéré, le chef d'entreprise s'adresse au dernier candidat sortant de faculté : "Allez-y, comptez..."

– Le jeune homme commence : "1... 2... 3... 4... 5... 6... 7..."

Le chef d'entreprise rassuré : "continuez, continuez..."

– "8... 9... 10... valet... dame.. roi... " ! !



En cour nglais

Plusieurs personnes ont été invitées à résoudre le problème suivant : "Montrer que tous les entiers impairs sont premiers."

- Mathématicien : 3 est un nombre premier, 5 est un nombre premier, 7 est un nombre premier, 9 n'est pas un nombre premier - contre-exemple - la proposition est fausse !
- Physicien : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est une erreur expérimentale, 11 est premier ...
- Ingénieur : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier, 11 est premier ...
- Computer Scientist : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier ... erreur de segmentation
- Avocats : un est premier, trois est premier, cinq est premier, sept est premier, bien qu'il semble y avoir une preuve prima facie que neuf n'est pas premier, il existe un précédent substantiel pour indiquer que neuf devrait être considéré comme premier. La lette suivant présente le cas de la primauté de neuf ...
- Libéraux : Le fait que neuf n'est pas premier indique un environnement culturel défavorisé qui ne peut être corrigé que par un programme d'enrichissement culturel financé par le gouvernement fédéral.
- Programmeurs informatiques : un est premier, trois est premier, cinq est premier, cinq est premier, cinq est premier, cinq est premier cinq est premier, cinq est premier, cinq est premier ...
- Professeur : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, et le reste est laissé comme un exercice pour l'étudiant.
- Linguiste : 3 est un premier impair, 5 est un premier impair, 7 est un premier impair, 9 est un premier très ...
- Chimiste : 1 est premier, 3 est premier, 5 est premier ... hey, publions !
- New Yorker : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est ... CE N'EST PAS VOS AFFAIRES !
- Programmeur : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 sera corrigé dans la prochaine version !
- Commercial : 3 est un premier, 5 est un premier, 7 est un premier, 9 - laissez-moi vous faire faire une affaire ...
- Publicitaire : 3 est un nombre premier, 5 est un nombre premier, 7 est un nombre premier, 11 est un nombre premier, ...
- Comptable : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier, déduction de 10% d'impôt et 5% d'autres obligations.
- Statisticien : Essayons plusieurs nombres choisis au hasard : 17 est un nombre premier, 23 est un nombre premier, 11 est un nombre premier ... Ça me va bien !

En cours de traduction de l'anglais

– Psychologue : 3 est un nombre premier, 5 est un nombre premier, 7 est un nombre premier, 9 est un nombre premier mais tente de le supprimer ...

– RH : C'est quoi un nombre premier et un nombre impair ?

Un mathématicien, un ingénieur et un physicien se voient remettre une balle en gomme rouge afin d'en déterminer le volume.

– Le mathématicien : Mesure le diamètre et évalue le résultat de la triple intégrale.

– Le physicien : Remplis un tonneau d'eau, dépose la balle dans l'eau et mesure le déplacement total de volume.

– L'ingénieur : Observe le modèle et le numéro de série dans sa table des "balles en gomme rouge".

En cours de traduction de l' anglais

Cette histoire est une légende urbaine fort sympathique :

J'ai reçu un coup de fil d'un collègue à propos d'un étudiant. Il estimait qu'il devait lui donner un zéro à une question de physique, alors que l'étudiant réclamait un 20. Le professeur et l'étudiant se mirent d'accord pour choisir un arbitre impartial et je fus choisi. Je lus la question de l'examen : "Montrez comment il est possible de déterminer la hauteur d'un building a l'aide d'un baromètre". L'étudiant avait répondu : "On prend le baromètre en haut du building, on lui attache une corde, on le fait glisser jusqu'au sol, ensuite on le remonte et on calcule la longueur de la corde. La longueur de la corde donne la hauteur du building."

L'étudiant avait raison vu qu'il avait répondu juste et complètement à la question. D'un autre côté, je ne pouvais pas lui mettre ses points : dans ce cas, il aurait reçu son grade de physique alors qu'il ne m'avait pas montré de connaissances en physique. J'ai proposé de donner une autre chance à l'étudiant en lui donnant six minutes pour répondre à la question avec l'avertissement que pour la réponse, il devait utiliser ses connaissances en physique. Après cinq minutes, il n'avait encore rien écrit. Je lui ai demandé s'il voulait abandonner, mais il répondit qu'il avait beaucoup de réponses pour ce problème et qu'il cherchait la meilleure d'entre elles. Je me suis excusé de l'avoir interrompu et lui ai demandé de continuer. Dans la minute qui suivit, il se hâta pour me répondre : "On place le baromètre à la hauteur du toit. On le laisse tomber en calculant son temps de chute avec un chronomètre. Ensuite en utilisant la bonne formule connue par tous, on trouve la hauteur du building". À ce moment, j'ai demandé à mon collègue s'il voulait abandonner. Il me répondit par l'affirmative et donna presque 20 à l'étudiant. En quittant son bureau, j'ai rappelé l'étudiant, car il avait dit qu'il avait plusieurs solutions à ce problème. "Hé bien, dit-il, il y a plusieurs façons de calculer la hauteur d'un building avec un baromètre. Par exemple, on le place dehors lorsqu'il y a du soleil. On calcule la hauteur du baromètre, la longueur de son ombre et la longueur de l'ombre du building. Ensuite, avec un simple calcul de proportion, on trouve la hauteur du building."

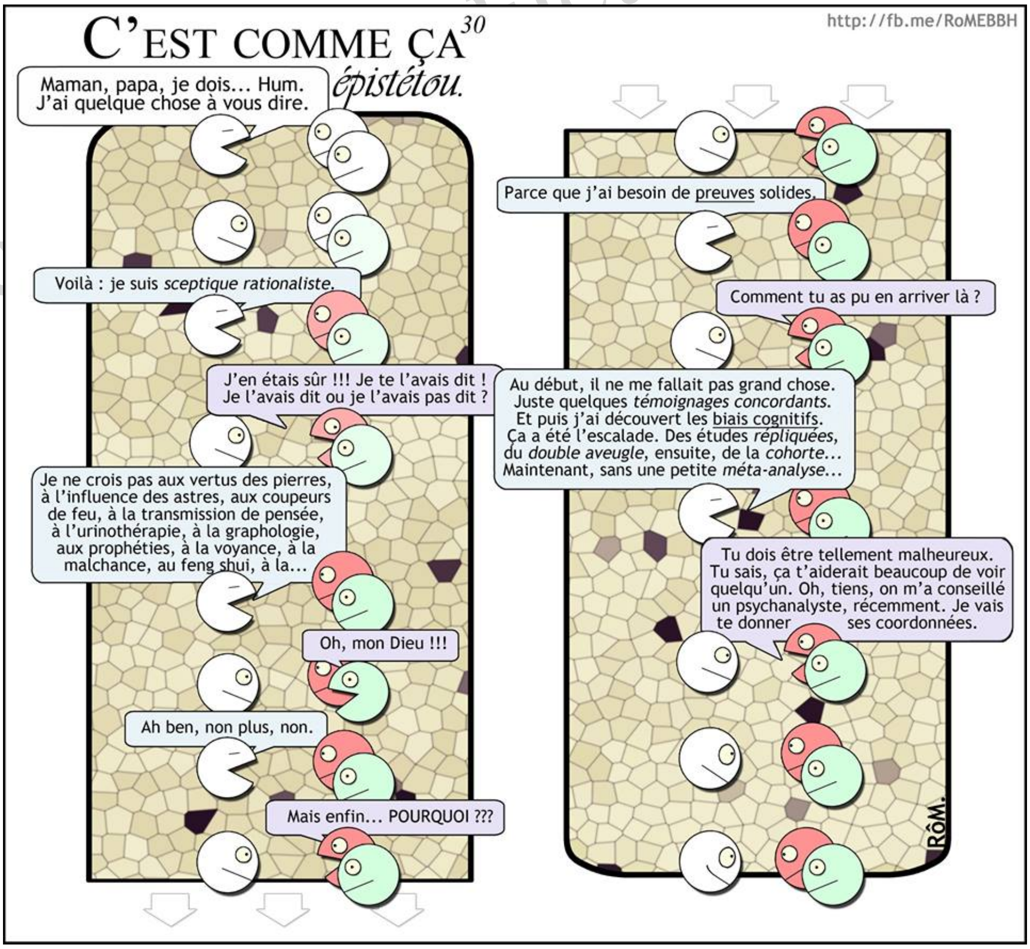
Bien, lui répondis-je, et les autres ? À quoi l'élève répondit : "Il y a une méthode assez basique que vous allez apprécier. On monte les étages avec un baromètre et en même temps on marque la longueur du baromètre sur le mur. En comptant le nombre de traits, on a la hauteur du building en longueur de baromètre. C'est une méthode très directe. Bien sûr, si vous voulez une méthode plus sophistiquée, vous pouvez pendre le baromètre à une corde, le faire balancer comme un pendule et déterminer la valeur de g au niveau de la rue et au niveau du toit. À partir de la différence de g la hauteur de building peut être calculée. De la même façon, on l'attache à une grande corde et en étant sur le toit, on le laisse descendre jusqu'à peu près le niveau de la rue. On le fait balancer comme un pendule et on calcule la hauteur du building à partir de sa période de balancement."

Finalement, l'élève conclut : "Il y a encore d'autres façons de résoudre ce problème. Probablement la meilleure est d'aller au sous-sol, frapper à la porte du concierge et lui dire : "J'ai pour vous un superbe baromètre si vous me dites quelle est la hauteur du building."

J'ai ensuite demandé à l'étudiant s'il connaissait la réponse que j'attendais. Il a admis que oui, mais qu'il en avait marre du collège et des professeurs qui essayaient de lui apprendre comment il devait penser.

Pour l'anecdote, l'étudiant était Niels Bohr (prix Nobel de Physique en 1923) et l'arbitre Rutherford (prix Nobel de Chimie en 1908).

En c... uction de l'anglais



Dans un cours de Russell portant sur le fait que d'une proposition fausse, toute proposition peut être déduite, un étudiant lui posa la question suivante :

– "Prétendez-vous que de $2+2=5$, il s'ensuit que vous êtes le pape ? "
– "Oui", répondit Russell
– "Et pourriez-vous le prouver !", demanda l'étudiant sceptique
– "Certainement", réplique Russell, qui proposa sur le champ la démonstration suivante :
  1. Supposons que $2+2=5$
  2. Soustrayons 2 de chaque membre de l'égalité, nous obtenons $2=3$
  3. Par symétrie, $3=2$
  4. Soustrayant 1 de chaque côté, il vient $2=1$
– Maintenant le pape et moi sommes deux. Puisque $2=1$, le pape et moi sommes un. Par suite, je suis le pape.

Sur ce ...

What is "pi" ?

– Mathematician : "Pi is the ratio of the circumference of a circle to its diameter."
– Engineer : "Pi is about 22/7."
– Physicist : "Pi is 3.14159 plus or minus 0.000005"
– Computer Programmer : "Pi is 3.141592653589 in double precision."
– Nutritionist : "You're one track math-minded fellows, Pie is a healthy and delicious dessert !"

Un astronome, un physicien et un mathématicien et un informaticien prennent des vacances ensemble en Écosse. En regardant à l'extérieur d'une fenêtre de train pendant un déplacement, ils observent tous un mouton noir au milieu d'un champ.

– "Comme c'est intéressant" s'exclame l'astronome. "Tous les moutons écossais sont noirs !".

En cours de traduction de l'anglais

- Ce à quoi le physicien répond : "Non, non ! Quelques moutons écossais sont noirs !".
- Le mathématicien soupirant... dit : "En Écosse, il y a à dans un champ au moins un mouton dont au moins un des côtés est noir".
- L'informaticien s'exclame : "Oh non ! Un bug !".

Un mathématicien, un biologiste et un physicien sont assis à une terrasse d'un café observant les gens entrant et sortant d'un immeuble de l'autre côté de la rue.

D'abord ils ont observé deux personnes entrer dans l'immeuble. Après un certain temps, ils observent que trois personnes sortent de l'immeuble.

- Le physicien : "Le moyen de mesure n'était pas adapté".
- Le biologiste : "Ils se sont reproduits".
- Le mathématicien : "Si maintenant il y a une personne qui entre, l'immeuble sera à nouveau vide"

En cours de traduction de l' anglais

Un mathématicien et un ingénieur suivent un cours dispensé par un physicien. Un des sujets concerne les théories de Kaluza-Klein impliquant des développements à 9, 12 et un nombre encore supérieur de dimensions. Le mathématicien se pose et écoute tranquillement le physicien alors que l'ingénieur est confus et perdu. À la fin de l'exposé, l'ingénieur a un terrible mal de tête alors que le mathématicien commente l'exposé du physicien.

- L'ingénieur dit : "Comment faites-vous pour comprendre tout cela ?"
- Le mathématicien répond : "Je visualise le processus dans ma tête !".
- L'ingénieur rétorque : "Comment pouvez-vous visualiser quelque chose qui a lieu dans un espace à neuf dimensions ?".
- Le mathématicien répond : "C'est très simple ! Je le visualise d'abord en n dimensions et après je réduis n à 9."

Deux mathématiciens sont trouven dans un bar. Le premier explique au second que la connaissance des gens en mathématique est vraiment très élémentaire. Le second en désaccord insiste sur le fait que le niveau moyen est bien meilleur que ce que l'on peut soupconner.

Le premier mathématicien s'en va un instant aux toilettes et pendant son absence, le second interpelle une serveuse. Il lui raconte que d'ici quelques minutes un ami va revenir, l'interpeller et lui poser une question. Tout ce qu'elle aura à faire est de répondre "un tiers de x cube".

Elle répète "un tier— dx cub" ?

Il lui répète "un tiers de x cube".

Elle demande encore une fois, "un tiers dex cube ?"

"C'est exact" réponde-t-il.

La serveur s'éloigne en marmonnant "un tiers dex cube...".

Le premier mathématicien revient des toilettes. Le second lui propose alors pour clore leur débat de demander un calcul de math à une des serveuses. Alors le premier rétorque qu'il suffit de demander à la serveuse blonde le calcul d'une intégrale élémentaire. Son ami rigolant approuve la démarche. Le premier mathématicien appelle donc l'unique serveur blonde et lui demande : "Quelle est l'intégrale de x au carré ?".

La serveuse répond alors"un tiers de x cube" et pendant qu'elle s'éloigne, elle se retourne rapidement en ajouter "plus une constante !".

Paroles de profs :

- Il reste des lambeaux de l'argument
- Le signe '-' devant le potentiel vous interpelle ? Et si je mets un '+' est-ce que cela vous convient mieux ? Oui ! Alors mettons un '+'...
- C'est une courbe de phase ça ? Non, c'est une jambe de chien !
- On va le tuer et on fera croire à un suicide
- Vous pouvez dire que c'est prévisible puisque c'est imprévisible !
- Je compte sur vous pour comprendre un petit peu à fond la suite
- Nous allons étudier cela maintenant un peu plus tard
- Je vais vous présenter des résultats dépendant des équations de Maxwell que vous n'avez pas encore vues... de toute façon, au point où on en est...
- Si vous ne comprenez pas, c'est normal... le contraire serait d'ailleurs étonnant
- La relativité générale ne sert à rien ! C'est pas avec ça qu'on met des satellites en orbite !
- Question à cinquante centimes

En cours de traduction de l'anglais

- De temps en temps, il faut être absurde
- Quand on n'a rien à se mettre sous la dent, on prend le théorème de Gauss
- On ne voit pas par quelle vertu du Saint-Esprit il deviendrait neutre ? !
- Vous comprendrez quand vous serez grand...
- Prenons l'exemple d'une banque : monsieur y fait un dépôt et madame y fait un retrait... enfin comme d'habitude quoi !
- ... plus le parallélisme sera parallèle...
- Effacez-moi ces gris-gris résidus de calculs antérieurs
- Effacez le membre de gauche. J'ai dit DE GAUCHE ! Où est votre droite ? C'est bien... eh bien la gauche, c'est de l'autre côté !
- Voyons, qui sera la prochaine victime ?
- Le '+' se reconnaît, et les électrons ne s'y trompent pas, à sa belle couleur rouge !
- Le but du jeu est de vérifier que le critère ne dit pas de conneries
- Si vous n'arrivez pas à faire cela, je vous rassure : c'est foutu pour l'examen
- Si vous n'arrivez pas à faire cela, faites-le !
- Vous être très forts pour trouver des choses fausses
- Ce genre de démonstration, ça me plaît. Vous, ça vous fait faire des cauchemars
- Je ne résoudrai pas ceci, car cela risquerait de heurter votre sensibilité !
- Tout ce que les profs adorent mérite votre méfiance !
- Vous ajoutez des patates et des cochons, c'est sans dimension...
- On peut chercher la dérivée de l'impulsion de Dirac, c'est pas ça qui va nous sauter à la tête
- C'est bête mais Riemann, c'est comme ça
- Regardez l'équation que je viens d'effacer
- Juridiquement parlant, le courant est dans ce sens
- Il est hors de question que je perde mon temps à vous résoudre cette plaisanterie de basse volée !
- Si la fille a compris alors vous devez avoir tous compris
- Ah oui, vous vous moquez de moi. En fait, vous avez raison de vous moquer des profs car nous, on n'hésite pas à se moquer de vous

En cours de traduction de l'anglais

- Attention, très très important : je vous propose d'en rêver la nuit
- J'ai l'impression du jouer du stradivarius devant des vaches
- La main de dieu répartit le champ perpendiculairement à la surface
- Le miracle de la disparition de l'harmonique n'aura pas lieu aujourd'hui
- Si vous vous réveillez la nuit, dites-vous que échantilloner dans le domaine des temps, c'est périodiser dans le domaine des fréquences... puis rendormez-vous
- Les courbes gauches ne sont pas droites
- Vous voyez, quelques fois mes résultats sont corrects
- On note "$\mathbb{Q}$" la sortie, c'est évident...
- Il va falloir une entourloupette pour réussir à récupérer cette variable
- Je suis un 68000 ; M. le directeur passe dans le couloir, frappe à la porte : on ne fait pas mieux comme interruption !
- Attention : un, deux, trois, à vos cerveaux !
- Dans la steppe de l'automatique, nous arrivons à la partie aride des mathématiques
- Quel intérêt ? Eh bien aucun. C'est une figure de rhétorique pédagogique
- Si vous avez quelques souvenirs sur les graphes de fluence que jadis nous traçâmes...
- Les électrons dans du métal très chaud, c'est la place de la Concorde à 5h du soir, donc ça ne conduit pas non plus
- Les cercles, c'est ce qui a le moins de coins !
- Si vous mettez vos doigts dans une prise, ce n'est pas un nombre complexe qui sort
- Voir la démonstration dans vos lectures journalières... donc je m'en dispense
- Et puis vient ensuite le père Carnot : il ramène sa fraise pour ne pas dire grand chose
- Quelquefois, les gens qui ont un peu de culture connaissent ça... c'est raté pour aujourd'hui !
- On n'appellera pas cela "rendement", car on peut obtenir des résultats supérieurs à 1, ce qui pourrait troubler quelques esprits faibles
- Moi, si on m'avait envoyé au tableau, j'aurais pas écrit cela
- Vous trouverez la réponse sur 36 15 Archimède
- J'utilise une méthode qui date de quelques siècles... comme moi d'ailleurs !
- Posez-moi des questions... j'aimerais qu'on me pose des questions ! ... d'autres questions ? Je vais être obligé de prendre la liste et de dire : "toi, tu as une question à poser"

En cours de traduction de l'anglais

– L'ordonnancement implémenté dépend de l'instanciation du garbage collector s'il est synchronisé sur le multithreading préemptif de l'OS.

– Vous n'êtes que des boîtes qui reçoivent des entrées et crachent des sorties

---

Sherlock Holmes et le Dr Watson sont au camping. Après un bon repas et une bonne bouteille de vin, ils gagnent leur sac de couchage dans la tente et s'endorment.

Quelques heures plus tard, Holmes se réveille et aussitôt secoue son compagnon :

– "Watson, regardez le ciel et dites-moi ce que vous voyez."

– "Je vois des millions et des millions d'étoiles." répond Watson.

– "Et qu'est-ce que vous en concluez ?" demande Holmes.

– "Du point de vue astronomique, répond Watson, cela me dit qu'il y a des millions de galaxies et potentiellement des milliards de planètes. Du point de vue astrologique, j'observe que Saturne est en Lion. Du point de vue chronologique, j'en déduis qu'il est environ 3 heures 15. Du point de vue théologique, je vois que Dieu est tout-puissant et que nous sommes petits et insignifiants. Du point de vue météorologique, je pense que nous aurons une belle journée demain. Et vous, Holmes ?"

Sherlock Holmes reste pensif une minute puis déclare :

– "Watson, vous êtes un âne. On nous a volé la tente."

En cours de traduction de l'anglais

Un ingénieur, un mathématicien et un physicien séjournent une nuit dans un hôtel. Malheureusement un début d'incendi s'enclenche dans chacune de leur chambre.

Le physiciens se réveille, voit le feu, fait quelques observations méticuleuses et de nombreux calculs sur la couverture de la carte des vins de l'hôtel. Une fois ceci fait, il s'empare de l'extincteur et éteind de le feu de manière très précise en un seul et unique coup et retourne se coucher.

L'ingénieur se réveille, voit le feu, fait quelques observations méticuleuses et sur la couverture de la carte du restaurante fait quelques calculs. Une fois ceci fait et après avoir ajouté un facteur de sécurité de 5, il s'empare de l'extincteur et asperge l'ensemble de la chambre plusieurs fois de suite et retourne se coucher.

Le mathématicien se réveille à son tour, fait quelques observation méticuleuses et sur un tableau noir se trouvant dans la chambre fait de nombreux calculs. Soudainement il s'exclame : "une solution existe !". Une fois la solution trouvée, il retourne dans son lit...

Comment pouvez-vous deviner que la personne conduisant le véhicule face au vôtre est un physicien ?

C'est simple : Il a un autocollant rouge à l'arrière où il est écrit : "Si vous voyez cet autocollant en bleu c'est que vous roulez trop vite."

Un physicien des plasma de Princeton se trouve à la plage et découvre une vieille lampe à huile dans le sable. En essuyant la lampe, un génie surgit. Pour le remercier de l'avoir libéré, le génie lui offre un voeux. Le physicien sort alors un carte du monde et entoure d'un cercle la région du moyen-orient et dit au génie "je veux que tu apportes la paix dans cette région".

Après 10 minutes de silence, le génie répond, "Eh bien dites... il y en a des problèmes là-bas avec le Liban, l'Iraq, Israel et toutes les autres lieux. C'est terriblement embarasssant, je n'ai jamais eu une tâche d'une telle difficutlé. Je suis dans l'obligation de vous demander d'exaucer un autre voeu. Celui-là étant trop ardu pour moi.".

Sur le coup, le physicien réfléchit et demande : "Je souhaite que le tokamak de l'université de Princeton réussisse la fusion stable".

Après 10 minutes de silence, le génie répond : "Puis-je voir la carte du moyen-orient à nouveau ?"

Vous êtes un chasseur qui se trouve dans la jungle. Vous avez avec vous 2 cartouches et un fusil. Tout à coup vous tombez nez à nez avec une panthère. Vous avez soudain envie de fumer une pipe. Comment fais-tu ?

Tu tires d'abord sur la panthère, mais tu la loupes. Tu as donc une loupe. Avec, la seconde cartouche, tu tues la panthère. Ensuite tu la prends par la queue et la fait tourner autour de ta tête. Le périmètre du cercle formé vaut 2Pi panthère. Tu possèdes alors 2 pipes en terre. Tu prends une pipe que tu casses. Ensuite tu gardes la moitié en main et dépose l'autre moitié par terre. Il y a donc un tas haut, et un tas bas. Tu as donc du tabac. C'est fini tu déposes le tabac dans la pipe en terre que tu allumes avec la loupe. Ouf ! ! ! ! !

En cours de traduction de l'anglais

20.2. Mathématiques

Il y a 5 personnes sur 4 qui n'y connaissent rien en fraction....

L'amour c'est comme π, naturel, irrationnel, transcendant mais très réel.

Un professeur de maths explique à une blonde les limites. Il fait avec elle l'exercice suivant :

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=+\infty$$

À la fin de l'exercice, il demande à la blonde si elle a compris. "Oh oui monsieur j'ai tout compris !". N'y croyant qu'à moitié, il lui pose l'exercice suivant :

Soit à calculer :

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}$$

Et la blonde de résoudre :

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=+\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=5$$

En cours de traduction de l'anglais

Évolution de l'enseignement des Mathématiques (...) :

– Enseignement 1960 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 100 Frs. Ses frais de production s'élèvent au $4/5$ du prix de vente. Quel est son bénéfice ?

– Enseignement traditionnel 1970 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 100 Frs. Ses frais de production s'élèvent au $4/5$ du prix de vente, c'est-à-dire à 80 Frs. Quel est son bénéfice ?

– Enseignement moderne 1970 : Un paysan échange un ensemble P de pommes de terre contre un ensemble M de monnaie. Le cardinal de l'ensemble Mest égal à 100, et chaque élément PFM vaut 1 Fr. Dessinez 100 gros points représentant les éléments de l'ensemble M. L'ensemble F des frais de production comprend 20 gros points de moins que l'ensemble M. Représentez l'ensemble F comme sous-ensemble de l'ensemble M et donnez la réponse à la question suivante : Quel est le cardinal de l'ensemble B des bénéfices ? (à dessiner en rouge)

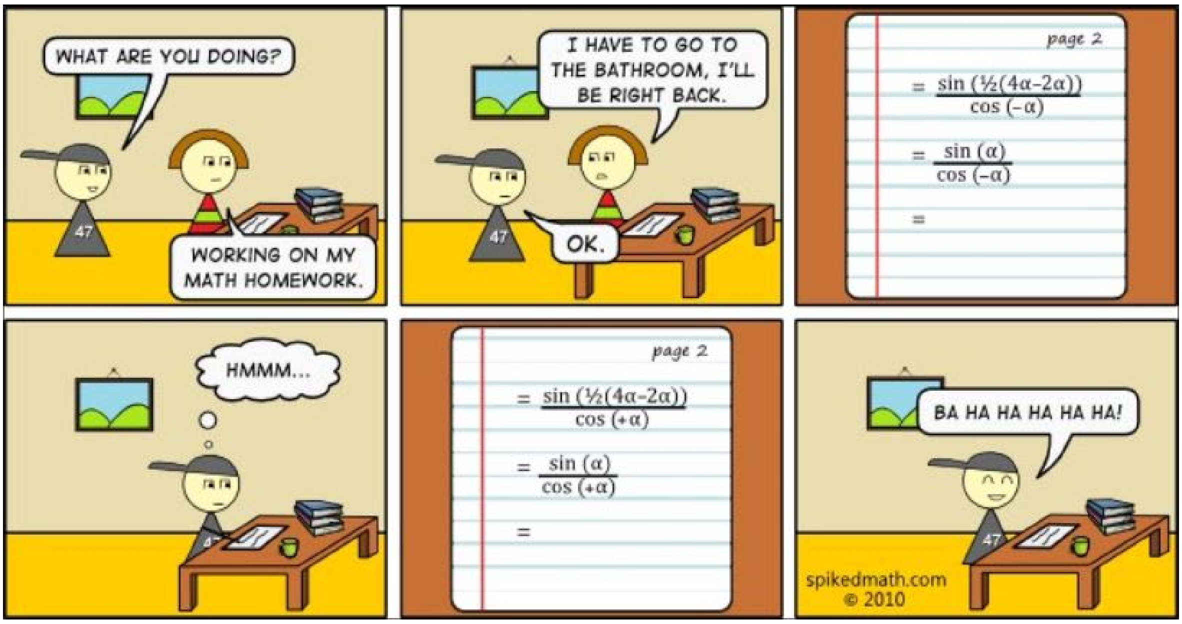
– Enseignement rénové 1980 : Un agriculteur vend un sac de pommes de terre pour 100 Frs. Les frais de production s'élèvent à 80 Frs et le bénéfice est de 20 Frs. Devoir : souligne les mots "Pommes de terre" et discutes-en avec ton voisin.

– Enseignement réformé 1990 : Un peizan kapitalist privilégié sanrichi injustement de 20 Frs sur un sac de patat, analiz le tekst et recherche les fotes de contenu, de gramère, d'orthografe, de ponctuassion et ensuite dit ce que tu panse de set manière de s'enrichir.

– Enseignement start-up 1999 : Un producteur de l'espace agricole câblé consulte une data bank qui display le day-rate de la patate. Il load son progiciel de computation fiable et détermine le cash-flow sur écran bit-map (sous WMil avec config floppy et DD 40Go). Dessine avec ta souris le contour intégré 3D du sac de pommes de terre. Puis logues-toi au network par le www.blue-potatoe.com et suis les indications du menu.

• Enseignement 2010 : Qu'est-ce qu'un paysan ?

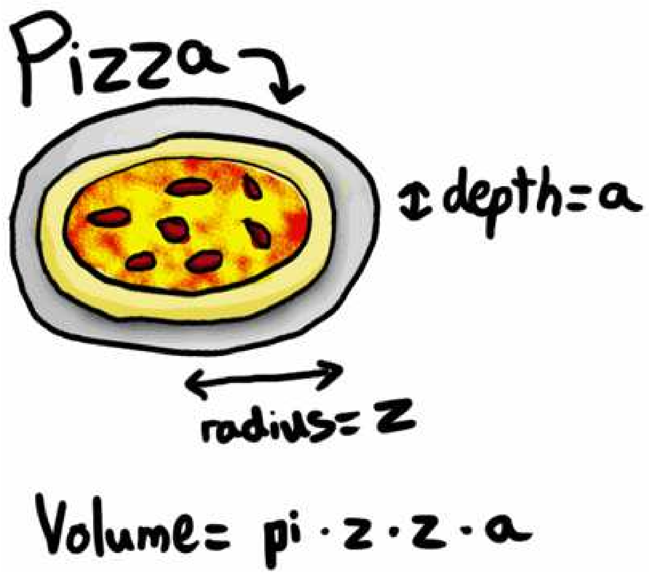
En cours de traduction de l'anglais



Lorsque vous lisez ou entendez	il faut comprendre...
c'est trivial (ou évident)	je n'arrive pas à dire pourquoi c'est vrai
automatiquement on a	idem
un calcul montre que	un calcul que je n'ai pas fait montrerait certainement que
le lecteur montrera facilement que	ça m'ennuie de montrer que
Nous conseillons vivement au lecteur de faire les exercices indiqués	comme je ne les ai pas faits, vous pourriez me les corriger
j'ai montré ce résultat dans un papier antérieur	je ne sais plus diable comment on fait pour prouver ce truc là
on généralise facilement à	la généralisation dépasse mon niveau
d'après une propriété bien connue	par 10 personnes au monde
la preuve tient en deux lignes	oui, mais moyennant cinq lemmes
c'est de l'algèbre	ce n'est pas intéressant (de la bouche d'un analyste)
c'est de l'analyse	ce n'est pas intéressant (de la bouche d'un algébriste)
c'est élémentaire (ou classique)	dans la théorie des espaces bornitziens de deuxième espèce
je n'ai pas bien compris ce pas dans votre démonstration	tu t'es planté dans ta démo
Cette conférence était très intéressante	je n'y ai rien compris

En cours de traduction de l'anglais

Le numéro que vous avez demandé est imaginaire ; veuillez tourner votre téléphone d'un quart de tour à droite et renuméroter...



Un mathématicien à son ami :

- "Es-tu fidèle ?"
- "Oui, à un isomorphisme près"

Comment les mathématiciens le font :

- Les théoriciens des nombres l'ont fait en premier
- Nous savons que les analystes réels le font continûment, mais pour les spécialistes de théorie des ensembles, ce n'est qu'une hypothèse
- Les analystes complexes le font entièrement mais avec conformisme
- Les algébristes le font avec détermination et sans discrimination
- Les topologistes le font ouvertement, mais compactement
- Les topologistes différentiels et algébriques le font avec variété
- Les spécialistes de combinatoire le font discrètement
- Les statisticiens le font soit presque toujours, soit presque jamais

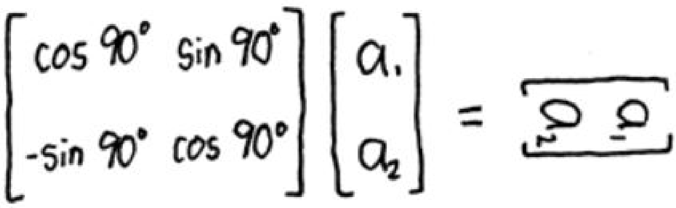
En cours de traduction de l'anglais

- Les théoriciens de la mesure le font presque partout
- Les logiciens le font avec consistance
- Les géomètres le font au foyer mais avec courbures et torsions
- Les théoriciens des groupes le font simplement et fidèlement
- Les théoriciens des anneaux le font avec intégrité
- Les théoriciens des corps le font en inversé
- Les spécialistes de programmation linéaire maximisent la performance et minimisent les efforts
- Markov avait besoin de chaînes pour le faire, et Noether d'anneaux
- Euler le faisait en cercle, tandis que Bernoulli le faisait en spirale ou en huit
- Möbius le faisait toujours du même côté
- Gauss le faisait normalement, Lebesgue, avec mesure, et Cauchy le faisait complètement, au contraire de Gödel
- Fermat a essayé de le faire dans la marge, mais il n'y avait pas assez de place
- On pense que Riemann et Goldbach l'on fait, mais on n'est encore jamais arrivé à le prouver

En cours de traduction de l'anglais

Qu'est-ce qu'un homme complexe dit à une femme réelle ?

Réponse : "viens danser !" (il faut lire "dans C", c'est-à-dire l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$)



Phrases à double sens :

- NOus allons maintenant résoudre ce problème sans complexes
- Un repère d'origine O (un repaire d'originaux...)
- Une partie de $\mathbb{Q}$ (a fucking party...)
- Ne confondez pas un ρ avec un p... (don't confuse between a fart and a burp)
- Une variété de Poisson... (a variety of fish)

Les fonctions logarithme et exponentielle sont au restaurant. Quand viendra l'addition, qui payera ?

Réponse : Exponentielle, car logarithme né paie rien.

Plus tard dans la nuit, Logarithme et Exponentielle rentrent chez eux un peu bourrés. Logarithme demande : Est-ce que je prends le volant ?

Exponentielle répond : Je préfère que ce soit moi qui conduise. Au cas où on dérive...

Deux suites de Cauchy veulent sortir en boite. Elles arrivent devant une boite où se déroule la soirée "No Limit". Elles décident de rentrer, mais le vigile les arrête en leur disant : "Désolé, c'est complet !". (dans un espace complet, une suite de Cauchy est convergente par définition, donc elle a une limite.)

En cours de traduction de l'anglais

Un mathématicien devint fou en pensait tout le temps qu'il était l'opérateur de différentation. Ses amis le placèrente dans un hôpital psychiatrique en attendant son rétablissement. Toutes les journées il les passait à dire aux autres patients de l'hôpital : "Je te dérive !".

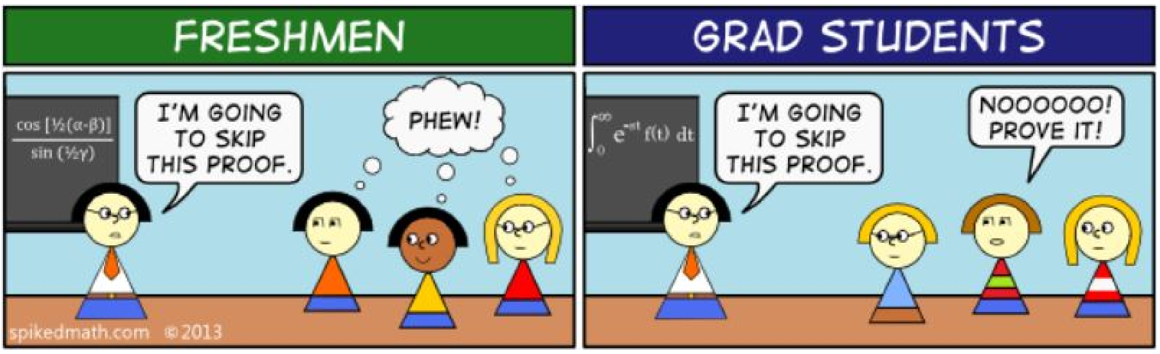
Un jour, il rencontra un nouveau patient et il lui dit immédiatement : "Je te dérive !", mais pour une fois, sa victime ne réagissa nullement à son attaque verbale. Surpris, le mathématicien cria et avec toute son énergie : "Je te dérive !", mais l'autre patient continua à n'avoir aucune réaction. Finalement, après un grand ressentiment de frustration, le mathématicien cria une dernière fois : "JE TE DÉRIVE !".

Le nouveau patient se retourna calmement et lui dit : "Tu peux me différencier autant de fois que tu veux. Je suis l'exponentielle de x".

Ce que les mathématiciens disent et ce qu'il faut comprendre :

- Trivial : Si je dois vous montrer ceci, vous êtes dans la mauvaise classe
- On peut trivialement montrer : On a pas besoin de plus de 4 heures pour le démontrer
- Contrôlez vous-même : C'est la partie difficile de la démonstration donc vous pouvez le faire sur votre temps libre
- Similairement : Au moins une ligne de la démonstration est identique à la précédente
- Procédons formellement : Nous allons manipuler des symboles avec des règles bien prédéfinies sans rien comprendre au sens réel du résultat.
- Nous nous dispenserons de la démonstration : Faites-moi confiance, c'est vrai !
- Le lecteur montrera facilement : Ça m'ennuie de montrer que...
- Nous conseillons vivement au lecteur de faire les exercices indiqués : Comme je les ai pas faits, vous pourriez me les corriger
- J'ai montré ce résultat dans un papier antérieur : Je ne sais plus diable comment on fait pour prouver ce truc-là
- On généralise facilement : La généralisation dépasse mon niveau
- D'après une propriété bien connue : Par 10 personnes au monde..

En cours de traduction de l' anglais



Il y a 3 types de personnes : ceux qui peuvent compter et ceux qui ne peuvent pas compter ...

Tout le monde connaît le "Théorème du Salaire" qui établit que les ingénieurs et les scientifiques ne peuvent JAMAIS gagner autant que les hommes d'affaires et les commerciaux. Ce théorème peut enfin se démontrer par la résolution d'une équation mathématique simple.

Notre équation s'appuie sur deux postulats très connus :

P1. La Connaissance c'est la Puissance

P2. Le Temps c'est de l'Argent

Tout ingénieur sait ensuite que :

$$\text{Puissance} = \frac{\text{Travail}}{\text{Temps}}$$

Puisque :

$$\text{Connaissance} = \text{Puissance}$$

et que :

$$\text{Temps} = \text{Argent}$$

Nous avons donc :

En cours de traduction de l'anglais

$$\text{Connaissance} = \frac{\text{Travail}}{\text{Argent}}$$

Nous obtenons alors facilement :

$$\text{Argent} = \frac{\text{Travail}}{\text{Connaissance}}$$

Ainsi quand la Connaissance tend vers zéro, l'Argent tend vers l'infini quelle que soit la valeur attribuée à Travail, cette valeur peut être très faible. À l'inverse quand la Connaissance tend vers l'infini, l'Argent tend alors vers zéro, même si la valeur Travail est élevée.

D'où la conclusion évidente suivante : Moins vous en connaissez, plus vous gagnez d'argent.

PS : Ceux d'entre vous qui ont eu quelques difficultés de compréhension doivent être les mieux rémunérés...

■ Q.E.D.

duction de l' anglais

Dans le même genre voici le "Théorème du misogyne" :

D'abord, nous déclarons que les filles sont des variables factorisables en quantités de temps et d'argent telle que :

$$\text{Filles} = \text{Temps} \times \text{Argent}$$

Comme nous le savons tous "le temps c'est de l'argent !". Donc :

$$\text{Te}mps = \text{Argent}$$

et parce que "l'argent est la racine du mal... " et que le mal est un synonyme du ce qui est mauvais :

$$\text{Argent} = \sqrt{\text{Mal}}$$

Donc nous avons par substitution :

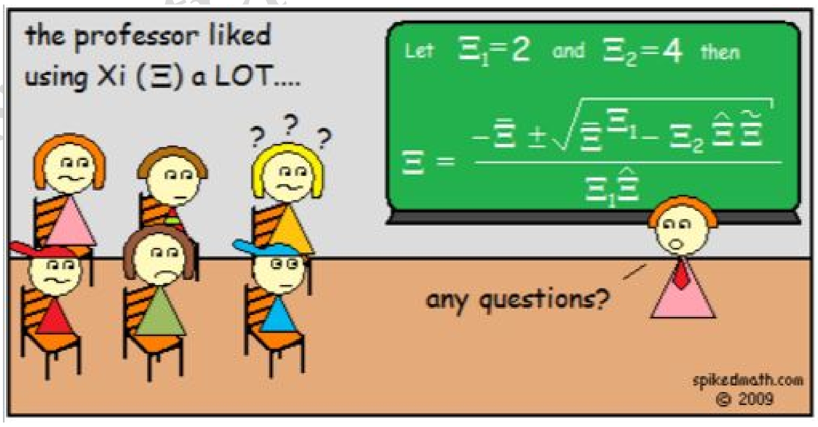
$$\text{Filles} = \left(\sqrt{\text{Mal}}\right)^2$$

Nous sommes donc forcés de conclure :

$$\text{Filles} = \text{Mal}$$

■ Q.E.D.

En cours traduction de l' anglais



Les dix meilleures excuses pour ne pas faire vos devoirs de maths :

#10. Galilée ne connaissait pas l'algèbre ; Pourquoi alors en aurais-je besoin ?

#09. Un drogué des maths m'a volé mes devoirs.

#08. Jai pris l'option physique et les devoirs semblent impliquer des maths, donc j'ai pensé que je pourrais juste faire cela à la place.

#07. J'ai la preuve, mais il n'y a pas de place pour l'écrire dans la marge.

#06. J'ai une calculatrice à énergie solaire et c'était nuageux.

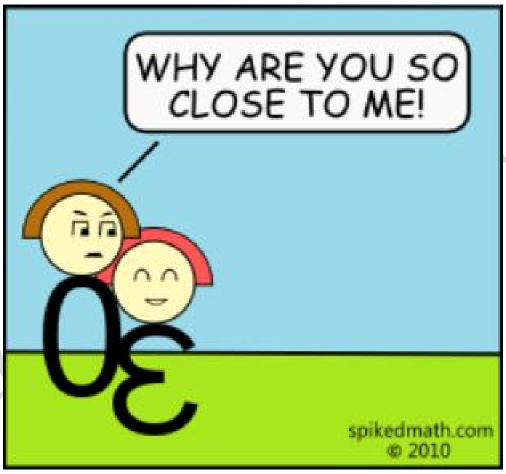
#05. Je regardais les World Series et je me suis ligoté en essayant de prouver que ça convergeait.

#04. Je ne pouvais qu'être arbitrairement proche de mon manuel. (J'ai atteint la moitié du chemin, puis la moitié, et puis ...)

#03. I couldn't figure out whether i am the square root of negative one or i is the square root of negative one.

#02. C'était le jour de l'anniversaire d'Einstein et de pi et nous avons eu cette célébration ! (Cela ne fonctionne que pour le 14 mars)

#01. J'ai accidentellement divisé par zéro et mon papier a pris feu.



En cours de l'anglais

Quel est le résultat de :

$$\frac{2ab}{2Fr.16}$$
(lire "2 abbés sur 2 françaises")

Réponse :

$$2bb\frac{a}{e}$$
(lire "2 bébés assurés")

Quel est le résultat de :

$$\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}}$$
(lire "cheval sur oiseau")

Comme nous avons :

$$\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}}=\frac{\text{vache}\cdot 1}{\beta\cdot 1}$$
(lire "vache + l" (contient toutes les lettres de "cheval") divisé par "bête à ailes")

Mais :

$$\frac{\text{vache}\cdot 1}{\beta\cdot 1}=\frac{\beta\cdot\pi\cdot 1}{\beta\cdot 1}$$
(lire "bête à pie + l" divisé par "bête à ailes")

Nous simplifions pour obtenir :

$$\frac{\not\beta\cdot\pi\cdot\not 1}{\not\beta\cdot\not 1}=\pi$$

Ce qui prouve que π est irrational parce qu'il n'y pas de comparaison rationelle entre un "cheval" et un "oiseau"...

En cours de traduction de l' anglais

À démontrer :

$$\frac{\text{ROSSINI}}{\text{SOLSIDO}} = 1$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{\text{ROS SI NI}}{\text{SOL SI DO}} = \frac{\text{ROS NI}}{\text{SOL DO}}$$

mais NI=DO ("NI vaut DO" c'est-à-dire "niveau d'eau") donc :

$$\frac{\text{ROS}}{\text{SOL}}$$

Mais SOL fait RINO (Solferino : c'est lors de cette bataille qu'Henri Dunant en voyant l'horreur a décidé de créer la Croix-Rouge) donc :

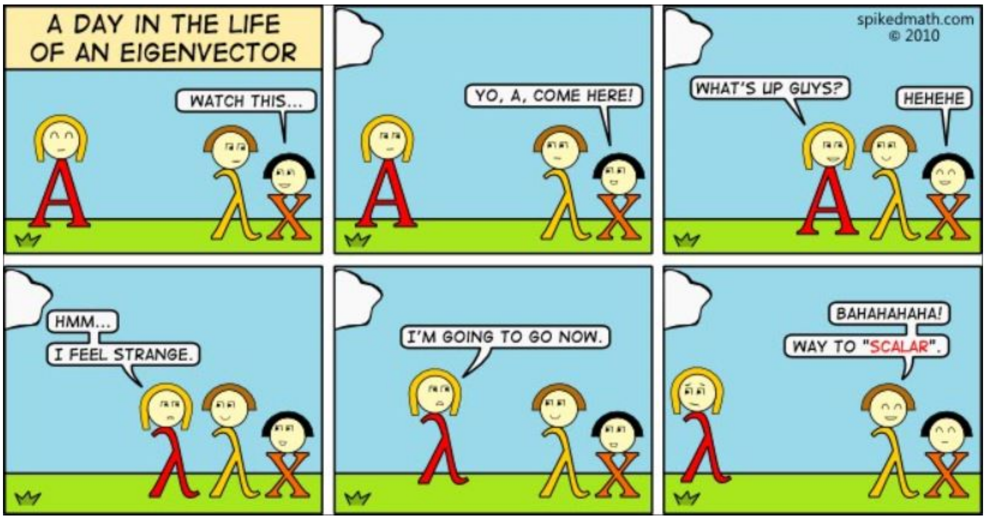
$$\frac{\text{ROS}}{\text{RI NO}}$$

et comme RINO c'est ROS (rhinocéros) donc RINO = ROS alors :

$$\frac{\text{ROS}}{\text{ROS}} = 1$$

■ Q.E.D.

En cours de traduction de l'anglais



Chaque futur ingénieur apprend à inscrire la somme de deux chiffres rationnels, par exemple :

$$1+1=2$$

Cette forme est cependant assez banale et indique des lacunes dans votre éducation.

En premier semestre, on apprend que :

$$1=\ln(e)$$

et :

$$1=\sin^2(p)+\cos^2(q)$$

Tout le monde sait aussi que :

$$2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et que donc l'équation :

$$1+1=2$$

peut être écrite plus simplement :

$$\ln(e)+\sin^2(p)+\cos^2(q)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(il faut admettre que l'aspect est bien plus clair et plus scientifique)

D'autre part, il est évident que :

$$1=\cosh(q)\sqrt{1-\tanh^2(q)}$$

et aussi :

$$e=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

il en résulte que :

$$\ln(e)+\sin^2(p)+\cos^2(q)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En cours de traduction de l' anglais

peut être réécrite comme suit :

$$\ln\left(\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)+\sin^2(p)+\cos^2(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cosh(q)\sqrt{1-\tanh^2(q)}}{2}\right)^n$$

Il faut également se rappeler que :

$$0!=1$$

et que l'exposant inverse de l'exposant opposé est égal à l'exposant opposé de l'exposant inverse. En supposant un espace à n dimension, on sait que :

$$\left(X^T\right)^{-1}-\left(X^{-1}\right)^{-T}=0$$

Si l'on prend encore la matrice comme la métrique d'un espace canonique orthogonal et orienté :

$$\left(g_{ij}^T\right)^{-1}-\left(g_{ij}^{-1}\right)^{-T}=0$$

Nous obtenons logiquement :

$$\left(\left(g_{ij}^T\right)^{-1}-\left(g_{ij}^{-1}\right)^{-T}\right)!=1$$

Nous obtenons ainsi une expression simple et claire pour tout le monde de $1+1=2$:

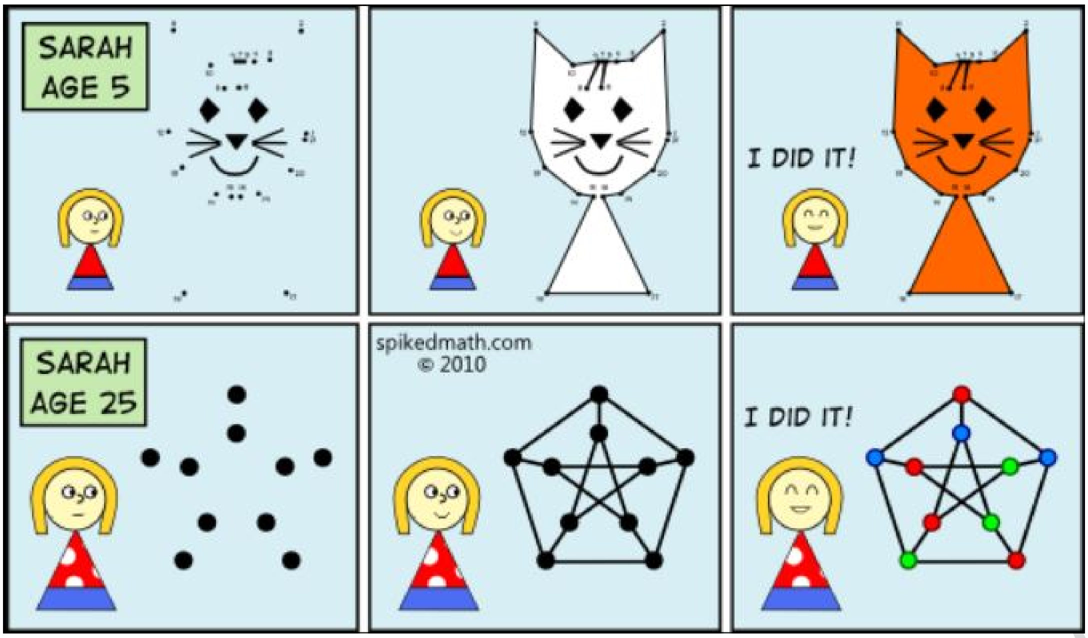
$$\ln\left(\lim_{z\to+\infty}\left(\left(\left(g_{ij}^T\right)^{-1}-\left(g_{ij}^{-1}\right)^{-T}\right)!+\frac{1}{z}\right)\right)+\sin^2(p)+\cos^2(q)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cosh(q)\sqrt{1-\tanh^2(q)}}{2}\right)^n$$

Il est donc évident que cette égalité est bien plus compréhensible que :

$$1+1=2$$

Il serait possible de montrer plusieurs autres développements de cette simple expression et nous le ferons à partir du moment où vous commencerez à comprendre les principes simples de la méthode précédente.

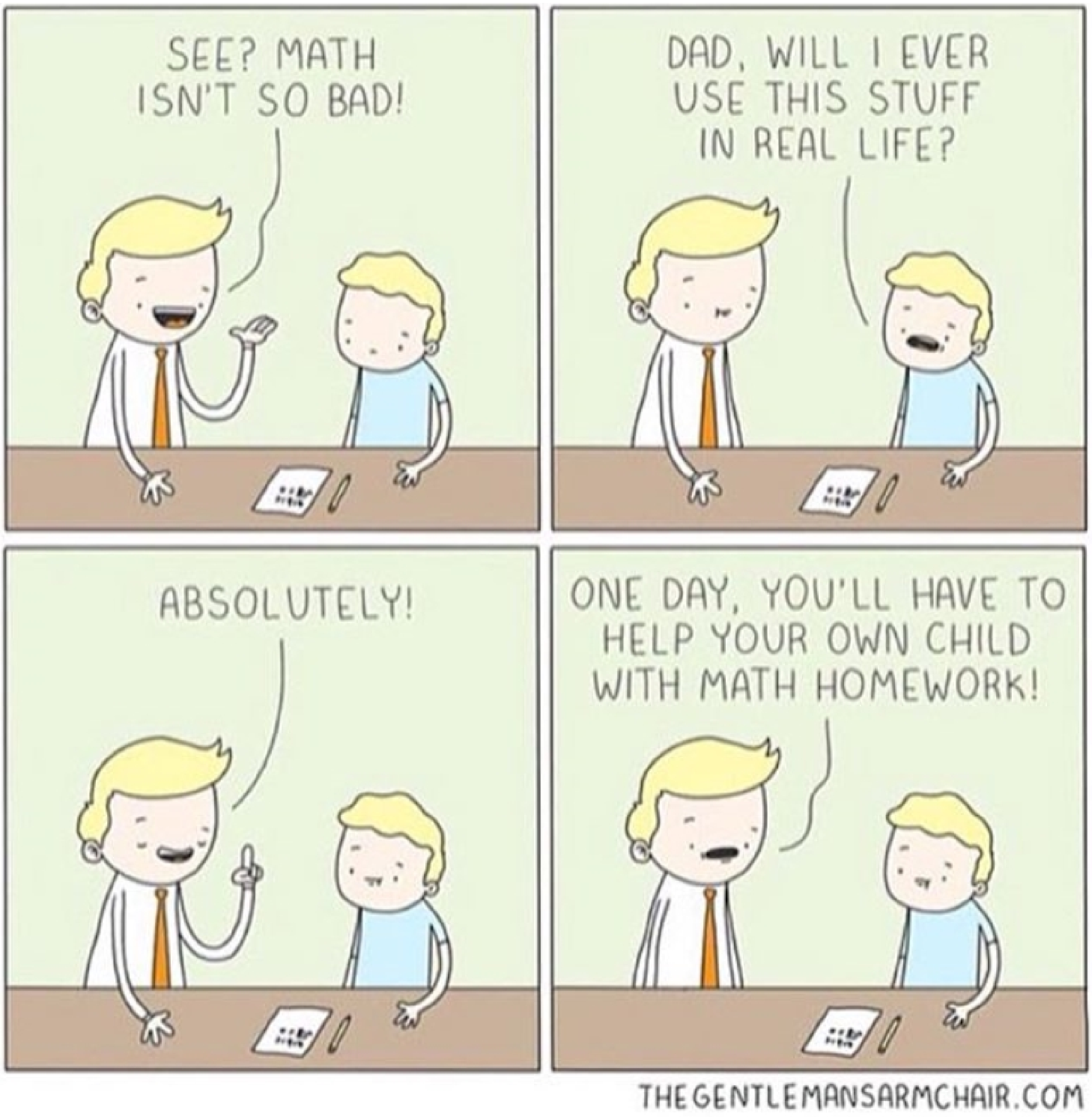
En cours de traduction de l'anglais



Un catcheur, un physicien et un mathématicien sont sujet à une expérience : on les enferme dans une pièce avec chacun une boite d'épinards, fermée, et sans ouvre-boîte. Au bout de 24 heures, on va voir ce qu'ils sont devenus.

- Le catcheur a réussi à ouvrir sa boîte : « Et bien, j'ai simplement violemment projeté la boîte contre le mur. L'impact a été tel qu'elle s'est ouverte », explique t-il.
- Le physicien a également réussi à ouvrir sa boîte : « J'ai observé le solide, et distingué ses points de rupture. J'ai alors effectué une pression de manière à exercer une force maximale sur ceux-ci, et la boîte s'est tout naturellement ouverte. »
- Le mathématicien, enfin, est retrouvé prostré dans un coin de la pièce, la sueur ruisselant sur son visage, et sa boîte de conserve, fermée, entre les pieds : « Admettons que la boîte est ouverte... Admettons que...»

En cours de traduction de l'anglais



Mathématique de la vie :

$$\begin{array}{lccc} & \text{Vie} + \text{Amour} = & & \text{Bonheur} \\ + & \text{Vie - Amour} = & & \text{Malheur} \\ \hline & 2\text{Vie} & = & \text{Bonheur+Malheur} \end{array} \tag{20.2.1}$$

Ainsi :

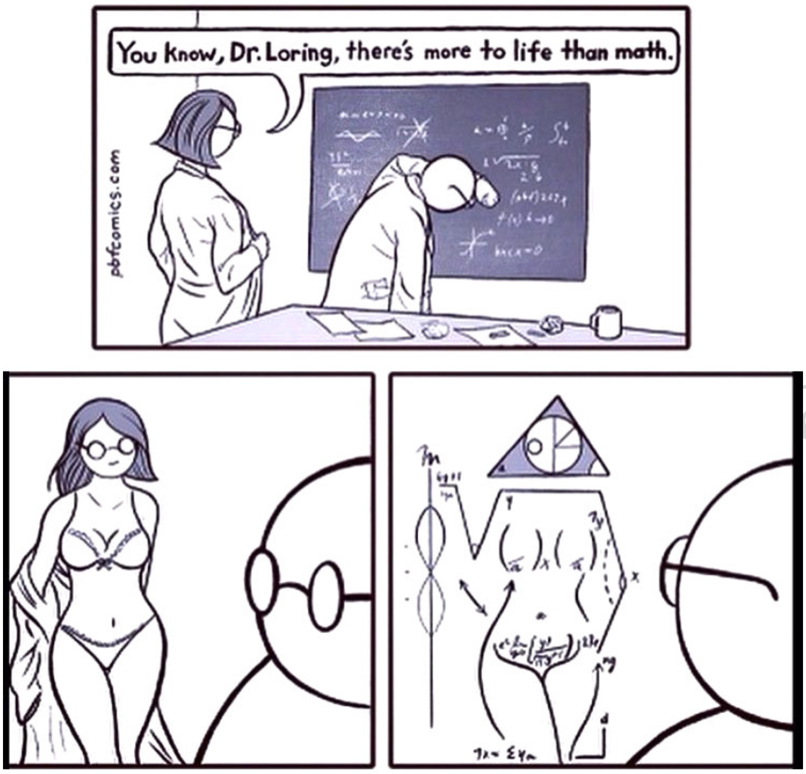
$$\text{Vie} = \frac{\text{Bonheur} + \text{Malheur}}{2} \tag{20.2.2}$$

En développant :

$$\text{Vie} = \frac{1}{2}\text{Bonheur} + \frac{1}{2}\text{Malheur} \tag{20.2.3}$$

C'est ça la vraie vie. Profitez-en !

An opinion without 3.14 is an onion. You'll understand !



En cours ... anglais

L'épouse d'un logicien accouche d'un bébé. Le médecin remet immédiatement le nouveau-né au père.

Sa femme demande avec impatience : "Alors, est-ce un garçon ou une fille" ?

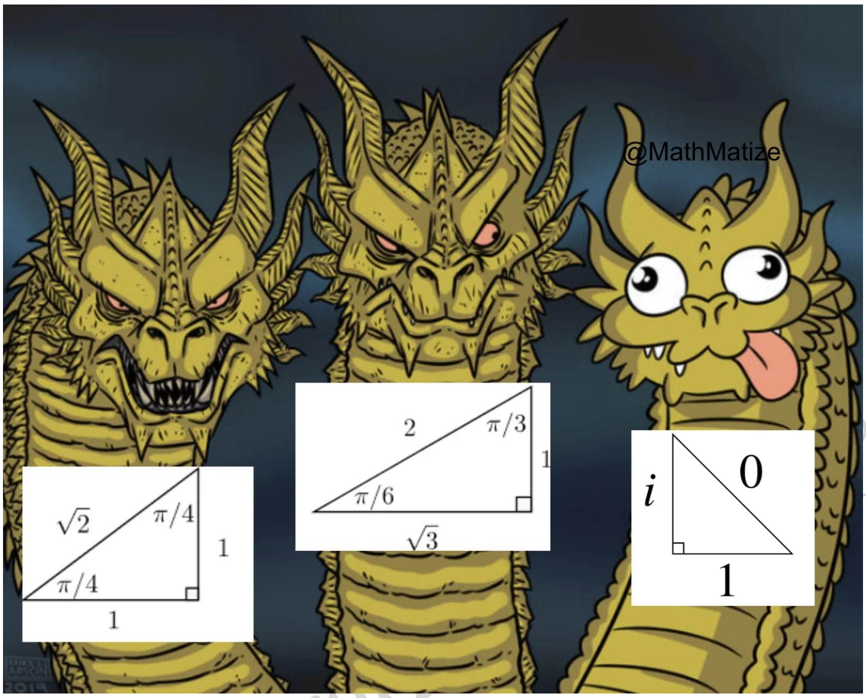
Le logicien répond : "Oui".

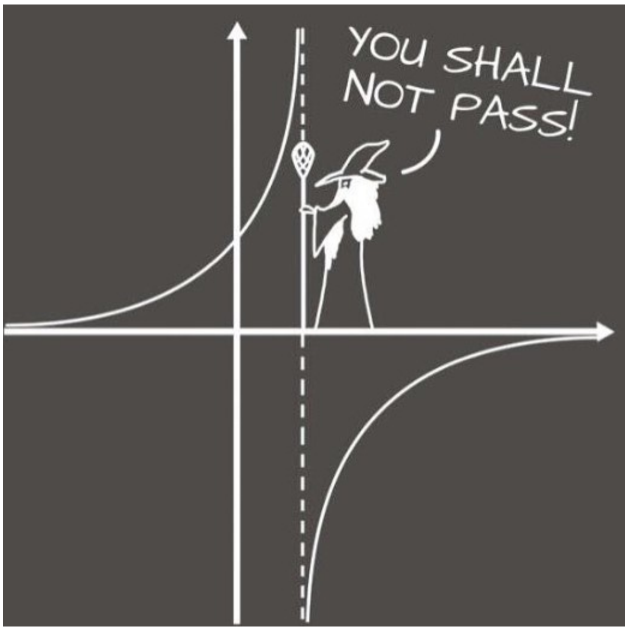
Question : Que représente le "B" dans Benoit B. Mandelbrot ?

Réponse : Benoit B. Mandelbrot

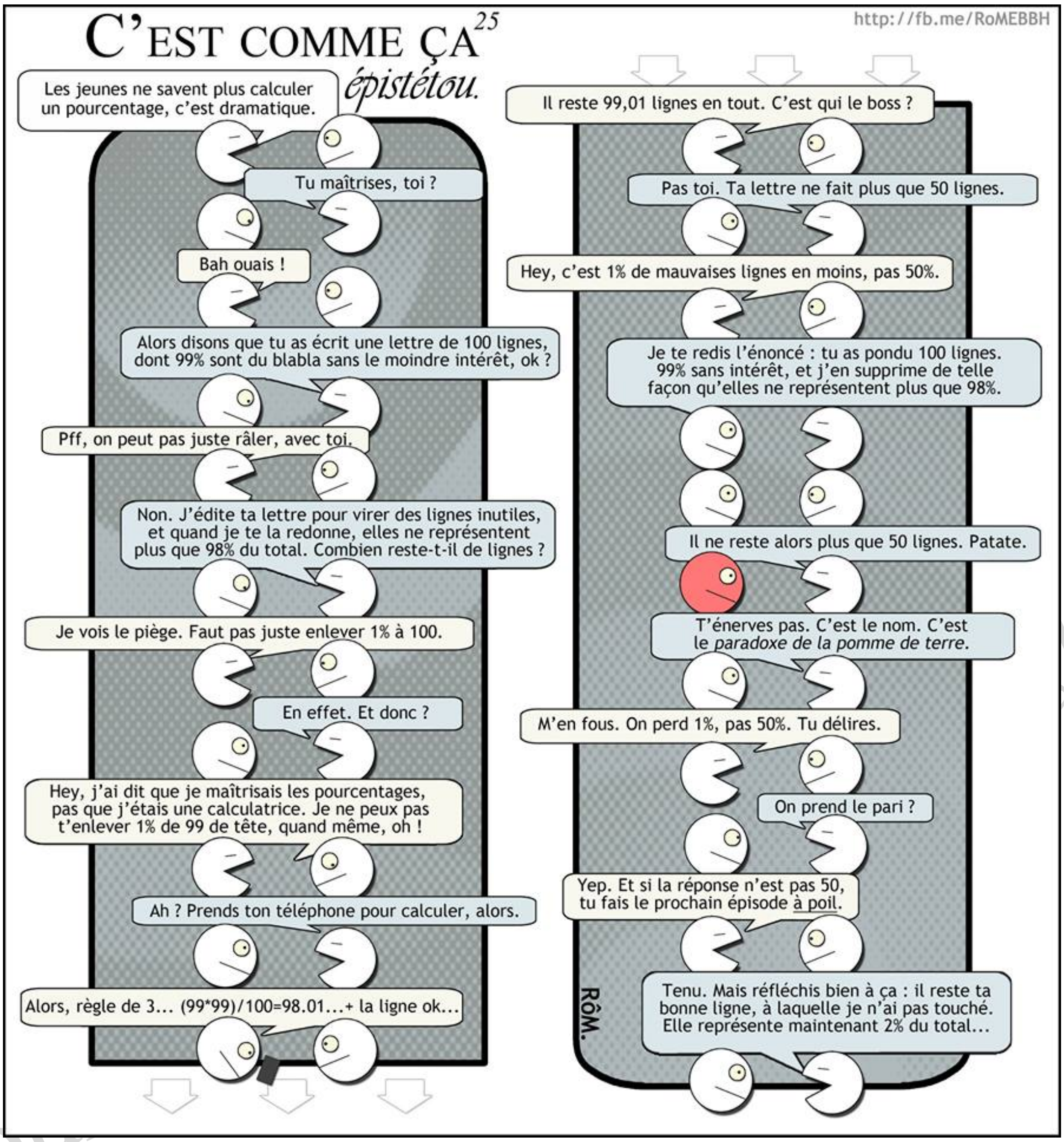
Ce n'est pas ainsi que nous faisons cette dérivée ... :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\frac{1}{x^2}=\frac{\cancel{\mathrm{d}}}{\cancel{\mathrm{d}}}\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2} \quad (20.2.4)$$

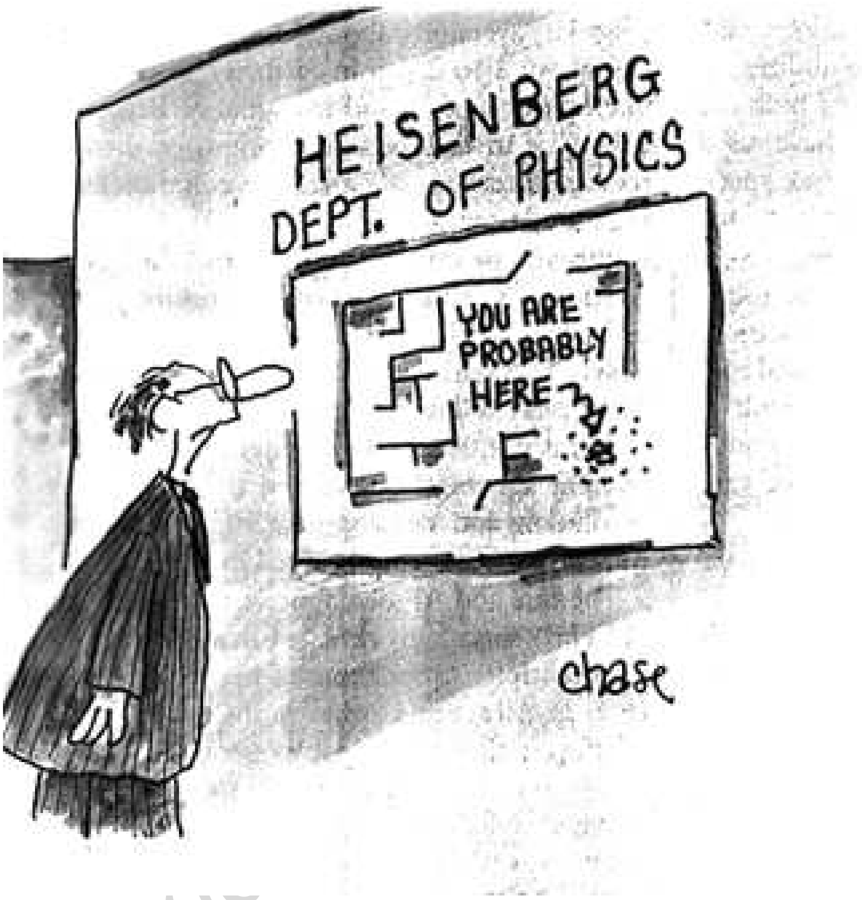




En cours de tra... anglais


C'EST COMME ÇA[25] épistétou.
http://fb.me/RoMEBBH
Les jeunes ne savent plus calculer un pourcentage, c'est dramatique.
Tu maîtrises, toi ?
Bah ouais !
Alors disons que tu as écrit une lettre de 100 lignes, dont 99% sont du blabla sans le moindre intérêt, ok ?
Pff, on peut pas juste râler, avec toi.
Non. J'édite ta lettre pour virer des lignes inutiles, et quand je te la redonne, elles ne représentent plus que 98% du total. Combien reste-t-il de lignes ?
Je vois le piège. Faut pas juste enlever 1% à 100.
En effet. Et donc ?
Hey, j'ai dit que je maîtrisais les pourcentages, pas que j'étais une calculatrice. Je ne peux pas t'enlever 1% de 99 de tête, quand même, oh !
Ah ? Prends ton téléphone pour calculer, alors.
Alors, règle de 3... (99*99)/100=98.01...+ la ligne ok...
Il reste 99,01 lignes en tout. C'est qui le boss ?
Pas toi. Ta lettre ne fait plus que 50 lignes.
Hey, c'est 1% de mauvaises lignes en moins, pas 50%.
Je te redis l'énoncé : tu as pondu 100 lignes. 99% sans intérêt, et j'en supprime de telle façon qu'elles ne représentent plus que 98%.
Il ne reste alors plus que 50 lignes. Patate.
T'énerves pas. C'est le nom. C'est le *paradoxe de la pomme de terre.*
M'en fous. On perd 1%, pas 50%. Tu délires.
On prend le pari ?
Yep. Et si la réponse n'est pas 50, tu fais le prochain épisode à poil.
Tenu. Mais réfléchis bien à ça : il reste ta bonne ligne, à laquelle je n'ai pas touché. Elle représente maintenant 2% du total...
RôM.

20.3. Physique



En cours de ... anglais

- En théorie, il n'y a pas de différences entre la théorie et la pratique. En pratique, si !
- La théorie, c'est quand on sait tout, mais que rien ne marche. La pratique, c'est quand tout marche, mais qu'on ne sait pas pourquoi. En informatique, la théorie et la pratique sont réunies : rien ne marche et on ne sait pas pourquoi !

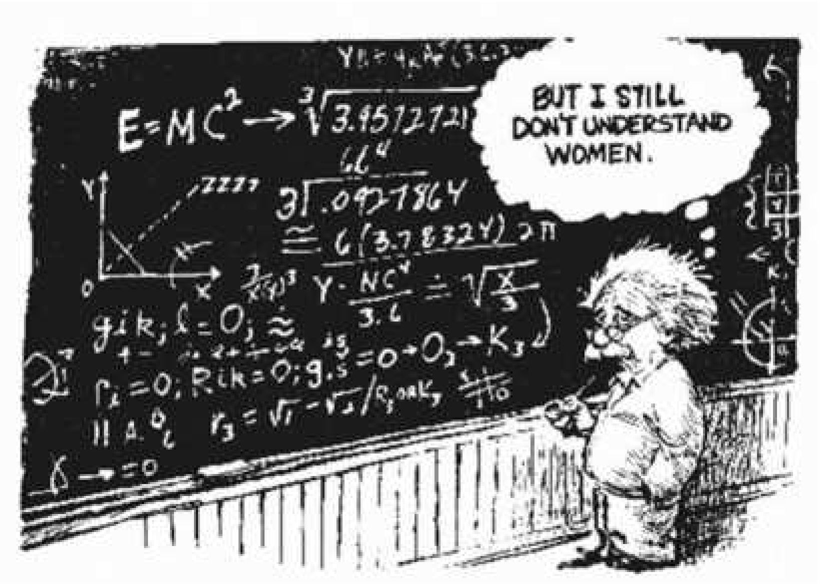
- La matière est fondamentalement fainéante : Elle prend toujours le chemin de moinde action.
- La matière est fondamentalement stupide : Elle essaie tous les chemins d'abord.
- Ceci est le coeur de la physique, le reste n'étant que détails !

Ce sont deux atomes qui se rencontrent.

L'un dit à l'autre : "Merde, j'ai perdu un électron !"

L'autre : "T'es sûr ?"

Et le premier répond : "POSITIVEMENT ! !"



En cours de ... anglais

Vous entrez dans un laboratoire et vous voyez une expérience. Comment allez-vous deviner de quelle section il s'agit ?

- Si c'est vert et visqueux, c'est la biologie.
- Si ça pue, c'est la chimie.
- Si cela ne marche pas, c'est la physique.

Théorème : Un chat à neuf vies.

Démonstration : Comme aucun chat à huit vies, tout chat à une vie de plus que pas de chat. Donc par extension un chat à neuf vies.

Un physicien étudiant la physique quantique, c'est quelqu'un qui ne voyant pas très bien, cherche dans une chambre obscure, un chat noir, qui probablement n'existe pas.

En cours de traduction de l' anglais

Un ingénieur, un physicien, un mathématicien et un mystique sont interrogés sur la plus grande inventions de tous les temps.

- L'ingénieur choisit le feu, qui donna à l'humanité le contrôle de la matière.
- Le physicien choisit la roue, qui donne à l'humanité le contrôle de l'espace.
- Le mathématicien choisit l'alphabet, qui donna à l'humanité le contrôle sur les symboles.
- Le mystique choisit la bouteille thermos.

  "Pourquoi la bouteille thermos ?" lui demandèrent les trois autres ?
- Question à laquelle le mystique répondit : "Ben oui ! Le bouteille thermos elle garde les liquides chauds quand il fait froid, et froids quand il fait chaud."
- "Et... alors ?" lui demandèrent les autres ?

– "Réfléchissez !" dit le mystique. "La petite bouteille, peut-elle savoir cela ?".

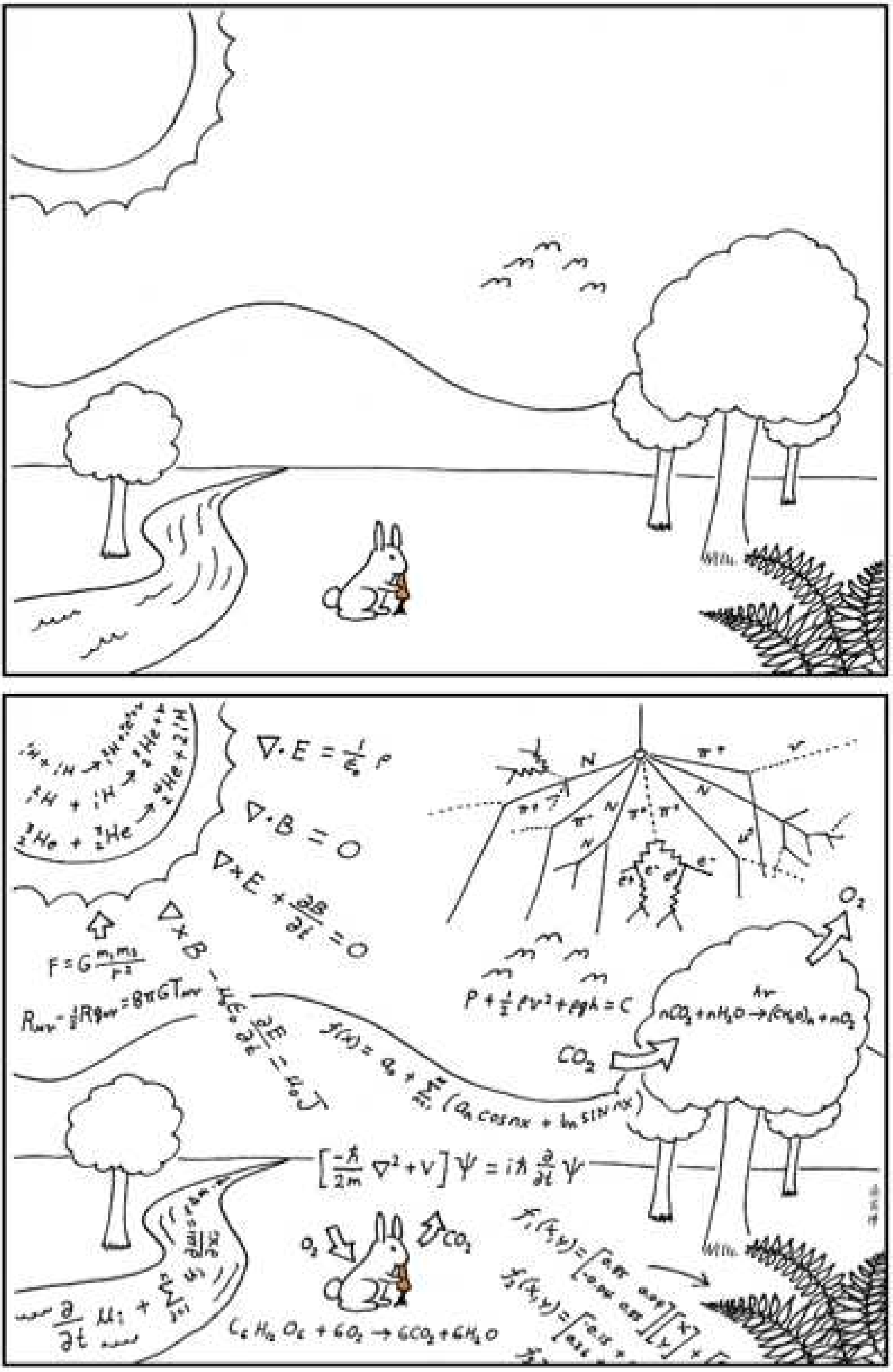
En cours de ... anglais

Un professeur de physique a effectué une expérience et a déterminé une équation empirique pour expliquer les données obtenues. Il demande alors à un professeur de maths d'y jeter un coup d'oeil.

Une semainee plus tard, le professeur de math lui dit que son équation n'est pas valide. Ce à quoi le physicien rétorque que pourtant cette dernière lui a permis de prévoir les autres expériences qu'il a fait entre temps et qu'il a obtenu des résultats excellents, alors il demande au mathématicien de vérifier à nouveau.

Une autre semaine passe, et les deux professeurs se rencontrent à nouveau. Le mathématicien admet alors que l'équation marche effectivement, mais "Seulement dans le cas trivial où les nombres sont réels et positifs".

Les centrales de fusion nucléaire utilisables ne le seront pas avant 30 ans et il en sera toujours ainsi !



This is how scientists see the world.

Heisenberg conduisait une voiture sur l'autoroute lorsqu'un policier l'interpella.

Le policier lui demanda :

– ""Savez-vous à quelle vitesse vous rouliez au moins ?"

Ce à quoi Heisenberg répondit :

– "Non mais je sais où je me trouve".

Quelle est la différence entre la mécanique automobile et la mécanique quantique ?

Réponse : La mécanique quantique peut parfois ranger la voiture dans le garage sans ouvrir le porte.

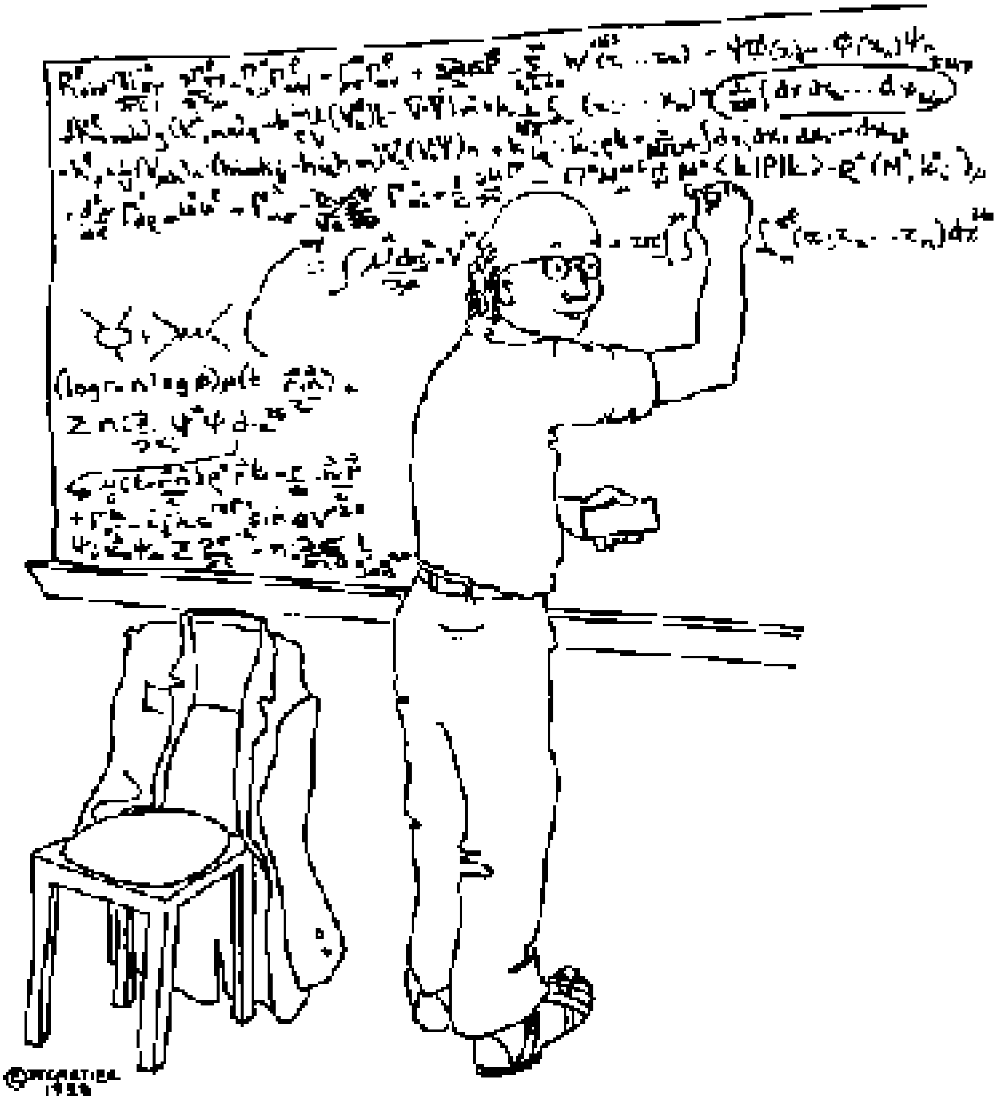
Ce n'est pas le :

$$v_f = v_0 + at$$

qui vous tue, c'est le :

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

En cours de traduction de l'anglais



"At this point we notice that this equation is beautifully simplified if we assume that space–time has 92 dimensions."

En
nglais

Pourquoi Dieu n'a jamais reçu un docteur honoris causa d'une quelconque Université :

1. Il a seulement une unique publication majeure,
2. Cette publication est en hébreu.
3. Elle n'a aucune référence bibliographique.
4. Elle n'a jamais été publiée dans une revue de référence.
5. Il y a des doutes qu'il l'ait rédigée lui-même.

6. Il est peut-être vrai qu'il a créé le monde, mais qu'a-t-il fait depuis ?

7. Sa participation et sa coopération ont été relativement limitées.

8. La communauté scientifique a une grande difficulté à reproduire ses résultats.

9. Il n'a jamais appliquée la convention éthtique sur la manipulation d'êtres humains.

10. Quand une personne tenta de tester ses résultats, il noya tout les lieux et sujet d'expérimentation.

11. Quand ses résultats n'étaient pas conformes à ses attentes, il les supprima de l'échantillon.

12. Il a rarement suivi des classes et mais par contre n'a pas hésité à conseiller de lire un ouvrage.

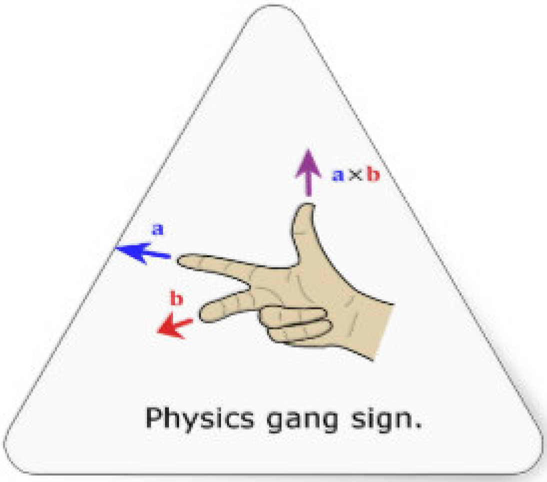
13. Certains disent que son fils et dans les classes.

14. Il a dispensé ses deux premiers élèves de tout enseignement.

15. Dans ses examens, il y avait toujours 10 critères et la majorité des ses étudiants y ont échoué.

16. Ses horaires de disponibilité sont irréguliers et il n'est jamais là quand on a besoin de lui.

En cours de traduction de l'anglais



Au tout début, il y avait Aristote :

- Et les objets au repos tendaient à rester au repos
- Et les obets en mouvement tendaient à revenir au repos
- Dieu vit que c'était ennuyant et peu utile.

Alors Dieu créa Newton :

- Et les objets au reps tendaient à rester au repos
- Et les objets au mouvement tendaient à rester en mouvement
- Et l'énergie ainsi que le moment étaient conservés
- Et la matière était conservée
- Dieu vit que cela était très conservatif.

Et Dieu créa Einstein :

- Et tout était relatif
- Et les choses rapides devinrent petites
- Et les choses plates devinrent courbes
- Et l'Univers était rempli de référentiel inertiels
- AEt Dieu vit que cela était la relativité générale, mais une partie était particulièrement relative.

Alors Dieu créa Bohr :

- Et il y eu LE principe
- Et le principe était quantifié
- Et tout était quantifié
- Mais certains choses restaient relatives
- Et Dieu dit que cela était confus.

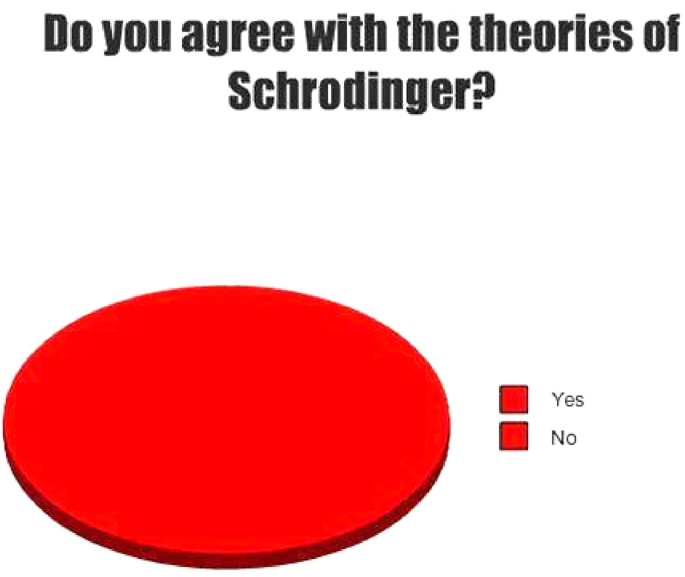
Alors Dieu allait créer Furgeson :

- Et Furgeson allait tout unifier

En cours de traduction de l' anglais

- Et il allait mette les théories sous forme de champs
- Et tout ne serait plus qu'un
- Mais c'était le 7ème jour
- Et Dieu se reposa
- Et ce qui est au repos tend à rester au repos...

En cours de traduction de l' anglais



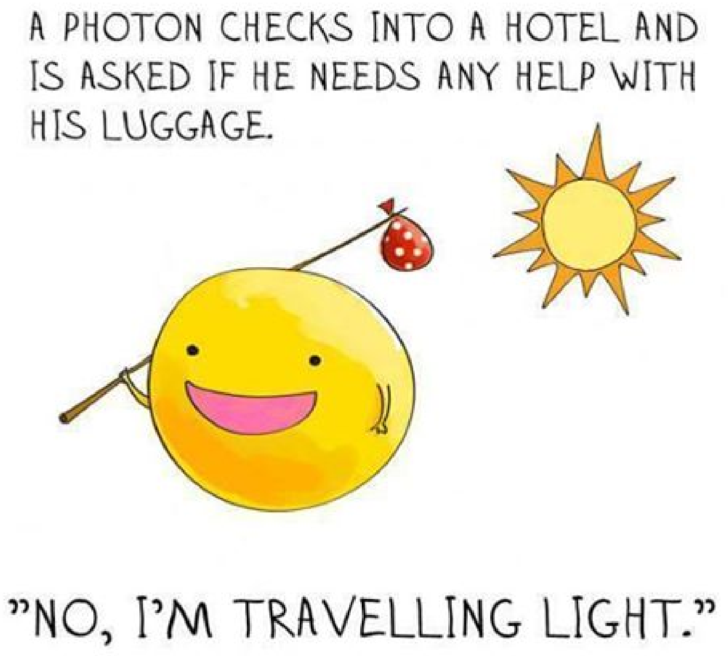
La table des lois des physiciens

En cours de traduction de l'anglais

Nous supposerons triviaux les postulats suivants comme quoi tous les physiciens sont nés égaux, en première approximation, et qu'ils ont été dotés par la créateur de quelques privilèges, avec une espérance de vie suffisante et n degrés de liberté, et les lois suivantes qui sont invariantes pour toute transformation linéaire :

1. Approximer tous les problèmes à des cas idéaux.
2. Utiliser des ordres de grandeurs de calculs particuliers uniquement quand cela est nécessaire.
3. Utiliser des simplifications dès que le problème étudié implique autre chose que des nombres entiers.
4. Négliger ou considéréer comme non physique toutes les fonctions qui divergent.
5. Invoquer le principe d'incertitude quand confronté à des mathématiciens, chimistes, ingénieurs ou autres scientifiques confus.
6. Marmonner quand un non-physicien pose une question trivial impliquant des mathématiques élémentaires.
7. Égaliser les deux côtés d'une équation qui sont dimensionnellement inconsistentes, avec une remarque du type "De toute façon, nous sommes seulement intéressés à un ordre de grandeur"....
8. Utiliser des notations non traditionnelles où les conventions mathématiques d'usage ne fonctionnement pas.

9. Inventer des forces fictives ou virtuelles pour brouillet le public.
10. Utiliser des raisonnements incorrects sur la base que cela donne le bon résultat.
11. Utiliser toujours des conditions initiales utilisant le principe général de trivialité.
12. Utiliser des arguments plausibles en lieu et place de preuves et de se référer à ses arguments comme étant des preuves.
13. Prendre pour vrai tout principe qui semble correct mais que ne peut pas être démontré.



En cours anglais

Vous pouvez utiliser ce petit quiz pour vérifier si vous êtes un vrai scientifique ou non.

1. À noël vous :
   a. Prenez quelques jours pour vous passer du temps avec votre famille.
   b. Vous partez un peu plus tôt du travail pour prendre le temps d'achter des cadeaux à votre famille.
   c. Vous travaillez seulement une demi journée au bureau, passant le reste de la journée à travailler à la maison.
2. Votre épouse souhaite discuter des plans pour les prochaines vacances. Vous :
   a. Proposez du camping ce qui vous permettre d'expliquer la beauté de la nature aux enfants.
   b. Vous proposez d'aller dans une autre ville comme cela vous pouvez allez voir un autre collègue dans son laboratoire pendant que votre épouse surveille les enfants.
   c. Vous demandez à votre femme : "Nous avons des enfants ?"
3. À un colloque scientifique dans une île du pacifique sud, aucune réunion n'est prévue pendant un après-midi. Pendant ce temps libre, vous :
   a. Suiviez la tradition locale et prenez un bain nu sur la plage.
   b. Prenez place sur la plage complétement habillé, désintéressé de la vue des baigneuses nues et parlez sciences avec vos collègues.
   c. Allez dans votre chambre d'hôtel avec les rideaux fermées pour travailler sur votre prochain article.
4. La maîtresse d'école vous appelle en disant que votre enfant à la varicielle. Vous :
   a. Stoppez immédiatement tout ce que vous êtes en train de faire et partez immédiatement pour l'école afin de récuperer votre enfant.
   b. Stoppez immédiatement tout ce que vous êtes en train de faire et cherchez un traitement contre la varicelle.
   c. Vous demandez à la maîtresse la route pour l'école et le nom de vos enfants.
5. Des êtres d'une autre planète visitent la Terre et vous êtes le premier humain qu'ils rencontrent. Pour vous montrer leur pacificité, ils vous offrent un présent capable de prolonger la vie, arrêter la suffrance humaine mondiale et éradiquer la faim dans le monde. Vous :
   a. Présentez le cadeau aux Nations Unies.
   b. Vous posez un brevet.
   c. Vous le cassez pour voir comment il fonctionne à l'intérieur.
6. Quelle est la plus grande période de temps pendant laquelle vous n'avez pas pris de vacances (en excluant les colloques scientifiques...) ?
   a. Six mois.

En cours de traduction de l'anglais

   b. Deux ans.
   c. Vous avez pris un week-end il y a environ 10 ans.

7. Quels sont vos loisirs ?
   a. Sport, musique, danse parce qu'ils permettent à la partie analytique de mon cerveau de se reposer.
   b. Cuisiner, parce que c'est un peu comme une science.
   c. Relire les anomalies dans les revues scientifiques, numéro par numéro.

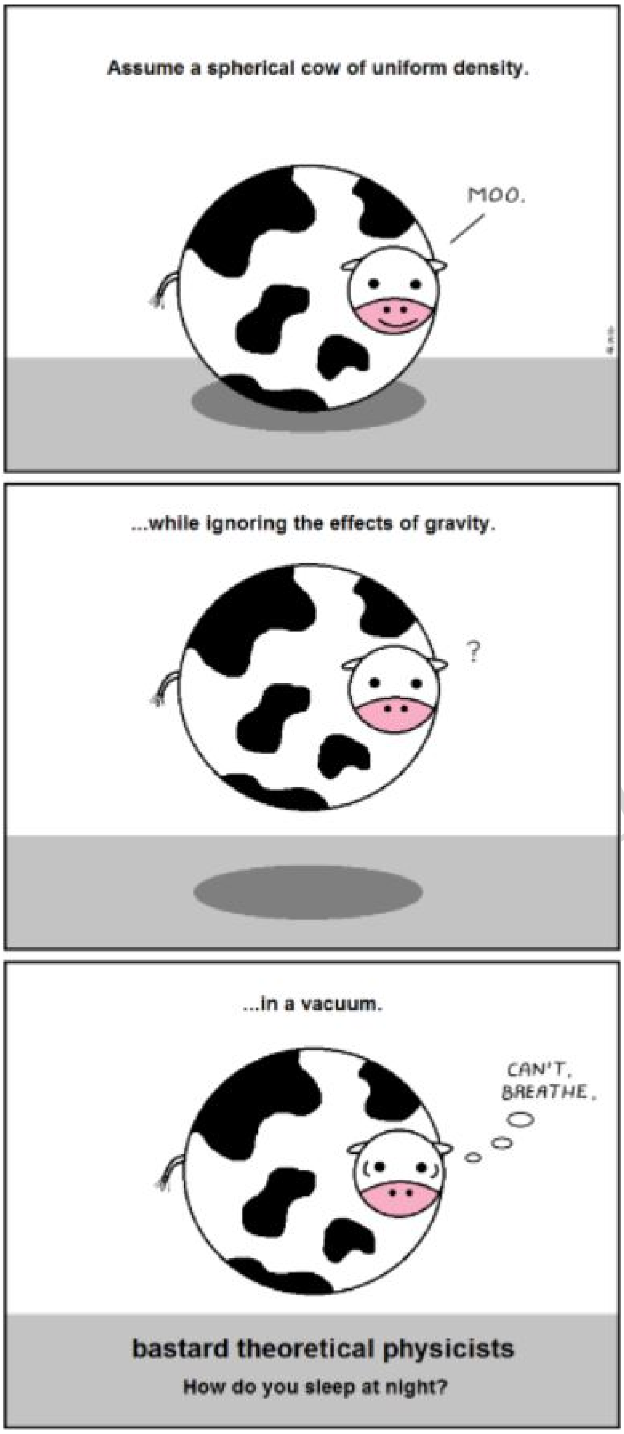
8. Votre meilleur ami est :
   a. Un membre de votre entourage.
   b. Un membre de votre famille.
   c. Un membre de la même race que la votre.

Score :

Donnez-vous 1 un point pour chaque question répondu par un "a", 5 points pour chaque "b" et pour chaque "c". Si vous avez refait le test 3 fois et que vous avez effectué une moyenne de vos points, rajoutez 100 points en extra. Si vous avez calculé l'erreur standard de la moyenne, rajoutez-vous 500 points en extra.

Si vous avez un score inférieur à 10, vous êtes normal. Un score entre 11 et 50 indique une obsession scientifique et vous devriez penser à joindre les *Scientifiques Anonymes*. Si votre score est supérieur à 500, oubliez les *Scientifiques Anonymes* et retournez au travail car il est impossible de faire quoi que ce soit pour vous, de plus vous allez très probablement réussir en tant que scientifique.

En cours de traduction de l'anglais

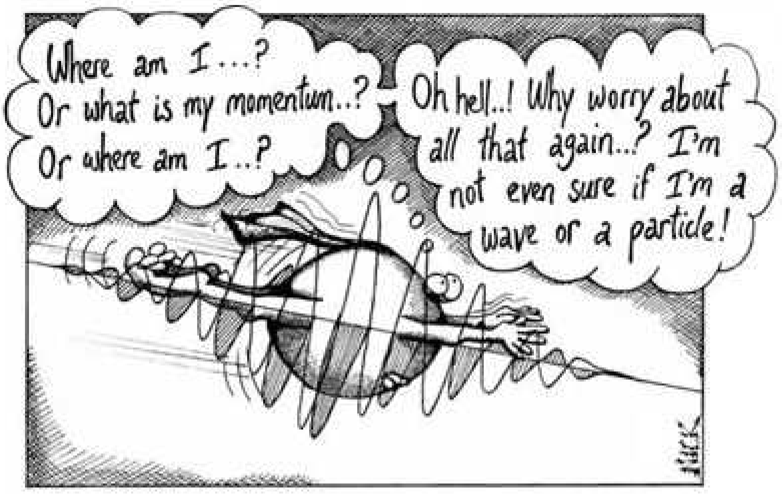


En cours de l'anglais

Comment il faut comprendre certaines phrases dans les publications des physiciens :

- Il est bien établi que... : Je ne me suis pas donné la peine de lire les références, mais...
- Ceci est de grande importance théorique : Ceci est important pour moi.
- Quoiqu'il n'ait pas été possible de donner une réponse définitive : L'expérience échoua, mais il me semble tout de même pouvoir en tirer une publication.
- La technique utilisée fut particulièrement adéquate... : Le copain du labo d'à côté avait déjà mis la technique au point.
- 3 échantillons furent choisis pour une étude exhaustive : Les résultats obtenus à partir des autres échantillons n'ont rien donné de cohérent .
- Manipulé avec la plus grande précaution durant toute l'expérimentation : Ne fut pas jeté à l'égout.
- La concordance avec la théorie est excellente : elle est passable.
- La concordance avec la théorie est bonne : elle est faible.
- La concordance avec la théorie est satisfaisante : elle est douteuse.
- La concordance avec la théorie est passable : elle est totalement imaginaire.
- Il est généralement admis que... : 2 collègues pensent comme moi
- Il est admis que : Je crois que.
- Il est évident que des travaux complémentaires seront utiles : Je n'ai rien compris.
- Voici quelques résultats typiques : Voici les meilleurs résultats.
- Significatif dans un intervalle de confiance de... : non significatif.
- Les réactifs utilisés furent synthétisés au laboratoire selon des techniques standardisées : Les réactifs furent achetés chez...
- Malheureusement, les bases quantitatives permettant de tirer profit des résultats n'ont pas encore été formulées : Personne n'est arrivé à comprendre quoi que ce soit à ce qui a été observé.
- Nous remercions X pour sa précieuse collaboration et Y pour les discussions fructueuses : X a fait le travail et Y m'a expliqué ce que signifiaient les résultats.

En cours de traduction de l' anglais



An experimental physicist performs an experiment involving tow cats, and an inclined tin roof.

The two cats are very nearly identical ; same sex, age, weight, breed, eye and hair colour.

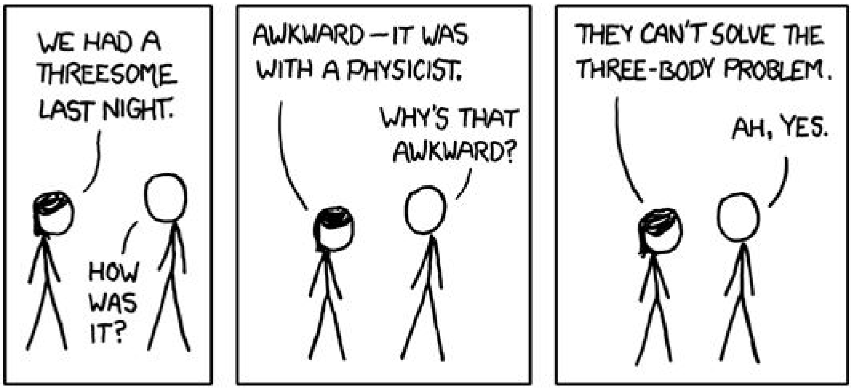
The physicist places both cats on the roof at the same height and lets them both go at the same time.

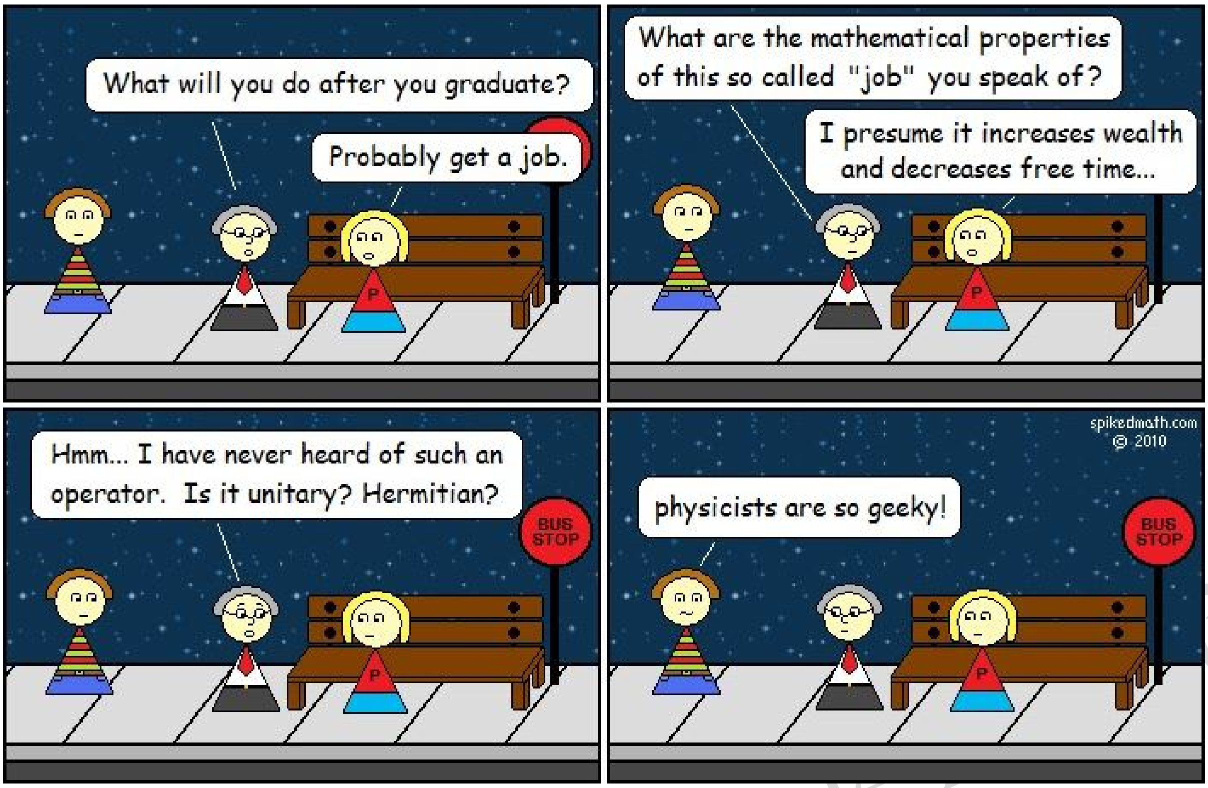
One of the cats fall off the roof first so obviously there is some difference between the two cats.

What is the difference ?

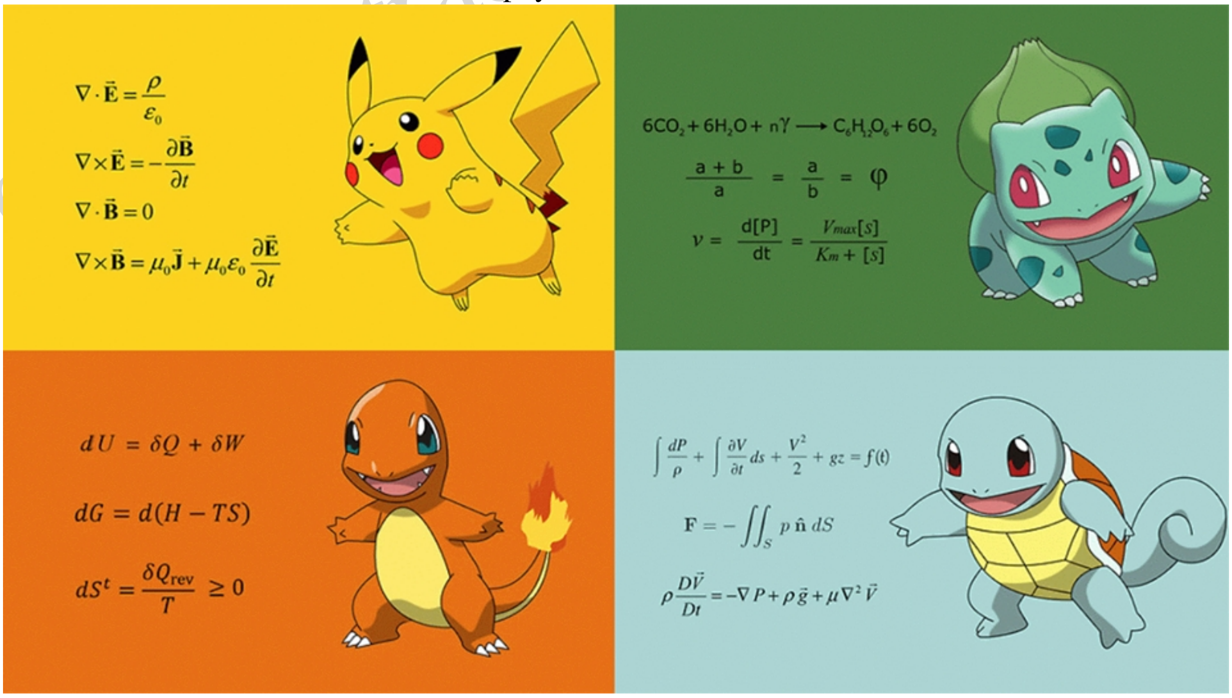
One cat has a greater mew !

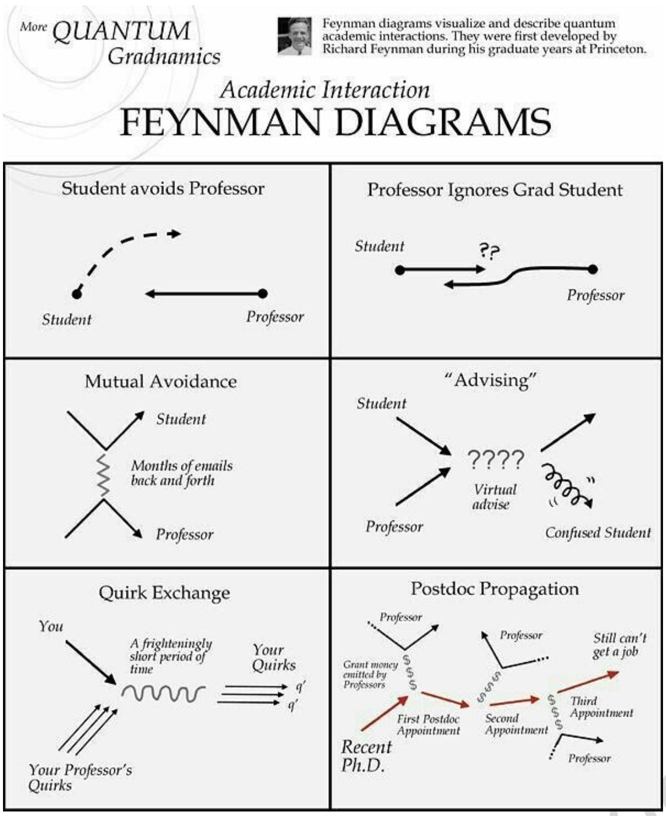
En cours de traduction de l'anglais

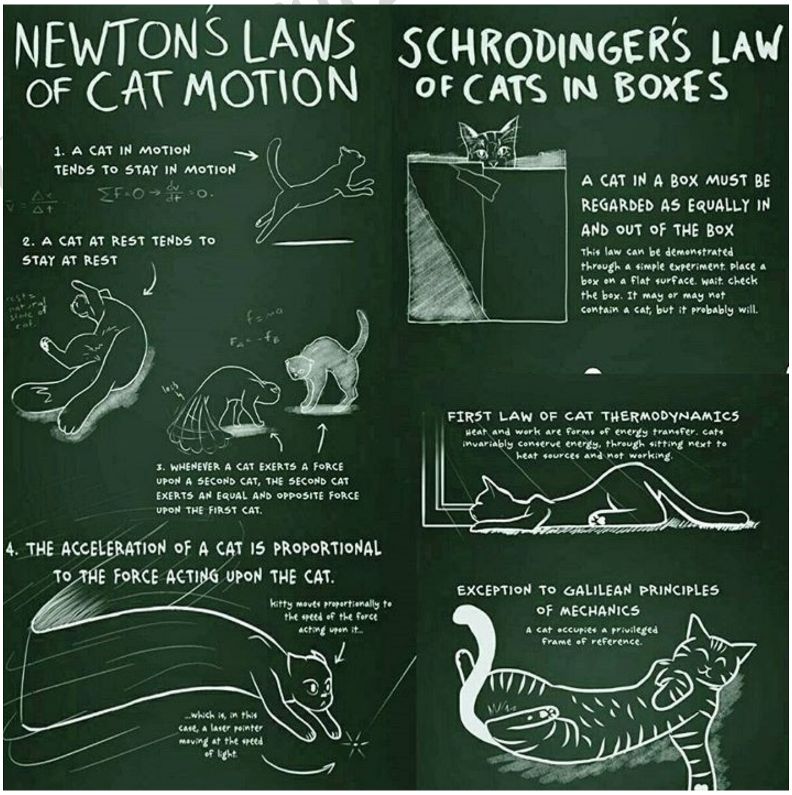




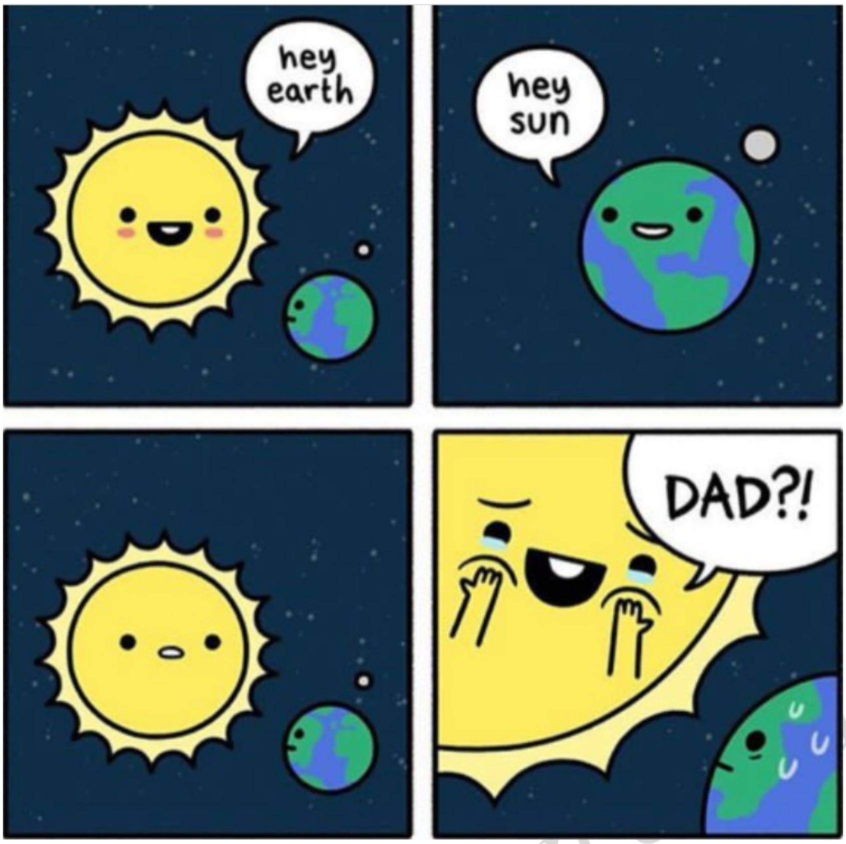
This is how physicists see the Pokemon :







En cours de production de l'anglais

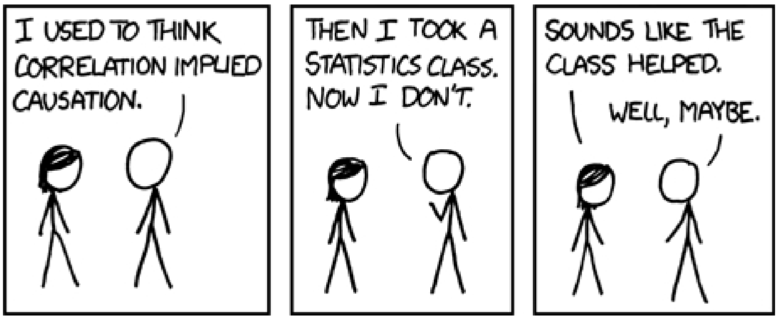


En cours traduction nglais

"About your cat, Mr. Schrödinger—I have good news and bad news."

20.4. Statistiques

Trois statisticiens sortent faire du tir sur cible statique. Le premier statisticien fait feu et tire trop à gauche, le deuxième fait feu, mais tire symétriquement trop à droite. Enfin, le dernier ne tire pas, mais s'exprime triomphalement : "En moyenne nous l'avons eu !"



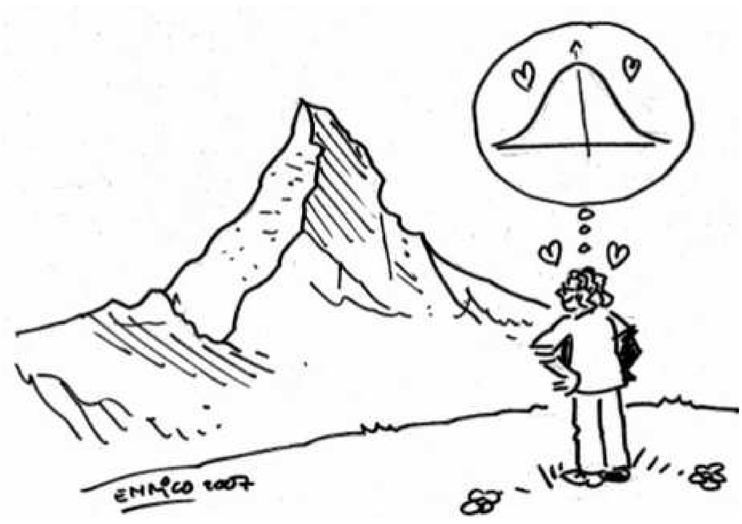
Patient : "Vais-je survivre à cette opération délicate ?"

Chirurgien : "Oui, je suis absolument sûr que vous y survivrez."

Patient : "Comment pouvez-vous être si sûr ?"

Chirurgien : "9 patients sur 10 meurent lors de cette opération mon neuvième patient est mort hier !"

En cours de traduction de l'anglais



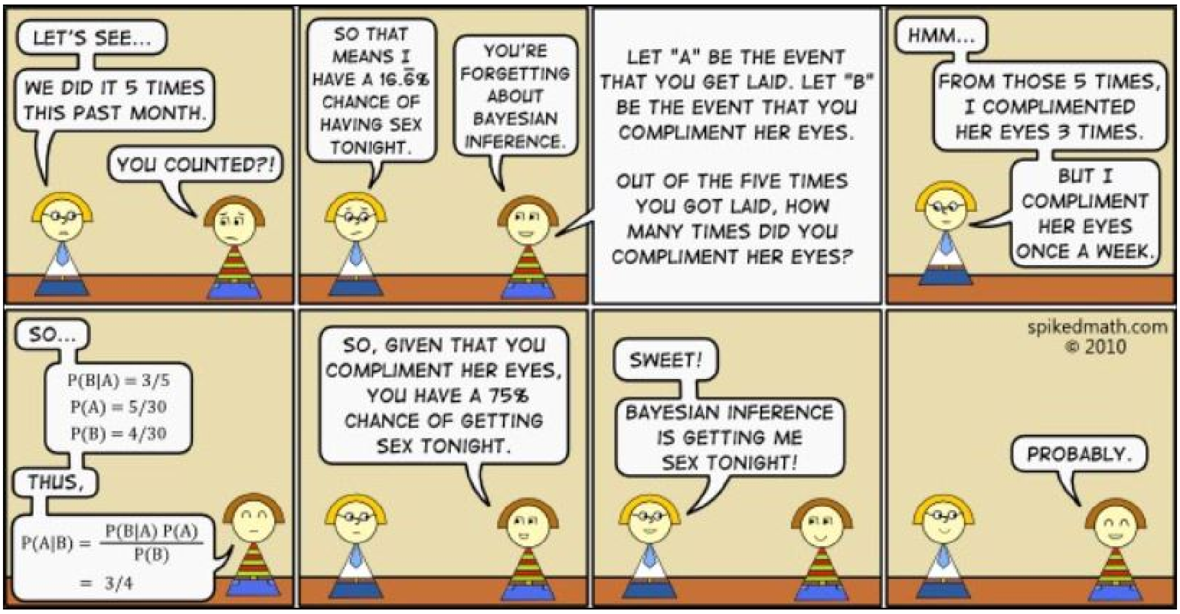
10 bonnes raisons pour s'orienter dans le domaine de la statistique :

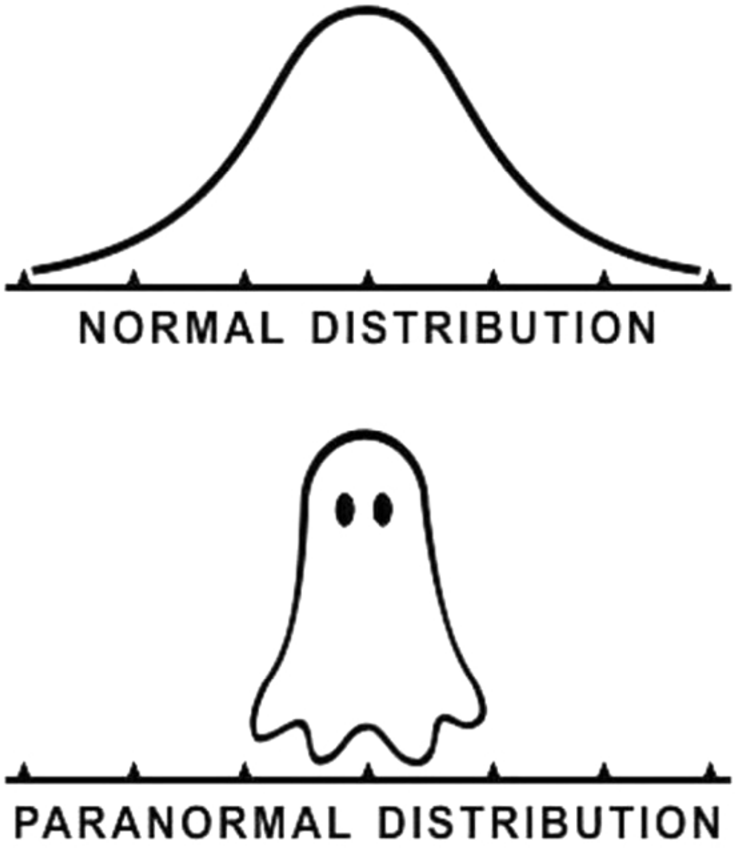
1. Estimer des paramètres est plus simple que de se battre dans la vraie vie
2. Les statisticiens sont des gens reconnus
3. Vous apprendrez l'alphabet grec en entier
4. La probabilité que vous obteniez un job dans ce domaine est > 0.9999
5. Si vous êtes virés, vous pourrez toujours vous reconvertir à l'ingénierie
6. Vous faites ce travail dans la confidence, la régularité et la variabilité
7. Vous êtes normal et le reste du monde est faux
8. La ligne de régression paraît meilleure que la ligne du chômage
9. Vous n'avez jamais besoin d'être exact - seulement approximatif
10. Personne ne comprend ce que vous faites, alors vous avez toujours raison

En cours de traduction de l'anglais

Un croyant demande à un athée quelle est la valeur la plus importante dans la vie ?

L'athée répond : la p-valeur.


LET'S SEE...
WE DID IT 5 TIMES THIS PAST MONTH.
YOU COUNTED?!
SO THAT MEANS I HAVE A 16.6̄% CHANCE OF HAVING SEX TONIGHT.
YOU'RE FORGETTING ABOUT BAYESIAN INFERENCE.
LET "A" BE THE EVENT THAT YOU GET LAID. LET "B" BE THE EVENT THAT YOU COMPLIMENT HER EYES.
OUT OF THE FIVE TIMES YOU GOT LAID, HOW MANY TIMES DID YOU COMPLIMENT HER EYES?
HMM...
FROM THOSE 5 TIMES, I COMPLIMENTED HER EYES 3 TIMES.
BUT I COMPLIMENT HER EYES ONCE A WEEK.
SO...
P(B|A) = 3/5
P(A) = 5/30
P(B) = 4/30
THUS,
P(A|B) = P(B|A) P(A) / P(B)
= 3/4
SO, GIVEN THAT YOU COMPLIMENT HER EYES, YOU HAVE A 75% CHANCE OF GETTING SEX TONIGHT.
SWEET!
BAYESIAN INFERENCE IS GETTING ME SEX TONIGHT!
spikedmath.com
© 2010
PROBABLY.

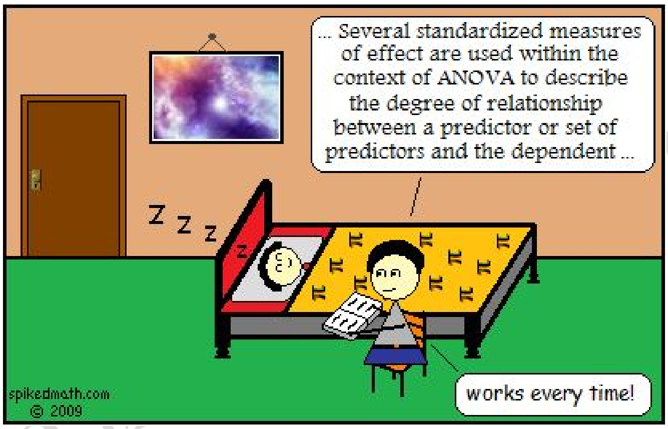

NORMAL DISTRIBUTION
PARANORMAL DISTRIBUTION

Un statisticien et un biologiste sont condamnés à mort. On leur accorde uen dernière faveur.

- Je voudrais donner une grande conférence sur la statistique devant tout le monde, dit le statisticien
- Accordé ! Répond le juge. Et pour vous ?

Le biologiste n'exprime aucune hésitation :

- Je souhaiterais être exécuté le premier !



En cours de
l' anglais

20.5. Chimie

On vient de découvrir un nouvel élément chimique :

- ÉLÉMENT NUMÉRO : 115
- NOM : Femme
- SYMBOLE : Fm
- MASSE ATOMIQUE : Acceptable 60 kg mais des isotopes connus de 40 à 250 kg
- OCCURRENCE : Très abondant de par le monde
- PROPRIÉTÉS PHYSIQUES :

  - Entre en ébullition pour un rien et gèle sans raison

  - Conductivité thermique : faible surtout aux extrémités inférieures

  - Coefficient de dilatation : augmente avec les années

  - Cède aux pressions appliquées aux points sensibles
- STRUCTURE MOLÉCULAIRE :

  Parfaite ? 90/60/90, existe aux USA sous forme croissante 60/90/120 et dans les pays nordiques sous forme dite plate 50/50/50
- PROPRIÉTÉS CHIMIQUES :

  - Très grande affinité pour l'or, l'argent, le platine et tous les métaux nobles. Absorbe de grandes quantités de substances onéreuses

  - Peut exploser spontanément sans avertissement

  - Insoluble dans les liquides mais présente une activité grandement augmentée par saturation dans l'alcool

  - Réactivité très variable selon les périodes de la journée

  - Grande aptitude aux changements d'humeur et à la jalousie.

  - Sensible à certaines contraintes qui lui transmettent parfois la migraine
- UTILISATIONS COURANTES :

  - Hautement décorative surtout dans les voitures de sport

  - Puissant agent nettoyant

  - Aide efficace pour la relaxation et la détente
- TEST :

  - L'élément pur passe parfois au rose quand heureux.

  - Tourne au vert si placée à côté d'un spécimen de meilleure qualité

En cours de traduction de l' anglais

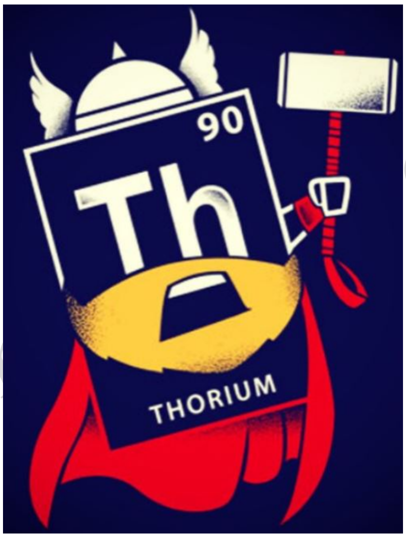
- PRÉCAUTIONS D'EMPLOI :

  - Hautement dangereuse si placée entre des mains non expertes

  - Il est illégal d'en posséder plus d'un spécimen, mais il est possible d'en entretenir plusieurs à des endroits différents tant que les différents spécimens n'entrent pas en contact (risque d'explosion)

ATTENTION :

Certains chercheurs d'Amérique du Sud ont découvert le moyen d'en fabriquer artificiellement, présentées généralement sous les marques "Travelo" ou "Dragqueen". Ne consommer que le produit générique.



En cours de traduction de l'anglais

On vient de découvrir un nouvel élément chimique :

- ÉLÉMENT NUMÉRO : 116

- NOM : Homme

- SYMBOLE : Hm

- ANALYSE QUANTITATIVE :

  Mesuré à 17 [cm], bien que quelques isotopes existent en 25, 20, 13 et même 10 [cm].

- DÉCOUVREUR :

  Ève (découvert par accident un jour où elle avait envie de côtelettes)

- LIEU D'EXTRACTION :

  Se trouve en grandes quantités en présence d'un gisement de Fm très pur

- PROPRIÉTÉS PHYSIQUES :

  - Surface recouverte de poils, raides par endroits, doux dans d'autres

  - Bout quand on l'agite, se glace quand on le met en présence de la logique et du bon sens, se liquéfie quand on le traite comme un dieu

  - Devient exécrable lorsqu'on le mélange à n'importe quel alcool

  - Peut être la cause de maux de tête (ou des maux d'autres parties du corps) ; à manipuler avec précaution

  - Diminue son entropie directement après sa réaction avec l'élément Fm (état se manifestant par des ronflements... zzzzz)

  - Augmente sa masse considérablement en vieillissant, perd de ses capacités réactionnelles

  - Se déshydrate rapidement par temps sec

  - Rarement trouvé à l'état pur après 14 ans

  - Possède souvent un attachement inexplicable à sa roche mère, rendant l'extraction difficile

  - Si on le met sous pression, devient trop dur et improductif ; n'est productif que si l'on utilise la subtilité, les subterfuges, et la flatterie

- PROPRIÉTÉS CHIMIQUES :

  - Tendance très forte à réagir avec l'élément Fm, même si la réaction est parfois endothermique

  - Réputé être le meilleur catalyseur pour les réactions de transformation de l'élément Fm

  - Possède la faculté d'entrer en réaction avec à peu près n'importe quoi

  - En cas de réaction importante, l'aspect de l'élément change pour virer au rouge cramoisi.

  - S'il est saturé en alcool, il devient inerte et repoussant pour la plupart des éléments

  - Ne convient pas pour les tâches ménagères et les opérations de nettoyage

  - Ne convient pas non plus pour les tâches familiales

  - Est neutre en ce qui concerne la courtoisie et l'impartialité

- USAGES COURANTS :

  - Transport de choses lourdes, chauffeur, dîners gratuits au restaurant...

  - Usage possible pour les activités sexuelles

- TESTS :

  Les spécimens les plus purs ne sont pas synonymes de pureté, et ceux qui ont déjà servi, encore moins

- DANGERS :

  La réaction avec un autre élément Hm est extrêmement violente si l'élément Fm est le catalyseur

En cours de traduction de l'anglais

La question suivante a réellement été posée en ces termes à l'université de chimie de Washington :

L'Enfer est-il exothermique (dégage-t-il de la chaleur) ou endothermique (absorbe-t-il de la chaleur) ? Appuyez votre réponse avec une preuve.

La plupart des étudiants écrivirent comme preuve de leurs théories la loi de Boyle (les gaz se réchauffent quand ils sont comprimés et se refroidissent quand ils se décompriment) ou une variante.

Un étudiant, toutefois, a écrit ce qui suit :

Premièrement, nous avons besoin de savoir comment la masse de l'Enfer évolue dans le temps. Ce qui signifie aussi que nous avons besoin de connaître le rythme auquel les âmes vont en Enfer et le rythme auquel elles en sortent. Je pense que nous pouvons sans crainte affirmer qu'une fois qu'une âme est en Enfer, elle n'en sortira plus. Par conséquent, aucune âme ne sort des enfers.

Pour ce qui est des nombreuses âmes qui vont en Enfer, examinons les différentes religions qui existent de par le monde aujourd'hui. Certaines d'entre elles décrètent que si vous n'êtes pas membre de leur religion, vous irez en Enfer. Depuis qu'il y a plus d'une religion de cette sorte et depuis que les gens ne pratiquent qu'une seule religion, nous pouvons en déduire que presque tout le monde et toutes les âmes vont en Enfer.

Avec le rythme des naissances et des morts qui sont ce qu'ils sont, nous pouvons nous attendre à ce que le nombre des âmes en Enfer augmente de façon exponentielle.

Maintenant occupons-nous du rythme d'évolution du volume de l'Enfer, parce que la loi de Boyle prédit que pour que la température et la pression restent les mêmes, le volume de l'Enfer doit s'agrandir proportionnellement aux âmes qui s'ajoutent.

Ceci nous donne deux possibilités :

1. Si l'Enfer croît a un rythme plus lent que celui des âmes qui arrivent en Enfer, alors la température et la pression s'accroissent jusqu'à ce que l'Enfer craque de partout.
2. Bien sûr, si l'Enfer s'agrandit à un rythme plus rapide que le nombre d'âmes en Enfer s'accroît, alors la pression et la température baissent jusqu'a ce que l'Enfer gèle tout entier.

Un chimiste entre dans un pharmacie et demande à son pharmacien "Avez-vous de l'acide acetylsalicylic ?"

– "Vous voulez parler d'aspirine ?" Demanda le pharmacien.

En cours de traduction de l'anglais

– "Oui c'est cela ! Je n'arrive jamais à m'en rappeler le nom."

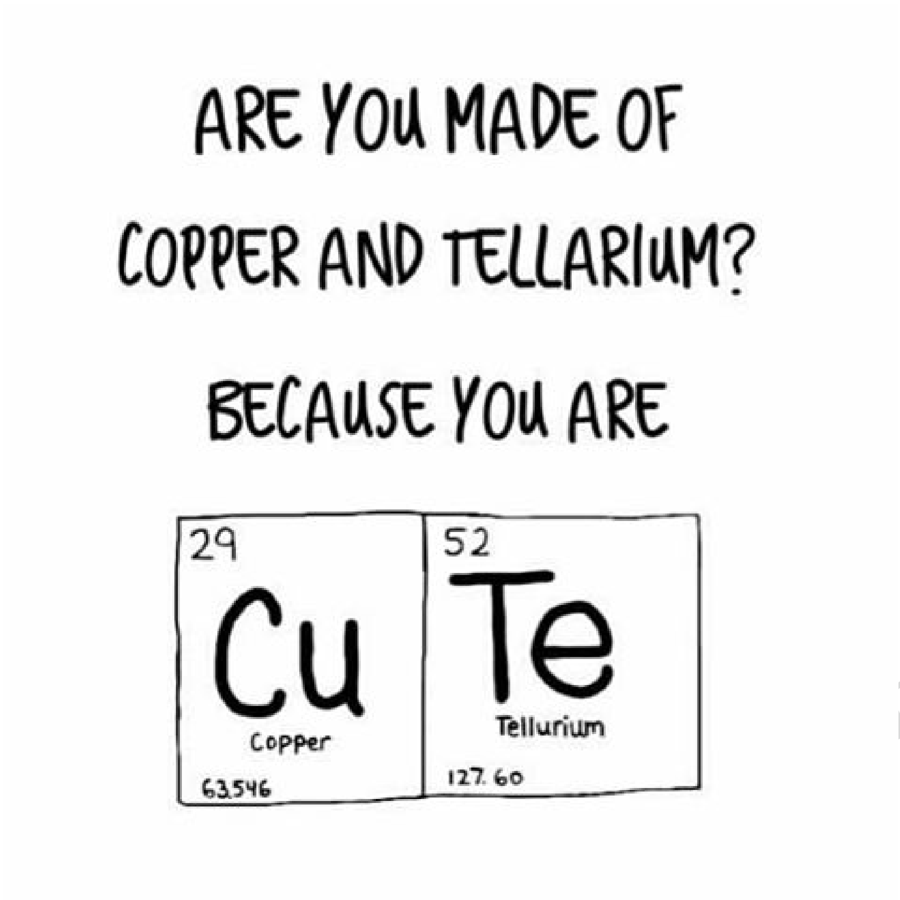
Un physicien, un biologiste et un chimiste se rendent à l'océan pour la première fois.

- Le physicien en voyant les vagues de l'océan fut fasciné par les vagues. Il désira faire quelques recherche sur la dynamique des fluides et marcha dans l'océan. Malheureusement, il se noya et ne revint jamais.
- Le biologiste désira faire quelques recherches sur la faune et la flore marine et marcha lui aussi dans l'océan. Il ne revint jamais non plus.
- Le chimiste attenda lui pendant un très long moment, notant ses observations : "Les physiciens et les chimistes sont solubles dans l'eau".

CLASSIFICATION DE LA CHIMIE

- *Chimie physique* : L'art d'appliquer $y = mx + b$ à tout et n'importe quoi dans l'univers.
- *Chimie organique* : L'art de transmuter des substances en publications.
- *Chimie inorganique* : C'est ce qui reste après le chimie organique, analytique et physique une fois que l'on a utilisé tout le tableau périodique des éléments.
- *Ingénierie chimique* : L'art de tirer un profit de ce que le chimiste organique fait seulement pour le fun.

En cours de traduction de l'anglais



En cours de traduction de l'anglais

Les radicaux libres ont révolutionné la chimie !

Les derniers mots des chimistes :

- Et maintenant la phase de goûtage...
- Et maintenant secouons un petit peu
- Dans quelle bouteille était déjà mon eau minérale ?
- Pourquoi ce truc fait une flamme verte ? ! ?
- Et maintenant le problème de détonation du gaz.
- Ceci est une expérience complétement sûre.
- Maintenant vous pouvez retirer la fenêtre de protection...
- D'où viennent tous ces petits trous sur ma blouse de travail ?
- Et maintenant un cigarette...

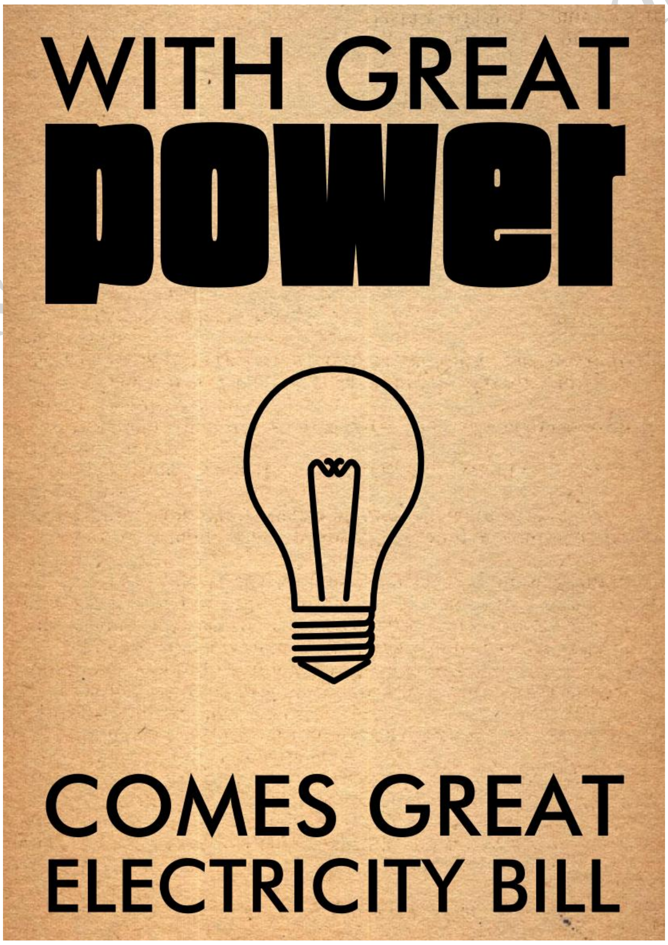
20.6. Ingénierie

Des scientifiques de la NASA ont développé un fusil spécialement conçu pour projeter des poulets morts dans les pare-brises des avions de ligne, des jets militaires et des navettes spatiales. Le but étant de vérifier les conséquences de possibles collisions avec des volatiles et d'adapter les matériaux des pare-brises en conséquence.

Les ingénieurs britanniques ayant entendus parler de ce genre de fusil ont de suite développés un identique pour effectuer le même type de tests sur leurs trains à très grande vitesse. Lorsque le premier test fut effectué, le poulet traversa le pare-brise, la console de commande, la motorisation pour finir sa course dans le mur opposé.

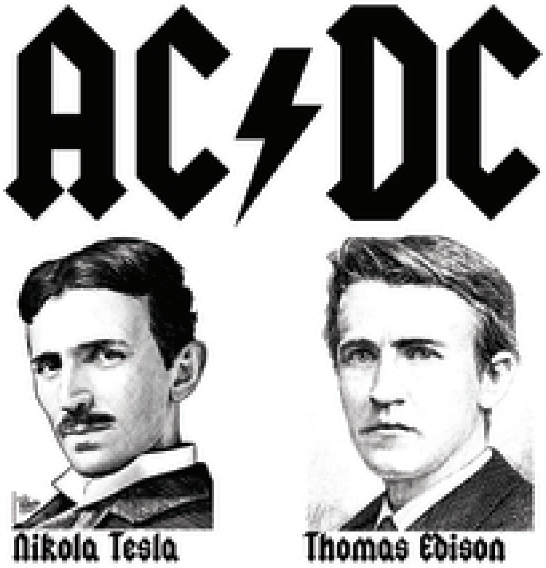
Horrifiés et étonnés par ces résultats, les ingénieurs britanniques les communiquèrent à leurs confrères américains afin d'obtenir des suggestions de leur part. La NASA leur répondit en une seule phrase : "Décongelez le poulet avant !"

En cours de l'anglais



Deux ingénieurs et un ami non-ingénieurs se rencontrent à un bar un vendredi soir pour raconter leur semaine de travail.

- Le premier ingénieur : "J'ai passé une semaine horrible à faire des plans un à la fois chaque jour."
- Le deuxième ingénieur : "J'ai fait un peu moins pire. J'ai au moins pu faire des plans complets plusieurs fois par jour."
- Le troisième ami non-ingénieur : "Ben les gars vous en avez de la chance ! Moi je me limite à des plans culs qu'une fois par mois".



En cours de l'anglais

Tentatives pour comprendre les ingénieurs :

- Tentative N°1

  Deux élèves ingénieurs marchent le long de leur campus lorsque l'un des deux dit à l'autre, admiratif : "Où est-ce que tu as trouvé ce vélo ?" Le second lui répond : "Ben en fait, alors que je marchais, hier, et que j'étais dans mes pensées, je croise une super nana en vélo qui s'arrête devant moi, pose son vélo par terre, se déshabille entièrement et me dit : "Prends ce que tu veux... ". J'ai donc choisi son vélo.

  Le premier lui répond : "Tu as raison, les vêtements auraient certainement été trop serrés.

- Tentative N°2

  Pour une personne optimiste, le verre est à moitié plein. Pour une personne pessimiste, il est à moitié vide. Pour l'ingénieur, il est deux fois plus grand que nécessaire.

- Tentative N°3

  Un pasteur, un médecin et un ingénieur jouent au golf. Ils attendent après un groupe de golfeurs particulièrement lents. Au bout d'un moment, l'ingénieur explose et dit : "Mais qu'est-ce qu'ils fichent ? ça fait bien un quart d'heure qu'on attend là !" Le docteur intervient, exaspéré lui aussi : "Je ne sais pas, mais je n'ai jamais vu des gens s'y prendre aussi mal !" Le pasteur dit alors : "Attendez, voilà quelqu'un du golf. On n'a qu'à le lui demander. Dites-moi, il y a un problème avec le groupe de devant. Ils sont plutôt lents, non ?" L'autre répond : "Ah oui, c'est un groupe de pompiers aveugles. Ils ont perdu la vue en tentant de sauver le golf des flammes l'année dernière, alors depuis, on les laisse jouer gratuitement". Le groupe reste silencieux un moment, et le pasteur dit : "C'est si triste. Je vais faire une prière spécialement pour eux ce soir". Le médecin ajoute : "Bonne idée. Et moi, je vais contacter un copain chercheur ophtalmologiste pour voir ce qu'il peut faire". Et l'ingénieur : "Mais putain ! Pourquoi ils jouent pas la nuit ?"

- Tentative N°4

  Un ingénieur traversait la rue lorsqu'une grenouille l'appela et lui dit : "Si tu m'embrasses, je me transformerai en une magnifique princesse". Il se baissa, ramassa la grenouille et la mit dans sa poche. La grenouille lui dit alors : "Si tu m'embrasses, je me transformerai en une magnifique princesse et je resterai à tes côtés pendant une semaine". L'ingénieur sortit la grenouille de sa poche, lui fit un sourire et la replaça dans sa poche. La grenouille se mit alors à crier : "Si tu m'embrasses, je me transformerai en une magnifique princesse, je resterai à tes côtés pendant une semaine et je ferai TOUT ce que tu veux". Encore une fois, l'ingénieur sortit la grenouille de sa poche, lui sourit et la remit dans sa poche. La grenouille lui demanda alors : " Quoi, qu'est-ce qu'il y a ? Je te dis que je suis une magnifique princesse, que je resterai à tes côtés pendant une semaine et que je ferai tout ce que tu veux. Alors pourquoi tu ne m'embrasses pas ?" L'ingénieur répondit : "Regarde-moi, je suis un ingénieur. J'ai pas le temps d'avoir une petite amie. Par contre, une grenouille qui parle, ça, c'est cool !"

- Tentative N°5

  Un journaliste interviewe un paysan corse : "Dites-moi, comment faites-vous pour tracer les routes ici ? ". Le paysan répond : "beh, on lâche un âne et on regarde par où il passe dans la montagne....et c'est là qu'on fait passer la route". Le journaliste alors rétorque : "et si vous n'avez pas d'âne ?". Ce a quoi le paysan répond : "ah....beh on prend un ingénieur.... ".

En cours de traduction de l'anglais

Lors de la course à la conquête spatiale dans les années 1960, la NASA décida pour le besoin de ses astronautes de développer un stylo à bille fonctionnant dans un système sans gravité.

Après un temps considérable de recherche et de développements, le stylo "Astronaute" fut développé pour un coût de 1 million de dollars. Le stylo fonctionna très bien mais trouva un faible intérêt de la part du public sur Terre.

L'Union Sovétique, se trouvant confronté au même problème, utilisa elle un crayon...

Le grand mathématicien John Von Neumann fut consulté par un groupe qui fabriquait une fusée destinée à être envoyée dans l'espace. Quand il vit la structure actuelle, il demanda : "Où avez-vous obtenu les plans pour cette fusée ?".

On lui donna comme réponse : "Nous avons notre équipe d'ingénieur"

Il répliqua alors désolé : "Des ingénieurs ! Mais pourquoi ? J'ai déjà publié toute la théorie mathématique sur la science des fusées. Voyez ma pubication de 1952.".

Alors, le groupe consultat son document de 1952 et investirent 10 millions de dollar dans la structure et reconstruisirent toute la fusée conformément aux plans de Von Neumann. À la minute du lancement, la structure entière se désagréga. En colère, ils contactères alors Von Neumann et lui dirent : "Nous avons suivi vos instructions et quand nous avons démarré l'engin, il a explosé ! Pourquoi ?".

En cours de traduction anglais

Ce à quoi Von Neumann répliqua : "Ah oui ! C'est un phénomène connu sous le nom technique du problème d'explosion - Je l'ai traité dans mon article de 1954."

Dans un laboratoire d'électronique :

- Dis-donc, c'est quoi le semi-remorque sur le parking devant ?
- Le semi-remorque ?
- Ben oui, le chauffeur dit que tu es au courant...
- Ah oui ! ! J'ai commandé un condensateur de 1 Farad.

En cours e l' anglais

Ce que les ingénieurs disent et ce qu'ils pensent en réalité :

- Avancée technologique majeure : Retour au tableau noir
- Développé après des années de recherche intensives : Découvert par accident
- Le design est compris dans les limites imposées : Nous venons de le faire en retouchant un peu
- Les résultats ont été extrêmement satisfaisants : Par surprise cela cela marché !

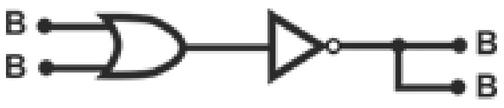
- La satisfaction du client sera certainement assurée : Nous somme si loin dans des délais que le client était content de ne rien avoir du tout.
- Nous avons une forte coordination dans le projet : Nous aurions dû demander à quelqu'un d'autre
- Le projet est un peu hors délai à caus d'imprévus : Nous travaillons sur autre chose
- Le design sera finalisé dans la prochaine période de rapport : Nous n'avons pas encore commencé le travail mais nous devions dire quelque chose
- Un certain nombre d'approches sont tentées : Nous ne savons pas où nous allons, mais nous avancons...
- Des efforts intensifs sont mis en oeuvre pour avoir une nouvelle perspective sur le problème : Nous venons de licencié trois gars
- Les tests opérationnels préliminaires ne sont pas concluants : Le truc a explosé quand nous l'avons testé
- Le concept entier a été abandonné : Le seul gars qui comprenait le concept est parti ailleurs
- Des modifications sont en cours pour corriger quelques difficultés mineures : Nous avons jeté le tout et recommancé depuis le début.
- Nous sommes presque au bout : Nous avons fait la moitié
- Nous avons prévu : Nous croyons en Dieu !
- Les dessins techniques sont un peu en retard : Nous n'avons pas le moindre dessin
- Le risk est élevé mais acceptable : Nous n'avons aucune chance mais avec 10 fois le budget actuel et 10 fois plus de temps et de ressources, nous avons une chance sur deux de réussir.
- C'est un problème sérieux mais pas insurmontable : C'est un miracle si nous trouvons une solution. Il faudrait avoir Dieu comme chef de projet.
- Le cahier des charges n'est pas très bien défini : Personne n'a pensé à faire un cahier des charges
- Cela nécessitera des analysises et un suivi ultérieur : C'est totallement hors de contrôle
- Le projet a été concu pour une haute disponibilité : Les disfonctionnements seront mis sur le dos des opérateurs.
- Ce projet nécessite peu d'opérations de maintenance : Nous ne laisserions pas un technicien changer une ampoule, autant jeter l'eau du bain avec le bébé.
- Le logiciel est en cours de développement sans manquement au cahier des charges : La documentation sera rédigée en chinois et en chine faute de temps

En cours de traduction de l'anglais

- La livraison est prévue pour le dernier trimestre de l'année prochaine : Cela nous laisse du temps pour décider qui blâmer d'être actuellement en retard.

- Combien d'étudiants ingénieurs de première année sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Aucun. C'est un sujet de deuxième année.
- Combien d'étudiants ingénieurs de deuxième année sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Aucun. Un, mais le reste de la classe copie le rapport.
- Combien d'étudiants ingénieurs de troisième année sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Est-ce que cette question sera dans l'examen final ?
- Combien d'ingénieurs civils sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Deux. Le premier change l'ampoule et le second tient la bougie.
- Combien d'ingénieurs électricient sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Aucun. Ils redéfinissent simplement l'obscurité comme nouveau standard industriel.
- Combien d'ingénieurs informaticiens sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Pourquoi changer ? De toute façon le connecteur ne sera plus valable d'ici six mois.
- Combien d'ingénieurs mécaniciens sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Cinq ! Un décide la manière de changer l'ampoule, le deuxième calcule la force nécessaire, le troisième concoit un outil pour tourner l'ampoule, le quatrième pour concevoir un outi confortable mais fonctionnel pour attraper l'ampoule et le cinquième qui utilie les résultats des quatre premiers equipment.
- Combien d'ingénieurs nucléaires sont nécessaires pour changer une ampoule ? : Sept ! Un pour installer la nouvelle ampoule et 6 pour trouver quoi faire avec l'ancienne pour les 10'000 prochaines années.

En cours de traduction de l'anglais



2B OR NOT 2B

Cela se passe à Moscou : un couple de touristes demande son chemin, sur un pont à un russe qui se trouve être ingénieur.

Le gars leur dit : «Vous traversez, et, d'ici 50 mètres, vous tournez à droite...»

Remerciements de la part des touristes... , puis ils partent. Alors le gars leur court derrière :

«Attendez, attendez ! Je viens de me souvenir que le pont fait 70 mètre. Si vous tournez à droite au bout de 50 mètres, comme je vous l'ai dit, vous tomberez à l'eau.»

Une équipe d'ingénieur qualité travaille sur l'AMDEC d'un nouvelle usine chimique. Après plusieurs semaines, pendant la réunion de debriefing :

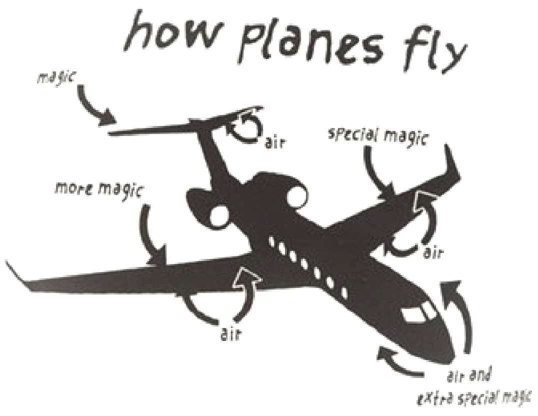
Ingénieurs Qualité : «Notre conclusion est : Il y a 1 chance sur 10'000 que l'usine explose, tuant beaucoup de gens et induisant un terrible impact écologique, c'est éthiquement inacceptable !».

Manager : «Les normes parlent de risque acceptable si le taux est à 1/7'000 pourtant ? !»

L'équipe d'ingénieurs se regroupe et prend alors la parole :

Ingénieurs Qualité : «Notre conclusion est : Vous avez un problème de surqualité, c'est éthiquement inacceptable !»

En cours de traduction de l'anglais



Un homme était assis à côté d'une fille de 10 ans dans un avion. S'ennuyant, il se tourna vers la fille et dit : «Parlons ! J'ai entendu dire que les vols vont plus vite si vous entamez une conversation avec votre compagnon de route.»

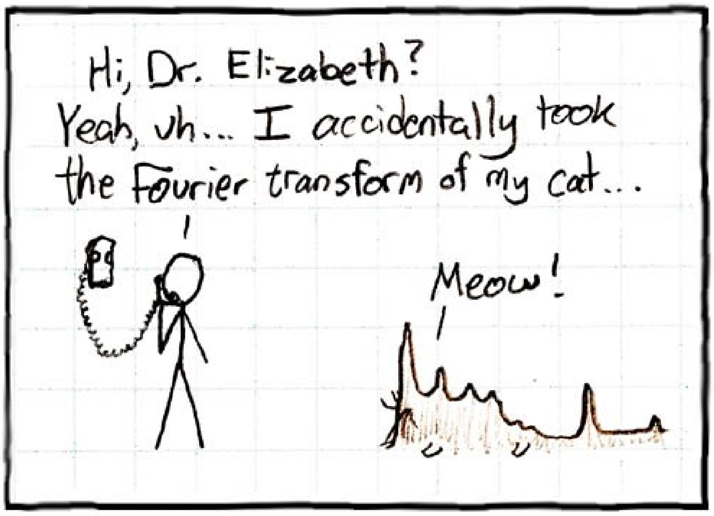
La fille qui lisait un livre la ferma lentement et dit au gars : «De quoi voudriez-vous parler ?»

«Oh, je ne sais pas» dit l'homme. «De physique nucléaire ?»

«OK» disa-t-elle. «Cela pourrait être un sujet intéressant. Mais laissez-moi d'abord vous poser une question ! Un cheval, une vache et un cerf mangent tous la même chose ... de l'herbe. Pourquoi un cerf excrète de petites boulettes, une vache une flaque et un cheval produit des touffes d'herbes sèches ?»

L'homme a réfléchi et a dit : «Hmmm, je n'en ai aucune idée.»

Alors, sarcastique, la petite fille lui dit : «Comment voulez vous que je vous explique ce qu'est la physique nucléaire alors que vous ne maîtrisez même pas un petit problème de merde ?»



En cour
l' anglais

Newton asked : How write 4 in between 5 ?

1. Medicine students said : Joke !
2. Science students said : Impossible !
3. Management students said : Not found on the internet !
4. Engineering student said : "F(IV)E"

20.7. Informatique

En cours de traduction de l'anglais

Comment devenir un bon Hacker ?

Bon, si tu veux être un vrai hacker, il va te falloir Linux.

Là, tu as 2 solutions :

1. Tu es un sale bourgeois capitaliste et tu l'achètes 150 balles à la FNAC.
2. Tu es un vrai trou du cul, et là tu le downloades par le Net.

Évidemment, tu es un vrai trou du cul donc tu ouvres ton tit client FTP et tu te tapes tranquillement les 20 ou 25 heures de download pour une Slack ou une Debian. Evite la Red Hat, ça fait trop grand public, toi t'es un mec uNdERgrOuNd maintenant, c'est normal, t'es Hacker.

Bon, tu as ton Linux, maintenant c'est bon oublie-le. Pas la peine de se casser le cul à apprendre un nouvel OS dont tu ne te serviras jamais parce que "XWing vs Tie Fighter" tourne pas dessus. La meilleure solution consiste carrément à niquer lilo, comme ça tu es sûr que tu ne booteras que sous Windows 95. C'est une solution élégante que de nombreux trous du cul semblent avoir choisie. Pour ça, ouvre une session DOS par Windows et tape fdisk /mbr. Ca va effacer lilo qui était installé sur le MBR de ton disque dur, comme ça tu n'auras plus à te soucier de Linux.

L'essentiel est de l'avoir, pas de savoir s'en servir.

"Ouais mais comment je peux prouver aux gens que j'ai Linux et passer pour un gros rebelle ?"

C'est une question bien naturelle. J'ai pensé à toi petit looser et voici une série de phrases qu'il faut balancer à propos de Linux :

- "Linux c'est trop puissant, t'es complètement libre par rapport à ces OS de fachos genre Windaube. De toute façon, MS c'est trop ripoux."
- "Bah si t'es un débutant, va pas sous Linux, c'est fait pour les eLiTeS ce truc, toi reste sous winfuck."
- "Dis, tu sais pas ou je pourrais trouver la libc5.4.36 ? Parce que chez moi la 5.4.35 est incompatible avec les modifs que j'ai faites au kernel."
- "Ça pue netscape, moi ça me dumpe des cores de 10 mégas dès que le lance, je préfère Lynx au moins c'est pas prise de gueule c'est mieux le mode texte."
- "Ralala le bouffon que c'est lui ! Il s'est installé une Red Hat ! ! Tain c'est de la daube les Red Hat c'est nul y'a que la Debian qui est bien, au moins tu sais ce que tu fais t'es le master de ton system nan vraiment c'est ripoux Red Hat."

Avec ce genre de petites phrases, tu te retrouveras très vite classé dans la catégorie "OK c'est un trou du cul, mais un trou du cul sous Linux", ce qui est la première étape pour être un vrai hacker. Maintenant que tout le monde sait que tu as ton Linux, il faut passer au stade suivant, celui du pro des réseaux, genre le mec qui maîtrise ICMP à mort. C'est la deuxième étape de ton long périple.

Ici, il faut mettre la main au porte-monnaie. Direction la FNAC, tu achètes n'importe quel bouquin sur Unix et sur les réseaux. L'essentiel est que le titre soit compliqué. Un petit "Protocole rlogin sur réseau Ethernet en sous-adressage" sera du meilleur effet. N'hésite pas, dès que tu ne comprends même pas le titre, il faut acheter le bouquin : c'est pas pour lire, c'est pour impressionner tes autres potes trous du cul.

Une bonne méthode consiste à acheter un bouquin genre "TCP/IP volume 43" et de prendre des mots au hasard à apprendre par coeur : rai socket, sur-adressage, FDDI, telnet par exemple. Ensuite, tu les ressors dans une phrase, même hors contexte c'est pas grave personne n'ira vérifier ce que ça veut dire. Par exemple, il ne faut pas hésiter à balancer un "Le Telnet, ça prends combien de rai sockets en sur-adressage sur un FDDI" sur un bon gros channel de cowboyz, ça impressionne toujours, et personne n'ira te dire que ça n'a aucun sens, ne t'inquiète pas.

Dispose ensuite ces bouquins dans ta chambre, avec les titres les plus compliqués aux endroits les plus visibles. Corne quelques pages pour faire plus vrai. Prends aussi quelques feuilles et dessine des schémas bidons de réseau, ou met des trucs genre 123.44.5.34 root/lydia pour faire croire que tu te chopes de password comme un ouf. Faut se la jouer à mort, ne jamais hésiter à en rajouter, scanne-toi une photo de Mitnick et accroche la au-dessus de ton lit, ou met des autocollants à tête de mort sur ton UC pour bien dire que maintenant, t'es un voyou, un mec dangereux.

Pour compléter le tout et vraiment passer pour un hacker, il ne faut pas hésiter à dire des conneries du genre "Je ne suis qu'un assoiffé de connaissances". OK, tu quadruples ta seconde, mais bon c'est pas grave, tu aimes quand même apprendre, c'est ta grande passion et tu as beaucoup de volonté. Précise bien que jamais tu ne causes de dégâts aux très nombreuses machines que tu pénètres, dis que tu fais juste ça "pour le challenge intellectuel". Oui, là, il faudra te forcer pour ne pas exploser de rire, mais entraîne-toi devant ta glace avant.

En cours de traduction de l'anglais

Quand on est un mec dangereux comme toi, on doit se réunir avec d'autres bandits pour mettre en péril la sûreté de l'État. Pour ça, il existe LE rendez-vous de toute la racaille, c'est le "Meet 2600". Tous les mois, tu iras dans un MacDo de Paris, Place d'Italie, et là tu rencontreras des grands monsieurs, des mecs qui ont rebooté tout Internet avec un prog en Visual Basic et qui ont des coupes de cheveux de rebelles de la société.

Bon, tu n'y apprendras pas grand chose, les loosers qui viennent là-bas se branlent entre eux en se disant "Ouais, on est des hAcKeRz, on est sans pitié, on est des vrais durs, oh zut il est déjà 18 heures faut que je rentre ma mère va me cogner sinon". Tu pourras quand même avoir un vrai frisson en t'imaginant que le MacDo est truffé de caméras et de micros, et que tous les employés sont des agents de la DST qui écoutent des conversations aussi dangereuses que :

– Trouduku1 : il est à combien le Whooper ?
– Trouduku2 : euh MacDo fait des Whoopers maintenant ?
– Trouduku1 : bah ouais ils en ont toujours fait nan ?

La communauté des hAcKeRz aime bien aussi les raves. Ça fait partie du trip "rebel no future fuck da society, on gobe des extas on écoute de la musique de daube mais on s'en fout c'est super parce que c'est interdit ". N'hésite pas à te rendre là-bas, ça fait incontestablement partie de la culture du paumé que d'aller jouer les chauds dans ces soirées.

Toi, t'es un vrai trou du cul qui hacke, et tu entends bien répandre ton savoir pour former d'autres minables comme toi. Pour ça, il existe les e-zine. On peut citer les plus connus comme NoWay ou NoRoute ou le pire cotoie le meilleur (et c'est dommage pour le meilleur...) mais aussi des vraies merdes qui mériteraient d'être plus connues, comme l'excellent Core-Dump qui est une véritable farandole de guignolos expliquant des trucs archi connus dans un français que mon chat comprends mieux que moi.

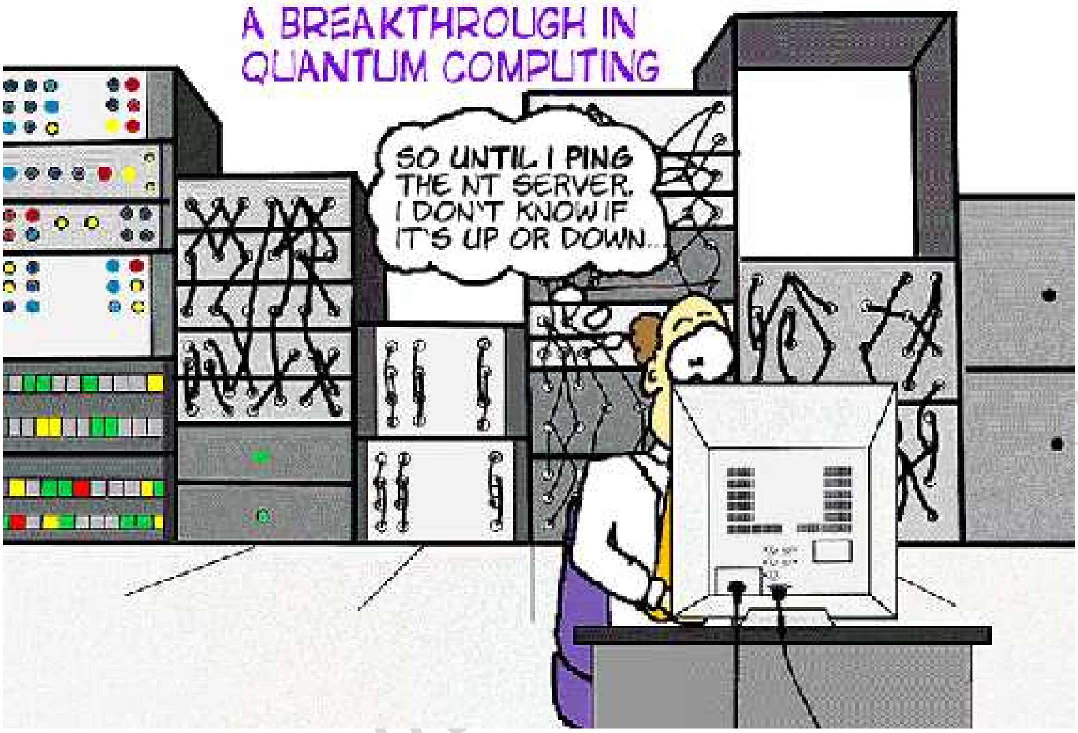
Évidemment, tu n'as pas lu les bouquins sur Unix, tu n'as jamais hacké la moindre machine de ta vie donc tu ne sais pas quoi écrire. Rassure-toi, tu n'es pas le seul dans ce cas. La meilleure méthode est de pondre un article sur le rap, à raconter sa dernière rave ou à pomper Phrack sans rien comprendre. Là encore, si tu pompes Phrack, n'hésite pas à carrément corriger le mec ou à rajouter des trucs pour faire plus compliqué, personne n'ira vérifier, donc vas-y lâche-toi t'es un assoiffé de connaissances, oublies pas.

Maintenant, c'est clair, tu es un vrai hacker, une racaille de l'IRC, un loubard d'Internet, tu fais peur à toutes les agences gouvernementales et IBM veut t'embaucher pour sécuriser leur réseau parce que cette pédale d'Henri leur a encore collé un virus d'Internet. Il va donc falloir, au quotidien, se comporter comme un hacker, un vrai, un dur, c'est à dire avec un esprit hacker et un langage de hacker.

Un hacker, ça vit avant tout sur IRC. Une fois que tes amis et ta famille auront bien vu que tu as changé, que tu n'es plus le même homme, il va falloir répandre aussi la nouvelle sur IRC et te faire des nouveaux amis qui seront comme toi des trous du cul. Fini les #coquelicots ou les #amitié_fr, maintenant tu devras aller dans les bas fond de l'IRC, le cyber-Bronx, nuke-city, là où seuls les vrais cogneurs réussissent à se faire une place dans cet univers de violence. Pour

En cours de traduction de l'anglais

ça, tu vas devoir passer du stade hacker trou du cul à celui de trou du cul sur IRC qui se la pète Mitnick, à savoir le c0wb0y.



Les 20 meilleures réponses des programmeurs lorsque leurs programmes ne fonctionnent pas :

20. "C'est bizarre ..."
19. "Cela n'a jamais fait cela auparavant."
18. "Cela a fonctionné hier."
17. "Comment est-ce possible ?"
16. "Ce doit être un problème de matériel."
15. "Qu'est-ce que vous avez mal saisi pour le faire bugger ?"
14. "Il y a quelque chose de bizarre dans vos données."
13. "Je n'ai pas touché à ce module depuis des semaines !"
12. "Vous devez avoir la mauvaise version."
11. "C'est juste une coïncidence malchanceuse."
10. "Je ne peux pas tout tester !"
9. "CECI ne peut pas être la source de CELA."
8. "Ca marche, mais ça n'a pas été testé."
7. "Quelqu'un doit avoir changé mon code."
6. "Avez-vous détecté un virus sur votre système ?"
5. "Même si ça ne marche pas, comment ça se passe ?

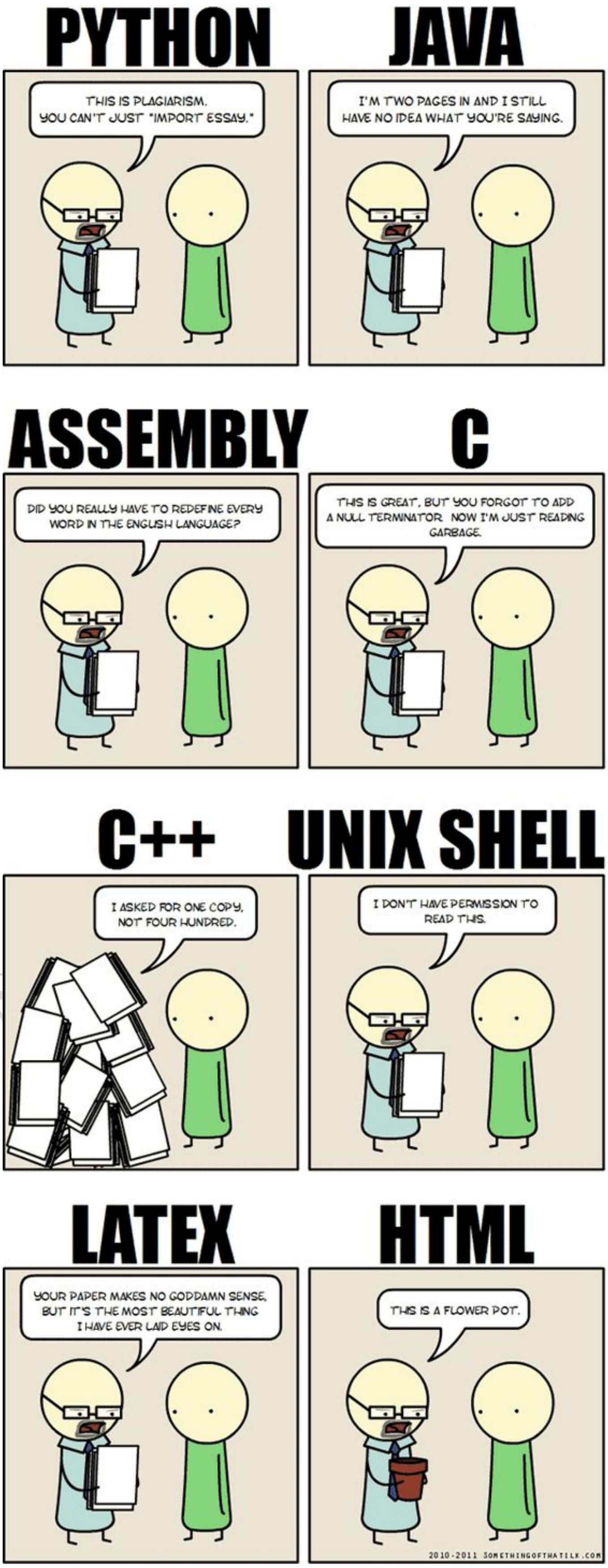
En cours de traduction anglais

4. "Vous ne pouvez pas utiliser cette version sur votre système."
3. "Pourquoi voulez-vous le faire comme ça ?"
2. "Où étiez-vous quand le programme a explosé ?"

Et la réponse Numéro Un par les programmeurs lorsque leurs programmes ne fonctionnent pas :

1. "Cela fonction pourtant sur ma machine !"

En cours de traduction de l' anglais



En cours ... e l' anglais

Cherchez votre niveau en programmation dans l'échelle suivante, l'objectif étant d'écrire un programme affichant "hello world" à l'écran :

- Collège :

```
10 PRINT "HELLO WORLD"
20 END
```

- 1ère année du Lycée

```
program Hello(input, output)
begin
writeln('Hello World')
end.
```

- Terminale du Lycée :

```
(defun hello
(print
(cons 'Hello (list 'World))))
```

- Nouveau sur le marché de l'emploi

```
#include <stdio.h>
void main(void)
{
char *message[] = {"Hello ", "World"};
int i;
for(i = 0; i < 2; ++i)
printf("%s", message[i]);
printf("
n");
}
```

- Professionnel chevronné

```
#include <iostream.h>
#include <string.h>
class string{
private:
int size;
char *ptr;
public:
string() : size(0), ptr(new char('\0')) {}
string(const string &s) : size(s.size)
{
ptr = new char[size + 1];
strcpy(ptr, s.ptr);
}
string()
{
delete [] ptr;
}
friend ostream & operator «(ostream & , const string & );
string & operator=(const char *);
};
```

En cours de traduction de l' anglais

```
ostream & operator«(ostream & stream, const string & s)
{
return(stream « s.ptr);
}
string &string::operator=(const char *chrs)
{
if (this != & chrs)
{
delete [] ptr;
size = strlen(chrs);
ptr = new char[size + 1];
strcpy(ptr, chrs);
}
return(*this);
}
int main()
{
string str;
str = "Hello World";
cout « str « endl;
return(0); }
```

- Administrateur système

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
main()
{
char *tmp;
int i=0;
tmp=(char *)malloc(1024*sizeof(char));
while (tmp[i]="Hello Wolrd"[i++]);
i=(int)tmp[8];
tmp[8]=tmp[9];
tmp[9]=(char)i;
printf("%s \n",tmp);
}
```

- Apprenti Hacker

```
#!/usr/local/bin/perl
$msg="Hello, world.\n";
if ($#ARGV >= 0) { while(defined($arg=shift(@ARGV))) {
$outfilename = $arg;
open(FILE, ">" . $outfilename) || die "Can't write $arg: $! \n";
print (FILE $msg);
close(FILE) || die "Can't close $arg: $!\n";
} } else {
print ($msg);
```

En cours de traduction de l' anglais

```
}
1;
```

- Hacker expérimenté

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#define S "Hello, World
n"
main(){exit(printf(S) == strlen(S) ? 0 : 1);}
```

- Hacker chevronné

```
%cc -o a.out  /src/misc/hw/hw.c
%a.out
Hello, world.
Guru Hacker
%cat Hello, world.
```

- Manager junior

```
10 PRINT "HELLO WORLD"
20 END
```

- Manager

```
mail -s "Hello, world." bob@b12
Bob, could you please write me a program that prints "Hello,
world."?
I need it by tomorrow.
D̂
```

- Manager senior

```
%zmail jim
I need a "Hello, world." program by this afternoon.
```

- Directeur

```
%letter
letter: Command not found. %mail
To: X̂ F̂ Ĉ
%help mail
help: Command not found.
%damn!
!:Event unrecognized
% logout
```

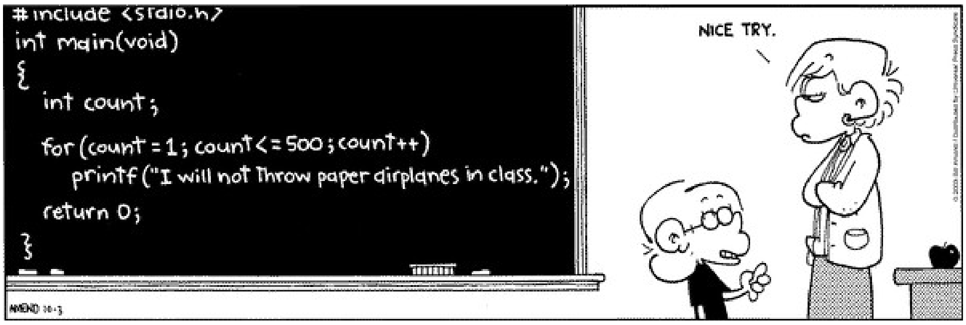
- Chercheur

```
PROGRAM HELLO
PRINT *, 'Hello World'
END
```

En cours de traduction de l' anglais

- Chercheur senior

```
WRITE (6, 100)
100 FORMAT (1H ,11HHELLO WORLD)
CALL EXIT
END
```



Ce que disent les ingénieurs en informatique... et ce qu'il faut comprendre :

- "Nous allons inscrire ce projet au planning" : On s'en occupera si on a rien d'autre à faire
- "C'est un programme complètement nouveau !" : C'est pas du tout compatible avec l'ancienne version
- "Ce programme ne nécessite aucune maintenance" : C'est impossible à déboguer
- "Ce programme ne nécessite que peu de maintenance" : C'est quasiment impossible à déboguer
- "Nous respecterons les standards" : On a toujours fait comme ça et ce n'est pas aujourd'hui qu'on va changer
- "Nous tenons à respecter les standards" : Vous n'allez pas remettre en cause tout ce qu'on vient de faire
- "La nouvelle version de ce programme est 100
- "Différentes approches ont été tentées" : On essaie encore de deviner ce qui se passe.
- "On approche d'une solution" : On s'est réunis pour prendre un café...
- "Les tests préliminaires n'ont pas été franchement concluants" : Ce satané programme a planté dès qu'on a lancé
- "Il va falloir abandonner le concept en son entier" : La seule personne qui comprenait quelque chose vient de démissionner

En cours de traduction de l'anglais

- "On prépare un rapport complet, selon une approche entièrement nouvelle" : On vient juste d'engager trois bleus sortis de l'école
- "C'est une avancée technologique majeure" : On n'arrive toujours pas à comprendre pourquoi ça ne marche pas
- "C'est le résultat d'années de développement" : On a enfin réussi à faire fonctionner un bout du programme...
- "C'est en cours" : On est tellement dans le pétrin que c'est sans espoir
- "Faites-nous part de vos réflexions" : On écoutera ce que vous avez à dire tant que ça ne remet pas en cause ce qui est déjà fait, ou ce que nous avons décidé de faire
- "Nous allons y jeter un coup d'oeil" : Laissez tomber ! On a déjà assez de problèmes comme ça...
- "Je n'ai pas reçu votre e-mail" : Ça fait des lustres que je n'ai pas vérifié ma messagerie...

En cours de relecture de l'anglais

20.8. Sciences Sociales

Pour aider à comprendre le jargon spécifique du marketing..... et éviter de paraître ridicule dans une soirée (pot de départ par exemple...) :

1. Michel est à une soirée et voit une nana très attirante. Il s'approche d'elle et lui dit : "Je suis un très bon coup". C'est ce qu'on appelle du "marketing direct"

2. Michel est à une soirée avec un groupe de copains et il voit une nana très attirante. Un de ses amis s'approche d'elle et lui dit : "Tu vois ce garçon là-bas, c'est un très bon coup". C'est ce qu'on appelle de la "publicité."

3. Michel est à une soirée et il voit une nana très attirante. Il lui demande son numéro de téléphone. Le lendemain, il l'appelle et lui dit : "Je suis un très bon coup". C'est ce qu'on appelle du "télémarketing."

4. Michel est à une soirée et il voit une nana très attirante. Il la reconnaît, s'approche d'elle, lui rafraîchit la mémoire et lui dit : "Tu te souviens que je suis un très bon coup ?". C'est ce qu'on appelle du "Customer Relationship Management (CRM)"

5. Michel est à une soirée et il voit une nana très attirante. Il se lève, s'arrange un peu, s'approche d'elle et lui sert un verre. Il lui ouvre la porte lorsqu'elle part, ramasse son sac lorsqu'il tombe, lui offre une cigarette et lui dit : "Je suis un très bon coup". C'est ce qu'on appelle des "relations publiques" ou "public relations" (PR)

6. Michel est à une soirée et il voit une nana très attirante. Il invite à danser toutes ses copines, leur offre à boire et les fait rire ostensiblement par ses plaisanteries très spirituelles. La belle nana l'aborde et lui dit : "J'ai l'impression que tu es un très bon coup". C'est ce qu'on appelle du "lobbying".

7. Michel est à une soirée et il voit une nana très attirante. Elle s'approche de lui et lui dit : "J'ai entendu dire que tu es un très bon coup". C'est ce qu'on appelle le "pouvoir de la marque".

8. Michel est à une soirée et voit une super belle nana. Il la mate avec ses potes, fait des réflexions très fines, se bourre la gueule, ne fait rien du tout et rentre bredouille. C'est ce qu'on appelle la "réalité du marché"...

En cours de traduction de l'anglais

En cours de traduction anglais

Un homme, dans la nacelle d'une montgolfière ne sait plus où il se trouve. Il descend et aperçoit une femme au sol. Il descend encore plus bas et l'interpelle :

– Excusez-moi ! Pouvez-vous m'aider ? J'avais promis à un ami de le rencontrer et j'ai déjà une heure de retard, car je ne sais plus où je me trouve…

– La femme au sol répond : Vous êtes dans la nacelle d'un ballon à air chaud à environ 10 m du sol. Vous vous trouvez exactement à 49°,28' et 11" Nord et 8°,25' et 58" Est

– "Vous devez être ingénieur" dit l'aérostier.

– "Effectivement", répond la femme, "Comment avez-vous deviné" ?

– "Eh bien !", dit l'aérostier, "Tout ce que vous m'avez dit à l'air techniquement parfaitement correct, mais je n'ai pas la moindre idée de ce que je peux faire de vos informations et en fait je ne sais toujours pas où je me trouve. Pour parler ouvertement, vous ne m'avez été d'aucune aide. Pire, vous avez encore retardé mon voyage !"

– La femme lui répond : "Vous devez être un manager !"

– "C'est exact !", répond l'homme avec fierté, "Mais comment avez-vous deviné ? ? ?"

– "Eh bien !", dit la femme, "Vous ne savez ni où vous êtes, ni où vous allez. Vous avez atteint votre position actuelle en chauffant et en brassant une énorme quantité d'air. Vous avez fait une promesse sans avoir la moindre idée comment vous pourriez la tenir et vous comptez maintenant sur les gens situés en dessous de vous pour qu'ils résolvent votre problème. Votre situation avant et après notre rencontre n'a pas changé, mais comme par hasard, c'est moi maintenant qui à vos yeux en suis responsable..."

Un homme va un samedi à un mariage en Corse dans un petit village. Il est en retard et il conduit aussi vite que possible sur des routes sinueuses. Soudain, après un virage, il doit s'arrêter net, un troupeau d'ovins occupe toute la route. Le berger est là et fait lentement avancer son troupeau. L'automobiliste use du klaxon de son véhicule plusieurs fois sans le moindre effet. Au bout de quelques minutes, le conducteur apostrophe le berger et lui dit :

– "Je suis en retard, je vais à un mariage qui sera suivi d'un méchoui, si je vous dis combien de moutons vous avez, m'en céderez-vous un ?"

– "Volontiers" dit le berger, "je ne suis pas à un près".

– Le conducteur prend sa calculatrice et au bout d'une minute annonce : "1233".

– "Vous avez gagné" dit le berger, "Choisissez votre animal".

Le conducteur en désigne alors un. Le berger dit alors :

– "Si je trouve quelle est votre profession, me rendrez-vous ma bête ?"

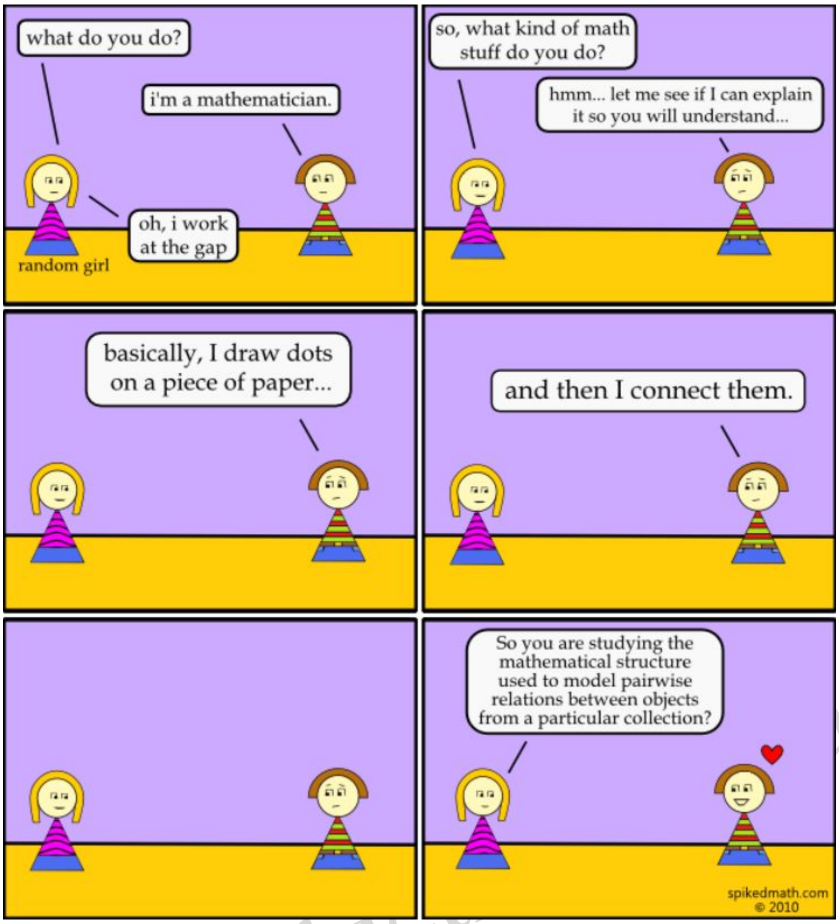
– "Bien sûr" dit le conducteur, "Je vous écoute".

– "Vous êtes haut fonctionnaire et vous avez fait l'ENA ou une autre grande école de ce genre ?"

– "Vous avez raison" dit le conducteur, "Mais comment avez-vous deviné ?".

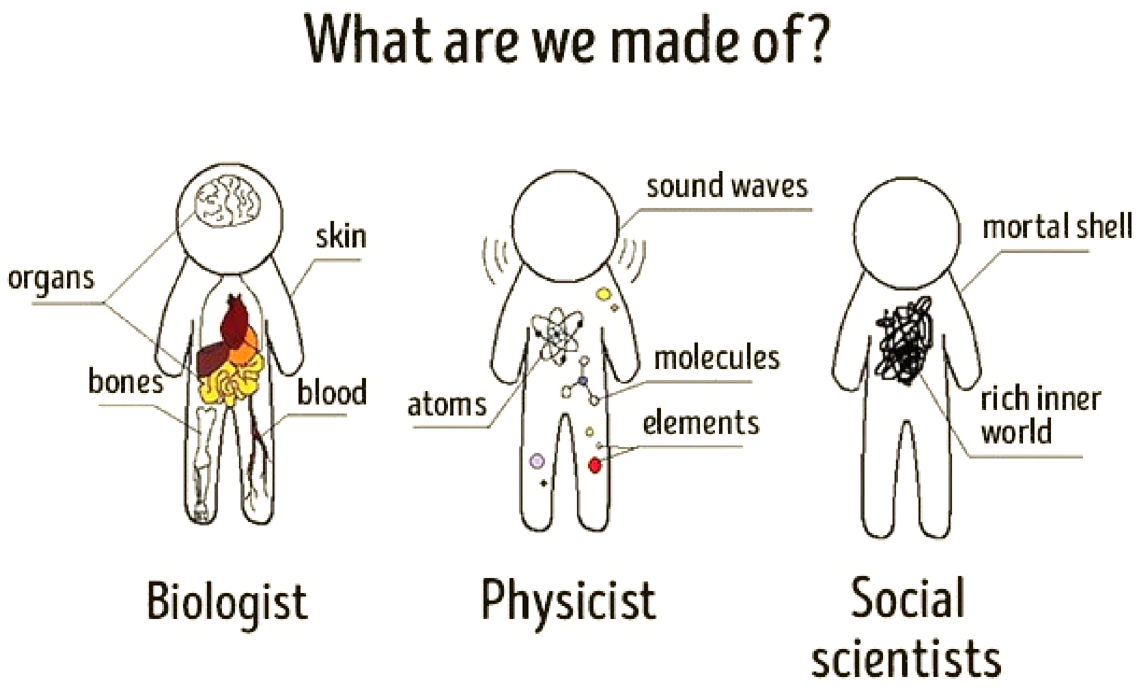
– Le berger : "Je vous prie de me rendre mon chien !"

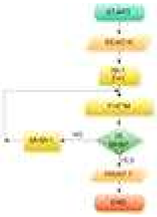
En cours de traduction de l'anglais



En cours de traduction anglais

MARRIAGE AND THE FIBONAUGHTY SEXQUENCE
HONEY MOON
DAY 1: HAVE SEX
DAY 1: HAVE SEX (AGAIN)
DAY 2: HAVE SEX
DAY 3: HAVE SEX
DAY 5: HAVE SEX
DAY 8: HAVE SEX
DAY 13: HAVE SEX
DAY 21: HAVE SEX
DAY 34: HAVE SEX
PREGNANCY
DAY 55: HAVE SEX
DAY 89: HAVE SEX
DAY 144: HAVE SEX
BABY
DAY 233: HAVE SEX
DAY 377: HAVE SEX
DAY 610: HAVE SEX
DAY 987: HAVE SEX
TOO BUSY RAISING KID
DAY 1597: HAVE SEX
DAY 2584: HAVE SEX
DAY 4181: HAVE SEX
ACCORDING TO MY CALCULATIONS, THIS SHOULD SATISFY US FOR AT LEAST THE NEXT SEVEN YEARS!
spikedmath.com © 2011


What are we made of?
organs
skin
bones
blood
Biologist
sound waves
molecules
atoms
elements
Physicist
mortal shell
rich inner world
Social scientists

Ouvrier
+

Processus
=

Ingénieur

Ingénieur
+

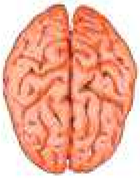
Sociabilité
=

Marketeur

Marketeur
-

Vérité
=

Commercial

Commercial
-

Cerveau
=

Manager

Manager
+

Ego
=

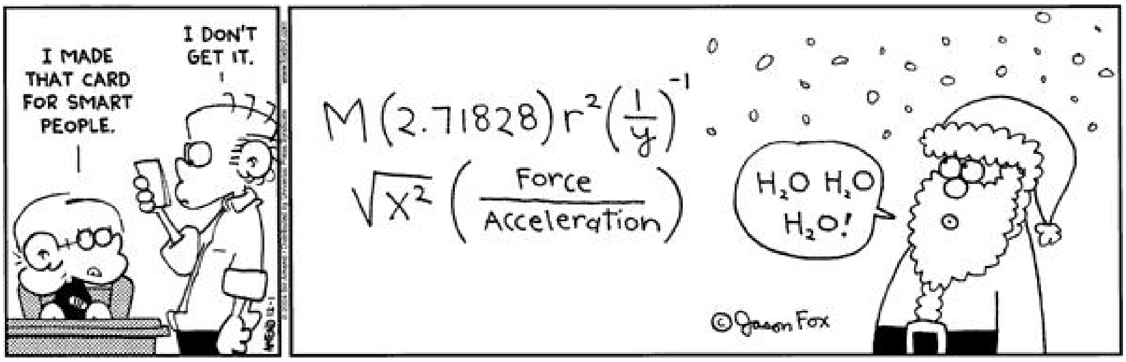
Chef de projet

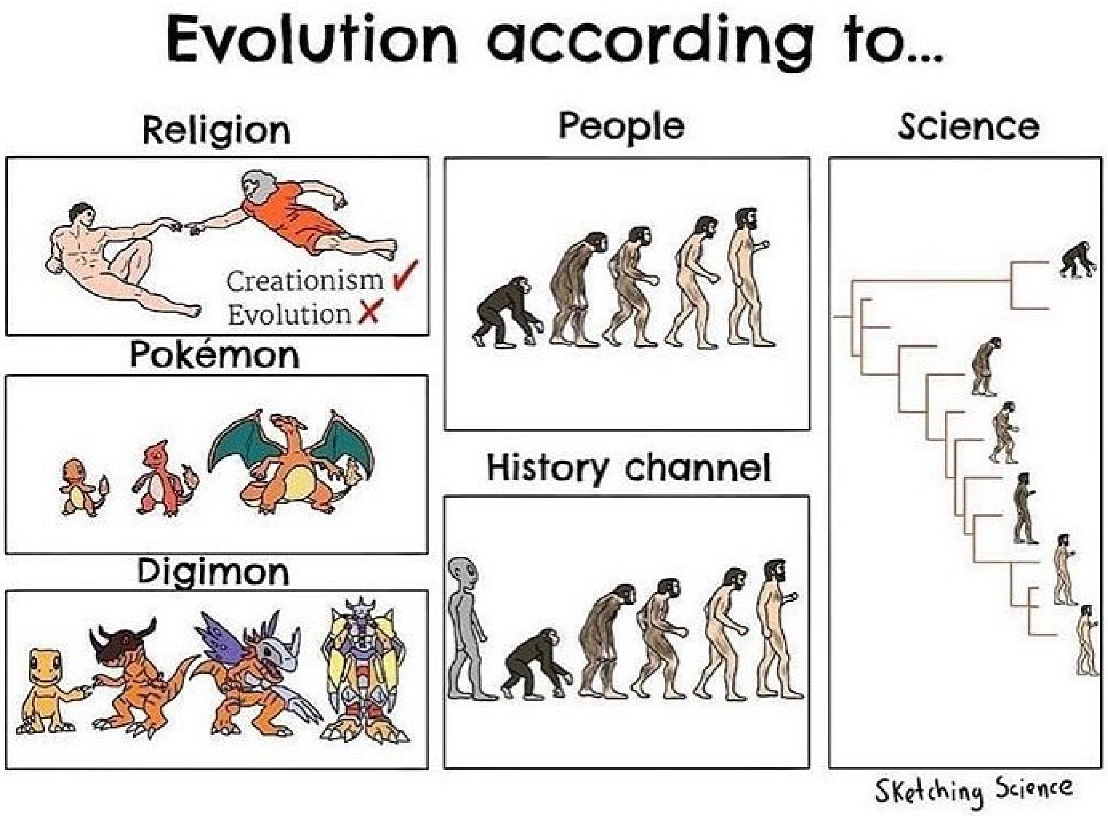
Chef de projet
-

Humour
=

Responsable RH

En cours de traduction de l'anglais


I MADE THAT CARD FOR SMART PEOPLE.
I DON'T GET IT.
$M(2.71828)r^2\left(\frac{1}{y}\right)^{-1}$
$\sqrt{x^2}\left(\frac{\text{Force}}{\text{Acceleration}}\right)$
H_2O H_2O H_2O!
©Jason Fox


Evolution according to...
Religion
Creationism ✓
Evolution ✗
Pokémon
Digimon
People
History channel
Science
Sketching Science

21 Liens

En cours de traduction de l'anglais

Cet annuaire contient des liens répartis dans 7 catégories tous ayant trait aux sciences et que nous trouvons intéressants. Nous tenons à préciser qu'en aucun cas nous avons été rétribué sous quelque forme que ce soit pour l'ajout de liens dans la liste ci-dessous ! Vous pouvez aussi trouver des apps iPad/iPhone "scientifiques" en bas de la liste que nous recommandons fortement (nous n'avons pas contrôlé s'il existe un équivalent de chacune de ces applications pour Android ou Microsoft Windows Surface/Phone).

- ✔ Site de qualité tant du point de vue contenu que contenant
- ✍ Contenu avec développements et démonstrations détaillées
- 🖂 Site avec forum de discussion
- ✄ Softwares, sharewares, freewares (logiciels) scientifiques à télécharger
- ➥ Ouvrages, publications, magazines, journaux scientifiques (à visualiser ou télécharger)
- ✌ Site sympathique
- ♥ Coup de coeur
- ☆ À voir absolument !

S'il y avait par ailleurs, trois liens à mettre en évidence parmi tous ce serait Google, Wikipedia et YouTube dont nous sommes redevables de nombreux emprunts !

Remarque

Nous ne sommes pas responsables de la persistance ou de l'exactitude des URL des sites Internet externes ou tiers mentionnés dans ce livre, et ne garantissons pas que le contenu de ces sites est ou restera exact ou approprié.

21.1. Sciences Exactes

✔✍✄✌♥☆ ChronoMath, "petite" chronologie des mathématiques, est un site Internet pédagogique en perpétuel renouvellement que Serge Mehl fit connaître dès 1988 en tant que conseiller pédagogique de mathématiques en Afrique francophone où il fut coopérant pendant de nombreuses années. Plus de 450 mathématiciens (et leurs travaux) sont passés en revue... ! ! ! À voir !
http://www.chronomath.com

✉✄➡ Ce site propose une actualité des mathématiques, une encyclopédie avec parties dictionnaire, des biographies et formulaires, ainsi que différents dossiers sur des sujets mathématiques divers et un forum. Ce site est particulièrement impressionnant relativement à la quantité d'informations proposée en téléchargement.
http://www.bibmath.net

✔✍ Un bon site traitant de quelques sujets pertinents en physique (synophysique). Le design pourrait être revu en ce qui concerne la navigation utilisant des cadres... mais il faut tout de même privilégier la qualité du contenu et celle-ci prédomine largement.
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/frame3.htm

✔✍✄ Nombreux contenus PDFs sur l'algèbre, l'analyse et la géométrie.
http://c.caignaert.free.fr

✔✍✄ arXiv est une archive de prépublications électroniques d'articles scientifiques. Le laps de temps s'écoulant entre le moment où un chercheur termine un projet et le moment où son travail est publié dans un journal peut être de l'ordre d'un an. À l'échelle du temps de la recherche c'est une durée longue. La mise en place de l'arXiv a donc été un moyen de pallier à ce problème temporel et de coût.
http://arxiv.org

✔✍✄ L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL est destinée au dépôt et à la diffusion gratuite d'articles scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, et de thèses, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés. On y trouve même des livres scientifiques publiés récemment par des maisons d'édition françaises préstigieuses.
http://hal.archives-ouvertes.fr/

En cours de traduction de l'anglais

21.2. Éditions/Magazines

✔✉➡♥☆ On peut considérer le site proposé ici comme l'équivalent du précédent, mais pour les ingénieurs francophones. Il est cependant qualitativement meilleur et on y trouve une quantité de dossiers toute aussi grande mais plus homogène. On regrettera juste peut-être l'accès à certains éléments qui n'est pas toujours aisé du premier coup.
http://www.techniques-ingenieur.fr

✔➡♥☆ Absolument excellent et à voir ! De nombreux cours complets de l'École Polytechnique (France) sont publiées et disponibles gratuitement au téléchargement au format PDF (est-ce que cela va durer ?). Environ 1′000 ressources éducatives sont disponibles au total, dont la qualité est hautement variable, mais dont la pertinence et la rareté sont toujours égales.
http://catalogue.polytechnique.fr

✔➡♥☆ Le site Internet en soi n'est pas excellent (ce qui est fort dommage) mais le magazine pour lequel il vous propose de vous abonner (contre payement) vaut largement le détour pour les passionnées de mathématiques et de leur actualité.
http://tangente.poleditions.com/

✔➡♥☆ Un magazine de la même trempe que Tangente mais à un niveau technique et académique bien supérieur selon mes critères personnels. Le contenu est particulièrement orienté mathématiques pures et très rarement avec des applications directes et explicites à la physique, ingénierie ou à l'économie.
http://www.quadrature.info

✔➡♥☆ Ce site en soi n'est pas excellent non plus (ce qui est fort dommage) mais certains des ouvrages proposés sont simplement historiques ! ! !
http://urss.ru

✔➡♥☆ Excellent site avec une ressource considérable de documentation électronique traitant des mathématiques uniquement. Le site contient des liens vers les pages des auteurs des documents (sinon quoi il faudrait un serveur considérable...).
http://mathslinker.chez-alice.fr

➡ Ce site contient une bibliothèque en ligne de publications de grands mathématiciens du 20ème et 19ème siècle. À voir absolument !
http://matwbn.icm.edu.pl/wyszukiwarka.php

✔➡♥☆ Reprints d'oeuvres fondamentales concernant la mathématique, la physique, l'histoire et la philosophie des Sciences.
http://www.gabay.com

En cours de traduction de l'anglais

✔➥♥☆🇫🇷 Éditions Eyrolles - Excellent site contenant de nombreux ouvrages francophones et anglophones de qualité. Propose au fait des ouvrages de plusieurs maisons d'éditions dont Dunod, Springer, etc. Il vaut la peine d'aller jeter un coup d'oeil dans les sections "Mathématique" et "Physique" y'a du bon...
http://www.eyrolles.com

✔➥♥☆🇫🇷 Éditions Dunod - Proposent des ouvrages scientifiques contemporains (niveau 1-3ème cycle et +). Les ouvrages de cette maison d'édition sont pour la plupart excellents. Personnellement ils sont techniquement (mais pas pédagogiquement) mes préférés, car souvent les développements y sont souvent très détaillés.
http://www.dunod.com

➥♥ Éditions Springer - Proposent des ouvrages scientifiques de niveau postdoc. La navigation sur le site n'est pas aisée car les choix sont disposés un peu n'importe comment mais sinon les ouvrages proposés sont très techniques et de haut niveau... très haut niveau...
http://www.springer.de

➥♥☆🇫🇷 Le programme NUMDAM, piloté par la Cellule MathDoc (UMS 5638 CNRS - UJF) pour le compte du CNRS, propose la numérisation rétrospective des fonds mathématiques publiés en France.
http://www.numdam.org

✔➥♥☆ Éditions Wrox - Proposent des ouvrages développement informatique (niveau expert). D'après ce que je sais (et j'en pense de même), cette maison d'édition est la référence mondiale dans le domaine des ouvrages traitant des langages de programmation.
http://www.wrox.com

✔♥☆ Éditions Cambridge University Press - Proposent des uvrages scientifiques niveau postdoc aussi. Un peu l'équivalent des éditions Springer mais la structure du site Internet est un peu mieux faite. On appréciera particulièrement la possibilité de s'abonner gratuitement pour recevoir régulièrement leur catalogue.
http://www.cambridge.org

✍➥♥☆ La Bibliothèque Numérique de France (BNF) propose gratuitement en téléchargement des ouvrages scientifiques (entre autres) dont les droits d'auteur sont tombés après 75 années. Le système de téléchargement est peu convivial, mais on peut cependant tomber sur des ouvrages très pertinents. Les PDF font souvent plus de 10 MB donc attention à ceux qui ont du petit débit.
http://gallica.bnf.fr

✍➥♥☆ Le Physical Review Letters (PRL) search machine (articles scientifiques) propose contre inscription et paiement (sic !) l'accès à des articles scientifiques de recherche en physique théorique et expérimentale publisée depuis plus de 100 ans. Il faut admettre que le niveau de détail des articles proposés n'est souvent pas très élevé mais là n'est pas l'objectif pour les spécialistes.
http://prola.aps.org/search

En cours de traduction de l'anglais

✍➥☆ Éditions Lavoisier - Très bonne maison d'édition proposant des ouvrages très spécialisés dans le domaine de l'ingénierie électronique, électrotechnique, civile, informatique, etc. On appréciera aussi particulièrement la possibilité de s'abonner gratuitement pour recevoir régulièrement leur excellent catalogue. Voir plus particulièrement la partie "Hermès Sciences" et " Tech & Doc".
http://www.lavoisier.fr (http://www.editions-hermes.fr + http://www.tec-et-doc.com)

♥✍➥ Éditions World Scientific - Éditeur américain proposant de très nombreux ouvrages de haut niveau pour les sciences physiques et mathématiques (voir la large palette de sections scientifiques correspondantes dans leur site).
http://www.worldscibooks.com

21.3. Associations

✌ myScience.ch donne une vue d'ensemble des sciences, de la recherche, des universités, des entreprises et d'autres centres de recherche en Suisse. Le site fournit des informations pratiques sur l'emploi, le financement et la vie en Suisse ainsi que des nouvelles scientifiques aux chercheurs, scientifiques, universitaires et à toute personne intéressée par les sciences. Il a une proportion plus grande d'articles en allemand... même dans la version francophone...
http://www.myscience.ch

➥✌☆🇫🇷 L'Union Rationaliste a pour but de promouvoir le rôle de la raison dans le débat intellectuel comme dans le débat public, face à toutes les dérives irrationnelles. Elle s'emploie à mettre à la disposition de chacun la possibilité d'accéder à une conception intelligible du monde et de la vie. Elle lutte pour que l'État demeure laïque, assume sa fonction de protection contre toute forme d'endoctrinement.
http://www.union-rationaliste.org

En cours de traduction de l'anglais

✍➥ La Société Américaine de Mathématiques (en anglais : American Mathematical Society, AMS) est une association de mathématiciens professionnels, dédiée aux intérêts de la recherche et de l'enseignement des mathématiques, ce qu'elle fait sous forme de différentes publications gratuites et conférences, et de prix décernés à des mathématiciens.
http://www.ams.org

✍➥ La Société Américaine de Physique (en anglais : American Physical Society, APS) est une société savante fondée le 20 mai 1899, basée aux États-Unis, très active dans le domaine de la recherche scientifique en physique.
http://www.aps.org

✍➥♥ L'Association Européenne de Physique (en anglais : Physical Society, EPS) est une organisation à but non lucratif dont le but est de promouvoir la physique et les physiciens en Europe. Cette société propose un abonnement à son magazine *Europhysicsnews* et à bien d'autres choses..
http://www.eps.org

21.4. Emploi

☆ Voici une liste non-exhaustive de sites d'offres d'emplois déstinée particulièrement aux physiciens et mathématiciens suisses... (cependant un lien est destiné uniquement au territoire U.S. !). Il en découle que souvent les descriptifs des offres sont en allemand (...) et que ces dernières sont souvent relatives au domaine bancaire (qui reprèsente 10-15% de l'emploi en Suisse d'après ce que je sais...). Certaines offres sont reliées à des sites plus généraux comme le fameux jobup.ch bien connu en Suisse.

- http://www.telejob.ch
- http://www.jobs.myscience.ch
- http://www.math-jobs.ch
- http://www.analyticrecruiting.com

21.5. Télévision/Radio

☆ Excellent site expliquant avec des animations 3D de nombreux appareillages ultra-classiques de la vie de tous les jours conçus et développés par les méthodes de l'ingénieur (moteur, réfrigérateur, pompe, etc.).
http://www.learnengineering.org

C'est pas Sorcier : La célèbre émission de télévision française (version moderne de "Bill Nye the Science guy") sur toutes les sciences que presque tous les jeunes francophones connaissent ou découvrent encore !
https://www.youtube.com/user/cestpassorcierftv/

Cité-Sciences : visionnement de vidéo-conférences, ou écoute d'enregistrements audio sur des sujets de physique et astronomie (+ d'autres) vulgarisés (requière RealOne Player au jour où nous écrivons ces lignes).
http://www.cite-sciences.fr

Sur Canal Académie, les académiciens, spécialistes en physique, mathématique, sciences humaines, philosophie, sociologie, droit et jurisprudence, économie, politique et finances, histoire, géographie et démographie et sciences politiques vous font partager leurs réflexions sur l'actualité et les évolutions de la société.
http://www.canalacademie.com

En cours de traduction de l'anglais

Et voici une liste non-exhaustive de chaînes scientifiques YouTube produites par des particuliers passionnés qui sont scientifiquement relativement fiables et dont la qualité de post-production est très bonne et qui peuvent s'avérer très très utiles pour mieux comprendre certains théorèmes complexes et sujets traités dans ce livre (la plupart sont de niveau scolaire secondaire) :

- https://www.youtube.com/user/epenser1 (fr, Bruce Benamran)
- https://www.youtube.com/user/ScienceEtonnante (en, David Louapre)
- https://www.youtube.com/user/Micmaths (fr, Mickaël Launay)
- https://www.youtube.com/user/physicswoman (en, Dianna Cowern)
- https://www.youtube.com/user/1veritasium (en, Derek Muller)
- https://www.youtube.com/channel/UCYO_jab_esuFRV4b17AJtAw (en, Grant Sanderson)
- https://www.youtube.com/user/fauxsceptique(fr, Christophe Michel)
- https://www.youtube.com/channel/UC7_gcs09iThXybpVgjHZ_7g (en, Matt O'Dowd)
- https://www.youtube.com/user/mathdude2012 (en, Andrey Kopot)
- https://www.youtube.com/user/LearnEngineeringTeam (en, Sabin Mathew)

En cours de traduction de l'anglais

21.6. Divers Sciences

✔✍✉✌ Site comportant de nombreuses fiches de cours et surtout quantités d'exercices résolus intéressants. Malheureusement, le site est devenu payant avec accès pendant une période limitée... le prix étant peu élevé il peut être quand même pertinent de débourser la somme ad hoc pour la qualité.
http://www.web-sciences.com

✔✉➡✌☆ Futura-Sciences est un site à vocation de vulgarisation sur les sciences pures et exactes avec des informations quotidiennes sur les sciences et technologies, de nombreux dossiers dans toutes les thématiques et des forums de sciences de débats et de discussions ... (le forum de physique y est souvent très bien fréquenté).
http://www.futura-sciences.com

✔✉➡✌☆ Physics Forum est considéré comme la plus grande communauté de physique au monde. Il y a beaucoup de discussions sur de nombreux sujets auxquels la communauté a répondu avec qualité. Ce forum est également considéré comme le forum partenaire de du présent livre car je n'ai plus le temps de répondre gratuitement aux questions qu'on m'envoie par courriel.
http://www.physicsforums.com

✔✍✉✄➡✌♥☆ Astrosurf est un portail de liens pour les astronomes amateurs francophones. Il y est aussi proposé des forums d'astronomie, des petites annonces, l'hébergement gratuit de sites d'astronomie, des éphémérides et tout sur les clubs et associations d'astronomie francophones. On y trouve en particulier le site fameux de Thierry Lombry (ici).
http://www.astrosurf.com

✔➡ Le C.E.A. est le Commissariat Français à l'Énergie Atomique. Le site propose des dossiers et nouvelles intéressantes sur certains domaines particuliers de la physique de pointe. On peut également trouver des ressources pédagogiques gratuites pour les professeurs (diaporamas et posters).
http://www.cea.fr

✌☆ Voici un site qui, si j'étais encore enfant, aurait fait mon bonheur... et le malheur de mes parents. Ce n'est pas tant le contenu qui est intéressant mais surtout la boutique en ligne (eStore) qui propose une bonne centaine de gadgets et jeux ludo-éducatifs pour les passionnées de sciences. Attention au porte-monnaie quand même !
http://www.xump.com

✌☆ Pendant des années, les dessins de S. Harris ont ajouté de l'humour à d'innombrables magazines, livres, bulletins d'information, publicités et sites Internet dans le domaine des sciences.
http://www.sciencecartoonsplus.com

En cours de traduction de l'anglais

21.7. Logiciels/Applications

✔♥☆ Rosetta Code est un site de programmation chrestomathy. L'idée est de présenter des solutions à la même tâche dans autant de langues de programmation différents que possible, de montrer comment les languages sont similaires et différentes, et d'aider une personne ayant une approche unique à résoudre un problème pour en apprendre une autre. Le code Rosetta comporte actuellement 861 tâches, 208 tâches à l'état de brouillon et 671 languages.
https://rosettacode.org

✔✄♥☆ Site Internet du logiciel TeXMaker utilisé pour écrire ce livre en LaTeX (logiciel fonctionnant sur plusieurs systèmes d'exploitation).
http://www.xm1math.net

✔✄♥☆ Minitab est un des logiciels (payant) de référence pour les ingénieurs travaillant dans l'industrie et appliquant la maîtrise statistique des procédés (voir la section de Génie Industriel de ce livre) dans le cadre de leur travail ou faisant tout autre étude statistique dans le cadre de la R&D.
http://www.minitab.com

✔✄♥☆ Isograph est une excellente suite de logiciels pour les ingénieurs travaillant dans l'industrie et appliquant les techniques de la maintenance préventive (fiabilité, AMDEC) et d'assistance à la décision (voir chapitre de Théorie Des Jeux Et De La Décision).
http://www.isograph-software.com

✔✄♥☆ L'entreprise ReliaSoft développe probablement les meilleurs logiciels du marché pour les ingénieurs en fiabilité et en assurance. Leurs logiciels sont utilisés par les entreprises étant à la pointe dans l'ingénierie mondiale. Globalement leurs logiciels sont de vrais petits bijoux (en particulier Weibull++).
http://ww.reliasoft.com

✔✄☆ JMP de la société SAS est probablement le meilleur logiciel (dans le sens de sa complétude) pour les plans d'expérience et l'analyse de la capabilité à ce jour. Son approche est pédagogique, structurée et il existe de très bonnes documentations avec les démonstrations mathématiques de la démarche utilisée par le logiciel.
http://www.jmp.com

✔✄♥☆ Site internet officiel de l'excellent logiciel de calcul formel Maple utilisé pour de nombreux exemples dans les différentes chapitres du présent livre. Le site propose aussi beaucoup de documentation et de compléments à télécharger.
http://www.mapleapps.com

✔✄☆ Site internet officiel du logiciel de calcul et simulation numérique MATLAB™. Je ne suis pas un fan mais c'est un outil incontournable dans certaines entreprises et particulièrement pour la partie SimuLink. Il s'agit en quelque sorte d'un "must have" pour les ingénieurs au même titre que LabView.
http://www.mathworks.com

En cours de traduction de l'anglais

✔✄☆ Site officiel de la société Statistica. Une référence mondiale dans le domaine de l'analyse statistique, de l'exploration de données et du contrôle statistique des processus qui se situe à priori dans un mouchoir de poche avec IBM SPSS.
http://www.statsoft.com

✔✄♥☆ COMSOL Multiphysics (anciennement FEMLAB) est un excellent environnement interactif pour la modélisation d'applications industrielles et scientifiques basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP) utilisant les méthodes par éléments finis (plus simple à utiliser que ANSYS). À acheter pour les ingénieurs et chercheurs (pour ceux qui ont les moyens d'acheter la licence bien sûr..) !
http://www.comsol.fr

✔✄♥☆ Palisade @Risk est une suite de compléments pour Microsoft Excel et Microsoft Project pour la simulation probabiliste (de Monte Carlo et Latin Hypercube). Son intégration conjointe avec Microsoft Project et Microsoft Excel (ie convivialité) ainsi que ses modules de calculs basés sur les algorithmes génétiques et réseaux de neurones et son module de théorie de la décision en fait un outil très convoité pas les hauts dirigeants et ingénieurs des grandes entreprises dans le domaine de la finance, de la qualité, la gestion de projets, l'audit et de la production.
http://www.palisade-europe.com

✔✄♥☆ Le logiciel Decision Analysis de TreeAge (DATA) permet à l'utilisateur de construire, d'analyser et de distribuer des arbres d'analyse, des modèles de Markov et des diagrammes d'influence. Les modèles DATA intègrent visuellement les aspects quantitatifs et qualitatifs reliés aux décisions d'entreprise afin de fournir un outil d'assistance dans les projets lors d'analyse de risques complexes.
http://www.treeage.com

✔✄♥☆ MathType est un éditeur d'équations puissant (logiciel utilisé pour le site Internet companion au présent livre) pour importer / exporter du MathML ou TeX que vous pouvez l'exécuter dans une application autonome. Avec une barre d'outils, ce logiciel s'intègre également parfaitement aux programmes de la suite Microsoft Office 2003-2013 (Word, Excel, PowerPoint), mais aussi à 500 autres logiciels (en particulier des logiciels de mathématiques). À la différence de LaTeX2 ε, vous ne perdrez pas d'heures pour résoudre les problèmes de compatibilité et de compilation.
http://www.dessci.com/en/

✔✄☆ Scilab (contraction de Scientific Laboratory) est un logiciel libre, développé à l'INRIA Rocquencourt (France). C'est un environnement de calcul numérique qui permet d'effectuer rapidement de nombreuses résolutions et représentations graphiques couramment rencontrées en mathématiques appliquées pour les gens ou petites entreprises n'ayant pas les moyens financiers d'acquérir MATLAB™.
http://www.scilab.org

✄☆ Site officiel du fameux logiciel de géométrie dynamique Cabri (référence dans le domaine). destiné principalement à l'apprentissage de la géométrie en milieu scolaire. Il permet d'animer des figures géométriques, au contraire de celles dessinées au tableau. Il se décline pour la géométrie plane ou pour la géométrie en 3D. C'est l'ancêtre de tous les logiciels de géométrie dynamique.

http://www.cabri.com

✂♥☆ Site Internet d'un prof de math ayant développé un très bon petit logiciel gratuit pour faire de nombreux plots, calculs d'intégrales, simulations de statistiques et probabilités pertinents très simplement et ludiquement en classe (niveau BAC/Matu).
http://www.patrice-rabiller.fr

✂☆ ACDLabs développe l'excellent logiciel Chemsketch pour la modélisation et la conception de molécules (2D, 3D) avec accès à certaines propriétés physiques et chimiques. C'est un outil très utile également pour préparer des documents ou des articles scientifiques (publications) dans le domaine de la chimie.
http://www.acdlabs.com

✂☆♥ MolView est une application web intuitive, open-source, pour rendre la science de la chimie moléculaire plus intuitive !
http://molview.org

✂☆ Excellent logiciel de conception de structures de génie civil de haut niveau basé sur les méthodes par éléments finis (pas mal utilisé en Suisse pour des projets simples ou complexes et pendant les études d'ingénieurs).
http://www.scia-online.com

✂☆ Maxima est un logiciel libre de calcul formel, descendant sous licence GNU GPL du package Macsyma, le logiciel de calcul symbolique développé à l'origine pour les besoins du Département de l'Énergie américain. Maxima permet de faire du calcul sur les polynômes, les matrices, de l'intégration, de la dérivation, du calcul de séries, de limites, résolutions de systèmes, d'équations différentielles, etc.
http://maxima.sourceforge.net

✂☆ SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) est a priori le logiciel le plus utilisé dans les entreprises en Suisse pour l'analyse statistique de données car il comporte un nombre impressionnant de tests ainsi que de nombreux packages métier. De par son prix et son propriétaire (IBM) on peut le considérer comme la solution haut de gamme de la statistique.
http://www.ibm.com/software/fr/analytics/spss

✂♥☆ R est un langage puissant et un environnement pour le calcul statistique et les graphiques. R fournit une très grande variété de statistiques (modélisation linéaire et non linéaire, tests statistiques classiques, analyse de séries chronologiques, la classification, clustering, ...) et de techniques graphiques qui par ailleurs sont très extensible (accès au code source de toutes les fonctions est disponible !). Une des forces de R est la facilité avec laquelle on peut rédiger correctement des publications scientifiques de qualité.
http://www.r-project.org

✂☆ LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) est un puissant outil visuel (langage de programmation graphique) de contrôle d'instruments de mesures ou de robots depuis un PC utilisé par énormément d'entreprises à traver à le monde (particulièrement par les ingénieurs) et développé par National Instruments.
http://www.ni.com/labview

En cours de traduction de l'anglais

Et enfin une petite liste de quelques applications "scientifiques" pour iPhone / iPad (nous ne donnons pas de liens puisqu'il suffit de les trouver via le iTunes Store en écrivant leur nom dans l'outil de recherche) :

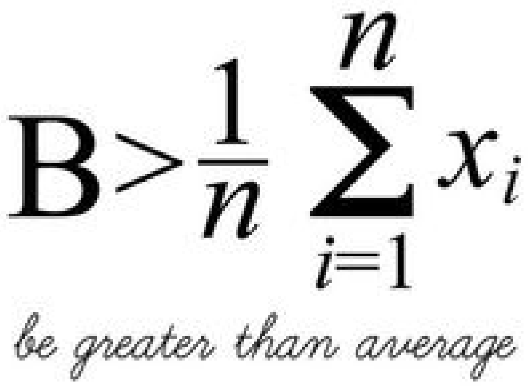
- **Microsoft OneNote** : Pour prendre facilement des notes (au clavier ou stylet) et écrire des équations en pseudo LaTeX et les synchroniser avec votre ordinateur et le cloud.
- **iAnnote** : Super lecteur PDF avec de nombreuses fonctions pour annoter et modifier vos manuels de cours et publications scientifiques et gérer des livres volumineux.
- **WeatherProHD** : Pour les personnes qui aiment la météorologie et les prévisions météorologiques présentées de manière belle et professionnelle avec beaucoup d'options.
- **Analyser** : Pour ceux qui veulent lancer R ou Python sur leur iPad et leur iPhone. Application incroyable à la science des données en voyage !
- **TeX Writer** : Jusqu'à présent, la meilleure application LaTeX que nous connaissons vous permettant d'écrire des équations et des documents de qualité sur vos appareils mobiles !
- **Telesat** : Pour identifier ou anticiper dans le ciel nocturne le passage de certains satellites bien connus.
- **ISS Dectector** : Même idée que pour Telesat mais pour la Station Spatiale Internationale (ISS).
- **Fligthradar** : Mêmes idées que pour Telesat et ISS Detector mais pour presque tous les avions civils (mais la version gratuite montre les avions avec un petit décalage pour des raisons de sécurité évidentes...).
- **Sun Info** : Une application qui vous aide à anticiper la position du Soleil et de la Lune pendant de nombreuses années, ainsi que le solstice été / hiver, les prochaines éclipses, etc.
- **Stellarium** : Comme son nom l'indique, c'est un magnifique stellarium en temps réel et complet pour regarder les étoiles, les galaxies, les constellations et aussi certains satellites.
- **C. Anatomy 19** : Une application (assez chère avec un abonnement mensuel / annuel) pour découvrir en haute résolution 3D l'intérieur du corps humain.
- **EarthViewer** : Une application pour découvrir et jouer avec les dérives des continents de la Terre à travers le temps.
- **MathStudio** : Une calculatrice arithmétique et algébrique très puissante avec des options de calcul similaires à celle de Maple.
- **PCalc Lite** : Un calculateur arithmétique complet très intuitif (mais évidemment moins puissant que MathStudio !).
- **Molecules** : Un visualiseur de molécules 3D où vous pouvez télécharger des molécules à partir d'une base de données en ligne.

En cours de traduction de l'anglais

- **E Numbers** : E Numbers vous donnent les codes pour les substances pouvant être utilisées comme additifs alimentaires.
- **iCircuit** : Une belle application pour créer des circuits électroniques simples et les simuler ! Très bon pour apprendre les bases de l'électronique pendant les vacances sans avoir besoin de composants physiques réels.
- **Electronic TB** : Une application qui fournit une liste très importante (exhaustive) et des calculatrices pour de nombreux composants électroniques, y compris plusieurs de leurs propriétés techniques !

En cours de traduction de l' anglais

22 Citations



En cours de … l’anglais

> Sans la foi, Dieu n’est rien. Sans Science, l’homme n’est rien !

John Aubrey

> Si nous pouvions faire les choses avec le bon sens, nous n’aurions pas besoin de physiciens.

Richard Dawkins

> L’intelligence n’est pas ce que nous savons mais ce que nous faisons quand nous ne savons pas.

Jean Piaget

> Si une religion avait ne serait-ce qu’une seule preuve vraie au-delà de tout doute raisonnable, il n’y aurait pas d’autres religions !

?

La religion est une insulte à la dignité humaine. Avec ou sans elle, on verrait des gens bons faire le bien et des gens méchants faire le mal. Mais pour que les gens bons fassent le mal, il faut la religion !

Steven Weinberg

Avec quatre paramètres, je peux tracer un éléphant.

John Von Neumann

Un scientifique lira des dizaines de livres au cours de sa vie, tout en sachant qu'il lui reste encore beaucoup à apprendre. Un fanatique religieux lit à peine un livre et pense tout savoir.

?

Je considère ma carrière de physicien comme divisée en trois périodes. La première... j'étais sous l'emprise de l'idée que tout est particules... La deuxième... j'appelle tout est champs... Maintenant, je suis sous l'emprise d'une nouvelle vision : tout est information.

John Archibald Wheeler

La religion est la pratique qui consiste à utiliser des absurdités pour expliquer l'ignorance.

?

Rien ne peut créer quelque chose tout le temps en raison des lois de la mécanique quantique, et c'est fascinant et intéressant !

Lawrence M. Krauss

Que personne ignorant la géométrie n'entre ici !

Plato

Tout n'est qu'une forme de développement de Taylor du premier ordre !

?

Les ordinateurs sont comme les humains : ils font tout sauf penser.

John von Neumann

En cours de traduction de l'anglais

> *La SCIENCE ne se définit pas par nos croyances. Elle n'est pas un système de croyances. Elle ne repose sur aucune doctrine religieuse ! C'est simplement une méthode d'investigation intellectuelle qui rejette les affirmations dénuées d'évidences expérimentales reproductibles.*

?

> *Des affirmations extraordinaires nécessitent des évidences extraordinaires.*

Carl Sagan

> *J'ai bien reçu votre lettre et la meilleure chose à faire est de me référer à mes publications, tant scientifiques que de vulgarisation. Le mouvement créationniste est dirigé par une bande d'opérateurs malhonnêtes, et les citations erronées sont la marque de fabrique de leur travail. Leur répondre est une perte de temps, et une lettre ne suffirait pas à répondre à vos questions. Il y a des choses qu'il vaut mieux ignorer, et la stupidité de ces soi-disant fanatiques religieux continue de m'étonner.*

Richard Leakey

En cours de traduction de l'anglais

> *La plupart des gens ne veulent pas vraiment connaître la vérité ; ils veulent juste être rassurés sur le fait que ce qu'ils croient déjà est la vérité.*

L. Aron Nelson

> *La raison pour laquelle il y a un conflit entre la science et les religions est que la science continue de réfuter les choses que les religions prétendent être vraies ou exactes.*

?

> *Celui qui aime la pratique sans la théorie est comme le marin qui monte à bord sans gouvernail ni compas et ne sait jamais où il peut acoster.*

Leonardo da Vinci

> *La physique est comme le sexe. Bien sûr, cela peut avoir des résultats pratiques, mais ce n'est pas pour cela que nous le faisons.*

Richard Feynman

Les mathématiques ne sont pas seulement réelles, mais c'est la seule réalité. C'est que tout l'univers est fait de matière, évidemment. Et la matière est faite de particules. Il est composé d'électrons, de neutrons et de protons. Donc, l'univers entier est composé de particules. Maintenant, de quoi sont faites les particules ? Elles ne sont pas faits de rien. La seule chose que vous pouvez dire de la réalité d'un électron est de citer ses propriétés mathématiques. Il y a donc un sens dans lequel la matière s'est complètement dissoute et ce qui reste n'est qu'une structure mathématique.

Martin Gardner

Chaque génération de scientifiques se tient sur les épaules de ceux qui ont précédé.

Owen Chamberlain

Dans les structures mathématiques construites avec précision, les mathématiciens trouvent le même genre de beauté que les autres trouvent dans des pièces musicales enchanteresses ou dans des architectures magnifiques. Il y a cependant une grande différence entre la beauté des structures mathématiques et celle du grand art. La musique de Mozart, par exemple, impressionne même ceux qui ne connaissent pas la théorie musicale ; la cathédrale de Cologne accable les spectateurs même s'ils ne connaissent rien du christianisme. La beauté des structures mathématiques, cependant, ne peut être appréciée sans comprendre un groupe de relations numériques qui expriment des lois de la logique. Seuls les mathématiciens peuvent lire des "partitions musicales" contenant de nombreuses relation numériques et jouer cette "musique" dans leurs coeurs.

Kiyoshi Ito

En cours de traduction de l'anglais

Vous n'avez pas besoin de brûler des livres pour détruire une culture. Empêchez juste les gens de lire.

Ray Bradbury

La science d'aujourd'hui est la technologie de demain.

Edward Teller

La science est différente de tous les autres systèmes de pensée ... parce que vous n'avez pas besoin d'avoir foi en elle, vous pouvez vérifier par vous-même qu'elle fonctionne !

Brian Cox

> *Le fait qu'un croyant soit plus heureux qu'un sceptique n'est pas plus frappant que le fait qu'un homme ivre soit plus heureux que celui qui est sobre.*

George Bernard Shaw

> *Je ne veux pas croire, je veux savoir !*

Carl Sagan

> *La science n'est que de l'imagination dans dans une camisole de force.*

Richard Feynman

> *Le plus grand ennemi de la connaissance n'est pas l'ignorance, c'est l'illusion de la connaissance.*

Stephen Hawking

> *Sans données, vous êtes juste une autre personne sans opinions, mais sans les mathématiques, vous n'êtes qu'un collectionneur de données.*

?

> *Je n'ai pas de talents particuliers, je ne suis que passionnément curieux.*

Albert Einstein

> *Les gens continuent à dire "la science ne sait pas tout !". Eh bien, la science sait qu'elle ne sait pas tout ; sinon elle s'arrêterait.*

Dara Briain

> *On ne peut pas prouver que Dieu n'existe pas, mais la Science rend Dieu inutile.*

Stephen Hawking

> *Le pouvoir des nombres était beaucoup plus respecté quand nous ne savions rien d'eux.*

Voltaire

En cours de traduction de l'anglais

> *Réfléchir, c'est déranger ses pensées !*
>
> Jean Rostand

> *Si vous êtes stupide, comment pouvez-vous vous rendre compte que vous êtes stupide ?*
>
> John Cleese

> *Si vous ne faites pas d'erreurs, c'est que vous ne travaillez pas sur des problèmes assez dur. Et c'est une grosse erreur.*
>
> Frank Wilczek

> *Le succès repose sur le succès de ceux qui nous ont précédés.*
>
> ?

> *Entre quantité et qualité, il y a la géométrie.*
>
> Brigitte Le Roux, Henry Rouanet

> *La pratique devrait toujours être basée sur une bonne connaissance de la théorie.*
>
> Leonardo da Vinci

> *L'ignorance engendre plus souvent la confiance que la connaissance : ce sont ceux qui savent peu, non ceux qui savent beaucoup, qui affirment si positivement que tel ou tel problème ne sera jamais résolu par la science.*
>
> Charles Darwin

> *J'ai votre lettre et la meilleure chose que je puisse faire est de me référer à mes travaux publiés, à la fois scientifiques et populaires. Le mouvement créationniste est dirigé par une bande de dirigeants malhonnêtes et les citation erronées sont la marque de fabrique de leur travail. Y répondre est une perte de temps et une lettre ne serait pas suffisante pour apaiser vos questions. Il y a des choses qu'il vaut mieux ignorer et la stupidité de ces prétendus fanatiques religieux continue de m'étonner.*
>
> Richard Leakey

En cours de traduction de l'anglais

> *Peu importe la beauté de votre théorie, quelle que soit votre intelligence ! Si ce n'est pas en accord avec l'expérience, c'est que c'est faux !*

Richard Feynman

> *Consulter le statisticien après la fin d'une expérience, cela revient souvent à lui demander seulement une autopsie. Il peut peut-être dire de quoi l'expérience est morte...*

Ronald Fisher

> *Les erreurs utilisant des données inadéquates sont beaucoup moins nombreuses que celles n'utilisant aucune donnée !*

Charles Babbage

> *Les détails font la perfection et la perfection n'est pas un détail.*

Leonardo da Vinci

> *L'ignorance est un virus. Une fois qu'il commence à se répandre, il ne peut être guéri que par la raison. Pour l'amour de l'humanité, nous devons être ce remède !*

Neil Degrasse Tyson

> *L'art de faire des mathématiques consiste à trouver ce cas particulier qui contient tous les germes de la généralité.*

David Hilbert

> *Si vous pensez que l'éducation coûte cher, essayez l'ignorance.*

Derek Bok

> *Dites-moi et j'oublie, enseignez-moi et je me souviens, impliquez-moi et j'apprends.*

Benjamin Franklin

> *Un expert est une personne qui a découvert par sa propre expérience toutes les erreurs que l'on peut commettre dans un domaine très restreint.*

Niels Bohr

En cours de traduction de l'anglais

> *Ce que vous pouvez imaginer dépend de ce que vous savez.*
>
> Daniel C. Denett

> *Toute technologie suffisamment avancée ne se distingue pas de la divinité.*
>
> Arthur C. Clarke

> *Ce qu'un homme appelle Dieu, un autre l'appelle les lois de la Physique.*
>
> Nikola Tesla

> *La seule personne dont vous avez besoin d'être meilleur que est la personne que vous étiez hier !*
>
> ?

> *Les grands esprits discutent des idées. Les esprits moyens discutent des événements. Les petits esprits discutent des gens.*
>
> Eleanor Roosevelt

> *Soyez moins curieux des gens et plus curieux des idées.*
>
> Marie Curie

> *La créativité est de l'intelligence qui s'amuse.*
>
> Albert Einstein

> *Avec suffisamment d'entre nous, partout dans le monde, nous ne ferons pas que lancer un message fort contre la privatisation de la connaissance - nous en ferons un passé !*
>
> Aaron Swartz

> *Lorsque vous passez votre focalisation de la concurrence à la contribution, la vie devient une célébration ! N'essayez jamais de vaincre les gens, gagnez simplement leurs coeurs.*
>
> Buddha

En cours de traduction de l'anglais

> *Le problème dans le Monde est que les gends stupides sont sûrs d'eux et que les intelligents sont pleins de doutes.*
>
> Bertrand Russell

> *Certains hommes voient les choses telles qu'elles sont et demandent pourquoi ? D'autres rêvent de choses qui n'ont jamais existé et se demandent pourquoi pas ?*
>
> Gerge Bernard Show

> *Si vous ne pouvez pas l'expliquer à un enfant de six ans, vous ne le comprenez pas assez bien.*
>
> Albert Einstein

> *L'homme est l'espèce la plus folle. Il vénère un Dieu invisible et détruit une nature visible. Ignorant que la nature qu'il détruit est ce Dieu qu'il adore.*
>
> Hubert Reeves

> *Vous ne pouvez pas mesurer, vous ne pouvez l'améliorer !*
>
> Willima Thomson (Lord Kelvin)

> *Dès que vous cessez d'apprendre, vous commencez à mourir.*
>
> Albert Einstein

> *Le seul bien est la CONNAISSANCE, le seul mal est l'IGNORANCE.*
>
> Socrates

> *Le but de l'argumentation ne devrait pas être la victoire, mais le progrès.*
>
> ?

> *La science est la poésie de la réalité !*
>
> Richard Dawkins

En cours de traduction de l'anglais

> *La vraie science peut être beaucoup plus étrange que la science-fiction et beaucoup plus satisfaisante.*
>
> Sthepen Hawking

> *Vous ne comprendrez pas les hypothèses de base de votre propre culture si votre propre culture est la seule culture que vous connaissez.*
>
> Alan Watts

> *Ceux qui sont assez fous pour penser qu'ils peuvent changer le monde sont ceux qui le font !*
>
> Elon Musk

> *Le plus grand plaisir est la joie de la compréhension !*
>
> Leonardo da Vinci

> *Le doute est la source de toute invention !*
>
> Galileo Galilei

> *Il est facile de mentir avec des statistiques, mais il est plus facile de mentir sans elles.*
>
> Fred Mosteller

> *Ce qui peut être affirmé sans preuve peut être rejeté sans preuve.*
>
> Christopher Hitchens

> *La religion est une culture de la foi ; la science est une culture du doute.*
>
> Richard Feynman

> *Les sciences ne cherchent pas à expliquer, elles ne cherchent même pas à interpréter, elles élaborent principalement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, avec l'ajout de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique est uniquement et précisément qu'elle est censée fonctionner, c'est-à-dire décrire correctement les phénomènes dans un domaine raisonnablement large.*
>
> John von Neuman

En cours de traduction de l'anglais

> *Vous pouvez battre 100'000 savants avec un seul fait, mais vous ne battrez probablement jamais un idiot, même avec 100 faits.*
>
> ?

> *Aucune évidence évaluée par des pairs ne pourra jamais convaincre un idiot, d'autant plus si ce dernier est scientifiquement analphabète et ne maîtrise pas les calculs statistiques de haut niveau et les subtilités de la méthode scientifique.*
>
> ?

> *Les questions les plus importantes de la vie ne sont en effet, pour la plupart, en réalité que des problèmes de probabilité.*
>
> Pierre Simon de Laplace

> *Le problème dans la société n'est pas que les enfants ne connaissent pas la science. Le problème est que les adultes ne connaissent pas la science. Ils sont plus nombreux que les enfants dans un rapport de 5 à 1, ils exercent le pouvoir, ils rédigent des lois. Lorsque vous avez des adultes scientifiquement illétrés, vous avez sapé la base même de ce qui rend une nation riche et forte.*
>
> Neil deGrasse Tyson

> *Même une estimation approximative, même fausse, vaut mieux que pas d'estimation du tout.*
>
> ?

> *Tôt ou tard arrive le moment où il faut prendre une décision qui n'est ni certaine, ni appropriée, ni populaire, mais qui doit être prise parce qu'elle est juste.*
>
> Martin Luther King

> *Nous avons découvert des merveilles insoupçonnées par nos ancêtres qui ont été les premiers à spéculer sur la nature de ces lumières étonnantes dans le ciel nocturne. Nous avons traversé le système solaire et envoyé des vaisseaux vers les étoiles. Mais nous continuons à chercher. Nous ne pouvons pas nous en empêcher ! Un élément central de l'avenir de l'humanité se trouve bien au-delà de la Terre. Si nous aspirons à un but cosmique, alors trouvons-nous un but qui en vaille la peine...*
>
> Carl Sagan

En cours de traduction de l'anglais

> *La façon de faire face à l'avenir est de le créer !*
>
> Ilya Prigogine

> *La science ne nous dit pas ce que nous devons penser mais parfois elle nous indique ce que nous ne pouvons plus croire.*
>
> Etienne Klein

> *Une croyance religieuse sans dogme n'est pas possible et la science n'est pas compatible avec le moindre dogme. Donc la science ne peut que être incompabitle avec les croyances religieuses.*
>
> ?

> *La philosophie débat sur Dieu, les maths l'ignorent, la climatologie n'a pas besoin de lui, la physique ne le trouve pas, la biologie le contredit, la logique le tue !*
>
> Bill Flavell

> *Être statisticien, c'est ne jamais avoir à dire que l'on est certain !*
>
> ?

> *Si vous n'êtes pas un scientifique professionnel actif et que vous n'êtes pas d'accord avec les scientifiques sur la science, ce n'est en fait pas un désaccord ! Vous avez simplement tord ! ! La science n'est pas la vérité. La science trouve les évidences. Quand la science change d'opinion, elle ne vous a pas menti. Elle a appris plus !*
>
> ?

> *La logique est l'art de se tromper avec confiance.*
>
> Joseph Wood Krutch

> *L'essentiel de notre soi-disant raisonnement consiste à trouver des arguments pour continuer à croire comme nous le faisons déjà.*
>
> James Harvey Robinson

En cours de traduction de l'anglais

La vérité est un mot qui, curieusement, est le plus utilisé par ceux qui répandent des mensonges, qu'ils savent eux-mêmes être des mensonges !

?

En tant que scientifique (et athée), vous serez souvent détesté par tous ceux qui croient aux contes de fées et pensent que leurs opinions, leurs anecdotes, leur logique circulaire et leur analphabétisme scientifique ont une quelconque valeur, mais ceux qui restent fidèles à la Méthode Scientifique et au principe de précaution seront sauvés et aideront à sauver les haineux. Les mensonges réconfortants ont toujours pris l'ascenseur et la Méthode Scientifique les escaliers, les mensonges viendront en premier mais un jour ou l'autre la Science les rattrapera toujours avec ses désagréables évidences.

Ce n'est pas le doute qui rend fou c'est la certitude.

Friedrich Nietzsche

La théorie des probabilités n'est rien d'autre que le bon sens réduit au calcul.

Pierre Simon de Laplace

La vraie logique de ce monde est dans le calcul des probabilités.

James Clerk Maxwell

Quand les gens disent "La raison pour laquelle vous ne pouvez pas faire confiance à la science, c'est que les scientifiques avaient l'habitude de dire <chose qui s'est avérée fausse> mais maintenant ils disent <chose différente>", ils expliquent en fait pourquoi la science fonctionne si bien !

Matt Blaze

La nature veut que 5 de vos 7 enfants meurent. Elle veut votre mort à l'âge de 50 ans. Tout mieux que cela vous est apporté par la science et la technologie.

David Frum

En sciences, rien ne peut être prouvé à 100%, mais 98% d'évidence statistique en science seront toujours meilleures que les 0% d'évidence de l'une des 28'000 religions et de leurs 3'000 dieux.

?

En cours de traduction de l'anglais

> *Dans la science il y a physique seulement ; tout le reste est de la collection de timbres !*

Ernest Rutherford

> *Dans la science il y a physique seulement ; tout le reste est de la collection de timbres !*

Werner Heisenberg

> *L'Art et la Science de poser des questions est la source de tout Savoir.*

Thomas Berger

> *Les mathématiques ne sont pas une science déductive - c'est un cliché. Lorsque vous essayez de prouver un théorème, vous ne vous contentez pas d'énumérer les hypothèses pour ensuite commencer à raisonner. Ce que vous faites, c'est des essais et des erreurs, des expérimentations, des conjectures. Vous voulez découvrir quels sont les faits, et ce que vous faites est à cet égard similaire à ce que fait un technicien de laboratoire !*

Paul Halmos

En cours de traduction de l'anglais

> *Une théorie qui n'est réfutable par aucun événement qui se puisse concevoir est dépourvue de caractère scientifique. Pour les théories, l'irréfutabilité n'est pas (comme on l'imagine souvent) n'estp pas une vertue mais un vice.*

Karl Popper

> *Qu'est-ce qui fait surgir l'univers du néant ? Aucune cause n'est nécessaire. Si vous avez un atome radioactif, il va se désintégrer, et la mécanique quantique donne la probabilité de désintégration dans un intervalle de temps donné, disons une minute. Il n'y a aucune raison pour que l'atome se désintègre à cet instant précis et pas à un autre. Le processus est complètement aléatoire. Aucune cause n'est nécessaire à la création quantique de l'univers.*

Alexander Vilenkin

> *Il y a une différence fondamentale entre la religion, qui repose sur l'autorité, [et] la science, qui repose sur l'observation et la raison. La science l'emportera parce qu'elle fonctionne !*

Stephen Hawking

> *La Science est une équation différentielle. La religion est une condition aux limites.*
>
> Alan Turing

> *La découverte que les événements individuels sont irréductiblement aléatoires est probablement l'une des découvertes les plus marquantes du 20e siècle. ... pour un événement individuel en physique quantique, non seulement nous ignorons la cause, mais il n'y a pas de cause ! L'instant où un atome radioactif se désintègre, ou le trajet emprunté par un photon derrière un séparateur de faisceau à moitié argenté, sont objectivement aléatoires.*
>
> Anton Zeilinger

En cours de traduction de l' anglais

23
Journal des changements

Ceci est un journal de changement (log) détaillé du présent livre pour les personnes intéressées à voir comment ce dernier a évolué (pour rester informé des nouvelles versions, envoyez-nous un courriel pour vous abonner à la newsletter), bien évidemment les années sont basées sur le calendrier Holocène :

- **Mai 12002**
  - Définitions (sciences, loi, théorème, postulat, axiome, corollaire,...)
  - Opérations d'addition, soustraction, multiplication, division (puissance)
  - Les nombres (entiers, relatifs, réels, fractionnaires, complexes, algébriques, abstraits,...)
  - Domaine de définition d'une variable
  - Polynômes arithmétiques
  - Valeur absolue
  - Relations binaires, relations d'ordre
  - Fonction Gamma d'Euler, constante d'Euler
  - Equation d'onde électromagnétique, vitesse de l'onde, vitesse de la lumière, énergie véhiculée
  - Introduction à l'optique
  - Règle de trois, pourcentages
  - Quantités nettes, prix de revient d'achat, indices, prix de ventes, prix de ventre brut, bénéfice net, nombre clé, actifs
  - Intérêts simples et composés, versements tardifs et précoces
  - Gestion de portefeuilles (critères de décision, goodwill, return on investisment)
  - Modèle de Markowitz (fonction d'utilité, élaboration du critère de choix)
  - Bourse
  - Fréquence Plasma
  - Probabilités (univers, événements, axiomes)
  - Analyse combinatoire
  - Statistiques (variables discrètes, variables continues, écart-type, variance et covariance)
  - Fonctions de distribution (fonction discrète uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, multinomiale, de Poisson, de Gauss-Laplace, de Cauchy, bêta,

En cours de traduction de l'anglais

gamma, Khi-deux, loi de Student)
  - Estimateurs, la corrélation
  - Matrice des covariances
  - Tests statistiques d'adéquation

- **Juin 12002**
  - Ensembles (théorie Zermelo-Fraenkel, l'inclusion, la complémentarité, l'intersection, la réunion, la différence, le produit, l'ensemble vide
  - Moyennes arithmétique, harmonique, géométrique, quadratique
  - Univocités
  - Fonctions (logarithmes et exponentielles)
  - Nombre d'or
  - Introduction aux séries de Fourier
  - Loi de Coulomb, champ électrostatique, potentiel électrostatique
  - Théorème d'Ampère
  - Loi de Biot et Savart, champ magnétique, induction magnétique
  - Equations de Maxwell
  - Dimensions
  - Formes géométriques unidimensionelles, bidimensionelles, tridimensionelles
  - Théorème de Pythagore
  - Systèmes d'unités en physique
  - Principe de moindre action et de conservation de l'énergie
  - Positions, vitesse et accélération
  - Equation de continuité
  - Equation de Bernoulli
  - L'effet Doppler
  - Relativité Restreinte, principe d'invariance, transformations de Lorentz (temps, longueurs, addition des vitesses, augmentation de la masse, espace-temps de Minkowski
  - Relativité générale (ligne d'univers, événement ponctuel, particules inertielles, cônes nuls, vecteurs d'espace-temps, espaces plans et courbes, tenseur métrique)
  - Principes d'incertitudes de Heisenberg, équation de Schrödinger, densité de probabilité
  - Introduction aux supercordes

- **Juillet 12002**
  - Création d'une table des matières
  - Représentation des fonctions
  - Polynômes et zéros de polynômes du deuxième degré
  - Opérateur de champs vectoriels et scalaires (gradient, nabla, divergence, rotationnel, Laplacien)
  - Analyse vectorielle (notion de flèche, ensemble des vecteurs, multiplication par un scalaire, espace vectoriel, combinaisons linéaires, familles génératrices, bases d'un espace vectoriel)
  - Calcul Tensoriel (convention d'Einstein, symbole de Kronecker, symbole d'antisymétrie)
  - Notations de sommation (Sigma), notation de multiplication (Pi majuscule)
  - Axiomes pour l'ensemble des réels

En cours de traduction de l'anglais

- Inégalités
- Mouvements circulaires et relatifs
- Forces d'inertie (Force de coriolis)
- Equation de Drake

• **Août 12002**

- Nouveaux personnages (Hilbert, Riemann, Legendre)
- Nouveau chapitre "Humour"
- Introduction à la Topologie
- Postulats d'Euclide
- Plan de Gauss
- Formule de Moivre
- Transformations dans le plan complexe
- Changement de base et produit scalaire tensoriel
- Composantes covariantes et contravariantes
- Transformations relativiste de la quantité de mouvement
- Préfixe des multiples et sous-multiples des unités
- Contrôles de qualité (probabilités), courbe d'efficacité, valeur de niveau de qualité acceptable (NQA)
- Lois de Kepler
- Démonstration de la force gravitationelle classique à partir des lois de Kepler
- Démonstration de la loi des Aires (deuxième loi de Kepler)
- Moment de force
- Moment cinétique
- Théorème du moment cinétique
- Equation de Newton-Poisson
- Modèle de l'atome de Thomson, de Bohr, de Bohr-Sommerfeld
- Spectre de l'hydrogène
- Hypothèse du Neutron
- Nombres quantiques
- Principes d'exclusion de Pauli
- Analyse classique de l'équation de Schrödinger pour le puits de potentiel rectangulaire idéal
- Lois de Newton
- Démonstration de la troisième loi de Newton à partir du principe de moindre action
- Vitesse de libération
- Définition du "Scientisme"
- Variation de l'accélération gravifique dans et à l'extérieur d'un astre homogène sphérique
- Principe de moindre action et physique quantique (limite semi-classique)
- Balistique (portée maximale, parabole de sûreté)
- Introduction à la physique nucléaire
- Nombre atomique, nombre de masse
- Radioactivité, activité, filiation, isotopes, isotones, nucléides, datation
- Système de masse atomique (UMA)
- Défaut de masse
- Fusion et fission nucléaire
- Désintégration alpha, beta (moins et plus), capture électronique, émission gamma

En cours de traduction de l'anglais

- **Septembre 12002**
  - Biographies de Dalton, Boltzmann et Broglie
  - Principe du bon ordre
  - Propriété Archimédienne
  - Principe d'induction
  - Divisibilité (division euclidienne)
  - Nombres congrus
  - Preuve par neuf
  - Bases de nombres
  - Définition de l'utilitié des séparateurs de milliers
  - Priorité des parenthèses, crochets et accolades
  - Priorité des opérandes
  - Théorie de la démonstration (intro)
  - Notions de termes, formules et démonstrations
  - Définition des langages, symboles, relations et fonctions
  - Définition des fonctions périodiques, composées, élémentaires, rationnelles entières, fractionnelles, irrationnelles, algébriques et transcendantes
  - Généralisation de l'algèbre élémentaire
  - Dimensions d'un espace vectoriel, pronlogement d'une famille libre, rang d'une famille finie
  - Hyperplan vectoriel, sommes directes
  - Définition rigoureuse des notions de ligne, surface (plan) et volume
  - Droites sécantes, demi-droites, segments, partie aliquote
  - Axiome de continuité de la droite
  - Déplacement et retournement de plan
  - Angles, unités, mesures, côtés de l'angle, angles saillants, angles plats, angles égaux
  - Axiome de continuité du plan
  - Angles droites, aigus, obtus, supplémentaires, complémentaires
  - Droites perpendiculaires, bissectrice d'un angle
  - Définition du travail et de l'énergie : Thèroème de l'énergie cinétique et potentielle (travail moteur et résistant)
  - Notion de champ conservatif
  - Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement
  - Théorème du centre de masse
  - Transformation relativiste de la force
  - Transformées relativistes des champs électrique et magnétique
  - Masse limite de Chandreskhar (limite d'effondrement de naines blanches)
  - Défintions de l'optique, généralisation de la loi de la réfraction
  - Condition de normalisation de de Broglie, état liés et non liés
  - Oscillateur harmonique
  - Chimie quantique, vibrations moléculaire
- **Octobre 12002**
  - Ajout de biographies sur Cauchy, Neumann, Bessel et Archimède
  - Nouvelle section sur les "Méthodes Numériques"
  - Plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple
  - Règle des signes (...)

En cours de traduction de l'anglais

- Démonstration de l'irrationalité d'un nombre
- Introduction aux progressions arithmétiques, harmoniques et géométriques
- Limite et continuité des fonctions
- Définition des espaces affines
- Introduction aux tenseurs euclidiens et leurs propriétés
- Triangles et propriétés des triangles
- Définition des systèmes thermodynamiques
- Définition de la masse réduite
- Fonctions de Bessel
- Définition du moment d'inertie
- Introduction à la théorie quantique des champs
- Introduction à la radioprotection, formule de Bethe-Bloch
- Effet tunnel
- Introduction au formalisme de Dirac
- Algorithme d'Heron et d'Archimède
- Introduction aux ensembles fractals
- Introduction à la théorie des jeux (jeux coopératifs, gains, matrice des gains, formes extensives, optimums de Pareto, équilibre de Nash, jeux évolutionnaires)

- **Novembre 12002**

  - Théorème fondamental de l'arithmétique
  - Introduction à la crypthographie (RSA, DES, MD5, SHA-1)
  - Fonction phi d'Euler
  - Petit théorème de Fermat
  - Introduction aux dimensions topologiques et d'homothétie
  - Cosinus directeurs

- **Décembre 12002**

  - Ajout de biographies sur Nash, Cartan, Lucas, et Lie
  - Développement détaillé de la fonction "Entière"
  - Superposition linéaire des états quantiques (cohérence quantique)
  - Définition des fonctions Lipschitziennes et des fonctions contractantes
  - Définition d'une suite convergente de Cauchy
  - Théorème du point fixe (utilisé dans les fractals, méthodes de Newton et bcp d'autres)
  - Définitions de la réalité, du problème, de la théorie et essai sur la réalité
  - Définition de de l'espace euclidien et de l'espace affine euclidien
  - Définition des notions de propriété dans le domaine de la chimie

- **Janvier 12003**

  - Théorème de Pascal
  - Poussée d'Archimède
  - Introduction simple aux différentes symétries en physique (temporelle, spatiale)
  - Introduction simple aux différentes transformation dans le plan (translation, homothétie, réflexion, isométrie, rotation)
  - Définition d'une application réciproque et composée
  - Trigonométrie (introduction, relations remarquables, trigonométrie sphérique)

En cours de traduction de l'anglais

- Signature d'un espace vectoriel
- Méthodes d'orthogonalisation de Schmidt, changements de bases, espaces associés de Fourier
- Tout (ou presque) sur la trigonométrie plane et sphérique
- Trajectoires d'orbitales képleriennes
- Introduction au modèle monétaire néo-classique (loi de say, postulat d'homogénéité)
- Algèbre de Boole (propriétés et théorèmes simples)
- Refonte du chapitre de physique quantique (ordre de présentation des sujets)
- Démonstration de l'équation d'évolution de Schrödinger
- Démonstration de l'équation d'évolution relativiste de Schrödinger
- Introduction à la théorie de l'anti-matière

• **Février 12003**

- Démonstration gradient, divergence, rotationnel et Laplacien en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
- Développements mathématiques complets des expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques
- Démonstration de l'invariance relativiste de la charge électrique (équation de conservation de la charge électrique... je pense)
- Démonstration de l'existence d'anti-particule de charge opposées
- Introduction à la théorie de Jauges (quadripotentiel, jauge de Lorenz, jauge de Coulomb, d'Alembertien)
- Introduction au formalisme Lagrangien et Hamiltonien (coordonnées généralisées, espaces des configurations, équation d'Euler-Lagrange, formalisme canonique, transformation de Legendre, crochet de Poisson)
- Définition rigoureuse du principe de moindre action
- Espaces tensoriels et définition

• **Mars 12003**

- Ajout de biographies sur Lorentz, Hermann, Ricci-Curbastro et Levi-Civita
- Définition du produit cartésien et extension du cadre d'application des cardinaux
- Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz
- Démonstration de l'inégalité triangulaire
- Définitions du produit vectoriel et du produit mixte
- Démonstration de la forme condensée la somme des n premiers nombres entiers
- Démonstration de la validité de l'intégration par partie
- Définition de la structure algébrique vectorielle et d'un algèbre
- Définition d'un homorphismes, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme

• **Avril 12003**

- Théorie de l'équilibre de Cournot (concurrence)
- Modèle de Wilson (gestion de stocks)
- Mathématique des phaseurs
- Modèle relativiste de l'atome de Sommerfeld
- Résolution analytique de l'équation de Schrödinger
- Principes d'incertitudes quantiques de Heisenberg
- Formalisme Lagrangien de la physique quantique des champs

En cours de traduction de l'anglais

- Ajout de biographies sur Göpper-Meyer, Hideki, Nöther et Cournot
- 10 nouveaux liens vers des pages web intéressantes (associations + mathématiques)

- **Mai 12003**
  - Ajout de biographies sur Bell, Ramanujan et Landau
  - Démonstration de la précession du périhélie des orbites d'astres couplés et de charges couplées
  - Définition et développements relatifs au théorème du Viriel
  - Calcul de l'énergie potentielle d'un sphère de matière (température interne des étoiles)
  - Définition des nombres premiers et démonstration qu'ils sont en nombre infini
  - Définition d'un anneau intégralement clos
  - Démonstration qu'un nombre rationnel est un nombre algébrique si et seulement si c'est un entier relatif.
  - Définition d'une application multi-linéaire (ou morphisme d'espace vectoriel)
  - Définition d'une partition d'un ensemble et d'une classe d'équivalence.
  - Descriptions des opérations ensemblistes d'absorption et d'idempotence.
  - Définitions et exemples de diagrammes sagittals.
  - Définition d'un magma et d'un monoïde
  - Pseudo-démonstrations des structures aglébriques des ensembles fondamentaux de l'arithmétique
  - Développement de la théorie du moment cinétique en physique quantique ondulatoire
  - Définition d'une équation diophantienne et enoncé du grand théorème de Fermat

- **Octobre 12003**
  - Ajout de biographies sur Abel, Banach, Boole, Bose, Luitzen Egbertus, Clausius, Cayley, Curie, Connes, Dirichlet, Frege, Gibbs, Picard, Erdös, Grothendieck,Hamilton, Hausdorf, Heaviside, Helmholtz, Hermite, Hoyle, Jacobi, Klein, Kronecker, Langevin, Lee, Lobatchevski, Möbius, Monge, Poisson, Schwartz, Shannon, Thom, Van Der Waals, Viète, Weinberg, Witten, Gamow, Sturm, Liouville, Clairaut, Teller
  - Définition des espaces ponctuels en mécanique classique, des conventions d'écriture et des changements de repères.
  - Théorie mathématique de la perspective projective à points de fuite et définition des perspectives techniques isométriques et cavalières.
  - Définition simpliste du concept de "dérivée" en analyse fonctionnelle. Démonstration de quelques dérivées courantes (polynômes, fonctions composées, fonctions réciproques, cosinus, sinus, arcsinus, arcosinus, quotient de deux fonctions).
  - Méthodes numériques : définition mathématique de la complexité d'un algorithme et recherches élémentaires d'optimisation
  - Méthode de calcul du nombre e
  - Méthode de résolution des systèmes de N équations linéaires à N inconues par la méthode du pivot
  - Recherche des racines de fonction par la méthodes des parties proportionnelles, de la bissection, de la sécante (regula falsi) et de la méthode de Newton - Calculs des aires et intégrales par la méthode des sommes de riemann

En cours de traduction de l'anglais

- Exposition de la méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales, de π et de recherche de racines (dichotomie)
- Développement mathématique de l'algorithme du simplexe utilisé dans le cadre des recherches opérationnelles (programmation linéaire)
- Calcul tensoriel : la contraction des indices - de la définition et des propriétés de quelquens tenseurs particuliers (tenseurs symétriques, antisymétriques, tenseur fondamental)
- Coordoonnées curvilignes (détermination de la métrique et élément linéaire d'un espace sphérique et cartésien et du plan en coordonnées polaires)
- Symboles de christoffel (de première et de deuxième espèce).
- Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein
- Détermination du lagrangien libre généralisé en Relativité Générale

• **Décembre 12003**

- Ajout des biographes sur Kirchhoff, Markowitz, Cox Merton, Sholes, Sharpe, Lindemann, Bachelier et Stefan
- Démonstration d'une des formules de Stirling
- Calcul de la température de surface d'une étoile
- Calculs des propriétés temporelles des titres de valeurs
- Démonstration des séries de Taylor et Maclaurin (limité et non limité)
- Définition du reste de Lagrange et des critères de divergences d'Alembert, de Cauchy, Test de l'intégrale, Convergence absolue
- Développements relatifs aux définitions de la luminosité, éclat, magnitude apparente et absolue des étoiles et calcul de la distance des céphéides
- Définitions de l'angle solide, l'angle solide de révolution et l'angle solide élémentaire
- Introduction à la photométrie : définition des grandeurs photométriques, photoniques et S.I., définitions et développements relatifs à l'intensité lumineuse, le flux énergétique (avec démonstration de la loi de Beer-Lambert), l'émittance énergétique, luminance énergétique (avec démonstration de la loi de Lambert), loi de Kirchhoff (vois le chapitre d'optique dans la section d'électromagnétisme)
- Démonstration de la loi de Stefan et de la loi de Stefan-Boltzmann
- Résolutions des équations du troisième degré par radicaux (méthode de Cardan) et développements de la résolution des équations du second degré dans l'ensemble des complexes
- Définition du concept d'équations et inéquations
- Détermination de l'équation cartésienne du plan, d'un droite (dans l'espace), d'un cône, d'une sphère
- Détermination de l'équation de Black & Sholes (définition du postulat d'efficience du marché) et présentation des processus de Wiener et du lemme d'Ito ainsi que du mouvement Brownien (marche au hasard)

• **January 12004**

- Définition de l'intégrale indéfinie
- Modèle cosmologique newtonien (sans la constante cosmologique)
- Enoncé des axiomes de Peano
- Introduction à l'algèbre linéaire (méthode de réduction de Gauss, opérations élémentaires entre matrices)

En cours de traduction de l'anglais

- Enoncé des 5 axiomes d'Euclide et des 5 groupes d'axiomes en géométrie
- Démonstration des relations de calcul du perimètre, de la surface et du barycentre du carré, du rectangle, et du triangle. Démonstration des relations du calcul des volumes et des surfaces du tore, de la sphère, de l'ellipsoïde, du cylindre et du cône
- Définition du barycentre (centre de gravité) et démonstration de quatre propriétés y relatives
- Démonstration de la décomposition en fonction impaire et paire de toute fonction
- Définition des fonctions trigonométriques hyperboliques et énumération des relations et propriétés remarquables y relatives
- Introduction à la géométrie différentielle (définition d'une géométrie riemanienne, trièdre de Frenet, nappe paramétrée, ...)
- Introduction à la théorie des graphes (ponts de Königsberg)
- Définition d'un espace topologique et de Hausdorff, définition d'un espace métrique/ultra-métrique ainsi que des distances associées (hölderiennes, discrète, équivalentes, ...), définition d'une fonction lipschitzienne (et des isométries associées), définition des ensemble ouverts et fermés (boules ouvertes, fermées, sphères, adhérence, diamètre, excès de Hausdorff), définition des diamètres définition des distances ensemblistes (gap), définition d'une variété/carte/atlas et homéomorphisme différentiel.

En cours de traduction de l'anglais

- **Avril 12004**
  - Démonstration du théorème de Guldin
  - Démonstration du théorème de König de l'énergie cinétique et du moment cinétique
  - Présentation et démonstration de techniques de calcul pour les moments d'inertie : théorème d'Huygens-Steiner, moment d'inertie polaire, tenseur d'inertie, théorème d'Huygens-Steiner généralisé
  - Définition de la "Puissance" et du "Rendement" et démonstration du calcul de la puissance d'une machine tournante
  - Démonstration de loi d'entropie thermodynamique de Boltzmann ainsi que des distributions statistique suivantes : vitesses de Maxwell, Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac, Bose-Einstein
  - Démonstration de quelques moments d'inertie principaux des corps suivants : tore, boule, boule creuse, cône, plaque rectangulaire, tube
  - Introduction à l'optique ondulatoire : éconcé du principe de Huygens, démonstration de la loi de Malus, développement du modèle de la diffraction de Fraunhofer dans le cas d'un fente rectangulaire. Définition et détermination du pouvoir de résolution d'une fente rectangulaire simple.
  - Démonstration de la provenance et de la solution de la non moins fameuse équation différentielle de Bessel d'ordre n
  - Démonstration de la fonction d'onde d'une corde tendue et d'une membrane circulaire tendue
  - Démonstration de la loi de Planck et démonstration des approximations connues : première loi de Wien, loi de Rayleigh-Jeans.
  - Démonstration de la loi de déplacement (deuxième loi de Wien) et de la loi de Stefan-Boltzmann en passant par la loi de Planck et détermination de la constante de Stefan-Boltzmann
  - Démonstration des dimensions de Planck : longueur de Planck, masse de Planck, densité de Planck, temps de Planck, énergie de Planck

- **Juillet 12004**
  - Démonstration de l'origine physique de la chaleur
  - Démonstration du théorème de Toricelli, de l'effet Venturi et de la loi de Poiseuille
  - Démonstration de l'effet Compton relativiste
  - Démonstration de l'existence du rayonnement fossile de l'Univers
  - Introductions aux ensembles quotients (en l'occurrence $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
  - Démonstration des transformations de Lorentz des vitesses et des accélérations
  - Détermination du lagrangien relativiste d'un système libre
  - Démonstration et définition du théorème de Ricci, de la dérivée covariante, de l'identité de Ricci, du tenseur de Riemann-Christoffel, du tenseur de Ricci, du scalaire de Ricci, des deux identités de Bianchi et enfin du tenseur d'Einstein
  - Définition mathématique de la capacité et détermination de l'expression d'une capacité plane parallèle
  - Détermination de l'énergie potentielle électrostatique
  - Démonstration de la valeur du champ et potentiel électrique d'un fil rectiligne infini.
  - Détermination des propriétés fondamentales des dipôles électriques tel que le moment dipolaire rigide, la présentation du moment dipolaire induite, les liaisons hydrogènes, les forces de Van der Waals, etc.
  - Définition du principe de symétrie de Curie et énoncé des 6 propriétés en découlant
  - Définition des pseudo-vecteurs
  - Démonstration du calcul du volume de la pyramide, du paraboloïde, du tetraèdre et de l'ocataèdre ainsi que écritue du volume du cube et de parallélépipéde
  - Détermination du champ magnétique produit par un solénoïde toroïdal, d'un solénoïde rectiligne infini et d'une boucle de courant
  - Détermination du champ magnétique produit par un dipôle magnétique et définitions fondamentales des propriétés des matériaux magnétiques
  - Calcul du rayon de Larmor et de la pulsation gyromagnétique dans un cadre non relativiste
  - Détermination du lagrangien du champ électromagnétique et par extension dans l'approximation non relativiste du tenseur du champ électromagnétique
  - Introduction aux calculs du rayonnement émis par une charge accélérée (rayonnement synchrotron, potentiels retardés de Liénard-Wiechert)
  - Calcul des valeurs des résistances et capacités en série.
  - Différence entre le potentiel électrique et le potentiel électromoteur
  - Démonstration de la loi de Faraday et définition de la "self"
  - Démonstrations des formules de Descartes pour les surfaces sphériques concaves et convexes réfringent et non réfrignent ainsi que pour les lentilles réfringentes.
  - Définition du stigmatisme et démonstration que la parabole est rigoureusement stigmatique
  - Démonstration des formules de Descartes pour les lentilles minces et détermination de loi de conjugaison
  - Définition de la dioptrie et explication des différentes handicaps visuels

- **Septembre 12004**
  - Énonce du principe de Mach
  - Présentation de l'effet photoélectrique et détermination de la loi physique le régissant. Démonstration par l'exemple que la lumière peut être vue à la fois comme un

En cours de traduction de l'anglais

corpuscule ou comme une onde
- Démonstration du théorème de la classe monotone
- Détermination détaillée de l'équation de Klein-Gordon généralisée (particule relativiste dans un champ magnétique) ainsi que de l'équation de Dirac libre avec laquelle sont exposées les solutions explicites de Pauli (particules, antiparticules).
- Détermination du rayon de l'atome en utilisant la diffusion de Rutherford-Coulomb (in extenso : détermination de la section efficace de Rutherford)
- Présentation des interactions macroscopiques et microscopiques du rayonnement X et gamma avec la matière (étude qui comporte les détails de la matérialisation du photon en une paire électron-positron).
- Introduction aux spineurs en définissant.
- Définition des propriétés opératoires des matrices, des matrices remarquables, des déterminants, des vecteurs et valeurs propres dans le chapitre d'algèbre linéaire.
- Enoncés des postulats de la physique quantique ondulatoire - Détermination des orbitales de l'atome hydrogénoïde

- **Novembre 12004**
  - Exposé et démonstration du théorème de Noether - Enumération de quelques constantes physiques, chimiques, et astronomiques
  - Ajout de biographies sur Smith, Say, Malthus, Keynes, Walras et Pareto
  - Introduction à la théorie de la spéculation : calcul de l'espérance mathématique prévisionnelle d'un actif financier
  - Introduction à la théorie de préférence (modèle d'Arrow-Debreu). En d'autres termes : étude de l'utilité des paniers des agents économiques et des courbes d'indifférences
  - Exposé des solutions de l'équation de Black & Scholes et remarques sur le delta
  - Démonstration de l'équation de parité Call-Put
  - Modèle de détermination du stock intial (optimal) dans la cadre des technique de gestion de production

En cours de traduction de l'anglais

- **Janvier 12005**
  - Ajout de biographies sur Penrose, Hawking, Turing et Marx
  - Développement de la version "duaire" des équations de Maxwell et exposé (démonstration) de la provenance de l'expression (hypothèse) des monopôles magnétiques
  - Définition des algorithmes de classe P, NP et NPC.
  - Démonstration du théorème fondamental de l'analyse ou également appelé "théorème fondamental du calcul intégral et différentiel"
  - Présentation du cube cGh et de l'interprétation de Copenhague
  - Introduction aux concepts des réseaux de neurones formels
  - Introduction aux concepts des algorithmes génétiques
  - Introduction rigoureuse aux espaces fractales
  - Introduction à l'informatique quantique
  - Introduction à la logique floue
  - Démonstration du théorème de Shannon, des théorèmes de Morgan, théorèmes d'expansion, tables de Karnaugh, addionneur complet, soustracteur complet

- **Avril 12005**

- Définitions de base sur les codes en blocs, les codes linéaires, les codes systématiques
- Démonstration de la relation de la variation relativiste de la masse
- Introduction aux codes et codes préfixes
- Calcul du nombre de jours entre deux dates données
- Techniques de calculs d'arrondis
- Définition des rentes post et praenumerando rigides ou non à taux constant (avenir certain) ou variables
- Définition et étude des propriétés des emprunts à remboursement ou annuité constant.

• **Avril 12006**

- résentation du critère de Schild par l'intermédiaire de l'effet Einstein (redshift gravitationnel)
- Développement de la l'approximation newtonienne de l'équation des géodésiques.
- Définitions et démonstrations des formes développés des quadrivecteurs déplacement, vitesse, courant, accélération et énergie-impulsion
- Démonstration de la provenance du tenseur du champ électromagnétique et calculs de transformation de référentiels.
- Définition d'une tautologie, principe de non-tautologie
- Descriptions, définitions et démonstrations nombreuses sur les quaternions + démonstration de l'irrationalité du nombre d'euler
- Définition de la loi log-normal et triangulaire et démonstration de leur espérance et écart-type
- Introduction au calcul d'erreurs (incertitudes absolues et relatives, propagation des erreurs, chiffres significatifs, etc.)
- Définition de la loi de Weibull, démonstration de son espérance et écart-type
- Démonstration de la déviation de la lumière au bord d'un astre avec le modèle newtonien
- Définition d'une matrice de rotation (et développements y relatifs)
- Démonstration de l'existence de la division euclidienne dans l'anneau des polynômes
- Définitions du MWRR (Money Weighted Time of Return) et du TWRR (Time Weighted Rate of Return)
- Démonstration du théorème de Gauss-Ostrogradsky

• **Juillet 12006**

- Définition du concept d'espace dual
- Définition de la loi de Pareto et démonstration de l'espérance et de la variance de la loi
- Définition des quantiles (quartile, centile)
- Démonstration que le mode est la valeur qui minimise la dispersion absolue
- Démonstration de l'inégalité de Minkowski et Bienaymé-Tchebychev
- Démonstration de la loi faible des grands nombres
- Démonstration de la formule d'Euler pour les graphes planaires
- Introduction mathématique à la méthode de contrôles de processus Six Sigma
- Démonstration du théorème du calcul variationnel

En cours de traduction de l'anglais

- Démonstration du calcul de la vitesse superluminique apparente d'un astre à Red-shift élevé
- Méthode de résolution de jeux à somme nul utilisant la recherche opérationnelle
- Définition des fonds de placement
- Démonstration de l'expression du bêta selon les modèle de régression linéaire simple (Sharpe)

- **Octobre 12006**
  - Démonstration des estimateurs et vraisemblances des lois de Poisson et Binomiale
  - Présentation du concept de "couleur" et de la synthèse additive et soustractive
  - Démonstration de l'équation d'Einstein des champs (approche par l'approximation des champs faibles)
  - Différenciation du principe d'équivalence, principe d'équivalence faible et principe d'équivalence d'Einstein
  - Démonstration de la durée de l'arc Diurne des planètes dans l'approximation de la précession et nutation nulle
  - Étude numérique et formelle (approximative) des points de Lagrange d'un système binaire
  - Méthode de résolution des équations polynomiales du 4èmes degré (méthode de Ferrari)
  - Présentation du déterminant de Gram via le volume euclidien représenté par le produit mixte des vecteurs d'une base canonique
  - Définition des fonctions monotones, strictement monotones, etc.. sans approche formelle pure
  - Détermination approximative via le potentiel de Yukawa (champs massiques) de la masse des mésons de l'interactions faible et de l'interaction nucléaire forte.
  - Introduction aux équation différentielles linéaires et du premier ordre

- **Décembre 12007**
  - Nombres et polynômes de Bernoulli
  - Limite de Roche
  - Aplattissement des corps célestes
  - Pression et température cinétique
  - Force aimant ou électroaimant
  - Espaces vectoriels hermitiens et de Hilbert
  - Solution de Schwarzschild en relativité générale
  - Précession du périhélie de Mercure en relativité générale
  - Déflexion de la lumière en relativité générale
  - Effet Shapiro en relativité générale
  - Modèle d'évaluation des actifs financiers
  - L'Univers Trou Noir
  - Constantes de couplage des interactions fondamentales
  - Hamiltonien de l'équation de Schrödinger pour une particule chargée dans un champ électromagnétique
  - Chaînes de Markov
  - Théorie des files d'attentes
  - Introduction aux mathématiques du génie météo et marin
  - Exemples pratiques dans MS Excel du modèle d'efficience de Markowitz

En cours de traduction de l'anglais

- Exemples pratiques dans MS Excel du modèle d'efficience de Sharp
- Démonstration (simpliste) du théorème de Green(-Riemann) et de Stokes
- Introduction à l'analyse par composantes principales
- Démonstration du théorème spectral/cas réel
- Ajout des biographies sur Heckman, McFadden et Tesla
- Introduction à la régression logistique
- Démonstration du théorème de Rolle et des accroissements finis
- Démonstration du théorème de l'Hopital et des accroissements finis généralisés
- Introduction et démonstration en statistique de la fonction géométrique, sa variance et son espérance
- Démonstration du calcul de la surface et du volume des 5 polyèdres réguliers platoniciens
- Introduction à l'algèbre et géométrie corporelle
- Masse critique (masse Jeans) et Rayon critique (Rayons de Jeans) d'effondrement d'un nuage interstellaire/pépinières d'étoiles
- Temps d'effondrements d'un nuage interstellaire
- Durée de vie nucléaire d'une étoile
- Introduction aux transformées de Fourier
- Résolution détaillée des E.D.L. homogènes à coefficients constants
- Spirale de Cornu
- Mathématique des fonctions biométriques
- Détermination et résolution simple de l'équation de Pauli
- Solution générale (transformée de Fourier) de l'équation d'onde électromagnétique
- Introduction à la resistance des matériaux
- Horizon visuel
- Taux de croissance d'une population en fonction de la température
- Tube de Pitot et Perte de charge
- Théories de jauge $U(1)$ en physique quantique des champs
- Courbes de Bézier
- Système d'équation différentielles avec exponentiation de matrices

En cours de traduction de l' anglais

- **Septembre 12008**
  - Nouvelles primitives usuelles importantes
  - Démonstration détaillée des fonctions arcsinh et arccosh
  - Démonstration de l'équation de Laplace et de la relation de Mayer
  - Démonstration de la propagation d'ondes de pression
  - Introduction historique pour la physique nucléaire
  - Démonstration des relations de Maxwell en thermodynamique et introduction à l'énergie et enthalpie libre
  - Modèle d'atmosphère adiabatique
  - Démonstration des équations de Lorenz et de l'effet papillon
  - Prisme
  - Conditions de cohérence/interférence d'ondes électromagnétique
  - Sphère de Bloch
  - Primitives supplémentaires pour le Génie Civil et la Mécanique analytique
  - Démonstration du volume de révolution de surface minimale
  - Traitement de la particule libre
  - Traitement du qubit polarisé et de qubit de spin 1/2

- Fonction caractéristique et théorème central limite
- Quelques démonstrations sur les inégalités dans les triangles
- Démonstration du volume d'un tonneau à section circulaire
- Démonstration de l'origine de la variance et de l'espérance de la loi de Student et Fisher-Snedecor
- Introduction au coût marginal
- Test statistique de l'ANOVA à un facteur
- Test statistique d'ajustement du Khi-deux de Pearson
- Ajout des biographies sur Pearson, Gosset et Fisher
- Introduction à l'analyse de la variance de la régression
- Analyse Factorielle des Correspondances
- Développement des circuits linéaires RC, RL, RLC série libres et forcés

• **Septembre 12009**

- Analyse de systèmes à topologie simple ou complexe pour la maintenance préventive
- Introduction aux fractions continues finies et infinies
- Solutions détaillées de l'effet tunnel d'une barrière rectangulaire
- Modèle mathématique de la désintégration alpha via effet tunnel
- Introduction au mouvement brownien selon modèle de Langevin
- Introduction à la tribologie/frottement
- Introduction à l'analyse des séries temporelles
- Démonstrations supplémentaires sur les indices de capabilité et procédé long terme et court terme ainsi que des appareils de mesure en statistique des procédés, des PPM et démonstration de la relation de Taguchi
- Démonstration de l'expression des potentiels électrique et magnétique de Lienard-Wiechert
- Introduction à l'analyse complexe
- Démonstration de la deuxième équation de Friedmann en cosmologie
- Démonstration du "ralentissement" de la lumière aux abords d'un Trou Noir
- Démonstration de l'expression du développement de Taylor d'une fonction de deux variables réelles
- Introduction aux plans d'expérience
- Démonstration du théorème d'Ehrenfest
- Démonstration des estimateurs de la loi de Weibull à deux paramètres
- Ajout d'un exemple d'application de la théorie de la décision
- Théorie des bandes (approximation parabolique et semi-classique) dans le cadre des semi-conducteur
- Théorème des résidus et séries de Laurent
- Démonstration des valeurs du Lean Six Sigma pour les processus

• **Octobre 12011**

- Calcul de l'orbite géostationnaire
- Calculs sur les ballons sonde PVC en météorologie
- Développements sur le gyroscope symétrique pesant et de la toupie
- Indice de Gini
- Équilibre séculaire, transitoire et non-équilibre en filiation radioactive
- Détermination approximative du rayon d'étoiles en rotation rapide

En cours de traduction de l'anglais

- Présentation de la Value At Risk delta-normale historique et en variance-covariance
- Deux nouvelles histoires drôles dans la section Humour...
- Ajout d'une biographie sur Agner Krarup Erlang
- Modèle statistique empirique de contrôle des salaires
- Démonstration simplifiée de l'absence d'opportunité d'arbitrage en finance
- Présentation du concept de portefeuille autofinancé sur sous-jacent risqué
- Introduction aux techniques mathématiques des assurances
- Développements mathématiques sur la puissance et l'intensité d'une onde sonore longitudinale
- Test statistique Z bilatéral sur la différence de deux moyennes
- Test statistique de Student sur deux moyennes d'échantillons appariés
- Démonstration de la relation de l'intervalle de confiance statistique de proportions d'échantillons de grande taille
- Test statistique de l'égalité de deux proportions d'échantillons de grande taille
- Application du théorème de Shannon au calcul d'un indice de diversité en statistiques
- Démonstration de la détermination des coefficients d'une régression linéaire multiple
- Démonstration de la détermination des coefficients d'une régression linéaire simple passant par l'origine
- Introduction à l'analyse de la sensibilité
- Introduction aux statistiques de rangs/ordres
- Démonstration de la provenance, de l'espérance et de la variance de la loi binomiale négative
- Introduction aux cartes de contrôles avec démonstrations mathématiques détaillées
- Présentation de l'approche mathématique du Google Page Rank à ses débuts
- Démonstration de l'identité de Beltrami pour la simplification de l'équation d'Euler-Lagrange
- Test statistique binomial exact pour l'équilibre d'une population ayant deux caractéristiques
- Développements et études des vagues de gravité dans un fluide
- Quelques développements simples sur les engrenages/arbres d'engrenages
- Démonstration mathématique de l'effet de peau
- Théorie de l'arc-en-ciel
- Théorie du pendule double
- Loi de distribution de Boltzmann
- Loi de Dalton et d'Amagat
- Écoulement de la chaleur
- Puissance moyenne en courant alternatif
- Présentation de quelques calculs sur le betatron

En cours de traduction de l'anglais

- **Mai 12013**
  - Exemple détaillé de construction d'un réseau de neurones particulier avec MS Office Excel
  - Résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients non constants
  - Ajout de l'exemple d'une transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne et propriété de dérivation de la transformée de Fourier d'une dérivée

- Introduction aux interactions dans les ANOVA à deux facteurs
- Intervalle de confiance et intervalle de prédiction d'une régression linéaire
- Test des signes (médiane) en statistiques
- Introduction aux probabilités conditionnelles et l'espérance conditionnelle avec la loi de Pareto
- Détermination des estimateurs de la loi Gamma selon les méthodes des moments
- Ajout d'une deuxième approche pour la mise en évidence des marées
- Test statistique d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec approche de Lilliefors
- Démonstration du modèle de gestion des quotas d'exploitation de Scheafer
- Démonstration du calcul de la période synodique des planètes et du temps de rétrogradation
- Démonstration de la construction de ponts browniens
- Démonstration de la provenance de la carte de contrôle des événements rares
- Calcul du facteur d'actualisation d'une assurance retraite basé sur l'inflation et l'espérance de vie
- Démonstration de l'ANOVA à deux facteurs sans répétition et à deux facteurs avec répétition
- Démonstration mathématique et physique élémentaire du fonctionnement du LASER
- Ajout de petites biographies sur Neper, Wilcoxon, Born, Heisenberg, Jordan, Kolmogorov, Stokes, Ostrogradsky, Zeeman, Henry, Faraday, Meitner, Biot, Debye, Drude et Ohm
- Théorème de la série de Taylor avec reste intégral
- Stabilité de la loi de Poisson
- Test statistique de Poisson à 1 et 2 échantillons
- Tests statistiques non paramétriques de Kruskal-Wallis et Friedman
- Test statistique de normalité de Ryan-Joiner
- Test statistique C de Cochran
- Séries de Taylor-Maclaurin usuelles
- Régression polynomiale par la méthode des moindres carrés
- M.D.F. spatio-temporelle avec équations de Maxwell
- Analyse du seuil de rentabilité
- Oscillateur harmonique mécanique
- Effet Doppler acoustique
- Superposition d'ondes périodiques
- Test statistique de l'étendue de Tukey
- Modèle prévisionnel par moyenne mobile, coefficients saisonniers, lissage simple, double de Brown, double de Holt (additif), double de Holt et Winter (multiplicatif)
- Introduction élémentaire aux processus autorégressifs AR, autorégressifs AM, ARMA et ARIMA
- Démonstration de l'expression du facteur de correction sur population finie
- Test statistique exact de Fisher
- Lissage exponentiel de Laplace
- Kappa d'agrément de Cohen et test statistique de McNemar
- Modèle d'analyse de survie de Kaplan-Meier
- V de Cramer
- Clustering avec algorithme des K-Means
- Clustering avec algorithme pour dendrogrammes

En cours de traduction de l'anglais

  - Test statistique de la somme des rangs signés de Wilcoxon à 1 échantillon et à deux échantillons appariés
  - Étude quantitative de l'énergie potentielle effective (modèle harmonique de la liaison atomique) de l'atome hydrogénoïde
  - Démonstration de l'équation des poutres (équation d'Euler-Bernoulli)
  - Calcul du taux de défaillance d'un système en utilisant la technique du maximum de vraisemblance
  - Ajout d'une chronologie des sciences
  - Démonstration du modèle d'Einstein (loi de Dulong-Petit) de la capacité calorifique des solides cristallins et dérivation du modèle de Debye
  - Modèle de Langenvin du diamagnétisme et paramagnétisme
  - Introduction au calcul d'intégrales curvilignes
  - Détermination naïve de l'énergie d'un dipôle magnétique
  - Modèle nucléaire en "goutte liquide"
  - Modèle de la résonance magnétique de spin
  - Méthode du facteur d'intégrant de résolution d'équations différentielles
  - Méthode de variation de la constante pour la résolution d'équations différentielles
  - Loi de Mendel
  - Rente viagère temporaire et différée
  - Cycle de Carnot
  - Modèle d'évaluation des actions de Durand et Gordon-Shapiro
  - Test statistique d'Anderson-Darling
  - Optimisation non-linéaire par la méthode Newton-Quadratique et de Gauss-Newton
  - Méthode d'interpolation polynomiale de Lagrange
  - Test statistique de Cochran-Mantel-Heanzel

- **Novembre 12016**

  - Décomposition en valeurs singulières SVD

- **Décembre 12016**

  - Test de Fieller (rapport de deux moyennes)

- **Janvier 12017**

  - Problème de la cheminée en chute
  - Cartes de contrôle de Levey-Jennings
  - Plans d'expérience de mélange en réseau avec variables de processus
  - Taux de panne moyen (fiabilité)
  - Modèle de fiabilité de chaîne de Markov
  - Conception de tests de fiabilité (temps de test du khi-carré, taille de l'échantillon binomial, taille de l'échantillon bêta-binomial)
  - Linéarisation de la distribution de Weibull
  - Pendule inversé
  - Test d'autocorrélation de Durbin-Watson
  - Méthode de Fisher pour p-valeurs multiples
  - Loupe
  - Cartes de contrôle de Laney
  - Classification des coniques par le déterminant

En cours de traduction de l'anglais

  - Classification des équations aux dérivées partielles

- **Février 12017**
  - Bases de la loi Normale repliée (fonction de densité et cumulée)
  - Fonction de densité et cumulée de la loi demi-Normal et variance, espérance et médiane correspondante
  - Séries téléscopiques et de Gandi
  - Somme de Césaro
  - Différenciation implicite
  - Dérivation composée bivariée

- **Mars 12017**
  - Méthode d'intégration de Laplace
  - Pseudo Erreur Standard (PSE) de Lenth pour les erreur margianles des plans factoriels non-répliqués
  - Erreurs marginales de Pareto pour les plans d'expériences factoriels avec réplications
  - Désirabilité des plans d'expérience

- **Avril 12017**
  - Métrique de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker
  - Inégalité de Jensen

- **Mai 12017**
  - Introduction aux ondes gravitationnelles en champs faibles
  - Une approche mathématique du "diviser pour mieux régner" en gouvernance
  - Trois nouveaux gags dans la section d'humour

- **Juillet 12017** (v3.7 $\rightarrow$ v3.8)
  - Photos d'un arc-en-ciel quasi-vertical et photo d'un appereil fonctionnement sur la base de la résonance magnétique nucléaire
  - Détalis sur la méthode de rétro-propagation pour les réseaux de neurones
  - Nouveaux détails mathématiques sur l'effet de levier en régression linéaire simple
  - Applications numériques de quelques tests expérimentaux de la Relativité Générale
  - Détermination de la géodésique de la sphère (comme exemple dans le section de Mécanique Analytique)
  - Méthode de classification ZeroR
  - Méthode des K plus proches voisins
  - Définition d'une fonction concave/convexe (pour la démonstration de l'inégalité de Jensen)
  - Démonstration de l'orthogonalité des polynômes de Hermite
  - Démonstration du modèle d'évaluation des options de Bachelier
  - Démonstration de l'égalité de Cox-Ross-Ingersoll pour les Forward/Future
  - Démonstration du tenseur énergie-impulsion pour un fluide non-relativiste
  - Définition de la distance orthodromique
  - Démonstration de l'aire (surface) s'une section d'ellipse

En cours de traduction de l' anglais

- Démonstration de l'orbite stable profonde de Schwarzschild
- Expérience Hafele–Keating avec traitement via le formalisme de la Relativité Générale
- Introduction des hyperparamètres de Machine Learning (apprentissage machine)
- Lissage par densité de noyaux (Kernel smoothing)
- Risque de défaut de crédit
- Ajout de nombreuses dates dans la section de chronologie

- **Novembre 12017** (v3.8 $\rightarrow$ v3.9)
  - Création des références croisées dans le texte (mais à améliorer !)
  - Ajout d'un nouveau point au règles de publiction scientifiques (citer les études équivalents, si existantes, pour méta-analyses ultérieures)
  - Démonstration de la dérivée de $f(g)^{g(x)}$
  - Arbre de décision OneR (One Rule) pour la Data Science avec matrix de confusion y relative
  - Règles d'association pour le machine learning (apprentissage machine)
  - Kurtosis (coefficient d'aplatissement) et Skewness (coefficient d'asymétrie)

- **Janvier 12018** (v3.9 $\rightarrow$ v3.10)
  - Équation de continuité de Dirac
  - Modèle CCR (Charnes, Cooper et Rhodes) du modèle Data Envelopment Analysis (DEA)
  - Divergence de Kullback-Leibler
  - Convolution discrète et linéaire
  - Intégrale de Dirichlet
  - Tests de permutation
  - Ajout de références croisées supplémentaires

- **June 12018** (v3.10 $\rightarrow$ v3.11)
  - Il y avait une erreur de frappe concernant le signe de l'angle retourné par la fonction $\text{atan}()$ ($-$ au lieu d'un $+$)
  - Ajout de quelques tables de Taguchi supplémentaires
  - Démonstration de la loi du khi-deux non-central à un degré de liberté pour l'étude des intervalles de tolérance
  - Ajout de détails sur la régression forcée à l'origine (particulièrement sur le problème du calcul du R^2 dans ce cas là !)
  - Ajout de nouvelles images (sur la tromperie des données, un gag sur le chat de Schrödinger, comparaison des tailles des planètes, une illustration de la différence en le bagging et boosting en apprentissage machine)
  - Ajout dans la section d'Astronomie de tables de données intéressantes sur les planètes du système solaire (incluant Pluton !)
  - Ajout dans la section d'Astrophysique d'une table de données intéressante sur quelques étoiles fameuses
  - Modèle de survie de Cox (modèle à hasard proportionnel de Cox)
  - Nous avons rendu plus explicite le lien entre la méthode de Gauss-Newton et la méthode des gradients descendants

En cours de traduction de l' anglais

  - Démonstration des intervalles de confiance pour l'estimateur de Kaplan-Meier et le modèle de hasard proportionnel de Cox (ration de hasard)

- **June 12019** (v3.11 $\rightarrow$ v3.12)
  - Améliorations et corrections relativement au décalage vers le rouge
  - Ajout de petites biographies sur Yates, Friedmann, Lemaître et Cramer
  - Améliorations sur la partie concernant les modèles d'Univers de FRLW
  - Ajout d'une dizaine d'harmoniques sphériques supplémentaires dans la section de Chimie Quantique (grâce a Wikipédia !)
  - Brève introduction à l'analyse XYZ
  - Introduction au concept d'avantage mécanique idéal et d'avantage mécanique actuel

En cours de traduction de l' anglais

24 Nomenclature

En cours de traduction de l'anglais

Ce chapitre contient un résumé avec une description simple de la plupart des symboles utilisés dans ce livre.

Commençons d'abord par les lettres grecques :

α alpha	θ theta	o o	τ tau
β beta	ϑ vartheta	π pi	υ upsilon
γ upsilon	ξ xi	ϖ varpi	ϕ phi
δ delta	κ kappa	ρ rho	φ varphi
ϵ epsilon	λ lambda	ϱ varrho	χ chi
ε varepsilon	μ mu	σ sigma	ψ psi
ζ zeta	ν nu	ς varsigma	ω omega
η eta			
Γ Gamma	Λ Lambda	Σ Sigma	Ψ Psi
Δ Delta	Ξ Xi	Υ Upsilon	Ω Omega
Θ Theta	Π Pi	Φ Phi	

TAB. 24.1 – **Lettres grecques**

Et enfin les opérateurs et objets mathématiques les plus courants :

Symboles	**Descriptions**
(	Parenthèse ouverte
)	Parenthèse fermée
[	Crochet ouvert
]	Crochet fermé
{	Accolade ouverte
}	Accoldate fermée
$]\ldots,\ldots[$	Intervalle ouvert
$[\ldots,\ldots]$	Intervalle fermé
$]\ldots,\ldots]$ $[\ldots,\ldots[$	Intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé)
$\lfloor x \rfloor$	Plancher de x, arrondi à l'entier inférieur

Symboles	Descriptions
$\lceil x \rceil$	Plafond de x, arrondi à l'entier supérieur
$[x]$	Partie entière d'un nombre
$\{x\}$	Partie fractionnaire d'un nombre ($[x] = x - \{x\}$)
$\{\ldots\}$	Contenu d'un ensemble
$\wedge$	Opérateur AND, noté aussi & en informatique et correspondant à la multiplication en maths
$\vee$	Opérateur OR, noté aussi || en informatique
$\varnothing$	Ensemble vide
$\therefore$	Dès lors
$\because$	Parce que
$\Rightarrow$	Implication (en maths appliquées), si et seulement si (en logique), réaction nucléaire (en physique atomique)
$\Leftrightarrow$	Est équivalent
$\neg$	Négation (négation logique)
$\vdash$	Cela prouve que
$\nvdash$	Cela ne prouve pas que
∞	Infinité
$=$	Symbole d'égalité
$\equiv$	Symbole d'identité (le terme de gauche est supposé égal au terme de droite et inversement)
$\cong$	Symbole approximativement égal
$\propto$	Symbole de linéairement proportionnel
$:=$, $\triangleq$	Symboles de par définition (défini comme)
$>$	(strictement) Plus grand que
$<$	(strictement) Plus petit que
$\gg$	Beaucoup plus grand que
$\ll$	Beaucoup plus petit que
$\leq$	Plus petit ou égal à
$\geq$	Plus grand ou égal à
$\succ$	Préféré (pour l'utilité en économétrie) ou matrice définie positive (en algèbre linéaire)
$\prec$	Non préféré (pour l'utilité en économétrie) ou matrice définie négative (en algèbre linéaire)
$\succeq$	Préféré ou égal à (pour l'utilité en économétrie) ou matrice semi-définie négative (en algèbre linéaire)
$\preceq$	Non préféré ou égal à (pour l'utilité en économétrie)
$\sim$	Équivalent à (pour l'utilité en économétrie)
$\rightarrow$	Tend vers (en analyse fonctionnelle) ou implique (en logique)
$\oplus$	En théorie de la démonstration, une manière abstraite de représenter les trois opérateurs suivants $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
$\twoheadrightarrow$	Symbole surjectif (surjection)
$\rightarrowtail$	Symbole injectif (injection)
$\leftrightarrow$	Symbole bijection
$\mathcal{T}$	En logique, un ensemble de termes
$\mathcal{F}$	En logique, un ensemble de formules
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels (entiers positifs)
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres naturels (entiers positifs) zéro non-inclus

En cours de traduction de l'anglais

Symboles	Descriptions
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{E}$	Ensemble des nombres pairs
$\mathbb{O}$	Ensemble des nombres impairs
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels (ratio de deux entiers relatifs)
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{H}$	Ensemble des nombres quaternions
i	Nombre imaginaire pure
$\bar{z}$	En statistiques la moyenne arithmétique de z ou le conjugué complexe de z
$\|x\|$	Valeur absolue de x ou module d'un nombre complexe
$\Re$	Partie réelle d'un nombre complexe
$\Im$	Partie imaginaire d'un nombre complexe
ker	Noyau (kernel) d'une fonction
Card($\mathcal{S}$)	Cardinal (taille) d'un ensemble $\mathcal{S}$
$\aleph$	Symbole de cardinal transfini
$\in$	Symbole signifiant que le terme de gauche (un élément) appartient au terme de droite (un ensemble)
$\notin$	Symbole signifiant que le terme de gauche(un élément) n'appartient pas au terme de droite (un ensemble)
$\subset$	Le symbole qui signifie que le terme de gauche (c'est-à-dire un ensemble) est un sous-ensemble de l'ensemble de droite
$\not\subset$	Symbole qui signifie que le terme de gauche (c'est-à-dire un ensemble) n'est pas un sous-ensemble de l'ensemble de droite
$\subseteq$	Symbole qui signifie que le terme de gauche (c'est-à-dire un ensemble) est un sous-ensemble ou un ensemble égal à l'ensemble de droite
$\not\subseteq$	Symbole qui signifie que le terme de gauche (c'est-à-dire un ensemble) n'est pas un sous-ensemble ou même un ensemble égal à l'ensemble de droite
$\cup$	Symbole qui signifie que le terme gauche (qui est un ensemble) est fusionné (union) avec le terme droit qui est aussi un ensemble
$\sqcup$	Symbole qui signifie que le terme gauche (c'est-à-dire un intervalle) est fusionné (union) avec le terme droit qui est également un intervalle
$\cap$	Symbole qui signifie que nous ne prenons que les éléments d'intersection (égaux) des termes gauche et droit qui sont des ensembles
$\bigcup_{i=1}^{n}$	Union de plusieurs ensembles
$\bigcap_{i=1}^{n}$	Intersection de plusieurs ensembles
$\|$	Tel que...
$\forall$	Pour tout...
$\exists$	Il existe...
$\star$	Opération générique (non explicite) en théorie des ensembles

En cours de relecture de l'anglais

Symboles	**Descriptions**
$+$	Symbole d'addition de deux termes
$\sum_{i=1}^{n}$	Sommation de plusieurs termes indexés
$-$	Symbole de soustraction de deux termes
$\times, \cdot$	Symbole de multiplication (produit) de deux termes
$n!$	Fonction factorielle
$\prod_{i=1}^{n}$	Symbole de multiplication (produit) de plusieurs termes indexés
$\div, /, :$	Symboles pour la division de deux termes (notation dépendante du niveau scolaire)
$\sqrt{\ldots}$	Racine carée
$\sqrt[n]{\ldots}, (\ldots)^{1/n}$	Notations communes pour la racine n-ème
$\equiv$	Congruence
mod	Modulus
$[x]_m$	Ensemble d'entiers congrus à un modulo m
A_n^m	Nombre d'arrangements avec répétitions
A_m^n	Nombre d'arrangements sans répétitions
Γ_p^n	Combinaison simple avec des répétitions
$C_k^n, \binom{n}{k}$	Notation du coefficient binomial[1] défini par $n!/(k!(n-k)!)$
$\vec{x}$	Un vecteur
$\text{proj}(\ldots)$	Opérateur de projection d'un vecteur
$\Vert\vec{x}\Vert$	Norme d'un vecteur $\vec{x}$
ln	Logarithme naturel (base e) d'un nombre
log	Logarithme en base 10 (si non indiqué) d'un nombre
e, exp	Différentes notations pour l'exponentielle (nombre d'Euler)
P	Selon le contexte, il s'agit d'une probabilité, d'une probabilité cumulée ou d'une partie d'un ensemble ou d'une proposition (en théorie de la preuve)
$/, \vert$	Dans le domaine de l'analyse bayésienne, ces symboles signifient "étant connu", ou "sachant que"
$\text{E}(\ldots),\mu$	En statistique, l'espérance (moyenne arithmétique)
μ_g	En statistique, la moyenne géométrique
μ_h	En statistique, la moyenne harmonique
$\text{V}(\ldots), \sigma^2$	En statistique, la variance biaisée (σ étant l'écart-type biaisé)
M_e	La médiane (valeur milieu)
M_0	Le mode (valeur modale)
γ	Le skewness (coefficient d'asymétrie)
κ	Le kurtosis (coefficient d'applatissement)
$\hat{x}$	En physique l'amplitude de x, en statistique un estimateur (non-biaisé) de x
Δ	Discriminant d'un polynôme en algèbre, médiatrice en géométrie
$\times$	Si les termes de gauche et de droite sont des vecteurs, c'est le produit vectoriel

En cours de traduction de l'anglais

[1]Pour rappel, ce livre ne respecte pas la notation ISO pour ce coefficient !

Symboles	**Descriptions**
$\circ$	Si les termes gauche et droite sont des vecteurs, il s'agit du produit scalaire, également appelé "produit interne". Sinon, si utilisé avec des fonctions, c'est le symbole de la composition
$\langle\ldots,\ldots\rangle$	Produit scalaire entre fonctions
d,∂	Différentielles exacte et partielle
$\mathcal{C}^n$	Ordre de dérivabilité (continuité) d'une fonction
$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ $\mathrm{d}_t f(t)$ f' $\dot{f}$	Notations courantes pour la dérivée d'une fonction f
$\mathcal{O}(\cdot)$	Big-O signifie ordre de grandeur, ordre ou complexité en informatique
$\vec{\nabla}(f)$ $\vec{\nabla}\cdot f$ $\vec{\nabla} f$ $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$	Toutes les notations courantes pour le gradient d'un champ scalaire
$\vec{\nabla}(\vec{f})$	Gradient d'un champ vectoriel
$\vec{\nabla}\circ\vec{f}$ $\text{div}(\vec{f})$	Toutes les notations courantes pour la divergence d'un champ vectoriel
$\vec{\nabla}\times\vec{f}$ $\text{rot}(\vec{f})$	Toutes les notations courantes pour le rotationnel d'un champ vectoriel
$\Delta\cdot f$ $\vec{\nabla}^2 f$ $\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\cdot f)$	Toutes les notations courantes pour le laplacien d'un champ scalaire
$\Delta\vec{f}$	Laplacien d'un champ de vecteur
$\square=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$	D'alembertien
$\diamond$	Multiplication par éléments de vecteurs (c'est-à-dire produit Hadamard)
$\int$	Primitive de Riemann
$\int_a^b$	Intégrale de Riemann dans l'intervalle $[a,b]$
$\oint$	Intégrale curviligne fermée non orientée (intégrale linéaire)
$\ointclockwise$	Intégrale de chemin dans le sens horaire
$\ointctrclockwise$	Intégrale de chemin dans le sens anti-horaire
$\text{Res}[f(z);z_0]$	Résidu sur z_0 d'une fonction $f(z)$
$*$	Convolution de matrices ou de fonctions
D	Dérivée covariante (transport parallèle) ou dérivée de Fermi-Walker
A_{ij}	Élément de la ligne i et de la colonne j d'une matrice
$A_{:,j}$,$A_{.j}$,$\text{col}_j(A)$	La j-ème colonne d'une matrice
$A_{i,:}$,$A_{i.}$	La i-ème ligne d'une matrice

Symboles	Descriptions
0_{mn}, $\mathbf{0}$, $\mathbb{O}$	Notations courantes pour une matrice avec uniquement des zéros comme composants
I_n, $\mathbb{1}_n$	Matrice carrée unité (identité) (diagonale avec 1, 0 partout ailleurs) de dimension $n \times n$ ou vecteur composé seulement de 1 et de dimension n
$\text{tr}(A)$	Trace d'une matrice
σ	Fonction de permutation
$\mathcal{S}_n$	Ensemble de toutes les permutations de n éléments
$D(A)$ $\det(A)$ $X(\mathrm{i}\omega)$ $\|A\|$	Notations communes pour le déterminant d'une matrice
$\text{diag}(A)$	Vecteur extrait de la diagonale d'une matrice A
A^-	Pseudo-inverse d'une matrice
$\vec{x}^T$, A^T	Transposée d'un vecteur $\vec{x}$ ou d'une matrice A
$A^\dagger$	La matrice conjuguée et transposée A
δ_{ij}, δ^{ij}	Symbole de Kronecker covariant et respectivement contravariant (2D)
$\varepsilon_{ij}, \varepsilon^{ij}$	Symbole de Levi-Civita covariant et respectivement contravariant (2D)
g_{ij}, g^{ij}	Tenseur métrique covariant et respectivement contravariant
η_{ij}, η^{ij}	Tenseur métrique de Minkowski covariant et respectivement contravariant
E^n, E^n_*	Espace n-dimensionnel et son espace dual
$\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^n_*$	Espace euclidien de n-dimensions et son espace dual
$\mathcal{P}$	Symbole d'un plan (en géométrie) ou partitions d'un ensemble (en théorie de la mesure)
$\mathcal{H}^n$	Espace de Hilbert n-dimensionnel
$\otimes$	Produit tensoriel ou produit de Kronecker (selon le contexte...), c'est-à-dire corrélation-croisée matricielle
Γ^j_{ki}	Symboles de Christoffel du second type
Γ_{kij}	Symboles de Christoffel du premier type
∇_j, ∂_j	Dérivée covariante pour les 1-formes
$R^l_{i,jk}$	Symbole de Riemann-Christoffel
R_{ij}	Courbure de Ricci
R	Scalaire de Ricci
$G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu}$	Tenseur d'Einstein covariant et respectivement contravariant
:	Lorsque le terme de gauche est une matrice et celui de droite un vecteur, il s'agit de "produit scalaire matriciel de Frobenius"
$\mathcal{F}(x(t))$ $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$ $X(\mathrm{i}\omega)$ $X[k]$	Notations les plus courantes pour la transformée de Fourier de $x(t)$
$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t)$ $\mathcal{F}^{-1}(X[k])$	Notations les plus courantes pour la transformée de Fourier inverse
$\mathcal{F}[x[m]]$	Transformée de Fourier discrète de $x[m]$
$\mathcal{F}^{-1}[X[n]]$	Transformée de Fourier discrète inverse de $X[n]$

Symboles	**Descriptions**
$\mathcal{L}(x(t))$	Transformée de Laplace
$\mathcal{L}(X(s))$	Transformée de Laplace inverse
$\mathcal{UL}(x(t))$	Unilateral Laplace transform
$\mathcal{Z}[x[n]]$	Transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale directe
$\mathcal{Z}^{-1}[X[z]]$	Transformée en $\mathcal{Z}$ inverse
$\mathcal{UZ}[x[n]]$	Transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale
$\perp$	Perpendiculaire à
$\overline{AB}$	Segment A à B
$\widehat{AB}$	Angle entre A et B
$\mathcal{S}^n$	Surface n-dimensionnelle d'une sphère à $n+1$ dimensions
$\arg\min_x f(x)$ $\min_x f(x)$ $\arg\max_x f(x)$ $\max_x f(x)$	Respectivement la valeur de x qui minimise/maximise $f(x)$
ΔABC	Un triangle composé de trois sommets A, B et C
$D = \gamma^\mu \partial_\mu \equiv \not{\partial}$	Notation en barre oblique de Feynman (c'est-à-dire opérateur de Dirac)
♁	Symbole en astronomie et astrophysique pour désigner la Terre
$\odot$	Symbole en astronomie et astrophysique pour désigner le Soleil
${}^{A}_{Z}\mathrm{X}_N$,, ${}^{A}\mathrm{X}$	Deux notations courantes pour un élément chimique de nombre de masse A, de numéro atomique Z et de nombre de neutrons N
$\rightleftharpoons$	Double harpon (réaction réversible en chimie)
$\rightharpoonup$	Harpon simple (réaction non réversible en chimie)

Pour un résumé des constantes physiques et chimiques, le lecteur doit se référer à la section de la page Mécanique **??**.

En cours de traduction de l'anglais

Table des figures

4.1 Processus cyclique de la méthode scientifique 38
4.4 Most common types of causal relationships 56
4.5 Évidence Scientifique Hiérarchisée (pyramide des données probantes) 58
4.6 Niveaux d'évidence dans une science sociale comme l'Histoire 60
4.7 Exemple particulier de méta-analyse 61
4.8 Différents types de preuves scientifiques 74
4.9 Publication de la Télévision Suisse sur le traîtement de la borréliose de Lyme 76
4.10 Publication de la Télévision Suisse sur un miracle à Lourdes 77
4.11 Quelques techniques du déni scientifique 82
4.12 Courbe caricaturée de l'effet Dunning-Kruger 82
4.13 Mêmes données, conclusions différentes (objectifs des méta-analyses) 85
4.14 Problèmes d'opinions/estimations d'experts 86
4.15 Structure logique du falsificationnisme 92

5.1 Relations entre diverses structures mathématiques importantes pour la physique 132
5.2 Diagramme synoptique du raisonnement hypothético-déductif 141
5.3 Les quatre types standards d'énoncés quantifiés 162
5.4 Arbre de la Logique 192
5.5 Nombres Indo-Arabes 207
5.6 Description système décimal et positionnel 208
5.7 Principe de construction du système positionnel 209
5.8 Conversion décimal en binaire 212
5.10 Exemple d'une $1/2$ fraction de pizza 222
5.11 Exemple d'une $1/4$ fraction de pizza 223
5.12 Exemple d'une $1/12$ fraction de pizza 223
5.13 Métode diagonale de Cantor 224
5.14 Résumé simplifié d'ensemble de nombres 229
5.15 Illustration commune du concept de pourcentage 234
5.16 VOLTCRAFT VC-5080 Multimeter with ohmic graduation displaying ∞ symbol 240
5.17 Plan de Gauss 247
5.18 Représentation de Fresnel 253
5.19 Vecteur tournant de Fresnel (osillateurs complexes) 254
5.20 Oscillateur 3D complexe 254
5.21 Représentation de la rotation complexe 259
5.26 Types de nombres $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$,... 277
5.29 Exemple schématique d'un cas particulier d'addition 297
5.30 Addition de fractions avec dénominateurs communs 300
5.31 Addition de fractions sans dénominateurs communs 301
5.32 Table d'addition des 12 premiers nombres naturels 302

En cours de traduction de l'anglais

5.33 Un schéma possible pour la soustraction . . . 303
5.34 Soustraction de fractions sans dénominateur commun . . . 306
5.35 Table de soustraction des 12 premiers nombres naturels . . . 307
5.36 Résumé des règles des exposants . . . 310
5.37 Multiplication de fractions avec dénominateurs non-communs . . . 312
5.38 Table de multiplication des 12 premiers nombres naturels . . . 313
5.39 Exemple schématique de la division et du fractionnement (fraction) . . . 314
5.41 Diagramme de Venn des diviseurs communs . . . 341
5.48 Résumé de l'algorithme PGCD . . . 346
5.49 Mesure de l'heure sur une horloge utilisant l'arithmétique modulo 12 . . . 353
5.50 Exemple de diagramme sagittal d'un ensemble de définition à un autre ensemble d'arrivée . . . 376
5.51 Fonction renvoyant dans son propre ensemble de définition . . . 377
5.52 Résumé visuel des axiomes de Zermelo-Fraenkel . . . 386
5.53 Exemple de maximum Global/Local . . . 391
5.54 Exemple visuel (diagramme d'Euler) de l'inclusion . . . 392
5.55 Exemple visuel (diagramme d'Euler) de l'intersection . . . 393
5.56 Exemple visuel (diagrammer d'Euler) de l'union . . . 394
5.57 Exemple visuel (diagramme d'Euler) de la différence . . . 396
5.58 Exemple visuel (diagramme d'Euler) de la différence symétrique . . . 396
5.59 Exemple visuel (diagramme d'Euler) de la complémentarité . . . 398
5.60 Jointures courantes du langage SQL basé sur la théorie des ensembles . . . 400
5.61 Représentation du concept de noyau d'une fonction . . . 402
5.62 Représentation d'une fonction surjective . . . 403
5.63 Représentation d'une fonction injective . . . 404
5.64 Représentation d'une fonction bijective . . . 405
5.65 Exemple de fonction bijective . . . 405
5.66 Représentation d'une relation antisymétrique . . . 407
5.67 Synoptic diagram of common algebraic structures . . . 413
5.68 Exemple du concept d'espace vectoriel . . . 430
5.69 Résumé des structures algébriques les plus courantes . . . 433
5.70 Théorie des groupes résumé addition . . . 434
5.71 Théorie des groupes résumé multiplication . . . 434
5.72 Fusion de l'addition et de la multiplication . . . 435
5.73 Structure de groupe abélien . . . 435
5.74 Structure d'un corps . . . 436
5.75 Homomorphisme d'anneau . . . 438
5.76 Diagramme de Venn de différents types d'homomorphismes . . . 442
5.77 Distribution de probabilité du paradoxe d'anniversaire . . . 460
5.78 Acides aminés courants . . . 461
5.81 Image la plus nette et la plus grande de M31 (galaxie d'Andromède) du télescope spatial Hubble de la NASA/ESA . . . 469
5.82 Spirale de la Nature . . . 472
5.83 Diagrammes de Venn possibles pour deux événements . . . 482
5.84 Exemple de réseau bayésien (acyclique orienté) à 5 états . . . 502
5.85 Réseau bayésien acyclique orienté avec probabilités de départ . . . 503
5.86 Réseau bayésien en connexion série/linéaire . . . 504
5.87 Réseau bayésien divergent . . . 504

En cours de traduction de l'anglais

5.88 Réseau bayésien convergent . . . 505
5.89 Réseau bayésien de 1er niveau . . . 506
5.90 Début du réseau bayésien dans MSBNX 1.4.2 . . . 507
5.91 Probabilité a posteriori d'un arrêt dû à une panne machine dans MSBNX 1.4.2 507
5.92 Réseau bayésien de deuxième niveau . . . 508
5.93 Probabilité implicite d'une évacuation dans MSBNX 1.4.2 . . . 509
5.94 Probabilité a posteriori d'une évacuation due à une panne machine dans MSBNX 1.4.2 . . . 509
5.95 Réseau bayésien de deuxième niveau avec seconde branche . . . 510
5.96 Probabilité implicite d'une alarme dans MSBNX 1.4.2 . . . 511
5.97 Probabilité implicite d'une alarme dans MSBNX 1.4.2 . . . 512
5.99 Formule de Pascal illustrée . . . 523
5.100 Résumé des combinaisons, permutations et arrangement simples . . . 527
5.101 Exemple générique d'une chaîne de Markov . . . 532
5.102 Exemple concret très simpliste d'une chaîne de Markov . . . 534
5.104 Représentation graphique de l'estimation par interpolation linéaire de la médiane . . . 546
5.105 Représentation graphique de l'estimation par classes d'intervalles de la valeur modale . . . 547
5.106 Graphique idéal de Box & Whiskers . . . 550
5.107 Représentation graphique du mode, de la médiane et des quartiles par rapport à une distribution . . . 551
5.108 Représentation graphique des quelques moyennes mobiles . . . 558
5.109 Point de départ pour la représentation géométrique desd différentes moyennes 566
5.110 Types de variables en statistiques . . . 572
5.111 Illustration de la "tension" en statistique . . . 578
5.112 Interprétation géométrique de la covariance . . . 590
5.113 Résumé graphique du quarter d'Anscome . . . 601
5.114 Quelques corrélations de Pearson . . . 606
5.115 Illustration du coefficient de corrélation intra-classe . . . 617
5.116 Représentation de plages de valeurs du Kurtosis et Skewness de quelques distributions . . . 626
5.117 Familles bêta et gamma de distributions sur le plan de caractérisation de forme 630
5.118 Loi Uniforme $\mathcal{U}$ (fonction de densité et de distribution cumulative) . . . 640
5.119 Loi de Bernoulli B (fonction de distribution cumulative) . . . 642
5.120 Loi géométrique $\mathcal{G}$ (fonction de densité et de distribution cumulative) . . . 646
5.121 Loi binomiale $\mathcal{B}$ (fonction de densité et de distribution cumulative) . . . 651
5.122 Distribution trinomoiale avec $p=1/5, q=2/5$ et $n=5$ . . . 653
5.123 Loi binomiale négative $\mathtt{NB}$ (fonction de densité et de distribution cumulative) 659
5.124 Loi hypergéométrique $\mathcal{H}$ (fonction de densité et de distribution cumulative) . 664
5.125 Conditions d'application de l'approximation par une loi Normale . . . 666
5.126 Loi de Poisson $\mathcal{P}$ (fonction de densité et de distribution cumulative) . . . 675
5.127 Aire cumulée de distribution gaussienne . . . 685
5.128 Loi Normale $\mathcal{N}$ (fonction de densité et de distribution cumulative) . . . 687
5.129 Intervalles Sigma pour la distribution Normale . . . 690
5.130 Largeur à mi-hauteur (LMH) illustrée . . . 695
5.131 Plot de la fonction de densité Normale bivariée avec MATLAB™ . . . 702
5.132 Plot de la fonction de densité Normale bivariée pgfplots . . . 703

En cours de traduction de l'anglais

5.133 Plot des iso-lignes de la fonction de densité Normale bivariée (cas non corrélé) 704
5.134 Tracé des iso-lignes de la fonction normale bivariée (cas corrélé) 705
5.137 Diagramme quantile-quantile de la distribution 719
5.138 Loi Log-Normale NB (fonction de densité et de distribution cumulative) . . . 724
5.139 Loi uniforme continue (fonction de densité et de distribution cumulative) . . 725
5.140 Loi triangulaire (fonction de densité et de distribution cumulative) 730
5.141 Matrice des risques naïve 3×3 en gestion de projet 732
5.142 Loi de Pareto (fonction de densité et de distribution cumulative) 734
5.143 Loi exponentielle (fonction de densité et de distribution cumulative) 740
5.144 Loi de Cauchy (fonction de densité) 746
5.145 Loi bêta (fonctions de densité) 750
5.146 Loi bêta (fonction de densité et distribution cumulative) 751
5.147 Quelques fonctions de densité de la loi Gamma 756
5.148 Loi Gamma (fonction de densité et distribution cumulative) 756
5.149 Loi du χ^2 (fonctions de distribution) 762
5.150 Loi du χ^2 (fonction de densité et distribution cumulative) 762
5.151 Loi T de Student (fonction de densité et distribution cumulative) 774
5.152 Tracé de la fonction de Benford (fonction de répartition) 791
5.153 Loi ex-gaussienne (fonction de distribution de masse et cumulative) 799
5.154 Relations entre distributions 802
5.155 Résumé visuel de quelques distributions statistiques continues importantes . 804
5.156 Type de données censurées 820
5.157 Exemple d'intervalle de confiance dans les prévisions météorologiques . . . 836
5.158 Illustration de la superposition d'intervalle de confiance à 95% 842
5.159 Comparaison entre la fonction de distribution Normale et de Student 851
5.162 Convergence des différentes lois usuelles en inférence statistique élémentaire 874
5.165 Quartet de Richard McElreath's 881
5.166 Approche de la distribution de Bernoulli par la distribution normale selon le CLT 921
5.170 Illustration d'un test (ou niveau de confiance) unilatéral et bilatéral 929
5.171 Figure de résumé pour déterminer la p-valeur lors de tests paramétriques à distribution symétrique 930
5.172 Hypothèse nulle et alternative d'un test bilatéral particulier 934
5.173 p-hacking 936
5.174 Signification statistique élevée qui, contextualisée, a une faible signification pratique 938
5.175 Les trois scénarios possibles d'un test d'hypothèse sur la moyenne 941
5.176 BD illustrant l'hypothèse nulle et alternative 942
5.177 Méthode de Fisher pour multiples p-valeurs 945
5.178 Exemple particulier de méta-analyse 946
5.181 Régression non groupée du jeu de données IRIS dans R pour illustrer le paradoxe de Simpson 950
5.182 Régression groupée du jeu de données IRIS dans R pour illustrer le paradoxe de Simpson 950
5.183 Hypothèse nulle et alternative d'un cas particulier de test bilatéral 952
5.184 Graphique des effets principaux avec Minitab 15 1005
5.185 Diagramme des interactions sans interactions... avec Minitab 15 1006
5.186 Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15 1007

En cours de traduction de l'anglais

5.187 Graphique des effets principaux et diagramme des interactions avec Minitab 15 1009
5.193 Étude expérimentale vs observationnelle 1031
5.194 Étude gage R&R croisée vs imbriquée 1046
5.195 Comparaison de différentes structures d'ANOVA majeures 1050
5.196 Carrés Latin d'ordre 3, 4 et 5 1052
5.197 Fusion de deux plans carré Latin 1059
5.198 Familles de Modèles Linéaires Multivariés 1068
5.199 Mêmes données, conclusions différentes (objectif de la méta-analyse) 1088
5.200 Approche des fonctions binomiales par les fonctions Normales associées . . 1093
5.201 Représentation de l'approche du test de QdA de Kolmogorov-Smirnov 1102
5.212 Représentation de l'approche du test d'ajustement d'Anderson-Darling . . . 1111
5.219 Estimation par densité du noyau de 100 nombres aléatoires normalement distribués 1129
5.221 Histogrammes avec différentes largeurs de bandes et une estimation par noyaux de $f(x)$ pour le même échantillon 1130
5.222 Arbre de décision pour les tests statistiques naïfs 1136
5.240 Taxonomie des méthodes développées pour l'analyse de survie 1252
5.241 Développement de médicaments et essais cliniques 1256
5.242 Courbes de survie typiques de Kaplan-Meier avec le logiciel R 1260
5.244 Courbes de survie typiques du modèle de Cox à hasards proportionnels . . . 1283
5.246 Type d'erreurs de mesure 1292
5.247 Méthodes d'échantillonnage 1311
5.248 Idée sous-jacente du sur et sous-échantillonnage 1315
5.249 Idée sous-jacente de l'échantillonnage SMOTe et ROSE 1316
5.250 Type d'erreurs dans la méthodologie des enquêtes 1318
5.251 Sophismes de données communs 1326

6.3 Triangle de Pascal 1347
6.4 Quelques polynômes tracés avec R.3.2.1 1352
6.5 Points tournants explicitement mis en évidence 1353
6.6 Résoudre une équation simple par référence circulaire dans Microsoft Excel . 1361
6.8 Représentation des polynômes en fonction du signe du terme de degré 2 . . . 1363
6.9 Point d'inflexion de la tangente 1364
6.13 Illustration du nombre d'or 1369
6.14 Cinq premiers polynômes de Legendre 1385
6.15 Tracé des six premiers polynômes de Laguerre 1389
6.16 Tracés de quelques polynômes de Laguerre associés 1392
6.17 C_{12} Groupe cyclique 1400
6.18 Transformations affines sur un cercle 1403
6.19 Opérations laissant invariant un tétraèdre 1414
6.20 Exemples de composées et d'inverses de permutations 1421
6.21 Transformation du photomaton 1424
6.23 Sécante vs Tangente 1435
6.24 Points tournants mis en évidence 1436
6.25 Point tournant et point d'inflexion 1437
6.28 Tracé de la fonction tangente hyperbolique, sa dérivée première et seconde . 1439
6.29 Représentation graphique du théorème de Rolle 1443
6.30 Dérivée partielle illustrée 1448

En cours de traduction de l'anglais

6.31 Différentielle totale illustrée 1449
6.34 Types de dérivées les plus courants en mathématiques 1456
6.35 Le folium de Descartes avec asymptote 1476
6.39 Principe du calcul de la somme de Darboux inférieure 1484
6.40 Principe du calcul de la somme de Darboux supérieure 1484
6.41 Principe du calcul de la méthodes des rectangles à gauche 1487
6.42 Principe du calcul de l'intégrale de Riemann avec la méthode des rectangles à gauche 1488
6.43 Représentation graphique de l'aire 1491
6.44 Exemple d'une fonction à deux variables au-dessus d'un domaine 1498
6.45 Décomposition du volume en parallélépipèdes grossiers 1498
6.46 Décomposition du volume en parallélépipèdes de plus en plus fins 1499
6.47 Exemple d'un domaine de type I 1499
6.48 Une application non linéaire $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ envoie un petit carré à un parallélogramme déformé 1504
6.49 Représentation graphique du déterminant 1505
6.50 Représentation schématique de la fonction delta de Dirac par un trait surmonté d'une flèche 1548
6.51 Fonction delta de Dirac régularisée par une Gaussienne 1550
6.52 Tracé de la fonction de Heaviside 1551
6.53 Plot de la fonction Gamma d'Euler dans Maple 4.00b 1553
6.54 Plot de la fonction Gamma d'Euler dans le plan complexe avec Maple 4.00 . 1553
6.55 Flux sortant pour l'intégrale de surface d'une sphère entière 1567
6.56 Flux sortant pour l'intégrale de surface d'un cylindre 1568
6.57 Diagramme de Poincaré - Classification des portraits de phase 1621
6.58 Illustration du principe de convergence d'une séquence 1636
6.59 Spirale de Fibonacci 1641
6.60 Nombres triangulaires 1646
6.61 Quelques polynômes de Bernoulli 1653
6.63 Approximation de la fonction sinus par un développement de Maclaurin dans Maple 4.00b 1680
6.64 Approximation de la fonction sinus par un développement de Maclaurin avec TikZ 1680
6.65 Contre-exemple d'approche par Maclaurin dans Maple 4.00b 1681
6.66 Décalage possible de l'approche par Maclaurin avec Maple 4.00b 1682
6.67 Exemple de Taylor bivarié avec Maple 4.00b 1696
6.68 Types de points stationnaires (test de la dérivée seconde des formes quadratiques) 1698
6.69 Exemples de quelques séries de Fourier 1714
6.70 Domaine temporel et domaine fréquentiel 1715
6.72 Spectre de fréquence des coefficients de la série de Fourier 1719
6.82 Approche pédagogique pour visualiser la transformée de Fourier 1725
6.83 Exemple de série de Fourier dans Maple 4.00b avec 4, 8 et 16 termes 1727
6.84 Exemple de série de Fourier dans Maple 4.00b avec 50 termes 1727
6.85 Exemple d'impulsion rectangulaire pour transformée de Fourier 1743
6.86 Exemple d'impulsion rectangulaire pour la transformée de Fourier inverse . . 1746
6.87 Tracé de quelques fonctions de Bessel 1749
6.88 Exemple d'un flèche dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ 1775

En cours de traduction de l'anglais

6.89 Plans mutuellement perpendiculaires dans $\mathbb{R}^3$ . . . 1775
6.91 Exemple d'une somme de deux vecteurs . . . 1777
6.92 Exemple de somme de deux vecteurs avec notation d'usage en robotique . . . 1777
6.93 Différences de transformations entre un vecteur et un pseudo-vecteur . . . 1779
6.94 Un champ vectoriel de normales à une surface . . . 1780
6.95 Exemple de construction d'un vecteur dans un espace à trois dimensions . . . 1787
6.96 Représentation des agnles directeurs . . . 1789
6.97 Exemple artistique mais réel d'un espace affine $G = \mathrm{A}\mathbb{R}^2$ . . . 1794
6.98 Polygone vectoriel dans $\mathrm{A}\mathbb{R}^2$ . . . 1795
6.99 Détails du calcul de la norme dans un repère orthogonal $\mathbb{R}^3$ . . . 1797
6.100 Représentationg géométrique du produit scalaire (projection) . . . 1799
6.101 Exemple de projection de base orthonormée . . . 1801
6.102 Illustration de l'inégalité triangulaire . . . 1805
6.103 Représentation géométrique du produit vectoriel . . . 1812
6.104 Illustration du produit mixte . . . 1815
6.105 Localisation d'un point dans un repère 3D simple . . . 1824
6.106 Représentation du système de coordonnées sphériques . . . 1826
6.107 Concepts de latitude et de longitude illustrés . . . 1827
6.108 Distance orthodromique (distance du grand cercle) . . . 1831
6.109 Photographie de la Terre par le satellite japonaise Himawari 8 . . . 1832
6.110 Représentation du système de coordonnées cylindriques . . . 1837
6.111 Représentation du système de coordonnées polaires . . . 1839
6.112 Exemple de champ vectoriel gravitationnel . . . 1842
6.113 Exemple de champ vectoriel de vitesse . . . 1843
6.114 Plus grande descente et plus grande montée du gradient . . . 1846
6.122 Exemple de rotationnel d'un champ de vecteurs . . . 1864
6.130 Représentation d'un système de 3 équations à 3 inconnues avec Maple 4.00b 1904
6.131 Système surdéterminé . . . 1904
6.132 Représentation d'un système de 3 équations à 2 inconnues avec Maple 4.00b 1906
6.133 Schéma de Falk du produit matriciel . . . 1920
6.134 Interprétation géométrique du déterminant . . . 1938
6.135 Un vecteur représenté dans deux bases différentes . . . 1966
6.136 Interprétation géométrique du vecteur propre et de la valeur propre dans $\mathbb{R}^2$. 1969
6.137 La projection du point $\vec{x}_i$ sur la droite passant par l'origine dans la direction de $\vec{v}$ . . . 1984
6.138 Décomposition DVS d'une matrice $m \times n$ . . . 1988
6.139 Exemple DVS dans MATLAB™ image originale . . . 1989
6.144 Symbole 3D de Lévi-Civita . . . 2017
6.145 Coordonnés covariantes et contravariantes . . . 2031
6.148 Lien visuel entre un tenseur et sa surface représentative . . . 2060
6.149 Coordonnées de surface, coordonnées de lignes et axes de coordonnées des coordonnées curvilignes générales . . . 2066
6.150 Coordonnées de surface, coordonnées de lignes axes de coordonnées des coordonnées sphériques . . . 2072
6.151 Illustration de transport parallèle sur une sphère . . . 2089
6.152 Rappel des noms des cardinaux . . . 2090
6.153 Sphère unitaire . . . 2120
6.155 Symétrie plane d'un vecteur par rapport a un plan . . . 2127

En cours de traduction de l'anglais

6.157 Rotation spinorielle complète (exemple spécial) . . . 2134

7.1 Exemple typique de représentation d'un axe infini orienté avec origine . . . 2151
7.2 Position d'un point dans un plan cartésien . . . 2152
7.4 Vocabulaire des graphiques plans . . . 2154
7.5 Représentation des racines sur un graphe planaire . . . 2156
7.6 Exemple de fonction pas à pas pour le salaire coordonné suisses dans Maple 4.00b . . . 2157
7.7 Exemple d'histogramme typique dans les entreprises d'ingénierie (Six Sigma) 2158
7.8 Exemple de série temporelle OHLC (en chandeliers) avec moyenne mobile typique en finance . . . 2158
7.9 Quadrants dans un système orthogonal 3D . . . 2160
7.10 Plans mutuellement perpendiculaires dans $\mathbb{R}^3$ . . . 2161
7.11 Système de coordonnées droitier . . . 2161
7.12 Exemple de représentation filiaire d'une fonction 3D dams Maple 4.00b . . . 2162
7.13 Représentation coloriée (gradients) d'une fonction dans Maple 4.00 . . . 2163
7.14 Représentation des courbes de niveau (isoclines) d'une fonction avec Maple 4.00b . . . 2163
7.15 Représentation des gradients et isoclines d'une fonction avec Maple 4.00b . . . 2164
7.17 Représentation en coupe de la fonction 3D avec Maple 4.00b . . . 2166
7.18 Représentation de coupes multiples de la fonction 3D avec Maple 4.00b . . . 2166
7.20 Mise en situation de 3 points dans un plan . . . 2168
7.21 Exemple de symétrie par l'axe des ordonnées d'une fonction . . . 2170
7.22 Exemple de symétrie par l'axe des abscisses d'une fonction . . . 2171
7.23 Exemple de symétrie par l'origine d'une fonction . . . 2171
7.24 Exemple d'une translation verticale positive d'une fonction . . . 2172
7.25 Exemple d'une translation verticale négative d'une fonction . . . 2173
7.26 Exemple de translation horizontale négative d'une fonction . . . 2173
7.27 Exemple de translation horizontale positive d'une fonction . . . 2174
7.28 Exemple d'étirement vertical d'une fonction . . . 2175
7.29 Exemple d'aplatissement vertical d'une fonction . . . 2175
7.30 Exemple d'étirement horizontal d'une fonction . . . 2176
7.31 Exemple de compression horizontale d'une fonction . . . 2176
7.32 Résumé des quelques uns des types de monotocités de fonctions univariées . 2178
7.33 Types de graphiques les plus courants . . . 2179
7.35 Résumé rapide des types d'applications/fonctions . . . 2185
7.36 Exemple de fonction périodique avec période et amplitude . . . 2186
7.37 Exemple d'une fonction paire . . . 2187
7.38 Exemple de fonction impaire . . . 2188
7.39 Fonctions univariées affine et linéaire . . . 2190
7.40 Différents tracés de fonctions puissances simples . . . 2191
7.41 Différents tracés de fonctions exponentielles simples $(1^x, 2^x, 3^x, 4^x)$ avec Maple 4.00b . . . 2193
7.42 Différent tracés de logarithmes $\ln(x) = \ln_e(x)$ en vert et $\log_{10}(x)$ en rouge avec Maple 4.00b . . . 2194
7.43 Différents tracés de fonction trigonométriques avec Maple 4.00b . . . 2194
7.46 Quelques polynomes tracés avec TikZ . . . 2196
7.47 Exemple d'une fonction rationnelle . . . 2197

En cours de traduction de l'anglais

7.48 Exemple d'une fonction en escalier . . . 2198
7.49 Concept géométrique de limite dans $\mathbb{R}^3$ . . . 2201
7.50 Exemple de limites à gauche et droite . . . 2203
7.51 Représentation graphique d'une asymptote horizontale et verticale . . . 2246
7.52 Représentation graphique d'une asymptote affine oblique . . . 2247
7.53 Représentation graphique d'un exemple de branche parabolique suivant l'axe x 2248
7.54 Représentation graphique d'une asymptote curviligne . . . 2249
7.55 Techniques de base pour trouver les limites . . . 2250
7.56 Types courants de discontinuités . . . 2251
7.57 Exemple d'une fameuse discontinuité oscillante . . . 2253
7.58 Épigraphe et Hypographe d'une fonction . . . 2256
7.61 Double grille logarithmique . . . 2263
7.62 Simple grille logarithmique . . . 2263
7.63 Représentation graphique plane de la bijection entre le logarithme népérien et l'exponentielle . . . 2264
7.64 Exemple de convolution discrète . . . 2271
7.65 Convolution de Matrice . . . 2275
7.66 Types les plus courants de transformations intégrales . . . 2279
7.67 Exemple d'une fonction complexe (application conforme) . . . 2342
7.68 Exemple d'une fonction complexe (application conforme) . . . 2370
7.69 Exemple d'application $\mathbb{C}$-linéaire . . . 2371
7.72 Exemple d'application simple C-linéaire dans Maple 17.0 . . . 2374
7.73 Transformation en coordonnées polaires d'une ellipse . . . 2376
7.74 Résultat de la transformation de Joukovski en coordonnées polaires . . . 2376
7.75 Exemple d'application important de la fonction Joukovski . . . 2378
7.77 Représentation plane d'une fonction holomorphe bien connue... . . . 2384
7.79 Représentation d'une fonction holomorphe importante avec ses isolignes . . . 2387
7.80 Tracé du logarithme complexe dans Maple 4.00b . . . 2389
7.81 Logarithme complexe avec TikZ . . . 2390
7.84 Série de Maclaurin divergente . . . 2401
7.86 Représentation des différents rayons de convergence de $h(z)$ . . . 2403
7.87 Zoom sur la représentation complexe afin de comprendre la raison de la divergence . . . 2404
7.89 Representation of the deformation of a disc in a crown/ring . . . 2406
7.90 Représentation d'un chemin fermé avec son aller-retour . . . 2407
7.92 Représentation de la série de Laurent $f(z)$ avec Maple 4.00b . . . 2416
7.93 Somme des deux séries de Laurent de $f(z)$ pour les deux singularités dans Maple 4.00b . . . 2417
7.94 Singularité essentielle de $e^{1/z}$ avec Maple 4.00b . . . 2419
7.95 Singularités multiples isolées entourées par des chemins curvilignes . . . 2423
7.96 Exemple de distance ultramétrique d'un organigramme . . . 2432
7.97 Types courants de distances . . . 2436
7.98 Exemple d'une fonction Lipschitzienne . . . 2440
7.99 Continuité uniforme illustrée . . . 2443
7.100 Une boule ouverte de rayon r, centrée au point x . . . 2446
7.101 Exemples de boules fermées de rayon unité avec différentes distances . . . 2448
7.103 Exemple niveau lycée d'une distance de Hausdorff dans le plan . . . 2454
7.104 Un mappage homéomorphique naif . . . 2456

En cours de traduction de l'anglais

7.105 Un mappage homéomorphique un peu plus complexe 2456
7.106 Mappage homéomorphique intuitif 2457

8.1 Définition schématique du radian 2487
8.2 Un graphique pour convertir entre degrés et radians 2488
8.4 Degrés, minutes d'arc, secondes d'arc 2489
8.5 Soit la figure ci-dessous représentant un cercle quelconque centré à l'origine dans une base directe : 2491
8.6 Principe de conception des fonctions trigonométriques circulaires communes 2493
8.8 Valeurs des angles remarquables des fonctions trigonométriques connues . . 2495
8.9 Graphiques de certaines fonctions trigonométriques circulaires courantes . . 2496
8.10 Équivalences visuelles de certaines relations trigonométriques 2498
8.11 Quelques identités d'angles et valeurs trigonométriques conventionnelles associées pour le sinus et le cosinus 2499
8.12 Tracé 2D de la fonction sinc dans Maple 4.00b 2500
8.13 Sinus cardinal et son fameux équivalent au carré 2500
8.14 Tracé pseudo 3D de la fonction sinc dans Maple 4.00b 2501
8.16 Construction de base pour la détermination des relations triangulaires trigonométriques remarquables 2502
8.17 Construction pour la démonstration du théorème du cosinus 2508
8.18 Distance d'un point à l'intérieur d'un cercle à sa circonférence 2509
8.19 Construction pour la preuve de la loi des sinus 2511
8.20 Domaine des fonctions hyperboliques 2518
8.21 Équivalence des fonctions hyperboliques et de l'hyperbole 2519
8.22 Définition visuelle des fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques 2521
8.23 Tracé des fonctions trigonométriques hyperboliques usuelles 2522
8.24 Construction pour introduire la trigonométrique sphérique 2524
8.26 Configuration pour la définition de l'angle solide 2532
8.27 Configuration pour la définition de l'angle solide élémentaire 2532
8.28 Configuratio pour la définition de l'angle solide élémentaire de révolution . . 2533
8.29 Différence entre ligne droite, segment et demi-droite 2537
8.30 Exemple de quelques systèmes de coordonnées 2539
8.31 Concept de standard unidimensionnel 2539
8.32 Concept de standard bidimensionnel 2540
8.33 Concept de standard tridimensionnel 2540
8.34 Courbe de Von Koch 2541
8.35 Choix de l'étalon pour la courbe de Von Koch 2541
8.36 Fractale Triangle de Sierpinski 2542
8.37 Trois carrés pour recouvrir la fractale de Sierpinski 2543
8.38 Neuf carrés pour recouvrir la fractale de Sierpinski 2543
8.39 Vingt-sept carrés pour couvrir la fractale de Sierpinski 2543
8.40 Représentation des dimensions d'homothétie 2544
8.41 Les 23 définitions d'Euclide illustrées 2546
8.42 Résumé illustré de cinq postulats d'Euclide 2548
8.43 Exemple illustré d'une translation et d'une symétrie 2557
8.44 Un rapporteur demi-cercle marqué en degrés (180°) 2558
8.45 Angle saillant, rentrant, angles adjacents 2558
8.46 Représentation du déplacement de deux angles 2559

En cours de traduction de l'anglais

8.47 Somme de deux angles adjacents . . . 2560
8.48 Somme de deux angles quelconques . . . 2560
8.49 Exemple particulier d'angle alterne-interne . . . 2561
8.50 Principe d'utilisation des angles alterne-interne par Ératosthène . . . 2562
8.51 Résumé des types d'angles . . . 2564
8.52 Angle orienté positif ou nul . . . 2566
8.53 Angle orienté négatif ou nul . . . 2567
8.54 Angle interne + externe . . . 2567
8.55 Définition géométrique du radian . . . 2570
8.56 Degrees-Radians conversions figure . . . 2571
8.57 Angles de triangle typiques utiles dans l'étude de la Statique . . . 2573
8.58 Somme des angles d'un triangle plan . . . 2575
8.59 Deux triangles ayant côté égal et deux angles égaux . . . 2576
8.60 Déplacement montrant l'égalité des 2 triangles . . . 2577
8.61 Première notation typique pour les triangles congruents . . . 2577
8.62 Deuxième notation typique pour les triangles congruents . . . 2577
8.63 Troisième notation typique pour les triangles congruents . . . 2578
8.64 Représentation de la médiatrice dans un triangle isocèle . . . 2578
8.65 Exemple de triangle équilatéral . . . 2582
8.66 Exemple de triangle rectangle . . . 2583
8.67 Une autre représentation bien connue du triangle rectangle . . . 2583
8.68 Exemple de triangle rectangle-isocèle . . . 2584
8.69 Classification des triangles plans . . . 2585
8.70 Bissectrices, médiane, médiatrice et hauteur dans un triangle . . . 2589
8.71 Théorème de Pythagore illustré . . . 2590
8.73 Première approche du théorème de Thalès . . . 2593
8.76 Cercle et Rayon . . . 2600
8.77 Cercle et Diamètre . . . 2601
8.79 Exemple de centroïde planaire . . . 2614
8.80 Type de transformations géométriques les plus courantes . . . 2620
8.81 Exemple d'homothétie de centre O . . . 2623
8.82 Homothétie avec cisaillement . . . 2625
8.83 Cisaillement selon l'axe x . . . 2625
8.84 Cisaillement selon l'axe y . . . 2626
8.85 Exemple de rotation dans le plan . . . 2627
8.86 Exemple de non commutativité de la matrice de rotation . . . 2631
8.87 Rotation vocabulary in aeronautic science . . . 2635
8.88 Convention de rotation des angles d'Euler . . . 2636
8.90 Axes de réflexion (auteur : Lauren K. Williams) . . . 2639
8.91 Réflexion par rapport à l'axe des Y . . . 2640
8.92 Réflexion par rapport à l'axe des X . . . 2641
8.93 Réflexion par rapport à l'origine . . . 2641
8.94 Résumé des transformations affines . . . 2642
8.95 Courbes positives (elliptiques), négatives (hyperboliques) et plates (euclidiennes) . . . 2643
8.96 Exemple illustré de la violation du 5ème postulat d'Euclide . . . 2644
8.97 Lunes sur une sphère . . . 2648
8.98 Illustration du problème pour la recherche de la géodésique . . . 2650

En cours de traduction de l'anglais

8.99 Représentation plan de la surface latérale d'un cylindre 2651
8.100 Cône visuel et cercle de projection correspondant 2662
8.101 Illustration de l'origine de la méthode du verre de Dürer 2663
8.102 Définition des plans et droites de la géométrie projective 2664
8.103 Exemple visuel de ce qu'est le "tableau" en géométrie projective 2665
8.109 Exemple d'un point de fuite unique 2683
8.110 Ombres divergentes dues à la perspective 2684
8.111 Exemple d'angle de fuite 2684
8.112 Exemple de points de fuite secondaires 2686
8.113 Perspectives différentes basées sur les valeurs des constantes 2687
8.114 Problème de perspective des colonnes alignées 2688
8.115 Perspectives à 1, 2 et 3 points de fuite générées par Adobe Illustrator 2690
8.116 Angles isométriques 2695
8.117 Volumes isométriques 2696
8.118 Plan isométrique pour trouver les dimensions du cube 2697
8.119 Plan isométrique pour trouver les dimensions de l'isocercle 2701
8.120 Projection orthogonale typique... 2703
8.122 Transformation canonique pour projection orthogonale 2705
8.123 Différentes projections sphériques et cylindriques 2708
8.124 Vue technique de diverses techniques de projections sphériques 2709
8.125 Diagramme de Schlegel en pseudo-perspective (projection stéréographique) . 2710
8.127 Projection stéréographique de la Terre 2712
8.128 Projection cylindrique de la Terre 2719
8.129 Projection de Mercator de la Terre 2720
8.130 Projection cartographique de Mercator avec les tailles et formes réelles des pays superposées 2720
8.131 Construction de la fonction de projection de Mercator 2721
8.132 Carte du monde de Mercator telle qu'elle apparaît en 11569 2723
8.133 Projection équivalente de Lambert (ou projection à aires égales de Lambert) . 2724
8.134 Projection de Lambert de la Terre 2726
8.135 Projection de Sansons ou Sanson-Flamsteed ou sinusoïdale 2727
8.136 Mollweide projection 2727
8.137 Projection de Hammer 2732
8.140 Organigramme non exhaustif des différentes méthodes de projection 2733
8.141 Quelques types de projections courants 2734
8.142 Résumé visual des sept lois de la perspective linéaire 2736
8.143 Effet de perspective de convergence de rails de chemin de fer 2737
8.146 Résumé des transformations de coordonnées homogènes 2740
8.148 Différentes intersections entre un cône et un plan 2750
8.149 Onde de choc qui traverse le sol 2750
8.150 Plot Maple 4.00b de l'obtention d'une parabole par l'intersection d'un cône et d'un plan 2751
8.151 Plot Maple 4.00b de l'obtention d'une hyperbole par l'intersection d'un cône et d'un plan 2752
8.152 Plot Maple 4.00b de l'obtention d'une ellipse par l'intersection d'un cône et d'un plan 2753
8.153 Plot Maple 4.00b de l'obtention d'un cercle par l'intersection d'un cône et d'un plan 2753

En cours de traduction de l'anglais

8.154 Définitions du foyer (F), de la directrice (D) conique et de l'excentricité (e) . 2754
8.155 Représentation des paramètres des coniques pour la parabole 2756
8.156 Parabole = ensemble de points équidistants de L et F 2756
8.157 Représentation des paramètres des coniques pour une ellipse 2760
8.158 Construction artisanale d'une ellipse 2762
8.159 Apogée et Perigée 2765
8.160 Représentation des paramètres de la conique pour l'hyperbole 2767
8.161 Sphères de Dandeline 2770
8.162 Représentation visuelle des matrices positives définies, positives semi-définies et indéfinies 2776
8.163 Exemple d'un plan dans Maple 4.00b 2779
8.164 Représentation de la recherche de la distance d'un point à une ligne 2784
8.165 Représentation d'un FG-squircle dans Maple 4.00 2788
8.166 Chemin épicycloïdal 2790
8.167 Croquis de l'épicycloïde pour la démonstration 2791
8.168 Spirale d'Archimède 2792
8.169 Spirale exponentielle en 2D et 3D du type $r_0 e^{bt}$ 2793
8.170 Chemin hypocycloïde 2793
8.172 Représentation d'un cône 2795
8.174 Représentation paramétrique d'un cône dans Maple 4.00b 2797
8.175 Représentation d'une sphère $\mathcal{S}^2$ 2798
8.177 Représentation paramétrique d'une sphère dans Maple 4.00b 2800
8.178 Un grand cercle divise la sphère en deux hémisphères égaux 2800
8.179 Représentation d'un ellipsoïde 2806
8.181 Représentation paramétrique d'un ellipsoïde dans Maple 4.00b 2807
8.182 Sphéroïde oblate (à gauche), sphéroïde prolate (à droite) 2808
8.184 Représentation paramétrique d'un cylindre dans Maple 4.00b 2810
8.186 Représentation paramétrique d'un paraboloïde dans Maple 4.00b 2812
8.188 Surface des règles hyperboliques 2815
8.189 Surface des cercles hyperboliques 2815
8.190 Représentation paramétrique d'un hyperboloïde dans Maple 4.00b 2816
8.191 Deux hyperboloïdes (d'une feuille et de deux feuilles) qui sont asymptotiques à un cône elliptique identique 2817
8.192 Surfaces coniques courantes 2819
8.193 Représentation paramétrique d'un tore dans Maple 4.00b 2821
8.194 Courbe paramétrique et surface paramétrique 2823
8.195 Représentation paramétrique d'une hélice avec Maple 4.00b 2828
8.198 Tracé des isoclines dans MATLAB™ 5.0.0.473 2830
8.199 Projection of the isoclines in MATLAB™ 5.0.0.473 2831
8.200 Représentation plane des isoclines avec gradients colorés dans MATLAB™ 5.0.0.473 2831
8.202 Association isoclines projetées avec gradients de couleurs dans MATLAB™ 5.0.0.473 2832
8.205 Représentation d'un cercle osculateur 2839
8.206 Représentation du trièdre de Frenet 2841
8.211 Représentation d'une nappe paramétrée 2849
8.212 Exemple de polygone quelconque 2857
8.213 Exemple de polygone croisé 2858

En cours de traduction de l'anglais

8.214 Exemple de polygone concave 2859
8.215 Exemple de polygone convexe 2859
8.216 Exemple d'un polygone (pentagone avec 5 arêtes et 5 sommets) 2860
8.217 Pentagone avec tous ses 10 segments 2860
8.218 Exemple de segments partant d'un point choisi 2860
8.221 Certains polygones réguliers (sous-famille des polygones convexes) 2862
8.222 Exemple de rectangle 2863
8.223 Exemple de carré 2864
8.224 Exemple d'un triangle non spécifié avec un cercle inscrit et des bissectrices . 2865
8.225 Triangle quelconque décomposé en deux triangles rectangles 2865
8.226 Rappel de la construction pour la démonstration du théorème du cosinus . . . 2866
8.228 Exemple de triangle isocèle 2869
8.229 Triangle isocèle rectangle 2870
8.230 Exemple de triangle équilatéral 2871
8.231 Figure illustrative du théorème de Viviani 2873
8.232 Exemple d'un triangle rectangle 2874
8.233 Exemple de trapèze 2875
8.234 Hiérarchie des quadrilatères (y compris la classification des trapèzes) . . . 2876
8.235 Exemple de parallélogramme 2877
8.237 Une grille hexagonale régulière 2878
8.238 Télescope spatial James Webb 2879
8.239 Antenne réflectrice de diffusion TV 2879
8.240 Détails de l'hexagone régulier 2879
8.245 Exemple de losange 2884
8.246 Exemple de cercle 2885
8.247 Surface S_d d'une partie découpée d'un disque 2886
8.248 Exemple d'une ellipse avec ses foyers visibles et son excentricité e 2887
8.249 Éléments de surfaces $\mathrm{d}S$ en 2D 2892
8.250 Exemples de volumes délimités par une surface 2893
8.251 Vocabulaire des polyèdres 2894
8.252 Parallélépipède général 2895
8.253 Cube, cuboïde et rhomboèdre 2896
8.256 Exemple de pyramide (base irrégulière) mais non oblique 2901
8.257 Exemple de prisme droit 2903
8.258 Angles entre les arêtes d'un polyèdre régulier 2906
8.259 Polyèdres connus composés de 12 pentagones 2908
8.260 Exemple de tétraèdre régulier 2910
8.263 Exemple d'hexaèdre régulier (cube) 2912
8.264 Exemple d'octaèdre régulier vu ci-dessus 2913
8.265 Exemple d'octaèdre 2914
8.266 Recherche de la position du triangle équilatéral 2915
8.267 Construction de l'icosaèdre régulier 2916
8.268 Representation of the regular icosahedron 2917
8.269 Pentagones dans l'icosaèdre régulier 2918
8.270 Représentation d'une des pyramides de l'icosaèdre régulier 2918
8.271 Parallélogramme dans un pentagone 2920
8.272 Dodécaèdre régulier 2922
8.276 Exemple de cylindre 2929

En cours de traduction de l'anglais

8.277 Cône . . . 2933
8.278 Exemple de sphère . . . 2935
8.279 Grille sphérique . . . 2935
8.280 Calcul du volume de la sphère par décomposition en disques . . . 2936
8.281 Représentation d'un élément de surface en coordonnées sphériques . . . 2938
8.282 Tore . . . 2941
8.283 Ellipsoïde . . . 2946
8.284 Sphéroïde aplati à gauche, prolat à droite . . . 2946
8.285 Paraboloïde de révolution . . . 2951
8.286 Paraboloïde hyperbolique . . . 2951
8.287 Paraboloïde elliptique . . . 2951
8.288 Surfaces quadriques en un coup d'oeil . . . 2953
8.289 Trompette de Gabriel avec Maple 4.00b . . . 2954
8.292 Éléments surfaciques techniques et volumiques 2D et 3D dans différents systèmes de coordonnées . . . 2960
8.293 Vocabulaire de base des graphes . . . 2969
8.294 Graphs simples . . . 2970
8.295 Exemple de multigraphe . . . 2971
8.296 Exemple de graphes planaires . . . 2972
8.297 Graphique à 2 faces, 4 sommets et 4 noeuds . . . 2972
8.298 Arbre avec un bord et deux sommets . . . 2973
8.299 Graphique avec au moins un cycle . . . 2973
8.300 Polygones réguliers vus comme des graphes . . . 2974
8.301 Exemple de sous-ensembles de graphes . . . 2977
8.302 Quelques graphes 2-réguliers possibles . . . 2978
8.303 Exemples de sous-graphes et de graphes induits . . . 2979
8.305 Exemples de graphes complets . . . 2980
8.306 Étoile de David . . . 2981
8.307 Étoile de David sous forme de graphe complet . . . 2981
8.308 Exemple de sous-graphe stable . . . 2982
8.309 Exemple de chemin simple . . . 2982
8.310 Divers graphs connexes . . . 2984
8.311 Exemple d'arbre couvrant . . . 2985
8.312 Exemple d'un arbre couvrant minimum . . . 2985
8.313 Diagramme PERT (Program Evaluation Review Technique) . . . 2987
8.314 Même graphe mais vu dans Microsoft Project 97 . . . 2988
8.315 Exemples de graphes cycliques . . . 2988
8.316 Exemple d'un graphe connexe contenant un cycle . . . 2988
8.317 Exemple d'un graphe connexe ne contenant pas de cycle . . . 2989
8.318 Exemple d'une forêt (3 composantes connexes) . . . 2989
8.319 Exemple de graphes hamiltoniens ou non hamiltoniens . . . 2990
8.320 Carte antique de la ville de Königsberg . . . 2990
8.321 Représentation des sept ponts de Königsberg . . . 2991
8.322 Exemple de graphe complémentaire . . . 2993
8.323 Exemple de graphe auto-complémentaire . . . 2994
8.324 Exemple de graphe biparti $K_{3,3}$ . . . 2994
8.325 Graphes isomorphes avec leur matrice d'adjacence . . . 2995
8.326 Exemple de chaîne de Markov (graphe antiréflexif ni symétrique) . . . 2997

En cours de traduction de l'anglais

8.328 Exemple de graphe de catégorie . . . 3003
8.329 Tresse et chaîne (diagramme de noeud) correspondante . . . 3006
8.330 Présentation particulière d'une tresse . . . 3007
8.331 Exemple de problème de la représentation choisie . . . 3007
8.332 Autre choix de représentation . . . 3007
8.333 Premier exemple de tresse invariante . . . 3007
8.334 Deuxième exemple de tresse invariante . . . 3008
8.335 Translation de croisement et préservation triviale de l'invariance . . . 3008
8.336 Invariance par la longueur . . . 3008
8.337 Exemple de multiplication de deux tresses . . . 3008
8.338 Contrôle de l'associativité des tresses (par la multiplication) . . . 3009
8.339 Contrôle de la commutativité des tresses (par la multiplication) . . . 3009
8.340 Vérification de l'existence d'un élément neutre pour les tresses (par la multiplication) . . . 3009
8.341 Contrôle de l'existence d'éléments symétriques pour les tresses (par la multiplication) . . . 3010
8.342 Indexation des vrilles de tresses . . . 3010
8.343 Convention d'indexation . . . 3010
8.344 Exemple de piège d'indexation . . . 3010
8.345 Différence entre vrille et croisement . . . 3011
8.346 Tresse et chaîne (diagramme de noeud) correspondante . . . 3011
8.347 Exemple d'un noeud dans la vie réelle . . . 3012
8.348 Représentation d'un noeud par un mathématicien . . . 3012
8.349 Équivalence entre un noeud ouvert et un noeud fermé . . . 3012
8.350 2 perspectives différentes du noeud de trèfle . . . 3013
8.351 Traçage d'un noeud de trèfle . . . 3013
8.352 Même situation mais en fermant le noeud . . . 3013
8.354 Exemple d'une paire de Perko . . . 3014
8.355 Des nœuds qui ne sont qu'un lacet . . . 3015
8.356 Rappel de la définition de la multiplication de deux noeuds . . . 3015
8.357 Vérification de la commutativité de noeuds (par la multiplication) . . . 3016
8.358 Vérification de l'existence d'un élément neutre pour les noeuds (par la multiplication) . . . 3016
8.359 Vérification de la commutativité de noeuds (par la multiplication) . . . 3016
8.360 Vérification de l'existence d'un élément neutre pour les noeuds (par la multiplication) . . . 3016
8.362 Noeud de Conway . . . 3018
8.363 Exemple d'une succession de noeuds sur un noeud ouvert . . . 3021
8.364 Séparation du noeud . . . 3021
8.365 Classification de Tait . . . 3022
8.366 Noeud noué ? . . . 3024
8.368 Noeud trivial . . . 3025
8.369 Noeud de trèfle . . . 3025
8.370 Exemple de brin d'ARN ou d'ADN . . . 3026
8.371 Image miroir par inversion de croisements . . . 3028
8.372 Miroir du noeud de trèfle . . . 3028
8.373 Exemple d'application simpliste des mouvements Reidemeister . . . 3029
8.374 Isotopie de noeuds . . . 3030

En cours de traduction de l'anglais

8.375 Entrelacs à trois composantes connexes 3031
8.376 Exemple d'entrelacs associés 3031
8.377 Exemple de notation des démêlés 3032
8.378 Représentation d'un diagramme de noeud 3033

En cours de traduction de l' anglais

En cours de traduction de l’ anglais

Liste des tableaux

4.1 Méthodologie pour les dévelopements en Mathématique & Physique 49
4.2 Rappels des différents niveaux de Sources en Sciences 59

5.1 Table de vérité des valeurs 145
5.2 Table de vérité des valeurs explicites 145
5.3 Table de vérité des valeurs binaires 145
5.4 Table de vérité `OU` 146
5.5 Table de vérité `ET` 147
5.6 Table de vérité de l'implication 148
5.7 Table de vérité de l'équivalence logique 151
5.8 Récapitulatif des opérateurs 153
5.9 Table de vérité des opérateurs logiques principaux 153
5.10 Principes de base des lois de la logique déductive - Implications et équivalences courantes 155
5.11 Combinaison de variables propositionnelles 156
5.12 Consistance, complétude et décidabilité des systèmes axiomatiques courants 193
5.13 Symboles communs dans la logique classique et la théorie de la démonstration 198
5.14 Règles d'inférence et erreurs les plus connues de la logique classique 199
5.15 Alphabet Grec 280
5.16 Types d'intervalles et de bornes tels que notés en Suisse 281
5.17 Types d'intervalles et de bornes tels que notés selon les normes 282
5.18 Relation binaires 291
5.19 Lois et leurs propriétés dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ 417
5.20 Lois et leurs propriétés dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ 419
5.21 Lois et leurs propriétés dans l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ 421
5.22 Résumé des structures algébriques les plus courantes 433
5.23 Quelques valeurs de probabilités (et estimations) connues 473
5.24 Cas classiques de probabilités 480
5.25 Résumé des cas possibles 525
5.26 Identification de la médiane 543
5.27 Identification de la classe médiane et du mode 547
5.28 Identification de la médiale 553
5.32 Exemple de Moyennes Marginales 567
5.34 Jugements qualitatifs du C.V. communément acceptés 579
5.35 Quartet d'Anscombe 600
5.36 Résumé du quartet statistique de Anscombe 601
5.37 Critères de corrélation-cause de Bradford Hill 608
5.38 Interprétation pour accord inter-évaluateur kappa ou ICC 620
5.39 Niveau de qualité Sigma avec taux de défection/non-défection 691
5.42 Probabilité d'apparition d'un chiffre selon la loi de Benford 790

En cours de traduction de l'anglais

5.43 Résumé des distributions discrètes les plus courantes . . . 803
5.44 Résumé des distributions continues les plus courantes . . . 803
5.45 Taille de l'échantillon d'enquête à une question avec facteur fpc . . . 860
5.47 Interprétations du Facteur de Bayes . . . 896
5.48 Intervalles à la moyenne typiques de Chebyshev . . . 903
5.49 Structure typique dite "croisée" d'une analyse de la variance à un facteur . . . 984
5.50 Terminologie et paramètres traditionnels d'un Tableau ANOVA (TAV) à un facteur . . . 995
5.59 Structure typique dite "croisée" d'une analyse de la variance à 2 facteurs sans répétition . . . 1017
5.60 Terminologie et paramètres traditionnels d'un Tableau ANOVA (TAV) à deux facteurs sans répétitions . . . 1021
5.61 Structure typique croisée d'une analyse de la variance à 2 facteurs avec répétition . . . 1023
5.62 Terminologie et paramètres traditionnels d'un Tableau ANOVA (TAV) à deux facteurs avec répétition . . . 1028
5.63 Illustration d'une ANOVA hiérarchique . . . 1045
5.64 Table de l'ANOVA à facteurs (aléatoires) hiérarchiques . . . 1049
5.65 Table de l'ANOVA à facteurs fixes hiérarchiques . . . 1049
5.67 Table de l'ANOVA à un facteur bloqué . . . 1052
5.68 Célèbre plan carré latin pour le modèle propulseur de Douglas C.Montgomery 1053
5.69 Table de l'ANOVA carré latin . . . 1057
5.70 Carré Gréco-Latin d'ordre 4 . . . 1059
5.71 Tableau de l'ANOVA Gréco-Latin . . . 1066
5.72 Quelques tests / statistiques paramétriques et leur équivalent non paramétrique 1135
5.83 Tableau d'exemple pour le test de Kruskal-Wallis . . . 1170
5.84 Tableau d'exemple des mesures pour le test de Friedman . . . 1171
5.85 Tests non-paramétriques flexibles & robustes communs pour données numériques (auteur : Adrian Olszewski) . . . 1174
5.86 Valeurs tabuleés de la constante de Hartley $d_2(n)$ . . . 1186
5.87 Valeurs tabulées de la constante $d_3(n)$ . . . 1187
5.88 Représentation-type d'un tableau A.C.P. . . . 1195
5.90 Tableau de contingences (tableau croisé) de l'A.F.C. . . . 1214
5.91 Tableau des fréquences conjointes de l'A.F.C . . . 1214
5.92 Transformation du tableau de contingences en pourcents . . . 1215
5.95 Tableau de contingences pour l'analyse du χ^2 . . . 1220
5.96 Tableau de contingences avec effectifs théoriques pour l'analyse du χ^2 . . . 1220
5.102 Interprétations coefficient φ de Pearson . . . 1233
5.109 κ_C Interprétations d'usage . . . 1244
5.111 Table d'interprétation de l'utilisation du Q de Yule . . . 1248
5.115 Table de contingence typique 2×2 pour le test CMH . . . 1264
5.121 Relations communes d'erreurs absolues et relatives . . . 1296

6.1 Tableau de résolution des inégalités . . . 1342
6.2 Table augmentée pour la résolution des inégalités . . . 1342
6.3 Tableau en surbrillance pour la résolution des inégalités . . . 1342
6.4 Comportement limite des polynômes . . . 1353
6.5 Liste de quelques polynômes de Laguerre . . . 1388

En cours de traduction de l'anglais

6.6 Liste de quelques polynômes de Laguerre associés . . . 1392
6.7 Polynômes les plus courants . . . 1397
6.8 Symétries du groupe diédral d'ordre 3 . . . 1413
6.9 Compositions de transformations du tétraèdre . . . 1414
6.10 Dérivées les plus communes . . . 1472
6.11 Primitives les plus communes . . . 1538
6.12 Certaines des équations différentielles les plus célèbres . . . 1582
6.13 Solutions types de l'E.H. de l' L'E.D.L. à coefficients constants . . . 1593
6.14 Liste des comportements typiques dans les systèmes planaires . . . 1620
6.15 Nombres de Bernoulli . . . 1651
6.16 Séries de Maclaurin les plus courantes . . . 1693
6.17 Résumé des opérateurs différentiels vectoriels . . . 1894
6.18 Inversions et permutations d'un déterminant d'ordre 2 . . . 1941
6.19 Inversions et permutations d'un déterminant d'ordre 3 . . . 1941
6.20 Factorisations matricielles . . . 2006

7.1 Exemple de transformation d'un tableau croisé large en tableau format long (ie tableau plat) . . . 2147
7.3 Terminologie concernant les fonctions . . . 2189
7.4 Un résumé de quelques fonctions simples de niveau collège . . . 2199
7.5 Limites les plus communes . . . 2243
7.6 Propriétés du logarithme en base a . . . 2260
7.7 Résumé des propriétés les plus connues des transformées de Fourier . . . 2294
7.8 Transformées de Fourier les plus courantes . . . 2300
7.9 Résumé des propriétés les plus connues des transformées de Laplace . . . 2326
7.10 Transformées de Laplace usuelles . . . 2334
7.11 Transformées en $\mathcal{Z}$ les plus communes . . . 2351

8.1 Fonctions trigonométriques paires et impaires . . . 2498
8.2 Quelques identités d'angles et tableau des valeurs trigonométriques associées conventionnelles . . . 2499
8.3 Objets, représentations et dimensions correspondantes . . . 2538
8.4 Quelques valeurs d'excentricités elliptique . . . 2760
8.5 Les cinq polyèdres réguliers (solides de Platon) . . . 2905

24.1 Lettres grecques . . . 3330

En cours de traduction de l'anglais

En cours de traduction de l' anglais

List of Algorithms

1 Algorithme en pseudo-code du PGCM 346

2 Inversion matricielle à l'aide de la méthode des déterminants et des cofacteurs . 1959

3 Méthode d'orthoganalisation de Gram-Schmidt 2037

En cours de traduction de l'anglais

En cours de traduction de l' anglais

Bibliographie

Puisque cet ouvrage se veut être une référence, nous avons choisi d'exclure quand cela était possible toute référence externe dans les textes. Nous avons donc simplement rassemblé ici une liste bibliographique finale en fonction d'un classement d'utilisation et sans prétendre à son exhaustivité.

Les livres et documents en anglais, français et allemand listés ci-dessous sont ce que nous considérons comme les meilleures références (excluant ainsi les PDF gratuits) qui ont été consultées pour la préparation de ce livre et à qui nous devons de nombreux emprunts de haute qualité. Leur lecture peut être aussi profitable pour tous ceux qui souhaitent améliorer, approfondir et élargir leur spectre de connaissances.

De nombreuses références, cependant, ne sont plus disponibles sur le marché et il est également nécessaire que le lecteur se souvienne que chaque entrée dans la bibliographie ci-dessous fait elle-même référence à des dizaines d'autres références, il est ainsi impossible d'avoir une liste exhaustive et objective (sans tomber sur un cercle vicieux...) de tous les livres de haute qualité existant dans les domaines couverts par *Opera Magistris*.

Le lecteur notera que comme pour tout le reste de cet ouvrage, les années d'édition (publication) sont données sur la base du calendrier scientifique Holocène et non sur la base d'un des nombreux calendriers religieux existant dans la monde basé sur des contes et légendes et ce pour des raisons évidentes...

Et donc voici la bibliographie :

[1] Thomas ADAM et al. "Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam". In : *Journal of High Energy Physics* 2012.10 (12012), p. 1-37. DOI : 10.48550/arXiv.1109.4897.

[2] Fred C. ADAMS. "The degree of fine-tuning in our universe—and others". In : *Physics reports* 807 (12019), p. 1-111. DOI : 10.17713/ajs.v43i4.46.

[3] Peter AR ADE et al. "Improved constraints on primordial gravitational waves using Planck, WMAP, and BICEP/Keck observations through the 2018 observing season".

En cours de traduction de l'anglais

In : *Physical review letters* 127.15 (12021), p. 151301. DOI : 10.48550/arXiv.2110.00483.

[4] B. AEBISCHER. *Géometrie - Géometrie affine, géometrie euclidienne & introduction à la géometrie projective*. Vuibert, 12011. ISBN : 9782311002768.

[5] O AKYILMAZ et al. “High resolution gravity field determination and monitoring of regional mass variations using low-earth orbit satellites”. In : *ICGEM, GFZ Data Services*. 12016.

[6] Einstein ALBERT, W PERRETT et G JEFFERY. “The foundation of the general theory of relativity”. In : *Annalen der Physik* 354.7 (11916), p. 769. DOI : 10.1002/andp.19163540702.

[7] Marcelo ALONSO et Edward J. FINN. “Physique Générale”. In : 1 (11970).

[8] Pavan Kumar ALURI et al. “Is the observable Universe consistent with the cosmological principle ?” In : *Classical and Quantum Gravity* 40.9 (12023), p. 094001.

[9] Yakov AMIHUD. “Illiquidity and stock returns : cross-section and time-series effects”. In : *Journal of financial markets* 5.1 (12002), p. 31-56.

[10] J ANTONIADIS et al. “The second data release from the European Pulsar Timing Array - IV. Implications for massive Black Holes, Dark Matter, and the Early Universe”. In : *Astronomy & Astrophysics* 678 (12023), A50.

[11] Ebby K ANYAMBA et Joel SUSSKIND. “Evidence of lunar phase influence on global surface air temperature”. In : *Geophysical research letters* 27.18 (12000), p. 2969-2972.

[12] T. ARENS et al. *Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 12015. ISBN : 9783642449192.

[13] G.B. ARFKEN, H.J. WEBER et F.E. HARRIS. *Mathematical Methods for Physicists : A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 12013. ISBN : 9780123846549.

[14] Constantin W ARNSCHEIDT, Robin D WORDSWORTH et Feng DING. “Atmospheric evolution on low-gravity waterworlds”. In : *The Astrophysical Journal* 881.1 (12019), p. 60.

[15] P.W. ATKINS et R.S. FRIEDMAN. *Molecular Quantum Mechanics*. OUP Oxford, 12011. ISBN : 9780199541423.

[16] Julien AUBERT, Stéphane LABROSSE et Charles POITOU. “Modelling the palaeo-evolution of the geodynamo”. In : *Geophysical Journal International* 179.3 (12009), p. 1414-1428.

[17] Quentin AUBOURG. “Étude expérimentale de la turbulence d’ondes à la surface d’un fluide. La théorie de la turbulence faible à l’épreuve de la réalité pour les ondes de capillarité et gravité”. Thèse de doct. Oct. 12016.

[18] Robert AXELROD. “More effective choice in the prisoner’s dilemma”. In : *Journal of conflict resolution* 24.3 (11980), p. 379-403. DOI : 10.1177/002200278002400301.

[19] Robert AXELROD et William D HAMILTON. “The evolution of cooperation”. In : *science* 211.4489 (1981), p. 1390-1396. DOI : 10.1126/science.7466396.

[20] F.J. AYALA et C.J.C. CONDE. *Processes in Human Evolution : The Journey from Early Hominins to Neanderthals and Modern Humans*. Processes in Human Evolution : The Journey from Early Hominins to Neanderthals and Modern Humans. Oxford University Press, 12017. ISBN : 9780198739906.

En cours de traduction de l'anglais

[21] Yves AYANT et Elie BELORIZKY. *Cours de mécanique quantique : avec 87 exercices corrigés :[2e cycle, écoles d'ingénieurs] :[avec exercices et problèmes résolus]*. Dunod, 12000. ISBN : 2100047426.

[22] Louis BACHELIER. *Théorie de la spéculation*. Gauthier-Villars, 11900. DOI : 10.24033/asens.476.

[23] D.W. BALL. *Physical Chemistry*. Cengage Learning, 12014. ISBN : 9781285969770.

[24] Martin BALSER et Charles A WAGNER. "Observations of Earth–ionosphere cavity resonances". In : *Nature* 188.4751 (11960), p. 638-641. DOI : 10.1038/188638a0.

[25] S. BANDYOPADHYAY et M. CAHAY. *Introduction to Spintronics*. CRC Press, 12008. ISBN : 9781420004748.

[26] E. BARENDS et D.M. ROUSSEAU. *Evidence-Based Management : How to Use Evidence to Make Better Organizational Decisions*. Kogan Page, 12018. ISBN : 9780749483753.

[27] D. BARIL. *Tout ce que la science sait de la religion*. PUL Diffusion, 12018. ISBN : 9782763736167.

[28] Benjamin C. BARTLETT et David J. STEVENSON. "Analysis of a Precambrian resonance-stabilized day length". In : *Geophysical Research Letters* 43.11 (12016), p. 5716-5724. DOI : 10.1002/2016GL068912.

[29] Issa BASS. *Six Sigma statistics with Excel and Minitab*. T. 1. McGraw-Hill, 12007. ISBN : 9780071489690.

[30] Albert E. BEATON et John W. TUKEY. "The Fitting of Power Series, Meaning Polynomials, Illustrated on Band-Spectroscopic Data". In : *Technometrics* 16.2 (11974), p. 147-185. DOI : 10.1080/00401706.1974.10489171.

[31] Jacob D. BEKENSTEIN. "Black Holes and Entropy". In : *Phys. Rev. D* 7 (8 11973), p. 2333-2346. DOI : 10.1103/PhysRevD.7.2333.

[32] I. BELLO. *Vacuum and Ultravacuum : Physics and Technology*. CRC Press, 12018. ISBN : 9781498782043.

[33] Jacqueline BELLONI. "The role of silver clusters in photography". In : *Comptes Rendus Physique* 3.3 (12002), p. 381-390.

[34] Riadh BEN HAMOUDA. *Notions de Mécanique des Fluides : Cours et Exercices Corrigés*. Centre de Publication Universitaire, 12008. ISBN : 9789973374943.

[35] Herbert BENSON et al. "Study of the Therapeutic Effects of Intercessory Prayer (STEP) in cardiac bypass patients : a multicenter randomized trial of uncertainty and certainty of receiving intercessory prayer". In : *American heart journal* 151.4 (12006), p. 934-942.

[36] V.B. BERESTETSKII, L.P. PITAEVSKII et E.M. LIFSHITZ. *Quantum Electrodynamics*. Course of Theoretical Physics vol. 4. Elsevier Science, 12012. ISBN : 9780080503462.

[37] Robert W BERGSTROM et Allen C COGLEY. "Viscous boundary layers in rotating fluids driven by periodic flows". In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 33.7 (11976), p. 1234-1247.

[38] J. BERK et P. DEMARZO. *Corporate Finance : The Core*. Pearson Education, 12013. ISBN : 9780133145014.

[39] J. BI. *Sensory Discrimination Tests and Measurements : Sensometrics in Sensory Evaluation*. Wiley, 12015. ISBN : 9781118994788.

En cours de traduction de l'anglais

[40] I.I. Bigi et A.I. Sanda. *CP Violation*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge University Press, 12009. ISBN : 9781139478243.

[41] E.J. Billo. *Excel for Scientists and Engineers : Numerical Methods*. Wiley, 12007. ISBN : 9780470126707.

[42] K.G. Binmore. *Game Theory and the Social Contract : Playing fair*. Economic Learning and Social Evolution Series. MIT Press, 11994. ISBN : 9780262023634.

[43] H.J. Birx. *Encyclopedia of Anthropology*. A SAGE reference publication. SAGE Publications, 12006. ISBN : 9780761930297.

[44] Ann Merchant Boesgaard et Gary Steigman. “Big bang nucleosynthesis-Theories and observations”. In : *IN : Annual review of astronomy and astrophysics. Volume 23 (A86-14507 04-90). Palo Alto, CA, Annual Reviews, Inc., 1985, p. 319-378.* 23 (11985), p. 319-378. DOI : 10.1146/annurev.aa.23.090185.001535.

[45] Michael Bordag, Umar Mohideen et Vladimir M Mostepanenko. “New developments in the Casimir effect”. In : *Physics reports* 353.1-3 (12001), p. 1-205.

[46] Arvind Borde, Alan H. Guth et Alexander Vilenkin. “Inflationary spacetimes are not past-complete”. In : *arXiv preprint gr-qc/0110012* (12001).

[47] Lucien Borel. *Thermodynamique et Energétique*. Presses Polytechniques Romandes, premiére édition, 11984. ISBN : 2880740258.

[48] Sébastien Bossu et Philippe Henrotte. *An Introduction to Equity Derivatives : Theory and Practice*. T. 647. John Wiley & Sons, 12012. ISBN : 781119969037.

[49] J.C. Boughner et C. Rolian. *Developmental Approaches to Human Evolution*. Wiley, 12016. ISBN : 9781118524688.

[50] Jean-Louis Boursin. *Initiation à la théorie des jeux*. Montchrestien, 11998. ISBN : 9782707611062.

[51] Frank Bowman. *Introduction to Bessel functions*. Courier Corporation, 11958. ISBN : 9780486604626.

[52] S. Boyd et L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Berichte über verteilte messysteme. Cambridge University Press, 12004. ISBN : 9780521833783.

[53] R.B. Braithwaite. *Theory of Games as a Tool for the Moral Philosopher*. Cambridge University Press, 12009. ISBN : 9780521113519.

[54] G.C. Branco, L. Lavoura et J.P. Silva. *CP Violation*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 11999. ISBN : 9780198503996.

[55] CB Bratton et al. “Angular distribution of events from SN1987A”. In : *Physical Review D* 37.12 (1988), p. 3361. DOI : 10.1103/PhysRevD.37.3361.

[56] Benjamin Bray. “Expectation Maximization”. In : (2016).

[57] Giacomo Bressi et al. “Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces”. In : *Physical review letters* 88.4 (12002), p. 041804.

[58] Justyna Brzezińska et al. “Singular Value Decomposition Approaches in A Correspondence Analysis with The Use of R”. In : *Folia Oeconomica Stetinensia* 18.2 (12018), p. 178-189.

En cours de traduction de l'anglais

[59] E Buks et ML Roukes. "Stiction, adhesion energy, and the Casimir effect in micromechanical systems". In : *Physical Review B* 63.3 (12001), p. 033402.

[60] J. Burnet et al. *Greek Thought : A Guide to Classical Knowledge*. Harvard University Press reference library. Belknap Press of Harvard University Press, 12000. ISBN : 9780674002616.

[61] Nader Butto. "New Mechanism and Analytical Formula for Understanding the Gravity Constant G". In : *Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology* 6.3 (12020), p. 357-367. DOI : 10.4236/jhepgc.2020.63029.

[62] Randolph C Byrd et al. "Positive therapeutic effects of intercessory prayer in a coronary care unit population." In : (11988).

[63] Bernard Cagnac et Jean Claude Pebay-Peyroula. *Physique atomique : introduction à la physique quantique et structure de l'édifice atomique*. T. 2. Dunod, 11971.

[64] Robert F Cahalan, Paulino Ajiquichí et Gaspar Yatáz. "Solar Temperature Variations Computed from SORCE SIM Irradiances Observed During 2003–2020". In : *Solar Physics* 297.1 (12022), p. 1-37.

[65] Renzo Cairoli. *Algèbre linéaire*. PPUR presses polytechniques, 11991. ISBN : 9782880741877.

[66] NL Cates et SJ Mojzsis. "Pre-3750 Ma supracrustal rocks from the Nuvvuagittuq supracrustal belt, northern Québec". In : *Earth and Planetary Science Letters* 255.1-2 (2007), p. 9-21. DOI : 10.1016/j.epsl.2006.11.034.

[67] C.J. Cela-Conde et F.J. Ayala. *Human Evolution : Trails from the Past*. Oxford biology. OUP Oxford, 12007. ISBN : 9780191524431.

[68] Y.A. Çengel et J.M. Cimbala. *Fluid Mechanics : Fundamentals and Applications*. Cengel series in engineering thermal-fluid sciences. McGraw-Hill, 12010. ISBN : 9780071284219.

[69] Don M Chance. "A synthesis of binomial option pricing models for lognormally distributed assets". In : (12007).

[70] Alice Y Chen, Phil Halper et Niayesh Afshordi. "Copenhagen Survey on Black Holes and Fundamental Physics". In : *arXiv preprint arXiv :2503.15776* (12025). DOI : 10.48550/arXiv.2503.15776.

[71] Ulrich R Christensen et Julien Aubert. "Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields". In : *Geophysical Journal International* 166.1 (12006), p. 97-114.

[72] GD. Christian, P. Dsgupta et K. Schug. *Analytical Chemistry, 7th Edition*. Wiley Global Education, 12013. ISBN : 9780470887578.

[73] H.C. Co. "Confirmation testing of the Taguchi methods by artificial neural-networks simulation". In : *International Journal of Production Research* 46.17 (12008), p. 4671-4685.

[74] Robert Cobbaut. *Théorie financière*. 11987. ISBN : 9782717834420.

[75] Olivier Cogis et Claudine Robert. *Théorie des graphes : au-delà des ponts de Königsberg : problèmes, théorèmes, algorithmes*. Vuibert, 12003. ISBN : 2711753212.

En cours de traduction de l'anglais

[76] Rich F Coleman et Kuo-Nan Liou. “Light scattering by hexagonal ice crystals”. In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 38.6 (11981), p. 1260-1271. DOI : 10.1016/j.jqsrt.2016.02.023.

[77] J.J. Condon et S.M. Ransom. *Essential Radio Astronomy*. Princeton Series in Modern Observational Astronomy. Princeton University Press, 12016. ISBN : 9781400881161.

[78] Liam Connor et al. “A gas rich cosmic web revealed by partitioning the missing baryons”. In : *Nature astronomy* (12024). DOI : 10.1038/s41550-025-02566-y.

[79] Oliver Consa. “The Unpublished Feynman Diagram IIc”. In : *arXiv preprint arXiv :2010.10345* (12020).

[80] J.A. Cornell. *Experiments with Mixtures : Designs, Models, and the Analysis of Mixture Data*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 12011. ISBN : 9781118150498.

[81] C Richard Cothern et William L Lappenbusch. “Occurrence of uranium in drinking water in the US”. In : *Health physics* 45.1 (11983), p. 89-99.

[82] D.L. Couprie. *Heaven and Earth in Ancient Greek Cosmology : From Thales to Heraclides Ponticus*. Astrophysics and Space Science Library. Springer New York, 12011. ISBN : 9781441981165.

[83] John R Cronin et Sandra Pizzarello. “Amino acids in meteorites”. In : *Advances in space research* 3.9 (11983), p. 5-18. DOI : 10.1016/0273-1177(83)90036-4.

[84] J.F. Crow et M. Kimura. *An Introduction to Population Genetics Theory*. Blackburn Press, 12009. ISBN : 9781932846126.

[85] J.D. Cryer et K.S. Chan. *Time Series Analysis : With Applications in R*. Springer Texts in Statistics. Springer New York, 12008. ISBN : 9780387759593.

[86] Howard Curtis. *Orbital mechanics for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 12013. ISBN : 9780080977478.

[87] John D. Cutnell et Kenneth W. Johnson. *Physics*. NJ, John Wiley & Sons, Inc, 12021. ISBN : 9781119773610.

[88] Erik Dahl-Jensen. “The properties of photographic emulsions”. In : (11963).

[89] Paul E Damon et al. “Radiocarbon dating of the Shroud of Turin”. In : *Nature* 337.6208 (11989), p. 611-615. DOI : 10.1038/337611a0.

[90] H Vic Dannon. *Zero Point Energy : Planck Radiation Law*. 12005.

[91] Elise Darragh-Ford et al. “The Concentration–Mass relation of massive, dynamically relaxed galaxy clusters : agreement between observations and ΛCDM simulations”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 521.1 (12023), p. 790-799. DOI : 10.1093/mnras/stad585.

[92] C.J. Date. *Database Design and Relational Theory : Normal Forms and All That Jazz*. Apress, 12019. ISBN : 9781484255391.

[93] René David et al. *Introduction à la logique : théorie de la démonstration : cours et exercices corrigés*. Dunod, 12001. ISBN : 9782100048922.

[94] J Huw Davies et D Rhodri Davies. “Earth’s surface heat flux”. In : *Solid earth* 1.1 (2010), p. 5-24.

En cours de traduction de l'anglais

[95] Emmanuel DAVOUST. “Dating of a Latin astrolabe”. In : *arXiv preprint arXiv :2311.17966* (12023). DOI : 10.48550/arXiv.2311.17966.

[96] Alastair L. DAY. *Mastering Financial Modelling in Microsoft Excel : A practitioner’s guide to applied corporate finance*. Pearson Education, 12007. ISBN : 9780273708063.

[97] Jean-Marie DE KONINCK et Armel MERCIER. *Introduction à la théorie des nombres*. Modulo, 11994. ISBN : 9782891135009.

[98] Jean-Loup DELCROIX et Abraham BERS. *Physique des plasmas, Tome 1*. 11994. ISBN : 9782759802876.

[99] E. DELSON, I. TATTERSALL et J.A. VAN COUVERING. *Encyclopedia of Human Evolution and Prehistory*. Garland reference library of the humanities. Garland Pub., 12000. ISBN : 9780815316961.

[100] J.P. DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles*. Grenoble Sciences. EDP Sciences, 12012. ISBN : 9782759801121.

[101] Mark DENNY. “Calculation of the 22° halo”. In : *European Journal of Physics* 18 (11997), p. 432-435.

[102] Bipin R. DESAI. *Quantum mechanics with basic field theory*. Cambridge University Press, 12009. ISBN : 9780521877602.

[103] J.W. DETTMAN. *Applied Complex Variables*. A Series of advanced mathematics texts. Macmillan, 11965. ISBN : 9780486646701.

[104] Eleonora DI VALENTINO et al. “In the Realm of the Hubble tension - a Review of Solutions”. In : *arXiv preprint arXiv :2103.01183* (12021).

[105] René DIDIER et Pierre GRÉCIAS. *Chimie générale*. Technique & documentation-Lavoisier, 11997. ISBN : 9782852062559.

[106] Ken DILL et Sarina BROMBERG. *Molecular driving forces : statistical thermodynamics in biology, chemistry, physics, and nanoscience*. Garland Science, 12010. ISBN : 9780815344308.

[107] R. D’INVERNO. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 11992. ISBN : 9780198596868.

[108] Bernard DIU et al. *Eléments de physique statistique*. Hermann, 11989. ISBN : 9782705660659.

[109] Inc DK PUBLISHING. *Ultimate Visual Dictionary of Science*. Ultimate Visual Dictionary. DK Pub., 11998. ISBN : 9780789435125.

[110] Chuong B DO et Serafim BATZOGLOU. “What is the expectation maximization algorithm ?” In : *Nature biotechnology* 26.8 (12008), p. 897-899. DOI : 10.1038/nbt1406.

[111] Matthew S DODD et al. “Evidence for early life in Earth’s oldest hydrothermal vent precipitates”. In : *Nature* 543.7643 (12017), p. 60-64. DOI : 10.1038/nature21377.

[112] Jacques DOUCHET et Bruno ZWAHLEN. *Calcul différentiel et intégral 3. Fonctions réelles d’une variable réelle : exercices résolus*. Presses Polytechniques Romandes, 11987.

[113] Jacques DOUCHET et Bruno ZWAHLEN. *Calcul différentiel et intégral : fonctions réelles d’une ou de plusieurs variables réelles*. PPUR presses polytechniques, 12006. ISBN : 9782889155668.

En cours de traduction de l’anglais

[114] John W DRAKE et al. "Rates of spontaneous mutation". In : *Genetics* 148.4 (11998), p. 1667-1686.

[115] Dean G. DUFFY. *Advanced engineering mathematics with MATLAB*. CRC Press, 12010. ISBN : 9781584883494.

[116] Georges DUVAUT. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 11998. ISBN : 9782100039326.

[117] C.W. LeSage D.W. THORMAS C.S. Barrett. *SQC Western Electric Union*. Western Electric Co., Inc., 11956.

[118] R.M. EISBERG et R. RESNICK. *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles. Wiley, 11985. ISBN : 9780471873730.

[119] Joseph G. EISENHAUER. "Regression through the origin". In : *Teaching statistics* 25.3 (12003), p. 76-80. DOI : 10.1111/1467-9639.00136.

[120] Edgard ELBAZ et Mario NOVELLO. *Cosmologie*. Ellipse, 11992. ISBN : 9782729892111.

[121] Roland v. EÖTVÖS, Desiderius PEKÁR et Eugen FEKETE. "Beiträge zum gesetze der proportionalität von trägheit und gravität". In : *Annalen der Physik* 373.9 (11922), p. 11-66. DOI : 10.1002/andp.19223730903.

[122] A.O.E.R.T. EQUITY. *College Physics Textbook Equity Edition Volume 1 of 3 : Chapters 1 - 12*. LULU Press, 12014. ISBN : 9781304803214.

[123] A.O.E.R.T. EQUITY. *College Physics Textbook Equity Edition Volume 2 of 3 : Chapters 13 - 24*. LULU Press, 12014. ISBN : 9781304784568.

[124] A.O.E.R.T. EQUITY. *College Physics Textbook Equity Edition Volume 3 of 3 : Chapters 25 - 34*. LULU Press, 12014. ISBN : 9781304804266.

[125] Johannes R ESKILT et al. "Cosmic topology. Part IIa. Eigenmodes, correlation matrices, and detectability of orientable Euclidean manifolds". In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2024.03 (12024), p. 036. DOI : 10.48550/arXiv.2306.17112.

[126] CW Francis EVERITT et al. "Gravity probe B : final results of a space experiment to test general relativity". In : *Physical Review Letters* 106.22 (12011), p. 221101. DOI : 10.1103/PhysRevLett.106.221101.

[127] Vitaly FEDOSEEV et al. "Coherent and Incoherent Light Scattering by Single-Atom Wave Packets". In : *Physical Review Letters* 135.4 (12025), p. 043601. DOI : 10.1103/zwhd/1k2t.

[128] E.D. FEIGELSON et G.J. BABU. *Modern Statistical Methods for Astronomy : With R Applications*. Cambridge University Press, 12012. ISBN : 9780521767279.

[129] Rechnitzer A FELDMAN J et Yeager E. *CLP 1 Differential Calculus*. 12022.

[130] Rechnitzer A FELDMAN J et Yeager E. *CLP 2 Integral Calculus*. 12022.

[131] Peter FELLGETT. "Equivalent quantum-efficiencies of photographic emulsions". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 118.3 (11958), p. 224-233.

[132] Daniel FELS, Michel CIFRA et F SCHOLKMANN. "Fields of the Cell". In : *Research Signpost, Trivandrum, India* (12015). DOI : 10.13140/RG.2.1.1029.7044.

En cours de traduction de l'anglais

[133] Andrea FERROGLIA et Miguel CN FIOLHAIS. “Tidal locking and the gravitational fold catastrophe”. In : *American Journal of Physics* 88.12 (12020), p. 1059-1067.

[134] Martin FERUS et al. “Formation of nucleobases in a Miller–Urey reducing atmosphere”. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 114.17 (12017), p. 4306-4311. DOI : 10.1073/pnas.1700010114.

[135] MP FEWELL. “The atomic nuclide with the highest mean binding energy”. In : *American Journal of Physics* 63.7 (1995), p. 653-658.

[136] Ferdinánd FILIP. “An elementary proof that almost all real numbers are normal”. In : *Acta Universitatis Sapientiae. Mathematica* 2.1 (12010), p. 99-110.

[137] M. FITTING et R.L. MENDELSOHN. *First-Order Modal Logic*. Synthese Library. Springer International Publishing, 12023. ISBN : 9783031407147. DOI : 10.1007/978-3-031-40714-7.

[138] R. FITZPATRICK. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge University Press, 12012. ISBN : 9781107023819.

[139] R. FITZPATRICK. *Quantum Mechanics*. World Scientific Publishing Company, 12015. ISBN : 9789814696005.

[140] Tristan FLETCHER. “Support vector machines explained”. In : *Tutorial paper., Mar* (12009), p. 28.

[141] M FORTE et al. “Validation of a method for measuring 226Ra in drinking waters by LSC”. In : *Applied Radiation and Isotopes* 103 (12015), p. 143-150.

[142] J.B.J FOURIER. *The Analytical Theory of Heat*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 11878. ISBN : 9780486495316.

[143] A. FRAKNOI et al. *Astronomy*. Open Textbook Library. OpenStax College, 12016. ISBN : 9781938168284.

[144] David LJ FREED. “Doctors are not scientists but we still need science”. In : *Bmj* 329.7460 (12004), p. 294.

[145] David A. FREEDMAN. “A note on screening regression equations”. In : *the american statistician* 37.2 (11983), p. 152-155.

[146] V FRENKEL et AA GRIB. “Einstein, Friedmann, Lemaitre : Discovery of the Big Bang”. In : *Proceed. of the Second Alexander Friedmann Intern Sem. on Gravitation and Cosmology. Ed. Yu. Gnedin, A. Grib, V. Mostepanenko. Friedmann Lab Publ. St. Petersburg* (11994).

[147] Alexander FRIEDMAN. “Über die krümmung des raumes”. In : *Zeitschrift für Physik* 10.1 (11922), p. 377-386.

[148] Harald FRITZSCH. “Fundamental constants at high energy”. In : *100 Years Werner Heisenberg : Works and Impact* (12002), p. 89-95.

[149] RH GARSTANG. “Night sky brightness at observatories and sites”. In : *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 101.637 (11989), p. 306. DOI : 10.1086/132436.

[150] Paul R GARVEY et Zachary F LANSDOWNE. “Risk matrix : an approach for identifying, assessing, and ranking program risks”. In : *Air Force Journal of Logistics* 22.1 (11998), p. 18-21.

En cours de traduction de l’anglais

[151] D. GAUTHIER. *Morals by Agreement*. Clarendon Press, 1987. ISBN : 9780191520143.

[152] Ilse GENOVESE. "Definitions of Surveying and Associated Terms". In : American Congress on Surveying et Mapping. 12005.

[153] Christian GENTILI. *Guide de localisation des astres*. EDP sciences, 12012. ISBN : 2759800598.

[154] Vincent GIARD. *Gestion de la production : calcul Économique*. Economica, 11981. ISBN : 2759800598.

[155] Vincent GIARD. *Statistiques descriptives pour les gestionnaires*. Economica, 11995. ISBN : 2717815279.

[156] K. + R. GIECK. *Formulaire Technique Gieck*. Gieck, 11997. ISBN : 9782100035908.

[157] E.O. GÖBEL et U. SIEGNER. *The New International System of Units (SI) : Quantum Metrology and Quantum Standards*. Wiley, 12019. ISBN : 9783527814497.

[158] Mark GOCKENBACH et Kristin SCHMIDTKE. "Newton's law of heating and the heat equation". In : *Involve, a Journal of Mathematics* 2.4 (12009), p. 419-437.

[159] Ignacio GONZALEZ. "Analyse Canonique Régularisée pour des données fortement multidimensionnelles". Thèse de doct. Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 12007.

[160] K. GOPALAN. *Principles of Radiometric Dating*. Cambridge University Press, 12017. ISBN : 9781107198739.

[161] D.S. GORBUNOV et V.A. RUBAKOV. *Introduction to the Theory of the Early Universe : Hot Big Bang Theory*. World Scientific, 12011. ISBN : 9789814343978.

[162] F GOTTSCHE et Folke OLESEN. "A Simple Physically based Model of Diurnal Cycles of Land Surface Temperature". In : *Proceedings of EUMETSAT Meteorological Satellite Conference Bath, United Kingdom*. 12009, p. 21-25.

[163] Frank-M GÖTTSCHE et Folke S OLESEN. "Modelling of diurnal cycles of brightness temperature extracted from METEOSAT data". In : *Remote Sensing of Environment* 76.3 (12001), p. 337-348.

[164] J. GOUPY. *Pratiquer les plans d'expériences*. Dunod, 12005. ISBN : 9782100042173.

[165] F. GOUTHIÈRE. *Santé, science, doit-on tout gober ?* Humensis, 12017. ISBN : 9782410009323.

[166] Sander GREENLAND et al. "Statistical tests, P values, confidence intervals, and power : a guide to misinterpretations". In : *European journal of epidemiology* 31.4 (12016), p. 337-350. DOI : 10.1007/s10654-016-0149-3.

[167] D.A. GROSSMAN et O. FRIEDER. *Information Retrieval : Algorithms and Heuristics*. Kluwer international series on information retrieval. Springer, 2004. ISBN : 9781402030048.

[168] Rainer GRÜN et Christopher B STRINGER. "Electron spin resonance dating and the evolution of modern humans". In : *Archaeometry* 33.2 (11991), p. 153-199. DOI : 10.1111/j.1475-4754.1991.tb00696.x.

[169] B.C. GUPTA. *Statistical Quality Control : Using MINITAB, R, JMP and Python*. Wiley, 12021. ISBN : 9781119671633.

En cours de traduction de l'anglais

[170] Ernst HAIRER et Gerhard WANNER. *L'analyse au fil de l'histoire*. T. 10. Springer Science & Business Media, 12001. ISBN : 9783540674634.

[171] Thomas C HALES. "A proof of the Kepler conjecture". In : *Annals of mathematics* 162.3 (12005), p. 1065-1185.

[172] David HALLIDAY et al. *Electricité et magnétisme*. Editions du Renouveau Pédagogique, 11979.

[173] Paul Richard HALMOS. "Introduction à la théorie des ensembles". In : (11970).

[174] J.D. HAMILTON. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 12020. ISBN : 9780691218632.

[175] M. HAMILTON. *Population Genetics*. Wiley, 12011. ISBN : 9781444362459.

[176] D HANSON et al. "Detection of B-Mode Polarization in the Cosmic Microwave Background< ? format ?> with Data from the South Pole Telescope". In : *Physical review letters* 111.14 (12013), p. 141301. DOI : 10.48550/arXiv.1307.5830.

[177] Walter HANTZSCHE et Hilmar WENDT. "Dreidimensionale euklidische raumformen". In : *Mathematische Annalen* 110.1 (11935), p. 593-611. DOI : 10.1007/BF01448045.

[178] A.R. HARISH et M. SACHIDANANDA. *Antennas and Wave Propagation*. Oxford higher education. Oxford University Press, 12007. ISBN : 9780195686661.

[179] Elizabeth HARMAN. *The Irrelevance of Moral Uncertainty*. Oxford Studies in Metaethics, Volume 10 vol. 10. Oxford University Press, 12015. ISBN : 9780198738695. DOI : 10.1093/acprof:oso/9780198738695.003.0003.

[180] F.E. HARRELL. *Regression Modeling Strategies : With Applications to Linear Models, Logistic Regression, and Survival Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 12001. ISBN : 9780387952321.

[181] Frank E HARRELL et al. "Evaluating the yield of medical tests". In : *Jama* 247.18 (11982), p. 2543-2546. DOI : 10.1001/jama.1982.03320430047030.

[182] ER HARRISON. "Olbers' paradox". In : *Nature* 204.4955 (11964), p. 271-272. DOI : 10.1038/204271b0.

[183] Susumu HATTORI et al. "Orientation of high-resolution satellite images based on affine projection". In : *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing* 33.B3/1 ; PART 3 (12000), p. 359-366.

[184] D. HAWKINS. *Identification of Outliers*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Springer Netherlands, 12013. ISBN : 9789401539944.

[185] Dongshan HE, Dongfeng GAO et Qing-yu CAI. "Spontaneous creation of the universe from nothing". In : *Physical Review D* 89.8 (12014), p. 083510. DOI : 10.1103/PhysRevD.89.083518.

[186] E. HECHT. *Optics, Global Edition*. Pearson Education Limited, 12016. ISBN : 9781292096964.

[187] E. HECHT. *Physique*. De Boeck Supérieur, 11999. ISBN : 9782744500183.

[188] Giselmar AJ HEMMERT et al. "Log-likelihood-based pseudo-R 2 in logistic regression : deriving sample-sensitive benchmarks". In : *Sociological Methods & Research* 47.3 (12018), p. 507-531. DOI : 10.1177/0049124116638107.

En cours de traduction de l'anglais

[189] W. HENKE, T. HARDT et I. TATTERSALL. *Handbook of Paleoanthropology : Vol I :Principles, Methods and Approaches Vol II :Primate Evolution and Human Origins Vol III :Phylogeny of Hominids*. Handbook of Paleoanthropology. Springer Berlin Heidelberg, 12007. ISBN : 9783540324744.

[190] Bas HENSEN et al. "Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres". In : *Nature* 526.7575 (12015), p. 682-686.

[191] Herbert W HETHCOTE. "The mathematics of infectious diseases". In : *SIAM review* 42.4 (12000), p. 599-653.

[192] R.C. HIBBELER. *Engineering Mechanics : Statics and dynamics*. Engineering Mechanics. Prentice-Hall, 12010. ISBN : 9780138149291.

[193] R.C. HIBBELER. *Mechanics of Materials*. Pearson Prentice Hall, 12011. ISBN : 9780136022305.

[194] WA HILTNER. "Study and Evaluation of Electronography". In : *National Aeronautics and Space Administration* (1964).

[195] K. HINKELMANN et O. KEMPTHORNE. *Design and Analysis of Experiments, Volume 1 : Introduction to Experimental Design*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 12007. ISBN : 9780470191743.

[196] K. HINKELMANN et O. KEMPTHORNE. *Design and Analysis of Experiments, Volume 2 : Advanced Experimental Design*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 12005. ISBN : 9780471709930.

[197] K. HINKELMANN et O. KEMPTHORNE. *Design and Analysis of Experiments, Volume 3 : Special Designs and Applications*. Design and Analysis of Experiments. Wiley, 12012. ISBN : 9780470530689.

[198] Kazuto HIRATA et al. "Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A". In : *Physical Review Letters* 58.14 (1987), p. 1490. DOI : 10.1103/PhysRevLett.58.1490.

[199] J. HLADIK et P.-E. HLADIK. *Le calcul tensoriel en physique*. Dunod, 11993. ISBN : 9782100040711.

[200] Jean HLADIK. *Les spineurs en physique : avec exercices corrigés*. Masson, 11996. ISBN : 9782225853135.

[201] Sepp HOCHREITER et Jürgen SCHMIDHUBER. "Long Short-Term Memory". In : *Neural Computation* 9.8 (11997), p. 1735-1780. DOI : 10.1162/neco.1997.9.8.1735.

[202] John M HOENIG et Dennis M HEISEY. "The abuse of power : the pervasive fallacy of power calculations for data analysis". In : *The American Statistician* 55.1 (12001), p. 19-24.

[203] R.V. HOGG, E. TANIS et D. ZIMMERMAN. *Probability and Statistical Inference*. Pearson Education, 12014. ISBN : 9780321920294.

[204] Connor M HOLLAND, Yukai LU et Lawrence W CHEUK. "On-demand entanglement of molecules in a reconfigurable optical tweezer array". In : *Science* 382.6675 (12023), p. 1143-1147. DOI : 10.1126/science.adf4272.

[205] T. HOLZMANN. *Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM (4th Edition)*. Loeben, 12017. URL : https://www.holzmann-cfd.de.

En cours de traduction de l'anglais

[206] J.P. HOWARD. *Computational Methods for Numerical Analysis with R*. Chapman & Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing Series. CRC Press, 12017. ISBN : 9781351646505.

[207] P. HOYNG. *Relativistic Astrophysics and Cosmology : A Primer*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Netherlands, 12007. ISBN : 9781402045233.

[208] Bo HU, Jun SHAO et Mari PALTA. “Pseudo-R 2 in logistic regression model”. In : *Statistica Sinica* (12006), p. 847-860. DOI : 10.1002/sim.2300.

[209] Edwin HUBBLE. “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae”. In : *Proceedings of the national academy of sciences* 15.3 (11929), p. 168-173. DOI : 10.1073/pnas.15.3.168.

[210] E.R. HUGGINS. *Calculus 2000 : A Physics-based Calculus Text*. Moose Mountain Digital Press, 11999. ISBN : 9780970783646.

[211] E.R. HUGGINS. *Physics 2000 and Calculus 2000*. Moose Mountain Digital Press, 12001. ISBN : 9780970783660.

[212] J.M. HUGUENIN. *Data envelopment analysis (DEA) : a pedagogical guide for decision makers in the public sector*. Cahier de l'IDHEAP. IDHEAP : Chair of Public finance, 12012. ISBN : 9782940390540.

[213] John C. HULL. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India, 12017. ISBN : 9780134472089.

[214] R. HYNDMAN et al. *Forecasting with Exponential Smoothing : The State Space Approach*. Springer Series in Statistics. Springer Berlin Heidelberg, 12008. ISBN : 9783540719182.

[215] R.J. HYNDMAN et G. ATHANASOPOULOS. *Forecasting : principles and practice*. OTexts, 12018. ISBN : 9780987507112.

[216] Rob J. HYNDMAN et Yanan FAN. “Sample quantiles in statistical packages”. In : *The American Statistician* 50 (11996), p. 361-365.

[217] Rob J HYNDMAN et al. “A state space framework for automatic forecasting using exponential smoothing methods”. In : *International Journal of Forecasting* 18.3 (12002), p. 439-454. ISSN : 0169-2070. DOI : 10.1016/S0169-2070(01)00110-8.

[218] Rob J HYNDMAN et al. *Prediction intervals for exponential smoothing state space models*. Rapp. tech. Monash University, Department of Econometrics et Business Statistics, 12001.

[219] Aapo HYVÄRINEN et Erkki OJA. “Independent component analysis : algorithms and applications”. In : *Neural networks* 13.4-5 (12000), p. 411-430.

[220] Erik IGELSTRÖM et al. “Causal inference and effect estimation using observational data”. In : *J Epidemiol Community Health* 76.11 (12022), p. 960-966.

[221] CFA INSTITUTE. CFA Curriculum 2019. Wiley, 12018. ISBN : 9781119516927.

[222] Tomoaki ISHIYAMA et al. “The Uchuu simulations : Data Release 1 and dark matter halo concentrations”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 506.3 (12021), p. 4210-4231.

[223] Jacques ISTAS. *Probabilités et statistiques : cours, exercices et problèmes résolus*. Ellipses, 11999. ISBN : 9782729879884.

En cours de traduction de l'anglais

[224] Hiromu ITO et Jin YOSHIMURA. “Social penalty promotes cooperation in a cooperative society”. In : *Scientific reports* 5.1 (12015), p. 12797. DOI : 10.1038/srep12797.

[225] P. Alexis J. ALEXIS. *Pratique industrielle des plans d’expérience*. AFNOR, 11999. ISBN : 9782124650385.

[226] D. Goetschi J.-CH. CORBAZ. *Calculs commerciaux et bancaires - avec des eléments de statistique descriptive*. Lausanne, 11973.

[227] P. JAIN. *Wind Energy Engineering, Second Edition*. McGraw Hill LLC, 12016. ISBN : 9780071843850.

[228] C JAUPART, JC MARESCHAL et G SCHUBERT. “Heat flow and thermal structure of the lithosphere”. In : *Treatise on geophysics* 6 (2007), p. 217-252.

[229] L. JAUPI. *Contrôle de la qualité (MSP, Analyse des performances, Contrôle de réception)*. Dunod, 12002. ISBN : 9782100042647.

[230] Reza N. JAZAR. *Advanced dynamics : rigid body, multibody, and aerospace applications*. John Wiley & Sons, 12011. ISBN : 9780470892138.

[231] Christian JENEWEIN et al. “Concomitant formation of protocells and prebiotic compounds under a plausible early Earth atmosphere”. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 122.2 (12025), e2413816122. DOI : 10.1073/pnas.2413816122.

[232] Raul JIMENEZ et al. “The local and distant Universe : stellar ages and H0”. In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.03 (12019), p. 043. DOI : 10.48550/arXiv.1902.07081.

[233] Richard Arnold JOHNSON et Dean W. WICHERN. *Applied multivariate statistical analysis*. Pearson Education Limited, 12014. ISBN : 9780131877153.

[234] B. JORDAN, R. WESTERFIELD et S. ROSS. *Fundamentals of Corporate Finance Standard Edition*. McGraw-Hill Education, 12012. ISBN : 9780078034633.

[235] Philippe JORION et al. *Financial risk manager handbook*. T. 406. John Wiley & Sons, 12007. ISBN : 9780470126301.

[236] Tanisha JOSHI et SD PATHAK. “Evolution of Entropy with Cosmic Time”. In : *arXiv preprint arXiv :2308.05025* (12023). DOI : 10.48550/arXiv.2308.05025.

[237] Rafal JOZEFOWICZ, Wojciech ZAREMBA et Ilya SUTSKEVER. “An empirical exploration of recurrent network architectures”. In : *International conference on machine learning*. 12015, p. 2342-2350.

[238] Thomas JUFFMANN et al. “Real-time single-molecule imaging of quantum interference”. In : *Nature nanotechnology* 7.5 (12012), p. 297-300.

[239] Thomas R JUNK et Louis LYONS. “Reproducibility and replication of experimental particle physics results”. In : *arXiv preprint arXiv :2009.06864* (12020). DOI : 10.48550/arXiv.2009.06864.

[240] Tom S JUZEK et Johannes KIZACH. “How to Set Delta in the Two-One-Sided T-tests Procedure (TOST)”. In : *Journal of Research Design and Statistics in Linguistics and Communication Science* 5.1-2 (12019), p. 153-169.

[241] Raghu N. KACKER, Eric S. LAGERGREN et James J. FILLIBEN. “Taguchi’s orthogonal arrays are classical designs of experiments”. In : *Journal of research of the National Institute of Standards and Technology* 96.5 (11991), p. 577-591.

En cours de traduction de l'anglais

[242] Chukwunyere KAMALU. "THE ISHANGO BONE : The World's First Known Mathematical Sieve and Table of the Small Prime Numbers". In : (12021).

[243] Alexander Yu KAMENSHCHIK et al. "Time in quantum theory, the Wheeler–DeWitt equation and the Born–Oppenheimer approximation". In : *International Journal of Modern Physics D* 28.06 (12019), p. 1950073. DOI : 10.48550/arXiv.1809.08083.

[244] Gopal K. KANJI. *100 Statistical tests*. Sage, 12006. ISBN : 9788178297316.

[245] M Abdul KARIM et al. "DESI DR2 Results II : Measurements of Baryon Acoustic Oscillations and Cosmological Constraints". In : *arXiv preprint arXiv :2503.14738* (12025). DOI : 10.48550/arXiv.2503.14738.

[246] H. KARTTUNEN et al. *Fundamental Astronomy*. Springer Berlin Heidelberg, 12007. ISBN : 9783540341444.

[247] Robert E KASS et Adrian E RAFTERY. "Bayes factors". In : *Journal of the american statistical association* 90.430 (11995), p. 773-795. DOI : 10.1080/01621459.1995.10476572.

[248] H.J. KEISLER. *Elementary Calculus : An Infinitesimal Approach*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013. ISBN : 9780486310466. URL : https://books.google.ch/books?id=8NTCAgAAQBAJ.

[249] William H KINNEY et Nina K STEIN. "Cyclic cosmology and geodesic completeness". In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2022.06 (12022), p. 011. DOI : 10.1126/science.1070462.

[250] R.M. KLIMAN. *Encyclopedia of Evolutionary Biology*. Elsevier Science, 12016. ISBN : 9780128000496.

[251] E. KOLB. *The Early Universe*. CRC Press, 12018. ISBN : 9780429972492.

[252] FG KONDEV et al. "The NUBASE2020 evaluation of nuclear physics properties". In : *Chinese Physics C* 45.3 (12021), p. 030001. DOI : 10.1088/1674-1137/abddae.

[253] Zdeněk KOPAL. "Tidal evolution in close binary systems". In : *Astrophysics and Space Science* 17 (11972), p. 161-185.

[254] Toon KOPPELAARS et al. *Applied mathematics for database professionals*. Apress, 12007. ISBN : 9781590597453.

[255] P. KORBEL et M. NOVÁK. *The Complete Encyclopedia of Minerals : Description of Over 600 Minerals from Around the World*. Rocks, Minerals and Gemstones. Chartwell Books, 11999. ISBN : 9780785815204.

[256] Israel KOREN et C. Mani KRISHNA. *Fault-tolerant systems*. Morgan Kaufmann, 12010. ISBN : 9780120885251.

[257] John Michael KOVAC et al. "Detection of polarization in the cosmic microwave background using DASI". In : *Nature* 420.6917 (12002), p. 772-787. DOI : 10.1038/nature01269.

[258] A KREMEN et al. "Imaging quantum fluctuations near criticality". In : *Nature physics* 14.12 (12018), p. 1205-1210. DOI : 10.1038/s41567-018-0264-z.

[259] M.H. KUTNER. *Applied Linear Statistical Models*. McGrwa-Hill international edition. McGraw-Hill Irwin, 12005. ISBN : 9780071122214.

En cours de traduction de l'anglais

[260] Olena KUZII et Andrij ROVENCHAK. “What the gravitation of a flat Earth would look like and why thus the Earth is not actually flat”. In : *European Journal of Physics* 40.3 (12019), p. 035008.

[261] Amitabha LAHIRI et Palash B. PAL. *A first book of Quantum Field Theory*. CRC Press, 12005. ISBN : 9780849338977.

[262] Willis E LAMB JR et Marlan O SCULLY. *The photoelectric effect without photons*. Rapp. tech. 11968.

[263] L.D. LANDAU. *Classical Theory of Fields*. Course of Theoretical Physics vol. 2. Elsevier Science, 12013. ISBN : 9781483293288.

[264] L.D. LANDAU et E.M. LIFSHITS. *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory*. Course of Theoretical Physics vol. 2. Butterworth-Heinemann, 11977. ISBN : 9780750635394.

[265] L.D. LANDAU et E.M. LIFSHITZ. *Fluid Mechanics*. Course of Theoretical Physics vol. 6. Elsevier Science, 12013. ISBN : 9781483140506.

[266] L.D. LANDAU et E.M. LIFSHITZ. *Mechanics*. Course of Theoretical Physics vol. 1. Elsevier Science, 11982. ISBN : 9780080503479.

[267] L.D. LANDAU et E.M. LIFSHITZ. *Statistical Physics*. Course of Theoretical Physics vol. 5. Elsevier Science, 12013. ISBN : 9780080570464.

[268] L.D. LANDAU et al. *Electrodynamics of Continuous Media*. Course of Theoretical Physics vol. 8. Elsevier Science, 12013. ISBN : 9781483293752.

[269] L.D. LANDAU et al. *Theory of Elasticity*. Course of Theoretical Physics vol. 7. Elsevier Science, 12012. ISBN : 9780080570693.

[270] Miljenko LAPAINE. “Mollweideova kartografska projekcija”. In : *KoG* 15.15. (12011), p. 7-16.

[271] Frédéric LAROCHE. *Promenades mathématiques : histoire, fondements, applications*. Ellipses, 12003. ISBN : 9782729814175.

[272] Edward J LARSON et Larry WITHAM. “Leading scientists still reject God”. In : *Nature* 394.6691 (11998), p. 313-313.

[273] Jacques LASKAR et Mickaël GASTINEAU. “Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth”. In : *Nature* 459.7248 (12009), p. 817-819.

[274] N.M. LAURENDEAU. *Statistical Thermodynamics : Fundamentals and Applications*. Cambridge University Press, 12005. ISBN : 9780521846356.

[275] J. LAWSON. *Design and Analysis of Experiments with R*. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. CRC Press, 12014. ISBN : 9781498728485.

[276] Z.R. LAZIC. *Design of Experiments in Chemical Engineering : A Practical Guide*. Wiley, 12006. ISBN : 9783527604593.

[277] G.C. LEARNING. *The Gale Encyclopedia of Cancer : A Guide to Cancer and Its Treatments*. Gale Group, 12010. ISBN : 9781414475981.

[278] Lynn LEGG et al. “Occupational therapy for patients with problems in personal activities of daily living after stroke : systematic review of randomised trials”. In : *Bmj* 335.7626 (12007), p. 922.

En cours de traduction de l'anglais

[279] Georges LEMAÎTRE. “Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques”. In : *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. T. 47. 11927, p. 49-59.

[280] Hartmut LEMMEL et al. “Quantifying the presence of a neutron in the paths of an interferometer”. In : *Physical Review Research* 4.2 (12022), p. 023075. DOI : 10.48550/arXiv.2202.00272.

[281] O. LEVIN. *Discrete Mathematics : An Open Introduction*. Open Textbook Library. CreateSpace Independent Publishing Platform, 12016. ISBN : 9781534970748.

[282] J.S. LEVINTON et J.S. LEVINTON. *Genetics, Paleontology, and Macroevolution*. Genetics, Paleontology, and Macroevolution. Cambridge University Press, 12001. ISBN : 9780521005500.

[283] Leonard S LEVITT. *Derivation of the zero-point energy from the uncertainty principle*. 11962.

[284] Kenneth G LIBBRECHT. “The formation of snow crystals : subtle molecular processes govern the growth of a remarkable variety of elaborate ice structures”. In : *American Scientist* 95.1 (12007), p. 52-59.

[285] D. LIEBERMAN. *The Evolution of the Human Head*. Mersion : Emergent Village Resources for Communities of Faith Series. Harvard University Press, 12011. ISBN : 9780674046368.

[286] Y.K. LIM. *Problems and Solutions on Quantum Mechanics*. Major American Universities Ph.D. Qualifying Questions and Solutions - Physics. 11998. ISBN : 9789813103009.

[287] Manasvi LINGAM et Abraham LOEB. “Risks for life on habitable planets from superflares of their host stars”. In : *The Astrophysical Journal* 848.1 (12017), p. 41.

[288] Bin LIU et al. “Spontaneous emergence of self-replicating molecules containing nucleobases and amino acids”. In : *Journal of the American Chemical Society* 142.9 (12020), p. 4184-4192.

[289] T. LOCKHART. *Moral Uncertainty and Its Consequences*. Oxford University Press, 2000. ISBN : 9780195352160. DOI : 10.1093/oso/9780195126105.001.0001.

[290] S.L. LOHR. *Sampling : Design and Analysis*. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. CRC Press, 12021. ISBN : 9781000478235.

[291] M.S. LONGAIR. *Theoretical Concepts in Physics : An Alternative View of Theoretical Reasoning in Physics*. Cambridge University Press, 12020. ISBN : 9781108484534.

[292] W.H. LOUISELL. *Quantum statistical properties of radiation*. Wiley Series in Pure and Applied Optics Series. John Wiley & Sons Canada, Limited, 11973. ISBN : 9780471547853.

[293] Y. LU et S.L. LOHR. *R Companion for Sampling : Design and Analysis*. CRC Press, 12021. ISBN : 9781032132150.

[294] Malcolm LUDVIGSEN, Marc LACHIÈZE-REY et Roger PENROSE. *La relativité générale : une approche géométrique*. Dunod, 12000. ISBN : 9782100496884.

[295] Stephen N LUKO. “Concerning the estimators r/d2 and r/d2* in estimating variability in a normal universe”. In : *Quality Engineering* 8.3 (11996), p. 481-487.

[296] F.K. LUTGENS, E.J. TARBUCK et D. TASA. *Essentials of Geology*. Prentice Hall, 12012. ISBN : 9780321714725.

En cours de traduction de l'anglais

[297] David K LYNCH. "Visually discerning the curvature of the Earth". In : *Applied Optics* 47.34 (12008), H39-H43. DOI : 10.1364/ao.47.000h39.

[298] Patrick LYONNET. *La maintenance : mathématiques et méthodes*. Technique et documentation-Lavoisier, 11992. ISBN : 2852067455.

[299] P.C. MAGNUSSON et al. *Transmission Lines and Wave Propagation, Fourth Edition*. Electrical Engineering. Taylor & Francis, 12000. ISBN : 9780849302695.

[300] Franz MANDL. *Introduction to quantum field theory*. Interscience publishers, 11959.

[301] P. MANGIN et R. KAHN. *Supraconductivité*. Grenoble Sciences. EDP Sciences, 12013. ISBN : 9782759808588.

[302] K.V. MARDIA, Z.W. BIRNBAUM et E. LUKACS. *Statistics of Directional Data*. Elsevier Science, 12014. ISBN : 9781483218663.

[303] Brian G MARSDEN. "Measurement of the astronomical unit". In : *Astronomical Society of the Pacific Leaflets, Vol. 9, No. 427, p. 209* 9 (11965), p. 209.

[304] M. MARTIN et R. MONNIER. *The Impossibility of God*. G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series. Prometheus Books, 12003. ISBN : 9781591021209.

[305] TJ MATERNAGHAN. "Photographic Materials". In : *Encyclopedia of Materials : Science and Technology* (12001), p. 6936-6945.

[306] Henry MATHIEU et Hervé FANET. *Physique des semiconducteurs et des composants électroniques-6ème édition : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 12009. ISBN : 9782100516438.

[307] MATLAB. *version 8.1.0.604 (R2016a)*. Natick, Massachusetts : The MathWorks Inc., 2016a.

[308] Jiro MATSUMOTO. "The Casimir effect as a candidate of dark energy". In : *arXiv preprint arXiv :1303.4067* (12013).

[309] C.E. MCCULLOCH et S.R. SEARLE. *Generalized, Linear, and Mixed Models*. Wiley Series in Probability and Statistics. Applied Probabil. Wiley, 12004. ISBN : 9780471654049.

[310] Michael D MCKAY, Richard J BECKMAN et William J CONOVER. "A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code". In : *Technometrics* 42.1 (12000), p. 55-61.

[311] Grégoire MÉCHAIN et al. "Range of plasma filaments created in air by a multi-terawatt femtosecond laser". In : *Optics Communications* 247.1-3 (12005), p. 171-180. DOI : 10.1016/j.optcom.2004.11.052.

[312] T.H.G. MEGSON. *Structural and Stress Analysis*. EngineeringPro collection. Elsevier Science, 12005. ISBN : 9780080455341.

[313] G. MEISSNER. *Correlation Risk Modeling and Management : An Applied Guide including the Basel III Correlation Framework - With Interactive Models in Excel / VBA*. Wiley Finance. Wiley, 12013. ISBN : 9781118796894.

[314] Rossoff J MELTZER J et Slaughter J.I. "Structure and Materials Aspects of the Prime Fligh test vehicle". In : (11965). DOI : 10.2514/6.1966-1738.

[315] R MEUNIER. *Evidence Based Bonne Humeur - À la poursuite de l'esprit critique*. Z & Arts, 12021. ISBN : 9791034386512.

En cours de traduction de l'anglais

[316] K.R. MILLER et J.S. LEVINE. *Miller and Levine Biology*. Pearson foundation series. Pearson, 12012. ISBN : 9780133236385.

[317] PW MILONNI et M-L SHIH. "Zero-point energy in early quantum theory". In : *American Journal of Physics* 59.8 (11991), p. 684-698.

[318] K.A. MILTON. *The Casimir Effect : Physical Manifestations of Zero-point Energy*. EBL-Schweitzer. World Scientific, 12001. ISBN : 9789812810526.

[319] Ryo MIZUUCHI et Norikazu ICHIHASHI. "Minimal RNA self-reproduction discovered from a random pool of oligomers". In : *Chemical Science* (12023).

[320] Douglas C. MONTGOMERY. *Introduction to statistical quality control*. Wiley New York, 12013. ISBN : 9781118146811.

[321] Peter A MORRIS et al. "Imaging with a small number of photons". In : *Nature communications* 6.1 (12015), p. 5913.

[322] Thomas MUELLER et Frank GRAVE. *Catalogue of Spacetimes*. 12010. arXiv : 0904.4184 [gr-qc].

[323] Markus MÜLLER. "Equation of time-problem in astronomy". In : *Acta Physica Polonica Series A* 88 (11995), S-49.

[324] Jeremy N MUNDAY, Federico CAPASSO et V Adrian PARSEGIAN. "Measured long-range repulsive Casimir–Lifshitz forces". In : *Nature* 457.7226 (12009), p. 170-173.

[325] C.D. MURRAY et S.F. DERMOTT. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 11999. ISBN : 9780521575973.

[326] Michael W NACHMAN et Susan L CROWELL. "Estimate of the mutation rate per nucleotide in humans". In : *Genetics* 156.1 (12000), p. 297-304.

[327] P.J. NAHIN. *In Praise of Simple Physics : The Science and Mathematics behind Everyday Questions*. Princeton Puzzlers. Princeton University Press, 12017. ISBN : 9780691178523.

[328] P.J. NAHIN. *Inside Interesting Integrals*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer New York, 12014. ISBN : 9781493912773.

[329] P.J. NAHIN. *Transients for Electrical Engineers : Elementary Switched-Circuit Analysis in the Time and Laplace Transform Domains (with a touch of MATLAB®)*. Springer International Publishing, 12018. ISBN : 9783319775982.

[330] B. NARINS. *The Gale Encyclopedia of Genetic Disorders*. Gale Group, 12022. ISBN : 9780028683928.

[331] A. NAVABI et N. HISE. *Why There Is No God : Simple Responses to 20 Common Arguments for the Existence of God*. Atheist Republic, 12014. ISBN : 9781311018045.

[332] O. NEUGEBAUER. *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. Springer Berlin Heidelberg, 11975. ISBN : 9783642619120.

[333] Chee-Hock NG et Soong BOON-HEE. *Queueing modelling fundamentals : With applications in communication networks*. John Wiley & Sons, 12008. ISBN : 9780470519578.

[334] Hrvoje NIKOLIĆ. "Is zero-point energy physical ? A toy model for Casimir-like effect". In : *Annals of Physics* 383 (12017), p. 181-195.

En cours de traduction de l'anglais

[335] C NOLET et al. "Measuring and Modeling the Effect of Surface Moisture on the Spectral Reflectance". In : *Public Library of Science (PLOS)* (12014). DOI : 10.1371/journal.pone.0112151.

[336] KA NORTON. "The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere". In : *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 24.10 (12006), p. 1367-1387. DOI : 10.1109/JRPROC.1936.227360.

[337] Werner NOWACKI. "Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen". In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 7.1 (11934), p. 81-93. DOI : 10.1007/BF01292710.

[338] Harry NUSSBAUMER. "Einstein's conversion from his static to an expanding universe". In : *The European Physical Journal H* 39.1 (12014), p. 37-62.

[339] Brendan NYHAN et Jason REIFLER. "When corrections fail : The persistence of political misperceptions". In : *Political Behavior* 32.2 (12010), p. 303-330.

[340] C. OLIVEIRA. *Practical C++ Financial Programming*. Apress, 12015. ISBN : 9781430267164.

[341] P. OLOFSSON et M. ANDERSSON. *Probability, Statistics, and Stochastic Processes*. Wiley, 12012. ISBN : 9781118231326.

[342] Jonathan O'NEIL et al. "Chapter 16 - The Nuvvuagittuq Greenstone Belt : A Glimpse of Earth's Earliest Crust". In : (2019). Sous la dir. de Martin J. VAN KRANENDONK, Vickie C. BENNETT et J. Elis HOFFMANN, p. 349-374. DOI : 10.1016/B978-0-444-63901-1.00016-2.

[343] Jonathan O'NEIL et al. "Neodymium-142 evidence for Hadean mafic crust". In : *Science* 321.5897 (2008), p. 1828-1831. DOI : 10.1126/science.116192.

[344] OPENSTAX. *Calculus*. vol. 2. 12th Media Services, 12016. ISBN : 9781680920154.

[345] S.J. ORFANIDIS. *Electromagnetic Waves and Antennas*. EDN series for design engineers. ECE Department, 12002.

[346] R. PARKER et B.N. MOORE. *LooseLeaf for Critical Thinking*. McGraw-Hill Education, 12016. ISBN : 9781259690877.

[347] Jerome PEARSON. "The orbital tower : a spacecraft launcher using the Earth's rotational energy". In : *Acta Astronautica* 2.9-10 (11975), p. 785-799.

[348] Arno A PENZIAS et Robert W WILSON. "A measurement of excess antenna temperature at 4080 MHz". In : *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*. Harvard University Press, 11979, p. 873-876. DOI : 10.1086/148307.

[349] Jose D PEREZGONZALEZ. "Fisher, Neyman-Pearson or NHST ? A tutorial for teaching data testing". In : *Frontiers in psychology* (12015), p. 223.

[350] Jose D PEREZGONZALEZ. "The fallacy of placing confidence in confidence intervals-A commentary". In : (12017).

[351] Leandros PERIVOLAROPOULOS et Foteini SKARA. "Challenges for ΛCDM : An update". In : *New Astronomy Reviews* 95 (12022), p. 101659. DOI : 10.48550/arXiv.2105.05208.

[352] M.E. PESKIN. *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 12018. ISBN : 9780429983184.

En cours de traduction de l'anglais

[353] P.H.D.H. *Traité des trois imposteurs : Moïse, Jésus-Christ, Mahomet*. Maxtor France, 12014. ISBN : 9791020801067.

[354] R. PHILLIPS. *Pricing and Revenue Optimization*. Stanford University Press, 12005. ISBN : 9780804781640.

[355] N. PISKUNOV. *Calcul différentiel et intégral (Tome I)*. Ellipses, 11993. ISBN : 9782729893408.

[356] N. PISKUNOV. *Calcul différentiel et intégral (Tome II)*. Ellipses, 11993. ISBN : 9782729893415.

[357] L.P. PITAEVSKII et E.M. LIFSHITZ. *Physical Kinetics*. Course of Theoretical Physics vol. 10. Elsevier Science, 12012. ISBN : 9780080570495.

[358] "Planck 2018 results : VI. Cosmological parameters". In : *Astronomy & Astrophysics* 641 (sept. 2020), A6. ISSN : 1432-0746. DOI : 10.1051/0004-6361/201833910.

[359] PTOLEMY, G.J. TOOMER et O. GINGERICH. *Ptolemy's Almagest*. Princeton University Press, 11998. ISBN : 9780691002606.

[360] D.L. PULFREY. *Understanding Modern Transistors and Diodes*. Cambridge University Press, 12010. ISBN : 9781139484671.

[361] P.P. PUTTKAMMER. "Boundary layer over a flat plate". B.S. thesis. University of Twente, 12013.

[362] T. PYZDEK et P. KELLER. *The Six Sigma Handbook, Third Edition*. McGraw-Hill Education, 12009. ISBN : 9780071733908.

[363] R CORE TEAM. *R : A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 12017. URL : https://www.R-project.org/.

[364] H. RAUCHFUSS et T.N. MITCHELL. *Chemical Evolution and the Origin of Life*. Springer, 12008. ISBN : 9783540788225.

[365] Alexander RAYMOND et al. "First Very Long Baseline Interferometry Detections at 870 micrometer". In : *The Astronomical Journal* 168.3 (12024). DOI : 10.3847/1538-3881/ad5bdb.

[366] A.A. RAYNER. *A first course in biometry for agriculture students*. University of Natal Press, 11969.

[367] J.C.W. RAYNER et G.C. LIVINGSTON. *An Introduction to Cochran-Mantel-Haenszel Testing and Nonparametric ANOVA*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 12023. ISBN : 9781119832003.

[368] Bruce Cameron REED. *The Physics of the Manhattan Project*. Springer Berlin Heidelberg, 12014. ISBN : 9783662435335.

[369] M. REIHER et A. WOLF. *Relativistic Quantum Chemistry : The Fundamental Theory of Molecular Science*. Wiley, 12015. ISBN : 9783527334155.

[370] K.F. RILEY, M.P. HOBSON et S.J. BENCE. *Mathematical Methods for Physics and Engineering : A Comprehensive Guide*. Mathematical Methods for Physics and Engineering : A Comprehensive Guide. Cambridge University Press, 12006. ISBN : 9780521679732.

[371] C. ROBERT et G. CASELLA. *Introducing Monte Carlo Methods with R*. Use R ! Springer, 12010. ISBN : 9781441915757.

En cours de traduction de l'anglais

[372] Richard ROBINETT. *Quantum mechanics : classical results, modern systems, and visualized examples*. Oxford University Press New York, 12006. ISBN : 9780198530978.

[373] Rene RJ ROHR. *Sundials : History, theory, and practice*. Courier Corporation, 12012.

[374] P.A. RONVEAUX et al. *Heun's Differential Equations*. Oxford science publications. Oxford University Press, 11995. ISBN : 9780198596950.

[375] François ROTHEN. *Physique générale : la physique des sciences de la nature et de la vie*. PPUR presses polytechniques, 11999. ISBN : 9782880743963.

[376] Sebastian RUDER. "An overview of gradient descent optimization algorithms". In : *arXiv preprint arXiv :1609.04747* (12016).

[377] J RUTKOWSKI, L WOJTCZAK et Š ZAJAC. "Pressure influence on the Curie temperature". In : *Acta Physica Polonica A* 118.5 (12010), p. 745-746.

[378] L. RYDER. *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 12009. ISBN : 9780521845632.

[379] Sara L RYNES, Amy E COLBERT et Kenneth G BROWN. "HR professionals' beliefs about effective human resource practices : Correspondence between research and practice". In : *Human Resource Management : Published in Cooperation with the School of Business Administration, The University of Michigan and in alliance with the Society of Human Resources Management* 41.2 (12002), p. 149-174.

[380] E SAMAIN et al. "Millimetric lunar laser ranging at OCA (Observatoire de la Côte d'Azur)". In : *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* 130.2 (11998), p. 235-244. DOI : 10.1051/aas:199822.

[381] Abdourahmane SARR et Tonny LYBEK. "Measuring liquidity in financial markets". In : *Available at SSRN 880932* (12002).

[382] Yutaka SASAKI et al. "The truth of the F-measure". In : *Teach Tutor mater* 1.5 (12007), p. 1-5.

[383] Walter SCHACHERMAYER et Josef TEICHMANN. "How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black–Merton–Scholes ?" In : *Mathematical Finance* 18.1 (12008), p. 155-170.

[384] Stephan SCHLAMMINGER et al. "Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance". In : *Physical Review Letters* 100.4 (12008), p. 041101. DOI : 10.48550/arXiv.0712.0607.

[385] Marit SCHOONHOVEN et Ronald JMM DOES. "The X-bar control chart under non-normality". In : *Quality and Reliability Engineering International* 26.2 (12010), p. 167-176.

[386] Thomas SCHÜRMANN, Ingo HOFFMANN et Winfrid GÖRLICH. "On the experimental verification of the uncertainty principle of position and momentum". In : *Physics Letters A* 470 (12023), p. 128787. DOI : 10.48550/arXiv.2211.14724.

[387] M. SCUTARI et J.B. DENIS. *Bayesian Networks : With Examples in R*. Chapman & Hall/CRC Texts in Statistical Science. Taylor & Francis, 12014. ISBN : 9781482225587.

[388] Michael SEGAL. "Numerical discrepancies in the list of vessels in Ezra i 9-11". In : *Vetus Testamentum* 52.Fasc. 1 (12002), p. 122-129. DOI : 10.1163/15685330252965776.

En cours de traduction de l'anglais

[389] Antonia SEIFERT et al. "Supernovae evidence for foundational change to cosmological models". In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters* 537.1 (2025), p. L55-L60. DOI : doi.org/10.1093/mnrasl/slae112.

[390] Andrew SEPIELLI. "Moral uncertainty and the principle of equity among moral theories". In : *Philosophy and Phenomenological Research* 86.3 (12013), p. 580-589. DOI : 10.1111/j.1933-1592.2011.00554.x.

[391] EMC Education SERVICES. *Data Science and Big Data Analytics : Discovering, Analyzing, Visualizing and Presenting Data*. Wiley, 12015. ISBN : 9781118876138.

[392] R.A. SERWAY et J.W. JEWETT. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. Cengage Learning, 12018. ISBN : 9781337671729.

[393] Yong SHAO et al. "Phylogenomic analyses provide insights into primate evolution". In : *Science* 380.6648 (12023), p. 913-924. DOI : 10.1126/science.abn6919.

[394] Valery SHCHERBAKOV. "Why the 46° halo is seen far less often than the 22° halo ?" In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 124 (12013), p. 37-44.

[395] I SIMBOTIN, MJ JAMIESON et A DALGARNO. "Rayleigh scattering cross sections of O2 at wavelengths longer than 180 nm". In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 109.D13 (12004).

[396] Ashok K SINGAL. "Discrepancy between power radiated and the power loss due to radiation reaction for an accelerated charge". In : *Symmetry* 12.11 (12020), p. 1833.

[397] Ashok K SINGAL. "Why no radiation occurs in the case of a uniformly accelerated charge". In : *arXiv preprint arXiv :1810.04519* (12018).

[398] R. Paul SINGH et Dennis R. HELDMAN. *Introduction to food engineering*. Gulf Professional Publishing, 12001. ISBN : 9780080574493.

[399] J.M. SMITH. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 11982. ISBN : 9780521288842.

[400] Richard SMITH. "Doctors are not scientists". In : *Bmj* 328.7454 (12004).

[401] Robert W SMITH. "The origins of the velocity-distance relation". In : *Journal for the History of Astronomy* 10.3 (11979), p. 133-165.

[402] J.H. SOBEL. *Logic and Theism : Arguments for and against Beliefs in God*. Cambridge University Press, 12003. ISBN : 9781139449984.

[403] Joram SOCH et al. *StatProofBook/StatProofBook.github.io : StatProofBook 12023*. Zenodo, jan. 12024. DOI : 10.5281/zenodo.10495684.

[404] A. SOKAL et J. BRICMONT. *Fashionable Nonsense : Postmodern Intellectuals' Abuse of Science*. ST MARTINS PRESS (NY), 11999. ISBN : 9780312204075.

[405] H. SPIELER. *Semiconductor Detector Systems*. Series on Semiconductor Science and Technology. OUP Oxford, 12005. ISBN : 9780191523656.

[406] N.L. SQUEGLIA. *Zero Acceptance Number Sampling Plans*. ASQ Quality Press, 12008. ISBN : 9780873897396.

[407] SV STARCHENKO et CA JONES. "Typical velocities and magnetic field strengths in planetary interiors". In : *Icarus* 157.2 (12002), p. 426-435.

[408] V.J. STENGER. *The Fallacy of Fine-Tuning : Why the Universe Is Not Designed for Us*. Prometheus Books, 12011. ISBN : 9781616144449.

En cours de traduction de l'anglais

[409] V.J. Stenger et C. Hitchens. *God : The Failed Hypothesis : How Science Shows That God Does Not Exist*. Prometheus Books, 12010. isbn : 9781615920037.

[410] H. Stephani. *Relativity : An Introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 12004. isbn : 9780521010696.

[411] James Stewart. *Analyse, concepts et contextes : Volume 1, Fonctions d'une variable*. T. 1. De Boeck Supérieur, 12006. isbn : 9782804163068.

[412] Aneta S Stodolna et al. "Hydrogen atoms under magnification : Direct observation of the nodal structure of Stark states". In : *Physical Review Letters* 110.21 (12013), p. 213001.

[413] G. Strang et al. *Calculus*. vol. 1. OpenStax College, 12016. isbn : 9781938168024.

[414] David L Streiner. "Unicorns do exist : A tutorial on "proving" the null hypothesis". In : *The Canadian Journal of Psychiatry* 48.11 (12003), p. 756-761.

[415] J. Strickland. *Predictive Analytics using R*. LULU Press, 12015. isbn : 9781312841017.

[416] S.M. Sze et M.K. Lee. *Semiconductor Devices : Physics and Technology*. Semiconductor Devices, Physics and Technology. Wiley, 12012. isbn : 9780470537947.

[417] Marco Taboga. *Lectures on probability theory and mathematical statistics*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 12017.

[418] Masaharu Tanabashi et al. "Review of Particle Physics : particle data groups". In : *Physical Review D* 98.3 (12018), p. 1-1898.

[419] K. Tapp. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 12016. isbn : 9783319397993.

[420] D. Tavella. *Quantitative Methods in Derivatives Pricing : An Introduction to Computational Finance*. Wiley Finance. Wiley, 12003. isbn : 9780471274797.

[421] G. Tcherkez. *Isotopie biologique : introduction aux effets isotopiques et à leurs applications en biologie*. Éd. Tec & Doc, 12010. isbn : 9782743012670.

[422] M. Tegmark. *Our Mathematical Universe : My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. Alfred A. Knopf, 12014. isbn : 9780307599803.

[423] E. Thackery et M. Harris. *The Gale Encyclopedia of Mental Disorders*. Gale Group, 12003. isbn : 9780787657680.

[424] "The Delphi technique as a forecasting tool : issues and analysis". In : *International Journal of Forecasting* 15.4 (11999), p. 353-375. issn : 0169-2070. doi : 10.1016/S0169-2070(99)00018-7.

[425] R. Théoret. *Le Calcul Numérique en Finance Empirique et Quantitative : Ingénierie Financière et Excel*. Presses de l'Universite du Quebec, 12004. isbn : 9782760517721.

[426] Daniel Thiel. *Recherche opérationnelle et management des entreprises*. Economica, 11990. isbn : 9782717819304.

[427] Hervé Thiriez. *La modélisation du risque : simulations de Monte Carlo*. Economica, 12004. isbn : 9782717848229.

[428] H.C. Thode. *Testing For Normality*. Statistics, textbooks and monographs. CRC Press, 12002. isbn : 9780203910894.

En cours de traduction de l'anglais

[429] TH TIZARD. “Distance of the Visible Horizon”. In : *Nature* 92.2299 (11913), p. 344-345. DOI : 10.1038/092425d0.

[430] Kevin E TRENBERTH, John T FASULLO et Jeffrey KIEHL. “Earth’s global energy budget”. In : *Bulletin of the american meteorological society* 90.3 (2009), p. 311-324.

[431] R.S. TSAY. *Analysis of Financial Time Series*. CourseSmart. Wiley, 12010. ISBN : 9781118017098.

[432] D.L. TURCOTTE et G. SCHUBERT. *Geodynamics*. Cambridge University Press, 12002. ISBN : 9781107268678.

[433] J.J. UICKER, G.R. PENNOCK et J.E. SHIGLEY. *Theory of Machines and Mechanisms, 7th Edition*. Oxford University Press, 12017. ISBN : 9780195371239.

[434] Stefan ULMER et al. “Observation of spin flips with a single trapped proton”. In : *Physical review letters* 106.25 (12011), p. 253001.

[435] Henryk Deter ULRICH WIEHLE Michael Diegelmann, Dr. Peter Noel SCHÖMIG et Michael ROLF. *Les 100 principaux indicateurs financiers*. Cometis, UBS, 12010. ISBN : 9783940828316.

[436] Nathan S UPHAM, Jacob A ESSELSTYN et Walter JETZ. “Inferring the mammal tree : species-level sets of phylogenies for questions in ecology, evolution, and conservation”. In : *PLoS biology* 17.12 (12019), e3000494.

[437] Stan URYASEV et al. “VaR vs CVaR in risk management and optimization”. In : *CARISMA conference*. 12010.

[438] Jean-Philippe UZAN. “The fundamental constants and their variation : observational and theoretical status”. In : *Reviews of modern physics* 75.2 (12003), p. 403. DOI : 10.48550/arXiv.hep-ph/0205340.

[439] K.A. VALIEV. *The Physics of Submicron Lithography*. Microdevices. Springer US, 12012. ISBN : 9781461533184.

[440] Mihran VARDANYAN, Roberto TROTTA et Joseph SILK. “Applications of Bayesian model averaging to the curvature and size of the Universe”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters* 413.1 (12011), p. L91-L95.

[441] Dan VENTURA. “SVM example”. In : *Lectures notes, Mar* (12009).

[442] M. VERMOT, P. BOVAY et D. PRONGUÉ. *Traité de construction horlogère*. Collection microtechnique & [et] nanotechnologie. Presses polytechniques et universitaires romandes, 12011. ISBN : 9782880748838.

[443] Horácio Santana VIEIRA et Valdir B BEZERRA. “Quantum Newtonian cosmology and the biconfluent Heun functions”. In : *Journal of Mathematical Physics* 56.9 (12015), p. 092501.

[444] HS VIEIRA et VB BEZERRA. “Class of solutions of the Wheeler-DeWitt equation in the Friedmann-Robertson-Walker universe”. In : *Physical Review D* 94.2 (12016), p. 023511.

[445] Alexander VILENKIN. “Creation of universes from nothing”. In : *Physics Letters B* 117.1-2 (11982), p. 25-28. DOI : 10.1016/0370-2693(82)90866-8.

[446] Alexander VILENKIN. “The beginning of the universe”. In : *The Kalām Cosmological Argument : Scientific Evidence fort he Beginnig of the Universe, Haz. Paul Copan, William Lane Craig, içinde* (2017), p. 150-158.

En cours de traduction de l'anglais

[447] Jill VINCENT. “The mathematics of sundials”. In : *Australian Senior Mathematics Journal* 22.1 (12008), p. 13-23.

[448] Christian WAGNER, Simon MILLER et Jonathan M. GARIBALDI. “A fuzzy toolbox for the R programming language”. In : *Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on*. IEEE. 12011, p. 1185-1192.

[449] James R WAIT. “The ancient and modern history of EM ground-wave propagation”. In : *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 40.5 (11998), p. 7-24. DOI : 10.1109/74.735961.

[450] Merle F WALKER. “The effects of urban lighting on the brightness of the night sky.” In : *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 89.529 (11977), p. 405. DOI : 10.1086/130142.

[451] U. WALTER. *Astronautics : The Physics of Space Flight*. Springer International Publishing, 12019. ISBN : 9783319743738.

[452] M. WARE et J. PEATROSS. *Physics of Light and Optics (Black & White)*. Brigham Young University, Department of Physics, 12015. ISBN : 9781312929272.

[453] Brian P WEAVER et al. “A Bayesian approach to the analysis of gauge R&R data”. In : *Quality Engineering* 24.4 (12012), p. 486-500. DOI : 10.1080/08982112.2012.702381.

[454] I. WELCH. *Corporate Finance : An Introduction*. Pearson international edition. Prentice Hall, 12009. ISBN : 9780321587275.

[455] A.N. WHITEHEAD et B. RUSSELL. *Principia Mathematica*. Rough Draft Printing, 11910. ISBN : 9781603864374.

[456] Wessel N. van WIERINGEN. *Lecture notes on ridge regression*. 12015. eprint : arXiv:1509.09169.

[457] Rand R WILCOX. *Introduction to robust estimation and hypothesis testing, 4th Edition*. Academic press, 12017. ISBN : 9780128047330.

[458] Michael R WILCZYNSKA et al. “Four direct measurements of the fine-structure constant 13 billion years ago”. In : *Science advances* 6.17 (12020), eaay9672.

[459] William T. Vetterling WILLIAM H. PRESS Saul A. Teukolsky et al. *Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 12007. ISBN : 9780521880688.

[460] William SC. WILLIAMS. *Introducing Special Relativity*. CRC Press, 12002. ISBN : 9780415277624.

[461] Paul WILMOTT. *The mathematics of financial derivatives : a student introduction*. Cambridge University Press, 11995. ISBN : 9780521497893.

[462] Jens WINKLER et Roger MOSER. “Biases in future-oriented Delphi studies : a cognitive perspective”. In : *Technological forecasting and social change* 105 (12016), p. 63-76.

[463] Viktor WITKOVSKY. “On the Exact Two-Sided Tolerance Intervals for Univariate Normal Distribution and Linear Regression”. In : *Austrian Journal of Statistics* 43.4 (12014), p. 279. DOI : 10.17713/ajs.v43i4.46.

[464] Edward L WRIGHT. “Theoretical overview of cosmic microwave background anisotropy”. In : *arXiv preprint astro-ph/0305591* (12003).

En cours de traduction de l'anglais

[465] Mao XIN. “The VIX Volatility Index”. In : *Project Report, Department of Mathematics, Uppsala University, Sweden* (12011).

[466] Jaswant K YADAV, JS BAGLA et Nishikanta KHANDAI. “Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 405.3 (12010), p. 2009-2015.

[467] M. YANOFF, J.S. DUKER et J.J. AUGSBURGER. *Ophthalmology*. An expert consult title online + print. Mosby Elsevier, 12009. ISBN : 9780323043328.

[468] Ramu YERUKALA et Naveen Kumar BOIROJU. “Approximations to standard normal distribution function”. In : *International Journal of Scientific & Engineering Research* 6.4 (12015), p. 515-518.

[469] PT YOUNGER et al. “The sporadic radiant and distribution of meteors in the atmosphere as observed by VHF radar at Arctic, Antarctic and equatorial latitudes”. In : *Annales Geophysicae*. T. 27. 7. Copernicus Publications Göttingen, Germany. 12009, p. 2831-2841. DOI : 10.5194/angeo-27-2831-2009.

[470] Karen K YUEN. “The two-sample trimmed t for unequal population variances”. In : *Biometrika* 61.1 (11974), p. 165-170.

[471] M. ZABROCKI. *An introduction to ordinary generating functions*. York University. URL : http://garsia.math.yorku.ca/~zabrocki/MMM1/MMM1Intro2OGFs.pdf.

[472] Reza ZAFARANI, Mohammad Ali ABBASI et Huan LIU. *Social media mining : an introduction*. Cambridge University Press, 12014. ISBN : 9781107018853.

[473] M.J. ZAKI et W. MEIRA. *Data Mining and Analysis : Fundamental Concepts and Algorithms*. Cambridge University Press, 12014. ISBN : 9780521766333.

[474] Anatolii Vladimirovich ZASOV et al. “Dark matter in galaxies”. In : *Physics-Uspekhi* 60.1 (12017), p. 3.

[475] Wilford ZDUNKOWSKI et Andreas BOTT. *Dynamics of the Atmosphere : A course in theoretical Meteorology*. Cambridge University Press, 12003. ISBN : 9780521809498.

[476] Alessandro ZENESINI et al. “False vacuum decay via bubble formation in ferromagnetic superfluids”. In : *Nature Physics* (12024), p. 1-6.

[477] Youxue ZHANG. “The age and accretion of the Earth”. In : *Earth-Science Reviews* 59.1 (12002), p. 235-263. ISSN : 0012-8252. DOI : 10.1016/S0012-8252(02)00077-6.

[478] M.V. ZOMBECK. *Handbook of Space Astronomy and Astrophysics*. Cambridge University Press, 12006. ISBN : 9781139459501. DOI : 10.1017/CBO9780511536359.

[479] Walter ZUCCHINI, A. BERZEL et O. NENADIC. “Applied smoothing techniques”. In : *Part I : Kernel Density Estimation* 15 (12003).

[480] Erik W van ZWET et Eric A CATOR. “The significance filter, the winner’s curse and the need to shrink”. In : *Statistica Neerlandica* 75.4 (12021), p. 437-452.

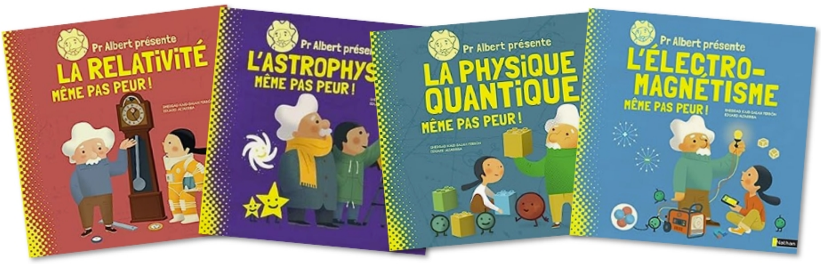
[481] Barton ZWIEBACH. *A first course in string theory*. Cambridge university press, 12004. ISBN : 9780521831437.

+ un millier de publications scientifiques de mauvaise qualité et incomplets qui ne méritent pas d’être cités ici.

En cours de traduction de l'anglais

De plus... pour les parents qui veulent éduquer leurs bébés dans un environnement intellectuel sain, nous recommandons fortement les livres suivants :

et pour les enfants nous recommandons fortement les livres pour les tout-petits des éditions Nathan :



et les livres suivants pour adolescents :

En cours de l'anglais

Index

Symbols

(ε, δ) définition de limite 2202
C-algèbre A 431
G–test de QdA 1098
L-estimateurs 1138
L-statistique 1137
V-structure 504
σ-additivité 478
σ-algébre Borélienne 2477
k-convergente 370
k-réduite 370
k-ème quotient partiel 370
n primorielle 219
n-gone régulier 2862
p-hacking 935
p-liste 517
p-valeur 928, 930, 932
écart-type combiné 988
écart-type composite 988
écart-type de Pearson 808, 811
écart-type empirique 811
écart-type global 988
écart-type groupé 988
écart-type standard 811
écart-type échantillonnal 811
échantillon 535
échantillon aléatoire 538
échantillon représentatif 535
échantillonnage à probabilité non-égale 1313
échantillonnage adaptatif 1314
échantillonnage aléatoire restreint ... 1313
échantillonnage aléatoire simple 1312
échantillonnage aléatoire stratifié 1312
échantillonnage au jugement 1311
échantillonnage boule de neige 1312
échantillonnage de commodité 1311
échantillonnage en deux niveaux 1313
échantillonnage en grappes 1312
échantillonnage par opportunité 1311
échantillonnage par volontaires 1312
échantillonnage proportionnel à la taille 1313
échantillonnage simple avec remplacement 516
échantillonnage simple sans remise ... 520
échantillonnage spatialement équilibré 1314
échantillonnage systématique 1312
échantillons appariés 852
échantilonnage par quotas 1311
échelonnage de matrice 1914
égalité 213, 286
égalité de Parseval 1737
égalité de la matrice d'information 827
égaux 213
élément absorbant 414
élément de volume invariant 2030
élément régulier 415
élément simplifiable 415
éléments (mathématiques) 377
éléments réguliers 425
éléphant de Fermi 1729
équation 1335

En cours de traduction de l'anglais

équation aux dérivées partielles 1596, 1600
équation aux dérivées partielles elliptique 1604
équation aux dérivées partielles hyperbolique 1604
équation aux dérivées partielles paraboliques 1604
équation bicarrée 1375
équation caractéristique 1589, 1970
équation cartésienne de la sphère 2798
équation cartésienne du paraboloïde 2811
équation cartésienne réduite d'une droite 2781
équation cartésienne du plan 2778
équation conditionnelle 1338
équation d'identité 1338
équation d'un grand cercle 2801
équation d'une droite 2169
équation de Bessel 1755
équation de Chapman-Kolmogorov 534
équation de Laplace 1876, 2383
équation de Parseval 2289
équation de Sidak 1086
équation de Welch-Satterthwaite 998
équation de chaleur 2300
équation des géodésiques 2086
équation différentielle 1581
équation différentielle de Bessel d'ordre n 1755
équation différentielle linéaire 1583
équation différentielle ordinaire de Laguerre 1385
équation différentielle ordinaire de Laguerre associée 1393
équation différentielle partielle linéaire 1596
équation diophantienne 1359
équation du cylindre 2811
équation homogéne 1584
équation irrationnelle 1367
équation linéaire 2180
équation métrique 2012
équation métrique euclidienne 2651
équation matrix-valeurs propres 1969
équation polynomiale 1354
équation sans second membre 1584
équations algébriques 1334
équations aux valeurs propres 1970
équations cinématiques d'Euler 2638
équations compatibles 1903
équations différentielles
méthode de Frobenius 1586
méthode de la transformée de Fourier 1586
méthode de la transformée de Laplace 1586
méthode de séparation des variables 1585
méthode de variation de la constante 1585
méthode des perturbations 1585
méthode du facteur intégrant 1585
méthode du polynome caractéristique 1585
méthode matricielle 1585
méthode spectrale 1585
méthodes numériques 1586
séries de puissance 1586
solution avancée 1589
solution retardée 1589
équations incompatibles 1903
équidispersion de la de Poisson 676
équipotents 386
équiprobabilité 538
équiprobables 479
étude R et R 1291
étude expérimentale 1030
étude gage R&R 1045
étude gage croisée 1045
étude gage imbriquée 1045
étude prospective 1030
étude rétrospective 1030
études prospectives 55
études rétrospectives 55
événement 451
événement certain 451
événement impossible 451
événements élémentaires 479
événements conjoints 452
événements disjoints 452
événements incompatibles 452
événements indépendants 452
évolution biologique 458
à priori non informatif 885
1ère formule de Frenet 2838
3ème formule de Frenet 2840

En cours de traduction de l'anglais

A
a priori théorique ... 887
a-théorique ... 927
A.C.P. de rangs ... 1210
aanalyse de la variance ... 978
abduction ... 874
abscisse curviligne différentielle ... 2824
abscisses ... 2153
acyclique ... 2988
addition ... 296
addition vectorielle ... 1777
adjacent ... 2975
affixe ... 247
Agence européenne des médicaments 1080
algébre de Lie ... 1398
algébre vectorielle ... 1779
algorithme de Crout ... 1997
algèbre moderne ... 413
alternative ... 153
altitude ... 2588
amplification des termes ... 317
analyse aveugle ... 55
analyse combinatoire ... 515
analyse de fiabilité ... 1251
analyse de Fourier 2D ... 1743
analyse de l'historique des événements 1251
Analyse de la COvariance et de la VAriance ... 982
analyse de la survie ... 1254
analyse des systémes de mesure ... 1045
analyse des valeurs extrêmes ... 1192
analyse harmonique ... 1743
analyse normalisée de la variance ... 984
analyse par arbres probabilistes ... 481
analysis of variance ... 978
ANCOVA ... 982
angle ... 2537, 2557
angle aigu ... 2566
angle au sommet ... 2869
angle de fuite ... 2684
angle entre les vecteurs ... 1796
angle externe ... 2567
angle hyperbolique ... 2519
angle interne ... 2567
angle obtus ... 2566
angle orienté ... 2566
angle plan ... 2537, 2557, 2565
angle plat ... 2565
angle rectiligne ... 2537
angle rentrant ... 2558
angle saillant ... 2558
angle solide ... 2531
angle solide élémentaire ... 2532
angle vectoriel ... 2566
angles égaux ... 2559
angles adjacents ... 2558
angles alternes-internes ... 2561
angles complémentaires ... 2567
angles d'Euler ... 2630
angles directeurs ... 1789
angles droit ... 2566
angles isocèles ... 2869
angles opposés par le sommet ... 2572
angles perpendiculaires ... 2566
angles supplémentaires ... 2567
anneau ... 423
anneau commutatif ... 423
anneau commutatif unitaire ... 424
anneau euclidien ... 340
anneau factoriel ... 424
anneau intégralement clos ... 276
anneau intègre ... 424
anneau polynomial ... 1351
anneau unitaire ... 424
anomalie vraie ... 2764
ANOVA
  absence d'interaction ... 1004
  absence d'interactions locales ... 1006
  ANOVA á un facteur ... 981
  ANOVA á un facteur fixe avec répétitions ... 981
  ANOVA á une variable catégorielle fixe avec répétition ... 981
  ANOVA á une voie ... 981
  ANOVA hiérarchique à facteurs fixes 1044
  ANOVA imbriquée avec facteurs fixes 1044
  ANOVA mixes ... 981
  ANOVA à deux variables catégorielles fixes ... 1004
  carré Gréco-Latin ... 1059
  carré latin ... 1052
  deux facteurs localement en interaction 1012

En cours de traduction de l'anglais

deux facteurs localement significatifs 1010
en interaction 1004
facteur bloc 1017
facteur de blocage 1033
facteur de traitement 1017
hiérarchique multiple 1046
hiérarchique à deux facteurs 1046
plan complétement randomisé 1032
plan complétement randomisé par blocs 1034
plan d'expérience complétement randomisé 1004
plan par blocs balancés 1035
plan par blocs incomplets 1035
plan randomisé par blocs 1033
plan randomisé par blocs généralisé 1036
Type I 1042
Type II 1043
Type III 1043
ANOVA á deux facteurs 984
ANOVA multifactorielle 984
ANOVA multifactorielle à mesures répétées 1029
ANOVA Multivariée 1067
ANOVA à deux facteurs sans interactions 1017
antécédente 282
antécédents 401
antidérivée 1493
antilogie 143
apex 2933
apocenter 2764
apogée 2765
aporia 98
application 401
application bijective 404
application composée 406
application de cisaillement 2625
application injective 404
application linéaire 440, 1907
application multilinéaire 1936
application multilinéaire alternée 1936
application surjective 403
approximation Bonferroni 1086
approximation de Boole 1086
approximation de Dunn 1086
approximations affines 1678
approximations affines tangentes 1678
arêtes 2971
arêtes incidentes 2975
arêtes indépendantes 2975
arbre 2985
arbre couvrant 2985
arbre couvrant minimal 2985
arbre valué 2985
arc paramétré 2823
argument 249
argument d'ignorane 101
arguments 2145
arrangement 516
arrangement simple avec répétitions 516
arrangement simple sans répétitions 520
assertion 143
astuce de Feynman 1539
asymptote 2245
asymptote curviligne 2248
asymptote horizontale 2245
asymptote oblique 2246
asymptote verticale 2246
auto-corrélation 2290
automate 531
automorphe 2977
automorphisme 441
automorphisme de graphe 2995
automorphisme intérieur 1417
axe des y 2152
axe des abscisses 2152
axe des ordonnées 2152
axiomatique ZF-C 380
axiome 96
axiome d'Archimède 2612
axiome d'Archimède 333
axiome de Cantor 2612
axiome de Lobatchevsky 2647
axiome de Pasch 2611
axiome de récurrence 216
axiome Euclidien 2613
axiomes de Hilbert 2611
axiomes de Kolmogorov 476

B

barycentre 2614
base (triangle) 2578, 2869
base canonique 1789
base de dimension finie 1790

En cours de traduction de l'anglais

base du sondage . . . 1308
base naturelle . . . 2069
base orthonormale . . . 1800
base réciproque . . . 2039
base tensorielle associée . . . 2049
base vectorielle . . . 1788
bases . . . 2875
bases isomorphes . . . 1791
bi-implication . . . 153
bi-test unilatéral . . . 1082
biais d'insturement de mesure . . . 1320
biais d'un estimateur . . . 810
biais de l'interviewer . . . 1320
biais de non-réponse . . . 1321
biais de questionnaire . . . 1320
biangle . . . 2648
bias de réponse . . . 1321
binome de Newton . . . 1348
binomiale . . . 521
binôme . . . 322
bioéquivalence . . . 1080
bissectrice . . . 2572
bissectrice d'angle . . . 2588
bissectrice perpendiculaire . . . 2572, 2588
bivecteur . . . 2062
black swan . . . 838
blanchiment de l'ACP . . . 1210
borne inférieure . . . 390
borne supérieure . . . 390
bornes . . . 280
bornes d'intégration . . . 1482
bout . . . 2664
Box & Whiskers plots . . . 549
box plots . . . 549
branches . . . 2389

C

cone . . . 2933
coté . . . 2574
coté adjacent . . . 2491
coté opposé . . . 2491, 2574
cotés . . . 2557
calcul littéral . . . 279, 1333
calcul propositionnel . . . 142
calcul spinoriel . . . 2119
caractéristique . . . 446
caractéristique du logarithme . . . 2260
caractéristique nulle . . . 446
caractère qualitatif . . . 537
caractère quantitatif . . . 537
cardinal . . . 386
cardinal fini . . . 387
cardinal infini . . . 387
carré . . . 2864
carré du résidu standardisé . . . 1222
carrés pondérés des moyennes de Yates 1037
carte linéaire . . . 2370
catégorie . . . 3002
Cauchy-Goursat theorem . . . 2392
censure d'attente . . . 1254
censure de type II . . . 821
censure fixe . . . 1254
Censurées à droite . . . 820
Censurées à gauche . . . 820
centiles . . . 548
centre . . . 2884
centre d'inertie . . . 2615
centre de gravité . . . 2614, 2615
centre de projection . . . 2663
centre du cercle . . . 2600
centroïde . . . 2589, 2614
cercle . . . 2600, 2884
cercle de courbure . . . 2838
cercle osculateur . . . 2838
cercle riemannien . . . 1831, 2800
chaine (théorie des graphes) . . . 2982
champ aléatoire ponctuel de Poisson . 1302
champ conservatif . . . 1564
champ scalaire . . . 1561
champ tensoriel . . . 1854
changement d'échelle . . . 2622
changement de base . . . 1966
changement de coordonnées curvilignes 2069
chaîne de Markov . . . 530
chaîne de Markov absorbante . . . 534
chaîne de Markov homogène . . . 530
chaîne de Markov irréductible . . . 534
chemin . . . 2982
chemin élémentaire . . . 2983
chemin critique . . . 2986
chemin simple . . . 2982
chiffre . . . 207
cinq solides de Platon . . . 2904
circulation du champ vectoriel . . . 1563
cisaillement . . . 2625

En cours de traduction de l'anglais

classe d'équivalence 291
classe de congruence modulo 359
classe de différentiabilité 1479
classe médiane 547
clique 2981
coût d'un arbre valué 2985
coût d'un graphe valué 2985
codomaine 2185
coefficient binomial 521
coefficient d'échantillonnage de Pearson 610
coefficient d'asymétrie 624, 625
coefficient d'asymétrie de Fisher-Pearson 624
coefficient d'incertitude 1296
coefficient de corrélation intraclasse .. 616
coefficient de corrélation linéaire 605
coefficient de corrélation partiel 614
coefficient de corrélation de Matthews 1235
coefficient de corrélation tau-b de Kendall 1178
coefficient de détermination 610
coefficient de variation 578
coefficient de Yule 1247
coefficient directeur 1433
coefficient du monome 1351
coefficient multinomial 669
coefficient phi 1229
coefficient phi de Pearson 1231
coefficient V de Cramér 1229
coefficients 2195
coefficients binomiaux 1347
coefficients de Fourier 1707
coefficients du second membre 1902
coefficients systéme linéaire 1902
cofacteur 1946
comatrice 1931
combinaison 516
combinaison convexe 1785
combinaison linéaire 1785
combinaison linéaire triviale 1785
combinaison simple avec répétitions .. 523
combinaison simple sans répétitions .. 521
complément de Schur 1963
complément logique 147
complémentarité 397
complementary error function 786
comportement limite 1353
composante contravariante 2015
composante de connexion 2984
composante vectorielle 1785
composantes 1823
composantes contractées 2053
composantes contravariantes 2031
composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux 2046
composantes covariantes 1930, 2030
composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux 2046
composantes d'un tenseur 2048
composantes du produit tensoriel 2048
composantes mixtes 2047
composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux 2047
composantes strictes 2063
conclusion 142
conclusion of a sequent 174
concordance inter-juges 1241
condition
nécessaire 151
nécessaire et suffisante 151
seulement si 151
suffisante 151
condition de Schwarz 1454
condition nécessaire et suffisante 150
condition : si et seulement si 151
conditionnel 148
conditions initiales 1583
confusion 607
congruence 313, 2610
congruent 294, 2612
coniques analytiques 2745
conjecture 98
conjecture de corrélation gaussienne .. 707
conjugaison 243, 268
connecteur biconditionnel 150
connecteur d'implication logique 148
connecteur de conjonction 146
connecteur de disjonction 146
connecteur de négation 145
connecteur ET 146
connecteur logique d'équivalence 150
connecteur OU 146
connexion 2087
connexion affine 2077, 2087
connexion convergente 504

En cours de traduction de l'anglais

connexion de Levi-Civita 2079, 2084
connexion divergente 504
connexion série ou linéaire 503
consécutifs 215
conséquente 283
constante d'Euler-Mascheroni 1560
constante d'intégration 1492
constante de Hartley 1186
constante Gamma d'Euler 1560
constantes Universelles 280
constantes universelles 1333
contexte du séquent 174
continu à droite 2207
continu à gauche 2207
continuation analytique 2402
continuité (ε, δ) 2206
continuité epsilon-delta 2206
contraction des indices 2053
contradiction 143
contraste 1001
contrastes 996
contribution au Khi-deux d'indépendance 1222
convolution 759
convolution continue 2268
convolution discréte 2270
convolution matricielle 2274
coordonnées 1823
coordonnées curvilignes 1503, 2065
coordonnées curvilignes orthogonales 1826, 2071
coordonnées de Gauss 2652, 2848
coordonnées de Riemann 2652
coordonnées homogènes 2621, 2739
coplanaire 1785
corde d'un cercle 2602
corollaire 98
corps (ensemble) 427
corps commutatif 427
corps de scalaires 402
corrélation imparfaite 609
corrélation négative pure 608
corrélation positive pure 609
corrélation-croisée 2289
correction de Bessel 811
correction de Holm-Bonferroni 1090
correction de Holm–Šidák 1091
cosécante 2492
cosinus 2492
cosinus directeurs 1790
cotangente 2492
courbe 2645
courbe de niveau 2832
courbe elliptique 2200
courbe fermée 1561
courbe gauche 2823
courbe inscrite 2848
courbe pesante 2617
courbe réguliére 1561
courbe tracée 2848
courbe-coordonnées 2848
courbes de niveau 1842
courbes planes 2823
courbes planes fermées 2823
courbure
  courbure extrinsèque 2645, 2646
  courbure intrinsèque 2645, 2646
courbure négative 2645
courbure positive 2645
covariable 982
covariance 587
covariance de Pearson 592
covecteur 2025
crédence 476
critére de Leibniz 1760
critére de tensorialité 2052
critère de ratio de randomisation 1303
critères de Braford Hill 607
cube 2895
cubique déprimée 1371
cubo ïde 2895
cumulants 912
cycle 2982, 2988
cycle (permutation) 1422
cycle d'ordre k 1421
cycle eulérien 2989
cycle hamiltonien 2989
cycle simple 2982
cyclic group 423
cylindre 2929

D

d'échantillon biaisé 538
d'échantillon non-biaisé 538
d'égalité 286
d'espérance mathématique 540
décalage de phase 250, 2493

En cours de traduction de l'anglais

déciles 548
Déclaration de Münich sur les devoirs et les droits des journalistes 66
décomposition LU 1996
décomposition QR 2002
décomposition de Cholesky 2000
décomposition en fraction partielle . . 1526
décomposition en valeurs singuliéres . 1976
décomposition matricielle 1983
décomposition orthogonale 1995
décomposition spectrale 1981
décomposition spectrale en valeurs propres 1995
décroissance exponentielle 2259
définition epsilon-delta de limite 2202
définition par induction sur la hauteur d'un terme 169
définition récurrente 1629
démoninateur commun 317
démonstration 98, 165
dépendance conditionnelle 503
dépendance fonctionnelle 2184
déplacement 2556
dérivée 1433
dérivée covariante 2087, 2092
dérivée directionnelle 1845
dérivée extérieure 1449
dérivée intérieure 1464
dérivée partielle 1448
dérivée partielle totale 1456
dérivée seconde 1439
dérivée totale 1456
dérivation (univariée) en chaîne 1464
déterminant 1808, 1900, 1935, 1937
déterminant d'une matrice carrée 1940
déterminant de Gram 2029
déterminant fonctionnel 1505, 2029
déterminant partiel 1946
développement binomial 1349
déviation absolue de la médiane 580
déviation standard 577
déviation standard partielle inférieure . 588
degré 2569
degré d'un sommet 2977
degré du polynome 2195
degré de liberté (statistique) 763
demi-bissectrice 2572
demi-droite 2549
demi-droites opposées 2549
densité spectrale d'amplitude 1739
deuxiéme identité de Bianchi 2101
deuxième-courbe-coordonnée 2848
diagonale de Cantor 224
diagonalisation d'endomorphisme . . . 1976
diagramme commutatif 3004
diagramme de Gantt 2986
diagramme de noeud 3011, 3033
Diagramme de Poincaré 1620
diagramme de Schlegel 2709, 2907
Diagramme de Venn 376
diagramme des scores 1201
diagramme profileur 1005
diagramme quantile-quantile 718
diagramme sagittal 376
diamètre 2600
diamant 2883
différence 396
différence de risque 946
différence minimale cliniquement importante 938
différence symétrique 396
différenciation implicite 1474
différentiel 1435
différentielle totale 1447
différentielle totale inexacte 1452
différentielles partielles 1448
différents 286
digraphe 2986
dilemne du non rejet de l'hypothèse nulle 928
dimension infinie 1790
dimension topologique 2537
dimensions d'homothétie 2544
diminuende 304
diminuteur 304
direction de projection 2693
directrice 2813
directrice de la conique 2754
discontinuité de saut 2253
discontinuité infinie 2252
discontinuité oscillante 2253
discontinuité singuliére 2252
discontinuité supprimable 2251
discriminant des sections coniques . . . 2772
discriminant du polynome 1364
disjoint 393

En cours de traduction de l'anglais

disjonction . . . 153
dispersion de la distribution . . . 636
dispersion des écarts absolus . . . 545
distance . . . 2168, 2431
distance de haversine . . . 1835
distance de Mahalanobis . . . 1074
distance du grand cercle . . . 1831
distance géométrique . . . 2581
distance loxodromique . . . 1831
distance Mahalanobis . . . 2448
distance orthodromique . . . 1831
distribution T multivariée . . . 776
distribution T multivariée canonique . . 776
distribution bêta-binomiale distribution 881
distribution Binomiale . . . 647
distribution binomiale symétrique . . . 647
distribution bêta . . . 748
distribution conjointe . . . 479
distribution d'échantillonnage . . . 1092
distribution de Benford . . . 790
distribution de Bernoulli . . . 641
distribution de Cauchy . . . 744, 747
distribution de Laplace . . . 787
distribution de Pareto . . . 733
distribution de Pareto de type I . . . 737
distribution de Poisson . . . 674
distribution de Student . . . 770
distribution demi-Normale . . . 783
distribution demi-Normale standardisée 783
distribution du Khi-deux . . . 761
distribution empirique de Kolmogorov-Smirnov . . . 1100
distribution exponentielle . . . 739
distribution exponentielle double . . . 787
distribution générale de Cauchy . . . 747
distribution Gamma . . . 754
distribution Gauss-Laplace . . . 684
distribution gaussienne modifiée de maniére exponentielle . . . 794
distribution groupée . . . 547
distribution Hypergéométrique . . . 660
distribution log-normale . . . 721
distribution Multinomiale . . . 668
distribution Normale . . . 684
distribution normale repliée . . . 782
distribution triangulaire . . . 730
distribution uniforme continue . . . 724
distribution uniforme discrète . . . 638
distribution uniforme standard . . . 724
distributions antérieures de référence . . 885
distributions de Lévy alpha-stables . . . 699
divergence directionnelle . . . 1855
divergence en coordonnées cartésiennes 1859
divergence en coordonnées cylindriques 1862
divergence en coordonnées polaires . . 1860
divergence en coordonnées sphériques 1863
divergence modulaire . . . 1855
dividende . . . 313, 338
divine proportion . . . 1369
divise . . . 294
diviseur . . . 313, 338
diviseur nul bilatéral . . . 424
diviseur nul à droite . . . 424
diviseur nul à gauche . . . 424
diviseur propre . . . 336
division . . . 313
division entière . . . 338
division euclidienne . . . 314, 338
DMS de Fisher . . . 991
domaine d'existence . . . 2185
domaine de définition 280, 401, 1333, 2185
    domaine du type I . . . 1499
    domaine du type II . . . 1499
domaine fréquentiel . . . 1715
domaine naturel de définition . . . 2181
domaine temporel . . . 1715
données non-censurées . . . 819
double échantillonnage . . . 1313
double produit vectoriel . . . 1813, 2018
double test-T unilatéral (DTU) . . . 957
droite . . . 2169, 2536
droite oblique . . . 2582
droite vectorielle . . . 1786
droites confondues . . . 2547
droites distinctes . . . 2547
droites sécantes . . . 2547
durée de survie . . . 1253
durée de vie . . . 1253
décomposition spectrale . . . 1205
dérivée premiére . . . 1433
déviation extrême . . . 1184

En cours de traduction de l'anglais

E

ecart absolu moyen ... 579
effectif de l'échantillon pour estimation par loi Normale ... 839
effet de bloc ... 1044
effet Dunning-Kruger ... 82
effet est marginalement significatif ... 935
effet retour de flamme ... 115
ellipse ... 2887
ellipsoïde ... 2945
ellipsoïde de révolution ... 2946
empirisme ... 89
endomorphisme ... 441
ensemble ... 377
ensemble autosuccesseur ... 381
ensemble dénombrable ... 220, 387
ensemble de départ ... 401
ensemble de valeurs ... 1340
ensemble dense ... 231, 2431
ensemble des quaternions ... 259
ensemble des rationnels ... 223
ensemble quotient ... 291, 361
entrelac ... 3030
entrelacs associés ... 3031
enveloppe d'un polygone ... 2858
equivalence ... 153
ergodique ... 3002
erreur ... 1289
erreur absolue ... 1290
erreur d'informations de substitution ... 1320
erreur de conception de l'échantillon ... 1319
Erreur de deuxième espèce ... 935
erreur de l'interviewer ... 1320
erreur de Lagrange ... 1702
erreur de mesure ... 1320
erreur de première espèce ... 935
erreur de répétabilité ... 1025
erreur de sélection ... 1319
erreur de spécification de population ... 1319
erreur de trame ... 1319
erreur de Type I ... 935
erreur de type II ... 935
erreur relative ... 1290
erreur résiduelle ... 987, 1025
erreur systématique ... 1319
erreur systématique ... 1291
erreur type relative ... 602
erreur-standard ... 602
erreur-type ... 602
erreurs accidenteles ... 1289
erreurs aléatoires ... 1291
erreurs de non-échantillonnage ... 1319
erreurs de saisies ... 1321
erreurs de test significatifs répétés ... 968
erreurs systématiques ... 1289
error function ... 786
espérance ... 540
espérance conditionnelle ... 497
espérance variable continue ... 622
espace de Fourier associé ... 2039
espace de Hilbert ... 1807, 1821
espace de probabilité ... 2476
espace de Riemann ... 2654
espace des phases ... 1610
espace des spineurs ... 2124
espace des spineurs à deux composantes 2132
espace euclidien ... 1807
espace euclidien orienté ... 1807
espace Hilbertien ... 1807
espace métrique ... 2429
espace physique ... 2822
espace préhilbertien ... 1807
espace projectif ... 2659
espace propre ... 1971
espace topologique ... 2429
espace vectorialisé ... 1795
espace vectoriel ... 1784, 1793
espace vectoriel euclidien ... 1798
espace vectoriel hermitien ... 1821
espace vectoriel normé ... 1797
espace vectoriel polynomial ... 431
espace vectoriel proprement euclidien 1800
espaces vectoriels complexes ... 1819
essais de Bernoulli ... 641
Est ... 2090
estimateur asymptotiquement non biaisé 810
estimateur de Kaplan-Meier ... 1259
estimateur du maximum de vraisemblance biaisé ... 811
estimateur du maximum de vraisemblance non biaisé ... 811
estimateurs du maximum de vraisemblance 805
estimation antérieure conjuguée ... 879

En cours de traduction de l'anglais

estimation minimale du chi carré de qualité de l'ajustement 1133
estimation par densité du noyau 1124
estimatuer consistant 810
evidence levels 57
excentricité 2754, 2887
excès du coefficient d'asymétrie 625
exponentation 308
exponentielle d'une matrice 1606
exposant 308
expression analytique 2180
expression contingente 143
expression de forme fermée 2180
expression valide 143
extr émit és du diamètre 2600
extremum global 391
extremum local 1697

F

face 2971
facteur Z 684
facteur d'intégration 1593
facteur de Bayes 895
facteur de correction de population 664
facteur de correction sur population finie 833
facteur de décalage de phase 250
facteur de traitement 1033
facteur dominant 1351
facteurs du produit 307
factorielle 311, 518
factorisation 309
factorisation d'un polynome 1358
factorisation matricielle 1983
factoriser un polynome 1354
fait
fait ontologique 51
fait épistémologique 51
falsiable 92
famille génératrice 1786
famille liée (calcul vectoriel) 1787
famille libre (calcul vectoriel) 1787
Federal Drug Administration 1080
feuilles 2989
FG-squircle 2787
fictionalisme 100
figures planes 2556
fléche 1774
fléches équivalentes 1776
fléches colinéaires 1776
fléches consècutives 3003
flux conservatif 1859
foncteurs 166
fonction 401
fonction $\mathbb{C}$-linéaire 2370
fonction élémentaire 2190
fonction à intégrer 1492
fonction affine 1360, 2180, 2190
fonction algébrique 2197
fonction analytique 2379
fonction bivalente 2145
fonction bêta 748
fonction bêta incomplète 749
fonction bêta régularisée incomplète . . 752
fonction caractéristique (théorie des probabilités) 906
fonction complexe 2370
fonction composée 406, 2189
fonction concave 2255
fonction constante 2177, 2183
fonction continue 2206
fonction continue par morceau 2197
fonction convexe 2255
fonction croissante 2177, 2183
fonction cumulée 636
fonction d'état 1455
fonction d'erreur 2330
fonction d'erreur de Gauss 2330
fonction d'Heaviside 1551
fonction décroissante 2183
fonction de Bessel 2362
fonction de Bessel d'ordre n 1749
fonction de Bessel d'ordre zéro 1748
fonction de Bessel du second type . . . 1751
fonction de Bessel-Neumann du second type d'ordre nul 1753
fonction de choix 521
fonction de croissance 2259
fonction de densité 636
fonction de densité de probabilité 573, 621, 636
fonction de Dirac 1547
fonction de distribution 621
fonction de distribution cumulative . . . 573
fonction de Fisher 777
fonction de haversine 1834
fonction de Heaviside 2326

En cours de traduction de l'anglais

fonction de Laguerre 1395
fonction de masse 636
fonction de masse de de probabilité . . . 621
fonction de noyau de Rosenblatt 1125
fonction de poids 2366
Fonction de Prym 1557
fonction de queue 621
fonction de répartition 573, 621, 636
fonction de répartition empirique 574
fonction de score 822
fonction de survie 621
fonction de transfert 2341
fonction de type escalier 2156
fonction de vraisemblance 484
fonction delta 1547
fonction eta de Dirichlet 1667
fonction exponentielle naturelle 2266
fonction génératrice multivariée 1769
fonction génératrice ordinaire 1763
fonction gamma incompléte inférieure 757
fonction Gamma incompléte supérieure 1552
fonction Gamma régularisée incompléte 1556
fonction Gamma régularisée incompléte (inférieure) 1557
fonction holomorphe 1455
fonction holomorphique 2379
fonction homogéne 2257
fonction impaire 2187
fonction implicitement définie 1473
fonction indicatrice d'Euler 363
fonction linéaire 1360, 2190
fonction logarithme 2259
fonction logarithmique 2193
fonction méromorphe 2382
fonction monotone 2177, 2183
fonction noyau 1125
fonction périodique 2185, 2194
fonction paire 2186
fonction polynomiale 2195
fonction puissance 2190
fonction réciproque 405
fonction signe 325
fonction signum 325
fonction sinc normalisée 1747
fonction strictement croissante . 2177, 2183
fonction strictement décroissante 2177, 2184
fonction strictement monotone 2184
fonction unaire 2145
fonction uniforme 724
fonction univalente 2145
fonction valeur absolue 2191
fonction zeta alternée 1667
fonction zêta 1662
fonction zêta de Riemann 1663
fonctione bornée 391
fonctions complètes 2382
fonctions cyclométriques 2491
fonctions de Bessel 1748
fonctions en escalier 2198
fonctions euclidiennes de connexion affine 2079
fonctions exponentielle 2192
fonctions génératrices fonctionnelles . 1770
fonctions harmoniques 1876
fonctions méromorphes 2394
fonctions partielles 2848
fonctions radicales 2191
fonctions trigonométriques du cercle . 2491
forêts 2988
format large 2146
forme analytique 1361
forme augmentée de systéme linéaire 1905
forme bilinéaire symétrique positive . 1806
forme différentielle 1450
forme linéaire 441
forme point-pente 1477
forme quadratique définie positive . . . 1697
forme quadratique fondamentale 2654
formule bien formée 170
formule close 173
formule d'Al-Kashi 2509
formule d'Euler 249, 2907, 2972
formule d'Euler-Maclaurin 1657
formule de Bayes 484, 489
formule de Cauchy 2395
formule de Fibonacci de Binet 1767
formule de Héron 2867
formule de Laplace 1940
formule de Leibniz pour déterminants 1940
formule de Moivre 252
formule de Pascal 522
formule de Pythagore généralisée 2509
formule de Rodrigues 1389

En cours de traduction de l'anglais

formule de Simpson . . . 2505
formule des cosinus . . . 2526
formule des probabilités composées . . . 485
formule des probabilités totales . . . 489
formule des sinus . . . 2527
formule polyédrique . . . 2907
formules . . . 165
formules α-équivalentes . . . 173
formules atomiques . . . 170
formules d'addition trigonométriques 2505
formules de Carnot . . . 2504
formules de Moivre et Euler . . . 250
formules de réduction . . . 1518
formules de Simpson . . . 2507
formules générales de Viéte . . . 1429
formules inverses de Simpson . . . 2506
formules propositionnelles . . . 170
foyer . . . 2754
foyers . . . 2887
fréquence des classes . . . 540
fréquence fondamentale . . . 1378
fraction . . . 314
fraction équivalente . . . 316
fraction continue . . . 367
fraction impropre . . . 316
fraction infinie . . . 369
fractions propres . . . 316
fractions rationnelles . . . 2196
fraude scientifique . . . 53
frontaux . . . 2664
fréquence expérimentale . . . 1094
fréquence théorique . . . 1094

G

générateur . . . 2795
générateurs d'une famille de vecteurs 1786
géodésique . . . 2824
géodésiques . . . 2651
géométrie analytique . . . 2744
géométrie différentielle absolue . . . 2010
géométrie euclidienne . . . 2535
géométrie hyperbolique non-euclidienne 2647
géométrie parabolique . . . 2613
géométrie plane . . . 2535, 2556
géométrie spinorielle . . . 2119
gantihorlogique . . . 2409
gauss plane . . . 247
grad . . . 2571
gradient du champ scalaire . . . 1844
gradient en coordonnées cartésiennes 1847
gradient en coordonnées cylindriques 1850
gradient en coordonnées polaires . . . 1850
gradient en coordonnées sphériques . . 1851
graduation . . . 2151
grand cercle . . . 2800
grande déviation . . . 838
grandeurs de mome espéce . . . 2549
graph symétrique à l'origine . . . 2171
graph symétrique par rapport aux ordonnées . . . 2170
graphe . . . 401, 2969
graphe k-régulier . . . 2978
graphe auto-complémentaire . . . 2993
graphe biparti . . . 2994
graphe connecté . . . 2984
graphe connexe . . . 2984
graphe d'ordonnancement . . . 2986
graphe eulérien . . . 2989
graphe fortement connexe . . . 2980
graphe hamiltonien . . . 2989
graphe indépendant . . . 2981
graphe orienté . . . 3002
graphe orienté . . . 2982
graphe planaire . . . 2971
graphe régulier . . . 2978
graphe stable . . . 2981
graphe valué . . . 2985
graphes complémentaires . . . 2993
graphes isomorphes . . . 2994
graphique . . . 401, 2153
graphique plan . . . 2153
graphique transformé . . . 2177
graphiques . . . 2157
groupe . . . 418
groupe abélien . . . 418, 3009
groupe affine . . . 1403
groupe affine général . . . 1403
groupe alternatif d'ordre n . . . 1426
groupe cercle . . . 1405
groupe commutatif . . . 418, 3009
groupe cyclique . . . 418, 1400
Groupe de Lie . . . 1403
groupe de rotations spatiales . . . 2630
groupe des invariants . . . 1411
groupe des permutations d'ordre n . . . 1421
groupe des substitutions d'ordre n . . . 1421

En cours de traduction de l'anglais

groupe des symétries 1411
groupe des transformations affines 1403
groupe diédral d'ordre n 1412
groupe distingué 1417
groupe du noeud 3019
groupe fini 1401
groupe linéaire d'ordre n 1402
groupe orthogonal réel d'ordre n 1405
groupe spécial linéaire d'ordre n 1404
groupe spécial orthogonal réel d'ordre n 1405
groupe spécial unitaire d'ordre n 1406
groupe spécial des rotations spatiales 2132
groupe unitaire d'ordre n 1406
groupes continus 1398
groupes de Lie 1398
Gthéorème de Glivenko-Cantelli 632
géométrie descriptive 2660
géométrie elliptique non euclidienne 2647
géométrie projective 2659
géométries riemanniennes 2645

H

hélice 2829
HARKing 69
hasard 452
hauteur 2588
hauteur d'horizon 2665
hauteur d'un terme 168
hazard 1278
heptagone 2857
hexagone 2857
hexagone régulier 2879
homéomorphisme 2207
homologue 2556
homologues 2551
homomorphisme d'anneaux 437
homomorphisme d'espaces vectoriels 440
homomorphisme de groupe 439
homomorphisme de magma 437
homomorphisme de monoïde 437
homorophisme de corps 440
homothétie identité 2622
horizontaux 2663
hyper-volume 2535
hyperbole équilatérale 2748
hypercomplex 259
hypersurface 2833
hypersurface de niveau 2833
hypoténuse 2491, 2582, 2874
hypothése alternative 925
hypothése nulle 925
hypothèse 96
hypothèse homoscédastique 990

I

idéal 442
identité d'Euler 1663
identité de Bézout 341
identité de Bianchi algébrique 2101
identité de Bianchi différentielle 2101
identité de Ricci 2091
identité du coefficient binomial 523
identité matricielle de Woodbury 2007
image 2185
images 401
implication 153
implicitisation 2777
inégalité 213
inégalité de Cantelli 904
inégalité de Cauchy-Schwarz 1803
inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales 2359, 2367
inégalité de Jensen 568
inégalité de Minkowski 247, 1805
inégalité de Wirtinger 2964
inégalité triangulaire 1805, 2587
inégalité de Bernoulli 456
incertitude 1290
incertitude absolue 1290
incertitude de mesure 1289
incidente 2975
inclusion 392
inconnues du systéme 1902
indépendantes et identiquement distribuées 636
indépendants conditionnellement 503
independent one-sample t-test 849
independent two-sample T-test 990
index (économie) 1216
index de Pareto 733
index de spécificité 1216
indicateur ponctuel 536
indicateur robuste 1134
indice 319
indices muets 2015
inertie d'un nuage de points 1203
inférence 153

En cours de traduction de l'anglais

inférence bayésienne . . . 501
inférence bayésienne . . . 834, 877
inférence fréquentiste . . . 834
instrumentalisme . . . 100
intégrale convergente . . . 1576
intégrale curviligne . . . 1561, 1562
intégrale définie . . . 1483
intégrale de Cauchy . . . 2397
intégrale de chemin . . . 1561, 1562
intégrale de contour . . . 1561
intégrale de courbe . . . 1561
intégrale de Dirichlet . . . 1533
intégrale de Riemann . . . 1482
intégrale divergente . . . 1576
intégrale définie . . . 1482
intégrale elliptique
intégrale elliptique du second ordre 2888
intégrale elliptique complète de seconde espèce . . . 2658
intégrale impropre . . . 1573
intégrale indéfinie . . . 1483, 1490, 1492
intégrales elliptiques . . . 1577
intégration par parties . . . 1511
interprétation diachronique . . . 486
intersection . . . 393
intervalle . . . 281
intervalle censurée . . . 820
intervalle de confiance . . . 834, 875
intervalle de crédibilité . . . 875
intervalle de crédibilité bayésien . . . 834
intervalle de crédibilité . . . 892
intervalle de prédiction . . . 875
intervalle de tolérance . . . 875
intervalle de Wald . . . 863
intervalle fermé . . . 281, 1334
intervalle invariant . . . 2012
intervalle ouvert . . . 281, 1334
intervalle semi-ouvert . . . 1334
intégrale de Chebyshev . . . 749
intégrale de Gauss . . . 683
intégrale hypergéométrique d'Euler . . . 974
invariance d'échelle . . . 733
invariant par association . . . 3032
invariant par translation . . . 2621
invariants du noeud . . . 3025
inverse . . . 3004
inverse pour la multiplication . . . 308
inverses . . . 316
inversion . . . 1939
inversion de pôle . . . 258
involutif . . . 414
involutive . . . 245
inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . 901
inégalité de corrélation gaussienne . . . 707
inégalité de Markov . . . 901
irrotational . . . 2382
irrotationnel . . . 1865
iso-level curves . . . 2830
isobarycentre . . . 2615
isocline . . . 1846, 2830
isoligne . . . 2832
isolignes . . . 1842, 2163
isométrie . . . 2619
isomorphisme . . . 441
isoperimetric inequality . . . 2961
isoquant . . . 2163
isosurface . . . 2833
isotopies (théorie des noeuds) . . . 3017

J
jambes . . . 2582, 2869, 2875

K
kerr . . . 402
kit de détection de balivernes . . . 106
kit de détection de conneries . . . 106
kurtosis . . . 625

L
l'écart-type géométrique . . . 583
l'élément de ligne . . . 2823
l'élément neutre . . . 414
l'élément symétrique . . . 414
l'étendue de la distributionn . . . 636
l'abscisse curviligne . . . 2823
l'addition . . . 418
l'analyse par arbres d'erreurs . . . 481
l'arithmétique modulaire . . . 354
l'ensemble des classes d'équivalences . 291
l'ensemble des entiers relatifs . . . 220
l'espérance mathématique . . . 575
l'hypothèse du continu . . . 389
l'identité d'Einstein . . . 2116
l'indépendance conditionnelle . . . 503
l'ordre . . . 2610
l'étendue Studentisée . . . 1188

En cours de traduction de l'anglais

langage . . . 166
langage de la formule . . . 172
langage objet . . . 143
laplacien d'un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes . . . 1881
laplacien en coordonnées cartésiennes 1876
laplacien scalaire en coordonnées polaires 1878
Laplacien scalaire en coordonnées sphériques . . . 1880
laplacien vectoriel . . . 1881
laplacien vectoriel en coordonnées cylindriques . . . 1883
laplacien vectoriel en coordonnées sphériques . . . 1888
largeur à mi-hauteur . . . 694
law of sines . . . 2510
le paradoxe de Simpson . . . 947
lemma . . . 98
lemme d'Euclide . . . 350
lemme de König . . . 2983
leptokurtique . . . 625
libre de distributions . . . 1135
liens . . . 3004
lieu géométrique . . . 2579
ligne . . . 2535
ligne d'horizon . . . 2663
ligne de contour . . . 2163, 2832
ligne de coordonnées . . . 2064
ligne de noeuds . . . 2636
ligne de segment bissectrice . . . 2572
ligne de Terre . . . 2663
ligne droite . . . 2548
ligne semi-droite . . . 2536
limite . . . 2201
limite à droite . . . 2203
limite à gauche . . . 2202
linéarité à droite . . . 1806
linéarité à gauche . . . 1806
lissage de Laplace . . . 561
lissage par noyau . . . 1124
log-vraisemblance . . . 807
logarithme népérien . . . 2260
logarithme naturel . . . 2260
logique . . . 142, 186
logique de prédicats du premier ordre . 161
logique du premier ordre . . . 161
logique formelle . . . 142
logique informelle . . . 142
logique propositionnelle . . . 142
loi associative . . . 414
loi Binomiale . . . 647
loi bêta . . . 748
loi commutative . . . 414
loi de Benford . . . 790
loi de Bernoulli . . . 641
loi de Bessel . . . 700
loi de composition . . . 401
loi de composition externe . . . 402
loi de composition interne . . . 401
loi de croissance exponentielle . . . 2259
loi de De Morgan . . . 147
loi de Fisher-Snedecor . . . 777
loi de Gauss-Laplace . . . 684
loi de l'espérance totale . . . 497
loi de la logique propositionnelle . . . 143
loi de la variance totale . . . 499
loi de Lorentz . . . 744
loi de Pareto . . . 733
loi de Pascal . . . 642, 657
loi de Pearson . . . 761
loi de Poisson . . . 674
loi de propagation . . . 1296
loi de puissance (statistique) . . . 733
loi de Pólya . . . 657
loi de Student . . . 770
loi des événements rares . . . 674
loi distributive . . . 414
loi du Khi-deux . . . 761
loi du khi-deux non centrée . . . 767
loi exponentielle . . . 739
loi externe . . . 402
loi faible des grands nombres . . . 904
loi fractale . . . 733
loi Gamma . . . 754
loi Gamma généralisée . . . 760
loi Hypergéométrique . . . 660
loi interne . . . 401
loi log-normale . . . 721
loi Multinomiale . . . 668
loi Normale . . . 684
loi Normale centrée réduite . . . 684, 713
loi scalante (statistique) . . . 733
loi triangulaire . . . 730
loi uniforme . . . 724
loi uniforme discrète . . . 638

En cours de traduction de l'anglais

lois d'absorptions 395
lois d'idempotences 395
lois de De Morgan 399
lois de la pensée 186
lois sur les limites 2244
longueur de description minimale 874
longueur de l'arc 1572
longueur focale 2667
losange 2883
lune 2648
lune sphérique 2648

M

médiale 552
médiane 542, 2588
médiatrice 2588
médiatrice d'un triangle 2578
métalangage 143
méthode d'intégration de Laplace 1536
méthode d'interpolation linéaire de la médiane 546
méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt 2033
méthode d'orthogonalisation de Schmidt 2033
méthode de Fourier 1596
méthode de Frobenius 1753
méthode de réduction à l'unité 1782
méthode de substitution 1900
méthode scientifique 39
méthodes des tables de vérité 156
métrique 2431
métrique elliptique 2449
métrique espace dual 2023
métrique Riemannienne 2655
magma 415
magma associatif 415
magma associatif unitaire 416
magma commutatif 415
majorant 390
marge d'erreur 840
marge libre 2986
marge totale 2986
marges de colonne 1214
marges de ligne 1214
margin error 841
marginal function 636
matrice 1909
matrice adjointe 1926, 1931
matrice anti-symétrique 1929
matrice associée au systéme 1914
matrice augmentée associée au systéme 1914
matrice autoadjointe 1926
matrice carrée 1909, 1921
matrice centrée 1197
matrice creuse 1933
matrice d'adjacence 2997
matrice d'identité 1922
matrice d'information de Fisher 826
matrice d'unité 1922
matrice d'unités 1922
matrice définie semi-positive 1930
matrice définie-positive 1930
matrice de base standard 1911
matrice de blocs 1933
matrice de corrélation 612
matrice de covariance 594
matrice de distance 1932
Matrice de Gram 1987
matrice de la somme des carrés et des produits croisés 1203
matrice de passage 1929
matrice de quasi-corrélation 597
matrice de similarité par paires 1932
matrice de Toeplitz 1923
matrice de transformation 2623
matrice de transition 531, 1966
matrice de variances-covariances 594
matrice des cofacteurs 1946
matrice des données centrées normées 1199
matrice diagonale 1922
matrice du second membre du systéme linéaire 1914
matrice Gramienne 1927
matrice hermitienne 1926
matrice hermitique 1926
matrice Hessienne 1695
matrice idempotente 1927
matrice indéfinie 2775
matrice infinitésimale de rotation 2131
matrice inversible 1924
matrice jacobienne 1506
matrice nilpotente 1927
matrice non singuliére 1924
matrice orthogonale 1927
matrice réguliére 1924

En cours de traduction de l'anglais

matrice self-adjointe ... 1926
matrice semi-positive ... 1930
matrice singuliére ... 1924
matrice stochastique ... 531
matrice symétrique ... 1928
matrice transformation ... 2020
matrice transposée ... 1924
matrice triangulaire ... 1923
matrice triangulaire inférieure ... 1923
matrice triangulaire supérieure ... 1923
matrice unité ... 1910
matrice zéro ... 1910, 1921
matrice-colonne ... 1910
matrice-ligne ... 1910
matrices conjuguées ... 1945
Matrices définies positives ... 2775
Matrices dfinies semi-positives ... 2775
matrices de Pauli ... 2132
matrices réguliéres ... 1402
matrices semblables ... 1968
maximum global ... 391
maximum indépendant ... 2982
maximum à posteriori ... 806
mean square for error ... 994
mean square for treatments ... 994
measure theory ... 2463
membres de l'ensemble ... 377
mesokurtique ... 625
mesure angle ... 2565
mesure d'équilibre ... 533
mesure d'une grandeur ... 2551
mesure de dissimilarité ... 2431
mesure de probabilité ... 533
mesure deLebesgue ... 2466
mesure indirecte ... 1295
mesure invariante ... 533
mesure par défaut ... 2551
mesure par excés ... 2551
mesure stationnaire ... 533
mesures de complexité du noeud ... 3022
milieu du segment ... 2552
mineur ... 1946, 1948
minimum global ... 391
minorant ... 390
minute sexagésimale ... 2569
miracle ... 2480
mise à l'échelle uniforme ... 2624
modéle d'effets factoriels ... 985
modality ... 537
mode ... 542
module ... 243, 1796
modus ponens ... 157
Modèle de Cox stratifié ... 1287
modèle de hasard proportionnel de Cox 1271
modèle de régression de Cox ... 1271
modèle robuste ... 1134
modèle statistique ... 924
modélisation de la durée ... 1251
moment centré du deuxième ordre ... 577
moment d'ordre 1 ... 575
moments ... 912
monome ... 1351
monoïde ... 416
monoïde abélien ... 416
monoïde commutatif ... 416
monôme ... 322
morphisme de magma ... 437
morphismes ... 3004
mouvements de Reidemeister ... 3028
moyenne ... 538
moyenne élaguée ... 548
moyenne absolue des déviations à la médiane ... 580
moyenne arithmétique ... 539
moyenne arithmétique pondérée ... 555
moyenne conditionnelle itérée ... 497
moyenne empirique ... 807
moyenne fonctionnelle ... 559
moyenne géométrique ... 555
moyenne glissante ... 557
moyenne harmonique ... 554
moyenne intégrale ... 559
moyenne marginale ... 985
moyenne milieu ... 542
moyenne mobile ... 557
moyenne pondérée ... 540, 559
moyenne pondérée par les fréquences de classe : ... 540
moyenne quadratique ... 553
moyennes marginales ... 567
moyennes marginales estimées ... 567
multigraphe ... 2970
multiple commun ... 348
multiplicande ... 307
multiplicateur ... 307

En cours de traduction de l'anglais

multiplication . . . 307
multiplication élément par élément . . 1803
multiplication par un scalaire . . . 1781
mutuellement non-congrus . . . 362
méthode de Delphes . . . 86
méthode de Fisher . . . 943
méthode de la fenêtre de
Parzen–Rosenblatt . . . 1124
méthode de Wald . . . 859
méthode des moments . . . 818
méthodologie des sondages . . . 1306
métrique du Khi-deux . . . 1219

N

nécessaire et suffisante . . . 151
nécessité . . . 150
négation . . . 145, 147
nabla du champ scalaire . . . 1844
neutre à droite . . . 304
noeud . . . 3027
noeud de Conway . . . 3018
noeud de trèfle . . . 3013
noeud invariant . . . 3017
noeud trivial . . . 3027
noeuds isotopes . . . 3028
noeuds premiers . . . 3020
noeuds équivalents . . . 3029
nombre abstrait . . . 279, 1333
nombre algébrique de degré n . . . 275
nombre complexe
conjugué . . . 243
partie imaginaire . . . 242
partie réelle . . . 242
nombre complexes . . . 242
nombre composé . . . 218
nombre d'Euler . . . 2264
nombre d'or . . . 1369, 1642
nombre décimal . . . 208
nombre de composantes connexes . . . 3031
nombre de De Moivre . . . 1378, 1401
nombre entier . . . 213
nombre entier algébrique de degré n . . 275
nombre fractionnaire . . . 222
nombre imaginaire unitaire pur . . . 242
nombre irrationnel . . . 229
nombre mixte . . . 316
nombre normal . . . 278
nombre premier . . . 218, 338
nombre transcendant . . . 277
nombre transfini . . . 237
nombre triangulaire . . . 1645
nombre Univers . . . 278
nombres complexes . . . 241
nombres décimaux . . . 223
nombres de Bernoulli . . . 1649
nombres de Mersenne . . . 209
nombres entiers . . . 214
nombres imaginaires . . . 241
nombres impairs . . . 217
nombres pairs . . . 217
nombres parfaits . . . 217
nombres réels . . . 229
non égaux . . . 286
Nord . . . 2090
normalisation moyenne . . . 684
normalité asymptotique . . . 918
norme . . . 1796
norme L^2 . . . 2359
norme de Frobenius . . . 1601
notation en puissance . . . 308
notation stellaire . . . 413
noyau . . . 402
numéro Univers . . . 278
numéro Univers simple . . . 278

O

objects distincts . . . 515
objets . . . 3004
odèle semi-paramétrique à risques
proportionnels . . . 1271
opérateur divergence . . . 1858
opérateur gradient . . . 1844
opérateur intégral . . . 2278
opérateur principapl . . . 172
opérateurs rationnels . . . 284
opération associative . . . 297, 308
opération commutative . . . 297, 308
opération distributive . . . 309
opération non-associative . . . 303
opération non-commutative . . . 303
opposé . . . 297, 304
optimisation multidimensionnelle de
Newton-Raphson . . . 824
optique de Fourier . . . 1744
ordonnée à l'origine . . . 2169
ordonnées . . . 2153
ordre d'un groupe . . . 1411
ordre d'une équation différentielle . . . 1581

En cours de traduction de l'anglais

ordre du graphe . . . 2975
ordre du groupe . . . 418
ordre du groupe de permutations . . . 1416
ordre réciproque . . . 378
ordre strict . . . 378
Organisation mondiale de la santé . . . 1081
origine . . . 2151, 2549, 2823
origine d'un espace vectoriel . . . 1795
orocessus de Poisson . . . 1302
orthocentre . . . 2589, 2603
orthodrome . . . 2800
orthogonalité des fonctions . . . 2358
oscillation . . . 2207
Ouest . . . 2090

P

période . . . 2185
pole . . . 2320
poles . . . 2344
paire de Perko . . . 3014
paire ordonnée . . . 2970
palindrome . . . 210
para-science . . . 93
parabole . . . 2746, 2755
paraboloïde . . . 2950
paraboloïde elliptique . . . 2950
paraboloïde hyperbolique . . . 2950
paradoxe . . . 98
paradoxe de Russell . . . 138
parallélépipède . . . 2895
parallélogramme . . . 2877
parallèles . . . 2598
paramétres de Cayley-Klein . . . 2131
paramètre de l'ellipse . . . 2759
paramètre de la parabole . . . 2755
paramètre de la parabole osculatrice . . . 2827
paramètre focal de l'ellipse . . . 2759
paramètres focales . . . 2764
paramètre d'échelle . . . 755
paramètres de dispersion . . . 578
paramètres de position . . . 578
parcelle entière . . . 1044
partie aliquote . . . 2551
partie d'un ensemble . . . 378
partie littérale du monome . . . 1351
partie principale . . . 2414
partie réguliére . . . 2414
partition . . . 394, 1486
peer-review . . . 47
PEMDAS . . . 330
pentagone . . . 2857
pente . . . 2169
pente moyenne . . . 1433
pericenter . . . 2764
permutation . . . 515, 1939
permutation impaire . . . 1425
permutation paire . . . 1425
permutation simple avec répétitions . . . 519
permutation simple sans répétitions . . . 518
perspective . . . 2659, 2661
perspective centrale . . . 2661
perspective conique . . . 2661, 2662
perspective cylindrique . . . 2693
perspective linéaire . . . 2661
perspective parallèle . . . 2693
petit cercle . . . 2800
phénoméne de Gibbs . . . 1727
phi de Cramér . . . 1227, 1229
philosophie . . . 53
pi (π) . . . 2565
pic de Dirac . . . 1547
pied d'oblique . . . 2582
pied de la perpendiculaire . . . 2581
plan . . . 2555
plan z . . . 2340
plan équilibré . . . 984
plan balancé . . . 984
plan d'Argand-Cauchy . . . 242
plan d'enquête . . . 1310
plan d'échantillonnage . . . 1310
plan de Gauss . . . 242, 247
plan de l'horizon . . . 2663
plan du sol . . . 2663
plan du tableau . . . 2663
plan expérimental à mesures répétées . . . 1022
plan factoriel . . . 1201
plan imbriqué en deux étapes . . . 1044
plan randomisé par blocs . . . 1051
plan tangent . . . 1451
plan vectoriel . . . 1786
plane de Gauss-Argand . . . 242
plans par blocs incomplets . . . 1053
platikurtique . . . 625
plein rang . . . 1914
plus grand diviseur commun . . . 340
plus grand ou égal à . . . 288
plus grande descente . . . 1845

En cours de traduction de l'anglais

plus grande montée 1845
plus petit commun multiple 348
plus petit dénominateur commun 348
plus petite borne inférieure 390
plus petite borne supérieure 390
point 2536
point d'inflexion 1436
point d'intersection 2547
point de vue 2663
point fixe 1760
point massif 2614
point pondéré 2614
point régulier 2851
point singulier éliminable 2418
point tournant 1353, 1436
points d'un espace vectoriel 1793
points de base 236
points diamétralement opposés 2600
polyèdre 2894
polyèdre convexe 2904
polyèdre régulier 2904
polygone 2857
polygone concave 2858
polygone convexe 2859
polygone croisé 2858
polygone régulier 2862, 2894
polygraphe 2969
polynme de Maclaurin 1703
polynome algébrique univarié 1351
polynome bivarié 1354
polynome caractéristique 1589, 1970
polynome cyclotomique 1378
polynome d'Alexander 3019
polynome de Hermite 2364
polynome de Taylor 1703
polynome homogéne de degré n 1354
polynome invariant 1427
polynome multivarié 1354
polynome normalisé 1351
polynome quotient 1356
polynome résiduel 1356
polynome symétrique élémentaire . . . 1427
polynome trigonométrique 1377
polynome univarié 1354
polynomes équivalents 1360
polynomes de Bernoulli 1652
polynomes de Laguerre associés 1391
polynomes de Laguerre généralisés . . 1391
polynôme arithmétique 322
population 537, 1308
positivisme 94
postulat 96
postulat de la parallèle hyperbolique . 2647
pourcentage 233
pourmille 233
pré-ordre 290
préimage 285
prémisse majeure 157
prémisse mineure 157
premiére identité de Bianchi 2101
premiére identité de Christoffel 2084
premiére valeur singuliére 1985
première forme différentielle de Gauss 2850
première forme quadrique fondamentale 2850
premier théorème d'Euclide 350
premier vecteur singulier 1985
premiers entre eux 338
première identité de Christoffel 2083
première-courbe-coordonnée 2848
preuve 159
preuve par induction sur la hauteur d'un terme 168
preuve scientifique 89
primalité 218
primitie d'une fonction 1483
primitive 1490
principe 96
principe $K-\varepsilon$ 2244
principe d'explosion 196
principe de Curie 1778
principe de Duhamel 1598
principe de non-contradiction 144
principe de raison suffisante 197
principe du Pseudo-Scotus 196
principe du tiers exclu 144
principe spatial de Laplace 1303
priori empirique 887
priori faible 887
priori plat 887
priori stricte 887
priorité des opérateurs 326
prisme droit 2903
probababilités bayésiennes 484
probabilité 449, 2476

En cours de traduction de l'anglais

probabilité a posteriori 486
probabilité a priori 476, 484, 486
probabilité bayésienne 450
probabilité conditionnelle 484
probabilité conjointe 479
probabilité déductive 449
probabilité de transition 531
probabilité disjointe 476
probabilité floue 450
probabilité fréquentiste 450
probabilité implicite 506
probabilité inductive 449
probabilité jointe 479
probabilité marginale 476
probabilité à posteriori 484
probléme aux valeurs initiales 1583
problème 96
problème de Behrens-Fisher 996
procédé diagonal de Cantor 231
processus de Markov 530
processus de Poisson spatial homogène 1302
processus stochastique 530
processus stochastique à temps discret 530
processus stochastiques 449
processus à temps discret et à espace discret 530
produit 307
produit cartésien 389, 397
produit de Kronecker 2045
produit ensembliste 397
produit extérieur 1987, 2062
produit hermitien 1820
produit interne 1806
produit matriciel 1908, 1919
produit mixte 1815
produit scalaire 1798, 1820
produit scalaire L^2 2358
produit scalaire (matriciel) de Frobenius 1601
produit scalaire canonique 1802, 1817
produit scalaire fonctionnel 2358
produit scalaire vectoriel 1781
produit spinoriel 2133
produit tensoriel 2044
produit vectoriel 1779, 1809
profil marginal des lignes 1215
profondeur 2668
projection affine 2693
projection authalique 2724
projection azimutale normale 2709
projection cabinet 2701
projection canonique 293
projection cavalière 2701
projection conique 2662
projection cylindrique 2718
projection cylindrique normale 2718
projection cylindrique à surface équivalente de Lambert 2723
projection de Mercator 2719
projection de Mollweide 2726
projection de Peter 2723
projection isométrique 2693
projection orthogonale 2581, 2693
projection orthogonale parallèle 2703
projection orthogonale vectorielle ... 1799
projection orthographique 2703
projection parallèle orthogonale 2668
projection parallèle orthographique .. 2668
projection perspective 2662
projection stéréographique 2121
projection stŕographique 2709
projection équivalente de Lambert ... 2723
projections affines 2693
proposition 144
propositions indécidables 138
proprement Riemannien 2655
propriété archimédienne 333
provuable 174
prédicat 141
prémisses 142
pseudo-linear solution 1907
pseudo-science 93
pseudo-solution 1907
pseudo-vecteur 1778
pseudomédiane 553
puissance 308
puissance d'un test 952
puissance du continu 231, 388
puissance du test 935
pyramide 2901
pyramide carrée régulière 2901
pyramide droite 2901
pyramide triangulaire 2909
pyramides obliques 2901
périgée 2765

En cours de traduction de l'anglais

Q
q-q plot . . . 718
quadrants . . . 2155
quadrilatère . . . 2857
quadrilatère équilatéral . . . 2883
quadrique représentative du tenseur symétrique . . . 2059
quadriques . . . 2745
quantificateur universel . . . 161
quantificateurs . . . 161
quantiles . . . 548
quartiles . . . 548
quaternion . . . 259
quotient . . . 313, 338
quotient d'accroissement . . . 2186
quotient de différence de Newton . . . 1434

R
réalisme . . . 100
réciproques . . . 316
réduction d'endomorphisme . . . 1976
réduction des endomorphismes . . . 1606
référentiel localement inertiel . . . 2101
réflexion . . . 2639
réfutable . . . 92
région de convergence . . . 2318
région extérieure . . . 2601
région intérieure . . . 2601
régle de Bernoulli . . . 1444
régle de convergence de Cauchy . . . 1759
régle de Cramer . . . 1955
régle de dérivation en chaine . . . 1464
régle de différentiation de Leibniz pour le produit . . . 1461
régle de Grassmann . . . 1813, 2018
régle de L'Hopital . . . 1444
régle de Leibniz . . . 1760
régle de puissance en chaine . . . 1464
régle de Sarrus . . . 1942
régle de trois . . . 1782
régle des rapports et proportions . . . 1782
régle du produit . . . 1460
régle du quotient . . . 1463
régle en chaine multivariée . . . 1465
régle intégrale de Leibniz . . . 1539
régles des signes . . . 326
Réseaux bayésiens . . . 501
réseaux bayésiens naifs . . . 501
résidu . . . 354
résidu Lagrange . . . 1702
racine n-ème . . . 319
racine carrée . . . 319
racine certaine . . . 1371
racine d'un polynome . . . 1354
racine double . . . 1364
racine primitive n-ème de l'unité . . . 1378
radian . . . 2569
radical . . . 319
radicande . . . 319
radicaux . . . 1361
raison d'une suite arithématique . . . 1631
randomized block design . . . 1018
rang . . . 1144
rang d'une famille . . . 1792
rang d'une famille finie . . . 1911
rang d'une matrice . . . 1911
rang déficient . . . 1914
rapport simple et direct . . . 1782
rapport simple et inverse . . . 1783
rapporteur d'angles . . . 2557
rasoir d'Ockham . . . 874
ratio commun . . . 1634
ratio de hasard . . . 1274
rayon . . . 2600
rayon de convergence . . . 1681, 1758
rayon de courbure . . . 2837
rayon de torsion . . . 2840
recensement . . . 1308
rectangle . . . 2862
relation . . . 285
relation antisymétrique . . . 289
relation binaire . . . 285, 377
relation connexe . . . 290
relation convergente . . . 503
relation d'équivalence . . . 290
relation d'ordre . . . 288, 290
relation d'ordre stricte . . . 290
relation d'ordre total . . . 290
relation de Chasles . . . 1496, 1794
relation de comparaison . . . 285
relation de Greenwood . . . 1261
relation de Huyghens . . . 583
relation de Parseval . . . 2307
relation de Sherman-Morrison . . . 2008
relation des sinus . . . 2527
relation divergente . . . 503
relation fonctionnelle . . . 285

En cours de traduction de l'anglais

relation fondamentale 2526
relation réflexive 289, 377
relation symétrique 289, 377
relation transitive 290
relations d'ordre 378
relations de comparaisons 378
relations de Viéte 1364
relations littérales 279
relativement premiers|hyperpage 347
relevance 938
repére naturel 2069
repère de Frenet 2837
repère de Frenet-Serret 2840
représentant de cette classe 361
représentant de la classe 293, 1776
représentation de Rodrigues du polynome de Laguerre associé 1394
représentations planaires 2152
représentation en fréquences conjointes 1214
reste 313, 338
reste de Lagrange 1702
retournement 2556
rhomboèdre 2895
risque *beta* 935
risque de deuxième espèce 934
risque de perte à la baisse 588
rond 406
rotation 2627
rotation de symétrie centrale 2627
rotation identité 2627
rotation impropre 1974
rotation propre 1974
rotationnel 1864
rotationnel en coordonnées cylindriques 1873
règle de Sturges 541
règle des exposants zéro 318
règle des parties 575
règle en chaîne 494
règle produit 485
règles d'inférence 157
règles dérivées 175
régression vers la moyenne 905
rémission 1253
résidu de Pearson 1095
résiduel de Pearson 1094

S
sécante 2492
séquence définie par récurrence 1629
séquence disjonctive 278
séquence exponentielle 1683
séquence logique 1642
séquence non ordonnée 515
séquence ordonnée 515
séquent 174
série alternée 1760
série binomiale 1348
série convergente 1643
série de Grandi 1672
série de Laurent à puissances positives 2397
série de Maclaurin 1678, 1703
série de Maclaurin limitée 1678
série de Taylor 1703
série de Taylor limitée 1678
série divergente 1643
série harmonique 1644
série télescopique 1671
série trigonométrique 1707
séries de Bessel 1748
séries de Dirichlet 1663
séries de Gauss 1645
sample average 539
scalaire de Ricci 2103
scalaire de Riemann 2103
scalar 207
schéma de Falk 1919
schéma sagittal 376
science 93
science de l'ingénieur 93
science dure 91
science exacte 91
science molle 93
science pure 91
sciences déductives 93
sciences occultes 101
sciences phénoménologiques 93
scientifique 93
scientisme 94
second de lemme Borel–Cantelli 455
seconde formule de Frenet 2840
seconde sexagésimale 2569
segment 2536, 2549
semi-interval 281

En cours de traduction de l'anglais

semi-intervalle 281
semivariance 588
sesquilinéarité 1821
signature d'une matrice 1939
signature de l'espace vectoriel 2023
signification pratique 938
signification scientifique 938
similitude directe 257
similitude linéaire directe 258
similitude linéaire rétrograde 257
similitude rétrograde 258
singleton 381
singularité 98, 316, 2246, 2394
singularité apparente 2418
singularité essentielle 2418
singularités 2382
singularités isolées 2418
sinus 2492
sinus cardinal 2500
skewness 624
soleil de minuit 2738
solide de révolution 2927
solution du systéme linéaire 1903
solution du systéme vectoriel 1903
solution générale de l'équation homogéne 1589
solution homogéne 1584
solution matricielle principale 1618
solution polynomiale étrangére 1367
solution pseudo-linéaire 1907
solutions indépendantes 1612
somme de Cesàro 1672
somme de Darboux inférieure 1483
somme de Darboux supérieure 1484
somme de deux segments 2550
somme de la série 1643
somme de Riemann 1486
somme des carrés des écarts à la moyenne 582
somme des carrés des erreurs à la moyenne 582
somme des carrés totale 582
somme des carrés des écarts des résidus 987
somme des carrés des écarts entre échantillons 986
somme des carrés des écarts totaux 986
somme directe de sous-espaces 1792
somme logique 153
somme partielle 1643
sommet 2557, 2574, 2869, 2894, 2901, 2933
sommets 2971
sommets isolés 2977
sommets suspendus 2977
sondage 1308
sophisme du procureur 476
sophisme informel 148
sophisms 98
sous-échantillonnage 1314
sous-anneau 426
sous-ensemble 378
sous-ensemble associé 144
sous-espace complémentaire 1792
sous-espace supplémentaire 1792
sous-espace vectoriel 431, 1786
sous-facteurs 1044
sous-formula 171
sous-graphe 2978
sous-graphe couvrant 2979
sous-graphe induit 2978
sous-groupe distingué 1412
sous-parcelles 1044
sous-variété 2457
soustraction 303
spectre 1971
spectre d'un endomorphisme 1969
spectre d'une matrice 1969
spectre de phase 1717
spectre de puissance 2289
spectre en fréquences 1717
sphéroïde 2946
sphéroïde aplati 2946
sphéroïde aplatie 2808
sphéroïde prolate 2946
sphère 2934
sphères de Dandelin 2770
sphérisation des données 1210
spineur unitaire 2124
spirale 2792
spirale d'Archimède 2792
spirale de Fibonacci 1640
split-plot à deux facteurs 1046
split-plots 1044
stéradian 2531
stabilité par la somme (statistique) 699

En cours de traduction de l'anglais

stable . . . 416
statistique bayésienne . . . 484
statistique bivariée . . . 592
statistique d'Anderson-Darling . . . 1112
statistique de Cramér-von Mises . . . 1112
statistique de rangs . . . 1184
statistique de Wald . . . 842
statistique de Wilcoxon . . . 1144
statistique descriptive . . . 535
statistique du T^2 de Hotelling . . . 1076
statistique du rapport de vraisemblance logarithmique . . . 1132
statistique fréquentielle . . . 535
statistique inférentielle . . . 535
statistique multivariée . . . 592
statistique univariée . . . 592
statistiques d'ordre . . . 1137
statistiques non paramétrique . . . 1135
strates . . . 1312
structure archimédiennes . . . 333
structure de produit tensoriel . . . 2048
structure spatiale totalement aléatoire 1302
substitution . . . 158
Sud . . . 2090
suffisance . . . 150
suite . . . 1629
suite bornée . . . 1630
suite constante . . . 1630
suite croissante . . . 1630
suite décroissante . . . 1630
suite de Cauchy . . . 1636
suite géométrique . . . 1634
suite harmonique . . . 1633
suite majorée . . . 1630
suite minorée . . . 1630
suite naturelle . . . 214
suite récurrente . . . 1640
Suites
  progression arithmétique . . . 1629
  progression géométrique . . . 1630
  progression harmonique . . . 1630
sum . . . 296
sum of squares between samples . . . 987
sum of squares between treatments . . . 987
sum of squares due to errors . . . 987
sum of squares within samples . . . 987
superposable . . . 2557, 2612
support . . . 636, 2823
support du noeud . . . 3027
Suréchantillonnage . . . 1314
surface . . . 2535, 2857
surface de niveau . . . 2833
surface de révolution . . . 2795
surface normale . . . 1780
surface plane . . . 2857
surface réglée . . . 2813
surface régulilère . . . 2851
surfaces de Riemann . . . 2390
syllogisme . . . 142
symétrie axiale . . . 2639
symétrie centrale . . . 2622
symétrie horizontale . . . 2556
symétrie verticale . . . 2556
symétrique par rapport aux abscisses . 2170
symétrique pour la division . . . 318
symbol
  supérieur ou égal à . . . 1340
symbole
  démontre . . . 174
  inférieur ou égal à . . . 1340
  plus grand ou égal à . . . 1340
  plus petit ou égal à . . . 1340
  strictement inférieur à . . . 1340
  strictement plus grand que . . . 1340
  strictement plus petit que . . . 1340
  thèse . . . 174
symbole d'antisymétrie . . . 2016
symbole de Kronecker . . . 2015
symbole de Schlàfli . . . 2904
symboles de Christoffel de deuxième espéce . . . 2079
symboles de constante . . . 166
symboles de fonctions . . . 166
symboles de relation . . . 166
systéme autonome . . . 1613
systéme d'équations . . . 1338
systéme de coordonnées . . . 1823, 2064
systéme de Cramer . . . 1902
systéme homogéne . . . 1902
systéme homogéne associé au systéme 1902
systéme inhomogéne . . . 1902
systéme linéaire . . . 1899, 1902
systéme planaire . . . 1613
systéme vulgaire . . . 2260
systémes équivalents . . . 1903

En cours de traduction de l'anglais

systémes de n équations à n inconnues 1901
systémes surdéterminés . . . 1904
système complet de résidus . . . 362
système décimal et positionnel . . . 208
système de couverture . . . 362
système positionnel . . . 208
système réduit de résidus . . . 363
sélection de caractéristiques du χ^2 . . . 1098
série de Laurent généralisée . . . 2414
série génératrice cumulante . . . 912
série génératrice de moments . . . 912

T

tétraèdre régulier . . . 2909
table de contingence en trois dimensions 1264
table de vérité . . . 145
table des variations . . . 2181
table disjonctive compléte . . . 2147
table longitudinale . . . 2146
table stratifiée générale $2 \times 2 \times n$ . . . 1264
tableau . . . 2662
tableau de Burt . . . 2148
tableau long format . . . 2145
tables croisées . . . 2146
tables pivots . . . 2146
taille d'effet . . . 962
taille d'un graphe . . . 2975
taille ou (longueur) d'une formule . . . 172
tangente . . . 1434, 2492
tautologie . . . 143
taux d'erreur de groupe . . . 1086, 1087
taux d'erreur par expérience . . . 1087
taux de croissance annuel composé . . . 556
taux de fausses découvertes . . . 1087
taux de hasard . . . 1271
techniques d'échantillonnage probabiliste 1312
techniques d'échantillonnage non probabiliste . . . 1311
tendance centrale . . . 538
tenseur adjoint . . . 2063
tenseur antisymétrique . . . 2060
tenseur cartésien . . . 2043
tenseur complétement symétrique . . . 2058
tenseur d'antisymétrie . . . 2016
tenseur d'Einstein . . . 2116
tenseur de l'espace Riemannien . . . 2099
tenseur de Levi-Civita . . . 2019
tenseur de Ricci . . . 2102
tenseur de Riemann-Christoffel . . . 2099
tenseur de torsion . . . 2098
tenseur fondamental . . . 2043
tenseur métrique . . . 2043
tenseur métrique contravariant . . . 2023
tenseur métrique covariant . . . 2021
tenseur partiellement antisymétrique . 2062
tenseur symétrique . . . 2057
tenseur totalement antisymétrique . . . 2061
tenseur totalement invariant . . . 2057
tenseurs . . . 2011, 2051
tenseurs d'ordre zéro . . . 2051
tension . . . 578
terme clos . . . 167
terme d'une matrice . . . 1909
terme d'une séquence . . . 1631
terme d'une suite géométrique . . . 1634
terme dominant . . . 1351
terme source . . . 1600
terme vectoriel . . . 1785
termes . . . 165
termes d'un polynome . . . 1351
termes de l'addition . . . 296
termes diagonaux de la matrice . . . 1909
termes du second ordre . . . 165
test A/B . . . 968
test A/B pour les moyennes . . . 968
Test F de Fisher . . . 928
test p de deux proportions . . . 864
test p à une proportion . . . 859
test T de la moyenne géométrique . . . 853
test U de Mann-Withney . . . 1155
test U de Wilcoxon . . . 1155
test Z bilatéral sur la différence de deux moyennes . . . 841
test Z de l'égalité de deux proportions non-groupées . . . 863
test Z de l'égalité de deux proportions 864
test Z de la moyenne géométrique . . . 853
test Z pour pour l'égalité de deux proportions groupées . . . 864
test Z à deux échantillons . . . 841
test Z à un échantillon . . . 840
test Z à une proportion . . . 859
test bilatéral . . . 928
test binomial exact (bilatŕal) . . . 855

En cours de traduction de l'anglais

test Cochran-Armitage pour la tendance 1248
test d'adéquation 925
test d'ajustement de Wilcoxon-Mann-Withney ... 1151
test d'ajustement du chi carré 1095
test d'hypothèse 925
test d'indépendance du Khi-deux 1220
test d'inversion de Wilcoxon 1155
test de Cochran-Mantel(-Haenszel) avec temps stratifié 1263
test de Cochran–Mantel–Haenszel ... 1263
test de conformité 925
test de convergence absolue 1758
test de Fisher 983
test de Fisher de différence la moins significative 991
test de Karl Pearson 1095
test de Kolmogorov-Smirnov pour 2 échantillons indépendants ... 1100
test de la derivée seconde 1698
test de la ligne verticale 2200
test de la médiane 868
test de la médiane 868
test de la médiane de Brown-Mood ... 868
test de la médiane de Mood 868
test de la médiane de Westenberg-Mood 868
test de la médiane de Wilcoxon 1160
test de la somme des rangs de Mann-Withney 1151
test de la somme des rangs de Wilcoxon 1141
test de la somme des rangs signés de Wilcoxon 1160, 1164
test de la somme des rangs signés de Wilcoxon pour deux échantillons appariés 1164
test de Leibniz 1760
test de Maclaurin–Cauchy 1756
test de Mantel-Cox 1263
test de McNemar 1245
test de Newman-keuls 1191
test de non-infériorité 958
test de non-supériorité 929
test de Poisson à 1 échantillon 870
test de probabilité combiné de Fisher ..943
test de proportions multi-strates 1263
test de QdA de Cramér–von Mises ...1121
test de qualité d'ajustement de Lilliefors 1100
test de qualité de l'ajustement du chi carré 1095
test de randomisation 1036
test de Student–Newman–Keuls 1191
test de Tukey de l'étendue 1190
test de vraisemblance maximale 1131
test de Wald 843
test de Wilcoxon-Mann-Withney 1151
test des différences de risque 864
test des proportions A/B 863
test DMS 991
test du G^2 1098
test du T carré de Hotelling 1073
test du chi carré de Pearson 1095
test du chi carré pour la tendance 1248
Test du Khi carré de Cochran-Mantel-Haenszel ...1263
test du Khi-deux(de la variance 928
test du rapport d'Alembert 1757
test du rapport de Cauchy 1757
test du rapport de vraisemblance maximale 1131
test du ratio 1757
test exact de Fisher 1235
test H de Kruskal-Wallis 1169
test logarithmique des ranges 1263
test non paramétrique du chi carré ... 1095
test omnibus 1073
test Q de Friedman 1173
test robuste 1134
test-T (de Student) bilatéral sur la différence de deux moyennes . 850
test-T de Student 928
test-T de Student pour échantillons appariés 852
test-T homoscédastique 990
test-T hétéroscédastique 991
test-T à 1 échantillon 849
test-T à deux échantillons 850
test-Z 927
test-Z de la moyenne à deux échantillons 928
testable 92
tests d'hypothèses multiple 1086
tests de non-infériorité 929

En cours de traduction de l'anglais

tests de rangs 1137
tests de Wald 1269
tests paramétriques 932
théoréme binomial 1348
théoréme binomial pour les exposants entiers négatifs 1687
théoréme d'Abel 1612
théoréme d'Abel-Ruffini 1426
théoréme d'Eckart-Young 1982
théoréme d'Euler pour fonctions homogénes 2257
théoréme d'expansion des cofacteurs . 1946
théoréme d'Ostrogradsky 1858
théoréme de convolution 2290
théoréme de décomposition en valeurs singuliéres 1986
théoréme de factorisation 1358
théoréme de Fourier 1713
théoréme de Fourier-Dirichlet 1713
théoréme de Gauss-Ostrogradsky 1858
théoréme de gendarmes 2214
théoréme de Girard 2529
théoréme de Green 1867
théoréme de Green-Riemann 1867
théoréme de Kelvin-Stokes 1868
théoréme de la divergence 1858
théoréme de la valeur moyenne 1442
théoréme de la valeur moyenne de Gauss 2396
théoréme de Parseval 1737
théoréme de Ricci 2091
théoréme de Rolle 1441
théoréme de Schwarz 1453
théoréme de Stokes 1865
théoréme de Taylor 1678
théoréme des accroissements fini généralisé 1444
théoréme des accroissements finis . . . 1444
théoréme des incréments finis 1442
théoréme du cosinus 2508
théoréme du gradient 1858
théoréme du gradient des intégrales curvilignes 1564
théoréme du point fixe de Banach 1761
théoréme du rotationnel 1867
théoréme du sandwich 2214
théoréme fondamental de l'analyse . . 1490
théoréme fondamental de la géométrie riemannienne 2084
théoréme fondamental des intégrales curvilignes 1564
théoréme fondamental du calcul intégral (et différentiel) 1490
théoréme intégral de Cauchy 2395
théoréme intégral de Cauchy généralisé 2397
théoréme spectral 1976, 1980
théorémes intégraux du premier ordre 1897
théorème angle-coté-angle 2576
théorème coté-coté-coté 2577
théorème d'Euclide
Géométrie 2597
théorème d'Euler-Descarte 2907
théorème d'inversion de Lagrange . . . 1705
théorème de Descartes-Euler 2972
théorème de l'angle central 2606
théorème de la somme des angles . . . 2574
théorème de Pythagore 2591
théorème de Thalès 2591
théorème de Thalès pour le cercle . . . 2605
théorème de Viviani 2873
théorie 98
théorie de la stabilité 1613
théorie des catégories 3002
théorie des ensembles 377
théorie des noeuds 3006
théorie des tresses et entrelacs 3006
théorie naïve des ensembles 383
théorie prédictive 53
théorie scientifique 89
théorème 98
théorème binomial 648
théorème de Bézout 341
théorème de Bayes 489
théorème de König-Huyghens 583
théorème de la division euclidienne . . . 338
théorème de translation de Steiner 583
théorème des probabilités totales 489
théorème fondamental de la statistique 632
théroème du cercle circonscrit 2603
théorie de la fiabilité 1251
théorie des valeurs extrêmes 1192
théorème central limite 918
théorème central limite de Moivre-Laplace 923
théorème de Cauchy 2392

En cours de traduction de l'anglais

théorème de Cauchy-Riemann 2380
théorème de Cochran 845
théorème de Fisher-Cochran 845
théorème de Khintchine 904
théorème de Wilk 1132
théorème fondamental de Monte-Carlo 905
théorème limite de Poisson 674
théorème miracle 2480
théorème multinomial 670
tige mince 2931
tige rigide 2932
tore 2820, 2941
grand rayon 2941
petit rayon 2941
tore de révolution 2820
torseur 2098
torsion 2840
total sum of squares 987
tourbillonnaire 1865
trace d'une matrice 1926
transformée de Fourier 1739
transformée de Fourier continue 1739
transformée de Fourier discréte avant 2304
transformée de Fourier inverse 1740
transformée de fourier inverse en temps continu 1740
transformée de Hilbert 2355
transformée de Laplace 2336
transformée de Laplace inverse 2315
transformée de Laplace unilatérale . . . 2336
transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale en avant . 2338
transformée en $\mathcal{Z}$ unilatérale 2352
transformée inverse en $\mathcal{Z}$-transform . . 2340
transformation complète 2385
transformation contravariante 2070
transformation de Cayley 2374
transformation de cisaillement 2625
transformation de Fourier discrète . . . 2304
transformation de Laplace 2313
transformation de Laplace bilatérale . 2313
transformation de stabilisation de la variance 861
transformation du photomaton 1424
transformation homothétique 2622
transformation intégrale 1740
transformation Joukovski 2375
transformation linéaire 1907
transformations homographiques 2667
transformée de Hotelling 1195
transformée de Karhunen-Loève 1195
transformée de Laplace bilatérale 907
translation 2556, 2621
translation d'amplitude 257
translation vectorielle 2621
transport paralléle 2077, 2088
transposition 1422
transvection 2625
Trapèze 2875
trapèze isocèle 2876
trapèze scalène 2875
triangle 2574
triangle équilatéral 2582, 2871
triangle de Pascal 1347
triangle isocèle 2578
triangle isocèle 2869
triangle non spécifié 2865
triangle régulier 2582
triangle rectangle 2582, 2874
triangle rectangle-isocèle 2584
triangle scalène 2578
triangles égaux 2575
triangles homologues 2575
triangles isométriques 2575
triangulation 2511
tribu borélienne 2477
tricolorabilité 3017
trigonométrie circulaire 2486, 2494
trigonométrie elliptique 2486
trigonométrie hyperbolique 2486
trigonométrie sphérique 2486
trigonométrique 2409
trinome monique 1371
triple produit scalaire 1815
triplet pythagoricien 2591
trièdre de Frenet 2840
Trompette de Gabriel 2954
tudes observationelles 1030

U

uniform minimum variance unbiased . . 806
union 394
union disjointe 393
unit 213
unité 2551
unité simple 210
Univers (mathématiques) 377
univers des événements 451

En cours de traduction de l'anglais

univers des observables 451
upside/downside ratio 558

V

V de Cramér 1227
valeur absolue 323
valeur modale 547
valeur principale de Cauchy 2355
valeur propre 1969
valeurs de contrôle 1142
valeurs de traitement 1142
valeurs de vérité (Vrai, Faux) 144
valeurs principales 2059
valeurs singuliéres 1985
variété 2654
variable étudiée 586
variable aléatoire 2476
variable catégorielle 571
variable centrée réduite 585
variable continue 571
variable croissante 283
variable d'attribut 571
variable décroissante 283
variable dépendante 2184
variable de confusion 607, 613, 948
variable endogéne 2184
variable exogéne 2184
variable indépendante 2184
variable liée 172
variable libre 172
variable muette 172, 1483
variable nominale 571
variable ordinale 571
variable ordonnée 282
variable quantitative 537
variables 279, 1333
variables discrètes 571
variables individuelles 167
variables pivotales 586
variables propositionnelles 152
variables transformées 2145
variables à variations monotones 283
variance 577
variance combinée 988
variance composite 988
variance conditionelle itérée 499
variance des observations 986
variance empirique 809
variance entre échantillons 986
variance expliquée 846
variance globale 988
variance groupée 988
variance inter-laboratoires 996
variance inter-séries 989
variance interclasse 846
variance intra-laboratoire 996
variance résiduelle 987
variance totale 986
variante exacte de Mann-Whitney . . . 1154
variation non systématique 602
variation totale 582
variété 2427
vecteur 1776, 1910
vecteur bi-normal 2840
vecteur borné 1776
vecteur colonne 1910
vecteur cotangent 2025
vecteur covariant 2025
vecteur de courbure 2836
vecteur de Fresnel 253
vecteur de Pauli 2132
vecteur de score 824
vecteur directeur 2781
vecteur libre 1776
vecteur normal 1780, 2779
vecteur polaire 1779
vecteur propre 1969
vecteur solution 1610
vecteur stochastique 533
vecteur zéro 1776
vecteurs 2051
vecteurs égaux 1778
vecteurs de déplacement 1793
vecteurs de Frenet 2837
vecteurs de translation 1793
vecteurs linéairement dépendants 1787
vecteurs linéairement indépendants . . 1787
vecteurs opposés 1777
vecteurs orthonormaux direct 2836
vecteurs réciproques 2038
vecteurs singuliers 1985
vecteurs singuliers droits 1986
vecteurs singuliers gauches 1986
vector space 429
verticaux 2664
vie 463
Vitre de Dûrer 2663

En cours de traduction de l'anglais

Vitre de Dùrer 2662
voisin 2975
voisinage (analyse fonctionnelle) 1334
voisinage d'un sommet 2977
volume 2535, 2893
volume euclidien 2027
volume riemannien 2029
vraisemblance 486
vraisemblance de données censurées . . 819
vraisemblance partielle 1281
vraisemblance standardisée 879

W

Wronskien 1611

Z

zéro 208
zéro certain 1372
zéro d'un polynome univarié 1354
zéros 2344
zone nette signée 1481
zone sphérique 2729

En cours de traduction de l' anglais

En cours de traduction de l’ anglais

Opera Magistris

Éléments de Mathématiques Appliquées pour Ingénieurs

Le but de ce livre et de son PDF associé est de présenter aux personnes qui découvrent l'étude des Mathématiques Appliquées, les concepts de base et de le faire avec un certain niveau de rigueur (les démonstrations sont complètes ou au moins poussées au point où elles peuvent jugées l'être), de détails et de cohérence en ce qui concerne les conventions d'écriture et avec un maximum de pédagogie. Ce livre est également né du souhait de présenter quelques idées scientifiques et de comprendre comment ils affectent modestement notre style de vie, notre façon de penser, de travailler et leur impact sur notre écosystème et l'efficacité déraisonnable des mathématiques appliquées. En effet, les enjeux liés à la science prennent de plus en plus d'importance dans notre culture contemporaine et représentent un enjeu majeur en termes d'éthique, de citoyenneté et de développement.

Ce livre n'est pas destiné à être un roman à lire du début à la fin. Il est conçu comme un ouvrage de référence (après correction de toutes les erreurs et textes complétés ...) qui, lorsque de simples questions se posent, permet de trouver rapidement des réponses en utilisant la technologie informatique gratuitement. Ce livre ne peut pas (et ne prétend pas) remplacer une éducation scolaire formelle par un enseignant et de nombreux exercices pratiques. Il peut cependant être vu comme une référence de formules (avec des preuves) ou un complément théorique relativement bon à la préparation de divers examens.

Le point de vue qui est adopté dans ce livre est celui de l'ingénieur pragmatique, désireux d'étudier les mathématiques, la physique classique, l'économétrie, l'analyse numérique, la statistique, la mécanique relativiste, la physique quantique, les mathématiques sociales, l'informatique, la chimie, etc. sans perdre du temps dans un vocabulaire formel et extravagant et inutilisable dans l'industrie moderne. De ce point de vue, les concepts et méthodes présentés ne sont que quelques-uns des outils mathématiquo-physique typiques (minimum minimorum dans le domaine). L'expert spécialiste n'y trouvera probablement rien de nouveau et l'étudiant qui serait intéressé par une théorie particulière devrait savoir que chaque sujet est malheureusement beaucoup plus vaste que tout ce qui a été discuté ici jusqu'à présent... L'ambition n'est pas celle que nous pouvons avoir pour les étudiants d'un cours de mathématiques pour lequel l'acquisition d'outils est importante. Cela rend donc possible un style un peu formel où l'on peut donner des preuves moins complètes et se focaliser sur la compréhension intuitive des sujets présentés, afin de les visualiser et de les maîtriser.

Nous dédions ce livre à tous ceux pour qui chaque réponse est une question !

En cours de traduction de l'anglais

ISBN 978-2-8399-0932-7
9 782839 909327